



LUND UNIVERSITY

Elektromagnetisk vågutbredning

Kristensson, Gerhard

1999

[Link to publication](#)

Citation for published version (APA):

Kristensson, G. (1999). *Elektromagnetisk vågutbredning*. Studentlitteratur AB.

Total number of authors:

1

General rights

Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: <https://creativecommons.org/licenses/>

Take down policy

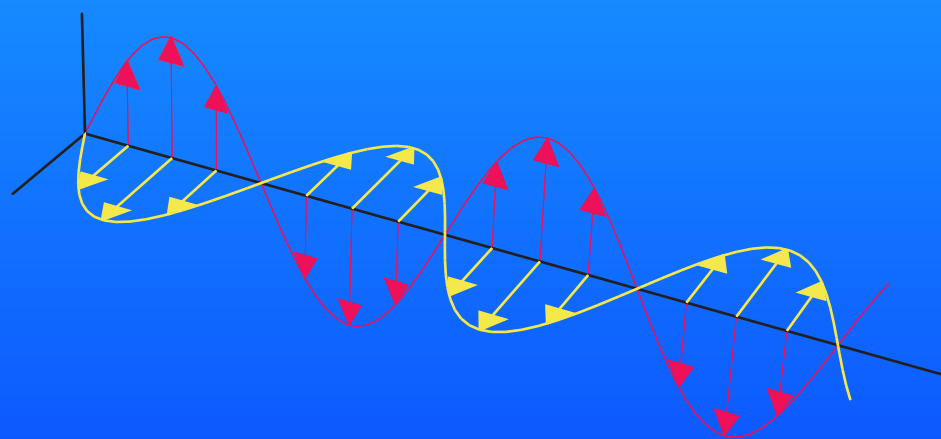
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117
221 00 Lund
+46 46-222 00 00

Gerhard Kristensson

*Elektromagnetisk
Vågutbredning*



Räkneregler med ∇ -operatorn

- (1) $\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi$
- (2) $\nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi$
- (3) $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a})$
- (4) $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = -\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + 2(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a})$
- (5) $\nabla \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \cdot \mathbf{a} + \nabla \cdot \mathbf{b}$
- (6) $\nabla \cdot (\varphi\mathbf{a}) = \varphi(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{a}$
- (7) $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$
- (8) $\nabla \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \times \mathbf{b}$
- (9) $\nabla \times (\varphi\mathbf{a}) = \varphi(\nabla \times \mathbf{a}) + (\nabla\varphi) \times \mathbf{a}$
- (10) $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$
- (11) $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + 2(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a})$
- (12) $\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi$
- (13) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2\mathbf{a}$
- (14) $\nabla \times (\nabla\varphi) = \mathbf{0}$
- (15) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$
- (16) $\nabla^2(\varphi\psi) = \varphi\nabla^2\psi + \psi\nabla^2\varphi + 2\nabla\varphi \cdot \nabla\psi$
- (17) $\nabla r = \hat{\mathbf{r}}$
- (18) $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$
- (19) $\nabla \times \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$
- (20) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$
- (21) $\nabla \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{2}{r}$
- (22) $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \text{ konstant vektor}$
- (23) $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{a}$
- (24) $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{r}(\mathbf{a} - \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{r}})) = \frac{\mathbf{a}_\perp}{r}$
- (25) $\nabla^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) = 2\nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{r} \cdot (\nabla^2\mathbf{a})$
- (26) $\nabla u(f) = (\nabla f) \frac{du}{df}$
- (27) $\nabla \cdot \mathbf{F}(f) = (\nabla f) \cdot \frac{d\mathbf{F}}{df}$
- (28) $\nabla \times \mathbf{F}(f) = (\nabla f) \times \frac{d\mathbf{F}}{df}$
- (29) $\nabla = \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla) - \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \nabla)$

Elektromagnetisk Vågutbredning

Gerhard Kristensson

Innehåll

Förord	vii
1 Maxwells fältekvationer	1
1.1 Grundläggande ekvationer	1
1.2 Randvillkor vid gränssytor	4
1.3 Energikonservering och Poyntings sats	9
Övningar till kapitel 1	11
Sammanfattning av kapitel 1	14
2 Konstitutiva relationer	15
2.1 Isotropa material med dispersion	16
2.1.1 Optisk respons	18
2.1.2 Ledningsförmåga	20
2.2 Exempel	23
2.2.1 Lorentzmodellen	23
2.2.2 Debyemodellen	27
2.3 Allmänna linjära material med dispersion	29
Övningar till kapitel 2	31
Sammanfattning av kapitel 2	34
3 Tidsharmoniska fält	35
3.1 Tidsharmoniska fält och Fouriertransform	35
3.2 Maxwells fältekvationer	37
3.3 Konstitutiva relationer	38
3.3.1 Klassificering	39
3.3.2 Exempel	41
3.4 Poyntings sats, aktiva, passiva och förlustfria material	43
3.5 Reciprocitet	47
3.6 Polarisationsellipsen	50
Övningar till kapitel 3	58
Sammanfattning av kapitel 3	63
4 Vågutbredning längs fix riktning	65
4.1 Fundamentalekvationen	65
4.1.1 Plana vågor	69

4.2	Isotropa material	71
4.2.1	Reflektion mot plan skiljeyta	72
4.2.2	Materialbestämning med hjälp av reflektion	75
4.2.3	Reflektion och transmission mot ändlig platta	77
4.3	Uniaxiala material	81
4.3.1	k -ytor	90
4.3.2	Reflektion mot plan skiljeyta	95
4.4	Gyrotropa material	98
4.4.1	Vågutbredning längs speciella riktningar	102
4.4.2	Faradayrotation	107
4.5	Bi-isotropa material	112
4.5.1	Optisk aktivitet	114
4.5.2	Reflektion mot plan skiljeyta	116
	Övningar till kapitel 4	119
	Sammanfattning av kapitel 4	123
5	Vågutbredning i flera dimensioner	127
5.1	Maxwells fältekvationer	127
5.2	Isotropa material	129
5.2.1	Fältlösningar	129
5.2.2	Reflektion mot plan skiljeyta	134
5.2.3	Brewster vinklar	139
5.2.4	Reflektion och transmission mot ändlig platta	140
5.3	Par-axiala approximationen	144
	Övningar till kapitel 5	149
	Sammanfattning av kapitel 5	151
6	Vågutbredning i inhomogena material	153
6.1	Grundekvationer	153
6.2	Våguppdelning	154
6.3	Riccatis ekvation för reflektionskoefficienten	156
6.4	Ekvation för transmissionskoefficienten	161
6.5	Propagatorer	162
	Övningar till kapitel 6	165
	Sammanfattning av kapitel 6	166
A	Besselfunktioner	167
B	Vektorer och linjära transformationer	171
B.1	Vektorer	171
B.2	Linjära vektortransformationer, matriser och dyader	172
B.3	Rotation av koordinatsystem	176
C	Lösning av Volterras integralekvation av andra slaget	181
D	Riccatis differentialekvation	183

E	Enheter och konstanter	185
F	Beteckningar	187
	Litteraturförteckning	191
	Facit	195
	Sakregister	201

Förord

När man nämner ordet elektromagnetisk vågutbredning, får säkert många läsare radio och TV i tankarna.¹ Andra viktiga områden där elektromagnetisk vågutbredning spelar en stor roll finner vi inom radar,² och under senare år har flera nya intressanta tillämpningsområden tillkommit.

Vårt samhälle präglas av ett intensivt informationsutbyte, som till stor del sker med elektromagnetiska vågor. Satellit- och mobilradio-kommunikation, traditionella radio- och TV-länkar, transmissionsledningar och vågledare är exempel med stora tillämpningsområden. Men det är inte endast som informationsöverförare som elektromagnetisk vågutbredning har stor betydelse, utan mikrovågor används på flera andra sätt i industri och samhälle, t.ex. till uppvärmning.

Under senare år har alltfler nya komplexa material, t.ex. anisotropa och bi-isotropa material, börjat användas i elektrotekniska sammanhang. En förståelse av och kunskap om grundläggande elektromagnetiska vågutbredningsfenomen är naturligtvis väsentlig för en utveckling av de nya potentiella teknologier, som är knutna till dessa nya komplexa material.

Denna bok ger en introduktion till några av de viktigaste egenskaperna hos elektromagnetiska vågor och elektromagnetiska vågutbredningsfenomen i komplexa material. Betoningen ligger på grundläggande, centrala begrepp och en analys av det elektromagnetiska fältet och dess uppförande inuti homogena och inhomogena material av olika slag, t.ex. dielektriska material och anisotropa material såsom plasmor. De s.k. konstitutiva relationerna, som som utgör en modell av materialets elektromagnetiska egenskaper, är här väsentliga, och relativt stort utrymme ägnas åt olika användbara modeller.

För att tillgodogöra sig materialet i boken kvävs kunskaper i grundläggande elektromagnetisk fältteori, t.ex. grundkursen i elektromagnetisk fältteori vid våra tekniska högskolor. Maxwells fältekvationer förutsätts vara bekanta, liksom grundläggande vektoranalys och räkningar med nabla-operatorn ∇ .

I de två första kapitlen beskrivs allmänna tidsberoende elektromagnetiska fält och allmänna linjära modeller av material. När det gäller de Maxwellska fältekvationerna är betoningen lagd på en repetition av tidigare kurser i elektromagnetisk fältteori. Modellbeskrivningen av olika material, som genomförs i kapitel 2, är väsentligt mer omfattande än i de elementära kurserna. Linjära material klassificeras systematiskt.

¹Ordet radio kommer ursprungligen av latinets *radius*, vilket betyder stråle.

²Radar kommer av engelskans **R**adio **d**etection **a**nd **r**anging.

I kapitel 3 analyseras det specialfall av tidsberoende fält som tidsharmoniska fält utgör. Delar av detta material är en repetition av grundläggande analys av tidsharmoniska fält. En rad viktiga begrepp som aktiva, passiva och förlustfria material samt reciprocitet hos material definieras, liksom det elektromagnetiska fältets polarisationstillstånd.

Vågutbredning i homogena material längs en fix riktning behandlas i kapitel 4 och en mer allmän analys av flerdimensionell vågutbredning i homogena material ges i kapitel 5. Reflektion och transmission behandlas utförligt i dessa kapitel. I kapitel 4 behandlar vi även olika vågutbredningsfenomen i t.ex. uniaxiala, gyrotropa och biisotropa material. Boken avslutas med ett kapitel om reflektion och transmission i inhomogena material.

Övningar på de olika teoriavsnitten finns samlade i slutet av varje kapitel. Mer krävande övningar är markerade med en stjärna (*). Svar till övningarna finns samlade i ett facit i bokens slut. Varje kapitel avslutas med en sammanfattning av kapitlets viktigaste resultat.

Jag vill passa på att tacka mina medarbetare vid institutionen för teoretisk elektroteknik vid Lunds tekniska högskola för många konstruktiva förslag och uppmuntran. Min familj har också på ett väsentligt sätt stött tillkomsten av denna bok. Tack Mona-Lisa, Ester och Elias!

Dalby, december 2008

Gerhard Kristensson

Kapitel 1

Maxwells fältekvationer

Detta kapitel behandlar kortfattat de grundläggande ekvationerna för elektromagnetiska fält, samt de viktigaste konsekvenserna av dessa ekvationer. I ett första avsnitt repeteras Maxwells fältekvationer. Senare avsnitt behandlar randvillkor vid skiljeplan mellan två material samt energikonservering. Framställningen i detta kapitel gäller tidsberoende fält och är oberoende av materialens egenskaper. Lämpliga modeller som beskriver elektromagnetiska effekter i material presenteras i kapitel 2. Specialfallet tidsharmoniska fält kommer att behandlas senare i kapitel 3.

1.1 Grundläggande ekvationer

Maxwells fältekvationer utgör den grundläggande matematiska modellen för praktiskt taget all teoretisk behandling av makroskopiska elektromagnetiska fenomen. James Clerk Maxwell¹ publicerade sina berömda ekvationer 1864, och de tester som utförts sedan dess har givit god experimentell överensstämmelse med denna modell. Först när mikroskopiska fenomen skall förklaras måste en mer noggrann teori införas, där även kvantmekaniska effekter tas med. Det har således genom åren byggts upp ett överväldigande bevismaterial för ekvationernas giltighet i skilda tillämpningar.

Maxwells fältekvationer utgör en av grundstenarna vid behandlingen av makroskopiska elektromagnetiska vågutbredningsfenomen.² Ekvationerna lyder³

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.2)$$

Ekvation (1.1) (eller motsvarande integralformulering) brukar benämnas *Faradays*

¹James Clerk Maxwell (1831–1879), skotsk fysiker och matematiker.

²En utförlig härledning av dessa makroskopiska ekvationer utgående från en mikroskopisk formulering finns att hämta i G. Russakoff, "A Derivation of the Macroscopic Maxwell Equations," *Am. J. Phys.*, **38**(10), 1188–1195 (1970).

³Vi kommer genomgående att använda oss av SI-enheterna (MKSA) för de elektromagnetiska storheterna.

induktionslag,⁴ medan ekvation (1.2) ofta bär namnet *Ampères (generaliserade) lag*.⁵ De olika ingående vektorfälten i Maxwells fältekvationer är:⁶

$\mathbf{E}$	Elektrisk fältstyrka [V/m]
$\mathbf{H}$	Magnetisk fältstyrka [A/m]
$\mathbf{D}$	Elektrisk flödestäthet [As/m ²]
$\mathbf{B}$	Magnetisk flödestäthet [Vs/m ²]
$\mathbf{J}$	Strömtäthet [A/m ²]

Dessa fält är funktioner av rums- och tidskoordinaterna $(\mathbf{r}, t)$. Ofta skriver vi inte explicit ut dessa variabler för att beteckningarna skall bli enkla. Endast i de fall där missförstånd kan uppstå eller där vi särskilt vill påpeka funktionsberoendet skrivs variablerna ut.

Den elektriska fältstyrkan $\mathbf{E}$ och den magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}$ definieras genom kraftverkan på en laddad partikel genom *Lorentz-kraften*

$$\mathbf{F} = q \{ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \} \quad (1.3)$$

där q är partikelns laddning och $\mathbf{v}$ dess hastighet.

De fria laddningarna i materialet, t.ex. ledningselektroner, beskrivs av strömtätheten $\mathbf{J}$. De bundna laddningarnas bidrag, t.ex. från elektroner bundna till atomkärnan, är innefattade i den elektriska flödestätheten $\mathbf{D}$. Vi kommer senare i detta avsnitt och i kapitel 2 att återkomma till skillnaderna mellan elektrisk flödestäthet $\mathbf{D}$ och elektrisk fältstyrka $\mathbf{E}$, liksom till skillnaderna mellan magnetisk fältstyrka $\mathbf{H}$ och magnetisk flödestäthet $\mathbf{B}$.

Ett annat fundamentalt antagande i elläran är lagen om laddningens oförstörbarhet. Även denna naturlag är experimentellt mycket noggrant uttestad. Ett sätt att uttrycka laddningskonserveringen matematiskt är genom *laddningens kontinuitetsekvation*

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.4)$$

Här är ρ den till strömtätheten $\mathbf{J}$ hörande laddningstätheten (laddning/volymsenhet). ρ beskriver således de fria laddningarnas laddningstäthet.

Vanligen associeras ytterligare två ekvationer till Maxwells fältekvationer.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.6)$$

Ekvation (1.5) implicerar avsaknaden av magnetiska punktladdningar och innebär att det magnetiska flödet är bevarat. Ekvation (1.6) bär namnet *Gauss lag*. Dessa

⁴Michael Faraday (1791–1867), engelsk kemist och fysiker.

⁵André Marie Ampère (1775–1836), fransk fysiker.

⁶Dessa benämningar överensstämmer med Svensk standard [30]. Andra förekommande benämningar på $\mathbf{H}$ -fältet och $\mathbf{D}$ -fältet är amperevarvstäthet, respektive, elektriskt förskjutningsfält [14]. Man ser även ibland att $\mathbf{B}$ -fältet kallas magnetiskt fält. Vi kommer dock att använda de namn som föreslås av Svensk standard eller rätt och slätt skriva $\mathbf{E}$ -fält, $\mathbf{D}$ -fält, $\mathbf{B}$ -fält och $\mathbf{H}$ -fält.

båda ekvationer kan under lämpliga antaganden ses som en konsekvens av ekvationerna (1.1), (1.2) och (1.4). Tag nämligen divergensen av (1.1) och (1.2). Detta leder till

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

eftersom $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$. En växling av deriveringsordningen och användning av (1.4) ger

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho)}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

Från dessa ekvationer följer att

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= f_1 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} - \rho &= f_2\end{aligned}$$

där f_1 och f_2 är två funktioner som ej explicit beror på tiden t (kan däremot bero på rumskoordinaterna $\mathbf{r}$). Om fälten $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ och ρ antas vara identiskt noll före en fix ändlig tid, dvs

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{0} \\ \rho(\mathbf{r}, t) &= 0\end{aligned}$$

för $t < \tau$ för något ändligt τ , så följer av detta antagande ekvationerna (1.5) och (1.6). Rent statiska fält eller tidsharmoniska fält uppfyller naturligtvis inte detta antagande, eftersom det inte går att finna någon ändlig tid τ , före vilken alla fält är noll.⁷ För tidsberoende fält däremot ser vi att, under rimliga antaganden (att fält och laddningar i en punkt inte existerat i evighet), det räcker att använda ekvationerna (1.1), (1.2) och (1.4).

Maxwells fältekvationer (1.1) och (1.2) är tillsammans 6 stycken ekvationer—en för varje vektorkomponent. Om strömtätheten $\mathbf{J}$ är given, så innehåller Maxwells fältekvationer totalt 12 stycken obekanta (4 stycken vektorfält $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ och $\mathbf{H}$). Det ”fattas” således 6 stycken ekvationer för att få lika många ekvationer som obekanta. Dessa återstående 6 ekvationer kallas de *konstitutiva relationerna* och kommer att behandlas utförligare i kapitel 2.

I vakuum är den elektriska fältstyrkan $\mathbf{E}$ och den elektriska flödestätheten $\mathbf{D}$ parallella. Detsamma gäller för den magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}$ och den magnetiska fältstyrkan $\mathbf{H}$. Det gäller att

⁷Vi återkommer till härledningen av ekvationerna (1.5) och (1.6) för tidsharmoniska fält i kapitel 3 på sidan 38.

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

där ϵ_0 och μ_0 är vakuums dielektricitets- respektive permeabilitetskonstant. Numeriska värden på dessa konstanter är $\epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm och $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am $\approx 1.257 \cdot 10^{-6}$ Vs/Am.

Inuti ett material är skillnaden mellan den elektriska fältstyrkan $\mathbf{E}$ och den elektriska flödestätheten $\mathbf{D}$ och mellan den magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}$ och den magnetiska fältstyrkan $\mathbf{H}$ ett mått på växelverkan mellan laddningsbärarna i materialet och fälten. Ofta införs två nya vektorfält, polarisationen $\mathbf{P}$ och magnetiseringen $\mathbf{M}$, för att beskriva dessa skillnader mellan fälten. De definieras genom

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{H} \quad (1.8)$$

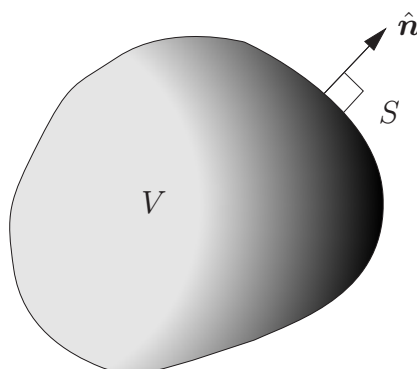
Vektorfältet $\mathbf{P}$ kan grovt sägas utgöra ett mått på hur mycket de bundna laddningarna är förskjutna i förhållande till sina neutrala opåverkade positioner. Detta inkluderar både *permanent* och *inducerad polarisation*. Det största bidraget till detta fält härrör från tyngdpunktsförskjutningar hos de positiva och negativa laddningsbärarna i materialet, men även andra, högre ordningens effekter bidrar. På liknande sätt utgör magnetiseringen $\mathbf{M}$ ett mått på de resulterande (bundna) strömmarna i materialet. Även detta fält kan vara av både *permanent* eller *inducerad* natur.

Att ange ett materials polarisation och magnetisering är ekvivalent med att ange de konstitutiva relationerna för materialet och innebär att ytterligare 6 ekvationer som karakteriserar materialet specificeras. I kapitel 2 kommer vi att analysera olika modeller för ett materials polarisation och magnetisering mera i detalj. I de återstående avsnitten i detta kapitel undersöker vi ytterligare konsekvenser av Maxwells fältekvationer, nämligen randvillkor och energikonservering.

1.2 Randvillkor vid gränssytor

I gränsskiktet mellan två material varierar de elektromagnetiska fälten diskontinuerligt på ett föreskrivet sätt, som är relaterat till materialens elektriska och magnetiska egenskaper på ömse sidor om gränssytan. Det sätt på vilket de varierar är en konsekvens av Maxwells fältekvationer och detta avsnitt innehåller en enkel härledning av dessa (rand-)villkor, som fälten måste uppfylla vid gränssytan. Endast ytor som är fixa i tiden (ej i rörelse) behandlas här.

Maxwells fältekvationer, såsom de presenterades i avsnitt 1.1, förutsätter att de elektromagnetiska fälten är differentierbara som funktion av rums- och tidsvariablerna. Vid en gränssyta mellan två material är, som redan påpekats, fälten i allmänhet diskontinuerliga som funktion av rumskoordinaterna. Därför behöver vi omformulera dessa ekvationer till en form med mer generell giltighet. Syftet med denna



Figur 1.1: Geometri för integration.

omskrivning är att få ekvationer som gäller även då fälten inte är differentierbara i alla punkter.

Låt V vara en godtycklig (enkelt sammanhängande) volym med randyta S och utåtriktad normal $\hat{n}$ i det område som vi behandlar, se figur 1.1.

Integrera Maxwells fältekvationer, (1.1)–(1.2) och (1.5)–(1.6), över volymen V .

$$\begin{aligned}\iiint_V \nabla \times \mathbf{E} \, dv &= - \iiint_V \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, dv \\ \iiint_V \nabla \times \mathbf{H} \, dv &= \iiint_V \mathbf{J} \, dv + \iiint_V \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \, dv \\ \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dv &= 0 \\ \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv &= \iiint_V \rho \, dv\end{aligned}$$

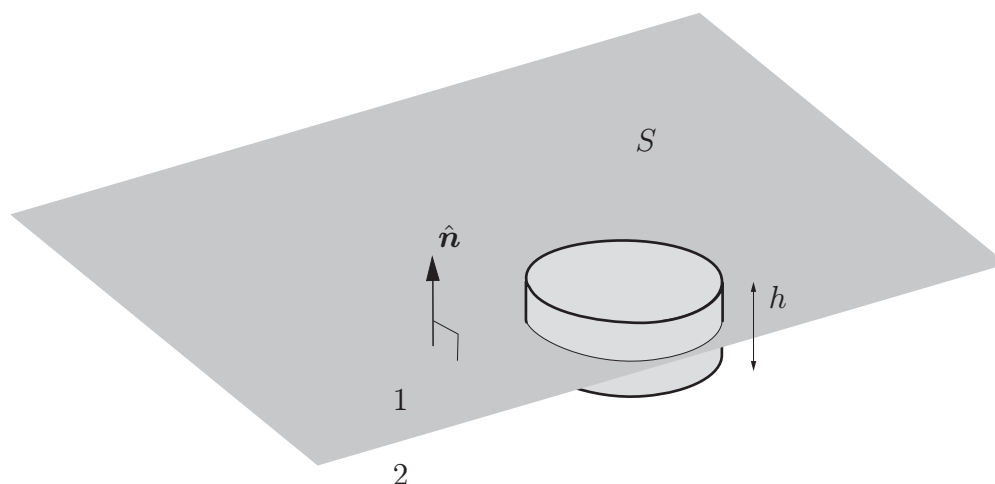
där dv är volymmåttet ($dv = dx \, dy \, dz$).

Följande två integrationssatser för vektorfält är nu lämpliga att använda:

$$\begin{aligned}\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} \, dS \\ \iiint_V \nabla \times \mathbf{A} \, dv &= \iint_S \hat{n} \times \mathbf{A} \, dS\end{aligned}$$

där $\mathbf{A}$ är ett godtyckligt (kontinuerligt deriverbart) vektorfält och dS ytan S :s ytelement. Det första sambandet brukar benämnas *divergenssatsen* eller *Gauss sats*⁸ och det andra en *till divergenssatsen analog sats* (se övning 1.1).

⁸Skilj på Gauss lag, (1.6), och Gauss sats.



Figur 1.2: Gränsyta mellan två olika material 1 och 2.

Resultatet blir efter en skiftning av derivering m.a.p. tiden t och integration (volymen V är fix i tiden och vi antar att fälten är tillräckligt reguljära).

$$\iint_S \hat{n} \times \mathbf{E} dS = -\frac{d}{dt} \iiint_V \mathbf{B} dv \quad (1.9)$$

$$\iint_S \hat{n} \times \mathbf{H} dS = \iiint_V \mathbf{J} dv + \frac{d}{dt} \iiint_V \mathbf{D} dv \quad (1.10)$$

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad (1.11)$$

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \rho dv \quad (1.12)$$

För ett område V där fälten $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ och $\mathbf{H}$ är kontinuerligt differentierbara är dessa integralformler helt ekvivalenta med differentialformuleringen i avsnitt 1.1. Denna ekvivalens har vi här visat åt ena hållet. Åt det andra hållet gör man räkningarna baklänges och utnyttjar att volymen V kan väljas godtycklig.

Integralformuleringen, (1.9)–(1.12), har emellertid den fördelen att de ingående fälten inte behöver vara differentierbara i rumsvariablerna för att ha en mening. I detta avseende är integralformuleringen mer allmän än differentialformuleringen i avsnitt 1.1. Fälten $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ och $\mathbf{H}$, som satisfierar ekvationerna (1.9)–(1.12) sägs vara svaga lösningar till Maxwells ekvationer, i de fall de inte är kontinuerligt differentierbara och differentialekvationerna i avsnitt 1.1 saknar mening.

Dessa integralformler tillämpas nu på en speciell volym V , som skär gränsytan mellan två olika material, se figur 1.2. Normalriktningen $\hat{n}$ är riktad från material 2 in i material 1. Vi antar att de elektromagnetiska fälten $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ och $\mathbf{H}$ och deras tidsderivator har ändliga värden intill gränsytan från båda håll. Dessa

gränsvärdena betecknas $\mathbf{E}_1$ respektive $\mathbf{E}_2$ på ömse sidor om gränssytan. Gränsvärdena på de övriga tre fälten betecknas på liknande sätt med index 1 eller 2. Strömtätheten $\mathbf{J}$ och laddningstätheten ρ kan däremot tillåtas anta oändliga värden, som fallet är vid metalliska ytor.⁹ Det visar sig lämpligt att införa en *ytströmtäthet* $\mathbf{J}_S$ och en *yt-laddningstäthet* ρ_S enligt följande gränsförfarande

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_S &= h\mathbf{J} \\ \rho_S &= h\rho\end{aligned}$$

där h är en tjocklek inom vilken laddningarna finns koncentrerade. Denna tjocklek, antar vi, går mot noll samtidigt som $\mathbf{J}$ och ρ blir oändligt stora på ett sådant sätt att $\mathbf{J}_S$ och ρ_S har väldefinierade ändliga värden i denna gränsprocess. Vid detta gränsförfarande antas ytströmtätheten $\mathbf{J}_S$ endast ha komponenter parallellt med gränssytan. Höjden på volymen V låter vi vara denna tjocklek h och arean på bas- respektive toppytan antas vara a , som är liten jämfört med fältens variation längs skiljeytan och ytans krökning.

Termerna $\frac{d}{dt} \iiint_V \mathbf{B} dv$ och $\frac{d}{dt} \iiint_V \mathbf{D} dv$ går båda mot noll då $h \rightarrow 0$, eftersom fälten $\mathbf{B}$ och $\mathbf{D}$ och deras tidsderivator antas vara ändliga vid gränssytan. Vidare gäller att alla bidrag från sidoytorna (area $\sim h$) i ytintegralerna i (1.9)–(1.12) går mot noll då $h \rightarrow 0$. Bidragen från toppytan (normal $\hat{\mathbf{n}}$) och basytan (normal $-\hat{\mathbf{n}}$) är proportionella mot arean a , om arean väljs tillräckligt liten och medelvärdessatsen för integraler används. Följande bidrag från topp- respektive basytan i ytintegralerna återstår efter gränsovergång $h \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}a[\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] &= \mathbf{0} \\ a[\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] &= ah\mathbf{J} = a\mathbf{J}_S \\ a[\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)] &= 0 \\ a[\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)] &= ah\rho = a\rho_S\end{aligned}$$

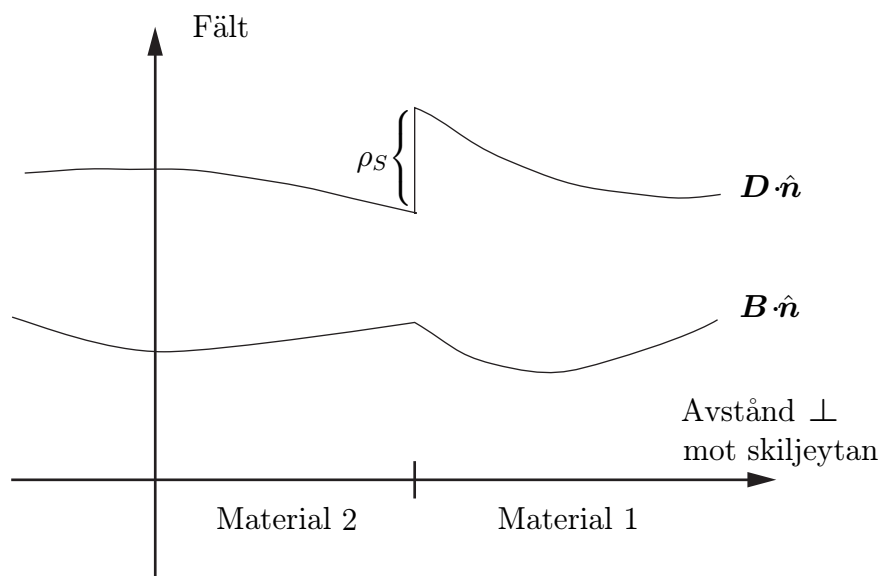
Förenkla genom att dividera med arean a . Resultatet blir

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S \end{cases} \quad (1.13)$$

Dessa randvillkor föreskriver hur de elektromagnetiska fälten är relaterade till varandra på ömse sidor om gränssytan (normalen $\hat{\mathbf{n}}$ är riktad från material 2 in i material 1). Vi kan formulera dessa randvillkor i text.

- Elektriska fältstyrkans tangentialkomponent är kontinuerlig över gränssytan.

⁹Detta är naturligtvis en idealisering av en verklighet där tätheten antar mycket stora värden inom ett makroskopiskt tunt gränsskikt.



Figur 1.3: Variation av $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ och $\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ vid skiljeytan.

- Magnetiska fältstyrkans tangentialkomponent är diskontinuerlig över gränssytan. Diskontinuitetens storlek är $\mathbf{J}_S$. I det fall ytströmtätheten är noll, t.ex. om materialet har ändlig ledningsförmåga,¹⁰ är tangentialkomponenten kontinuerlig över gränssytan.
- Magnetiska flödestäthetens normalkomponent är kontinuerlig över gränssytan.
- Elektriska flödestäthetens normalkomponent är diskontinuerlig över gränssytan. Diskontinuitetens storlek är ρ_S . I det fall ytladdningstätheten är noll är normalkomponenten kontinuerlig över gränssytan.

I figur 1.3 exemplifieras hur normalkomponenterna hos de magnetiska och elektriska flödestätheterna kan variera vid skiljeytan mellan två material.

Ett viktigt specialfall, som ofta förekommer, är det fall då material 2 är en perfekt ledare, som är en modell av ett material som har lätttrörliga laddningsbärare, t.ex. flera metaller. I material 2 är fälten noll och vi får från (1.13)

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_S \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_1 = \rho_S \end{cases} \quad (1.14)$$

där $\mathbf{J}_S$ och ρ_S är metallytans ytströmtäthet respektive ytladdningstäthet.

¹⁰Detta följer av antagandet att det elektriska fältet $\mathbf{E}$ är ändligt nära gränssytan, vilket medför att $\mathbf{J}_S = h\mathbf{J} = h\sigma\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{0}$, då $h \rightarrow 0$.

1.3 Energikonservering och Poyntings sats

Energikonservering visas genom att utgå från Maxwells ekvationer (1.1) och (1.2).

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

Multiplikera den första ekvationen skalärt med $\mathbf{H}$ och den andra med $\mathbf{E}$ samt subtrahera. Resultatet blir

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = 0$$

Därefter använder vi räkneregeln $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$ för att skriva om detta uttryck.

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = 0$$

Vi inför *Poyntings vektor*¹¹ $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ vilket resulterar i *Poyntings sats*.

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.15)$$

Poyntings vektor $\mathbf{S}$ anger det elektromagnetiska fältets effektfloedestäthet eller effekttransport per ytenhet i vektorn $\mathbf{S}$:s riktning. Detta ses klarare om vi integrerar (1.15) över en volym V , randyta S och utåtriktad normal $\hat{\mathbf{n}}$, se figur 1.1, och använder divergenssatsen.

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{S} dv \\ &= - \iiint_V \left[\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] dv - \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv\end{aligned} \quad (1.16)$$

Termerna tolkas på följande sätt:

- Vänstra ledet:

$$\iint_S \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

ger den totalt utstrålade effekten, dvs. energi per tidsenhet, genom ytan S , buren av det elektromagnetiska fältet.

¹¹John Henry Poynting (1852–1914), engelsk fysiker.

- Högra ledet: Effektflödet ut genom ytan S kompenseras av två bidrag. Den första volymsintegralen i högra ledet

$$\iiint_V \left[\mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right] dv$$

anger den till det elektromagnetiska fältet i V bundna effekten.¹² Den andra volymsintegralen

$$\iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv$$

anger arbetet per tidsenhet, dvs. effekten, som det elektriska fältet uträttar på de fria laddningsbärarna.

Ekvation (1.16) uttrycker därför energibalans.¹³

Genom S utstrålad effekt + effektförbrukning i V

= − effekt bunden till det elektromagnetiska fältet

I härledningen ovan antog vi att volymen V inte skar någon yta där fälten varierade diskontinuerligt, t.ex. en gränsyta mellan två material. Om skiljeytan S är en gränsyta mellan två olika material, se figur 1.2, gäller att Poyntings vektor i material 1 nära gränsytan är

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1$$

medan Poyntings vektor nära gränsytan i material 2 är

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2$$

Randvillkoren vid gränsytan ges av (1.13).

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1 &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_2 \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_1 &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_2 + \mathbf{J}_S \end{aligned}$$

Vi skall nu visa att effekten som det elektromagnetiska fältet transporterar genom skiljeytan är kontinuerlig. Med andra ord att

$$\iint_S \mathbf{S}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_S \mathbf{S}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \iint_S \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_S dS \quad (1.17)$$

där ytan S är en godtycklig del av gränsytan. Notera att enhetsvektorn $\hat{\mathbf{n}}$ är riktad från material 2 in i material 1. Den sista ytintegralen anger effektutvecklingen, som det elektriska fältet uträttar på de fria laddningsbärarna i skiljeytan. Finns det inga ytströmmar i gränsytan är normalkomponenten av Poyntings vektor kontinuerlig över gränsytan och vi får effektkonsivering över gränsytan. Det är egalt vilket elektriskt fält som ingår i den sista ytintegralen i (1.17), eftersom ytströmmen $\mathbf{J}_S$

¹²Effektförbrukningen för att polarisera och magnetisera materialet innefattas i denna term.

¹³Egentligen effektbilans.

är parallell med ytan S och det elektriska fältets tangentialkomponent är kontinuerlig vid gränsytan, dvs.

$$\iint_S \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_S dS = \iint_S \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_S dS$$

Vi visar (1.17) lättast genom cyklisk permutation av de ingående vektorerna och genom att använda randvillkoren.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_1 &= \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1) = \mathbf{H}_1 \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1) = \mathbf{H}_1 \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_2) \\ &= -\mathbf{E}_2 \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_1) = -\mathbf{E}_2 \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_2 + \mathbf{J}_S) \\ &= \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2) - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_S = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_2 - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_S \end{aligned}$$

Integrerar vi detta uttryck över skiljeytan S får vi ekvation (1.17).

Övningar till kapitel 1

1.1 Visa den till divergenssatsen analoga satsen

$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{A} dv = \iint_S \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A} dS$$

Ledning: Tillämpa divergenssatsen på $\mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{a}$ där $\mathbf{a}$ är en godtycklig konstant vektor.

1.2 Inuti en ändlig volym finns ett magnetiskt material med magnetisering $\mathbf{M}$. Visa att för statiska fält utan fria strömmar, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, gäller

$$\iiint \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv = 0$$

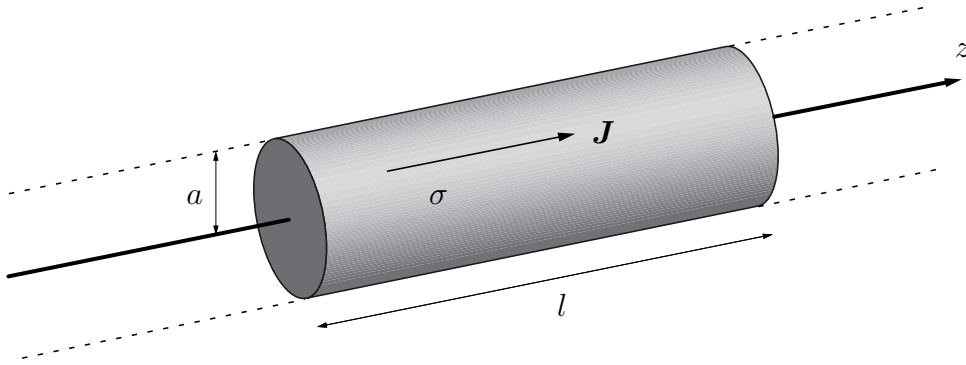
där integrationen sker över hela rummet.

Ledning: Ampères lag $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$ medför att det existerar en potential Φ så att

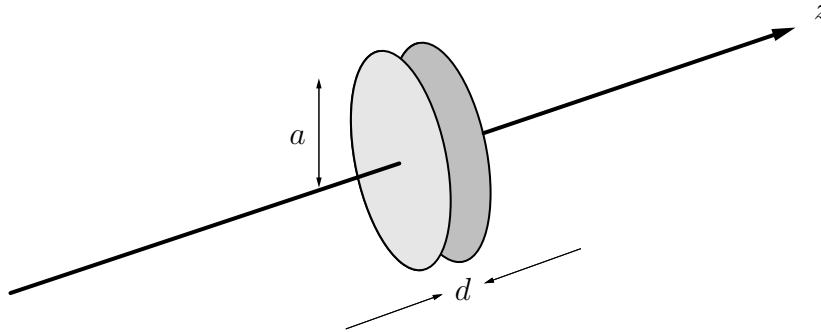
$$\mathbf{H} = -\nabla\Phi$$

Använd sedan divergenssatsen för att visa påståendet.

1.3 En oändligt lång, rak, cirkulär ledare (radie a) består av ett material med ändlig ledningsförmåga σ . I ledaren flyter en konstant (statisk) ström I . Strömtätheten $\mathbf{J}$ kan anses vara homogen i ledarens tvärsnitt. Visa att Poyntings sats gäller för en volym V som består en längd l av ledaren begränsad av dess mantelyta och de två ändytorna, se figur 1.4. Varifrån kommer energin som omvandlas till värme i ledaren?



Figur 1.4: Geometri för övning 1.3. Figuren visar ett ändligt stycke (längd l) av ledaren (radie a). Ledaren består av ett material med ändlig ledningsförmåga σ .



Figur 1.5: Geometri för övning 1.4.

- ***1.4** En ideal, cirkulär, plattkondensator (radie a , plattavstånd d), se figur 1.5, drivs med en tidsharmoniskt varierande ström. Mellan plattorna råder vakuum och vi antar att alla kanteffekter kan försummas. Bestäm genom ansättningen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{z}} E(\rho, \omega) \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \hat{\phi} H(\rho, \omega) \cos(\omega t + \beta)$$

det elektriska respektive magnetiska fältet mellan kondensatorplattorna, dvs. bestäm $E(\rho, \omega)$ och $H(\rho, \omega)$ samt fasen β (uttryckt i α). Visa att Poyntings sats gäller för området V mellan plattorna. Varifrån kommer energin som laddar upp kondensatorn?

Ledning: Visa först att det elektriska fältet $E(\rho, \omega)$ satisfierar

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E(\rho, \omega)}{\partial \rho} \right) + \frac{\omega^2}{c_0^2} E(\rho, \omega) = 0$$

där c_0 är ljushastigheten i vakuum.

- ***1.5** Visa med hjälp av resultaten från övning 1.4 att kondensatorns induktans L och

kapacitans C kan skrivas som

$$\begin{cases} L = \frac{d\mu_0}{8\pi} \left(1 + \frac{\xi^2}{12} + O(\xi^4) \right) \\ C = \frac{\pi a^2 \epsilon_0}{d} (1 + O(\xi^4)) \end{cases}$$

där den enhetslösa parameteren $\xi = \omega a / c_0$. Finn även ett explicit uttryck på "kretsens" resonansfrekvens ω_r . Vad blir resonansfrekvensen för $a = 1$ cm?

Sammanfattning av kapitel 1

Maxwells ekvationer

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho\end{aligned}$$

Laddningskonservering

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Lorentz-kraften

$$\mathbf{F} = q \{ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \}$$

Randvillkor, allmänt och ledare

$\hat{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$	$\hat{n} \times \mathbf{E}_1 = 0$
$\hat{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S$	$\hat{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_S$
$\hat{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$	$\hat{n} \cdot \mathbf{B}_1 = 0$
$\hat{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S$	$\hat{n} \cdot \mathbf{D}_1 = \rho_S$

Poyntings sats

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} &= 0 \\ \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H}\end{aligned}$$

Kapitel 2

Konstitutiva relationer

Som redan nämnts i kapitel 1 är Maxwells fältekvationer (1.1)–(1.2) inte kompletta. Ekvationerna innehåller tolv obekanta fältstorheter ($\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ och $\mathbf{H}$) medan det endast finns sex ekvationer. De återstående sex ekvationerna, de s.k. *konstitutiva relationerna* kommer att behandlas i detta kapitel.

Även i detta kapitel kommer behandlingen att gälla allmänt tidsberoende fält och de speciella förhållanden som gäller vid tidsharmoniska fält återkommer vi till senare i kapitel 3.

I Maxwells fältekvationer uppträder endast fälten $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ och $\mathbf{H}$ och deras källor. Dessa ekvationer beskriver fältens dynamik, men hur fälten är relaterade till varandra är helt fristående information. Denna information kan grovt sägas återspegla laddningsbärarnas dynamik i materialet. Helt allmänt kan de konstitutiva relationerna sägas vara ett samband mellan två fältpar, t.ex. $\{\mathbf{D}, \mathbf{B}\}$ och $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = \mathbf{F} \left(\begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} \right) \quad (2.1)$$

Denna uppsättning konstitutiva relationer betonar fälten $\mathbf{E}$ och $\mathbf{H}$, då transformationen (2.1) kan användas för att eliminera de elektriska och magnetiska flödestätheterna, $\mathbf{D}$ och $\mathbf{B}$, ur Maxwells fältekvationer. De elektriska och magnetiska fälten, $\mathbf{E}$ och $\mathbf{H}$, som t.ex. ingår i Poyntings vektor, intar därför en särställning. Vid vågutbredning visar sig denna transformation lämpligt, bl.a. därför att effektransport är en viktig storhet i dessa problem.

Även andra kombinationer av konstitutiva relationer förekommer flitigt i litteraturen. En vanligt förekommande uppsättning konstitutiva relationer är en relation mellan fältparen $\{\mathbf{D}, \mathbf{H}\}$ och $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$. Denna uppsättning av konstitutiva relationer betonar istället fälten $\mathbf{E}$ och $\mathbf{B}$, vilka ingår i Lorentzkraften, (1.3). Det finns även skäl, baserade på den speciella relativitetsteorin, för att transformationen skall vara mellan just fältparen $\{\mathbf{D}, \mathbf{H}\}$ och $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$. Vi kommer dock att välja formen på transformationen enligt (2.1) pga. att den betonar fälten $\mathbf{E}$ och $\mathbf{H}$, som ingår i Poyntings vektor.

Avbildningen $\mathbf{F}$ måste uppfylla vissa allmänna fysikaliska krav för att vi skall erhålla realistiska fysikaliska modeller. Dessa antaganden kommer att diskuteras i detta kapitel. De speciella förenklingar som inträffar för tidsharmoniska fält kommer

att analyseras senare i kapitel 3. I ett första avsnitt behandlas isotropa material som uppvisar dispersion. I ett senare avsnitt kommer dessa konstitutiva relationer att generaliseras.

2.1 Isotropa material med dispersion

Som en inledning till de mer generella konstitutiva relationer som behandlas i avsnitt 2.3 kommer vi först att behandla ett enklare fall med ett isotropt material.

Ett isotropt dispersivt material utgör det enklaste exemplet på ett konstitutivt samband mellan fälten. Isotropin innebär att materialet har identiska egenskaper i alla riktningar, vilket medför att ingen koppling sker mellan fältens olika (vektor-)komponenter.¹ Vidare antas det inte finnas någon koppling mellan de elektriska fälten $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ och de magnetiska fälten $\mathbf{B}$ och $\mathbf{H}$. Avbildningen (2.1) kommer i detta fall att bli två från varandra frikopplade avbildningar. För enkelhets skull antar vi att de magnetiska fälten satisfierar det förhållande som råder mellan fälten i vakuum (omagnetiskt material). Ekvation (2.1) kommer därför att bli

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \mathbf{F}(\mathbf{E}) \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{cases}$$

En rad antaganden angående avbildningen $\mathbf{F}$'s tidsberoende kommer nu att krävas i varje punkt $\mathbf{r}$. Allt funktionsberoende av andra makroskopiska variabler, som t.ex. temperatur eller tryck, skrivs inte ut här för att inte få klumpiga beteckningar. Vi kommer inte heller att skriva ut rumsberoendet hos fält eller andra storheter i detta avsnitt om det inte krävs för förståelsen. Fält och andra storheter beror således också på variabeln $\mathbf{r}$ även om detta inte skrivs ut.

Följande antaganden på avbildningen $\mathbf{F}$ är aktuella:

1. Avbildningen $\mathbf{F}$ skall vara linjär i fältet $\mathbf{E}$, dvs. för alla reella tal α och β och för alla fält $\mathbf{E}$ och $\mathbf{E}'$ gäller att

$$\mathbf{F}(\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{E}') = \alpha \mathbf{F}(\mathbf{E}) + \beta \mathbf{F}(\mathbf{E}')$$

2. Avbildningen $\mathbf{F}$ skall vara kausal, dvs. för varje τ och varje fält $\mathbf{E}$ sådant att $\mathbf{E}(t) = 0$, för $t < \tau$ gäller att

$$\mathbf{F}(\mathbf{E})(t) = \mathbf{0} \quad \text{för } t < \tau$$

3. Avbildningen $\mathbf{F}$ skall vara invariant under tidstranslation, dvs. för varje fältpar $\{\mathbf{D}, \mathbf{E}\}$, som är relaterade genom $\mathbf{D}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{E})(t)$, och varje τ och fältpar $\{\mathbf{D}', \mathbf{E}'\}$, definierade genom $\mathbf{E}'(t) = \mathbf{E}(t - \tau)$ och $\mathbf{D}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{E}')(t)$ gäller att

$$\mathbf{D}'(t) = \mathbf{D}(t - \tau)$$

¹Att ett material är isotropt medför inte att materialet måste vara homogent, dvs. att dess materialegenskaper är oberoende av rumskoordinaterna. Materialets isotropa egenskaper är en mikroskopisk egenskap, medan materialets inhomogena variation kan ske över en makroskopisk längdskala.

Egenskapen 1) undantar naturligtvis alla icke-linjära fenomen som uppkommer i elektromagnetiska sammanhang, men den utgör ingen allvarlig inskränkning då de flesta material uppvisar linjaritet i fälten förutsatt att fältstyrkan är tillräckligt svag. Kausalitet, som uttrycks matematiskt i 2), innebär att ingen verkan (den elektriska flödestätheten $\mathbf{D}$ eller polarisationen $\mathbf{P}$) uppstår före orsaken (det elektriska fältet $\mathbf{E}$). Egenskapen 3) innebär att materialet inte förändras (åldras) och att samma resultat erhålls vid ett senare upprepat försök. Dessa antaganden är grunden för vår behandling och skall vara uppfyllda för varje konstitutiv relation som behandlas i denna bok.

Utgångspunkten till avbildningen $\mathbf{F}$ blir följande ansats på sambandet mellan materialets polarisation $\mathbf{P}$ och det elektriska fältet $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{P}(t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t, t') \mathbf{E}(t') dt'$$

Funktionen $\chi(t, t')$ har enheten frekvens. Den elektriska flödestäthet $\mathbf{D}$ blir då, se (1.7),

$$\mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t, t') \mathbf{E}(t') dt' \right\}$$

Denna transformation är naturligtvis linjär, och är vidare förenlig med antagandet att materialet är isotropt (ingen koppling mellan olika vektorkomponenter). Det elektriska fältet antas vara noll före en given tid τ , dvs. $\mathbf{E}(t) = \mathbf{0}$, $t < \tau$. Vi skall nu se vad villkoren 2) och 3) innebär.

Kausalitet, egenskap 2), ger omedelbart att funktionen $\chi(t, t')$ måste vara noll då $t' > t$. Integrationen är därför inskränkt till intervallet $(-\infty, t]$. Därför blir

$$\mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \chi(t, t') \mathbf{E}(t') dt' \right\}$$

Detta samband mellan den elektriska flödestätheten $\mathbf{D}$ och det elektriska fältet $\mathbf{E}$ innebär att $\mathbf{D}$ beror på hela det elektriska fältets tidigare historia, m.a.o. materialet har minne eller uppvisar *dispersion*. Materialets minne karakteriseras av funktionen $\chi(t, t')$.

För att undersöka vilka villkor tidsinvariansen ger, bildar vi två fältpar $\{\mathbf{D}, \mathbf{E}\}$ och $\{\mathbf{D}', \mathbf{E}'\}$, som är definierade genom

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(t) &= \epsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \chi(t, t') \mathbf{E}(t') dt' \right\} \\ \mathbf{D}'(t) &= \epsilon_0 \left\{ \mathbf{E}'(t) + \int_{-\infty}^t \chi(t, t') \mathbf{E}'(t') dt' \right\} \end{aligned}$$

där $\mathbf{E}'(t) = \mathbf{E}(t - \tau)$. Genom tidsinvarians, egenskap 3), gäller att $\mathbf{D}'(t) = \mathbf{D}(t - \tau)$. Om den första ekvationen evalueras vid tiden $t - \tau$ blir de båda ekvationerna

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(t - \tau) &= \epsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(t - \tau) + \int_{-\infty}^{t - \tau} \chi(t - \tau, t') \mathbf{E}(t') dt' \right\} \\ \mathbf{D}(t - \tau) &= \epsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(t - \tau) + \int_{-\infty}^t \chi(t, t') \mathbf{E}(t' - \tau) dt' \right\} \end{aligned}$$

dvs.

$$\int_{-\infty}^{t-\tau} \chi(t-\tau, t') \mathbf{E}(t') dt' = \int_{-\infty}^t \chi(t, t') \mathbf{E}(t' - \tau) dt' = \int_{-\infty}^{t-\tau} \chi(t, t' + \tau) \mathbf{E}(t') dt'$$

där vi i den sista integralen gjort ett variabelbyte. Detta medför att

$$\int_{-\infty}^{t-\tau} (\chi(t-\tau, t') - \chi(t, t' + \tau)) \mathbf{E}(t') dt' = \mathbf{0}$$

Fältet $\mathbf{E}$ är här ett godtyckligt fält vilket ger

$$\chi(t-\tau, t') = \chi(t, t' + \tau)$$

för alla t , τ och t' eller ekvivalent

$$\chi(t, t') = \chi(t - t', 0)$$

Vi ser att funktionen $\chi(t, t')$ endast är en funktion av tidsskillnaden $t - t'$. Det är därför ingen inskränkning att skriva materialets konstitutiva relationer som

$$\begin{cases} \mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \chi(t - t') \mathbf{E}(t') dt' \right\} \\ \mathbf{B}(t) = \mu_0 \mathbf{H}(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

$\chi(t)$ är inte definierad för negativa tider t , men det är naturligt att utvidga definitionsområdet till hela reella axeln genom att definiera $\chi(t) = 0$ för $t < 0$. Detta överensstämmer då med villkoret på kausalitet.

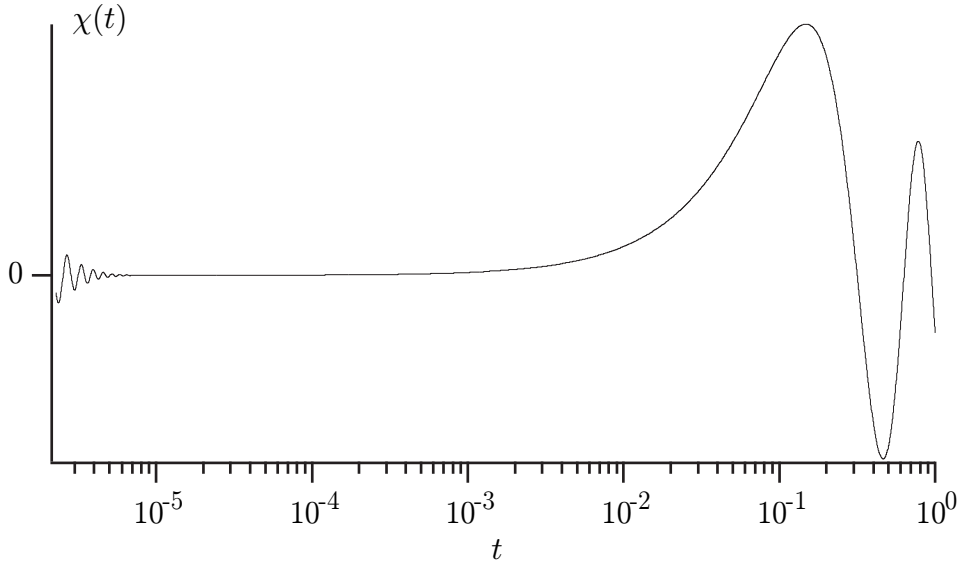
Funktionen $\chi(t)$ kallas materialets *susceptibilitetsfunktion* (enhet frekvens) och den ger materialets polarisation för en pålagd deltafunktionsexcitation. Tag nämligen $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \delta(t)$. Då blir

$$\mathbf{D}(t) = \underbrace{\epsilon_0 \delta(t) \mathbf{E}_0}_{\text{Momentan respons}} + \underbrace{\epsilon_0 \chi(t) \mathbf{E}_0}_{\text{Efterklingande transient}}$$

Susceptibilitetsfunktionen $\chi(t)$ utgör en matematisk modell av materialets minnes-egenskaper eller dispersiva egenskaper.

2.1.1 Optisk respons

Hos material där flera fysikaliska processer bidrar till materialets elektriska egenskaper är det inte ovanligt att flera olika tidsskalor är inblandade. Det kan t.ex. röra sig om det elektriska fältets växelverkan med de lätta elektronerna i materialet jämfört med de mer långsamma processer som uppträder då flera atomer eller molekyler deltar kollektivt. Speciellt vanligt är att materialets polarisation innehåller ett bidrag som härrör från mycket snabba förlopp i materialet. Detta förlopp brukar



Figur 2.1: Susceptibilitetsfunktionen $\chi(t)$ uppdelad i två termer som exemplifierar materialets optiska respons. Tidsskalan är angiven i en godtycklig enhet.

kallas för den *optiska responsen* och kan beskrivas genom att vi delar upp $\chi(t)$ i en summa av två termer $\chi_1(t)$ och $\chi_2(t)$

$$\chi(t) = \chi_1(t) + \chi_2(t)$$

där $\chi_1(t)$ varierar med en snabbare tidsskala än $\chi_2(t)$, som anger materialets mer långsamma respons. Detta åskådliggörs i figur 2.1. Om den elektriska excitationen $\mathbf{E}$ endast varierar långsamt jämfört med $\chi_1(t)$ är det lämpligt att inkludera effekterna av $\chi_1(t)$ i en momentan term, liknande den första utanför integrationen i (2.2). Det elektriska fältet $\mathbf{E}$ är då, i jämförelse med variationerna i $\chi_1(t)$, approximativt konstant. Vi kan därför flytta $\mathbf{E}$ -fältet utanför integrationen och följande uttryck erhålls:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(t) &= \epsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t [\chi_1(t-t') + \chi_2(t-t')] \mathbf{E}(t') dt' \right\} \\ &= \epsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \chi_1(t-t') dt' \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \chi_2(t-t') \mathbf{E}(t') dt' \right\} \\ &= \epsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(t) + \int_0^{\infty} \chi_1(t') dt' \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \chi_2(t-t') \mathbf{E}(t') dt' \right\} \end{aligned}$$

Det är lämpligt att införa beteckningen

$$\epsilon = 1 + \int_0^{\infty} \chi_1(t) dt$$

vilket ger

$$\begin{cases} \mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \left\{ \epsilon \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \chi(t-t') \mathbf{E}(t') dt' \right\} \\ \mathbf{B}(t) = \mu_0 \mathbf{H}(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

där vi tagit bort index 2 på susceptibilitetsfunktionen.

Det går att uttrycka denna effekt med optisk respons enklare med hjälp av ett deltafunktionsbidrag hos susceptibilitetsfunktionen. Om susceptibilitetsfunktionen skrivs

$$[\epsilon - 1] \delta(t) + \chi(t)$$

och sätts in i (2.2) får vi på ett enklare sätt (2.3). Den första termen utgör här en modell av materialets momentana respons på det elektromagnetiska fältet. I de flesta fall kommer detta bidrag från laddningsbärare med liten tröghet.

2.1.2 Ledningsförmåga

För statiska (tidsberoende) fält är det stor skillnad mellan bundna och fria laddningar. Bundna laddningar ger upphov till polarisation av materialet, medan de fria laddningarna orsakar strömmar i materialet. Denna skillnad suddas ut för generella tidsberoende fält, vilket analysen i detta avsnitt illustrerar.

Flera material, speciellt många metaller, har lätttrörliga laddningsbärare. Ohms lag med ledningsförmåga σ

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.4)$$

används ofta som modell för laddningstransport i dessa material. En uppsättning konstitutiva relationer som är något mer generella än (2.3) och (2.4) är

$$\begin{cases} \mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \left\{ \epsilon \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \chi(t-t') \mathbf{E}(t') dt' \right\} \\ \mathbf{J}(t) = \sigma \mathbf{E}(t) + \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \Sigma(t-t') \mathbf{E}(t') dt' \\ \mathbf{B}(t) = \mu_0 \mu \mathbf{H}(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

Ohms lag innehåller förutom den momentana kopplingen σ mellan strömtätheten $\mathbf{J}$ och det elektriska fältet $\mathbf{E}$, en faltningsterm som beskriver minnes effekter. Modellen inkluderar således, förutom de dispersiva effekter som beskrivs av susceptibilitetsfunktionen $\chi(t)$ (bundna laddningar), även dispersiva effekter från de fria laddningarna genom funktionen $\Sigma(t)$. Kopplingen mellan $\mathbf{B}$ - och $\mathbf{H}$ -fälten är dessutom något mer generell än i (2.3). Storheten μ utgör ett mått på materialets momentana magnetiska egenskaper.

Vi skall i detta avsnitt visa att effekten av de lätttrörliga laddningarna, som vi modellerar med ledningsförmågan σ och funktionen $\Sigma(t)$, på ett enkelt sätt kan inkluderas i susceptibilitetsfunktionen $\chi(t)$. Fysikaliskt sett kan vi uttrycka detta som att vi bokför de lätttrörliga laddningarna som bundna laddningar. Detta står oss naturligtvis fritt att göra, bara alla fysikaliskt uppmätbara storheter, såsom elektriska och magnetiska fält förblir opåverkade av denna omgruppering. Omvänt kommer vi också att visa att alla dispersiva effekter som modelleras med susceptibilitetskärnan $\chi(t)$ kan överföras till en effektiv ledningsförmåga och en, till de fria laddningarna, dispersiv term. Detta fall utgör en bokföring av de bundna laddningarna, beskrivna av susceptibilitetskärnan $\chi(t)$, som lätttrörliga laddningar med

Ohms lag. Även detta skall naturligtvis vara möjligt, bara de fysikaliskt uppmätbara storheterna förblir oförändrade. För att klargöra detta, visar vi att det finns en mångtydighet i de konstitutiva relationerna såsom de är formulerade i ekvation (2.5).

De konstitutiva relationerna i ekvation (2.5) är inte entydigt bestämda utan varje val av konstitutiva relationer på formen

$$\begin{cases} \mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \left\{ \epsilon \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t (\chi(t-t') + f(t-t')) \mathbf{E}(t') dt' \right\} \\ \mathbf{J}(t) = (\sigma - \epsilon_0 f(0^+)) \mathbf{E}(t) + \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \left(\Sigma(t-t') - \frac{\partial f(t-t')}{\partial t} \right) \mathbf{E}(t') dt' \\ \mathbf{B}(t) = \mu_0 \mu \mathbf{H}(t) \end{cases}$$

där $f(t)$ är en godtycklig (deriverbar) funktion ($f(t) = 0$, $t < 0$ och $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} f(t)$), ger samma högerled i Ampères lag. Vi ser detta omedelbart genom insättning i Ampères lag.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}(t) &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} \\ &= (\sigma - \epsilon_0 f(0^+)) \mathbf{E}(t) + \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \left(\Sigma(t-t') - \frac{\partial f(t-t')}{\partial t} \right) \mathbf{E}(t') dt' \\ &\quad + \epsilon_0 \left\{ \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}(t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^t (\chi(t-t') + f(t-t')) \mathbf{E}(t') dt' \right\} \end{aligned}$$

Differentieringen av tidsintegralen leder till

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}(t) &= (\sigma - \epsilon_0 f(0^+)) \mathbf{E}(t) + \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \left(\Sigma(t-t') - \frac{\partial f(t-t')}{\partial t} \right) \mathbf{E}(t') dt' \\ &\quad + \epsilon_0 \left\{ \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}(t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^t \chi(t-t') \mathbf{E}(t') dt' \right\} \\ &\quad + \epsilon_0 f(0^+) \mathbf{E}(t) + \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \frac{\partial f(t-t')}{\partial t} \mathbf{E}(t') dt' \\ &= \sigma \mathbf{E}(t) + \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \Sigma(t-t') \mathbf{E}(t') dt' \\ &\quad + \epsilon_0 \left\{ \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}(t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^t \chi(t-t') \mathbf{E}(t') dt' \right\} \end{aligned}$$

Funktionen $f(t)$ påverkar således ej utseendet av Ampères lag. Varje val av $f(t)$ ger samma högerled i Ampères lag.

Varje val av $f(t)$ innebär en omorganisation av vad som rubriceras som bundna laddningar (innefattade i den elektriska flödestäthet $\mathbf{D}$) och vad som kan kallas fria laddningar (innefattade i strömtätheten $\mathbf{J}$). För att illustruera denna omorganisation och mångtydighet i de konstitutiva relationerna, väljer vi att i två exempel studera två ytterlighetsfall.

Exempel 2.1

Dispersionsmodellen: I detta exempel visar vi att de konstitutiva relationer som ges av (2.5) kan transformeras så att $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, dvs. hela bidraget från strömtätheten $\mathbf{J}$ innefattas i den elektriska flödestäthet $\mathbf{D}$. Välj funktionen $f(t)$ som

$$f(t) = H(t) \left[\frac{\sigma}{\epsilon_0} + \int_0^t \Sigma(t') dt' \right]$$

där $H(t)$ är Heavisides stegfunktion. Detta ger

$$\begin{cases} f(0^+) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ f'(t) = \Sigma(t), \quad t > 0 \end{cases}$$

Notera att tidsderivatan endast behöver beräknas för positiva tider $t > 0$.

Vi får då följande konstitutiva relationer

$$\begin{cases} \mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \left\{ \epsilon \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t (\chi(t-t') + f(t-t')) \mathbf{E}(t') dt' \right\} \\ \mathbf{J}(t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{B}(t) = \mu_0 \mu \mathbf{H}(t) \end{cases}$$

Denna uppsättning av konstitutiva relationer kallas *dispersionsmodellen*, eftersom bidraget från strömtätheten $\mathbf{J}$ är noll. Dessa konstitutiva relationer är ekvivalenta med de som ges i (2.5), så tillvida att de inte ger någon skillnad i uttrycket i högerledet av Ampères lag.

Det är därför inte någon inskränkning att låta bidraget från Ohms lag, (2.4), inkluderas i susceptibilitetsfunktionen $\chi(t)$. Inför en ny susceptibilitetsfunktion $\chi_{\text{ny}}(t)$

$$\chi_{\text{ny}}(t) = H(t) \frac{\sigma}{\epsilon_0} + \chi(t)$$

och effekterna av de lätttrörliga laddningsbärarna har absorberats i susceptibilitetsfunktionen. Denna nya susceptibilitetsfunktion innebär en omfördelning av de fria laddningsbärarnas bidrag så att de nu innefattas i de bundna laddningarnas bidrag. ■

Exempel 2.2

Konduktivitetsmodellen: Vi kan också välja funktionen $f(t)$ så att en annan ytterlighet uppnås, den s.k. *konduktivitetsmodellen*. Välj funktionen $f(t)$ som

$$f(t) = -\chi(t)$$

Vi får då följande konstitutiva relationer

$$\begin{cases} \mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}(t) \\ \mathbf{J}(t) = (\sigma + \epsilon_0 \chi(0^+)) \mathbf{E}(t) + \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \left(\Sigma(t-t') + \frac{\partial \chi(t-t')}{\partial t} \right) \mathbf{E}(t') dt' \\ \mathbf{B}(t) = \mu_0 \mu \mathbf{H}(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

I denna uppsättning av de konstitutiva relationerna har vi ett material där susceptibilitetsfunktionen $\chi(t)$ är noll. Alla effekter av dispersion är nu samlade i strömtätheten $\mathbf{J}$. Dessa konstitutiva relationer är ekvivalenta med de som ges i (2.5). ■

Fler val av funktionen $f(t)$ är naturligtvis möjliga. De utgör en blandning av dessa två ytterlighetsfall. Vi kommer vanligen att använda dispersionsmodellen i denna bok.

2.2 Exempel

Vi övergår nu till att exemplifiera dispersionsmodellen med två exempel. I ett första exempel beskrivs den s.k. *Lorentzmodellen* eller *resonansmodellen*. Den är mycket använd som modell för fasta ämnen. I ett andra exempel beskrivs *Debyemodellen* eller *relaxationsmodellen*, som ofta används på material vars mikroskopiska komponenter har permanent elektriskt dipolmoment.

2.2.1 Lorentzmodellen

Vi antar att materialet består av bundna laddningsbärare (vanligtvis elektroner), som växelverkar med sina atomkärnor. Atomerna kan vara ordnade i en gitterstruktur, men behöver inte nödvändigtvis vara det. Amorfa ämnen är således även tänkbara.

Laddningsbärarna, med laddning q och massa m , antas påverkas av tre olika krafter:

1. En elektrisk kraft $\mathbf{F}_1 = q\mathbf{E}$ från ett yttre elektriskt fält $\mathbf{E}$.²
2. En återförande harmonisk kraft proportionell mot laddningens förskjutning från jämviktsläget, $\mathbf{F}_2 = -m\omega_0^2\mathbf{r}$, där $\omega_0 \geq 0$ är den s.k. harmoniska frekvensen och $\mathbf{r}$ laddningens förskjutning från jämviktsläget.
3. En friktionskraft proportionell mot laddningens hastighet $\frac{d}{dt}\mathbf{r}$, $\mathbf{F}_3 = -m\nu\frac{d}{dt}\mathbf{r}$, där $\nu \geq 0$ är kollisionsfrekvensen.

Vi antar att rörelsen kan beskrivas helt klasissiskt med den klassiska mekanikens rörelselagar. Newtons andra lag för laddningsbärarna ger

$$m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = q\mathbf{E} - m\omega_0^2\mathbf{r} - m\nu\frac{d}{dt}\mathbf{r}$$

eller

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} + \nu\frac{d}{dt}\mathbf{r} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{q}{m}\mathbf{E}$$

Inför polarisationen $\mathbf{P}$ hos materialet definierad genom

$$\mathbf{P} = Nq\mathbf{r}$$

där N är antalet laddningsbärare per volymsenhet.³ Rörelseekvationen kan nu skrivas om som

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{P} + \nu\frac{d}{dt}\mathbf{P} + \omega_0^2\mathbf{P} = \frac{Nq^2}{m}\mathbf{E} \quad (2.7)$$

²Det elektriska fältet $\mathbf{E}$ som verkar på laddningsbärarna är inte identiskt med det yttre pålagda elektriska fältet, utan modifieras p.g.a. närvaron av de övriga laddningsbärarna i materialet. Man talar i dessa sammanhang om ett lokalt fält. Vi försummar här skillnaden mellan det yttre pålagda elektriska fältet och detta lokala fält. Skillnaden är liten om laddningsbärarna inte ligger tätt.

³Vi antar att denna storhet är konstant i tiden, vilket är en approximation.

Från tidigare avsnitt vet vi att materialets dispersiva egenskaper kan beskrivas som, se ekvation (2.3) och (1.7) (notera att vi använder dispersionsmodellen)

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{D}(t) - \epsilon_0 \mathbf{E}(t) = \epsilon_0 \left\{ [\epsilon - 1] \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \chi(t-t') \mathbf{E}(t') dt' \right\}$$

Första och andra derivatan av detta uttryck är

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) &= [\epsilon - 1] \frac{d}{dt} \mathbf{E}(t) + \chi(0^+) \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \chi'(t-t') \mathbf{E}(t') dt' \\ \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{P}(t) &= [\epsilon - 1] \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{E}(t) + \chi(0^+) \frac{d}{dt} \mathbf{E}(t) + \chi'(0^+) \mathbf{E}(t) \\ &\quad + \int_{-\infty}^t \chi''(t-t') \mathbf{E}(t') dt' \end{aligned}$$

där $\chi'(t)$ och $\chi''(t)$ är första, respektive andra tidsderivatan av $\chi(t)$ samt $\chi(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \chi(t)$ och $\chi'(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \chi'(t)$. Sätt in i (2.7) och samla ihop termerna.

$$\begin{aligned} &[\epsilon - 1] \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{E}(t) + [\chi(0^+) + \nu(\epsilon - 1)] \frac{d}{dt} \mathbf{E}(t) \\ &+ \left[\chi'(0^+) + \nu\chi(0^+) + \omega_0^2(\epsilon - 1) - \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \right] \mathbf{E}(t) \\ &+ \int_{-\infty}^t (\chi''(t-t') + \nu\chi'(t-t') + \omega_0^2\chi(t-t')) \mathbf{E}(t') dt' = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Fältet $\mathbf{E}$ är helt godtyckligt, så uttrycken framför varje term måste var och en vara noll, dvs.

$$\begin{cases} \epsilon - 1 = 0 \\ \chi(0^+) + \nu(\epsilon - 1) = 0 \\ \chi'(0^+) + \nu\chi(0^+) + \omega_0^2(\epsilon - 1) - \omega_p^2 = 0 \\ \chi''(t) + \nu\chi'(t) + \omega_0^2\chi(t) = 0 \end{cases}$$

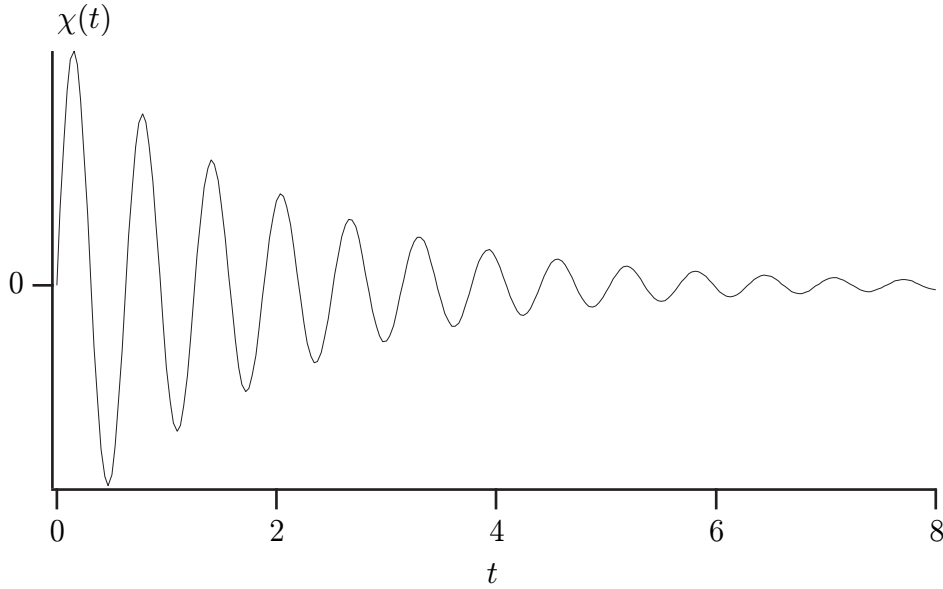
där $\omega_p = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}}$ är materialets *plasmafrekvens*. Förenklat får vi

$$\begin{cases} \epsilon = 1 \\ \chi(0^+) = 0 \\ \chi'(0^+) = \omega_p^2 \\ \chi''(t) + \nu\chi'(t) + \omega_0^2\chi(t) = 0 \end{cases}$$

Det första sambandet, $\epsilon = 1$, innebär att den optiska responsen saknas. De övriga villkoren på $\chi(t)$ utgör en ordinär differentialekvation i tiden med entydig lösning

$$\chi(t) = \frac{\omega_p^2}{\nu_0} e^{-\frac{\nu t}{2}} \sin \nu_0 t \quad t \geq 0$$

där $\nu_0^2 = \omega_0^2 - \nu^2/4$.



Figur 2.2: Exempel på susceptibilitetsfunktionen $\chi(t)$ för Lorentzmodellen. Tidsskalan är angiven i en godtycklig enhet.

Den slutliga konstitutiva relationen för Lorentzmodellen blir

$$\begin{cases} \mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \chi(t-t') \mathbf{E}(t') dt' \right\} \\ \chi(t) = H(t) \frac{\omega_p^2}{\nu_0} e^{-\frac{\nu}{2}t} \sin \nu_0 t \end{cases} \quad (2.8)$$

där vi betonat att $\chi(t) = 0$, $t < 0$ genom att införa Heaviside funktionen $H(t)$. Ett exempel på en susceptibilitetsfunktion för Lorentzmodellen ges i figur 2.2.

I allmänhet bidrar flera olika processer till susceptibilitetsfunktionen där vart och ett av bidragen kan beskrivas med en resonansmodell enligt ovan. Processerna har olika frekvenser ω_{p_i} , ω_{0_i} och ν_i . Susceptibilitetsfunktionen för den allmänna resonansmodellen blir summan av de enskilda bidragen.

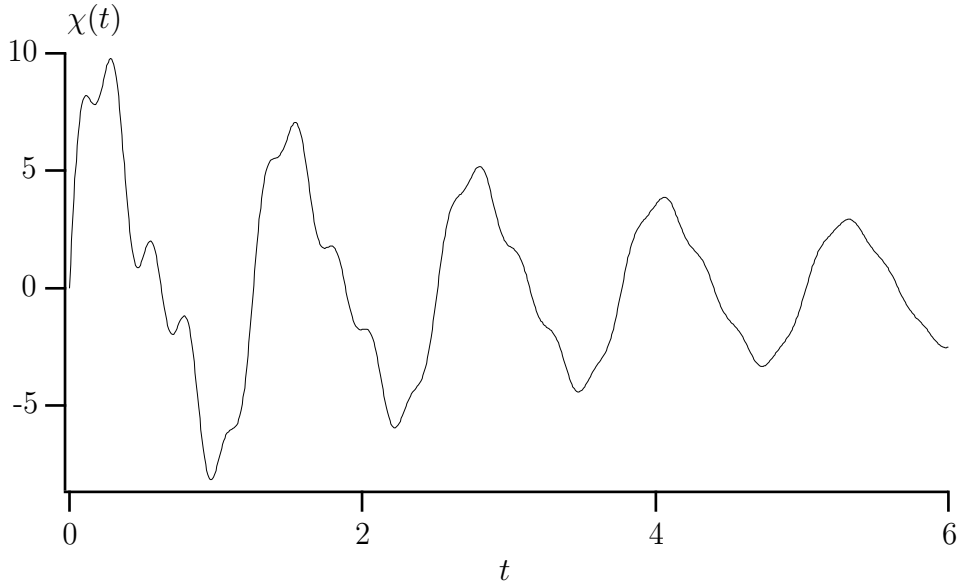
$$\chi(t) = H(t) \sum_{i=1}^M \frac{\omega_{p_i}^2}{\sqrt{\omega_{0_i}^2 - \nu_i^2/4}} e^{-\frac{\nu_i}{2}t} \sin \sqrt{\omega_{0_i}^2 - \nu_i^2/4} t$$

Ett exempel på en susceptibilitetsfunktion för Lorentzmodellen med flera frekvenser ges i figur 2.3.

Om friktionen hos laddningsbärarna kan försummas, dvs. $\nu \rightarrow 0$, blir $\nu_0 = \omega_0$ och (2.8) kan förenklas

$$\chi(t) = H(t) \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Vi ser att i detta fall blir $\chi(t)$ en ren odämpad sinusfunktion.



Figur 2.3: Exempel på susceptibilitetsfunktionen $\chi(t)$ för Lorentzmodellen med tre resonansfrekvenser. Tidsskalan är angiven i en godtycklig enhet.

Om däremot den återförande kraften kan försummas,⁴ dvs. $\omega_0 \rightarrow 0$, blir $\nu_0 = i\nu/2$ och (2.8) blir

$$\chi(t) = H(t) \frac{\omega_p^2}{\nu} \{1 - e^{-\nu t}\}$$

Utan återförande kraft blir elektronen⁵ en fri ledningselektron, som inte är bunden till sin atomkärna. Det är i detta specialfall möjligt att göra en jämförelse med en ledningsförmåga σ i Ohms lag, se (2.4) eller mer generellt (2.6). Vi startar med $\sigma = \Sigma(t) = 0$ i vår konduktivitetsmodell, dvs.

$$\begin{cases} \mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}(t) \\ \mathbf{J}(t) = \epsilon_0 \chi(0^+) \mathbf{E}(t) + \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \frac{\partial \chi(t-t')}{\partial t} \mathbf{E}(t') dt' \end{cases}$$

och önskar i denna ekvation identifiera en med susceptibilitetsfunktionen $\chi(t)$ associerad ledningsförmåga. I vårt fall är $\epsilon = 1$, $\chi(0^+) = 0$ och $\frac{\partial}{\partial t} \chi(t) = H(t) \omega_p^2 e^{-\nu t}$ och vi får

$$\mathbf{J}(t) = \epsilon_0 \omega_p^2 \int_{-\infty}^t e^{-\nu(t-t')} \mathbf{E}(t') dt'$$

Om fältet $\mathbf{E}(t')$ varierar långsamt under en tidsskala $1/\nu$, kan vi approximera integralen genom att evaluera fältet $\mathbf{E}(t')$ vid tiden t och flytta fältet utanför integralen. Vi får

$$\mathbf{J}(t) = \epsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{E}(t) \int_{-\infty}^t e^{-\nu(t-t')} dt' = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\nu} \mathbf{E}(t)$$

⁴Denna modell går under namnet Drudes modell för ledningselektroner.

⁵Vi antar nu att laddningsbärarna är elektronerna i materialet.

En direkt jämförelse ger i detta specialfall materialets ledningsförmåga

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\nu}$$

Vi ser att en ökning av friktionen hos elektronerna (ν ökar) leder till en minskad ledningsförmåga (resistiviteten $= 1/\sigma$ ökar), och tvärtom. Detta är fysikaliskt väl motiverat.

2.2.2 Debyemodellen

Det andra exemplet är Debyemodellen för ett dispersivt material. Modellen används bl.a. på vätskor vars molekyler har permanent elektriskt dipolmoment.

Vi antar här att materialets molekyler (eller atomer) har permanent elektriskt dipolmoment $\mathbf{p}$, som i normalt tillstånd är godtyckligt orienterade, t.ex. oordnade pga. värmerörelse. Materialets polarisation $\mathbf{P}$ definieras som totalt elektriskt dipolmoment per volymsenhet, dvs.

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\Delta V}$$

där summan över i sker över alla molekyler inuti volymen ΔV . I normalt opåverkat tillstånd är $\mathbf{P} = \mathbf{0}$. Polarisationen $\mathbf{P}$ förändras pga. två sinsemellan tävlande processer.

1. En process som strävar efter att linjera upp polarisationen $\mathbf{P}$ längs ett pålagt yttre elektriskt fält $\mathbf{E}$. Vi antar att tidsförändringarna i $\mathbf{P}$ är proportionella mot $\epsilon_0 \alpha \mathbf{E}$. Frekvensen $\alpha > 0$ är ett mått på denna förändring.
2. En process som strävar efter en slumpartad orientering av polarisationen. Om $\tau > 0$ är *relaxationstiden* för denna process antas tidsförändringarna i $\mathbf{P}$ proportionella mot $-\frac{1}{\tau} \mathbf{P}$.

Debyes modell för molekyler med permanent elektriskt dipolmoment åskådliggörs i figur 2.4.

Totalt blir tidsförändringarna i $\mathbf{P}$

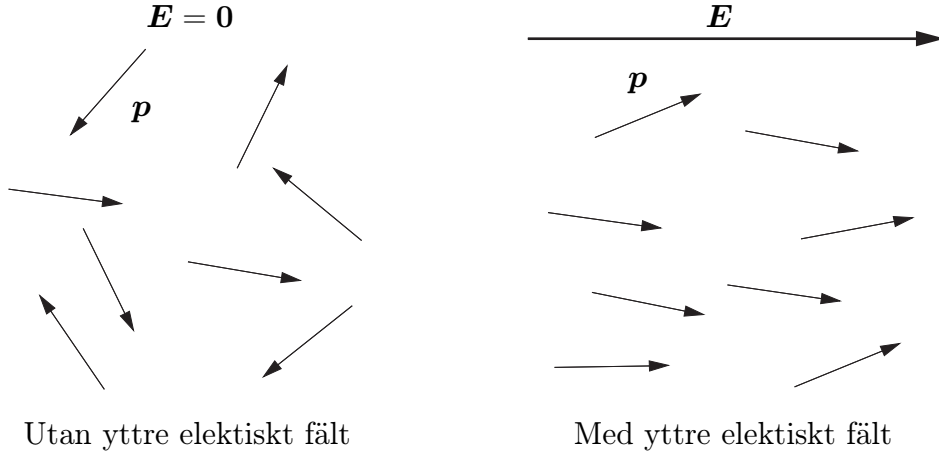
$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E} - \frac{1}{\tau} \mathbf{P} \quad (2.9)$$

Inför på samma sätt som i Lorentzmodellen, materialets dispersiva egenskaper som kan beskrivas med (2.3) och (1.7).

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{D}(t) - \epsilon_0 \mathbf{E}(t) = \epsilon_0 \left\{ [\epsilon - 1] \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \chi(t - t') \mathbf{E}(t') dt' \right\}$$

Tidsderivatan av detta uttryck är

$$\frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) = [\epsilon - 1] \frac{d}{dt} \mathbf{E}(t) + \chi(0^+) \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \chi'(t - t') \mathbf{E}(t') dt'$$



Figur 2.4: Permanent polariserade molekyler med eller utan yttre elektriskt fält.

där $\chi'(t)$ är tidsderivatan av $\chi(t)$ samt $\chi(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \chi(t)$. Sätt in i (2.9) och samla ihop termerna.

$$[\epsilon - 1] \frac{d}{dt} \mathbf{E}(t) + \left[\chi(0^+) - \alpha + \frac{1}{\tau} (\epsilon - 1) \right] \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \left(\chi'(t - t') + \frac{1}{\tau} \chi(t - t') \right) \mathbf{E}(t') dt' = \mathbf{0}$$

Fältet $\mathbf{E}$ är helt godtyckligt, varför uttrycken framför varje term måste vara noll, dvs.

$$\begin{cases} \epsilon - 1 = 0 \\ \chi(0^+) - \alpha + \frac{1}{\tau} (\epsilon - 1) = 0 \\ \chi'(t) + \frac{1}{\tau} \chi(t) = 0 \end{cases}$$

Förenklat får vi

$$\begin{cases} \epsilon = 1 \\ \chi(0^+) = \alpha \\ \chi'(t) + \frac{1}{\tau} \chi(t) = 0 \end{cases}$$

Det första sambandet, $\epsilon = 1$, innebär att den optiska responsen saknas och ur villkoren på $\chi(t)$ får vi lätt

$$\chi(t) = \alpha e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

Den slutliga konstitutiva relationen för Debyemodellen blir

$$\begin{cases} \mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \chi(t - t') \mathbf{E}(t') dt' \right\} \\ \chi(t) = H(t) \alpha e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases} \quad (2.10)$$

Susceptibilitetsfunktionen $\chi(t)$ är för denna modell en exponentiellt avtagande funktion.

Exempel 2.3

De konstitutiva relationerna i ekvation (2.10) är uttryckta i dispersionsmodellen, se exempel 2.1, dvs.

$$\begin{cases} \mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(t) + \alpha \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \mathbf{E}(t') dt' \right\} \\ \mathbf{J}(t) = \mathbf{0} \end{cases}$$

I exempel 2.2 visade vi hur man genom ett lämpligt val av funktionen $f(t)$ kunde få alla effekter av materialets laddningbärare till att innefattas i Ohms lag. För att skriva om de konstitutiva relationerna (2.10) till konduktivitetsmodellen välj $f(t) = -\chi(t)$. I detta fall får vi

$$f(t) = -H(t)\alpha e^{-\frac{t}{\tau}}$$

och

$$\begin{cases} f(0^+) = -\alpha \\ \frac{\partial}{\partial t} f(t) = \frac{\alpha}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0 \end{cases}$$

Notera att tidsderivatan på funktionen $f(t)$ endast behöver beräknas för positiva tider $t > 0$. Exempel 2.2 ger nu att de konstitutiva relationerna för ett Debyematerial i konduktivitetsmodellen är, se (2.6)

$$\begin{cases} \mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(t) \\ \mathbf{J}(t) = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E}(t) - \epsilon_0 \frac{\alpha}{\tau} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \mathbf{E}(t') dt' \end{cases}$$

■

2.3 Allmänna linjära material med dispersion

En generell uppsättning linjära konstitutiva relationer, som även tillåter koppling mellan de elektriska och magnetiska fälten, är följande ansats:

$$\begin{cases} \mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \left\{ \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \chi_{ee}(t-t') \cdot \mathbf{E}(t') dt' + \eta_0 \int_{-\infty}^t \chi_{em}(t-t') \cdot \mathbf{H}(t') dt' \right\} \\ \mathbf{B}(t) = \frac{1}{c_0} \left\{ \int_{-\infty}^t \chi_{me}(t-t') \cdot \mathbf{E}(t') dt' \right. \\ \quad \left. + \eta_0 \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}(t) + \eta_0 \int_{-\infty}^t \chi_{mm}(t-t') \cdot \mathbf{H}(t') dt' \right\} \end{cases} \quad (2.11)$$

Typ	$\epsilon, \chi_{ee}, \mu, \chi_{mm}$	χ_{em}, χ_{me}
Isotropt	Alla $\sim \mathbf{I}$	Båda $\mathbf{0}$
An-isotropt	Någon ej $\sim \mathbf{I}$	Båda $\mathbf{0}$
Bi-isotropt	Alla $\sim \mathbf{I}$	Båda $\sim \mathbf{I}$
Bi-an-isotropt	Alla övriga fall	

Tabell 2.1: Tabell över klassificering av elektromagnetiska material m.a.p. dess konstitutiva relationer.

eller omskrivet i komponentform ($i = 1, 2, 3$):

$$\left\{ \begin{array}{l} D_i(t) = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \left\{ \epsilon_{ij} E_j(t) + \int_{-\infty}^t \chi_{eeij}(t-t') E_j(t') dt' \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \eta_0 \int_{-\infty}^t \chi_{emij}(t-t') H_j(t') dt' \right\} \\ B_i(t) = \frac{1}{c_0} \sum_{j=1}^3 \left\{ \int_{-\infty}^t \chi_{meij}(t-t') E_j(t') dt' \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \eta_0 \mu_{ij} H_j(t) + \eta_0 \int_{-\infty}^t \chi_{mmij}(t-t') H_j(t') dt' \right\} \end{array} \right.$$

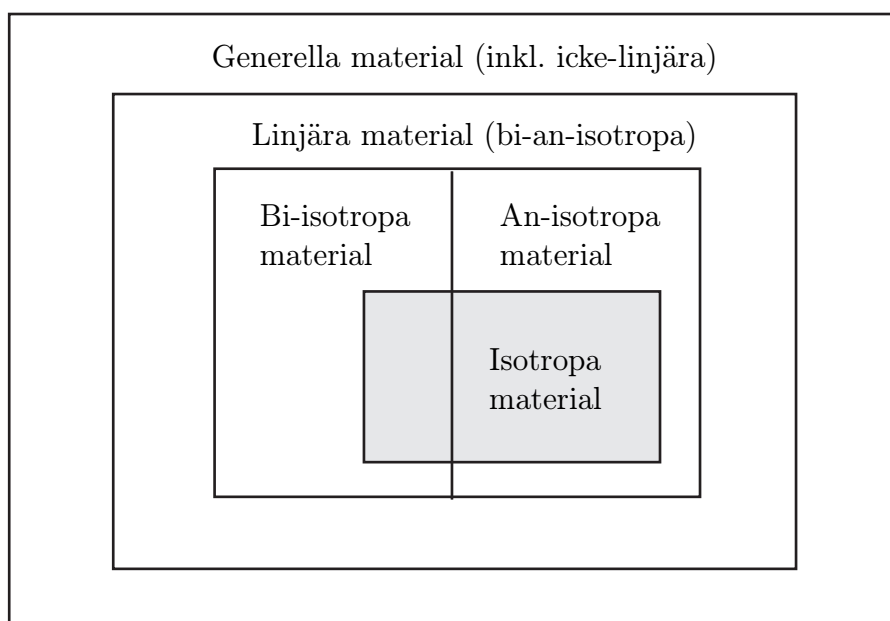
Här har vi infört vågimpedansen och ljushastigheten för vakuum $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$, respektive $c_0 = \sqrt{1/\epsilon_0\mu_0}$ för att få samma enheter på alla fält.

Denna ansats är väl motiverad av analysen i isotropa material tidigare i detta kapitel. Vi kommer att referera till denna allmänna ansats som de *dispersiva bi-an-isotropa* konstitutiva relationerna. Materialets dispersion beskrivs av de fyra (generaliserade) dyadvärda⁶ susceptibilitetsfunktionerna, $\chi_{kk'}(t)$, $k, k' = e, m$, vilkas komponentrepresentation i allmänhet består av nio oberoende komponenter vardera. Susceptibilitetsfunktionerna har alla enheten frekvens. Materialets optiska respons beskrivs av ϵ och μ , som båda är enhetslösa dyader. Lägg märke till att kopplings-termerna mellan $\mathbf{D}$ och $\mathbf{H}$ och mellan $\mathbf{B}$ och $\mathbf{E}$ saknar momentan respons.

Ett material klassificeras m.a.p. dess konstitutiva relationer enligt tabell 2.1, se även figur 2.5. De material för vilka $\chi_{em}(t) = \chi_{me}(t) = \mathbf{0}$ kallas *dispersiva an-isotropa* material, medan de där alla storheter är proportionella mot enhetsdyaden $\mathbf{I}$ kallas *dispersiva isotropa* eller *dispersiva bi-isotropa* material. Vi kommer senare att visa att speciella antaganden hos materialet leder till att dessa funktioner och matriser har speciella symmetrier.

I ett material som är bi-anisotropt, (2.11), kopplas magnetiska och elektriska effekter ihop på ett sätt som inte sker i ett anisotropt material. Kopplingen mellan elektriska och magnetiska effekter sker via funktionerna $\chi_{em}(t)$ och $\chi_{me}(t)$. Sålunda kan en pålagd magnetisk fält $\mathbf{H}$ ge upphov till en elektrisk flödestäthet $\mathbf{D}$ eller ekvivalent en elektrisk polarisation $\mathbf{P}$ i materialet. Omvänt kan ett elektriskt fält $\mathbf{E}$

⁶Dyadbegreppet är förklarat i appendix B.



Figur 2.5: Klassificering av material i schematisk mängdfigur. Arealen på varje materialklass är inte proportionell mot materialklassens storlek.

ge upphov till en magnetisering $\mathbf{M}$ i materialet. Detta är ej möjligt i ett anisotropt material.

Redan under förra seklet kände man till material, som i det optiska våglängdsområdet var s.k. *optiskt aktiva*. Dessa egenskaper kan förklaras med bi-anisotropa eller bi-isotropa konstitutiva relationer.⁷ Exempel på optiskt aktiva material är kristallin kvarts och olika sockerlösningar. Omkring 1960 upptäckte ryska forskare att flera magnetiska kristaller, t.ex. Cr_2O_3 , har liknande egenskaper. Dessa material refererades till som *magneto-elektriska* material. Nu pågår forskning för att utveckla material med liknande egenskaper i mikrovågsområdet. Intressanta tillämpningar finns bl a inom komponent- och antennenområdena. Optiskt aktiva material kommer att behandlas i detalj senare i denna bok.

Övningar till kapitel 2

2.1 Ett Debyematerial med susceptibilitetsfunktion $\chi(t) = \alpha \exp\{-t/\tau\}$ påverkas av ett elektriskt fält $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0[H(t) - H(t - T)]$ (abrupt till- och frånslag), där $\mathbf{E}_0$ är en

⁷Material vars spegelbild inte sammanfaller med det ursprungliga materialet uppvisar bi-anisotropa effekter. I naturen förekommer material som inte är invarianta under spegling i rummet på både mikroskopisk (atom eller molekylnivå) och på makroskopisk nivå. Man observerar dessutom att det finns en dominans av högerorienterade material. På mikroskopisk nivå finner vi sådana exempel hos t.ex. kromosoner, och i den makroskopiska världen hos t.ex. snäckor och slingerväxter. Orsaken till denna asymmetri mellan höger- och vänsterorienterade material går att spåra i atomkärnorna och den svaga växelverkans symmetribrott vid spegling i rummet.

i tiden konstant vektor och $T > 0$. Bestäm polarisationen $\mathbf{P}(t)$ i materialet som funktion av tiden t . Materialets optiska respons är $\epsilon = 1$.

- 2.2** I ett isotropt, svagt magnetiskt, material utbreder sig en elektromagnetisk chockvåg. Det magnetiska fältet för vågen är

$$\mathbf{H}(z, t) = \hat{\mathbf{x}} H_0 H(t - z/c_0)$$

där $H(t)$ är Heavisides stegfunktion och H_0 en reell konstant. Materialets magnetiska susceptibilitetsfunktion är $\chi_{\text{mm}}(t) = H(t)\alpha e^{-\beta t}$ och dess magnetiska optiska respons är $\mu = 1$. Bestäm magnetiseringen $\mathbf{M}(z, t)$ i materialet.

- 2.3** En plan gränsyta skiljer ett homogent Lorentz-material med försumbara förluster från vakuum. Materialets susceptibilitetsfunktion är $\chi(t) = \alpha \sin \beta t$. I gränsytan finns inga ytladdningar. Materialets optiska respons är $\epsilon = 1$. Det elektriska fältet i Lorentz-materialet nära gränsytan är (E konstant)

$$\mathbf{E}_2(t) = \begin{cases} \hat{\mathbf{n}}E & 0 < t < T \\ \mathbf{0} & \text{för övrigt} \end{cases}$$

Hur varierar det elektriska fältet ovanför gränsytan i vakuum, dvs. bestäm $\mathbf{E}_1(t)$? Förklara varför $\mathbf{E}_1(t)$ och $\mathbf{E}_2(t)$ skiljer sig åt.

- 2.4** En plan gränsyta ($z = 0$) skiljer ett homogent Lorentz-material med försumbara förluster från vakuum. Materialets susceptibilitetsfunktion är $\chi(t) = \alpha \sin \beta t$ och optiska responsen $\epsilon = 1$. Ytladdningstätheten antas vara noll i gränsytan. Parallellt med gränsytan utbreder sig en transient våg vars elektriska fält i vakuum nära gränsytan är (E reell konstant och $\omega_0 > 0$)

$$\mathbf{E}(y, t) = \hat{\mathbf{x}} E H(t - y/c_0) \cos \omega_0(t - y/c_0)$$

där $H(t)$ är Heavisides stegfunktion. Bestäm polarisationen $\mathbf{P}(y, t)$ vid gränsytan i Lorentz-materialet.

- 2.5** Beteckna elektronens laddning och massa med $q (= -e)$, respektive m . Elektronen rör sig i ett statiskt B -fält, som är riktat längs z -axeln, dvs. $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$. Ansätt följande konstitutiva relationer:

$$\mathbf{J}(t) = \sigma \mathbf{E}(t) + \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \boldsymbol{\Sigma}(t - t') \cdot \mathbf{E}(t') dt'$$

eller i komponentform

$$J_i(t) = \sigma E_i(t) + \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \int_{-\infty}^t \Sigma_{ij}(t - t') E_j(t') dt' \quad i = 1, 2, 3$$

Bestäm plasmats konstitutiva relationer.

Ledning: Visa att strömtätheten $\mathbf{J}$ satisfierar rörelseekvationen (Lorentz kraftekvation).

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} + \omega_g \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{J} = \epsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{E}$$

där ω_g , den gyrotropa frekvensen, och ω_p , materialets plasmafrekvens, är definierade av

$$\omega_g = \frac{qB_0}{m}$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}}$$

och N är antalet elektroner per volymsenhet i plasmat. Visa sedan att σ och $\mathbf{\Sigma}(t)$ satisfierar följande system av differentialekvationer.

$$\begin{cases} \sigma = 0 \\ \mathbf{\Sigma}(0) = \omega_p^2 \mathbf{I} \\ \frac{d\mathbf{\Sigma}(t)}{dt} + \omega_g \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{\Sigma}(t) = \mathbf{0} \end{cases}$$

2.6 Använd resultatet från övning 2.5 för att skriva om de konstitutiva relationerna för ett plasma på formen

$$\mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \left\{ \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \chi(t-t') \cdot \mathbf{E}(t') dt' \right\}$$

Detta svarar mot att transformera om resultatet i övning 2.5, där de konstitutiva relationerna är givna i konduktivitetsmodellen, till dispersionsmodellen.

Sammanfattning av kapitel 2

Dispersiva isotropa material

$$\mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \left\{ \epsilon \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \chi(t-t') \mathbf{E}(t') dt' \right\}$$

Exempel

$$\begin{array}{ll} \epsilon = 1 & \chi(t) = H(t) \frac{\omega_p^2}{\nu_0} \exp \left\{ -\frac{\nu t}{2} \right\} \sin \nu_0 t \quad (\text{Lorentz}) \\ \epsilon = 1 & \chi(t) = H(t) \alpha e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{Debye}) \end{array}$$

Dispersiva bi-anisotropa material

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(t) &= \epsilon_0 \left\{ \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \boldsymbol{\chi}_{ee}(t-t') \cdot \mathbf{E}(t') dt' \right. \\ &\quad \left. + \eta_0 \int_{-\infty}^t \boldsymbol{\chi}_{em}(t-t') \cdot \mathbf{H}(t') dt' \right\} \\ \mathbf{B}(t) &= \frac{1}{c_0} \left\{ \int_{-\infty}^t \boldsymbol{\chi}_{me}(t-t') \cdot \mathbf{E}(t') dt' \right. \\ &\quad \left. + \eta_0 \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}(t) + \eta_0 \int_{-\infty}^t \boldsymbol{\chi}_{mm}(t-t') \cdot \mathbf{H}(t') dt' \right\} \end{aligned}$$

Kapitel 3

Tidsharmoniska fält

Vår analys av vågutbredning i de kommande kapitlen kommer att ske med tidsharmoniska vågor. Detta åstadkommer vi genom att först utföra en fouriertransformering i tiden av alla ingående fältstorheter, såväl skalära som vektorvärda fält. I detta kapitel undersöker vi fouriertransformeringens konsekvenser för de konstitutiva relationerna och definierar dessutom aktiva, passiva och förlustfria material. Kapitlet avslutas med att vi inför reciprocitetsbegreppet och analyserar tidsharmoniska fälts polarisationstillstånd.

3.1 Tidsharmoniska fält och Fouriertransform

Fouriertransformen (i tiden) av ett vektorfält, t.ex. det elektriska fältet $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, definieras som

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt$$

med invers transform

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

På liknande sätt definieras Fouriertransformen av alla de övriga tidsberoende vektor- och skalärfälten. För att undvika klumpiga beteckningar används samma symboler för det fysikaliska fältet $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, som för det fouriertransformerade fältet $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$. I de allra flesta fall framgår det av sammanhanget om det fysikaliska fältet eller det fouriertransformerade avses. I tveksamma fall skrivs tidsargumentet t eller (vinkel)frekvensen ω ut, och på så sätt anges vilket fält som åsyftas.

De fysikaliska fälten är alltid reella storheter, vilket innebär att Fouriertransformen för negativa ω är relaterad till Fouriertransformen för positiva ω . Att $\mathbf{E}$ -fältet är reellvärt innebär att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \right\}^*$$

där $*$ innebär komplexkonjugering. För reella ω gäller således

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, -\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

där vi i den sista integralen gjort en variabeltransformation $\omega \rightarrow -\omega$. För reella ω gäller därför att

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, -\omega)$$

När det tidsberoende fältet skall konstrueras från Fouriertransformen räcker det således att endast integrera över de icke-negativa frekvenserna. Genom variabelbytet, $\omega \rightarrow -\omega$, och utnyttjande av villkoret ovan får vi nämligen

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} + \mathbf{E}(\mathbf{r}, -\omega) e^{i\omega t}] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t}] d\omega = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

där Re anger realdelen av det efterkommande komplexa uttrycket, som i detta fall är hela integralen. Det räcker således att integrera över de positiva frekvenserna och sedan att ta realdelen av integralen. Motsvarande villkor gäller givetvis för alla övriga fouriertransformerade fält som vi använder.

Fält med ett rent harmoniskt tidsberoende är i många tillämpningar speciellt intressanta, se tabell 3.1. Tidsharmoniska fält har komponenter vars tidsberoende kan skrivas på formen

$$\cos(\omega_0 t - \alpha)$$

Sådana fält får vi lätt med Fouriertransformen. Tag nämligen

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= \pi \left\{ \delta(\omega - \omega_0) [\hat{\mathbf{x}} E_x(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{y}} E_y(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{z}} E_z(\mathbf{r})] \right. \\ &\quad \left. + \delta(\omega + \omega_0) [\hat{\mathbf{x}} E_x^*(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{y}} E_y^*(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{z}} E_z^*(\mathbf{r})] \right\} \\ &= \pi \left\{ \delta(\omega - \omega_0) [\hat{\mathbf{x}} |E_x(\mathbf{r})| e^{i\alpha(\mathbf{r})} + \hat{\mathbf{y}} |E_y(\mathbf{r})| e^{i\beta(\mathbf{r})} + \hat{\mathbf{z}} |E_z(\mathbf{r})| e^{i\gamma(\mathbf{r})}] \right. \\ &\quad \left. + \delta(\omega + \omega_0) [\hat{\mathbf{x}} |E_x(\mathbf{r})| e^{-i\alpha(\mathbf{r})} + \hat{\mathbf{y}} |E_y(\mathbf{r})| e^{-i\beta(\mathbf{r})} + \hat{\mathbf{z}} |E_z(\mathbf{r})| e^{-i\gamma(\mathbf{r})}] \right\} \end{aligned}$$

där $\alpha(\mathbf{r})$, $\beta(\mathbf{r})$ och $\gamma(\mathbf{r})$ är komponenternas komplexa argument (fas), $\omega_0 \geq 0$ och där $\delta(\omega)$ är deltafunktionen. Notera att denna transform uppfyller $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, -\omega)$, som är kravet på ett reellt fält. Efter invers Fouriertransform får vi det fysikaliska fältet

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \{ \hat{\mathbf{x}} |E_x(\mathbf{r})| \cos(\omega_0 t - \alpha(\mathbf{r})) + \hat{\mathbf{y}} |E_y(\mathbf{r})| \cos(\omega_0 t - \beta(\mathbf{r})) \\ &\quad + \hat{\mathbf{z}} |E_z(\mathbf{r})| \cos(\omega_0 t - \gamma(\mathbf{r})) \} \end{aligned}$$

Band	Frekvens	Våglängd	Tillämpning
ELF	< 3 KHz	> 100 km	
VLF	3–30 KHz	100–10 km	Navigation
LV	30–300 KHz	10–1 km	Navigation
MV	300–3000 KHz	1000–100 m	Radio
KV (HF)	3–30 MHz	100–10 m	Radio
VHF	30–300 MHz	10–1 m	FM, TV
UHF	300–3000 MHz	100–10 cm	Radar, TV, navigation, mobilradio
SHF	3–30 GHz	10–1 cm	Radar, satellitkommunikation
EHF	30–300 GHz	10–1 mm	Radar
	> 300 GHz	< 1 mm	
	$4.2\text{--}7.9 \cdot 10^{14}$ Hz	$0.38\text{--}0.72 \mu\text{m}$	Synligt ljus

Tabell 3.1: Tabell över elektromagnetiska vågors spektrum.

Rent tidsharmoniska fält får vi också enklare genom att utnyttja endast de positiva frekvenserna och sedan ta realdelen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \} \quad (3.1)$$

Om $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ skrivs som

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= \hat{\mathbf{x}} E_x(\mathbf{r}, \omega) + \hat{\mathbf{y}} E_y(\mathbf{r}, \omega) + \hat{\mathbf{z}} E_z(\mathbf{r}, \omega) \\ &= \hat{\mathbf{x}} |E_x(\mathbf{r}, \omega)| e^{i\alpha(\mathbf{r})} + \hat{\mathbf{y}} |E_y(\mathbf{r}, \omega)| e^{i\beta(\mathbf{r})} + \hat{\mathbf{z}} |E_z(\mathbf{r}, \omega)| e^{i\gamma(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

får vi samma uttryck som ovan (nu utan index på ω). Vi kommer oftast att utnyttja detta andra sätt att bilda tidsharmoniska fält i de följande kapitlen.

3.2 Maxwells fältekvationer

Ett första steg i vår analys med tidsharmoniska fält blir att fouriertransformera Maxwells ekvationer (1.1) och (1.2) ($\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$)

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.3)$$

Det implicita harmoniska tidsberoendet $\exp\{-i\omega t\}$ är underförstått i dessa ekvationer, dvs. de fysikaliska fälten är

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \}$$

Samma konvention tillämpas alltid för tidsharmoniska fält. Notera att de elektromagnetiska fälten $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega)$, $\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega)$ och $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$, jämte strömtätheten $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega)$ i allmänhet är komplexa storheter.

Kontinuitetsekvationen (1.4) blir på liknande sätt

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \rho(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (3.4)$$

De två återstående ekvationerna från kapitel 1, (1.5) och (1.6), transformeras till

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \rho(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.6)$$

Dessa ekvationer är konsekvens av (3.2) och (3.3) och kontinuitetsekvationen (3.4) (jämför kapitel 1, sidan 3). Tag nämligen divergensen på Maxwells fältekvationer (3.2) och (3.3) vilket ger $(\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0)$

$$i\omega \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

$$i\omega \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \rho(\mathbf{r}, \omega)$$

Division med $i\omega$ (förutsatt att $\omega \neq 0$) ger sedan (3.5) och (3.6).

3.3 Konstitutiva relationer

De konstitutiva relationerna som introducerades i kapitel 2 för allmänna tidsberoende fält innehöll faltningar i tiden. I detta avsnitt behandlar vi de speciella förenklingar som en fouriertransformering i tiden leder till.

I avsnitt 2.3 användes en allmän ansats, (2.11), på de konstitutiva relationerna för bianisotropa material.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \left\{ \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t \boldsymbol{\chi}_{ee}(t-t') \cdot \mathbf{E}(t') dt' \right. \\ \quad \left. + \eta_0 \int_{-\infty}^t \boldsymbol{\chi}_{em}(t-t') \cdot \mathbf{H}(t') dt' \right\} \\ \mathbf{B}(t) = \frac{1}{c_0} \left\{ \int_{-\infty}^t \boldsymbol{\chi}_{me}(t-t') \cdot \mathbf{E}(t') dt' \right. \\ \quad \left. + \eta_0 \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}(t) + \eta_0 \int_{-\infty}^t \boldsymbol{\chi}_{mm}(t-t') \cdot \mathbf{H}(t') dt' \right\} \end{array} \right.$$

Eftersom Fouriertransformen av en faltningsintegral mellan två fält är en produkt av fältens Fouriertransformer får vi

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}(\omega) = \epsilon_0 \left\{ \left[\boldsymbol{\epsilon} + \int_0^\infty \boldsymbol{\chi}_{ee}(t) e^{i\omega t} dt \right] \cdot \mathbf{E}(\omega) + \eta_0 \int_0^\infty \boldsymbol{\chi}_{em}(t) e^{i\omega t} dt \cdot \mathbf{H}(\omega) \right\} \\ \mathbf{B}(\omega) = \frac{1}{c_0} \left\{ \int_0^\infty \boldsymbol{\chi}_{me}(t) e^{i\omega t} dt \cdot \mathbf{E}(\omega) + \eta_0 \left[\boldsymbol{\mu} + \int_0^\infty \boldsymbol{\chi}_{mm}(t) e^{i\omega t} dt \right] \cdot \mathbf{H}(\omega) \right\} \end{array} \right.$$

Det är lämpligt att införa följande symboler:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\epsilon}(\omega) = \boldsymbol{\epsilon} + \int_0^\infty \boldsymbol{\chi}_{ee}(t) e^{i\omega t} dt \\ \boldsymbol{\mu}(\omega) = \boldsymbol{\mu} + \int_0^\infty \boldsymbol{\chi}_{mm}(t) e^{i\omega t} dt \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\xi}(\omega) = \int_0^\infty \boldsymbol{\chi}_{em}(t) e^{i\omega t} dt \\ \boldsymbol{\zeta}(\omega) = \int_0^\infty \boldsymbol{\chi}_{me}(t) e^{i\omega t} dt \end{array} \right. \quad (3.7)$$

med inverser

$$\begin{cases} \chi_{ee}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\epsilon(\omega) - \epsilon] e^{-i\omega t} d\omega \\ \chi_{mm}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\mu(\omega) - \mu] e^{-i\omega t} d\omega \end{cases} \quad \begin{cases} \chi_{em}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ \chi_{me}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{cases}$$

Notera skillnaden mellan de optiska responserna ϵ och μ , som är reella dyader och skrivs utan argument, och de generaliserade, dyad-värda susceptibilitetsfunktionernas Fouriertransformer $\epsilon(\omega)$ och $\mu(\omega)$, som skrivs med argument ω . Det framgår normalt av sammanhanget vilka av storheter som avses. I tveksamma fall anger vi explicit vilka storheter som avses.

För att de generaliserade susceptibilitetsfunktionerna $\chi_{kk'}(t)$, $k, k' = e, m$, skall vara reella storheter måste dyaderna $\epsilon(\omega)$, $\xi(\omega)$, $\zeta(\omega)$ och $\mu(\omega)$ satisfiera

$$\begin{cases} \epsilon(\omega) = \epsilon^*(-\omega) \\ \mu(\omega) = \mu^*(-\omega) \end{cases} \quad \begin{cases} \xi(\omega) = \xi^*(-\omega) \\ \zeta(\omega) = \zeta^*(-\omega) \end{cases}$$

Beteckningarna i (3.7) förenklar de konstitutiva relationerna för tidsharmoniska fält (eller fouriertransformerade fält) till följande samband:

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \{ \epsilon \cdot \mathbf{E} + \eta_0 \xi \cdot \mathbf{H} \} \\ \mathbf{B} = \frac{1}{c_0} \{ \zeta \cdot \mathbf{E} + \eta_0 \mu \cdot \mathbf{H} \} \end{cases} \quad (3.8)$$

eller i komponentform

$$\begin{cases} D_i(\omega) = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \{ \epsilon_{ij}(\omega) E_j(\omega) + \eta_0 \xi_{ij}(\omega) H_j(\omega) \} \\ B_i(\omega) = \frac{1}{c_0} \sum_{j=1}^3 \{ \zeta_{ij}(\omega) E_j(\omega) + \eta_0 \mu_{ij}(\omega) H_j(\omega) \} \end{cases}$$

där alla komponenter är funktioner av (vinkel-)frekvensen ω (och rumskoordinaterna $\mathbf{r}$). Dyaderna (eller motsvarande matriser) ϵ , ξ , ζ och μ är alla enhetslösa dyader, med den normering vi valt i (3.8). Dyaderna ϵ och μ används så ofta att de har egna namn; de brukar kallas *dielektricitetsdyaden*, respektive *permeabilitetsdyaden*.

3.3.1 Klassificering

En indelning av olika material med avseende på de konstitutiva relationerna görs enligt tabell 3.2. Denna indelning är helt analog till den indelning som infördes för tidsberoende fält, se tabell 2.1.

Det mest komplicerade materialen beskrivs av (3.8), medan det enklaste material enligt denna klassificering är de isotropa materialen, som vi redan stiftat bekantskap

Typ	ϵ, μ	ξ, ζ
Isotropt	Båda $\sim \mathbf{I}$	Båda $\mathbf{0}$
An-isotropt	Någon ej $\sim \mathbf{I}$	Båda $\mathbf{0}$
Bi-isotropt	Båda $\sim \mathbf{I}$	Båda $\sim \mathbf{I}$
Bi-an-isotropt	Alla övriga fall	

Tabell 3.2: Tabell över klassificering av elektromagnetiska material m.a.p. dess konstitutiva relationer för tidsharmoniska fält. Dyaden $\mathbf{I}$ betecknar enhetsdyaden.

Uniaxialt	$\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3$
Biaxialt	$\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$

Tabell 3.3: Tabell över klassificering av anisotropa material.

med i avsnitt 2.1, men då i en tidsberoende formulering. För tidsharmoniska fält ges de konstitutiva relationerna i ett isotropt material av

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \end{cases} \quad (3.9)$$

ϵ och μ kallas materialets (relativa) dielektricitets- respektive permeabilitetsfunktion.¹ Den isotropa modellen används flitigt och utgör också en god modell för många isolatormaterial, t.ex. glas, porslin och flera plaster.

Vi noterar också att material med ledningsförmåga som uppfyller Ohms lag, (2.4) på sidan 20, alltid kan inkluderas i de konstitutiva relationerna genom att definiera en ny dielektricitetsdyad² i (3.8).

$$\epsilon_{\text{ny}} = \epsilon_{\text{gamal}} + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \mathbf{I}$$

där $\mathbf{I}$ är enhetsdyaden. Högerledet i Ampères lag (3.3) är nämligen

$$\mathbf{J} - i\omega \mathbf{D} = \sigma \mathbf{E} - i\omega \epsilon_0 \left\{ \epsilon_{\text{gamal}} \cdot \mathbf{E} + \eta_0 \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{H} \right\} = -i\omega \epsilon_0 \left\{ \epsilon_{\text{ny}} \cdot \mathbf{E} + \eta_0 \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{H} \right\}$$

De anisotropa materialen kan ytterligare klassificeras. Den elektriska dielektricitetsdyaden ϵ är oftast, som vi senare kommer att se, Hermitesk, dvs.

$$\epsilon = \epsilon^\dagger$$

vilket för dyadens komponenter betyder att $\epsilon_{ij}^\dagger = \epsilon_{ji}^*$. Om vidare dielektricitetsdyaden ϵ är reell kan vi välja kartesiska koordinataxlar så att dielektricitetsdyadens

¹Även uttrycket dielektricitets- respektive permeabilitetskonstant förekommer, även om de i allmänhet inte är konstanter utan funktioner av $\mathbf{r}$ och ω . Enligt Svensk standard [30] skall ϵ benämnas kapacitivitet.

²Detta är analogt till det förfarande som presenterades i kapitel 2 där ledningsförmågan σ inkluderas i en ny susceptibilitetsfunktion $\chi_{\text{ny}}(t)$, se sidan 22.

Typ	Diagonalelement	Kristallsymmetri
Isotropt	$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$	Kubisk
Uniaxialt	$\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3$	Tetragonal, Hexagonal Trigonal
Biaxialt	$\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$	Ortorombisk, Hexagonal Monoklin, Triklin

Tabell 3.4: Tabell över olika kristallsymmetrier och ϵ_i :s värden.

koordinatrepresentation $[\epsilon]$ i detta nya koordinatsystem är diagonal.

$$[\epsilon] = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Anisotropa material med diagonal dielektricitetsmatris $[\epsilon]$ kan indelas i två huvudfall enligt tabell 3.3. För uniaxiala material utgör z -axeln en symmetriaxel och benämnes ofta *optisk axel* efter tillämpningar inom optiken. Vidare kallas uniaxiala material *positivt (negativt) uniaxiala* om $\epsilon_3 > \epsilon_1 = \epsilon_2$ ($\epsilon_3 < \epsilon_1 = \epsilon_2$).

I ett material som uppvisar kristallstruktur avgör kristallens symmetri ϵ_1 , ϵ_2 och ϵ_3 :s värden. De viktigaste exemplen ges i tabell 3.4.

Även bi-isotropa material klassificeras med avseende på dess symmetriegenskaper. Vi återkommer till detta i avsnitt 4.5, se speciellt tabell 4.3.

3.3.2 Exempel

I kapitel 2 analyserade vi i detalj två viktiga exempel på konstitutiva relationer som vi nu kan transformera med hjälp av (3.7).

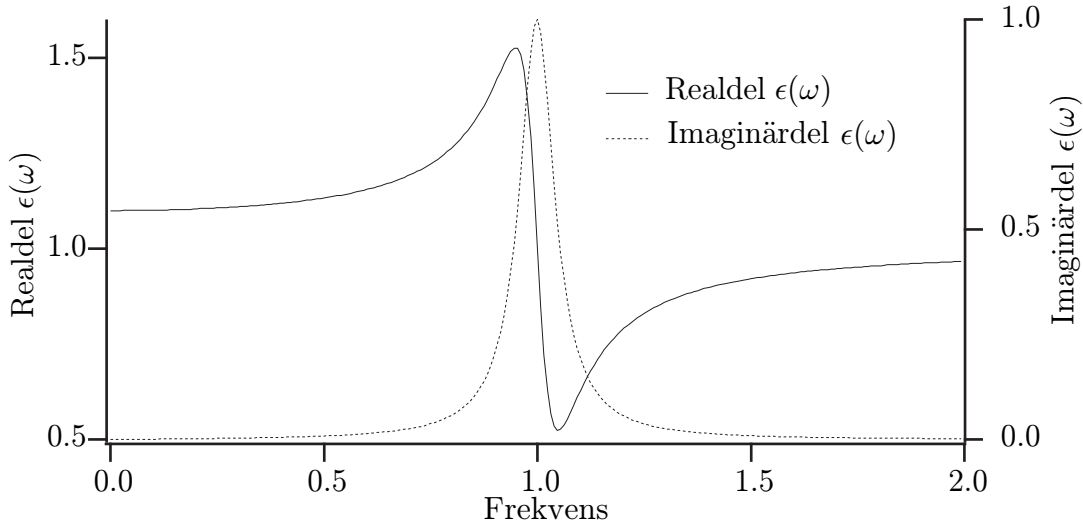
Lorentzmodellen: För Lorentzmodellen, som ges av en susceptibilitetsfunktion, se (2.8)

$$\chi(t) = H(t) \frac{\omega_p^2}{\nu_0} e^{-\frac{\nu}{2}t} \sin \nu_0 t \quad \epsilon = 1$$

får vi motsvarande storhet för tidsharmoniska fält efter fouriertransformering, se (3.7). Resultatet blir att dielektricitetsdyaden, $\epsilon(\omega) = \epsilon(\omega)\mathbf{I}$, kan skrivas

$$\epsilon(\omega) = \epsilon + \int_0^\infty \chi(t) e^{i\omega t} dt = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\nu} = 1 - \frac{\omega_p^2(\omega^2 - \omega_0^2) - i\omega_p^2\omega\nu}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\nu^2}$$

Den skalära funktionen $\epsilon(\omega)$:s typiska funktionsberoende för ett Lorentzmaterial exemplifieras i figur 3.1. En anpassning till experimentella reflektionsdata med en Lorentzmodell ges i exempel 4.4 på sidan 97.



Figur 3.1: Dielektricitetsfunktionen $\epsilon(\omega)$ som funktion av frekvensen ω för ett Lorentzmaterial. Frekvensskalan är i enheter av ω_0 ($\omega_p = \sqrt{0.1}\omega_0$ och $\nu = 0.1\omega_0$).

Debyemodellen: Debyemodellen, vars susceptibilitetsfunktion, se (2.10), ges av

$$\chi(t) = H(t)\alpha e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \epsilon = 1$$

transformeras på motsvarande sätt till frekvensplanet. Resultatet blir

$$\epsilon(\omega) = \epsilon + \int_0^\infty \chi(t)e^{i\omega t} dt = 1 + \frac{\alpha\tau}{1 - i\omega\tau} = 1 + \frac{\alpha\tau + i\omega\alpha\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2}$$

och vars typiska funktionsberoende ges i figur 3.2.

I figur 3.3 visas experimentella data på dielektricitetsfunktionen för vatten och en anpassning till en Debyemodell. Vi har i anpassningen använt oss av en Debye-modell med en extra term för optisk respons, som i detta fall utgörs av snabba elektronrörelser i materialet.

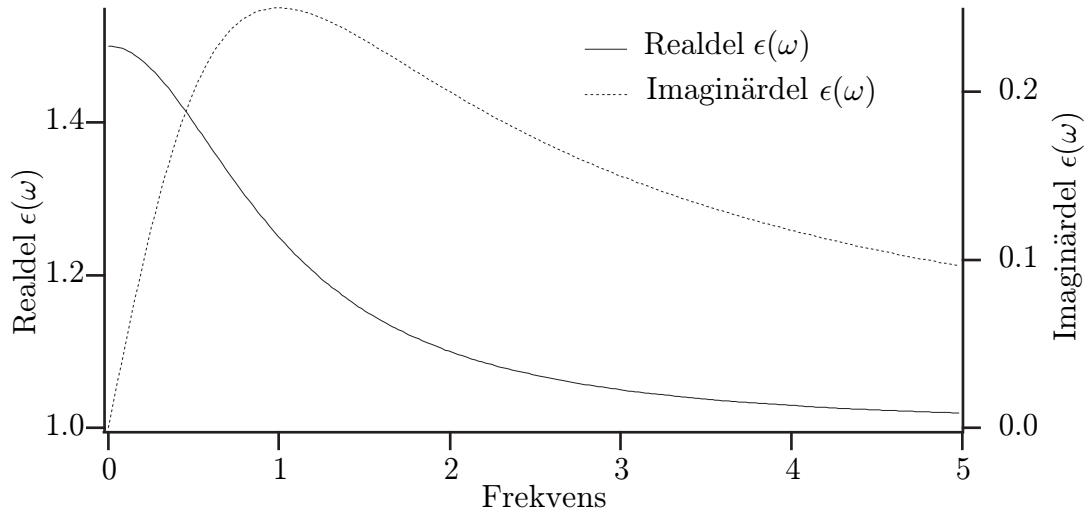
$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 - i\omega\tau}$$

där ϵ_∞ är dielektricitetsfunktionens värde för höga frekvenser medan ϵ_s är värdet för $\omega = 0$ (statiska värdet). Explicita värden som använts i figur 3.3 är

$$\begin{cases} \tau = 1.0 \cdot 10^{-11} \text{ s} \\ \epsilon_\infty = 5.27 \\ \epsilon_s = 80.0 \end{cases}$$

Motsvarande värden för etanol som också är en polär vätska är:

$$\begin{cases} \tau = 1.2 \cdot 10^{-10} \text{ s} \\ \epsilon_\infty = 4.4 \\ \epsilon_s = 25.1 \end{cases}$$



Figur 3.2: Dielektricitetsfunktionen $\epsilon(\omega)$ som funktion av frekvensen ω för ett Debyematerial. Frekvensskalan är i enheter av $1/\tau$ ($\alpha = 0.5/\tau$).

Om vattnet även har ett saltinnehåll kan vi modifiera modellen genom att lägga till en ledningsförmåga σ .

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 - i\omega\tau} + i \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}$$

Explicit värde på σ för saltvatten är $\sigma = 3\text{--}5 \text{ S/m}$, medan för sött vatten gäller $\sigma = 10^{-3} \text{ S/m}$.

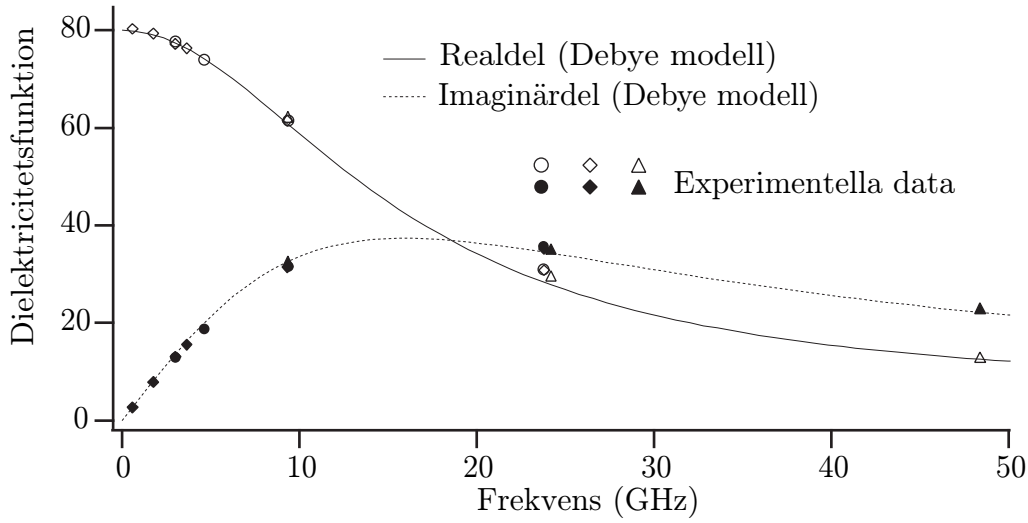
För högre frekvenser har dielektricitetsfunktionen för vatten ett mer komplicerat utseende och Debyemodellen stämmer inte längre beroende på att andra processer blir dominerande. Dielektricitetsfunktionens utseende för högre frekvenser visas i figur 3.4.

3.4 Poyntings sats, aktiva, passiva och förlustfria material

I kapitel 1 härledde vi Poyntings sats, se (1.15) på sidan 9.

$$\nabla \cdot \mathbf{S}(t) + \mathbf{H}(t) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} + \mathbf{E}(t) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} + \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{J}(t) = 0$$

Ekvationen beskriver effektkonsivering och innehåller produkter av fält. Vi är här intresserade av att studera tidsharmoniska fält, och den storhet som då är av störst



Figur 3.3: Experimentella data på dielektricitetsfunktionen $\epsilon(\omega)$ som funktion av frekvensen ω för vatten vid 20° C i frekvensområdet upp till 50 GHz. (Data är hämtade från Cock *et al.*, *Br. J. Appl. Phys.* **3**, 249 (1952), Grant *et al.*, *J. Chem. Phys.* **26**, 156 (1957), Lane *et al.*, *Proc. R. Soc. Lond.* **A213**, 400 (1952).)

intresse är tidsmedelvärdet över en period.³ Tidsmedelvärdet betecknas med $\langle \cdot \rangle$ och för Poyntings sats får vi

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{S}(t) \rangle + \langle \mathbf{H}(t) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \rangle + \langle \mathbf{E}(t) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} \rangle + \langle \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{J}(t) \rangle = 0$$

De olika produkttermerna blir efter medelvärdesbildning

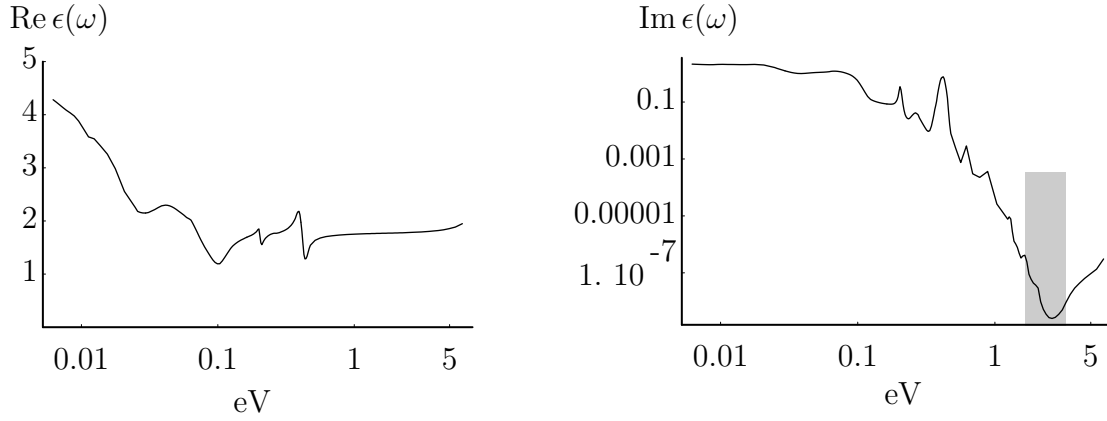
$$\langle \mathbf{S}(t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}(\omega) \times \mathbf{H}^*(\omega) \} \quad (3.11)$$

och

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{H}(t) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ i\omega \mathbf{H}(\omega) \cdot \mathbf{B}^*(\omega) \} \\ \langle \mathbf{E}(t) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ i\omega \mathbf{E}(\omega) \cdot \mathbf{D}^*(\omega) \} \\ \langle \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{J}(t) \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}(\omega) \cdot \mathbf{J}^*(\omega) \} \end{aligned}$$

³Tidsmedelvärdet av produkten av två tidsharmoniska fält $f_1(t)$ och $f_2(t)$ fås lätt genom att bilda medelvärdet över en period $T = 2\pi/\omega$.

$$\begin{aligned} \langle f_1(t)f_2(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T f_1(t)f_2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{Re} \{ f_1(\omega)e^{-i\omega t} \} \operatorname{Re} \{ f_2(\omega)e^{-i\omega t} \} dt \\ &= \frac{1}{4T} \int_0^T \{ f_1(\omega)f_2(\omega)e^{-2i\omega t} + f_1^*(\omega)f_2^*(\omega)e^{2i\omega t} + f_1(\omega)f_2^*(\omega) + f_1^*(\omega)f_2(\omega) \} dt \\ &= \frac{1}{4} \{ f_1(\omega)f_2^*(\omega) + f_1^*(\omega)f_2(\omega) \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ f_1(\omega)f_2^*(\omega) \} \end{aligned}$$



Figur 3.4: Real- och imaginärdel av dielektricitetsfunktionen för (rent) vatten som funktion av frekvensen (elektronvolt). 1 eV motsvarar en frekvens på $2.42 \cdot 10^{14}$ Hz eller en våglängd på $1.24 \mu\text{m}$. Uppförandet hos dielektricitetsfunktionen för lägre frekvenser visas i figur 3.3. Det optiska fönstret svarar mot ca. 1.7–3.3 eV och är skuggat i den högra figuren. (Data är hämtade från Hale och Query, *Appl. Optics* **12**(3), 555 (1973) och Irvine och Pollack, *Icarus* **8**, 324 (1968).)

Poyntings sats (effektbalans) för tidsharmoniska fält, medelvärdesbildat över en period, får följande utseende ($\langle \nabla \cdot \mathbf{S}(t) \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{S}(t) \rangle$):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle \mathbf{S}(t) \rangle + \frac{1}{2} \text{Re} \{ i\omega [\mathbf{H}(\omega) \cdot \mathbf{B}^*(\omega) + \mathbf{E}(\omega) \cdot \mathbf{D}^*(\omega)] \} \\ + \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}(\omega) \cdot \mathbf{J}^*(\omega) \} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Av speciellt intresse är fallet utan strömmar⁴ $\mathbf{J} = \mathbf{0}$. Poyntings sats förenklas då till

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle \mathbf{S}(t) \rangle &= -\frac{1}{2} \text{Re} \{ i\omega [\mathbf{H}(\omega) \cdot \mathbf{B}^*(\omega) + \mathbf{E}(\omega) \cdot \mathbf{D}^*(\omega)] \} \\ &= -\frac{i\omega}{4} \left\{ \mathbf{H}(\omega) \cdot \mathbf{B}^*(\omega) - \mathbf{H}^*(\omega) \cdot \mathbf{B}(\omega) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{E}(\omega) \cdot \mathbf{D}^*(\omega) - \mathbf{E}(\omega)^* \cdot \mathbf{D}(\omega) \right\} \end{aligned}$$

där vi använt $\text{Re } z = \frac{1}{2}(z + z^*)$.

Sätt in de konstitutiva relationerna från ekvation (3.8). Divergensen av Poyntings vektor $\langle \nabla \cdot \mathbf{S}(t) \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{S}(t) \rangle$ blir då uttryckt i fälten $\mathbf{E}$ och $\mathbf{H}$.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle \mathbf{S}(t) \rangle &= -\frac{i\omega\epsilon_0}{4} \left\{ \eta_0 \mathbf{H} \cdot (\boldsymbol{\zeta}^* \cdot \mathbf{E}^* + \eta_0 \boldsymbol{\mu}^* \cdot \mathbf{H}^*) - \eta_0 \mathbf{H}^* \cdot (\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{E} + \eta_0 \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{E} \cdot (\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \mathbf{E}^* + \eta_0 \boldsymbol{\xi}^* \cdot \mathbf{H}^*) - \mathbf{E}^* \cdot (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E} + \eta_0 \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{H}) \right\} \\ &= \frac{i\omega\epsilon_0}{4} \left\{ \mathbf{E}^* \cdot (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^\dagger) \cdot \mathbf{E} + \eta_0^2 \mathbf{H}^* \cdot (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^\dagger) \cdot \mathbf{H} \right. \\ &\quad \left. + \eta_0 \mathbf{E}^* \cdot (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^\dagger) \cdot \mathbf{H} + \eta_0 \mathbf{H}^* \cdot (\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}^\dagger) \cdot \mathbf{E} \right\} \end{aligned}$$

⁴Ledningsströmmar kan, som vi sett, inkluderas i dielektricitetsdyaden $\boldsymbol{\epsilon}$.

där dolttecknet † betecknar dyadens Hermitekonjugat. Vi har här använt att

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{b}^* = \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{a}$$

Ibland är det praktiskt att använda kombinerade matris- och dyad-beteckningar. Vi skriver divergensen av Poyntings vektor på följande kompakta sätt:

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{S}(t) \rangle = \frac{i\omega\epsilon_0}{4} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \eta_0 \mathbf{H} \end{pmatrix}^\dagger \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^\dagger & \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^\dagger \\ \boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}^\dagger & \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^\dagger \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \eta_0 \mathbf{H} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Kvantiteten $-\nabla \cdot \langle \mathbf{S}(t) \rangle$ anger medelvärdet på den effekt som det elektromagnetiska fältet avger till materialet per volymsenhet. Vi använder denna storhet för att klassificera material såsom aktiva, passiva och förlustfria material. Följande definitioner införs för given fix frekvens $\omega \neq 0$:

Passivt material om	$\nabla \cdot \langle \mathbf{S}(t) \rangle < 0$
Aktivt material om	$\nabla \cdot \langle \mathbf{S}(t) \rangle > 0$
Förlustfritt material om	$\nabla \cdot \langle \mathbf{S}(t) \rangle = 0$

för alla (icke-statiska) fält $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} \neq \{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}$.

Denna definition har följande fysikaliska implikationer. En volymsintegrering av $\nabla \cdot \langle \mathbf{S}(t) \rangle$ över en volym V med randyta S (utåtriktad normal $\hat{\mathbf{n}}$) ger med divergenssatsen.

Passivt material	$\iint_S \langle \mathbf{S}(t) \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} dS < 0$
Aktivt material	$\iint_S \langle \mathbf{S}(t) \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} dS > 0$
Förlustfritt material	$\iint_S \langle \mathbf{S}(t) \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$

Dessa definitioner innebär att för ett passivt material i V är alltid den utstrålade medeleffekten negativ, $\iint_S \langle \mathbf{S}(t) \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} dS < 0$, medan i ett aktivt är den positiv genom att elektromagnetisk energi skapas (genom icke-elektromagnetiska källor i V). I ett förlustfritt material förblir den utstrålade effekten över en period noll, lika mycket strålar in som ut under en period. Notera att denna klassificering gäller för en specifik frekvens. Ett ämne kan vara passivt för en viss frekvens, förlustfritt för annan, medan det kan vara aktivt för en tredje frekvens. Man kan visa att ett material (undantag vakuum) inte kan vara förlustfritt för alla frekvenser.

För förlustfria material måste dyaderna $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\zeta}$ och $\boldsymbol{\mu}$ i de konstitutiva relationerna i (3.8) uppfylla vissa villkor. Från (3.13) ser vi att

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^\dagger \\ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^\dagger \\ \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta}^\dagger \end{cases} \quad \text{förlustfria material} \quad (3.14)$$

eftersom fälten $\mathbf{E}$ och $\mathbf{H}$ kan väljas godtyckligt. För ett isotropt material får vi direkt att ϵ och μ i (3.9) måste vara reella tal för ett förlustfritt material.⁵ Vidare gäller för förlustfria anisotropa material med reell dielektricitetsmatris att

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$$

dvs. $[\epsilon]$ är en symmetrisk matris, vilket var en förutsättning för diagonaliseringen (med reella koordinataxlar) och klassificeringen enligt tabell 3.3.

Vi kan också finna villkor på materialparametrarna i ett passivt material. Vi behandlar inte det mest generella fallet här utan vi nöjer oss med att behandla ett anisotropt material. För att ett anisotropt material skall vara passivt krävs att, se (3.13)

$$\begin{cases} i\omega \mathbf{E}^* \cdot (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^\dagger) \cdot \mathbf{E} < 0 \\ i\omega \mathbf{H}^* \cdot (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^\dagger) \cdot \mathbf{H} < 0 \end{cases} \quad \text{passiva anisotropa material}$$

för alla fält $\mathbf{E}$ och $\mathbf{H}$. Detta påstående är ekvivalent med att de Hermiteska dyaderna $i\omega \cdot (\boldsymbol{\epsilon}^\dagger - \boldsymbol{\epsilon})$ och $i\omega \cdot (\boldsymbol{\mu}^\dagger - \boldsymbol{\mu})$ är positivt definita dyader.⁶ För ett isotropt material förenklas detta till att

$$\begin{cases} \text{Im } \epsilon > 0 \\ \text{Im } \mu > 0 \end{cases} \quad \text{passiva isotropa material } (\omega > 0)$$

Villkor på materialparametrarna för att ett bi-isotropt material skall vara passivt ges i övning 3.8.

3.5 Reciprocitet

I avsnitt 3.4 studerade vi effektförbrukningen i ett material. Speciellt fann vi att storheten $\nabla \cdot \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle$ kunde användas för att klassificera olika material. Vi införde begreppen aktiva, passiva och förlustfria material beroende på om denna storhet var positiv, negativ eller om den var noll. Dessa begrepp var lokala i rummet, dvs. de gäller för en viss rumspunkt.

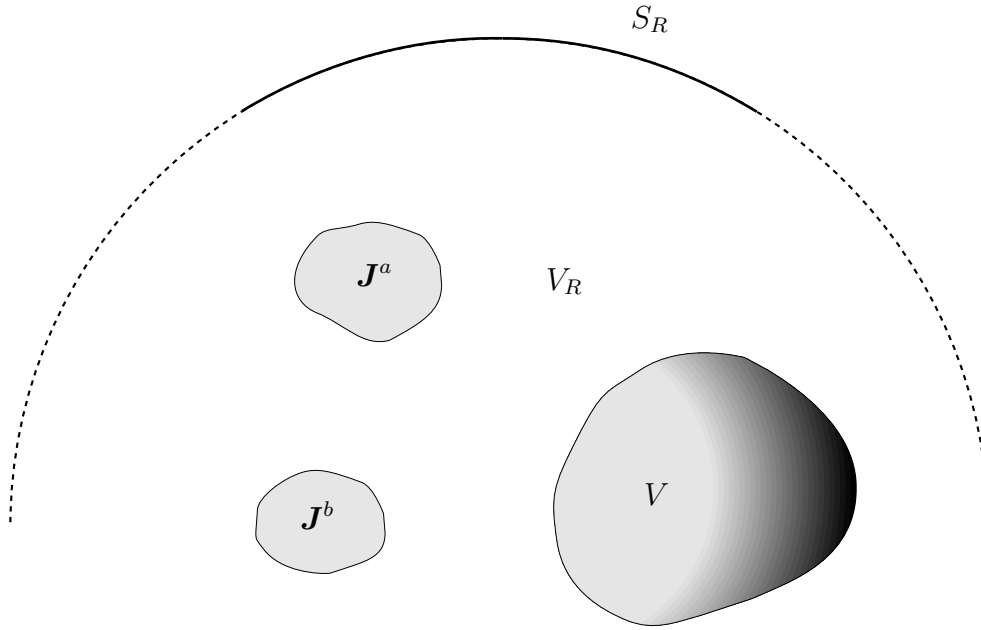
I detta avsnitt inför vi en ny egenskap eller klassificering av material, nämligen reciprocitet. Reciprocitet innebär att vi jämför effekterna på ett material från två olika källfördelningar. En uppsättning källor, som ges av $\mathbf{J}^a$, ger upphov till ett elektromagnetiskt fält, som vi indicerar med a , dvs. fälten är $\mathbf{E}^a$, $\mathbf{H}^a$, $\mathbf{D}^a$ och $\mathbf{B}^a$.

⁵Ett isotropt material med dispersion kan inte vara förlustfritt för alla frekvenser, eftersom då är enligt (3.7)

$$0 = \int_0^\infty \chi(t) \sin \omega t \, dt = \frac{1}{2i} \left\{ \int_0^\infty \chi(t) e^{i\omega t} \, dt - \int_{-\infty}^0 \chi(-t) e^{i\omega t} \, dt \right\} \text{ för alla } \omega$$

vilket medför att funktionen $H(t)\chi(t) - H(-t)\chi(-t) = 0$. Detta implicerar att $\chi(t)$ är identiskt noll och vi får en motsägelse.

⁶En Hermitesk dyad är positivt definit om alla dess egenvärden är positiva reella tal.



Figur 3.5: Materialet i volymen V exciteras av två olika källfördelningar $\mathbf{J}^a$ och $\mathbf{J}^b$.

En annan uppsättning källor och fält indiceras vi med b , dvs. källor och fält $\mathbf{J}^b$, $\mathbf{E}^b$, $\mathbf{H}^b$, $\mathbf{D}^b$ och $\mathbf{B}^b$. Källorna antas ligga inom en ändlig volym i rummet och materialet ligger i volymen V . Utanför källfördelningarna och volymen V antar vi vakuum. Figur 3.5 illustrerar detta schematiskt.

Materialets reciprocitetsegenskaper vill vi göra som en lokal definition och vi inför därför följande definition: Ett material sägs vara reciprokt i en punkt $\mathbf{r}$ om

$$\mathbf{E}^a \cdot \mathbf{D}^b - \mathbf{E}^b \cdot \mathbf{D}^a = \mathbf{H}^a \cdot \mathbf{B}^b - \mathbf{H}^b \cdot \mathbf{B}^a \quad (3.15)$$

för alla fält i denna punkt. Kvantiteten $\mathbf{E}^a \cdot \mathbf{D}^b + \mathbf{B}^a \cdot \mathbf{H}^b$ är för reciproka material invariant under bytet $a \leftrightarrow b$.

Innan vi undersöker vad denna definition har för effekt på de konstitutiva relationerna, skall vi se vilken fysikalisk bakgrund den har. Om vi antar att materialet liksom omgivningen är reciproka material, och integrerar över en volym V_R som innehåller materialet och källfördelningar $\mathbf{J}^a$ och $\mathbf{J}^b$ får vi, se figur 3.5

$$\iiint_{V_R} \{ \mathbf{E}^a \cdot \mathbf{D}^b - \mathbf{E}^b \cdot \mathbf{D}^a - \mathbf{H}^a \cdot \mathbf{B}^b + \mathbf{H}^b \cdot \mathbf{B}^a \} dv = 0$$

Med hjälp av Maxwells fältekvationer $i\omega \mathbf{D} = \mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{H}$ och $i\omega \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{E}$ samt

räkneregeln $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$ kan vi skriva om volymsintegralen.

$$\begin{aligned}
 0 &= i\omega \iiint_{V_R} \{ \mathbf{E}^a \cdot \mathbf{D}^b - \mathbf{E}^b \cdot \mathbf{D}^a - \mathbf{H}^a \cdot \mathbf{B}^b + \mathbf{H}^b \cdot \mathbf{B}^a \} dv \\
 &= \iiint_{V_R} \{ \mathbf{E}^a \cdot (\mathbf{J}^b - \nabla \times \mathbf{H}^b) - \mathbf{E}^b \cdot (\mathbf{J}^a - \nabla \times \mathbf{H}^a) \\
 &\quad - \mathbf{H}^a \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^b) + \mathbf{H}^b \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^a) \} dv \\
 &= \iiint_{V_R} \{ \mathbf{E}^a \cdot \mathbf{J}^b - \mathbf{E}^b \cdot \mathbf{J}^a \} dv + \iiint_{V_R} \nabla \cdot (\mathbf{E}^a \times \mathbf{H}^b - \mathbf{E}^b \times \mathbf{H}^a) dv
 \end{aligned}$$

Den första volymsintegralen i sista likheten har en integration som endast sker över källornas utsträckningar (två ändliga volymer). Denna integral är därför oberoende av vilken radie volymen V_R har. Med hjälp av divergenssatsen skriver vi om den sista volymsintegralen som en normalytintegral över volymen V_R 's randyta S_R . Eftersom den första volymsintegralen är oberoende av volymen V_R 's radie är även normalytintegralen oberoende av denna radie. Låter vi radien gå mot oändligheten, dvs. V_R blir hela rummet, kan man visa att normalytintegralen har värdet noll.⁷ För ett reciprokt material har vi visat att

$$\iiint \mathbf{E}^a \cdot \mathbf{J}^b dv = \iiint \mathbf{E}^b \cdot \mathbf{J}^a dv$$

Är denna likhet inte uppfylld för någon uppsättning av källor och fält har vi en icke-reciprok situation och avvikelserna är ett mått på skillnaden mellan källor i "a" ($\mathbf{J}^a$) och mätning i "b" ($\mathbf{E}^b$) och tvärtom. Mycket förenklat innebär reciprocitetsbegreppet att man låter källor och mottagare byta plats i problemet. Om mätresultatet förblir detsamma är materialet reciprokt.

Vi fortsätter nu med att undersöka vilka effekter reciprocitetsbegreppet får på de konstitutiva relationerna. Inför de konstitutiva relationerna (3.8) i definitionen på reciprocitet, (3.15). Vi får

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{E}^a \cdot (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}^b + \eta_0 \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{H}^b) - \mathbf{E}^b \cdot (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}^a + \eta_0 \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{H}^a) \\
 &- \eta_0 \mathbf{H}^a \cdot (\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{E}^b + \eta_0 \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}^b) + \eta_0 \mathbf{H}^b \cdot (\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{E}^a + \eta_0 \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}^a) = 0
 \end{aligned}$$

Med användning av

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{a}$$

⁷Då vi antagit att det är vakuum utanför materialet i volymen V kan man visa att fälten på stort avstånd uppfyller s.k. utstrålningsvillkor ($\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$)

$$\begin{cases} (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) - \eta_0 \eta \mathbf{H}(\mathbf{r}) = o((\omega r/c_0)^{-1}) \\ \eta_0 \eta (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r})) + \mathbf{E}(\mathbf{r}) = o((\omega r/c_0)^{-1}) \end{cases} \quad \text{då } r \rightarrow \infty$$

Från dessa villkor är det sedan möjligt att visa påståendet.

där t anger att dyaden är transponerad, kan vi förenkla reciprocitetsvillkoret.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^a \cdot (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^t) \cdot \mathbf{E}^b - \eta_0^2 \mathbf{H}^a \cdot (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^t) \cdot \mathbf{H}^b \\ + \eta_0 \mathbf{E}^a \cdot (\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta}^t) \cdot \mathbf{H}^b - \eta_0 \mathbf{H}^a \cdot (\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\xi}^t) \cdot \mathbf{E}^b = 0 \end{aligned}$$

Eftersom fälten kan väljas godtyckligt får vi följande villkor på de konstitutiva relationerna för ett reciprokt material:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^t \\ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^t \\ \boldsymbol{\xi} = -\boldsymbol{\zeta}^t \end{cases} \quad (3.16)$$

En omedelbar konsekvens av detta resultat är att alla isotropa material är reciproka. Är dielektricitetsdyaden dessutom reell så kan vi diagonalisera dess matrisrepresentation (med reella koordinataxlar) och klassificera enligt tabell 3.3. Detta är uppfyllt för reciproka förlustfria material.

3.6 Polarisationellipsen

Ett tidsharmoniskt fälts polarisation kan beskrivas geometriskt. Vi kommer i detta avsnitt att visa att alla tidsharmoniska fält svänger i ett plan och att fältvektorn följer kurvan av en ellips. Framställningen i detta avsnitt är koordinatoberoende, vilket är en styrka, eftersom vi då kan analysera ett fälts polarisation utan att referera till något specifikt koordinatsystem.

Om vi betraktar det tidsharmoniska fältet $\mathbf{E}(t)$ (rumsberoendet av koordinaterna $\mathbf{r}$ skrivs inte ut i detta avsnitt) i en fix punkt i rummet så gäller att fältets funktionsberoende av tiden är

$$\mathbf{E}(t) = \text{Re} \{ \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \} \quad (3.17)$$

$\mathbf{E}_0$ är en konstant komplex vektor (kan bero på ω) vars kartesiska komponenter är

$$\mathbf{E}_0 = \hat{\mathbf{x}} E_{0x} + \hat{\mathbf{y}} E_{0y} + \hat{\mathbf{z}} E_{0z} = \hat{\mathbf{x}} |E_{0x}| e^{i\alpha} + \hat{\mathbf{y}} |E_{0y}| e^{i\beta} + \hat{\mathbf{z}} |E_{0z}| e^{i\gamma}$$

och α , β och γ är komponenternas komplexa argument (fas).

Det första vi observerar är att vektorn $\mathbf{E}(t)$ i (3.17) ligger hela tiden i ett fixt plan i rummet. Vi inser lätt detta om vi uttrycker den komplexa vektorn $\mathbf{E}_0$ i två reella vektorer, $\mathbf{E}_{0r}$ och $\mathbf{E}_{0i}$.

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{0r} + i\mathbf{E}_{0i}$$

De reella vektorerna $\mathbf{E}_{0r}$ och $\mathbf{E}_{0i}$ är fixa i tiden, och deras explicita form är

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{0r} = \hat{\mathbf{x}} |E_{0x}| \cos \alpha + \hat{\mathbf{y}} |E_{0y}| \cos \beta + \hat{\mathbf{z}} |E_{0z}| \cos \gamma \\ \mathbf{E}_{0i} = \hat{\mathbf{x}} |E_{0x}| \sin \alpha + \hat{\mathbf{y}} |E_{0y}| \sin \beta + \hat{\mathbf{z}} |E_{0z}| \sin \gamma \end{cases}$$

Vektorn $\mathbf{E}(t)$ i (3.17) kan nu skrivas

$$\mathbf{E}(t) = \operatorname{Re} \{ (\mathbf{E}_{0r} + i\mathbf{E}_{0i}) e^{-i\omega t} \} = \mathbf{E}_{0r} \cos \omega t + \mathbf{E}_{0i} \sin \omega t \quad (3.18)$$

vilket medför att vektorn $\mathbf{E}(t)$ ligger i det plan som spänns upp av de reella vektorerna $\mathbf{E}_{0r}$ och $\mathbf{E}_{0i}$ för alla tider t . Normalen till detta plan är

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm \frac{\mathbf{E}_{0r} \times \mathbf{E}_{0i}}{|\mathbf{E}_{0r} \times \mathbf{E}_{0i}|}$$

förutsatt att $\mathbf{E}_{0r} \times \mathbf{E}_{0i} \neq \mathbf{0}$. I det fall $\mathbf{E}_{0r} \times \mathbf{E}_{0i} = \mathbf{0}$, dvs. de två reella vektorerna $\mathbf{E}_{0r}$ och $\mathbf{E}_{0i}$ är parallella, så svänger $\mathbf{E}$ -fältet längs en linje och något plan kan inte definieras.

De reella vektorerna $\mathbf{E}_{0r}$ och $\mathbf{E}_{0i}$, som spänner upp det plan i vilket vektorn $\mathbf{E}(t)$ svänger, är i allmänhet inte ortogonala mot varann. Det är dock i många sammanhang praktiskt att arbeta med ortogonala vektorer. Vi försöker därför ur vektorerna $\mathbf{E}_{0r}$ och $\mathbf{E}_{0i}$ konstruera två nya reella vektorer, $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$, som är vinkelräta mot varann och som spänner upp samma plan som vektorerna $\mathbf{E}_{0r}$ och $\mathbf{E}_{0i}$. Inför en linjär transformation

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{E}_{0r} \cos \chi + \mathbf{E}_{0i} \sin \chi \\ \mathbf{b} = -\mathbf{E}_{0r} \sin \chi + \mathbf{E}_{0i} \cos \chi \end{cases}$$

där vinkeln $\chi \in [-\pi/4, \pi/4] + n\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, definieras av

$$\tan 2\chi = \frac{2\mathbf{E}_{0r} \cdot \mathbf{E}_{0i}}{|\mathbf{E}_{0r}|^2 - |\mathbf{E}_{0i}|^2}$$

Genom denna konstruktion är $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ ortogonala ty

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (\mathbf{E}_{0r} \cos \chi + \mathbf{E}_{0i} \sin \chi) \cdot (-\mathbf{E}_{0r} \sin \chi + \mathbf{E}_{0i} \cos \chi) \\ &= -(|\mathbf{E}_{0r}|^2 - |\mathbf{E}_{0i}|^2) \sin \chi \cos \chi + \mathbf{E}_{0r} \cdot \mathbf{E}_{0i} (\cos^2 \chi - \sin^2 \chi) \\ &= -\frac{1}{2} (|\mathbf{E}_{0r}|^2 - |\mathbf{E}_{0i}|^2) \sin 2\chi + \mathbf{E}_{0r} \cdot \mathbf{E}_{0i} \cos 2\chi = 0 \end{aligned}$$

enligt definitionen på vinkeln χ .

Vi kan lösa ut $\mathbf{E}_{0r}$ och $\mathbf{E}_{0i}$ ur transformationen ovan. Resultatet blir

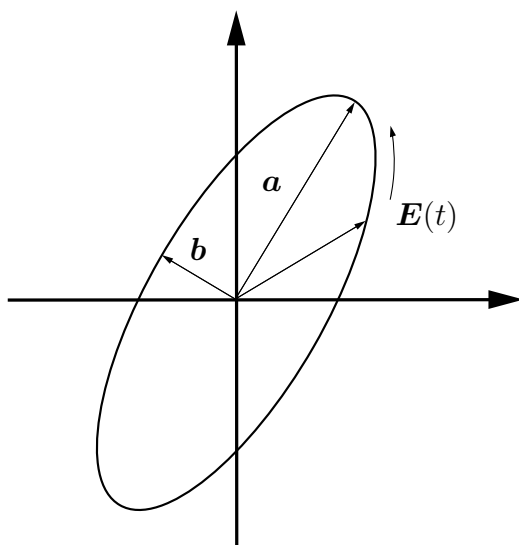
$$\begin{cases} \mathbf{E}_{0r} = \mathbf{a} \cos \chi - \mathbf{b} \sin \chi \\ \mathbf{E}_{0i} = \mathbf{a} \sin \chi + \mathbf{b} \cos \chi \end{cases}$$

dvs.

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{0r} + i\mathbf{E}_{0i} = (\mathbf{a} \cos \chi - \mathbf{b} \sin \chi) + i(\mathbf{a} \sin \chi + \mathbf{b} \cos \chi) = e^{i\chi}(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \quad (3.19)$$

Insatt i (3.18) får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) &= \mathbf{E}_{0r} \cos \omega t + \mathbf{E}_{0i} \sin \omega t \\ &= (\mathbf{a} \cos \chi - \mathbf{b} \sin \chi) \cos \omega t + (\mathbf{a} \sin \chi + \mathbf{b} \cos \chi) \sin \omega t \\ &= \mathbf{a} \cos(\omega t - \chi) + \mathbf{b} \sin(\omega t - \chi) \end{aligned} \quad (3.20)$$



Figur 3.6: Polarisationsellipsen och dess halvaxlar $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$.

Vektorerna $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ kan således användas som ett rätvinkligt koordinatsystem i det plan i vilket $\mathbf{E}$ -fältet svänger. Vidare ger en jämförelse med ellipsens ekvation i xy -planet (halvaxlar a och b längs x -, respektive y -axeln)

$$\begin{cases} x = a \cos \phi \\ y = b \sin \phi \end{cases}$$

och (3.20) att $\mathbf{E}$ -fältet följer en ellips i det plan som spänns upp av vektorerna $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ och att dessa vektorer är ellipsens halvaxlar (både till riktning och längd), se figur 3.6. Från (3.20) ser vi dessutom att $\mathbf{E}$ -fältet är riktat längs halvaxeln $\mathbf{a}$ då $\omega t = \chi + 2n\pi$, och att $\mathbf{E}$ -fältet är riktat längs den andra halvaxeln $\mathbf{b}$ då $\omega t = \chi + \pi/2 + 2n\pi$. Vinkeln χ anger var på ellipsen $\mathbf{E}$ -fältet är riktat vid tiden $t = 0$, dvs.

$$\mathbf{E}(t = 0) = \mathbf{a} \cos \chi - \mathbf{b} \sin \chi$$

och $\mathbf{E}$ -vektorn rör sig längs ellipsen i riktning från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{b}$ (kortaste vägen). Vektorerna $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ beskriver $\mathbf{E}$ -vektorns polarisationstillstånd fullständigt, så när som på fasfaktorn χ .

Vi kommer nu att klassificera det tidsharmoniska fältets polarisationstillstånd. Vektorn $\mathbf{E}(t)$, som svänger i ett plan längs en elliptisk bana, kan antingen rotera med- eller moturs. Utan en prefererad riktning i rymden blir omloppsriktningen ett relativt begrepp, beroende på vilken sida om svängningsplanet vi betraktar förloppet. Vi kommer att ur det elektromagnetiska fältets effekttransportriktning definiera en prefererad riktning. Hittills har fältet $\mathbf{E}(t)$ varit symbol för vilket godtyckligt tidsharmoniskt vektorfält som helst. Betraktar vi speciellt de elektriska och magnetiska fälten, $\mathbf{E}(t)$ och $\mathbf{H}(t)$, som båda roterar i elliptiska banor i två,

$i\hat{\mathbf{e}} \cdot (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*) = 2\hat{\mathbf{e}} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$	Polarisation
$= 0$	Linjär
> 0	Höger elliptisk
< 0	Vänster elliptisk

Tabell 3.5: Tabell över ett tidsharmoniskt fälts olika polarisationstillstånd.

i allmänhet skilda, plan. Motsvarande komplexa fältvektorer betecknar vi

$$\begin{cases} \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{0r} + i\mathbf{E}_{0i} \\ \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{0r} + i\mathbf{H}_{0i} \end{cases}$$

Medelvärde av Poyntings vektor, (3.11) på sidan 44, ger oss följande uttryck:

$$\langle \mathbf{S}(t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* \} = \frac{\mathbf{E}_{0r} \times \mathbf{H}_{0r} + \mathbf{E}_{0i} \times \mathbf{H}_{0i}}{2}$$

Definiera nu en enhetsvektor $\hat{\mathbf{e}}$, med vilken vi kan klassificera rotationsriktningen hos polarisationsellipsen.⁸

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{E}_{0r} \times \mathbf{H}_{0r} + \mathbf{E}_{0i} \times \mathbf{H}_{0i}}{|\mathbf{E}_{0r} \times \mathbf{H}_{0r} + \mathbf{E}_{0i} \times \mathbf{H}_{0i}|}$$

Fältets polarisationstillstånd klassificeras nu enligt värdet på $\hat{\mathbf{e}}$ -komponenten på $i\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* = 2\mathbf{E}_{0r} \times \mathbf{E}_{0i} = 2\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, se tabell 3.5. Fältvektorn roterar antingen moturs (högerpolarisation) eller medurs (vänsterpolarisation) i $\mathbf{a}$ - $\mathbf{b}$ -planet om vi antar att $\hat{\mathbf{e}}$ pekar mot observatören.⁹ Det degenererade fallet då vektorerna $\mathbf{E}_{0r}$ och $\mathbf{E}_{0i}$ är parallella innebär att fältvektorn rör sig längs en linje genom origo, därav namnet *linjär polarisation* eller plan polarisation. Den linjära polarisationen kan vi se som ett specialfall av elliptisk polarisation, där en av ellipsens halvaxlar är noll och karakteriseras av att $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* = \mathbf{0}$. För höger (vänster) elliptisk polarisation roterar fältet moturs (medurs) runt i $\mathbf{a}$ - $\mathbf{b}$ -planet om $\hat{\mathbf{e}}$ -axeln pekar mot betraktaren, se figur 3.7.

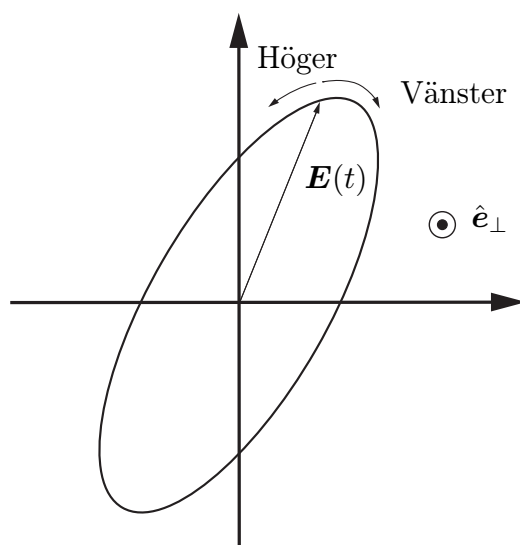
Ett specialfall av elliptisk polarisation är särskilt viktigt. Detta inträffar då ellipsen är en cirkel och vi har i så fall *cirkulär* polarisation. Om polarisationen är cirkulär kan kvantitativt avgöras genom att testa om $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0 = 0$. Med hjälp av (3.19) och ortogonaliteten mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ får vi

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0 = e^{2i\chi} (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) = e^{2i\chi} (|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2)$$

Polarisationsellipsen är således en cirkel, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, om och endast om $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0 = 0$. Rotationsriktningen avgörs genom att tecknet på $i\hat{\mathbf{e}} \cdot (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*)$. Höger (vänster)

⁸Vi undantar här det rent patologiska fallet då $\mathbf{E}_{0r}$ och $\mathbf{H}_{0r}$, respektive $\mathbf{E}_{0i}$ och $\mathbf{H}_{0i}$ är parallella.

⁹I den tekniska litteraturen förekommer även omvänd definition på höger-, respektive vänsterpolarisation. Exempel på omvänd definition är: Jackson [16], Stratton [31] och Van Bladel [33]. Vi använder samma definition på höger-, respektive vänsterpolarisation som t.ex. Cheng [8], Eliott [11], Kong [18] och Kraus [19]. Vår definition överensstämmer med IEEE-standard.



Figur 3.7: Polarisationsellipsen och definition av höger- och vänsterpolarisation. Vektorn $\hat{e}_\perp$ är enhetsvektorn $\hat{e}$:s komponent vinkelrätt mot planet i vilket $\mathbf{E}(t)$ svänger.

cirkulär polarisation förkortas ofta RCP (LCP) efter engelskans *Right (Left) Circular Polarization*.

I ett koordinatsystem orienterat så att det elektriska fältet svänger i $\hat{e}_1$ - $\hat{e}_2$ -planet ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}$ antas bilda ett högersystem) kommer en RCP-våg att vara

$$\mathbf{E}_0 = E_0 (\hat{e}_1 + i\hat{e}_2)$$

och en LCP-våg

$$\mathbf{E}_0 = E_0 (\hat{e}_1 - i\hat{e}_2)$$

I senare kapitel kommer oftast koordinatsystemet att orienteras så att det elektriska fältet svänger i x - y -planet. Typfallet för en RCP-våg kommer då att vara

$$\mathbf{E}_0 = \begin{cases} E_0 (\hat{x} + i\hat{y}) & \text{om } \langle \mathbf{S}(t) \rangle \cdot \hat{z} > 0 \\ E_0 (\hat{x} - i\hat{y}) & \text{om } \langle \mathbf{S}(t) \rangle \cdot \hat{z} < 0 \end{cases}$$

och för en LCP-våg

$$\mathbf{E}_0 = \begin{cases} E_0 (\hat{x} - i\hat{y}) & \text{om } \langle \mathbf{S}(t) \rangle \cdot \hat{z} > 0 \\ E_0 (\hat{x} + i\hat{y}) & \text{om } \langle \mathbf{S}(t) \rangle \cdot \hat{z} < 0 \end{cases}$$

Notera skillnaden i tecken framför $\hat{y}$ -komponenterna beroende på vågens utbredningsriktning.

Exempel 3.1

Analysera polarisationstillståndet hos följande tidsharmoniska fält ($a > 0$):

$$\mathbf{E}(t) = a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} + \sqrt{3} \hat{y} + \frac{1}{2} \hat{z} \right) \cos \omega t + a \left(\frac{1}{2} \hat{x} + \hat{y} - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{z} \right) \sin \omega t$$

Pontings vektor antas vara riktad längs $\hat{\mathbf{e}} = (2\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}) / \sqrt{5}$.

Lösning: Vi identifierar först den komplexa vektorn $\mathbf{E}_0$ som hör till det tidsharmoniska fältet, se (3.17) eller (3.18). Vi får

$$\mathbf{E}_0 = a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{x}} + \sqrt{3} \hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{z}} \right) + ia \left(\frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{z}} \right)$$

eller

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{0r} = a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{x}} + \sqrt{3} \hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{z}} \right) \\ \mathbf{E}_{0i} = a \left(\frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{z}} \right) \end{cases}$$

Vi beräknar först vinkeln χ från

$$\tan 2\chi = \frac{2\mathbf{E}_{0r} \cdot \mathbf{E}_{0i}}{|\mathbf{E}_{0r}|^2 - |\mathbf{E}_{0i}|^2} = \sqrt{3}$$

vilket medför att $\chi = \pi/6 + n\pi/2$. Vi väljer $\chi = \pi/6$. Från detta kan vi lätt konstruera halvaxlarna $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ i polarisationsellipsen. Vi får

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{E}_{0r} \cos \chi + \mathbf{E}_{0i} \sin \chi \\ \quad = a \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{x}} + \sqrt{3} \hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{z}} \right) + a \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{z}} \right) \\ \mathbf{b} = -\mathbf{E}_{0r} \sin \chi + \mathbf{E}_{0i} \cos \chi \\ \quad = -a \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{x}} + \sqrt{3} \hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{z}} \right) + a \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{z}} \right) \end{cases}$$

vilket förenklas till

$$\begin{cases} \mathbf{a} = a(\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}}) \\ \mathbf{b} = -a\hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

Polarisationsellipsen ligger med ena halvaxeln i x - y -planet (längd $\sqrt{5}a$) och den andra längs negativa z -axeln (längd a).

Vi undersöker nu om polarisationen är höger eller vänster elliptiskt polariserad. För att undersöka detta bildar vi

$$\mathbf{e} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\frac{a^2}{\sqrt{5}} (2\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}) \cdot ((\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}}) \times \hat{\mathbf{z}}) = -\sqrt{5}a^2$$

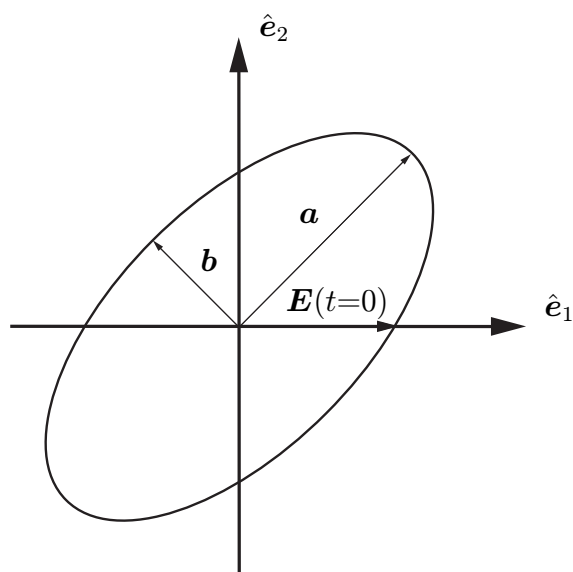
och fältet är vänster elliptiskt polariserat. Fältets värde vid $t = 0$ är

$$\mathbf{E}(t = 0) = a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{\mathbf{x}} + \sqrt{3} \hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{z}} \right)$$

■

Exempel 3.2

Konstruera det tidsharmoniska fält, som svänger i $\hat{\mathbf{e}}_1$ - $\hat{\mathbf{e}}_2$ -planet, och som uppfyller följande specifikationer (se också figur 3.8):



Figur 3.8: Polarisationsellipsen för exempel 3.2.

- Fältet är vid tiden $t = 0$ polariserat längs $\hat{e}_1$ -axeln och har styrkan E , som är en given reell konstant, dvs. $\mathbf{E}(t=0) = \hat{e}_1 E$.
- Polarisationsellipsen lutar 45° mot $\hat{e}_1$ -axeln.
- Förhållandet mellan halv-axlarna i ellipsen är 2:1. Största axeln ligger i första kvadranten.
- Fältet är höger elliptiskt polariserat ($\langle \mathbf{S}(t) \rangle$ antas vara riktad längs $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$).

Bestäm således de reella konstanterna E_1 , E_2 , α och β i uttrycket

$$\mathbf{E}(t) = \hat{e}_1 E_1 \cos(\omega t - \alpha) + \hat{e}_2 E_2 \cos(\omega t - \beta)$$

dvs. bestäm $\hat{e}_1$ - och $\hat{e}_2$ -komponenternas amplitud och faslägen.

Lösning: Inför halvaxlarna på ellipsen.

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \frac{a}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 + \hat{e}_2) \\ \mathbf{b} = \frac{a}{2\sqrt{2}}(-\hat{e}_1 + \hat{e}_2) \end{cases}$$

Detta val ger att fältet är höger elliptiskt polariserat, pga. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \hat{e}_3 = a^2/2 > 0$. Bestäm nu a och χ i uttrycket $\mathbf{E}_0 = e^{i\chi}(\mathbf{a} + i\mathbf{b})$.

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_{0r} \cos \omega t + \mathbf{E}_{0i} \sin \omega t = \mathbf{a} \cos(\omega t - \chi) + \mathbf{b} \sin(\omega t - \chi)$$

För $t = 0$ är enligt uppgift fältet

$$\mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_{0r} = \mathbf{a} \cos \chi - \mathbf{b} \sin \chi = E \hat{e}_1$$

eller

$$\frac{a}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 + \hat{e}_2) \cos \chi - \frac{a}{2\sqrt{2}}(-\hat{e}_1 + \hat{e}_2) \sin \chi = E \hat{e}_1$$

dvs. komponenterna satisfierar

$$\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{2}}(\cos \chi + \frac{1}{2} \sin \chi) = E \\ \frac{a}{\sqrt{2}}(\cos \chi - \frac{1}{2} \sin \chi) = 0 \end{cases}$$

med lösning

$$\begin{cases} a \cos \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} E \\ a \sin \chi = \sqrt{2} E \end{cases}$$

så att

$$ae^{i\chi} = a \cos \chi + ia \sin \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + 2i) E$$

Vi får

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= e^{i\chi} (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{i\chi} \left\{ \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{i}{2} (-\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2) \right\} \\ &= \frac{E}{2} (1 + 2i) \left\{ \hat{\mathbf{e}}_1 \left(1 - \frac{i}{2} \right) + \hat{\mathbf{e}}_2 \left(1 + \frac{i}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

Vi försöker nu skriva om uttrycket på $\mathbf{E}_0$ på formen

$$\mathbf{E}_0 = \hat{\mathbf{e}}_1 |\mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1| e^{i\alpha} + \hat{\mathbf{e}}_2 |\mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2| e^{i\beta}$$

för att kunna identifiera faserna α och β . Vi får

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \hat{\mathbf{e}}_1 \frac{E}{2} (1 + 2i) \left(1 - \frac{i}{2} \right) + \hat{\mathbf{e}}_2 \frac{E}{2} (1 + 2i) \left(1 + \frac{i}{2} \right) \\ &= \frac{E}{2} \left[\hat{\mathbf{e}}_1 \left(2 + \frac{3}{2}i \right) + \hat{\mathbf{e}}_2 \frac{5}{2}i \right] \end{aligned}$$

Vi använder nu

$$2 + \frac{3}{2}i = \frac{5}{2}e^{i\alpha}$$

där

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 36.9^\circ$$

Slutresultatet blir

$$\mathbf{E}_0 = \frac{5E}{4} \left(\hat{\mathbf{e}}_1 e^{i\alpha} + \hat{\mathbf{e}}_2 e^{i\pi/2} \right)$$

Svaret på uppgiften blir därför

$$\mathbf{E}(t) = \text{Re} \{ \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \}$$

där

$$\mathbf{E}_0 = \frac{5E}{4} (\hat{\mathbf{e}}_1 e^{i\alpha} + i\hat{\mathbf{e}}_2)$$

och α bestäms av $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Sammanfattningsvis skall alltså komponenterna matas så att amplituderna är

$$\begin{cases} E_1 = \frac{5E}{4} \\ E_2 = \frac{5E}{4} \end{cases}$$

och vinklarna är

$$\begin{cases} \alpha = \arctan 3/4 \\ \beta = \pi/2 \end{cases}$$

■

Övningar till kapitel 3

3.1 Ett antal exempel på konstitutiva relationer för skilda tillämpningar ges nedan. Klassificera dem m.a.p.

- Linjaritet/Icke-linjaritet
- Isotropi/Anisotropi/Bianisotropi
- Homogenitet/Icke homogenitet
- Dispersion/Saknar dispersion

Ett material kallas homogent om materialparametrarna är lika i alla punkter i materialet, annars kallas det inhomogent.

1. Vissa flytande kristaller kan beskrivas av

$$[\mathbf{D}] = \begin{pmatrix} \epsilon(1 + \delta \cos kz) & \epsilon \delta \sin kz & 0 \\ \epsilon \delta \sin kz & \epsilon(1 - \delta \cos kz) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \cdot [\mathbf{E}]$$

2. Optisk aktivitet i kvarts ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{cases} E_i = \sum_{j=1}^3 \kappa_{ij} D_j + c_0^2 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} \frac{\partial B_j}{\partial t} \\ H_i = \frac{1}{\mu_0} B_i - c_0^2 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} \frac{\partial D_j}{\partial t} \end{cases}$$

3. Optisk aktivitet ($i = 1, 2, 3$)

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j + \sum_{j,k=1}^3 \gamma_{ijk} \frac{\partial E_j}{\partial x_k}$$

där ϵ_{ij} och γ_{ijk} är funktioner av ω .

4. Pyroelektriska material (polarisation vid upphettning)

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}$$

där $\mathbf{D}_0$ är ett konstant fält.

5. Piezoelektricitet (polarisation vid mekaniska belastning) ($i = 1, 2, 3$)

$$D_i = D_{0i} + \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j + \sum_{j,k=1}^3 \gamma_{ijk} s_{jk}$$

där $[D]_0$ är ett konstant fält och s_{jk} beror kvadratisk på det elektriska fältet.

6. Kerr effekt (isotropa material blir anisotropa pga. yttre elektriskt fält)

$$\epsilon_{ij} = \epsilon \delta_{ij} + \sigma E_i E_j$$

7. Supraledare

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2} - \frac{\omega_n^2 \tau_n^2}{\omega^2 \tau_n^2 + 1} + i \frac{\omega_n^2 \tau_n}{\omega(\omega^2 \tau_n^2 + 1)}$$

där

$$\omega_s = \sqrt{\frac{N_s q^2}{m \epsilon_0}} \quad \text{supraledande plasmafrekvens}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{N_n q^2}{m \epsilon_0}} \quad \text{normal plasmafrekvens}$$

- 3.2** Visa att dielektricitetsfunktionen $\epsilon(\omega)$ för ett Debyematerial, dvs.

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\alpha \tau}{1 - i \omega \tau} = 1 + \frac{\alpha \tau + i \omega \alpha \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

i det komplexa ϵ -planet beskriver en cirkel med radie $\frac{\alpha \tau}{2}$ och medelpunkt i $1 + \frac{\alpha \tau}{2}$ då frekvensen varierar från $\omega = 0$ till oändligheten. Denna representation kallas en Cole-Cole representation. För vilken frekvens är imaginärdelen av ϵ maximal?

Ledning: Visa att dielektricitetsfunktionen $\epsilon(\omega)$ uppfyller

$$\left| \epsilon(\omega) - \left(1 + \frac{\alpha \tau}{2} \right) \right|^2 = \frac{\alpha^2 \tau^2}{4}$$

för alla ω .

- 3.3** I vissa tillämpningar används en susceptibilitetsfunktion (generalisering av Debye-modellen)

$$\chi(t) = (1 + \beta t) e^{-\alpha t}$$

Den reella konstanten α antas vara positiv. Vilket villkor måste den reella konstanten β uppfylla för att $\chi(t)$ skall vara en modell för ett passivt material?

- 3.4** En kandidat på en susceptibilitetsfunktion för ett passivt material är

$$\chi(t) = e^{-\alpha t} \cos \beta t$$

Den reella konstanten α antas vara positiv. Är $\chi(t)$ en modell för ett passivt material för något val av den reella konstanten β ?

- 3.5** Bestäm de konstitutiva relationerna i frekvensplanet för ett plasma. Använd resultatet från övning 2.6 för att beräkna dielektricitetsmatrisen.

3.6 I ferritmaterial bestäms magnetiseringen $\mathbf{M}$ av

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M} = g\mu_0\mathbf{M} \times \mathbf{H}$$

där g är den *gyromagnetiska kvoten*, som för elektroner är $g = -e/m \approx -1.7588 \cdot 10^{11}$ C/kg. Låt

$$\begin{cases} \mathbf{H} = \hat{\mathbf{z}}H_0 + \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{M} = \hat{\mathbf{z}}M_0 + \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}}B_0 + \mathbf{B}_1 \end{cases}$$

där $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ och $B_0 = \mu_0(H_0 + M_0)$ samt där

$$\begin{cases} |\mathbf{H}_1| \ll H_0 \\ |\mathbf{M}_1| \ll M_0 \\ |\mathbf{B}_1| \ll B_0 \end{cases}$$

Visa att för tidsharmoniska fält leder de linjariserade ekvationerna i $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{M}_1$ och $\mathbf{B}_1$ till att de konstitutiva relationerna kan skrivas

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}_1$$

Bestäm $\boldsymbol{\mu}$.

3.7 En enkel modell för supraledande material är "två-vätske-modellen". I denna modell antas en del av ledningselektronerna befinna sig i ett supraledande tillstånd där de rör sig fritt utan friktion, medan den resterande delen är "normala" ledningselektroner som påverkas av friktion. Laddningstätheterna för respektive tillstånd betecknas N_s och N_n . Rörelselagarna för laddningarnas hastigheter, $\mathbf{v}_s$ och $\mathbf{v}_n$ för supraledande respektive "normalt" tillstånd, antas vara

$$\begin{aligned} m\frac{d\mathbf{v}_s}{dt} &= -e\mathbf{E} \\ m\frac{d\mathbf{v}_n}{dt} + m\nu\mathbf{v}_n &= -e\mathbf{E} \end{aligned}$$

där m och $-e$ är elektronens massa respektive laddning och ν kollisionsfrekvensen i "normal"-tillståndet. Bestäm materialets dielektricitetsfunktion $\epsilon(\omega)$.

3.8 De konstitutiva relationerna för ett bi-isotropt material är

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \{\epsilon\mathbf{E} + \eta_0\xi\mathbf{H}\} \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{c_0} \{\zeta\mathbf{E} + \eta_0\mu\mathbf{H}\} \end{aligned}$$

där ϵ , ξ , ζ och μ är komplexvärda funktioner av ω . Visa att om materialet är passivt så gäller ($\omega > 0$)

$$\text{Im } \epsilon > 0$$

$$\text{Im } \mu > 0$$

och att kopplingstermerna ξ och ζ inte kan vara godtyckliga utan satisfierar

$$|\xi - \zeta^*|^2 < 4 \text{Im } \epsilon \text{Im } \mu$$

Speciellt gäller om materialet är reciprokt ($\xi = -\zeta$) att

$$|\operatorname{Re} \xi| = |\operatorname{Re} \zeta| < \sqrt{\operatorname{Im} \epsilon \operatorname{Im} \mu}$$

Ledning: Kvadratkomplettera uttrycket i ekvation (3.13) på sidan 46.

3.9 Avgör polarisationstillståndet hos följande fall ($a, b > 0$):

1. För reella konstanter a, b och α

$$\mathbf{E}(t) = \hat{\mathbf{e}}_1 a \cos(\omega t + \alpha) + \hat{\mathbf{e}}_2 b \cos(\omega t + \alpha)$$

2. För reella konstanter a och α

$$\mathbf{E}(t) = a (\hat{\mathbf{e}}_1 \cos(\omega t + \alpha) + \hat{\mathbf{e}}_2 \sin(\omega t + \alpha))$$

3. För reella konstanter a och α

$$\mathbf{E}(t) = a (\hat{\mathbf{e}}_1 \cos(\omega t + \alpha) - \hat{\mathbf{e}}_2 \sin(\omega t + \alpha))$$

$\langle \mathbf{S}(t) \rangle$ antas vara riktad längs $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$ och vidare antas $\hat{\mathbf{e}}_1 \perp \hat{\mathbf{e}}_2$.

3.10 Analysera polarisationstillståndet hos följande tidsharmoniska fält ($a > 0$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) = & a \left(\sqrt{3} \hat{\mathbf{x}} + \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2} \right) \hat{\mathbf{z}} \right) \cos \omega t \\ & + a \left(\hat{\mathbf{x}} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \hat{\mathbf{z}} \right) \sin \omega t \end{aligned}$$

Pontings vektor antas vara riktad längs $\hat{\mathbf{e}} = \sqrt{2/3} (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}/2 - \hat{\mathbf{z}}/2)$.

***3.11** Generalisera resultatet i exempel 3.2 till godtycklig lutning och godtyckligt axelförhållande, dvs. konstruera det tidsharmoniska fält, som svänger i $\hat{\mathbf{e}}_1$ - $\hat{\mathbf{e}}_2$ -planet, och som uppfyller följande specifikationer:

- Fältet är vid tiden $t = 0$ polariserat längs $\hat{\mathbf{e}}_1$ -axeln och har styrkan E , som är en given reell konstant, dvs. $\mathbf{E}(t = 0) = \hat{\mathbf{e}}_1 E$.
- De båda halv-axlarna i ellipsen är a , respektive b . Förhållandet mellan axlarna betecknas $\epsilon = b/a$. Axeln med längden a ligger i första kvadranten och bildar vinkeln ϕ mot $\hat{\mathbf{e}}_1$ -axeln.
- Fältet är höger elliptiskt polariserat ($\langle \mathbf{S}(t) \rangle$ antas vara riktad längs $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$).

Bestäm således de reella konstanterna E_1 , E_2 , α och β i uttrycket

$$\mathbf{E}(t) = \hat{\mathbf{e}}_1 E_1 \cos(\omega t - \alpha) + \hat{\mathbf{e}}_2 E_2 \cos(\omega t - \beta)$$

3.12 a) Visa att en godtycklig elliptiskt polariserad våg kan delas upp i en linjärkombination av en LCP och en RCP-våg.

b) Låt $\mathbf{E}_0$ vara en linjärkombination av en LCP och en RCP-våg, dvs.

$$\mathbf{E}_0 = a\mathbf{E}_+ + b\mathbf{E}_-$$

där $\mathbf{E}_\pm = \hat{\mathbf{e}}_1 \pm i\hat{\mathbf{e}}_2$. Vilka villkor måste de komplexa talen a och b uppfylla för att vågen skall vara linjärt polariserad ($\langle \mathbf{S}(t) \rangle$ antas vara riktad längs $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$).

3.13 Visa att för en cirkulärt polariserad våg så gäller

$$\mathbf{E}_0 = \pm i\hat{\mathbf{e}} \times \mathbf{E}_0$$

där övre (nedre) tecknet gäller för RCP (LCP).

3.14 En plan gränsyta ($z = 0$) skiljer ett homogent ferritmaterial från vakuum. I skiljeytan finns inga ytströmmar och ferritmaterialet antas vara statiskt magnetiserat $\mathbf{M} = \hat{\mathbf{z}}M_0$. Den magnetiska flödestätheten i vakuum nära gränsytan är linjärt polariserad (B_0 reell konstant, B komplex konstant)

$$\mathbf{B}_1(t) = \hat{\mathbf{z}}B_0 + \mathbf{B}_v(t) = \hat{\mathbf{z}}B_0 + \text{Re} \{ \hat{\mathbf{x}}B e^{-i\omega t} \}$$

och fälten nära gränsytan i ferritmaterialet är

$$\begin{cases} \mathbf{H}_2(t) = \hat{\mathbf{z}}H_0 + \mathbf{H}_f(t) \\ \mathbf{B}_2(t) = \hat{\mathbf{z}}B_0 + \mathbf{B}_f(t) \end{cases}$$

De tidsharmoniska fälten $\mathbf{B}_v(t)$, $\mathbf{B}_f(t)$ och $\mathbf{H}_f(t)$ antas små jämfört med respektive statiska fält. Konstanterna H_0 och M_0 antas vara positiva storheter relaterade till B_0 genom

$$B_0 = \mu_0(H_0 + M_0)$$

så att

$$\begin{cases} \omega_0 = -g\mu_0 H_0 \\ \omega_m = -g\mu_0 M_0 \end{cases}$$

är positiva frekvenser för elektroner ($g \approx -1.7588 \cdot 10^{11}$ C/kg). Använd de konstitutiva relationerna i övning 3.6 för att beräkna vid vilken frekvens $\omega > 0$ som den magnetiska flödestätheten $\mathbf{B}_f(t)$ nära gränsytan i ferritmaterialet är vänster cirkulärt polariserad ($\langle \mathbf{S}(t) \rangle$ antas vara riktad i $\hat{\mathbf{z}}$ -riktningen), dvs.

$$\mathbf{B}_f(\omega) = B_f(\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$$

Sammanfattning av kapitel 3

Tidsharmoniska fält $\exp\{-i\omega t\}$

Maxwells fältekvationer

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= i\omega \mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} - i\omega \mathbf{D}\end{aligned}$$

Laddningskonservering

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = i\omega \rho$$

Konstitutiva relationer

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon_0 \left\{ \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E} + \eta_0 \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{H} \right\} \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{c_0} \left\{ \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{E} + \eta_0 \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} \right\}\end{aligned}$$

Exempel

$$\begin{aligned}\epsilon(\omega) &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\nu} && \text{(Lorentz)} \\ \epsilon(\omega) &= 1 + \frac{\alpha\tau}{1 - i\omega\tau} && \text{(Debye)}\end{aligned}$$

Förlustfria material

$$\begin{array}{l} \epsilon = \epsilon^\dagger \\ \mu = \mu^\dagger \\ \xi = \xi^\dagger \end{array}$$

Reciproka material

$$\begin{array}{l} \epsilon = \epsilon^t \\ \mu = \mu^t \\ \xi = -\xi^t \end{array}$$

Polarisationstillstånd

$$\begin{array}{l} \mathbf{E}(t) = \text{Re} \{ \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \} \\ \mathbf{E}_0 = e^{i\chi}(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \\ i\hat{\mathbf{e}} \cdot (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^*) = \begin{cases} = 0 & \text{linjär polarisation} \\ > 0 & \text{höger elliptisk polarisation} \\ < 0 & \text{vänster elliptisk polarisation} \end{cases} \\ \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \text{ cirkulär polarisation} \end{array}$$

Kapitel 4

Vågutbredning längs fix riktning

Om alla fält endast varierar längs en riktning, talar vi om vågutbredning längs en fix riktning eller vågutbredning i en dimension. I detta kapitel analyserar vi detta enkla vågutbredningsproblem i detalj. I senare kapitel kommer vi att undersöka mer komplicerad vågutbredning, där fältstorheterna kan variera som funktion av alla tre rumsvariablerna. Vidare antar vi i detta kapitel att materialet är homogent, dvs. de konstitutiva relationerna beror ej på rumskoordinaterna.

Reflektion och transmission av elektromagnetiska vågor förekommer i många viktiga tillämpningar. Vid reflektion och transmission ändras bl.a. vågens polarisations-tillstånd. Detta inträffar t.ex. i anisotropa och bi-isotropa material och fenomenet kan användas för att förändra polarisationstillståndet på ett specificerat sätt. I detta kapitel kommer vi att analysera några typfall, som ofta förekommer i tillämpningar.

4.1 Fundamentalekvationen

Maxwells fältekvationer för tidsharmoniska fält gavs i kapitel 3, se (3.2) och (3.3) på sidan 37.

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) \end{cases}$$

Ledningsströmmarna antar vi är inkluderade i de konstitutiva relationerna, se avsnitt 2.1.2 och 3.3.1. Övriga strömmar av icke-elektriskt ursprung antar vi saknas i materialet. Med andra ord analyserar vi vågutbredning i källfria material.

Vid vågutbredning längs en fix riktning beror alla fält endast på en rumskoordinat. Vi kan alltid välja koordinatsystem så att denna variation sker längs z -axeln i detta koordinatsystem. Detta antagande innebär ingen inskränkning, utan innebär endast att vi orienterar vårt koordinatsystem så att z -axeln pekar i fältens variationsriktning. Alla fält storheter beror då endast på z och ω , t.ex. $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}(z, \omega)$, och någon variation i x - eller y -koordinaterna förekommer ej.

Vi skriver ut Maxwells fältekvationer i de rätvinkliga komponenterna, och vektorernas komponenterna betecknar vi med index x , y och z . Rotationen av fälten $\mathbf{E}$

och $\mathbf{H}$ i de vänstra leden bidrar med endast en z -derivata. Resultatet blir:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dz}E_y(z) = i\omega B_x(z) \\ \frac{d}{dz}E_x(z) = i\omega B_y(z) \\ 0 = \omega B_z(z) \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dz}H_y(z) = -i\omega D_x(z) \\ \frac{d}{dz}H_x(z) = -i\omega D_y(z) \\ 0 = -\omega D_z(z) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

De konstitutiva relationerna för ett allmänt bi-anisotrop material ges av sambanden (3.8), se sidan 39. Dessa är

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = \epsilon_0 \{ \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E} + \eta_0 \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{H} \} \\ \mathbf{B} = \frac{1}{c_0} \{ \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{E} + \eta_0 \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} \} \end{array} \right.$$

där impedansen för vakuum $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$. De fyra dyaderna $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\zeta}$ och $\boldsymbol{\mu}$ är konstanta funktioner i rummet pga. att vi antagit att materialet är homogent. Dyaderna kan däremot bero på vinkelfrekvensen ω .

Maxwells fältekvationer är totalt 6 stycken ekvationer och sammanlagt 12 fältstorheter. Med hjälp av de konstitutiva relationerna kan vi eliminera de elektriska och magnetiska flödestätheterna, $\mathbf{D}$ och $\mathbf{B}$. Återstår efter denna elimination 6 fält och lika många ekvationer. Vi observerar dessutom att de två sista likheterna i (4.1), $D_z = 0$ och $B_z = 0$ ($\omega \neq 0$), innebär ytterligare villkor, som kan utnyttjas för att reducera antal ekvationer och fält ytterligare. Vi kan t.ex. välja att ur fälten, $\mathbf{E}$ och $\mathbf{H}$, eliminera z -komponenterna, E_z och H_z . Detta ger oss totalt fyra obekanta, som vi skriver

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{xy}(z) = \hat{\mathbf{x}}E_x(z) + \hat{\mathbf{y}}E_y(z) \\ \mathbf{H}_{xy}(z) = \hat{\mathbf{x}}H_x(z) + \hat{\mathbf{y}}H_y(z) \end{array} \right.$$

eller uttryckt som kolonnvektorer

$$[\mathbf{E}]_{xy}(z) = \begin{pmatrix} E_x(z) \\ E_y(z) \end{pmatrix} \quad [\mathbf{H}]_{xy}(z) = \begin{pmatrix} H_x(z) \\ H_y(z) \end{pmatrix}$$

Liknande beteckningar införs för de elektriska och magnetiska flödestätheterna, dvs. $\mathbf{D}_{xy}$, respektive $\mathbf{B}_{xy}$.

Det är lämpligt att skriva de två första ekvationsparen i Maxwells fältekvationer, (4.1), i dessa nya beteckningar på följande sätt:

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{xy}(z) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(z) \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{xy}(z) \\ \eta_0 \mathbf{D}_{xy}(z) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

där $\mathbf{0}$ är nulloperatoren i två dimensioner och $\mathbf{J}$ den tvådimensionella linjära operator, som verkar på en vektor i x - y -planet, och som har följande matrisrepresentation:

$$[\mathbf{J}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta svarar mot en rotation i x - y -planet av 90° . Notera att $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = -\mathbf{I}$, där $\mathbf{I}$ är identitets-operatorn i två dimensioner. Ett alternativt sätt att representera denna rotation ges av

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{a} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{a}$$

Ett kompakt sätt att presentera denna transformation är

$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{I}$$

där $\mathbf{I}$ är identitets-operatorn i tre dimensioner (eller två dimensioner eftersom z -komponenten är betydelselös i detta sammanhang).

Dyaderna ϵ , μ , ξ och ζ kan uppdelas m.a.p. vågutbredningsriktningen z . Vi har, mha. uppdelningen (B.2) på sidan 174 i appendix B, följande representation:

$$\begin{cases} \epsilon = \epsilon_{\perp\perp} + \hat{\mathbf{z}}\epsilon_z + \epsilon_{\perp}\hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{z}}\epsilon_{zz}\hat{\mathbf{z}} \\ \mu = \mu_{\perp\perp} + \hat{\mathbf{z}}\mu_z + \mu_{\perp}\hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{z}}\mu_{zz}\hat{\mathbf{z}} \\ \xi = \xi_{\perp\perp} + \hat{\mathbf{z}}\xi_z + \xi_{\perp}\hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{z}}\xi_{zz}\hat{\mathbf{z}} \\ \zeta = \zeta_{\perp\perp} + \hat{\mathbf{z}}\zeta_z + \zeta_{\perp}\hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{z}}\zeta_{zz}\hat{\mathbf{z}} \end{cases} \quad (4.3)$$

Här är $\epsilon_{\perp\perp}$ en dyad med endast x - y -komponenter. Vektorerna ϵ_z och $\epsilon_{\perp}$ har också endast komponenter i x - y -riktningarna. Liknande förhållande gäller för de övriga dyaderna och vektorerna i de konstitutiva relationerna. I Maxwells fältekvationer, (4.2), kan vi nu eliminera de elektriska och magnetiska flödestätheterna $\mathbf{D}$ och $\mathbf{B}$. Vi har att $\mathbf{D}_{xy}$ och $\mathbf{B}_{xy}$ är

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{xy} = \epsilon_0 \{ \epsilon_{\perp\perp} \cdot \mathbf{E}_{xy} + \epsilon_{\perp} E_z + \eta_0 \xi_{\perp\perp} \cdot \mathbf{H}_{xy} + \eta_0 \xi_{\perp} H_z \} \\ \mathbf{B}_{xy} = \frac{1}{c_0} \{ \zeta_{\perp\perp} \cdot \mathbf{E}_{xy} + \zeta_{\perp} E_z + \eta_0 \mu_{\perp\perp} \cdot \mathbf{H}_{xy} + \eta_0 \mu_{\perp} H_z \} \end{cases}$$

Insättning i (4.2) ger

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{xy} \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy} \end{pmatrix} = & i \frac{\omega}{c_0} \begin{pmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta_{\perp\perp} \cdot \mathbf{E}_{xy} + \eta_0 \mu_{\perp\perp} \cdot \mathbf{H}_{xy} \\ \epsilon_{\perp\perp} \cdot \mathbf{E}_{xy} + \eta_0 \xi_{\perp\perp} \cdot \mathbf{H}_{xy} \end{pmatrix} \\ & + i \frac{\omega}{c_0} \begin{pmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta_{\perp} E_z + \eta_0 \mu_{\perp} H_z \\ \epsilon_{\perp} E_z + \eta_0 \xi_{\perp} H_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Med uppdelningen, (4.3), kan vi skriva de två sista likheterna i Maxwells fältekvationer, (4.1), dvs. $D_z = 0$ och $B_z = 0$, på följande sätt:

$$\begin{cases} \epsilon_z \cdot \mathbf{E}_{xy} + \epsilon_{zz} E_z + \eta_0 \xi_z \cdot \mathbf{H}_{xy} + \eta_0 \xi_{zz} H_z = 0 \\ \zeta_z \cdot \mathbf{E}_{xy} + \zeta_{zz} E_z + \eta_0 \mu_z \cdot \mathbf{H}_{xy} + \eta_0 \mu_{zz} H_z = 0 \end{cases}$$

vilket också kan skrivas i matrisform

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{zz} & \xi_{zz} \\ \zeta_{zz} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_z \\ \eta_0 H_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \epsilon_z \cdot \mathbf{E}_{xy} + \eta_0 \xi_z \cdot \mathbf{H}_{xy} \\ \zeta_z \cdot \mathbf{E}_{xy} + \eta_0 \mu_z \cdot \mathbf{H}_{xy} \end{pmatrix}$$

Lös ut E_z och H_z ur dessa ekvationer. Resultatet blir

$$\begin{pmatrix} E_z \\ \eta_0 H_z \end{pmatrix} = -\frac{1}{\epsilon_{zz}\mu_{zz} - \xi_{zz}\zeta_{zz}} \begin{pmatrix} \mu_{zz} & -\xi_{zz} \\ -\zeta_{zz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_z \cdot \mathbf{E}_{xy} + \eta_0 \boldsymbol{\xi}_z \cdot \mathbf{H}_{xy} \\ \boldsymbol{\zeta}_z \cdot \mathbf{E}_{xy} + \eta_0 \boldsymbol{\mu}_z \cdot \mathbf{H}_{xy} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Vi noterar omedelbart att vektorerna $\boldsymbol{\epsilon}_z$, $\boldsymbol{\xi}_z$, $\boldsymbol{\zeta}_z$ och $\boldsymbol{\mu}_z$ avgör om det elektriska eller det magnetiska fälten har någon z -komponent, dvs. en komponent i vågutbredningsriktningen.

Maxwells fältekvationer, (4.1), reduceras nu till ett 4×4 system av första ordningens ordinära differentialekvationer för $\mathbf{E}_{xy}$ och $\mathbf{H}_{xy}$ genom att eliminera E_z och H_z i (4.4). Detta är den s.k. fundamentalekvationen för en-dimensionell vågutbredning i helt allmänna bi-anisotropa material. Resultatet blir

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{xy}(z) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(z) \end{pmatrix} = i \frac{\omega}{c_0} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 & \mathbf{W}_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{xy}(z) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(z) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

där $\mathbf{W}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, är fyra enhetslösa två-dimensionella dyader. Deras explicita utseende är

$$\begin{cases} \mathbf{W}_1 = -\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{\perp\perp} + \frac{\mathbf{J} \cdot (\boldsymbol{\zeta}_{\perp} (\mu_{zz}\boldsymbol{\epsilon}_z - \xi_{zz}\boldsymbol{\zeta}_z) - \boldsymbol{\mu}_{\perp} (\zeta_{zz}\boldsymbol{\epsilon}_z - \epsilon_{zz}\boldsymbol{\zeta}_z))}{\epsilon_{zz}\mu_{zz} - \xi_{zz}\zeta_{zz}} \\ \mathbf{W}_2 = -\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\perp\perp} + \frac{\mathbf{J} \cdot (\boldsymbol{\zeta}_{\perp} (\mu_{zz}\boldsymbol{\xi}_z - \xi_{zz}\boldsymbol{\mu}_z) - \boldsymbol{\mu}_{\perp} (\zeta_{zz}\boldsymbol{\xi}_z - \epsilon_{zz}\boldsymbol{\mu}_z))}{\epsilon_{zz}\mu_{zz} - \xi_{zz}\zeta_{zz}} \\ \mathbf{W}_3 = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\perp\perp} - \frac{\mathbf{J} \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_{\perp} (\mu_{zz}\boldsymbol{\epsilon}_z - \xi_{zz}\boldsymbol{\zeta}_z) - \boldsymbol{\xi}_{\perp} (\zeta_{zz}\boldsymbol{\epsilon}_z - \epsilon_{zz}\boldsymbol{\zeta}_z))}{\epsilon_{zz}\mu_{zz} - \xi_{zz}\zeta_{zz}} \\ \mathbf{W}_4 = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp\perp} - \frac{\mathbf{J} \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_{\perp} (\mu_{zz}\boldsymbol{\xi}_z - \xi_{zz}\boldsymbol{\mu}_z) - \boldsymbol{\xi}_{\perp} (\zeta_{zz}\boldsymbol{\xi}_z - \epsilon_{zz}\boldsymbol{\mu}_z))}{\epsilon_{zz}\mu_{zz} - \xi_{zz}\zeta_{zz}} \end{cases} \quad (4.7)$$

Observera, att uttrycken i täljaren i dessa definitioner är dyaduttryck, t.ex. kombinationen $\boldsymbol{\zeta}_{\perp}\mu_{zz}\boldsymbol{\epsilon}_z$.

Flera fall är av speciellt intresse. För isotropa material, $\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon\mathbf{I}$, $\boldsymbol{\mu} = \mu\mathbf{I}$ och $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$, får vi

$$\begin{cases} \mathbf{W}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{W}_2 = -\mathbf{J}\mu \\ \mathbf{W}_3 = \mathbf{J}\epsilon \\ \mathbf{W}_4 = \mathbf{0} \end{cases}$$

Anisotropa material, $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$, ger

$$\begin{cases} \mathbf{W}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{W}_2 = -\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\perp\perp} + \frac{\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\perp}\boldsymbol{\mu}_z}{\mu_{zz}} \\ \mathbf{W}_3 = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\perp\perp} - \frac{\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\perp}\boldsymbol{\epsilon}_z}{\epsilon_{zz}} \\ \mathbf{W}_4 = \mathbf{0} \end{cases}$$

medan biisotropa material, $\epsilon = \epsilon \mathbf{I}$, $\mu = \mu \mathbf{I}$, $\xi = \xi \mathbf{I}$ och $\zeta = \zeta \mathbf{I}$, ger

$$\begin{cases} \mathbf{W}_1 = -\mathbf{J}\zeta \\ \mathbf{W}_2 = -\mathbf{J}\mu \\ \mathbf{W}_3 = \mathbf{J}\epsilon \\ \mathbf{W}_4 = \mathbf{J}\xi \end{cases}$$

Ekvation (4.6) ger det allmänna uttrycket på fundamentalekvationen. Vi kommer nu i de följande avsnitten att först undersöka vågutbredning i det enklaste fallet, de isotropa materialen, därefter vågutbredning i mer och mer komplicerade material, men först behöver vi definiera några fysikaliska storheter.

4.1.1 Plana vågor

Lösningen till fundamentalekvationen, (4.6), ett system av homogena, ordinära differentialekvationer med konstanta koefficienter, bestäms av egenvärdena till koefficientmatrisen. Om vi betecknar dessa egenvärden med l_m , $m = 1, 2, 3, 4$ kan vi teckna den allmänna lösningen till (4.6) som

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{xy}(z, \omega) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(z, \omega) \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^4 \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{mxy}(\omega) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{mxy}(\omega) \end{pmatrix} e^{il_m(\omega)k_0 z}$$

där $k_0 = \omega/c_0$ och $\{\mathbf{E}_{mxy}(\omega), \eta_0 \mathbf{H}_{mxy}(\omega)\}$ är egenvektorn¹ svarande mot egenvärdet l_m . De fysikaliska, tidsharmoniska fälten blir

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{xy}(z, t) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(z, t) \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^4 \text{Re} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{mxy}(\omega) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{mxy}(\omega) \end{pmatrix} e^{i(l_m(\omega)k_0 z - \omega t)} \right\}$$

Varje term i summan kallas en *egenmod*, egenmodlösning eller enbart mod till vågutbredningsproblemet.

Denna typ av lösningar till Maxwells fältekvationer, som bara beror på en rumskoordinat, kallas allmänt *plana vågor* (e.g. homogena plana vågor), eftersom fälten har samma värde på ett plan $z = \text{konstant}$.²

En rad definitioner visar sig nu lämpliga att införa. Produkten av ett egenvärde l_m till koefficientmatrisen i (4.6) och k_0 kallas den plana vågens *vågtalet*. Vågtalet, som betecknas med k , är ett komplext tal med real- och imaginärdel.³

$$k(\omega) = l(\omega)k_0 = k_r(\omega) + ik_i(\omega)$$

Lösningarna kan vi skriva som

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{xy}(z, t) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(z, t) \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^4 \text{Re} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{mxy}(\omega) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{mxy}(\omega) \end{pmatrix} e^{i(k_m(\omega)z - \omega t)} \right\}$$

¹Vi antar att egenvektorererna spänner upp $\mathbb{C}^4$.

²Mer allmänna plana vågor, som utbreder sig längs en fix godtycklig riktning, görs ofta. Detta allmänna fall kan dock med lämpligt val av koordinatsystem alltid återföras på vår lösning.

³Vi undertrycker ofta mod-indexet m för att inte få klumpiga beteckningar om det inte är viktigt för behandlingen.

Varje komponent av detta uttryck kan skrivas som

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \{A(\omega)e^{i(k(\omega)z-\omega t)}\} &= |A(\omega)| \cos(k_r(\omega)z - \omega t + \alpha(\omega)) e^{-k_i(\omega)z} \\ &= |A(\omega)| \cos \theta(\omega) e^{-k_i(\omega)z}\end{aligned}$$

där

$$A(\omega) = |A(\omega)|e^{i\alpha(\omega)}$$

Funktionen $\theta(\omega) = k_r(\omega)z - \omega t + \alpha(\omega)$ kallas komponentens *fas*. Den plana vågens dämpning bestäms av egenvärdets imaginärdel, dvs. $k_i(\omega)$:s tecken och storlek.

Skall den plana vågen utbreda sig utan dämpning krävs att vågtalet $k(\omega)$ är reellt vilket kan uttryckas som

$$k^2(\omega) > 0 \quad (4.8)$$

Låt z vara avståndet från origo till ett plan med konstant fas vid en viss tid t . Vid en senare tidpunkt $t + \Delta t$ är avståndet till planet $z + \Delta z$ och givet av

$$k_r z - \omega t + \alpha(\omega) = k_r(z + \Delta z) - \omega(t + \Delta t) + \alpha(\omega)$$

vilket betyder att vågen utbreder sig längs z -axeln (positiva eller negativa riktningen beroende på om k_r är positiv, respektive negativ) med en hastighet v definierad av

$$v = \frac{|\Delta z|}{|\Delta t|} = \frac{|\omega|}{|k_r|} \geq 0$$

Hastigheten v kallas den plana vågens *fashastighet*. Ofta används beteckningen *brytningsindex* n definierat av

$$n = \frac{c_0}{v} = \frac{c_0|k_r|}{|\omega|}$$

Plan $z =$ konstant som är separerade med avståndet λ , där $\lambda = 2\pi/|k_r| \geq 0$, har också samma fält (sånär som på en dämpfaktor $e^{-k_i\lambda}$) vid en given tidpunkt ty

$$\exp i[k_r(z + \lambda) - \omega t] = e^{ik_r\lambda} e^{i(k_r z - \omega t)} = e^{i(k_r z - \omega t)}$$

Avståndet λ kallas den plana vågens *våglängd*. Vågen utbreder sig således i $\pm \hat{z}$:s riktning med hastigheten v , frekvens $\omega/2\pi$ och våglängd $2\pi/|k_r|$.

För modlösningarna gäller att $\mathbf{E}_{mxy}(\omega)$ och $\mathbf{H}_{mxy}(\omega)$ är relaterade till varann. Från (4.6) får vi att för varje mod gäller sambandet

$$k_m \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{mxy}(\omega) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{mxy}(\omega) \end{pmatrix} = k_0 \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 & \mathbf{W}_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{mxy}(\omega) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{mxy}(\omega) \end{pmatrix}$$

eller

$$\begin{cases} \eta_0 \mathbf{H}_{mxy}(\omega) = \mathbf{W}_2^{-1} \cdot \left\{ \frac{k_m}{k_0} \mathbf{I} - \mathbf{W}_1 \right\} \cdot \mathbf{E}_{mxy}(\omega) = \mathbf{Y}_m \cdot \mathbf{E}_{mxy}(\omega) \\ \mathbf{E}_{mxy}(\omega) = \mathbf{W}_3^{-1} \cdot \left\{ \frac{k_m}{k_0} \mathbf{I} - \mathbf{W}_4 \right\} \cdot \eta_0 \mathbf{H}_{mxy}(\omega) = \mathbf{Z}_m \cdot \eta_0 \mathbf{H}_{mxy}(\omega) \end{cases} \quad (4.9)$$

där $\mathbf{Y}_m$ och $\mathbf{Z}_m$ är modens (relativa) admittansdyad, respektive impedansdyad. Det räcker således att beräkna $\mathbf{E}_{mxy}(\omega)$ (eller $\mathbf{H}_{mxy}(\omega)$) för varje mod. Vektorn $\mathbf{H}_{mxy}(\omega)$ ($\mathbf{E}_{mxy}(\omega)$) bestäms sedan av dessa uttryck. Den återstående komponenten av moden, $E_{mz}(z, \omega)$ och $H_{mz}(z, \omega)$, ges sedan av (4.5).

4.2 Isotropa material

De isotropa materialen uppvisar de enklaste vågutbredningsfenomenen. Ett isotropt material karakteriseras av de konstitutiva relationerna

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon} = \epsilon \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\mu} = \mu \mathbf{I} \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \end{cases}$$

där ϵ och μ är två komplexa skalärer, som beror på vinkelfrekvensen ω . De fyra enhetslösa två-dimensionella dyaderna $\mathbf{W}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, i (4.7) får följande utseende:

$$\begin{cases} \mathbf{W}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{W}_2 = -\mu \mathbf{J} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{W}_3 = \epsilon \mathbf{J} \\ \mathbf{W}_4 = \mathbf{0} \end{cases}$$

Koefficientmatrisen i (4.6) blir således

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & -\epsilon & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrisen har de dubbla egenvärdena

$$\begin{cases} l_1 = l_2 = (\epsilon\mu)^{1/2} \\ l_3 = l_4 = -(\epsilon\mu)^{1/2} \end{cases}$$

Grenen på kvadratroten i detta uttryck väljs så att imaginärdelen är icke-negativ. Denna gren kommer att användas genomgående i denna bok.

De möjliga moderna i ett isotropt material är således

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{xy}(z, \omega) = \mathbf{E}_{xy}(\omega) e^{\pm i k z} \\ \mathbf{H}_{xy}(z, \omega) = \mathbf{H}_{xy}(\omega) e^{\pm i k z} \end{cases}$$

De tvådimensionella vektorerna $\mathbf{E}_{xy}(\omega)$ och $\mathbf{H}_{xy}(\omega)$ är godtyckliga vektorer som uppfyller (4.9). Det finns i det isotropa fallet inga restriktioner på de möjliga polarisationstillstånden. Plustecknet i exponenten anger att vågen propagerar i positiva z -riktningen, medan minus tecknet anger utbredning längs negativa z -riktningen, och materialets vågtal är (endast ett vågtal för isotropa material)

$$k(\omega) = k_0 (\epsilon(\omega)\mu(\omega))^{1/2} = \frac{\omega (\epsilon(\omega)\mu(\omega))^{1/2}}{c_0}$$

Vidare gäller att fälten inte har någon z -komponent, se (4.5).

$$\begin{cases} E_z(z, \omega) = 0 \\ H_z(z, \omega) = 0 \end{cases}$$

Vårt fält $\mathbf{E}_{xy}$ och $\mathbf{H}_{xy}$ är således hela fältet och vi kan ta bort indexet xy i vår analys. Vidare gäller att sambandet mellan $\mathbf{E}$ och $\mathbf{H}$ ges av, se (4.9)

$$\begin{cases} \mathbf{E}(z, \omega) = \mp \eta_0 \left(\frac{\mu(\omega)}{\epsilon(\omega)} \right)^{1/2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}(z, \omega) = \mp \eta_0 \eta(\omega) \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}(z, \omega) = \mp \mathbf{Z} \cdot \eta_0 \mathbf{H}(z, \omega) \\ \eta_0 \mathbf{H}(z, \omega) = \pm \left(\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)} \right)^{1/2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}(z, \omega) = \pm \frac{1}{\eta(\omega)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}(z, \omega) = \pm \mathbf{Y} \cdot \mathbf{E}(z, \omega) \end{cases} \quad (4.10)$$

eftersom $\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}$. Övre (nedre) tecknet väljs om vågen propagerar i positiva (negativa) z -riktningen. Materialets (relativa) vågimpedans betecknar vi med $\eta(\omega) = (\mu(\omega)/\epsilon(\omega))^{1/2}$. Det isotropa materialets admittans- och impedansdyad är

$$\begin{cases} \mathbf{Y} = \frac{1}{\eta(\omega)} \mathbf{J} \\ \mathbf{Z} = \eta(\omega) \mathbf{J} \end{cases}$$

4.2.1 Reflektion mot plan skiljeyta

Den enklaste tillämpningen på vågutbredning i isotropa material utgör reflektion av en infallande planvåg mot ett isotropt material. Låt $z = 0$ vara skiljeyta mellan två isotropa material, se figur 4.1. Material 1, $z < 0$, innehåller källorna och karakteriseras av parametrarna ϵ_1 och μ_1 . Motsvarande materialparametrar i material 2, $z > 0$, betecknas ϵ_2 och μ_2 . Material 1 eller 2 behöver inte vara förlustfria, men i allmänhet har material 1 små förluster så att inte fälten, som genereras av källorna, dämpas alltför kraftigt utan kan propagera till skiljeytan.

Källorna i material 1 genererar ett infallande fält. De är lokaliserade i volymen $z < z_0 < 0$ och antas generera ett fält i området $z_0 < z < 0$ som varierar endast som funktion av z . I området mellan källorna och skiljeytan, $z_0 < z < 0$, antar vi att det totala elektriska fältet i material 1 består av två termer, en infallande planvåg, $\mathbf{E}^i(z, \omega)$, och en reflekterad planvåg, $\mathbf{E}^r(z, \omega)$.

$$\mathbf{E}_1(z, \omega) = \mathbf{E}^i(z, \omega) + \mathbf{E}^r(z, \omega) \quad z_0 < z < 0 \quad (4.11)$$

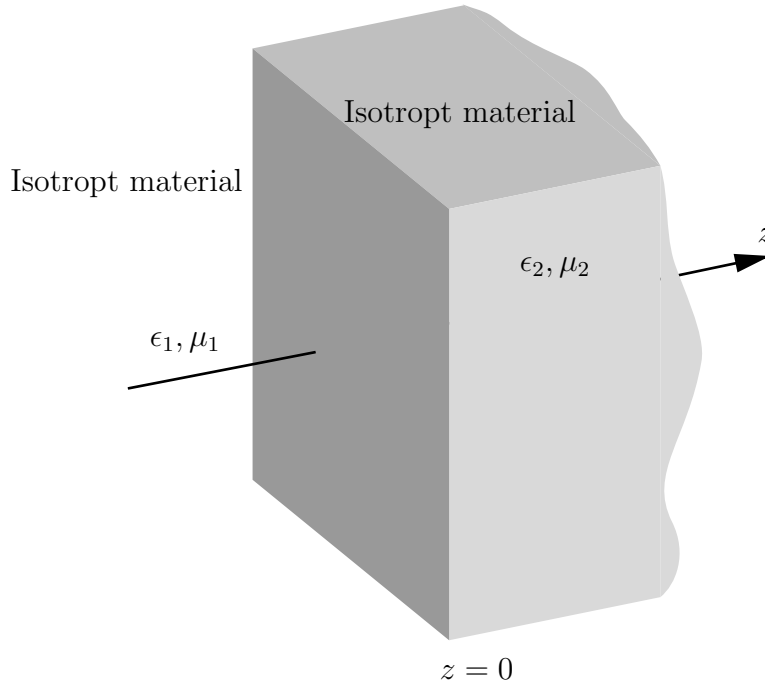
De båda fälten är

$$\begin{cases} \mathbf{E}^i(z, \omega) = \mathbf{E}^i(\omega) e^{ik_1 z} \\ \mathbf{E}^r(z, \omega) = \mathbf{E}^r(\omega) e^{-ik_1 z} \end{cases} \quad z_0 < z < 0$$

där vågtalet i material 1 är

$$k_1(\omega) = \frac{\omega}{c_0} (\epsilon_1(\omega) \mu_1(\omega))^{1/2}$$

och vektorerna $\mathbf{E}^i(\omega)$ och $\mathbf{E}^r(\omega)$ är två komplexa vektorer som anger respektive vågs polarisationstillstånd. Notera tecknen i exponenten, $\exp(\pm ik_1 z)$, som anger i vilken riktning vågen propagerar. Källorna till det infallande fältet ligger till vänster



Figur 4.1: Geometri för reflektion och transmission mellan två isotropa material.

om observationspunkten z , medan det reflekterade fältets källor ligger till höger om observationspunkten.

Den infallande vågens amplitud och polarisation, $\mathbf{E}^i(\omega)$, antas känd, medan den reflekterade vågens amplitud och polarisation, $\mathbf{E}^r(\omega)$, är okänd. Det är denna storhet vi önskar bestämma uttryckt i den infallande vågens amplitud $\mathbf{E}^i(\omega)$.

Motsvarande magnetiska fält i område 1, $z < 0$, betecknar vi

$$\mathbf{H}_1(z, \omega) = \mathbf{H}^i(z, \omega) + \mathbf{H}^r(z, \omega)$$

Genom att utnyttja (4.10) får vi följande uttryck på de magnetiska fälten i material 1:

$$\begin{cases} \eta_0 \mathbf{H}^i(z, \omega) = \frac{1}{\eta_1(\omega)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^i(\omega) e^{ik_1 z} \\ \eta_0 \mathbf{H}^r(z, \omega) = -\frac{1}{\eta_1(\omega)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^r(\omega) e^{-ik_1 z} \end{cases} \quad z_0 < z < 0$$

där material 1:s (relativa) vågimpedans $\eta_1(\omega) = (\mu_1(\omega)/\epsilon_1(\omega))^{1/2}$.

Det totala elektriska och det totala magnetiska fältets värde vid gränssytan $z = 0$ i material 1 blir därför

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1(z = 0, \omega) = \mathbf{E}^i(\omega) + \mathbf{E}^r(\omega) \\ \eta_0 \mathbf{H}_1(z = 0, \omega) = \frac{1}{\eta_1(\omega)} \mathbf{J} \cdot (\mathbf{E}^i(\omega) - \mathbf{E}^r(\omega)) \end{cases}$$

I område 2, $z > 0$, ansätter vi på liknande sätt ett elektriskt och ett magnetisk fält. Eftersom vi antar att område 2 är källfritt, är endast en planvåg, som propagerar

i $+z$ -riktningen, aktuell.

$$\begin{cases} \mathbf{E}_2(z, \omega) = \mathbf{E}^t e^{ik_2 z} \\ \mathbf{H}_2(z, \omega) = \mathbf{H}^t e^{ik_2 z} \end{cases} \quad z > 0$$

Det magnetiska fältet i material 2 uttrycker vi i motsvarande elektriskt fält, se (4.10).

$$\eta_0 \mathbf{H}^t(z, \omega) = \frac{1}{\eta_2(\omega)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^t(\omega) e^{ik_2 z} \quad z > 0$$

där vågtalet k_2 för material 2 är

$$k_2(\omega) = \frac{\omega}{c_0} (\epsilon_2(\omega) \mu_2(\omega))^{1/2}$$

och dess (relativa) vågimpedans $\eta_2(\omega) = (\mu_2(\omega)/\epsilon_2(\omega))^{1/2}$.

Det totala elektriska och det totala magnetiska fältets värde vid gränssytan $z = 0$ i material 2 blir

$$\begin{cases} \mathbf{E}_2(z = 0, \omega) = \mathbf{E}^t(\omega) \\ \eta_0 \mathbf{H}_2(z = 0, \omega) = \frac{1}{\eta_2(\omega)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^t(\omega) \end{cases}$$

På skiljeytan $z = 0$ satisfierar fälten randvillkor, se (1.13) på sidan 7. Dessa är kontinuitet av det elektriska och det magnetiska fältets tangentialkomponenter. Vi får följande ekvationssystem (vi antar att ytströmmar saknas på ytan).

$$\begin{cases} \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^r = \mathbf{E}^t \\ \mathbf{J} \cdot (\mathbf{E}^i - \mathbf{E}^r) = \frac{\eta_1}{\eta_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^t \end{cases}$$

Lösningen till detta system är

$$\begin{cases} \mathbf{E}^r(\omega) = \frac{\eta_2(\omega) - \eta_1(\omega)}{\eta_2(\omega) + \eta_1(\omega)} \mathbf{E}^i(\omega) = r(\omega) \mathbf{E}^i(\omega) \\ \mathbf{E}^t(\omega) = \frac{2\eta_2(\omega)}{\eta_2(\omega) + \eta_1(\omega)} \mathbf{E}^i(\omega) = t(\omega) \mathbf{E}^i(\omega) \end{cases} \quad (4.12)$$

Vi noterar att den reflekterade, respektive transmitterade vågens polarisationstillstånd inte har förändrats. Fälten har endast multiplicerats med en komplex konstant. Dessa komplexa tal definierar skiljeytans reflektionskoefficient⁴ $r(\omega)$ och transmissionskoefficient $t(\omega)$.

$$\begin{cases} r(\omega) = \frac{\eta_2(\omega) - \eta_1(\omega)}{\eta_2(\omega) + \eta_1(\omega)} \\ t(\omega) = \frac{2\eta_2(\omega)}{\eta_2(\omega) + \eta_1(\omega)} \end{cases} \quad (4.13)$$

⁴Reflektionskoefficienten r kan lika väl uttryckas som koefficienten framför motsvarande magnetiska fält. Detta ger samma uttryck på reflektionskoefficienten så när som på tecken. Notera att detta gäller ej för transmissionskoefficienten (en faktor η_1/η_2 skiljer).

Dessa uttryck anger hur stor del av den infallande vågens amplitud som reflekteras tillbaka i område 1, respektive transmitteras in i område 2. Notera att

$$t(\omega) = r(\omega) + 1$$

Effektflödestätheten hos den infallande vågen och den reflekterade vågen kan uttryckas i den komplexa amplitudvektorn $\mathbf{E}^i(\omega)$, respektive $\mathbf{E}^r(\omega)$. Speciellt gäller på skiljeytan $z = 0$ att

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \mathbf{S}_i(t) \rangle (z = 0, \omega) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}^i(z = 0, \omega) \times \mathbf{H}^{i*}(z = 0, \omega) \} \\ \quad = \frac{1}{2\eta_0} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\eta_1^*(\omega)} \mathbf{E}^i(\omega) \times \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^{i*}(\omega) \right\} \\ \quad = \frac{1}{2\eta_0} |\mathbf{E}^i(\omega)|^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\eta_1(\omega)} \right\} \hat{\mathbf{z}} \\ \langle \mathbf{S}_r(t) \rangle (z = 0, \omega) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}^r(z = 0, \omega) \times \mathbf{H}^{r*}(z = 0, \omega) \} \\ \quad = -\frac{1}{2\eta_0} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\eta_1^*(\omega)} \mathbf{E}^r(\omega) \times \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^{r*}(\omega) \right\} \\ \quad = -\frac{1}{2\eta_0} |\mathbf{E}^r(\omega)|^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\eta_1(\omega)} \right\} \hat{\mathbf{z}} \end{array} \right.$$

Kvoten mellan effektflödestätheten hos den reflekterade och infallande vågen på skiljeytan $z = 0$ är således lika med kvoten mellan motsvarande elektriska fälts absolutbelopp i kvadrat, och ligger till grund för definitionen av reflektans. Reflektansen R definieras som

$$R(\omega) = \frac{-\langle \mathbf{S}_r(t) \rangle (z = 0, \omega) \cdot \hat{\mathbf{z}}}{\langle \mathbf{S}_i(t) \rangle (z = 0, \omega) \cdot \hat{\mathbf{z}}} = \frac{|\mathbf{E}^r(\omega)|^2}{|\mathbf{E}^i(\omega)|^2} = |r(\omega)|^2 = \left| \frac{\eta_2(\omega) - \eta_1(\omega)}{\eta_2(\omega) + \eta_1(\omega)} \right|^2$$

4.2.2 Materialbestämning med hjälp av reflektion

Det infallande fältet och det reflekterade fältet är relaterat genom, se (4.11), (4.12) och (4.13)

$$\mathbf{E}_1(z, \omega) = \mathbf{E}^i(\omega) e^{i\omega z/c_0} + r(\omega) \mathbf{E}^i(\omega) e^{-i\omega z/c_0} \quad (4.14)$$

där

$$r(\omega) = \frac{1 - (\epsilon_2(\omega))^{1/2}}{1 + (\epsilon_2(\omega))^{1/2}} \quad (4.15)$$

Vi har här explicit antagit att material 1 är vakuum ($\epsilon_1 = \mu_1 = 1$), och material 2 är omagnetiskt ($\mu_2 = 1$).

Vårt mål blir att bestämma material 2, dvs. $\epsilon_2(\omega)$, från reflektionsmätningar. En uppenbar möjlighet är naturligtvis att från reflektionskoefficienten $r(\omega)$ beräkna $\epsilon_2(\omega)$ som funktion av frekvensen. Det finns emellertid ett elegant sätt att bestämma

materialets susceptibilitetsfunktion, $\chi_2(t)$, genom att göra analysen i tidsdomänen. Ekvation (3.7) på sidan 38 och dess invers

$$\chi_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\epsilon_2(\omega) - 1] e^{-i\omega t} d\omega$$

ger sambandet mellan dielektricitetsfunktionen $\epsilon_2(\omega)$ och susceptibilitetsfunktion $\chi_2(t)$ i material 2.

För att åstadkomma denna materialbestämning transformerar vi fälten till tidsdomänen. De tidsharmoniska fälten, som vi har analyserat i detta avsnitt, och motsvarande fält i tidsdomänen är relaterade till varann genom en Fouriertransform. För t.ex. fältet $\mathbf{E}_1$ gäller

$$\mathbf{E}_1(z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_1(z, t) e^{i\omega t} dt$$

med invers transform

$$\mathbf{E}_1(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_1(z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Om vi utnyttjar att inversa Fouriertransformen av en produkt är en faltning blir det totala fältet i material 1, (4.14), följande:

$$\mathbf{E}_1(z, t) = \mathbf{E}^i(t - z/c_0) + \mathbf{E}^r(t + z/c_0)$$

där det reflekterade och det infallande fältet är relaterade till varann genom faltningen

$$\mathbf{E}^r(t) = \int_{-\infty}^t R(t - t') \mathbf{E}^i(t') dt'$$

Här ges reflektionskärnan $R(t)$ av

$$R(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

På grund av kausalitet är reflektionskärnan $R(t) = 0$ då $t < 0$.

Från ekvation (4.15) kan vi lösa ut $(\epsilon_2(\omega))^{1/2}$. Resultatet blir

$$(\epsilon_2(\omega))^{1/2} = \frac{1 - r(\omega)}{1 + r(\omega)}$$

vilket vi kvadrerar och skriver som

$$\epsilon_2(\omega) (1 + r^2(\omega) + 2r(\omega)) = 1 + r^2(\omega) - 2r(\omega)$$

eller

$$(\epsilon_2(\omega) - 1) (1 + r^2(\omega) + 2r(\omega)) + 4r(\omega) = 0$$

I tidsdomänen blir detta samband

$$\chi_2(t) + \int_0^t K(t-t')\chi_2(t') dt' = F(t) \quad (4.16)$$

där

$$\begin{cases} K(t) = 2R(t) + \int_0^t R(t-t')R(t') dt' \\ F(t) = -4R(t) \end{cases}$$

Om reflektionskärnan $R(t)$ är känd från experiment, dvs. $K(t)$ och $F(t)$ kända funktioner, är (4.16) en Volterras integralekvation av andra slaget. Denna ekvation är lätt att lösa numeriskt, se appendix C, och χ_2 kan bestämmas enkelt.

Exempel 4.1

Flera exakt lösbara exempel finns. Vi ger här utan härledning⁵ två exempel på reflektionskärna $R(t)$ och tillhörande susceptibilitetsfunktion $\chi_2(t)$.

Debyemodellen är exakt lösbar ($\alpha > 0$ och $\beta \geq 0$).

$$\begin{cases} \chi_2(t) = 2\alpha H(t)e^{-\beta t} \\ R(t) = -H(t) \frac{I_1(\alpha t)e^{-(\beta+\alpha)t}}{t} \end{cases}$$

där I_1 är en modifierad Besselfunktion⁶ av ordning 1, och $H(t)$ Heavisides stegfunktion.

Ett annat exempel på exakt lösning är en modifierad Debyemodell ($\alpha > 0$ och $\beta \geq 0$).

$$\begin{cases} \chi_2(t) = \alpha^2 H(t)te^{-\beta t} \\ R(t) = -2H(t)e^{-\beta t} \frac{J_2(\alpha t)}{t} \end{cases}$$

där J_2 är Besselfunktionen av ordning 2. ■

4.2.3 Reflektion och transmission mot ändlig platta

I fallet med en platta av ändlig tjocklek d blir analysen mycket analog den i avsnitt 4.2.1. Geometrin visas i figur 4.2.

I område 1 och 3 ansätter vi, som i avsnitt 4.2.1, ett infallande, ett reflekterat fält och ett transmitterat fält, dvs.

$$\mathbf{E}_1(z, \omega) = \mathbf{E}^i(z, \omega) + \mathbf{E}^r(z, \omega) = \mathbf{E}^i(\omega)e^{ik_1(\omega)z} + \mathbf{E}^r(\omega)e^{-ik_1(\omega)z} \quad z_0 < z < 0$$

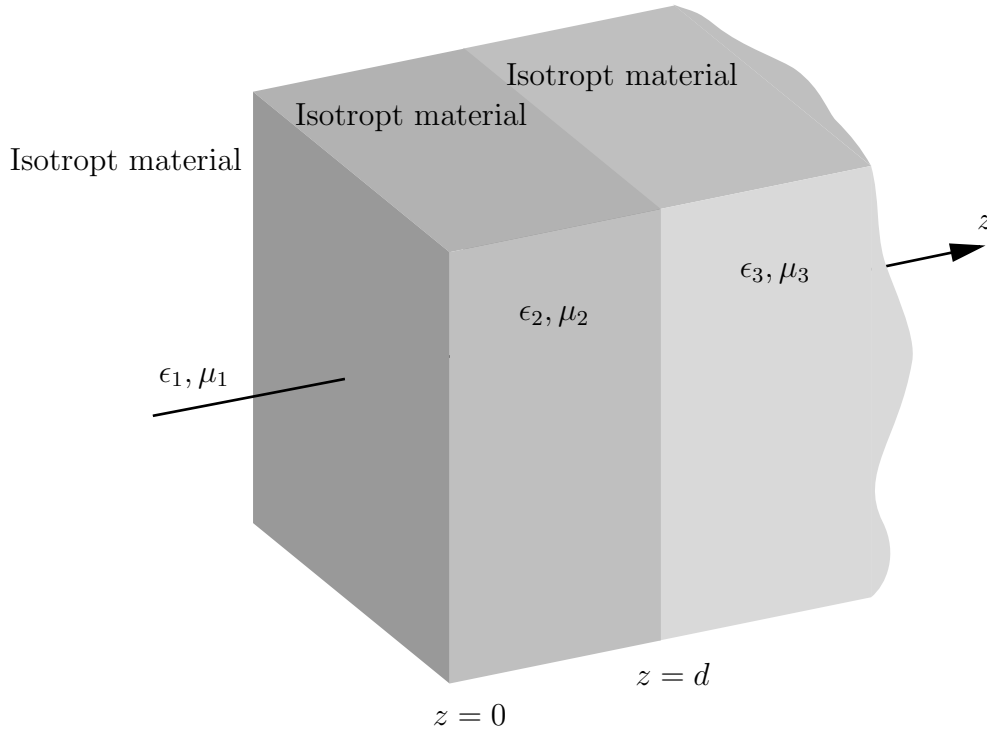
och

$$\mathbf{E}_3(z, \omega) = \mathbf{E}^t(\omega)e^{ik_3(\omega)(z-d)} \quad z > d$$

⁵Lösningen till dessa exempel kan visas med Laplace-transformteknik.

⁶Modifierad Besselfunktion av ordning n , $I_n(z)$, kan definieras mha. Besselfunktioner av ordning n , $J_n(z)$, med ett argument som är roterat 90° i det komplexa talplanet, dvs. multiplicerat med den imaginära enheten i .

$$I_n(z) = i^{-n}J_n(iz)$$



Figur 4.2: Geometri för reflektion och transmission mot en platta.

Vågtalet k_1 är vågtalet för material 1, $k_1(\omega) = \omega (\epsilon_1(\omega)\mu_1(\omega))^{1/2}/c_0$ och k_3 är vågtalet för material 3, $k_3(\omega) = \omega (\epsilon_3(\omega)\mu_3(\omega))^{1/2}/c_0$. Notera att vi normerat fältet så att $\mathbf{E}_3(z=d) = \mathbf{E}^t$. Denna normering ger enklare uttryck i våra beräkningar. Motsvarande magnetiska fält blir (utnyttja (4.10))

$$\begin{aligned}\eta_0 \mathbf{H}_1(z, \omega) &= \eta_0 \mathbf{H}^i(z, \omega) + \eta_0 \mathbf{H}^r(z, \omega) \\ &= \frac{1}{\eta_1(\omega)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^i(\omega) e^{ik_1 z} - \frac{1}{\eta_1(\omega)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^r(\omega) e^{-ik_1 z} \quad z_0 < z < 0\end{aligned}$$

och

$$\eta_0 \mathbf{H}_3(z, \omega) = \eta_0 \mathbf{H}^t(z, \omega) = \frac{1}{\eta_3(\omega)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^t(\omega) e^{ik_3(z-d)} \quad z > d$$

där materialens (relativa) vågimpedanser är $\eta_1(\omega) = (\mu_1(\omega)/\epsilon_1(\omega))^{1/2}$, och $\eta_3(\omega) = (\mu_3(\omega)/\epsilon_3(\omega))^{1/2}$.

I område 2 måste vi ansätta ett elektriskt fält bestående av planvågor, som utbreder sig i både positiva och negativa z -riktningen eftersom vi har skiljeytor både till höger och vänster om observationspunkten, dvs.

$$\mathbf{E}_2(z, \omega) = \mathbf{E}^+(z, \omega) + \mathbf{E}^-(z, \omega) = \mathbf{E}^+(\omega) e^{ik_2(\omega)z} + \mathbf{E}^-(\omega) e^{-ik_2(\omega)z} \quad 0 < z < d$$

Vågtalet k_2 är vågtalet för material 2, $k_2(\omega) = \omega (\epsilon_2(\omega)\mu_2(\omega))^{1/2}/c_0$. Det magnetiska

fältet i område 2 blir

$$\begin{aligned}\eta_0 \mathbf{H}_2(z, \omega) &= \eta_0 \mathbf{H}^+(z, \omega) + \eta_0 \mathbf{H}^-(z, \omega) \\ &= \frac{1}{\eta_2(\omega)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^+(\omega) e^{ik_2 z} - \frac{1}{\eta_2(\omega)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^-(\omega) e^{-ik_2 z} \quad 0 < z < d\end{aligned}$$

där material 2:s relativa vågimpedans $\eta_2(\omega) = (\mu_2(\omega)/\epsilon_2(\omega))^{1/2}$.

I dessa uttryck är amplituden hos det infallande fältet, $\mathbf{E}^i(\omega)$, känd medan de fyra övriga amplituderna, $\mathbf{E}^r$, $\mathbf{E}^\pm$ och $\mathbf{E}^t$, är okända. I detta avsnitt är vi främst intresserade av att beräkna hur mycket som reflekteras mot och hur mycket som transmitteras genom plattan, dvs. $\mathbf{E}^r$ och $\mathbf{E}^t$, uttryckt i $\mathbf{E}^i$, skall beräknas.

Randvillkoren på randytorna $z = 0$ och $z = d$ leder till fyra ekvationer. Vid ytan $z = 0$ gäller

$$\begin{cases} \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^r = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^- \\ \mathbf{J} \cdot (\mathbf{E}^i - \mathbf{E}^r) = \frac{\eta_1}{\eta_2} \mathbf{J} \cdot (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) \end{cases}$$

medan vid ytan $z = d$ gäller

$$\begin{cases} \mathbf{E}^+ e^{ik_2 d} + \mathbf{E}^- e^{-ik_2 d} = \mathbf{E}^t \\ \mathbf{J} \cdot (\mathbf{E}^+ e^{ik_2 d} - \mathbf{E}^- e^{-ik_2 d}) = \frac{\eta_2}{\eta_3} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^t \end{cases}$$

Vi kan skriva om dessa ekvationer som ett ekvationssystem i de obekanta amplituderna $\mathbf{E}^r(\omega)$, $\mathbf{E}^t(\omega)$, $\mathbf{E}^+(\omega)$ och $\mathbf{E}^-(\omega)$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{\eta_1}{\eta_2} & -\frac{\eta_1}{\eta_2} & 0 \\ 0 & e^{ik_2 d} & e^{-ik_2 d} & -1 \\ 0 & e^{ik_2 d} & -e^{-ik_2 d} & -\frac{\eta_2}{\eta_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}^r \\ \mathbf{E}^+ \\ \mathbf{E}^- \\ \mathbf{E}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^i \\ \mathbf{E}^i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Vi eliminerar fälten $\mathbf{E}^\pm$ från dessa ekvationer. Detta leder till

$$\begin{cases} \mathbf{E}^r(\omega) = r(\omega) \mathbf{E}^i(\omega) \\ \mathbf{E}^t(\omega) = t(\omega) \mathbf{E}^i(\omega) \end{cases}$$

där reflektionskoefficienten r och transmissionskoefficienten t för hela plattan definieras på samma sätt som i avsnitt 4.2.1. Efter lite algebra får vi

$$\begin{cases} r(\omega) = \frac{r_0(\omega) + r_d(\omega) e^{2ik_2(\omega)d}}{1 + r_0(\omega) r_d(\omega) e^{2ik_2(\omega)d}} \\ t(\omega) = \frac{t_0(\omega) t_d(\omega) e^{ik_2(\omega)d}}{1 + r_0(\omega) r_d(\omega) e^{2ik_2(\omega)d}} \end{cases} \quad (4.17)$$

där reflektions- och transmissions-koefficienterna för de båda skiljeytorna $z = 0$ och $z = d$ betecknas r_0 och r_d , respektive t_0 och t_d och ges av (jämför (4.13))

$$\begin{cases} r_0(\omega) = \frac{\eta_2(\omega) - \eta_1(\omega)}{\eta_2(\omega) + \eta_1(\omega)} \\ r_d(\omega) = \frac{\eta_3(\omega) - \eta_2(\omega)}{\eta_3(\omega) + \eta_2(\omega)} \end{cases} \quad \begin{cases} t_0(\omega) = \frac{2\eta_2(\omega)}{\eta_2(\omega) + \eta_1(\omega)} \\ t_d(\omega) = \frac{2\eta_3(\omega)}{\eta_3(\omega) + \eta_2(\omega)} \end{cases}$$

Notera att

$$t_0 = r_0 + 1, \quad t_d = r_d + 1$$

Exempel 4.2

Specialfallet då vågimpedansen i material 1 och material 3 är lika, $\eta_1 = \eta_3$, är speciellt intressant. I detta fall är $r_0 = -r_d$ och vi får

$$\begin{cases} r = r_0 \frac{1 - e^{2ik_2d}}{1 - r_0^2 e^{2ik_2d}} \\ t = \frac{(1 - r_0^2)e^{ik_2d}}{1 - r_0^2 e^{2ik_2d}} \end{cases} \quad \eta_1 = \eta_3 \quad (4.18)$$

Reflektansen R definieras, som i avsnitt 4.2.1, som kvoten mellan reflekterad och infallande effektflestäthet på skiljeytan $z = 0$. För ett material där $\eta_1 = \eta_3$ är $R(\omega)$

$$R(\omega) = \frac{\langle \mathbf{S}_r(t) \rangle (z = 0, \omega) \cdot (-\hat{\mathbf{z}})}{\langle \mathbf{S}_i(t) \rangle (z = 0, \omega) \cdot \hat{\mathbf{z}}} = |r(\omega)|^2$$

Under antagandet att η_1 , η_2 och k_2 är reella tal, får vi

$$R(\omega) = \frac{a^2}{(1 - r_0^2)^2 + a^2}$$

där

$$a = 2r_0 \sin k_2 d$$

Vi ser att reflektansen beror på plattans tjocklek d genom parametern a , se även figur 4.3. Genom att lägga ett lämpligt tjockt skikt av ett material på ett annat material kan således reflektionsfria ytor erhållas, se övning 4.1. Detta utnyttjas ofta inom optiken för att åstadkomma reflektionsfria glasytor. Andra viktiga tillämpningsområden inom mikrovågstekniken är radomer, som används för att skydda antenner för väder och andra skadliga effekter.

Dessutom kan vi nu definiera transmittansen $T(\omega)$ för plattan som kvoten mellan den transmitterade och den infallande vågens effektflestäthet vid respektive skiljeyta. I fallet $\eta_1 = \eta_3$ blir $T(\omega)$

$$T(\omega) = \frac{\langle \mathbf{S}_t(t) \rangle (z = d, \omega) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3}{\langle \mathbf{S}_i(t) \rangle (z = 0, \omega) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3} = |t(\omega)|^2$$

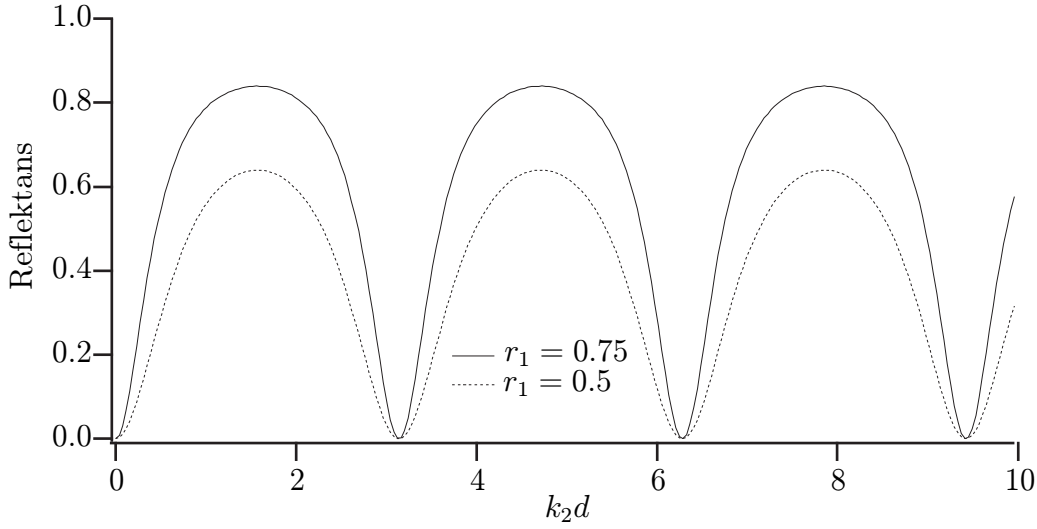
Under antagandet att η_1 , η_2 och k_2 är reella tal, får vi

$$T(\omega) = \frac{(1 - r_0^2)^2}{(1 - r_0^2)^2 + a^2}$$

Notera också att i detta fall gäller

$$R(\omega) + T(\omega) = 1$$

vilket uttrycker effektkonsivering. I material med förluster gäller inte detta samband. ■



Figur 4.3: Reflektansen R som funktion av tjockleken d på plattan.

4.3 Uniaxiala material

Vi kommer nu att analysera vågutbredning i ett något mer komplicerat material—det elektriskt uniaxialt anisotropa materialet. De konstitutiva relationerna för ett elektriskt uniaxialt material ges i ett kartesiskt koordinatsystem (x', y', z') med z' -axeln parallell med den optiska axeln av (se tabell 3.2 och tabell 3.3)⁷

$$\begin{cases} [\epsilon]'(\omega) = \begin{pmatrix} \epsilon(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z(\omega) \end{pmatrix} \\ [\mu](\omega) = \mu(\omega) [\mathbf{I}] \end{cases}$$

där dielektricitetsfunktionerna $\epsilon(\omega)$ och $\epsilon_z(\omega)$ är skilda från varandra och materialets permeabilitet är $\mu(\omega)$. Materialet är positivt (negativt) uniaxialt om $\epsilon_z > \epsilon$ ($\epsilon_z < \epsilon$), förutsatt att dessa storheter är reella, så att en storleksjämförelse kan ske.

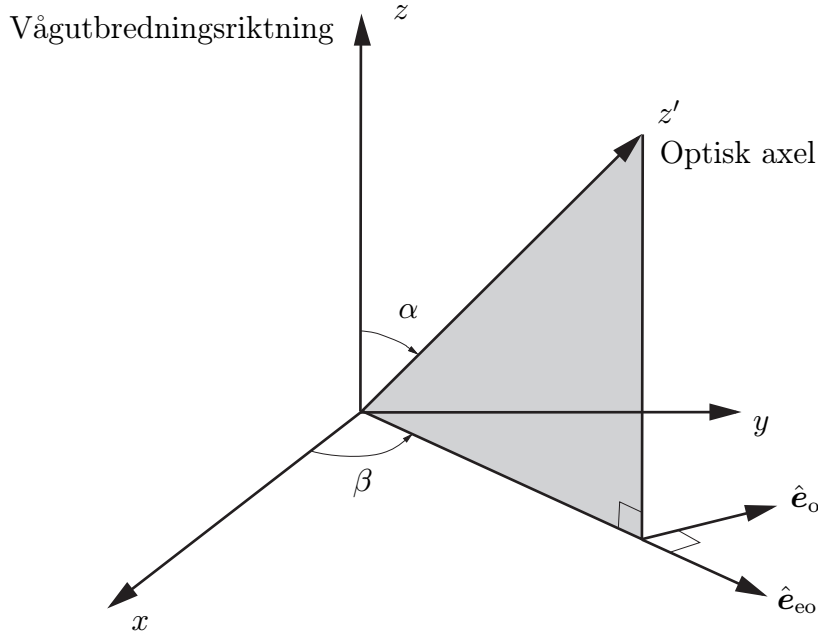
Den optiska axelns riktning $\hat{\mathbf{z}}'$ uttrycker vi nu i ett kartesiskt koordinatsystem (x, y, z) , vars z -axeln är riktad längs den riktning de plana vågorna utbreder sig. Vi definierar två sfäriska vinklar, α och β , som parametriserar den optiska axelns riktning, se figur 4.4.

$$\hat{\mathbf{z}}' = \hat{\mathbf{x}} \sin \alpha \cos \beta + \hat{\mathbf{y}} \sin \alpha \sin \beta + \hat{\mathbf{z}} \cos \alpha$$

Matrisrepresentationen av dielektricitetsmatrisen, $[\epsilon]$, i xyz -systemet får vi genom att similaritetstransformera motsvarande matris i $x'y'z'$ -systemet ovan. Resultatet är

⁷Den koordinatfria framställningen av dielektricitetsdyaden för ett elektriskt uniaxialt material med en optisk axel längs enhetsvektorn $\hat{\mathbf{u}}$ är

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(\omega) (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}) + \epsilon_z(\omega) \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}$$



Figur 4.4: Definition av vinklarna α och β för den optiska axeln.

tatet blir, se (B.4) och (B.5) i appendix B (notera invers transform)

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} = [\epsilon] = [\mathbf{R}]^t [\epsilon]' [\mathbf{R}]$$

$$= \begin{pmatrix} \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \beta & \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \beta & -\cos \beta & 0 \\ \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

där

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \epsilon(\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + \epsilon_z \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \\ \epsilon_{12} = (\epsilon_z - \epsilon) \sin^2 \alpha \cos \beta \sin \beta \\ \epsilon_{13} = (\epsilon_z - \epsilon) \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta \\ \epsilon_{21} = (\epsilon_z - \epsilon) \sin^2 \alpha \cos \beta \sin \beta \\ \epsilon_{22} = \epsilon(\cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + \epsilon_z \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \\ \epsilon_{23} = (\epsilon_z - \epsilon) \cos \alpha \sin \alpha \sin \beta \\ \epsilon_{31} = (\epsilon_z - \epsilon) \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta \\ \epsilon_{32} = (\epsilon_z - \epsilon) \cos \alpha \sin \alpha \sin \beta \\ \epsilon_{33} = \epsilon_z \cos^2 \alpha + \epsilon \sin^2 \alpha \end{cases}$$

Notera att $[\epsilon]$ är en symmetrisk matris.

Vi kan nu extrahera ut de olika komponenterna i dyaduppdelningen, se (4.3).

Resultatet är

$$\left\{ \begin{array}{l} [\epsilon_{\perp\perp}] = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{pmatrix} \\ [\epsilon_z] = \begin{pmatrix} \epsilon_{31} \\ \epsilon_{32} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} [\epsilon_{\perp}] = \begin{pmatrix} \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{pmatrix} \\ \epsilon_{zz} = \epsilon_{33} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\perp\perp} = \mu \mathbf{I} \\ \mu_z = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_{\perp} = 0 \\ \mu_{zz} = \mu \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = 0 \\ \zeta = 0 \end{array} \right.$$

Från dessa samband kan vi identifiera de fyra dyaderna $\mathbf{W}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, se (4.7). Resultatet blir

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}_1 = -\mathbf{0} \\ \mathbf{W}_2 = -\mathbf{J} \cdot \mu_{\perp\perp} = -\mu \mathbf{J} \\ \mathbf{W}_3 = \mathbf{J} \cdot \epsilon_{\perp\perp} - \frac{1}{\epsilon_{33}} \mathbf{J} \cdot \epsilon_{\perp} \epsilon_z \\ \mathbf{W}_4 = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

eller i explicit matrisrepresentation

$$\begin{aligned} [\mathbf{W}_1] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & [\mathbf{W}_2] &= \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ [\mathbf{W}_3] &= \begin{pmatrix} -\epsilon_{21} + \epsilon_{23}\epsilon_{31}/\epsilon_{33} & -\epsilon_{22} + \epsilon_{23}\epsilon_{32}/\epsilon_{33} \\ \epsilon_{11} - \epsilon_{13}\epsilon_{31}/\epsilon_{33} & \epsilon_{12} - \epsilon_{13}\epsilon_{32}/\epsilon_{33} \end{pmatrix} & [\mathbf{W}_4] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matrisen $[\mathbf{W}_3]$ kan förenklas.

$$[\mathbf{W}_3] = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$$

där

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{11} = -\frac{\epsilon(\epsilon_z - \epsilon)}{\epsilon_{33}} \sin^2 \alpha \cos \beta \sin \beta \\ W_{12} = -\frac{\epsilon}{\epsilon_{33}} (\epsilon_z (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta) + \epsilon \sin^2 \alpha \cos^2 \beta) \\ W_{21} = \frac{\epsilon}{\epsilon_{33}} (\epsilon_z (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta) + \epsilon \sin^2 \alpha \sin^2 \beta) \\ W_{22} = \frac{\epsilon(\epsilon_z - \epsilon)}{\epsilon_{33}} \sin^2 \alpha \cos \beta \sin \beta = -W_{11} \end{array} \right.$$

Koefficientmatrisen i fundamentalekvationen, (4.6), får följande utseende:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & 0 \\ W_{11} & W_{12} & 0 & 0 \\ W_{21} & W_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De fyra egenvärdena till matrisen är

$$\begin{cases} l_1 = -l_2 = (\epsilon\mu)^{1/2} \\ l_3 = -l_4 = \left(\frac{\epsilon\epsilon_z\mu}{\epsilon_{33}}\right)^{1/2} \end{cases}$$

Grenen på kvadratroten i dessa uttryck väljs så att imaginärdelen är icke-negativ. Två vågtal förekommer i uniaxiala material, och dessa betecknar vi k_o och k_{eo} .

$$\begin{cases} k_o = \frac{\omega}{c_0} (\epsilon\mu)^{1/2} = k_0 (\epsilon\mu)^{1/2} \\ k_{eo} = \frac{\omega}{c_0} \left(\frac{\epsilon\epsilon_z\mu}{\epsilon_{33}}\right)^{1/2} = k_0 \left(\frac{\epsilon\epsilon_z\mu}{\epsilon_{33}}\right)^{1/2} \end{cases}$$

Vi får två möjliga fashastigheter ($v = |\omega|/|k_r|$).

$$\begin{cases} v_o = c_0 \frac{1}{\text{Re}(\epsilon\mu)^{1/2}} \\ v_{eo} = c_0 \frac{1}{\text{Re}\left(\frac{\epsilon\epsilon_z\mu}{\epsilon_{33}}\right)^{1/2}} = c_0 \frac{1}{\text{Re}\left(\frac{\epsilon\epsilon_z\mu}{\epsilon_z \cos^2 \alpha + \epsilon \sin^2 \alpha}\right)^{1/2}} \end{cases}$$

Fashastigheten v_o kallas den *ordinära* vågens fashastighet, och har, som vi snart skall se, egenskaper som är närbesläktade med vågutbredning i isotropa material. Den andra fashastigheten, v_{eo} , hör till den *extra-ordinära* vågen. Notera att det ordinära vågtalet är oberoende av den optiska axelns riktning, medan den extraordinära vågens vågtal beror på α —vinkeln mellan den optiska axeln och vågutbredningens riktning. Däremot är vågtalet oberoende av vinkel β eftersom problemet uppvisar axiell symmetri kring optiska axeln.

Egenvektorerna till koefficientmatrisen i fundamentalekvationen, (4.6), bestämmer polarisationstillståndet hos modlösningarna. Resultatet blir fyra typer av lösningar (två olika lösningar som propagerar i vardera $\pm z$ -riktningarna).

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{xy}^o(z, \omega) = E^o(\omega) (-\hat{\mathbf{x}} \sin \beta + \hat{\mathbf{y}} \cos \beta) e^{\pm i k_o z} \\ \mathbf{E}_{xy}^{eo}(z, \omega) = E^{eo}(\omega) (\hat{\mathbf{x}} \cos \beta + \hat{\mathbf{y}} \sin \beta) e^{\pm i k_{eo} z} \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{xy}^o(z, \omega) = E^o(\omega) \hat{\mathbf{e}}_o e^{\pm i k_o z} \\ \mathbf{E}_{xy}^{eo}(z, \omega) = E^{eo}(\omega) \hat{\mathbf{e}}_{eo} e^{\pm i k_{eo} z} \end{cases} \quad (4.19)$$

där vi infört två enhetsvektorer, $\hat{\mathbf{e}}_o$ och $\hat{\mathbf{e}}_{eo}$, den första ligger vinkelrätt mot, och den andra i, det plan som spänns upp av z -axeln och den optiska axeln, se figur 4.4.

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_{eo} = \hat{\mathbf{x}} \cos \beta + \hat{\mathbf{y}} \sin \beta \\ \hat{\mathbf{e}}_o = -\hat{\mathbf{x}} \sin \beta + \hat{\mathbf{y}} \cos \beta \end{cases}$$

Notera att

$$\hat{\mathbf{e}}_{eo} \times \hat{\mathbf{e}}_o = \hat{\mathbf{z}}$$

så vektorerna $\{\hat{\mathbf{e}}_{\text{eo}}, \hat{\mathbf{e}}_{\text{o}}, \hat{\mathbf{z}}\}$ bildar ett orto-normerat högersystem. Vektorn $\mathbf{E}_{xy}^{\text{o}}(z, \omega)$ är således vinkelrät mot och $\mathbf{E}_{xy}^{\text{eo}}(z, \omega)$ är parallell med planet som spänns upp av z -axeln och den optiska axeln.

Motsvarande magnetiska fält ges av (4.9). För uniaxiala fält gäller

$$\begin{cases} \eta_0 \mathbf{H}_{xy}^{\text{o}}(z, \omega) = \pm \left(\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)} \right)^{1/2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{xy}^{\text{o}}(z, \omega) = \pm \mathbf{Y}_{\text{o}} \cdot \mathbf{E}_{xy}^{\text{o}}(z, \omega) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}^{\text{eo}}(z, \omega) = \pm \left(\frac{\epsilon \epsilon_z}{\epsilon_{33} \mu} \right)^{1/2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{xy}^{\text{eo}}(z, \omega) = \pm \mathbf{Y}_{\text{eo}} \cdot \mathbf{E}_{xy}^{\text{eo}}(z, \omega) \end{cases} \quad (4.20)$$

eftersom $\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}$. Övre (nedre) tecknet väljs om vågen propagerar i $+z(-z)$ -riktningen, och det uniaxiala materialets admittansdyader är

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_{\text{o}} = \left(\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)} \right)^{1/2} \mathbf{J} \\ \mathbf{Y}_{\text{eo}} = \left(\frac{\epsilon \epsilon_z}{\epsilon_{33} \mu} \right)^{1/2} \mathbf{J} \end{cases}$$

Den återstående komponenten, z -komponenten, av det elektriska och det magnetiska fälten ges av (4.5), som för uniaxiala material blir

$$\begin{pmatrix} E_z \\ \eta_0 H_z \end{pmatrix} = -\frac{1}{\epsilon_{33} \mu} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_z \cdot \mathbf{E}_{xy} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\epsilon_{33}} \begin{pmatrix} \epsilon_z \cdot \mathbf{E}_{xy} \\ 0 \end{pmatrix}$$

vilket visar att det magnetiska fältet alltid saknar z -komponent för elektriskt uniaxiala material ($\mathbf{H}_{xy}^{\text{o}}(z, \omega) = \mathbf{H}^{\text{o}}(z, \omega)$). För att avgöra storleken av det elektriska fältet längs utbredningsriktningen beräknar vi följande skalärprodukt:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_{\text{o}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_z = (\epsilon_z - \epsilon) \cos \alpha \sin \alpha (-\cos \beta \sin \beta + \cos \beta \sin \beta) = 0 \\ \hat{\mathbf{e}}_{\text{eo}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_z = (\epsilon_z - \epsilon) \cos \alpha \sin \alpha (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = (\epsilon_z - \epsilon) \cos \alpha \sin \alpha \end{cases} \quad (4.21)$$

För den ordinära moden med vågtal

$$k_{\text{o}} = k_0 (\epsilon \mu)^{1/2}$$

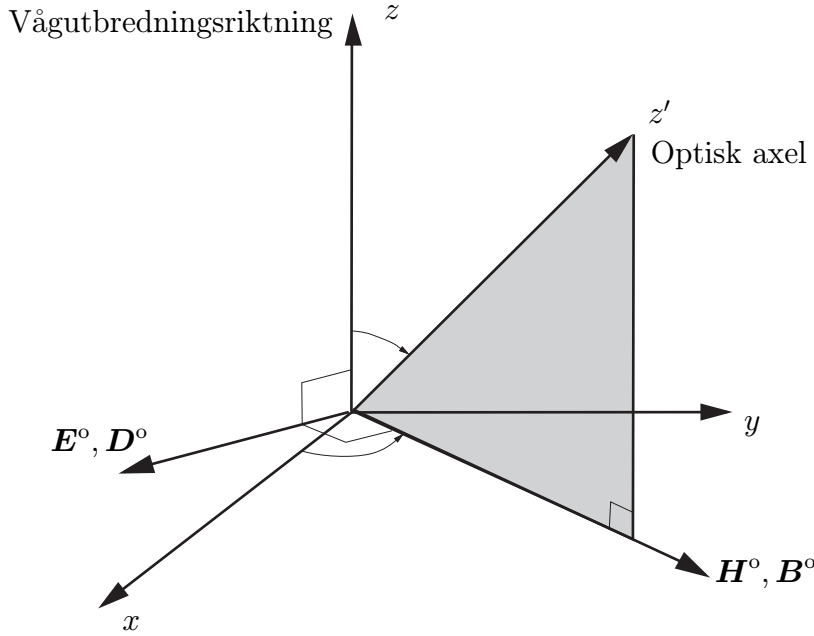
saknar således även det elektriska fältet z -komponent eftersom $\hat{\mathbf{e}}_{\text{o}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_z = 0$. Sammanfattningsvis gäller för dessa fält ($\mathbf{E}_{xy}^{\text{o}}(z, \omega) = \mathbf{E}^{\text{o}}(z, \omega)$), se figur 4.5

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\text{o}}(z, \omega) = E^{\text{o}}(\omega) \hat{\mathbf{e}}_{\text{o}} e^{\pm i k_{\text{o}} z} \\ \eta_0 \mathbf{H}^{\text{o}}(z, \omega) = \pm \left(\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)} \right)^{1/2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^{\text{o}}(z, \omega) = \mp \left(\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)} \right)^{1/2} E^{\text{o}}(\omega) \hat{\mathbf{e}}_{\text{eo}} e^{\pm i k_{\text{o}} z} \end{cases} \quad (4.22)$$

eftersom $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\text{o}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{e}}_{\text{o}} = -\hat{\mathbf{e}}_{\text{eo}}$.

De elektriska och magnetiska flödestätheterna, $\mathbf{D}(z, \omega)$ och $\mathbf{B}(z, \omega)$, får vi sedan genom de konstitutiva relationerna.

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{\text{o}}(z, \omega) = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}^{\text{o}}(z, \omega) \\ \mathbf{B}^{\text{o}}(z, \omega) = \mu_0 \mu \mathbf{H}^{\text{o}}(z, \omega) \end{cases}$$



Figur 4.5: Polarisationsstillståndet för den ordinära vågen.

Eftersom $\mathbf{E}^o(z, \omega)$ endast har x - y -komponenter får vi

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}^o(z, \omega) = \boldsymbol{\epsilon}_{\perp\perp} \cdot \mathbf{E}^o(z, \omega) + \hat{\mathbf{z}}\epsilon_z \cdot \mathbf{E}^o(z, \omega) = \boldsymbol{\epsilon}_{\perp\perp} \cdot \mathbf{E}^o(z, \omega)$$

eftersom $\hat{\mathbf{e}}_o \cdot \boldsymbol{\epsilon}_z = 0$. Då dessutom

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\perp\perp} \cdot \hat{\mathbf{e}}_o = \epsilon \hat{\mathbf{e}}_o$$

får vi

$$\begin{cases} \mathbf{D}^o(z, \omega) = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E}^o(z, \omega) \\ \mathbf{B}^o(z, \omega) = \mu_0 \boldsymbol{\mu} \mathbf{H}^o(z, \omega) \end{cases}$$

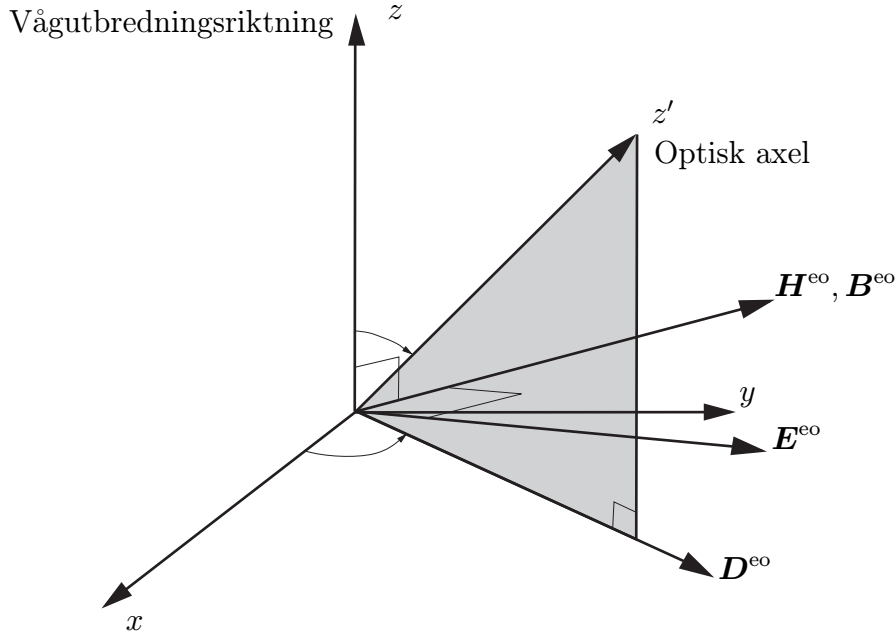
Detta polarisationsstillstånd påminner om polarisationsstillståndet i ett isotropt material, därav namnet ordinär våg.

För den extraordinära moden, som har vågtalet

$$k_{eo} = k_0 \left(\frac{\epsilon \epsilon_z \mu}{\epsilon_{33}} \right)^{1/2}$$

är situationen något mer komplicerad. För det elektriska och magnetiska fälten gäller på samma sätt som för den ordinära vågen att (se även figur 4.6)

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{eo}(z, \omega) = \left(\hat{\mathbf{e}}_{eo} - \hat{\mathbf{z}} \frac{(\epsilon_z - \epsilon) \cos \alpha \sin \alpha}{\epsilon_{33}} \right) E^{eo}(\omega) e^{\pm i k_{eo} z} \\ \eta_0 \mathbf{H}^{eo}(z, \omega) = \pm \left(\frac{\epsilon \epsilon_z}{\epsilon_{33} \mu} \right)^{1/2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{xy}^{eo}(z, \omega) = \pm \left(\frac{\epsilon \epsilon_z}{\epsilon_{33} \mu} \right)^{1/2} E^{eo}(\omega) \hat{\mathbf{e}}_o e^{\pm i k_{eo} z} \end{cases} \quad (4.23)$$



Figur 4.6: Polarisationsstillståndet för den extraordinära vågen.

eftersom $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\text{eo}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{e}}_{\text{eo}} = \hat{\mathbf{e}}_{\text{o}}$. Vi har här använt (4.21) för beräkning av E_z -komponenten. Det elektriska fältet har en z -komponent utom i specialfallen $\alpha = 0, \pi/2, \pi$.

De elektriska och magnetiska flödestätheterna, $\mathbf{D}(z, \omega)$ och $\mathbf{B}(z, \omega)$, får vi sedan genom de konstitutiva relationerna.

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{\text{eo}}(z, \omega) = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}^{\text{eo}}(z, \omega) \\ \mathbf{B}^{\text{eo}}(z, \omega) = \mu_0 \mu \mathbf{H}^{\text{eo}}(z, \omega) \end{cases}$$

Följande operation är av intresse för att förenkla $\mathbf{D}(z, \omega)$:

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\epsilon} \cdot \left(\hat{\mathbf{e}}_{\text{eo}} - \hat{\mathbf{z}} \frac{(\epsilon_z - \epsilon) \cos \alpha \sin \alpha}{\epsilon_{33}} \right) \\ &= (\boldsymbol{\epsilon}_{\perp \perp} + \hat{\mathbf{z}} \epsilon_z + \boldsymbol{\epsilon}_{\perp} \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{z}} \epsilon_{33} \hat{\mathbf{z}}) \cdot \left(\hat{\mathbf{e}}_{\text{eo}} - \hat{\mathbf{z}} \frac{(\epsilon_z - \epsilon) \cos \alpha \sin \alpha}{\epsilon_{33}} \right) \\ &= \boldsymbol{\epsilon}_{\perp \perp} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\text{eo}} + \hat{\mathbf{z}} \epsilon_z \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\text{eo}} - \boldsymbol{\epsilon}_{\perp} \frac{(\epsilon_z - \epsilon) \cos \alpha \sin \alpha}{\epsilon_{33}} - \hat{\mathbf{z}} (\epsilon_z - \epsilon) \cos \alpha \sin \alpha \\ &= (\epsilon_z \sin^2 \alpha + \epsilon \cos^2 \alpha) \hat{\mathbf{e}}_{\text{eo}} + \hat{\mathbf{z}} (\epsilon_z - \epsilon) \cos \alpha \sin \alpha - (\epsilon_z - \epsilon)^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \frac{1}{\epsilon_{33}} \hat{\mathbf{e}}_{\text{eo}} \\ &\quad - \hat{\mathbf{z}} (\epsilon_z - \epsilon) \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\epsilon \epsilon_z}{\epsilon_{33}} \hat{\mathbf{e}}_{\text{eo}} \end{aligned}$$

De elektriska och magnetiska flödestätheterna, $\mathbf{D}(z, \omega)$ och $\mathbf{B}(z, \omega)$, blir därför

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{\text{eo}}(z, \omega) = \epsilon_0 \frac{\epsilon \epsilon_z}{\epsilon_{33}} \mathbf{E}_{xy}^{\text{eo}}(z, \omega) \\ \mathbf{B}^{\text{eo}}(z, \omega) = \mu_0 \mu \mathbf{H}^{\text{eo}}(z, \omega) \end{cases}$$

Vi ser att de elektriska och magnetiska flödestätheterna, $\mathbf{D}(z, \omega)$ och $\mathbf{B}(z, \omega)$, alltid saknar z -komponent i ett elektriskt uniaxialt material—ett faktum som redan (4.1) visade.

Från analysen ovan ser vi att en plan våg som utbreder sig i ett uniaxialt material med fashastighet v_o eller v_{eo} måste vara linjärt polariserad (förutsatt att materialet är passivt, och utom i specialfallet då den optiska axeln är parallell med z -axeln, då vågen kan vara godtyckligt polariserad). Det allmänna fallet är en superposition av en ordinär och en extraordinär våg, som utbreder sig med olika fashastighet i materialet och med olika (linjär) polarisation. Den ordinära vågen utbreder sig med fashastigheten v_o och $\mathbf{E}$ -fältet polariserat *vinkelrätt* mot det plan som spänns upp av optiska axeln och utbredningsriktningen $\pm \hat{\mathbf{z}}$. Den extraordinära vågen har fashastigheten v_{eo} och $\mathbf{E}$ -fältet polariserat i det plan som spänns upp av $\hat{\mathbf{z}}$ och $\hat{\mathbf{e}}_{eo}$. En våg som träffar ett uniaxialt material delas upp i två linjärpolariserade vågor (en i $\hat{\mathbf{z}}\text{-}\hat{\mathbf{e}}_{eo}$ -planet och en vinkelrätt mot detta plan), som fortplantar sig med olika fashastighet. Detta fenomen kallas *dubbelbrytning*⁸ (*birefringence* eller *double refraction* i anglosaxisk litteratur).

Exempel 4.3

Beräkna vinkeln γ mellan den ordinära och den extraordinära vågen i ett förlustfritt, uniaxialt material, som funktion av vinkeln α , som anger vinkeln mellan z -axeln (utbredningsriktningen) och den optiska axeln, se figur 4.4. Bestäm det maximala värde, $\gamma_{\max}$, vinkeln γ kan anta för ett givet material och vid vilken vinkel α_0 detta inträffar.

Lösning: Låt vågorna propagera i $+\hat{\mathbf{z}}$ -riktningen. Materialet antas vara förlustfritt varför ϵ , ϵ_z och μ är reella storheter. För enkelhets skull antar vi vidare att de är positiva storheter. Med hjälp av (4.22) för den ordinära vågen kan vi teckna effekttransporten $\langle \mathbf{S}(t) \rangle$.

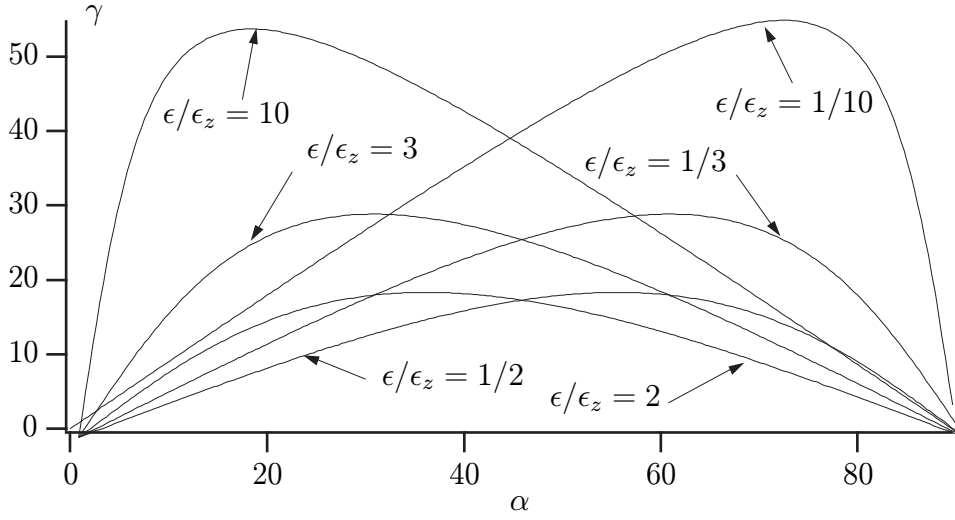
$$\langle \mathbf{S}(t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{\mathbf{e}}_o \times \hat{\mathbf{e}}_{eo} |E^o|^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |E^o|^2 \hat{\mathbf{z}}$$

För den extraordinära vågen gäller, se (4.23)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}(t) \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} \\ &= \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{e}}_{eo} - \hat{\mathbf{z}} \frac{(\epsilon_z - \epsilon) \cos \alpha \sin \alpha}{\epsilon_{33}} \right) \times \hat{\mathbf{e}}_o \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_z}{\epsilon_{33} \mu}} |E^{eo}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{e}}_{eo} \frac{(\epsilon_z - \epsilon) \cos \alpha \sin \alpha}{\epsilon_{33}} \right) \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_z}{\epsilon_{33} \mu}} |E^{eo}|^2 \end{aligned}$$

vilken har en $\hat{\mathbf{e}}_{eo}$ -komponent vinkelrätt mot utbredningsriktningen, som sker i $+\hat{\mathbf{z}}$ -riktningen.

⁸Den förste som beskrev detta optiska fenomen var dansken Erasmus Bartholinus (1625–98). En seglare hade från Island fört med sig några fina kristaller (kalkspat). Bartholinus fann att om ett litet föremål betraktades genom kristallen uppstod två bilder av föremålet. Detta finns beskrivet i *Experimenta cristalli Islandici disdiacastici*, 1669.



Figur 4.7: Vinkeln γ mellan ordinär och extraordinär våg i uniaxialt material som funktion av vinkeln α för olika värden på ϵ/ϵ_z .

Motsvarande normerade riktningar är

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{s}}_o = \hat{\mathbf{z}} & (\text{ordinär våg}) \\ \hat{\mathbf{s}}_{eo} = \frac{\hat{\mathbf{z}} (\epsilon_z \cos^2 \alpha + \epsilon \sin^2 \alpha) + \hat{\mathbf{e}}_{eo} (\epsilon_z - \epsilon) \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{\epsilon_z^2 \cos^2 \alpha + \epsilon^2 \sin^2 \alpha}} & (\text{extraordinär våg}) \end{cases}$$

ty längden av $\langle \mathbf{S}(t) \rangle$ i kvadrat för den extraordinära vågen är proportionell mot

$$\begin{aligned} & (\epsilon_z \cos^2 \alpha + \epsilon \sin^2 \alpha)^2 + (\epsilon_z - \epsilon)^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &= \epsilon_z^2 \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \epsilon^2 \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \epsilon_z^2 \cos^2 \alpha + \epsilon^2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Vinkeln mellan de båda riktningarna är γ , där γ bestäms av

$$\cos \gamma = \hat{\mathbf{s}}_o \cdot \hat{\mathbf{s}}_{eo} = \frac{\epsilon_z \cos^2 \alpha + \epsilon \sin^2 \alpha}{\sqrt{\epsilon_z^2 \cos^2 \alpha + \epsilon^2 \sin^2 \alpha}}$$

Inför $\beta = \epsilon/\epsilon_z \neq 1$, och vi får slututtrycket på vinkeln γ som funktion av vinkeln α .

$$\cos \gamma = \frac{\cos^2 \alpha + \beta \sin^2 \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \beta^2 \sin^2 \alpha}}$$

Vi ser att denna vinkel γ är noll för $\alpha = 0$ och $\pi/2$. Däremellan antar vinkeln γ värden mellan 0 och $\gamma_{\max}$, se figur 4.7.

Bestäm den maximala vinkeln, $\gamma_{\max}$, genom differentiering.

$$\begin{aligned} \frac{d(\cos \gamma)}{d\alpha} &= \frac{-2 \cos \alpha \sin \alpha + 2\beta \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \beta^2 \sin^2 \alpha}} \\ &\quad - \frac{(-2 \cos \alpha \sin \alpha + 2\beta^2 \sin \alpha \cos \alpha)(\cos^2 \alpha + \beta \sin^2 \alpha)}{2(\cos^2 \alpha + \beta^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} = 0 \end{aligned}$$

Ämne	ϵ	ϵ_z	$\epsilon_z - \epsilon$	$ \epsilon_z - \epsilon /(\epsilon_z + \epsilon)$	$\gamma_{\max}$	α_0
Is	1.7137	1.7174	0.0037	0.0011	0.06°	45.03°
Kalkspat	2.7503	2.2094	-0.5409	0.1091	6.26°	41.87°
Natruimnitrat	2.5135	1.7873	-0.7262	0.1689	9.72°	40.14°

Tabell 4.1: Exempel på vinkelskillnad mellan ordinär och extraordinärvåg för några material. Frekvensen för dessa data är $\lambda = 589$ nm.

Detta medför

$$(\beta - 1)(\cos^2 \alpha + \beta^2 \sin^2 \alpha) = \frac{1}{2} \overbrace{(\beta^2 - 1)}^{(\beta-1)(\beta+1)} (\cos^2 \alpha + \beta \sin^2 \alpha)$$

eller förenklat

$$2(\cos^2 \alpha + \beta^2 \sin^2 \alpha) = (\beta + 1)(\cos^2 \alpha + \beta \sin^2 \alpha)$$

vilket ger

$$\tan^2 \alpha = \frac{\beta - 1}{\beta^2 - \beta} = \frac{1}{\beta}$$

Vinkeln α_0 där det maximala värdet antas är därför

$$\tan \alpha_0 = \sqrt{\frac{1}{\beta}} = \sqrt{\frac{\epsilon_z}{\epsilon}}$$

Utnyttja $\cos \alpha_0 = 1/\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_0}$ och $\sin \alpha_0 = \tan \alpha_0 / \sqrt{1 + \tan^2 \alpha_0}$ för att bestämma den maximala vinkeln $\gamma_{\max}$.

$$\cos \gamma_{\max} = \frac{2\sqrt{\beta}}{1 + \beta} = \frac{2\sqrt{\epsilon_z \epsilon}}{\epsilon_z + \epsilon}$$

eller

$$\sin \gamma_{\max} = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma_{\max}} = \frac{\sqrt{(\epsilon_z + \epsilon)^2 - 4\epsilon_z \epsilon}}{\epsilon_z + \epsilon} = \frac{|\epsilon_z - \epsilon|}{\epsilon_z + \epsilon}$$

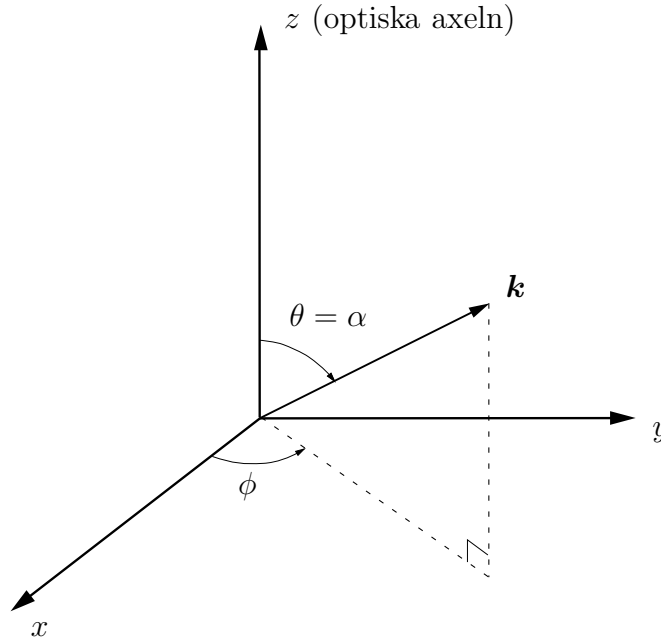
Exempel på denna vinkelskillnad visas i tabell 4.1. ■

4.3.1 k -ytor

Det uniaxiala materialet antas vara förlustfritt i detta avsnitt, dvs. ϵ , ϵ_z och μ , är reella. Vi antar vidare att ϵ , ϵ_z och μ är positiva storheter. Detta innebär att egenmodernas två möjliga vågtal

$$\begin{cases} k_o = k_0 \sqrt{\epsilon \mu} \\ k_{eo} = k_0 \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_z \mu}{\epsilon_z \cos^2 \alpha + \epsilon \sin^2 \alpha}} \end{cases}$$

är också reella, positiva storheter. Vinkeln α är som tidigare vinkeln mellan den optiska axeln och vågens utbredningsriktning.



Figur 4.8: De sfäriska vinklarna θ och ϕ för utbredningsvektorn $\mathbf{k}$.

I de tidigare avsnitten har vi orienterat vårt koordinatsystem i en sådan riktning att den plana vågen propagerat längs z -riktningen. För att studera skillnader och likheter mellan olika utbredningsriktningar är det ibland lämpligt att fixera koordinatsystemet, så att det ligger fixt i materialet, och i stället låta utbredningsriktningen variera. Vi väljer orientering på koordinataxlarna så att z -axeln sammanfaller med den optiska axelns riktning. Detta innebär att egenmodernas rumsberoende inte längre är $\exp\{\pm ik_0 z\}$ eller $\exp\{\pm ik_{\text{eo}} z\}$, utan

$$\exp\{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\}$$

där

$$\mathbf{k} = k(\hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \phi + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta)$$

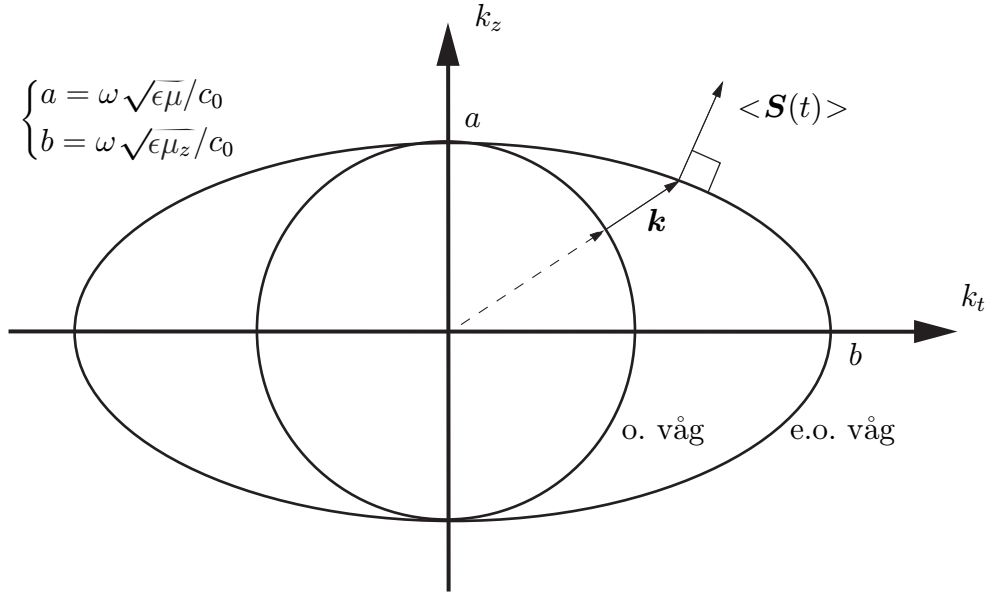
dvs.

$$\begin{cases} k_x = k \sin \theta \cos \phi \\ k_y = k \sin \theta \sin \phi \\ k_z = k \cos \theta \end{cases}$$

där vinklarna $\theta = \alpha$ och ϕ är de sfäriska vinklarna för vektorn $\mathbf{k}$, se figur 4.8. Notera att vinkeln $\theta = \alpha$ (α = vinkeln mellan optiska axeln och utbredningsriktningen). I relationen ovan är k antingen k_0 eller k_{eo} , beroende på vilken mod som avses. Vektorn $\mathbf{k}$ är en reell vektor (längd k) som anger i vilken riktning den plana vågen utbreder sig i vår fixa koordinatsystem. $\theta = 0$ ($\theta = \pi$) svarar mot vågutbredning i $+z$ ($-z$)-riktningen.

Det är lämpligt att införa en transversell komponent, k_t , av $\mathbf{k}$.

$$k_t = k \sin \theta = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$



Figur 4.9: k -ytor för ett positivt uniaxialt material $\epsilon_z > \epsilon$.

För den ordinära vågen kan vi skriva om längden på vektorn $k^2 = |\mathbf{k}|^2 = k_t^2 + k_z^2$ som

$$k_t^2 + k_z^2 = k_o^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \mu \epsilon \quad (4.24)$$

På motsvarande sätt får vi för den extraordinära vågen

$$k_{eo}^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{\epsilon \epsilon_z \mu}{\epsilon_z \cos^2 \alpha + \epsilon \sin^2 \alpha} = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{\epsilon \epsilon_z \mu}{\epsilon_z \cos^2 \theta + \epsilon \sin^2 \theta}$$

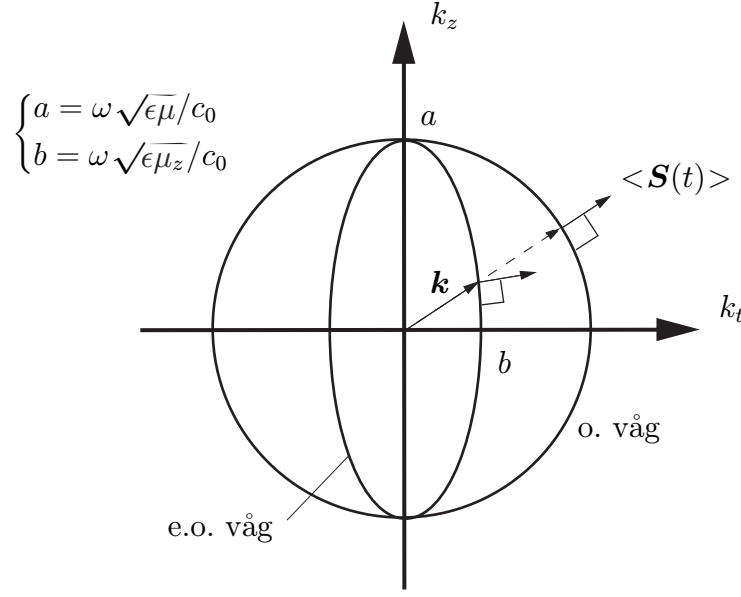
eller

$$\frac{c_0^2}{\omega^2 \mu \epsilon_z} k_t^2 + \frac{c_0^2}{\omega^2 \mu \epsilon} k_z^2 = 1 \quad (4.25)$$

Ekvation (4.24) är ekvationen för en sfär med radie $\omega\sqrt{\mu\epsilon}/c_0$ i k_x, k_y, k_z -rummet, medan för den extraordinära vågen är (4.25) ekvationen för en sfäroid med halvaxlar $\omega\sqrt{\mu\epsilon_z}/c_0$ respektive $\omega\sqrt{\mu\epsilon}/c_0$. Dessa båda ytor kallas materialets k -ytor, se figurerna 4.9 och 4.10. Avståndet till respektive k -yta vid en viss vinkel θ ger de möjliga vågtalen k_o och k_{eo} vid vågutbredning i denna riktning. Vi ser att i ett positivt uniaxialt material utbreder sig den extraordinära vågen långsammare än den ordinära, dvs. vågtalet för den extraordinära vågen är större än för den ordinära. I ett negativt uniaxialt material råder det motsatta förhållandet.

Planvågen utbreder sig i $\mathbf{k}$ -riktningen. Vi skall nu visa att effektflydestätheten $\langle \mathbf{S}(t) \rangle$ sker i en riktning som är vinkelrät mot sfärens eller sfäroidens yta.⁹ Målet är att visa att $\langle \mathbf{S}(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}(\omega) \times \mathbf{H}^*(\omega) \}$ är vinkelrät mot k -ytan.

⁹Vi kommer att visa att resultatet gäller för allmänna förlustfria anisotropa material. Se också övning 4.6 för allmänna förlustfria bianisotropa material.



Figur 4.10: k -ytor för ett negativt uniaxialt material $\epsilon_z < \epsilon$.

Vi låter $\mathbf{k}$ och $\mathbf{k}'$ vara två vektorer på k -ytan relaterade genom

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \delta\mathbf{k}$$

där $\delta\mathbf{k}$ är liten så att $\delta\mathbf{k}$ är tangent till k -ytan (detta är sant i gränsen $\delta\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}$). Fälten svarande mot $\mathbf{k}$ och $\mathbf{k}'$ är $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ respektive $\mathbf{E}'$, $\mathbf{D}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{H}'$. Fältns variation mellan $\mathbf{k}$ och $\mathbf{k} + \delta\mathbf{k}$ definieras av

$$\begin{cases} \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \delta\mathbf{E} \\ \mathbf{D}' = \mathbf{D} + \delta\mathbf{D} \\ \mathbf{B}' = \mathbf{B} + \delta\mathbf{B} \\ \mathbf{H}' = \mathbf{H} + \delta\mathbf{H} \end{cases}$$

Det fall som är aktuellt att analysera här är det förlustfria fallet, se (3.14) på sidan 46

$$\begin{cases} \epsilon = \epsilon^\dagger \\ \mu = \mu^\dagger \end{cases}$$

och där vågvektorn $\mathbf{k}$ är en reell vektor.

Förändringarna i fälten, t.ex. $\delta\mathbf{E}$, fås ur Maxwells fältekvationer (3.2) och (3.3). Eftersom fältets variation i rum och tid i detta avsnitt antas vara

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \exp i \{ \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t \}$$

kommer Maxwells fältekvationer för fälten $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ att få följande form:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \omega \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) \quad (4.26)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega) = -\omega \mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) \quad (4.27)$$

ty $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow i\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \exp i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t]$ och på liknande sätt för $\nabla \times \mathbf{H}$. Det implicita rums- och tidsberoendet $\exp i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t]$ är underförstått i dessa ekvationer. För fälten $\mathbf{E}'$, $\mathbf{D}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{H}'$ gäller på samma sätt

$$\begin{cases} (\mathbf{k} + \delta\mathbf{k}) \times (\mathbf{E} + \delta\mathbf{E}) = \omega(\mathbf{B} + \delta\mathbf{B}) \\ (\mathbf{k} + \delta\mathbf{k}) \times (\mathbf{H} + \delta\mathbf{H}) = -\omega(\mathbf{D} + \delta\mathbf{D}) \end{cases}$$

eller om de kvadratiske termerna, $\delta\mathbf{k} \times \delta\mathbf{E}$ och $\delta\mathbf{k} \times \delta\mathbf{H}$, försummas

$$\begin{cases} \delta\mathbf{k} \times \mathbf{E} + \mathbf{k} \times \delta\mathbf{E} = \omega\delta\mathbf{B} \\ \delta\mathbf{k} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{k} \times \delta\mathbf{H}^* = -\omega\delta\mathbf{D}^* \end{cases}$$

där vi utnyttjat Maxwells fältekvationer för fälten $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$.

Multiplicera den första ekvationen skalärt med $\mathbf{H}^*$ och den andra med $\mathbf{E}$ samt subtrahera. Resultatet blir

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^* \cdot (\delta\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \mathbf{H}^* \cdot (\mathbf{k} \times \delta\mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\delta\mathbf{k} \times \mathbf{H}^*) - \mathbf{E} \cdot (\mathbf{k} \times \delta\mathbf{H}^*) \\ = \omega\mathbf{H}^* \cdot \delta\mathbf{B} + \omega\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D}^* \end{aligned}$$

Vi utför en cyklisk permutation av termerna i vänstra ledet och utnyttjar sedan åter Maxwells fältekvationer (4.26) och (4.27). Resultatet kan skrivas som

$$2\delta\mathbf{k} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \omega \{ \mathbf{H}^* \cdot \delta\mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D}^* - \delta\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* - \delta\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B} \}$$

Med hjälp av de konstitutiva relationerna för anisotropa material, se (3.8) med $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$, får vi följande ekvation:

$$\begin{aligned} 2\delta\mathbf{k} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \\ = \omega \left\{ \mu_0 \mathbf{H}^* \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta\mathbf{H} + \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \delta\mathbf{E}^* - \epsilon_0 \delta\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \mathbf{E}^* - \mu_0 \delta\mathbf{H}^* \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} \right\} \\ = \omega\epsilon_0 \left\{ \eta_0^2 \delta\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\mu}^t \cdot \mathbf{H}^* + \delta\mathbf{E}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}^\dagger \cdot \mathbf{E} - \delta\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \mathbf{E}^* - \eta_0^2 \delta\mathbf{H}^* \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} \right\} \end{aligned}$$

Vi får således

$$\begin{aligned} 2\delta\mathbf{k} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \\ = \omega\epsilon_0 \left\{ \eta_0^2 (\delta\mathbf{H}^* \cdot \boldsymbol{\mu}^\dagger \cdot \mathbf{H})^* - \eta_0^2 (\delta\mathbf{H}^* \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}) + (\delta\mathbf{E}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}^\dagger \cdot \mathbf{E}) - (\delta\mathbf{E}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E})^* \right\} \end{aligned}$$

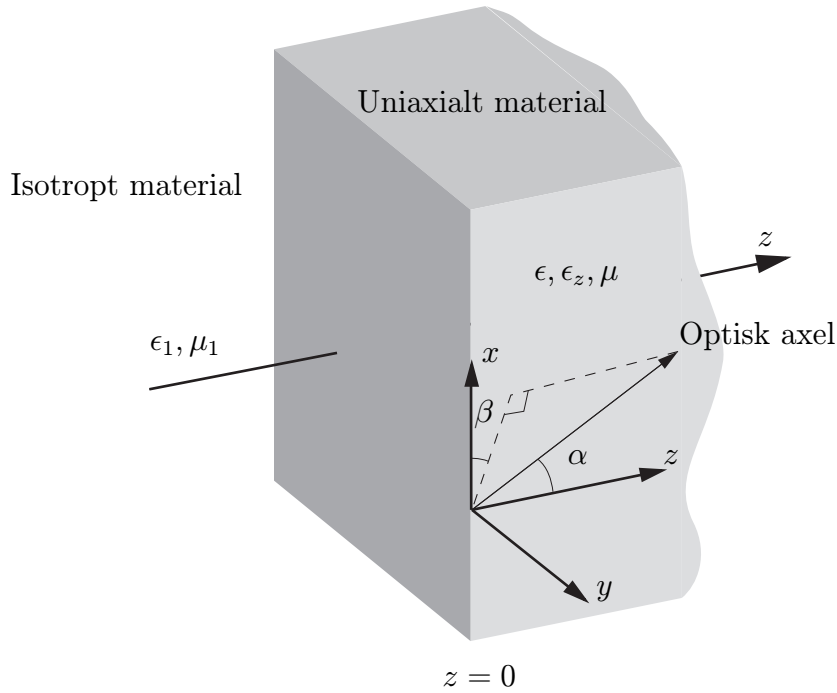
Sätter vi in villkoret för förlustfria material, $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^\dagger$, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^\dagger$, ser vi att högra ledet är en rent imaginär storhet (jfr $z - z^* = 2i \operatorname{Im} z$). Tar vi nu realdelen av ekvationen ovan får vi

$$\operatorname{Re} \{ \delta\mathbf{k} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \} = 0$$

dvs.

$$\delta\mathbf{k} \cdot \langle \mathbf{S}(t) \rangle = 0$$

och $\langle \mathbf{S}(t) \rangle$ är vinkelrät mot k -ytan, se figurer 4.9 och 4.10. För den ordinära vågen (k -ytan är en sfär) sker effekttransport och utbredning längs parallella riktningar. Däremot är dessa riktningar skilda för den extraordinära vågen (utom i vissa speciella riktningar, nämligen $\theta = 0, \pi/2, \pi$).



Figur 4.11: Geometri för reflektion och transmission mot ett uniaxialt material.

4.3.2 Reflektion mot plan skiljeyta

I detta avsnitt behandlas reflektion och transmission mot ett uniaxialt material. Material 1 antar vi är isotropt medan material 2 antas ha uniaxiala egenskaper.

Figur 4.11 visar geometrin för problemet. Vi låter planet $z = 0$ vara skiljeytan mellan ett isotropt material, $z < 0$, karakteriserat av materialparametrarna ϵ_1 och μ_1 , och ett allmänt uniaxialt material, $z > 0$. Det uniaxiala materialet karakteriseras av materialparametrarna ϵ , ϵ_z och μ . Vi antar att det elektromagnetiska fältet har källor i område 1 till vänster om planet $z = z_0 < 0$. Dessa källor antar vi genererar ett fält i området $z_0 < z < 0$ som varierar endast som funktion av z .

I material 1 ansätter vi en infallande våg $\mathbf{E}^i$ och en reflekterad våg $\mathbf{E}^r$.

$$\mathbf{E}_{1xy}(z, \omega) = \mathbf{E}^i(\omega)e^{ik_1z} + \mathbf{E}^r(\omega)e^{-ik_1z} \quad z_0 < z < 0$$

Vågtalet k_1 är vågtalet för material 1, $k_1 = \omega(\epsilon_1\mu_1)^{1/2}/c_0$. Fälten i material 1 har endast komponenter i x - y -planet. Det är lämpligt att använda de vinkelräta enhetsvektorerna $\hat{\mathbf{e}}_{eo}$ och $\hat{\mathbf{e}}_o$ som komponentaxlar för vektorerna $\mathbf{E}^i$ och $\mathbf{E}^r$. Vi ansätter

$$\begin{cases} \mathbf{E}^i = \hat{\mathbf{e}}_{eo}E_{eo}^i + \hat{\mathbf{e}}_oE_o^i \\ \mathbf{E}^r = \hat{\mathbf{e}}_{eo}E_{eo}^r + \hat{\mathbf{e}}_oE_o^r \end{cases}$$

Enhetsvektorerna $\hat{\mathbf{e}}_o$ och $\hat{\mathbf{e}}_{eo}$ definieras av

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_{eo} = \hat{\mathbf{x}} \cos \beta + \hat{\mathbf{y}} \sin \beta \\ \hat{\mathbf{e}}_o = -\hat{\mathbf{x}} \sin \beta + \hat{\mathbf{y}} \cos \beta \end{cases}$$

där β är vinkeln mellan planet, som spänns upp av utbredningsriktningen z och den optiska axeln, och x -axeln. Notera att $\hat{\mathbf{e}}_{\text{eo}} \times \hat{\mathbf{e}}_{\text{o}} = \hat{\mathbf{z}}$.

Motsvarande magnetiska fälts komponenter i material 1 på skiljeytan ($z = 0$) är, se (4.10) ($\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}$)

$$\eta_0 \mathbf{H}_{1xy}(z=0) = \hat{\mathbf{e}}_{\text{o}} \frac{1}{\eta_1} E_{\text{eo}}^i - \hat{\mathbf{e}}_{\text{eo}} \frac{1}{\eta_1} E_{\text{o}}^i - \hat{\mathbf{e}}_{\text{o}} \frac{1}{\eta_1} E_{\text{eo}}^r + \hat{\mathbf{e}}_{\text{eo}} \frac{1}{\eta_1} E_{\text{o}}^r$$

där material 1:s relativa vågimpedans är $\eta_1 = (\mu_1/\epsilon_1)^{1/2}$.

I material 2 ansätter vi en allmän linjärkombination av de båda modlösningarna (4.19).

$$\mathbf{E}_{2xy}(z, \omega) = \hat{\mathbf{e}}_{\text{eo}} E^{\text{eo}}(\omega) e^{ik_{\text{eo}}z} + \hat{\mathbf{e}}_{\text{o}} E^{\text{o}}(\omega) e^{ik_{\text{o}}z} \quad z > 0 \quad (4.28)$$

där

$$k_{\text{o}} = \frac{\omega}{c_0} (\epsilon\mu)^{1/2} \quad k_{\text{eo}} = \frac{\omega}{c_0} \left(\frac{\epsilon\epsilon_z\mu}{\epsilon_{33}} \right)^{1/2}$$

I material 2 är det magnetiska fältet på skiljeytan ($z = 0$), se (4.22) och (4.23)

$$\eta_0 \mathbf{H}_{2xy}(z=0) = \hat{\mathbf{e}}_{\text{o}} \left(\frac{\epsilon\epsilon_z}{\epsilon_{33}\mu} \right)^{1/2} E^{\text{eo}} - \hat{\mathbf{e}}_{\text{eo}} \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2} E^{\text{o}}$$

Randvillkoren på skiljeytan $z = 0$ (tangentialfälten för de elektriska och magnetiska fälten är kontinuerliga) ger ett ekvationssystem som har stora likheter med tidigare analys i avsnitt 4.2.1.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} E_{\text{eo}}^i(\omega) \\ E_{\text{o}}^i(\omega) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{\text{eo}}^r(\omega) \\ E_{\text{o}}^r(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^{\text{eo}} \\ E^{\text{o}} \end{pmatrix} \\ [\mathbf{Y}_1] \begin{pmatrix} E_{\text{eo}}^i(\omega) \\ E_{\text{o}}^i(\omega) \end{pmatrix} - [\mathbf{Y}_1] \begin{pmatrix} E_{\text{eo}}^r(\omega) \\ E_{\text{o}}^r(\omega) \end{pmatrix} = [\mathbf{Y}_2] \begin{pmatrix} E^{\text{eo}} \\ E^{\text{o}} \end{pmatrix} \end{cases}$$

där admittansmatriserna $[\mathbf{Y}_1]$ och $[\mathbf{Y}_2]$ är

$$[\mathbf{Y}_1] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\eta_1} \\ \frac{1}{\eta_1} & 0 \end{pmatrix} \quad [\mathbf{Y}_2] = \begin{pmatrix} 0 & -\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} \\ \left(\frac{\epsilon\epsilon_z}{\epsilon_{33}\mu}\right)^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

Lösningen till detta system är

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} E_{\text{eo}}^r(\omega) \\ E_{\text{o}}^r(\omega) \end{pmatrix} = [\mathbf{r}](\omega) \begin{pmatrix} E_{\text{eo}}^i(\omega) \\ E_{\text{o}}^i(\omega) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} E^{\text{eo}}(\omega) \\ E^{\text{o}}(\omega) \end{pmatrix} = [\mathbf{t}](\omega) \begin{pmatrix} E_{\text{eo}}^i(\omega) \\ E_{\text{o}}^i(\omega) \end{pmatrix} \end{cases}$$

där reflektionsmatrisen $[\mathbf{r}](\omega)$ och transmissionsmatrisen $[\mathbf{t}](\omega)$ är

$$\begin{cases} [\mathbf{r}](\omega) = ([\mathbf{Y}_1] + [\mathbf{Y}_2])^{-1} ([\mathbf{Y}_1] - [\mathbf{Y}_2]) \\ [\mathbf{t}](\omega) = [\mathbf{I}] + [\mathbf{r}] \end{cases}$$

med explicit koordinatrepresentation

$$\begin{cases} [\mathbf{r}] = \begin{pmatrix} r_{eo} & 0 \\ 0 & r_o \end{pmatrix} \\ [\mathbf{t}] = \begin{pmatrix} t_{eo} & 0 \\ 0 & t_o \end{pmatrix} \end{cases}$$

där

$$\begin{cases} r_{eo} = \frac{1 - \eta_1 \left(\frac{\epsilon \epsilon_z}{\epsilon_{33} \mu} \right)^{1/2}}{1 + \eta_1 \left(\frac{\epsilon \epsilon_z}{\epsilon_{33} \mu} \right)^{1/2}} \\ r_o = \frac{1 - \eta_1 \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2}}{1 + \eta_1 \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2}} \end{cases} \quad \begin{cases} t_{eo} = \frac{2}{1 + \eta_1 \left(\frac{\epsilon \epsilon_z}{\epsilon_{33} \mu} \right)^{1/2}} \\ t_o = \frac{2}{1 + \eta_1 \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2}} \end{cases}$$

och ϵ_{33} är relaterad till ϵ och ϵ_z genom

$$\epsilon_{33} = \epsilon_z \cos^2 \alpha + \epsilon \sin^2 \alpha$$

Reflektionsmatrisen $[\mathbf{r}]$ och transmissionsmatrisen $[\mathbf{t}]$ relaterar $\hat{\mathbf{e}}_{eo}$ - och $\hat{\mathbf{e}}_o$ -komponenterna i det reflekterade, respektive transmitterade elektriska fältet till motsvarande komponenter hos det infallande elektriska fältet. Vi ser att med vårt val av komponentrepresentation, $\hat{\mathbf{e}}_{eo}$ - och $\hat{\mathbf{e}}_o$ -komponenter, blir reflektionskoefficientens och transmissionskoefficientens representation speciellt enkel då den är diagonal. Andra val av komponentaxlar, t.ex. $\hat{\mathbf{x}}$ - och $\hat{\mathbf{y}}$ -komponenter, ger inte lika enkla och explicita resultat.

Exempel 4.4

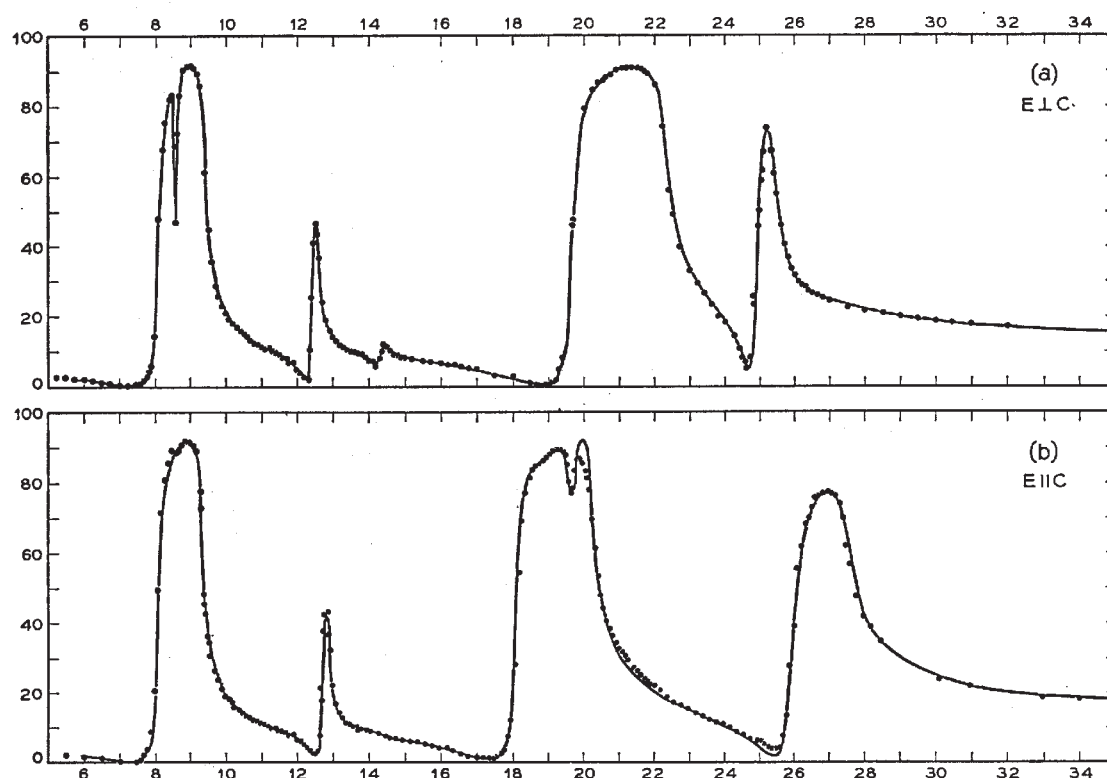
I detta exempel anpassar vi experimentella reflektionsdata för kristallin kvarts vid vinkelrätt infall med en Lorentzmodell med flera frekvenser. Kristallin kvarts kan i det infraröda våglängdsområdet modelleras med ett omagnetiskt elektriskt uniaxialt material. I vårt speciella exempel gäller att den optiska axeln är vinkelrät mot utbredningsriktningen, dvs. den ligger i skiljeytan. Reflektansen varierar som funktion av frekvensen och visas i figur 4.12 för de två olika polarisationsriktningarna på det infallande fältet, dvs. den ordinära vågen och den extra-ordinära vågen.

En resonansmodell (Lorentz-modell) med flera frekvenser visar sig vara lämplig att använda vid en anpassning till dessa reflektionsdata. En sådan modell för tidsharmoniska vågor är (M stycken resonanser):

$$\epsilon(\omega) = \epsilon - \sum_{i=1}^M \frac{\omega_{p_i}^2}{\omega^2 - \omega_{0_i}^2 + i\omega\nu_i}$$

En liknande modell används för $\epsilon_z(\omega)$. Materialet antas vara omagnetiskt, dvs. $\mu = 1$. I tabell 4.2 finns en uppsättning parametrar (resonansfrekvens ω_{0_i} , kollisionsfrekvens ν_i och plasmafrekvens ω_{p_i}), som anpassar modellen till de uppmätta data. Notera att Lorentz-modellen kan skrivas

$$\epsilon(\omega) = \epsilon - \sum_{i=1}^M \frac{\frac{\omega_{p_i}^2}{\omega_{0_i}^2}}{\frac{\lambda_{0_i}^2}{\lambda^2} - 1 + i \frac{\nu_i}{\omega_{0_i}} \frac{\lambda_{0_i}}{\lambda}}$$



Figur 4.12: Experimentella data på reflektansen R för kristallin kvarts vid vinkelrätt infall. Vertikalaxeln visar reflektansen i % medan horisontalaxeln visar (vakuum-)våglängden λ i μm . Den övre figuren gäller för den ordinära vågen, medan den nedre visar den extraordinära vågen. Punkterna anger de experimentellt uppmätta värdena och den heldragna linjen är en anpassning till resonansmodellen med data enligt tabell 4.2. Figuren är hämtad ur W.G. Spitzer & D.A. Kleinman, "Infrared Lattice Bands of Quartz", *Physical Review*, **121**(5), 1324 (1961).

vilket underlättar implementeringen av data i tabell 4.2. ■

4.4 Gyrotropa material

Helt nya vågutbredningsfenomen uppstår i gyrotropa material. Ett viktigt exempel på ett gyrotropt material är ett plasma (en joniserad gas) under inverkan av en statisk magnetisk flödestäthet. Andra viktiga exempel finns inom vågutbredning i ferrit-material, se övning 3.6.

Viktiga tillämpningar på vågutbredning i plasma förekommer t.ex. inom radio- och satellitkommunikation, eftersom jordens övre luftlager är joniserat. Radiovågornas utbredning beror starkt på detta joniserade skikt, och den statiska magnetiska flödestäthet från det jordmagnetiska fältet.

Ordinär våg				Extra-ordinär våg			
i	$1/\lambda_{0i} \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	$\omega_{pi}^2/\omega_{0i}^2$	ν_i/ω_{0i}	i	$1/\lambda_{0i} \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	$\omega_{pi}^2/\omega_{0i}^2$	ν_i/ω_{0i}
1	1227	0.009	0.11	1	1220	0.011	0.15
2	1163	0.010	0.006	2	1080	0.67	0.0069
3	1072	0.67	0.0071	3	778	0.10	0.010
4	797	0.11	0.009	4	539	0.006	0.04
5	697	0.018	0.012	5	509	0.05	0.014
6	450	0.82	0.0090	6	495	0.66	0.0090
7	394	0.33	0.007	7	364	0.68	0.014
$\epsilon=2.356$				$\epsilon=2.383$			

Tabell 4.2: Dielektriska data för kvartsmaterialet. Dessa värden har erhållits ur reflektionsdata i figur 4.12. Beteckningarna är följande: ω_{0i} är resonansfrekvensen (notera att det är storheten $1/\lambda_{0i} = \omega_{0i}/2\pi c_0$ som ges och inte vinkelfrekvensen), ω_{pi} är plasma frekvensen och ν_i är mediets kollisionsfrekvens. Mediets optiska respons ges av konstanten ϵ . Värdena är hämtad ur W.G. Spitzer & D.A. Kleinman, "Infrared Lattice Bands of Quarts", *Physical Review*, **121**(5), 1324 (1961).

Typexemplet för ett gyrotropt material är ett plasma under inverkan av ett statiskt $\mathbf{B}$ -fält. I ett koordinatsystem där den magnetiska flödestätheten är riktat längs z' -axeln har de konstitutiva relationerna för tidsharmoniska fält följande utseende, se övning 3.5:¹⁰

$$[\epsilon]'(\omega) = \begin{pmatrix} \epsilon(\omega) & i\epsilon_g(\omega) & 0 \\ -i\epsilon_g(\omega) & \epsilon(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z(\omega) \end{pmatrix} \quad [\mu]' = \mu(\omega) [\mathbf{I}] \quad (4.29)$$

där

$$\begin{cases} \epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_g^2} \\ \epsilon_g(\omega) = -\frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega(\omega^2 - \omega_g^2)} \\ \epsilon_z(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{cases}$$

¹⁰Den koordinatfria framställningen av dielektricitetsdyaden för ett elektriskt gyrotropt material med $\mathbf{B}$ -fältets axel längs enhetsvektorn $\hat{\mathbf{u}}$ är

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(\omega) (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}) + \epsilon_z(\omega)\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}} - i\mathbf{J}\epsilon_g(\omega)$$

där $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{I}$ ger en rotation av $\pi/2$ kring $\hat{\mathbf{u}}$ -axeln.

Materialets *plasmafrekvens* ω_p respektive *gyrotropa (vinkel-)frekvens* ω_g definieras av

$$\begin{cases} \omega_p = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}} \\ \omega_g = \frac{qB_0}{m} \end{cases}$$

Detta är identiskt samma definition av plasmafrekvens som användes i kapitel 2 för Lorentzmodellen. Elektronens laddning och massa är q respektive m , och N är antalet elektroner per volymenhet. Notera att för elektroner är $\omega_g < 0$, pga. att $q < 0$ och att ϵ , ϵ_g och ϵ_z är reella funktioner av ω . I ett plasma, där ϵ , ϵ_g och ϵ_z alla är reella och μ också reell, är materialet förlustfritt, ty $\epsilon = \epsilon^\dagger$ och $\mu = \mu^\dagger$, se (3.14).

De konstitutiva relationerna för ferritmaterial liknar de för ett plasma (4.29). Den väsentliga skillnaden är att formen på μ och ϵ byter plats för ferritmaterial, dvs. μ är på den form som ϵ är för plasmat, se övning 3.6.

De konstitutiva relationerna, (4.29), liknar formellt de för det uniaxiala fallet. Vi ser att z' -riktningen fungerar som en optisk axel för materialet, men något byte av koordinataxlar, så att ϵ blir diagonal, är ej möjligt i det gyrotropa fallet.¹¹

De fria elektronerna i plasmat kommer under inverkan av det elektromagnetiska fältet att utföra en spirallrörelse utmed z -riktningen—det statiska $\mathbf{B}$ -fältets riktning. Den gyrotropa frekvensen ω_g utgör ett mått på spirallrörelsens radie (radien=elektronens hastighet $\perp \mathbf{B}/|\omega_g|$).

Den magnetiska flödestäthetsens riktning $\hat{\mathbf{z}}'$ uttrycker vi nu i ett kartesiskt koordinatsystem (x, y, z) , vars z -axeln är riktad längs den riktning de plana vågorna utbreder sig. Vi definierar två sfäriska vinklar, θ och ϕ , som parametriserar den magnetiska flödestäthetsens riktning, se figur 4.13.

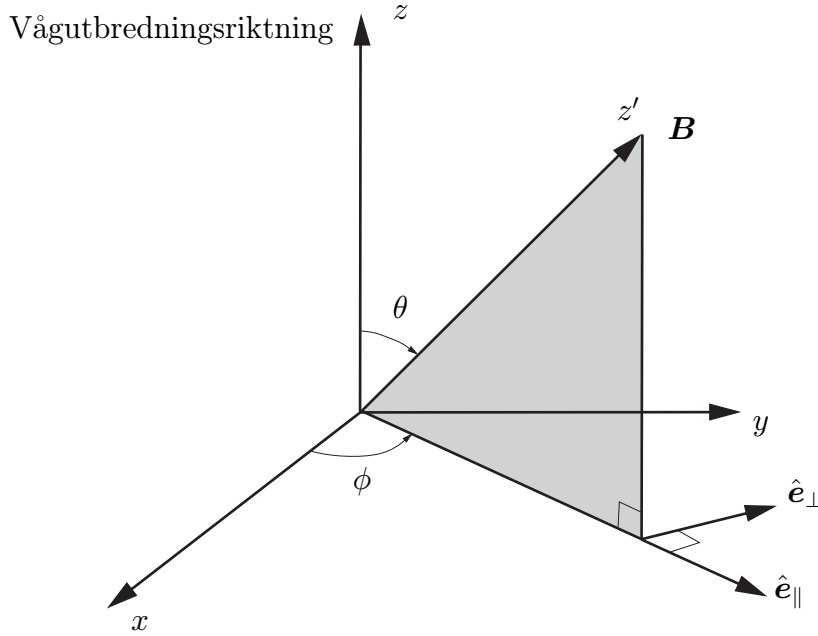
$$\hat{\mathbf{z}}' = \hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \phi + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta$$

Matrisrepresentationen av dielektricitetsmatrisen, $[\epsilon]$, i xyz -systemet får vi genom att similaritetstransformera motsvarande matris i $x'y'z'$ -systemet ovan. Resultatet blir, se (B.4) och (B.5) i appendix B (notera invers transform)

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} = [\epsilon] = [\mathbf{R}]^t [\epsilon]' [\mathbf{R}]$$

$$= \begin{pmatrix} \sin \phi & \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \cos \phi \\ -\cos \phi & \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon & i\epsilon_g & 0 \\ -i\epsilon_g & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

¹¹Det är naturligtvis möjligt att införa komplexa koordinatriktningar så att ϵ får en diagonal representation.



Figur 4.13: Definition av vinklarna θ och ϕ för den magnetiska flödestäthetens riktning.

där

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \epsilon(\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \epsilon_z \sin^2 \theta \cos^2 \phi \\ \epsilon_{12} = (\epsilon_z - \epsilon) \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi + i\epsilon_g \cos \theta \\ \epsilon_{13} = (\epsilon_z - \epsilon) \cos \theta \sin \theta \cos \phi - i\epsilon_g \sin \theta \sin \phi \\ \epsilon_{21} = (\epsilon_z - \epsilon) \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi - i\epsilon_g \cos \theta \\ \epsilon_{22} = \epsilon(\cos^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \phi) + \epsilon_z \sin^2 \theta \sin^2 \phi \\ \epsilon_{23} = (\epsilon_z - \epsilon) \cos \theta \sin \theta \sin \phi + i\epsilon_g \sin \theta \cos \phi \\ \epsilon_{31} = (\epsilon_z - \epsilon) \cos \theta \sin \theta \cos \phi + i\epsilon_g \sin \theta \sin \phi \\ \epsilon_{32} = (\epsilon_z - \epsilon) \cos \theta \sin \theta \sin \phi - i\epsilon_g \sin \theta \cos \phi \\ \epsilon_{33} = \epsilon_z \cos^2 \theta + \epsilon \sin^2 \theta \end{cases}$$

Notera att $[\epsilon]$ är en Hermiteska matris om ϵ , ϵ_z och ϵ_g är reella vilket är fallet för ett plasma.

Vi kan nu extrahera ut de olika komponenterna i dyaduppdelningen, se (4.3). Resultatet är

$$\begin{cases} [\epsilon_{\perp\perp}] = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{pmatrix} \\ [\epsilon_z] = \begin{pmatrix} \epsilon_{31} \\ \epsilon_{32} \end{pmatrix} \end{cases} \quad \begin{cases} [\epsilon_{\perp}] = \begin{pmatrix} \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{pmatrix} \\ \epsilon_{zz} = \epsilon_{33} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_{\perp\perp} = \mu \mathbf{I} \\ \mu_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_{\perp} = 0 \\ \mu_{zz} = \mu \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = 0 \\ \zeta = 0 \end{cases}$$

Från dessa samband kan vi identifiera de fyra dyaderna $\mathbf{W}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, se (4.7), som ingår i (4.6). Resultatet blir

$$\begin{cases} \mathbf{W}_1 = -\mathbf{0} \\ \mathbf{W}_2 = -\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\perp\perp} = -\mu\mathbf{J} \\ \mathbf{W}_3 = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\perp\perp} - \frac{1}{\epsilon_{33}}\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\perp}\boldsymbol{\epsilon}_z \\ \mathbf{W}_4 = \mathbf{0} \end{cases}$$

eller i explicit matrisrepresentation

$$\begin{aligned} [\mathbf{W}_1] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & [\mathbf{W}_2] &= \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ [\mathbf{W}_3] &= \begin{pmatrix} -\epsilon_{21} + \epsilon_{23}\epsilon_{31}/\epsilon_{33} & -\epsilon_{22} + \epsilon_{23}\epsilon_{32}/\epsilon_{33} \\ \epsilon_{11} - \epsilon_{13}\epsilon_{31}/\epsilon_{33} & \epsilon_{12} - \epsilon_{13}\epsilon_{32}/\epsilon_{33} \end{pmatrix} & [\mathbf{W}_4] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Vi förenklar matrisen $[\mathbf{W}_3]$.

$$[\mathbf{W}_3] = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$$

där

$$\begin{cases} W_{11} = \frac{i\epsilon_g\epsilon_z \cos \theta + (\epsilon^2 - \epsilon\epsilon_z - \epsilon_g^2) \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi}{\epsilon_z \cos^2 \theta + \epsilon \sin^2 \theta} \\ W_{12} = -\frac{\epsilon\epsilon_z(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \phi) + \epsilon^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - \epsilon_g^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\epsilon_z \cos^2 \theta + \epsilon \sin^2 \theta} \\ W_{21} = \frac{\epsilon\epsilon_z(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \phi) + \epsilon^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi - \epsilon_g^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{\epsilon_z \cos^2 \theta + \epsilon \sin^2 \theta} \\ W_{22} = \frac{i\epsilon_g\epsilon_z \cos \theta - (\epsilon^2 - \epsilon\epsilon_z - \epsilon_g^2) \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi}{\epsilon_z \cos^2 \theta + \epsilon \sin^2 \theta} \end{cases}$$

Notera att W_{22} nu inte är lika med $-W_{11}$ vilket var fallet i det uniaxiala fallet.

4.4.1 Vågutbredning längs speciella riktningar

Vi nöjer oss här med att undersöka specialfallen med vågutbredning parallellt med, respektive vinkelrätt mot $\mathbf{B}$ -fältet. Dessa speciella riktningar svarar mot $\theta = 0, \pi/2$.

Vi börjar med specialfallet $\theta = 0$ vilket svarar mot vågutbredning parallellt med $\mathbf{B}$ -fältet. Koefficientmatrisen i (4.6) får följande explicita utseende, se (4.30):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & 0 \\ i\epsilon_g & -\epsilon & 0 & 0 \\ \epsilon & i\epsilon_g & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De fyra egenvärdena till matrisen är

$$\begin{cases} l_1 = -l_2 = (\mu(\epsilon + \epsilon_g))^{1/2} \\ l_3 = -l_4 = (\mu(\epsilon - \epsilon_g))^{1/2} \end{cases}$$

Två vågtal förekommer vid vågutbredning parallellt med den magnetiska flödestätheten i gyrotropa material.

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c_0} (\mu(\epsilon \pm \epsilon_g))^{1/2} = k_0 (\mu(\epsilon \pm \epsilon_g))^{1/2} \quad (4.31)$$

Egenvektorer till koefficientmatrisen i fundamentalekvationen, (4.6), bestämmer polarisationstillståndet hos vågutbredningens modlösningar. Egenmoderna är cirkulärt polariserade vågor. Resultatet blir fyra typer av lösningar.

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{xy}^+(z, \omega) = E^+(\omega) (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) e^{\pm i k_+ z} \\ \mathbf{E}_{xy}^-(z, \omega) = E^-(\omega) (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) e^{\pm i k_- z} \end{cases} \quad (4.32)$$

Vi ser att planvågen, som propagerar i $+z$ -riktningen, är en LCP-våg, $(\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}})$, om vågtalet är k_+ och en RCP-våg, $(\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})$, om vågtalet är k_- . Det omvända förhållandet råder vid propagation i $-z$ -riktningen,¹² dvs. en RCP-våg, $(\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}})$, om vågtalet är k_+ och en LCP-våg, $(\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})$, om vågtalet är k_- . Vi ser omedelbart att vågens utbredningsegenskaper i olika riktningar skiljer sig åt. Detta fenomen uppstod inte vid vågutbredning i uniaxiala material.

Motsvarande magnetiska fält ges av (4.9). I detta specialfall med $\mathbf{B}$ -fältet riktat längs z -axeln gäller att

$$\begin{cases} \eta_0 \mathbf{H}_{xy}^+(z, \omega) = \pm \left(\frac{(\epsilon + \epsilon_g)}{\mu} \right)^{1/2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{xy}^+(z, \omega) = \pm \mathbf{Y}_+ \cdot \mathbf{E}_{xy}^+(z, \omega) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}^-(z, \omega) = \pm \left(\frac{(\epsilon - \epsilon_g)}{\mu} \right)^{1/2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{xy}^-(z, \omega) = \pm \mathbf{Y}_- \cdot \mathbf{E}_{xy}^-(z, \omega) \end{cases}$$

eftersom $\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}$. Det övre (nedre) tecknet gäller för vågutbredning längs $+z$ ($-z$)-axeln, och det gyrotropa materialets admittansdyader i detta specialfall är

$$\mathbf{Y}_{\pm} = \left(\frac{(\epsilon \pm \epsilon_g)}{\mu} \right)^{1/2} \mathbf{J}$$

Den återstående komponenten, z -komponenten, av det elektriska och det magnetiska fälten ges av (4.5), som i vårt fall blir speciellt enkel, eftersom

$$\begin{cases} \epsilon_z = 0 \\ \mu_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_z = 0 \\ \zeta_z = 0 \end{cases}$$

¹²Svarar mot $\theta = \pi$, men ges också av $\exp(-k_{\pm}z)$ -lösningen för $\theta = 0$.

Vi får därför att det elektriska och det magnetiska fälten saknar z -komponent i detta fall.

Innan vi analyserar några konsekvenser av resultaten ovan, betraktar vi det andra specialfallet med vågutbredning vinkelrätt mot $\mathbf{B}$ -fältet, $\theta = \pi/2$. Koefficientmatrisen i (4.6) blir i detta fall, se (4.30)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & 0 \\ \left(\frac{\epsilon^2 - \epsilon_g^2}{\epsilon} - \epsilon_z\right) \sin \phi \cos \phi & -\frac{\epsilon^2 - \epsilon_g^2}{\epsilon} \cos^2 \phi - \epsilon_z \sin^2 \phi & 0 & 0 \\ \frac{\epsilon^2 - \epsilon_g^2}{\epsilon} \sin^2 \phi + \epsilon_z \cos^2 \phi & \left(\epsilon_z - \frac{\epsilon^2 - \epsilon_g^2}{\epsilon}\right) \sin \phi \cos \phi & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De fyra egenvärdena till matrisen är

$$\begin{cases} l_1 = -l_2 = \left(\mu \frac{\epsilon^2 - \epsilon_g^2}{\epsilon}\right)^{1/2} \\ l_3 = -l_4 = (\mu \epsilon_z)^{1/2} \end{cases}$$

Två vågtal förekommer också vid vågutbredning vinkelrätt med den magnetiska flödestätheten i gyrotropa material. Detta specialfall har stora likheter med vågutbredning i ett uniaxialt material, vilket motiverar följande beteckningar:

$$\begin{cases} k_{\perp} = \frac{\omega}{c_0} \left(\mu \frac{\epsilon^2 - \epsilon_g^2}{\epsilon}\right)^{1/2} = k_0 \left(\mu \frac{\epsilon^2 - \epsilon_g^2}{\epsilon}\right)^{1/2} \\ k_{\parallel} = \frac{\omega}{c_0} (\mu \epsilon_z)^{1/2} = k_0 (\mu \epsilon_z)^{1/2} \end{cases}$$

Egenvektorerna till koefficientmatrisen i fundamentalekvationen, (4.6), bestämmer, som vi konstaterat tidigare, polarisationstillståndet hos vågutbredningens modlösningar. Egenmoderna är i detta fall linjärt polariserade vågor. Resultatet blir

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{xy}^{\perp}(z, \omega) = E^{\perp}(\omega) (-\hat{\mathbf{x}} \sin \phi + \hat{\mathbf{y}} \cos \phi) e^{\pm i k_{\perp} z} \\ \mathbf{E}_{xy}^{\parallel}(z, \omega) = E^{\parallel}(\omega) (\hat{\mathbf{x}} \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \phi) e^{\pm i k_{\parallel} z} \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{xy}^{\perp}(z, \omega) = E^{\perp}(\omega) \hat{\mathbf{e}}_{\perp} e^{\pm i k_{\perp} z} \\ \mathbf{E}_{xy}^{\parallel}(z, \omega) = E^{\parallel}(\omega) \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} e^{\pm i k_{\parallel} z} \end{cases} \quad (4.33)$$

där vi infört två enhetsvektorer, $\hat{\mathbf{e}}_{\perp}$ och $\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}$, den första ligger vinkelrätt mot, och den andra i, det plan som spänns upp av z -axeln och $\mathbf{B}$ -fältets riktning, se figur 4.13.

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_{\perp} = -\hat{\mathbf{x}} \sin \phi + \hat{\mathbf{y}} \cos \phi \\ \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} = \hat{\mathbf{x}} \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \phi \end{cases}$$

Som tidigare i det uniaxiala fallet, så gäller att

$$\hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{e}}_{\perp} = \hat{\mathbf{z}}$$

Vektorerna $(\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}, \hat{\mathbf{e}}_{\perp}, \hat{\mathbf{z}})$ bildar således ett orto-normerat högersystem.

Motsvarande magnetiska fält ges på samma sätt som tidigare av (4.9). När $\mathbf{B}$ -fältet är riktat vinkelrätt mot z -axeln gäller att

$$\begin{cases} \eta_0 \mathbf{H}_{xy}^{\perp}(z, \omega) = \pm \left(\frac{\epsilon^2 - \epsilon_g^2}{\epsilon \mu} \right)^{1/2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{xy}^{\perp}(z, \omega) = \pm \mathbf{Y}_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{xy}^{\perp}(z, \omega) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}^{\parallel}(z, \omega) = \pm \left(\frac{\epsilon_z}{\mu} \right)^{1/2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{xy}^{\parallel}(z, \omega) = \pm \mathbf{Y}_{\parallel} \cdot \mathbf{E}_{xy}^{\parallel}(z, \omega) \end{cases}$$

eftersom $\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}$. Det övre (nedre) tecknet gäller för vågutbredning längs $+z$ ($-z$)-axeln, och det gyrotropa materialets admittansdyader i detta specialfall är

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_{\perp} = \left(\frac{\epsilon^2 - \epsilon_g^2}{\epsilon \mu} \right)^{1/2} \mathbf{J} \\ \mathbf{Y}_{\parallel} = \left(\frac{\epsilon_z}{\mu} \right)^{1/2} \mathbf{J} \end{cases}$$

Den återstående komponenten, z -komponenten, av det elektriska och det magnetiska fälten ges av (4.5). Eftersom

$$\begin{cases} \epsilon_z = -i\epsilon_g \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \\ \mu_z = \mathbf{0} \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_z = \mathbf{0} \\ \zeta_z = \mathbf{0} \end{cases}$$

får vi de elektriska och det magnetiska fälten ur

$$\begin{pmatrix} E_z \\ \eta_0 H_z \end{pmatrix} = -\frac{1}{\epsilon \mu} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_z \cdot \mathbf{E}_{xy} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Detta samband ger

$$\begin{pmatrix} E_z^{\perp} \\ \eta_0 H_z^{\perp} \end{pmatrix} = \frac{i\epsilon_g}{\epsilon} \begin{pmatrix} E^{\perp}(\omega) e^{\pm i k_{\perp} z} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} E_z^{\parallel} \\ \eta_0 H_z^{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

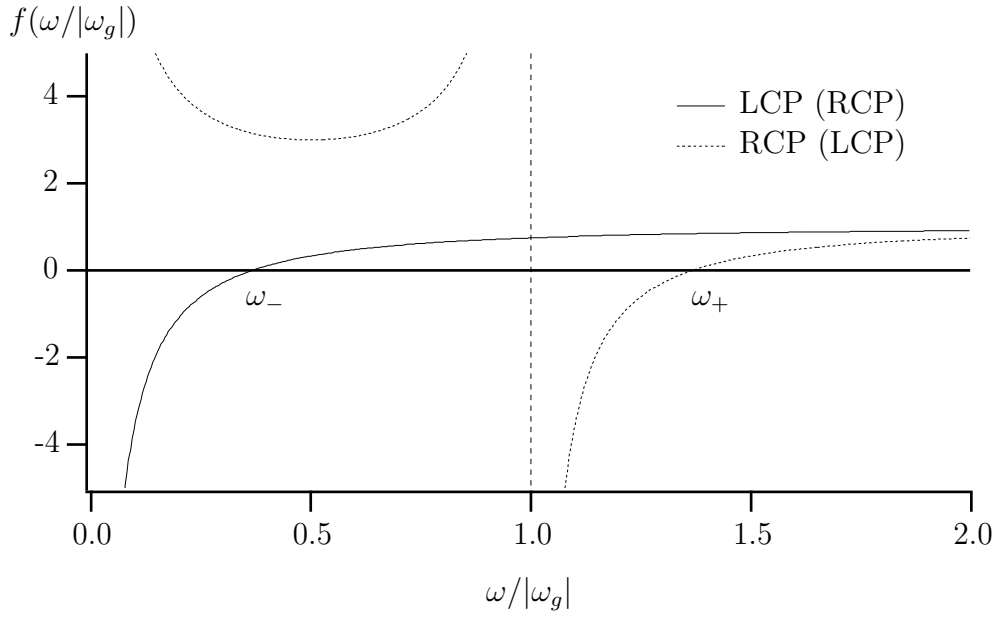
Vågtalet k kan anta rent imaginära värden för vissa frekvenser. För sådana frekvenser dämpas vågen exponentiellt och ingen vågutbredning sker i denna riktning. Vi undersöker nu för vilka frekvenser detta sker i vågutbredning parallellt med $\mathbf{B}$ -fältet, se även övning 4.4.

Exempel 4.5

Bestäm för vilka frekvenser ω en planvåg propagerar i ett plasma, då vågutbredningen är parallell med $\mathbf{B}$ -fältet. Antag att $\omega_g < 0$, vilket är fallet för elektroner, $q < 0$.

Lösning: Villkoret för vågutbredning i plasmat är att vågtalet k är reellt, dvs. $k^2 > 0$, se (4.8) på sidan 70. Från analysen ovan, se (4.31), hämtar vi uttrycket på vågtalen då vågen propagerar parallellt med $\mathbf{B}$ -fältet.

$$k_{\pm}^2(\omega) = k_0^2 \mu(\epsilon(\omega) \pm \epsilon_g(\omega))$$



Figur 4.14: Funktionen $f(x) = 1 - a/(x^2 \pm x)$ för $a = 0.5$. Polariseringen är angiven för propagation i $+z$ -riktningen och för $-z$ -riktningen inom parentes. Vågutbredning sker för de frekvenser där $f(\omega/|\omega_g|) > 0$, $a = \omega_p^2/|\omega_g|^2$.

där plus-tecknet gäller för LCP-vågen och minus-tecknet gäller för RCP-vågen om vågen propagerar i $+z$ -riktningen. Vid propagation i $-z$ -riktningen gäller det omvända. Vidare är

$$\begin{cases} \epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_g^2} \\ \epsilon_g(\omega) = -\frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega(\omega^2 - \omega_g^2)} \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_p = \sqrt{\frac{N_q^2}{\epsilon_0 \mu}} \\ \omega_g = \frac{qB}{\mu} \end{cases}$$

Vi beräknar först

$$\epsilon \pm \epsilon_g = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_g^2} \mp \frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega(\omega^2 - \omega_g^2)} = 1 - \frac{\omega_p^2(\omega \pm \omega_g)}{\omega(\omega^2 - \omega_g^2)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_g)}$$

Vi har vågutbredning om $k^2 > 0$, dvs. (om materialet är omagnetiskt, $\mu = 1$)

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_g)} > 0$$

Figur 4.14 visar det kvalitativa utseendet av funktionen i vänstra ledet. Nollgenomgångarna sker vid (vinkel-)frekvenserna $\omega_{\pm}$

$$\omega_{\pm} = \pm \frac{1}{2}|\omega_g| + \sqrt{\omega_p^2 + \frac{1}{4}\omega_g^2}$$

Notera att både $\omega_{\pm} > 0$, $\omega_+ > \omega_-$, samt att $\omega_+ > |\omega_g|$.

Antar vi att laddningen är negativ — vilken den är för elektroner — så är $\omega_g < 0$ och villkoren för propagation kan bestämmas från figur 4.14.

Villkor för propagation (passband):

$$\begin{cases} \text{LCP-våg (plus-tecken): } \omega > \omega_- \\ \text{RCP-våg (minus-tecken): } 0 < \omega < |\omega_g| \text{ och } \omega > \omega_+ \end{cases}$$

■

4.4.2 Faradayrotation

Vi skall nu specialstudera det fall då vågutbredningen sker längs $\mathbf{B}$ -fältets riktning. Uttryck på vågtal och polarisation finns analyserade i avsnitt 4.4.1. Först tar vi fallet då utbredningen är riktad längs positiva z -axeln. Det andra, motsatta, fallet, behandlas senare.

Vågtalet då utbredningen är riktad längs positiva z -axeln kan anta två värden, se (4.31)

$$k_{\pm}(\omega) = \frac{\omega}{c_0} (\mu(\epsilon \pm \epsilon_g))^{1/2}$$

Vi ser att under vissa omständigheter är vågtalet rent imaginär (t.ex. det undre alternativet med $\epsilon_g > \epsilon$). Detta innebär att denna mod ej kan fortplanta sig i materialet utan moden dämpas exponentiellt. Vi analyserade detta problem, och vid vilka frekvenser vågutbredning sker, i exempel 4.5.

Polarisationen hos fälten ges av (4.32).

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{xy}^+(z, \omega) = E^+(\omega) (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) e^{ik_+z} \\ \mathbf{E}_{xy}^-(z, \omega) = E^-(\omega) (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) e^{ik_-z} \end{cases}$$

Som vi redan noterat flera gånger är dessa fält cirkulärt polariserade. Den mod som svarar mot vågtalet k_+ (k_-) ger fält som är LCP (RCP). Vi antar att båda moderna propagerar. Detta är t.ex. uppfyllt för tillräckligt hög frekvens, se exempel 4.5.

En allmän lösning till Maxwells fältekvationer ges som en linjärkombination av de båda modlösningarna, dvs.

$$\mathbf{E}(z, \omega) = \underbrace{E^+(\omega) (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) e^{ik_+z}}_{\text{LCP}} + \underbrace{E^-(\omega) (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) e^{ik_-z}}_{\text{RCP}} \quad (4.34)$$

Antag att planvågen i en viss punkt, t.ex. $z = 0$, är linjärt polariserad; säg längs $\hat{\mathbf{x}}$ -riktningen

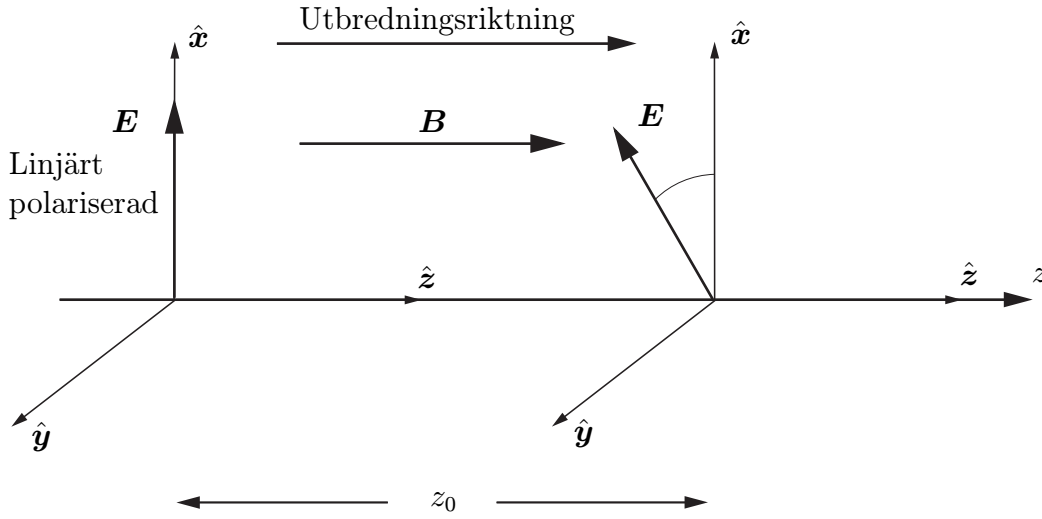
$$\mathbf{E}(z = 0, \omega) = E_0(\omega) \hat{\mathbf{x}}$$

där vågens amplitud antas vara $E_0(\omega)$. Vi kan nu bestämma utvecklingskoefficienterna $E^+(\omega)$ och $E^-(\omega)$ i (4.34) uttryckta i amplituden $E_0(\omega)$. Sätt $z = 0$ i (4.34).

$$\mathbf{E}(z = 0, \omega) = E^+(\omega) (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) + E^-(\omega) (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) = E_0(\omega) \hat{\mathbf{x}}$$

Genom att jämföra komponenterna får vi

$$E^+(\omega) = E^-(\omega) = \frac{E_0(\omega)}{2}$$



Figur 4.15: Utbredning av en linjärt polariserad våg i $\mathbf{B}$ -fältets riktning.

och den allmänna lösningen, då vågen fortplantar sig längs positiva z -axeln, blir

$$\mathbf{E}(z, \omega) = \frac{E_0(\omega)}{2} \{ (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) e^{ik_+z} + (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) e^{ik_-z} \}$$

Efter en sträcka $z = z_0$ längs den positiva z -axeln blir därför $\mathbf{E}$ -fältet, se även figur 4.15 (en faktor $\exp\{-i\omega t\}$ är som vanligt underförstådd)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{E_0}{2} (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) e^{i\phi_+} + \frac{E_0}{2} (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) e^{i\phi_-} \\ &= \frac{E_0}{2} (e^{i\phi_-} + e^{i\phi_+}) \hat{\mathbf{x}} + i \frac{E_0}{2} (e^{i\phi_-} - e^{i\phi_+}) \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

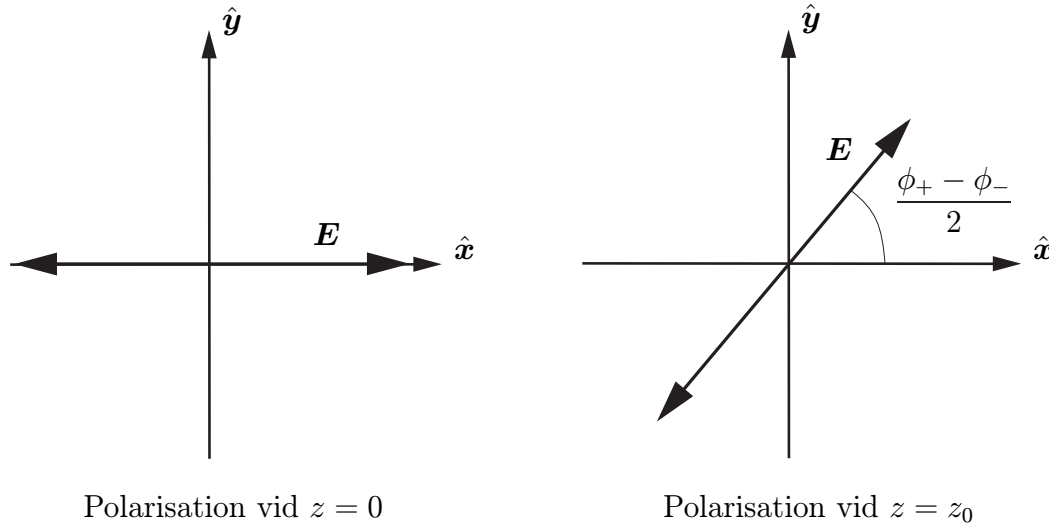
där

$$\begin{cases} \phi_- = k_- z_0 = \frac{\omega z_0}{c_0} (\mu(\epsilon - \epsilon_g))^{1/2} \\ \phi_+ = k_+ z_0 = \frac{\omega z_0}{c_0} (\mu(\epsilon + \epsilon_g))^{1/2} \end{cases} \quad (4.35)$$

Storheterna $\phi_{\pm}$ är reella under antagandet att båda vågtyperna fortplantar sig, dvs. $\epsilon \pm \epsilon_g > 0$.

Polarisationen hos $\mathbf{E}$ -fältet efter en sträcka z_0 är linjär eftersom (se även övning 3.12)

$$\begin{aligned} i\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*) &= i \frac{|E_0|^2}{4} \hat{\mathbf{z}} \cdot \left\{ [(e^{i\phi_-} + e^{i\phi_+}) \hat{\mathbf{x}} + i(e^{i\phi_-} - e^{i\phi_+}) \hat{\mathbf{y}}] \right. \\ &\quad \left. \times [(e^{-i\phi_-} + e^{-i\phi_+}) \hat{\mathbf{x}} - i(e^{-i\phi_-} - e^{-i\phi_+}) \hat{\mathbf{y}}] \right\} \\ &= \frac{|E_0|^2}{4} \left\{ (e^{i\phi_-} + e^{i\phi_+}) (e^{-i\phi_-} - e^{-i\phi_+}) \right. \\ &\quad \left. + (e^{i\phi_-} - e^{i\phi_+}) (e^{-i\phi_-} + e^{-i\phi_+}) \right\} = 0 \end{aligned}$$



Figur 4.16: Rotation av polarisationsplanet vid utbredning längs $\mathbf{B}$ -fältets riktning.

$\mathbf{E}$ -fältet förblir således linjärt polariserat då vågen fortplantar sig längs positiva z -riktningen, men polarisationsplanet är inte längre orienterat längs $\hat{x}$ -riktningen. I stället har $\mathbf{E}$ -fältets polarisationsplan vridit sig en vinkel, som bestäms av kvoten mellan $\mathbf{E}$ -fältets $\hat{x}$ - och $\hat{y}$ -komponenter.

$$\begin{aligned} \frac{E_y}{E_x} &= -i \frac{e^{i\phi_+} - e^{i\phi_-}}{e^{i\phi_+} + e^{i\phi_-}} = \frac{\frac{1}{2i} \left(e^{i\frac{\phi_+ - \phi_-}{2}} - e^{-i\frac{\phi_+ - \phi_-}{2}} \right)}{\frac{1}{2} \left(e^{i\frac{\phi_+ - \phi_-}{2}} + e^{-i\frac{\phi_+ - \phi_-}{2}} \right)} \\ &= \frac{\sin \frac{\phi_+ - \phi_-}{2}}{\cos \frac{\phi_+ - \phi_-}{2}} = \tan \frac{\phi_+ - \phi_-}{2} \end{aligned}$$

$\mathbf{E}$ -fältet blir således efter en sträcka z_0 längs den positiva z -axeln

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{2} (e^{i\phi_-} + e^{i\phi_+}) \left(\hat{x} + \hat{y} \tan \frac{\phi_+ - \phi_-}{2} \right)$$

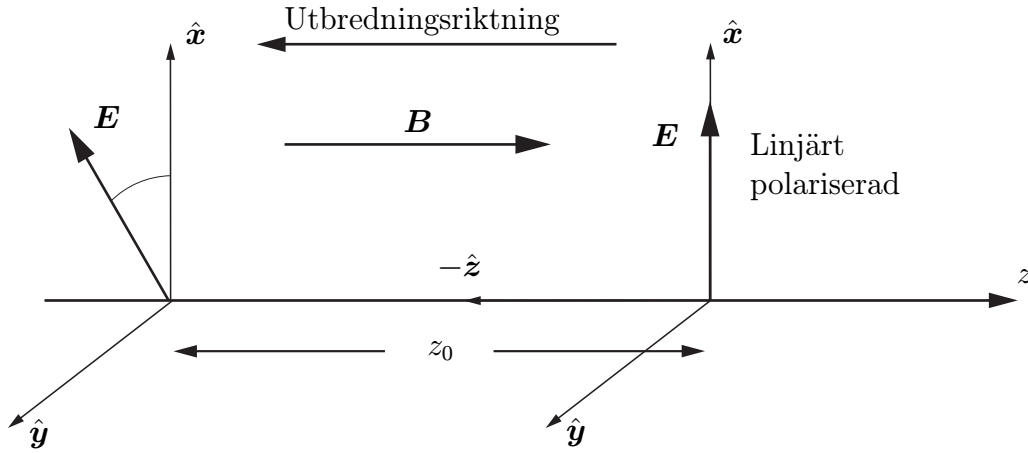
Vi ser att polarisationsplanet har vridit sig en vinkel $(\phi_+ - \phi_-)/2$ i x - y -planet (i positiv led längs $+z$ -axeln enligt högerregeln), se figur 4.16. Denna vridning av polarisationsplanet kallas för *Faradayrotation*¹³ (*Faraday effect* i anglosaxisk litteratur). Från (4.35) kan skillnaden mellan ϕ_+ och ϕ_- skrivas

$$\frac{\phi_+ - \phi_-}{2} = \frac{z_0 \omega \sqrt{\mu}}{2c_0} (\sqrt{\epsilon + \epsilon_g} - \sqrt{\epsilon - \epsilon_g})$$

Vi vänder nu på utbredningsriktningen och låter vågen fortplanta sig i motsatt riktning, dvs. mot $\mathbf{B}$ -fältet i $-z$ -riktningen. Vågtalet antar två värden, (4.31)

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c_0} (\mu(\epsilon \pm \epsilon_g))^{1/2}$$

¹³Michael Faraday upptäckte detta fenomen i september 1845.



Figur 4.17: Utbredning av en linjärt polariserad våg mot $\mathbf{B}$ -fältets riktning.

och fälten ges av (4.32)

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{xy}^+(z, \omega) = E^+(\omega) (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) e^{-ik_+z} \\ \mathbf{E}_{xy}^-(z, \omega) = E^-(\omega) (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) e^{-ik_-z} \end{cases}$$

Den våg som svarar mot vågtalet k_+ (k_-) ger fält som är RCP (LCP).

Vad som händer med $\mathbf{E}$ -fältets polarisationsplan då vågen fortplantar sig en sträcka $z_0 > 0$ i z -axelns negativa riktning undersöks i analogi med ovan, se även figur 4.17.

$\mathbf{E}$ -fältet antags från början, $z = 0$, vara linjärt polariserat längs $\hat{\mathbf{x}}$ -riktningen, och som ovan får vi $\mathbf{E}$ -fältet i punkten $\mathbf{r} = -z_0\hat{\mathbf{z}}$ (notera att vågutbredningen sker i $-z$ -riktningen).

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \underbrace{\frac{E_0}{2} (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) e^{ik_+z_0}}_{\text{RCP}} + \underbrace{\frac{E_0}{2} (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) e^{ik_-z_0}}_{\text{LCP}} \\ &= \frac{E_0}{2} (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) e^{i\phi_+} + \frac{E_0}{2} (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) e^{i\phi_-} \end{aligned}$$

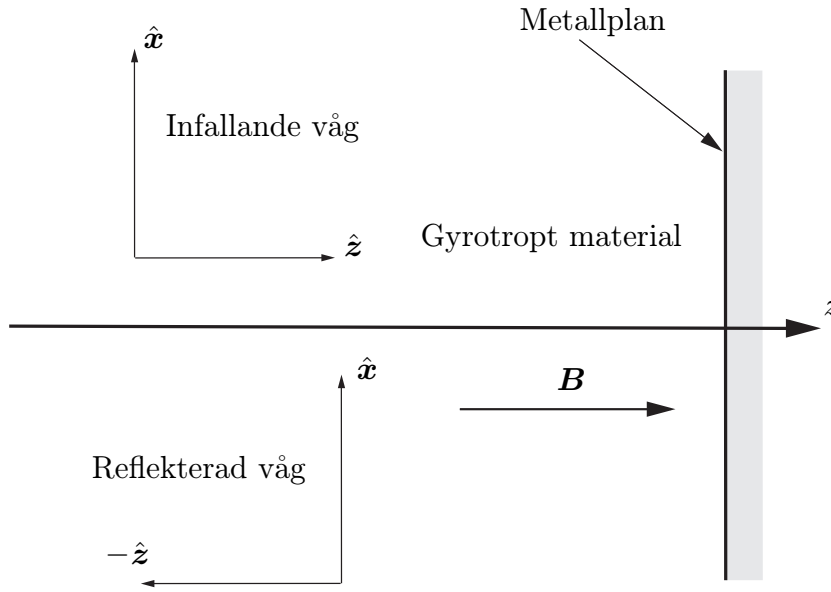
med ϕ_- och ϕ_+ definierade enligt (4.35). Skillnaden mot det föregående fallet (vågutbredningen i $+z$ -riktningen) är att RCP- och LCP-polarisationen byter plats. Vågtalet förblir dock desamma. Fältet i punkten $\mathbf{r} = -z_0\hat{\mathbf{z}}$ är återigen en linjärt polariserad våg (visas på samma sätt som ovan) och kvoten mellan $\mathbf{E}$ -fältets $\hat{\mathbf{y}}$ - och $\hat{\mathbf{x}}$ -komponenter blir

$$\frac{E_y}{E_x} = i \frac{e^{i\phi_-} - e^{i\phi_+}}{e^{i\phi_-} + e^{i\phi_+}} = \tan \frac{\phi_+ - \phi_-}{2}$$

och

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{2} (e^{i\phi_-} + e^{i\phi_+}) \left(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} \tan \frac{\phi_+ - \phi_-}{2} \right)$$

dvs. en vridning av polarisationsplanet med vinkeln $(\phi_+ - \phi_-)/2$ i x - y -planet (i positiv led längs $+z$ -axeln enligt högerregeln). Rotationen av polarisationsplanet är



Figur 4.18: Reflektion av en linjärt polariserad våg i ett metallplan.

således motsatt den då vågen utbreder sig i positiva z -riktningen, eftersom vågen propagerar åt motsatt håll.

Denna egenskap, att vågtalet förblir densamma, medan RCP och LCP skiftas då vågen fortplantar sig i motsatt riktning, är en manifestation av att materialet inte är reciprokt. För de gyrotropa materialen gäller att $[\epsilon] \neq [\epsilon]^t$, dvs. de uppfyller inte villkoren för ett reciprokt material som härleddes i avsnitt 3.5.

Följande experiment exemplifierar detta ytterligare. Låt en infallande planpolariserad våg fortplantas i ett gyrotropt material och reflekteras mot ett perfekt ledande plan (metallplan), se figur 4.18. Polarisationsplanet hos den infallande vågen kommer att vrida sig vinkeln $(\phi_+ - \phi_-)/2$ i xy -planet i positiv led kring positiva z -axeln under en sträcka z_0 . Polarisationsplanet hos den reflekterade vågen¹⁴ kommer också att vrida sig vinkeln $(\phi_+ - \phi_-)/2$ kring positiva z -axeln, eller ekvivalent vinkeln $-(\phi_+ - \phi_-)/2$ kring negativa z -axeln, eftersom propagationsriktningarna är motsatt riktade för den infallande och den reflekterade vågen. Totalt får vi en rotation av polarisationsplanet åt samma håll. Den totala vridningen av den reflekterade vågen jämfört med den inkommande blir därför $\phi_+ - \phi_-$ kring positiva z -axeln.

Ett alternativt sätt att analysera reflektion mot ett metallplan är att notera att en infallande cirkulärpolariserad våg, säg RCP, byter polarisation vid reflektion mot ett metallplan. Den reflekterade vågen blir LCP. Vågtalet hos den infallande RCP-vågen är $\omega (\mu(\epsilon - \epsilon_g))^{1/2} / c_0$. Vågtalet hos den reflekterade LCP-vågen är också $\omega (\mu(\epsilon - \epsilon_g))^{1/2} / c_0$. Bytet RCP $\rightarrow$ LCP ger således inget byte av vågtal. Vridningen av polarisationsplanet adderas därför vid reflektionen.

¹⁴Den reflekterade vågen får motsatt riktat $\mathbf{E}$ -fält. Detta påverkar dock ej vågens polarisation; den reflekterade vågen förblir linjärt polariserad.

	$\chi = 0$	$\chi \neq 0$
$\kappa = 0$	Isotropt	Kiralt, reciprokt
$\kappa \neq 0$	Icke-kiralt, icke-reciprokt	Kiralt, icke-reciprokt

Tabell 4.3: Tabell över klassificering av bi-isotropa material.

4.5 Bi-isotropa material

Bi-isotropa material kännetecknas av att de konstitutiva relationerna har formen, se (3.8) på sidan 39 och tabell 3.2

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \left\{ \epsilon \mathbf{E} + \eta_0 \xi \mathbf{H} \right\} \\ \mathbf{B} = \frac{1}{c_0} \left\{ \zeta \mathbf{E} + \eta_0 \mu \mathbf{H} \right\} \end{cases}$$

där de skalära storheterna ϵ , μ , ξ och ζ är enhetslösa komplexvärda funktioner av ω . Det kommer att visa sig lämpligt att istället för ξ och ζ använda en annan linjärkombination, som tydligare återger materialets egenskaper. Vi inför de komplexa storheterna κ och χ definierade av ξ och ζ på följande sätt:

$$\begin{cases} \xi = \kappa + i\chi \\ \zeta = \kappa - i\chi \end{cases} \quad \text{eller omvänt} \quad \begin{cases} \kappa = (\zeta + \xi)/2 \\ \chi = i(\zeta - \xi)/2 \end{cases}$$

Det bi-isotropa materialet är reciprokt om $\xi = -\zeta$, se (3.16) på sidan 50. Vi ser att om parametern $\kappa \neq 0$ så är materialet icke-reciprokt, och om $\kappa = 0$ så är materialet reciprokt. Parametern κ är således ett mått på materialets reciprocitet. Den andra materialparametern χ kallas kiralitetsparametern,¹⁵ och är ett mått på materialets optiska aktivitet eller kiralitet, se avsnitt 4.5.1. Förlustfria material kännetecknas i alla storheterna ϵ , μ , κ och χ är reella, se övning 4.8. En sammanställning av materialklassificeringen av bi-isotropa material finns i tabell 4.3.

På samma sätt som i tidigare avsnitt extraherar vi ut de olika komponenterna i dyaduppdelningen, se (4.3). Resultatet är

$$\begin{cases} \epsilon_{\perp\perp} = \epsilon \mathbf{I} \\ \epsilon_z = \mathbf{0} \\ \epsilon_{\perp} = \mathbf{0} \\ \epsilon_{zz} = \epsilon \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_{\perp\perp} = \mu \mathbf{I} \\ \mu_z = \mathbf{0} \\ \mu_{\perp} = \mathbf{0} \\ \mu_{zz} = \mu \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_{\perp\perp} = (\kappa + i\chi) \mathbf{I} \\ \xi_z = \mathbf{0} \\ \xi_{\perp} = \mathbf{0} \\ \xi_{zz} = (\kappa + i\chi) \end{cases} \quad \begin{cases} \zeta_{\perp\perp} = (\kappa - i\chi) \mathbf{I} \\ \zeta_z = \mathbf{0} \\ \zeta_{\perp} = \mathbf{0} \\ \zeta_{zz} = (\kappa - i\chi) \end{cases}$$

Från ekvation (4.5) ser vi att fältkomponenterna E_z och H_z är båda noll. Från de konstitutiva relationerna ovan får vi att även D_z och B_z är noll, dvs. inga z -komponenter existerar, vilket även framgår av (4.1) då $\omega \neq 0$. Alla fält ligger därför i x - y -planet, dvs.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{xy}, \text{ osv.}$$

¹⁵Den grekiska bokstaven χ är vald speciellt med tanke på att dess uttal "shi", och dess paralleller med ordet kiral (av grekiskans *kiral* hand).

Från sambanden ovan, kan vi identifiera de fyra dyaderna $\mathbf{W}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, se (4.7) på sidan 68. Resultatet blir

$$\begin{cases} \mathbf{W}_1 = -\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{\perp\perp} = -(\kappa - i\chi)\mathbf{J} \\ \mathbf{W}_2 = -\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\perp\perp} = -\mu\mathbf{J} \\ \mathbf{W}_3 = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\perp\perp} = \epsilon\mathbf{J} \\ \mathbf{W}_4 = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp\perp} = (\kappa + i\chi)\mathbf{J} \end{cases}$$

Koefficientmatrisen i fundamentalekvationen, (4.6), får följande utseende:

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa - i\chi & 0 & \mu \\ -\kappa + i\chi & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & -\epsilon & 0 & -\kappa - i\chi \\ \epsilon & 0 & \kappa + i\chi & 0 \end{pmatrix}$$

Efter lite algebra finner vi att egenvärdena till koefficientmatrisen kan skrivas på följande form:

$$\begin{cases} l_1 = -l_2 = (\epsilon\mu - \kappa^2)^{1/2} + \chi \\ l_3 = -l_4 = (\epsilon\mu - \kappa^2)^{1/2} - \chi \end{cases}$$

De två vågtalen i ett bi-isotropt material betecknar vi k_+ och k_- .

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c_0} \left((\epsilon\mu - \kappa^2)^{1/2} \pm \chi \right) \quad (4.36)$$

Egenvektorerna, svarande mot dessa egenvärden, anger vilka polarisationstillstånd som är möjliga. Resultatet blir fyra typer av lösningar.

$$\mathbf{E}^{\pm}(z, \omega) = \begin{cases} E^{\pm}(\omega) (\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}) \exp \{ik_{\pm}z\} \\ E^{\pm}(\omega) (\hat{\mathbf{x}} \mp i\hat{\mathbf{y}}) \exp \{-ik_{\pm}z\} \end{cases} \quad (4.37)$$

Dessa villkor innebär att egenvektorerna har cirkulär polarisation, RCP, respektive LCP, så att k_+ (k_-) svarar mot RCP(LCP)-vågor. Notera att detta gäller oavsett vilken riktning vågen utbreder sig i, eftersom en RCP-våg har en polarisation proportionell mot $\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}$ då den utbreder sig längs den positiva z -axeln, och en polarisation proportionell mot $\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}$ då den utbreder sig längs den negativa z -axeln, se avsnitt 3.6.

Det magnetiska fältet uppfyller liknande villkor. Sambandet mellan det elektriska fältet och det magnetiska fältet ges av (4.9) på sidan 70. Eftersom $\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}$, samt att $\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}$ är egenvektorer till $\mathbf{J}$, får vi

$$\eta_0 \mathbf{H}^{\pm}(z, \omega) = \begin{cases} \mp i\Gamma_{\pm}(\omega) E^{\pm}(\omega) (\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}) \exp \{ik_{\pm}z\} \\ \mp i\Gamma_{\pm}(\omega) E^{\pm}(\omega) (\hat{\mathbf{x}} \mp i\hat{\mathbf{y}}) \exp \{-ik_{\pm}z\} \end{cases} \quad (4.38)$$

där admittansen $\Gamma_{\pm}(\omega)$ definieras genom

$$\Gamma_{\pm}(\omega) = \frac{1}{\mu} \left((\epsilon\mu - \kappa^2)^{1/2} \mp i\kappa \right)$$

Notera att $\Gamma_{\pm}(\omega)$ är oberoende av kiralitetsparametern χ , och att vi kan skriva (4.38) som

$$\eta_0 \mathbf{H}^{\pm}(z, \omega) = \mp i \Gamma_{\pm}(\omega) \mathbf{E}^{\pm}(z, \omega) = \mp \mathbf{Y}_{\pm} \cdot \mathbf{E}^{\pm}(z, \omega)$$

Admittansdyaderna $\mathbf{Y}_{\pm}$ är

$$\mathbf{Y}_{\pm} = i \Gamma_{\pm}(\omega) \mathbf{I}$$

4.5.1 Optisk aktivitet

Den optiska aktiviteten hos materialet beskrivs, som vi kommer att finna i detta avsnitt, av parametern χ , och medför en vridning av polarisationsplanet hos en linjärt polariserad våg.¹⁶ Material som uppvisar denna effekt kallas optiskt aktiva eller kerala material. Vi har redan stött på ett liknande fenomen, nämligen Faradayrotation i avsnitt 4.4.2. Optisk aktivitet skiljer sig däremot på en rad väsentliga punkter från Faradayrotation och i detta avsnitt kommer vi att visa på skillnaderna. Den första skillnad, som man genast observerar, är att optisk aktivitet är ett fenomen som kan finnas hos ett material med isotropi. Faradayrotation däremot uppstår i ett gyrotropt material, som är anisotropt, dvs. olika vågutbredningsegenskaper i olika riktningar.

Vi undersöker, helt i analogi med Faradayrotation, vad som händer med en linjärt polariserad vågs polarisationsplan då vågen utbreder sig en sträcka z_0 i vågens utbredningsriktning, som vi här antar är positiva z -axelns riktning. Planvågen antas från början vara polariserad längs $\hat{\mathbf{x}}$ -riktningen.

De två cirkulärpolariserade moderna, som ges av (4.37), fortplantar sig med vågtalen $k_{\pm}$, se (4.36). RCP-vågen fortplantar sig med vågtalet

$$k_+ = \frac{\omega}{c_0} \left((\epsilon\mu - \kappa^2)^{1/2} + \chi \right)$$

medan LCP-vågen fortplantar sig med vågtalet

$$k_- = \frac{\omega}{c_0} \left((\epsilon\mu - \kappa^2)^{1/2} - \chi \right)$$

Vi antar i detta avsnitt att dessa vågtal är reella, dvs. ingen dämpning av vågen i materialet förekommer. Detta är fallet i ett förlustfritt material då ϵ , μ , κ och χ är reella och $\epsilon\mu > \kappa^2$.

En allmän lösning till Maxwells fältekvationer ges som en linjärkombination av de båda modlösningarna, dvs.

$$\mathbf{E}(z, \omega) = \underbrace{E^+(\omega) (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) e^{ik_+z}}_{\text{RCP}} + \underbrace{E^-(\omega) (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) e^{ik_-z}}_{\text{LCP}}$$

Om $\mathbf{E}$ -fältets amplitud i $z = 0$ är $E_0(\omega)$, så får vi, helt i analogi med Faradayrotation, genom att jämföra komponenterna i ovan uttryck då $z = 0$ med fältet $E_0(\omega)\hat{\mathbf{x}}$.

¹⁶Den förste att beskriva detta optiska fenomen var den franske fysikern Dominique F. J. Arago. År 1811 observerade Arago att polarisationsplanet hos ljus vred sig då ljuset passerade längs den optiska axeln i en kvartsplatta.

Resultatet blir, se Faradayrotation

$$E^+(\omega) = E^-(\omega) = \frac{E_0(\omega)}{2}$$

Den allmänna lösningen blir således

$$\mathbf{E}(z, \omega) = \frac{E_0(\omega)}{2} \{(\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) e^{ik_+z} + (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) e^{ik_-z}\}$$

Efter en sträcka z_0 blir $\mathbf{E}$ -fältet

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{E_0}{2} (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) e^{ik_+z_0} + \frac{E_0}{2} (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) e^{ik_-z_0} \\ &= \frac{E_0}{2} (e^{i\psi_+} + e^{i\psi_-}) \hat{\mathbf{x}} + i \frac{E_0}{2} (e^{i\psi_+} - e^{i\psi_-}) \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

där

$$\begin{cases} \psi_+ = k_+z_0 = \frac{\omega z_0}{c_0} \left((\epsilon\mu - \kappa^2)^{1/2} + \chi \right) \\ \psi_- = k_-z_0 = \frac{\omega z_0}{c_0} \left((\epsilon\mu - \kappa^2)^{1/2} - \chi \right) \end{cases}$$

Man visar lätt, på samma sätt som för Faradayrotation, att $\mathbf{E}$ -fältet fortfarande är linjärt polariserat i $z = z_0$, samt att

$$\frac{E_y}{E_x} = \tan \frac{\psi_- - \psi_+}{2}$$

Denna vridningsvinkel kan förenklas till

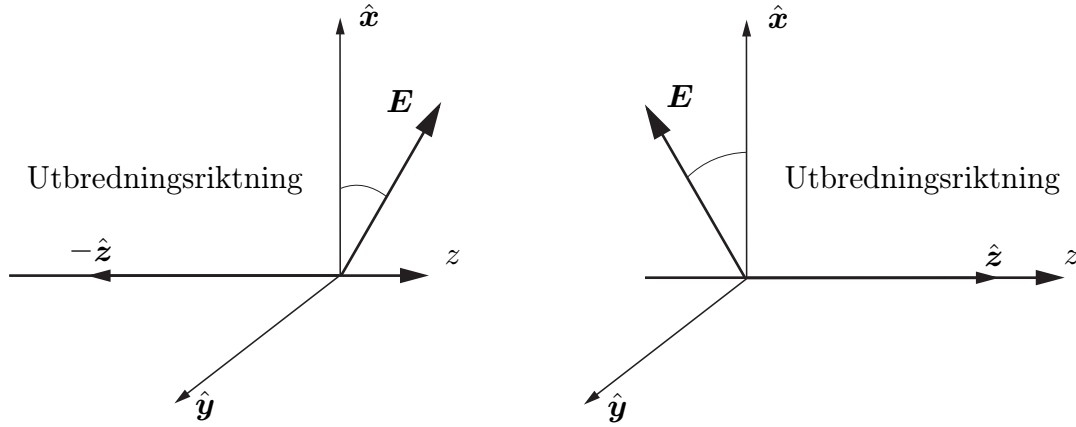
$$\frac{\psi_- - \psi_+}{2} = \frac{(k_- - k_+)z_0}{2} = -\frac{\omega z_0 \chi}{c_0}$$

och $\mathbf{E}$ -fältet efter sträckan z_0 blir

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{2} (e^{i\psi_-} + e^{i\psi_+}) \left(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} \tan \frac{\omega z_0 \chi}{c_0} \right)$$

Precis som i fallet Faradayrotation får vi en vridning av polarisationsplanet med vinkeln $(\psi_- - \psi_+)/2$ i x - y -planet (i positiv led längs $+z$ -axeln enligt högerregeln). Vi observerar att vridningsvinkeln är direkt proportionell mot χ , som således utgör ett mått på materialets optiska aktivitet. Vridningsvinkeln är också proportionell mot frekvensen ω . I allmänhet är parametern χ en mycket liten storhet och det krävs höga frekvenser (ofta optiska området) för att få någon mätbar effekt. Med artificiellt framställda material är däremot denna effekt fullt mätbar i mikrovågsområdet. Den förste att visa detta i början av detta sekel var Karl F. Lindman.¹⁷

¹⁷Mer om Karl F. Lindmans experiment och liv finns att hämta i: I.V. Lindell, A.H. Sihvola, J. Kurkijärvi, "Karl F. Lindman: The Last Hertzian, and a Harbinger of Electromagnetic Chirality," *IEEE Antenn. Propagat. Magazine*, **34**(3), 24-30 (1992).



Figur 4.19: Rotation av $\mathbf{E}$ -fältet vid optisk aktivitet.

Så långt är de båda fenomenen optisk aktivitet och Faradayrotation lika, men en väsentlig skillnad avslöjar sig om vi låter vågen reflekteras mot ett perfekt ledande plan, dvs. utbreda sig i motsatt riktning. I det bi-isotropa fallet är vågutbredningens egenskaper identiska i alla riktningar. Vid vågutbredning i $-z$ -riktningen kommer därför en vridning av polarisationsplanet att ske som är identisk med den för $+z$ -riktningen, dvs. en vinkel $(\psi_- - \psi_+)/2$ i positiv led längs utbredningsriktningen enligt högerregeln. Utbredningsriktningen nu är längs $-z$ -axeln. Vridningen av polarisationsplanet kommer därför vid reflektion i ett metallplan att ske åt motsatt håll jämfört med den infallande vågens vridning. Nettoeffekten blir att vridningen är helt återställd hos den reflekterade vågen efter en sträcka z_0 , se figur 4.19. Fenomenet optisk aktivitet är således helt olik Faradayrotation, där istället rotationen dubblerades vid reflektionsexperimentet.

4.5.2 Reflektion mot plan skiljeyta

Vi analyserar nu reflektion och transmission mot ett bi-isotropt material. Vi låter som tidigare $z = 0$ vara skiljeyta mellan material 1 och 2. Material 1, $z < 0$, antar vi är isotropt karakteriserat av materialparametrarna ϵ_1 och μ_1 , medan material 2, $z > 0$, kan ha bi-isotropa egenskaper, se figur 4.20. Det bi-isotropa materialet karakteriseras av materialparametrarna ϵ , μ , κ och χ . Vi antar att det elektromagnetiska fältet har källor i område 1, $z < z_0 < 0$.

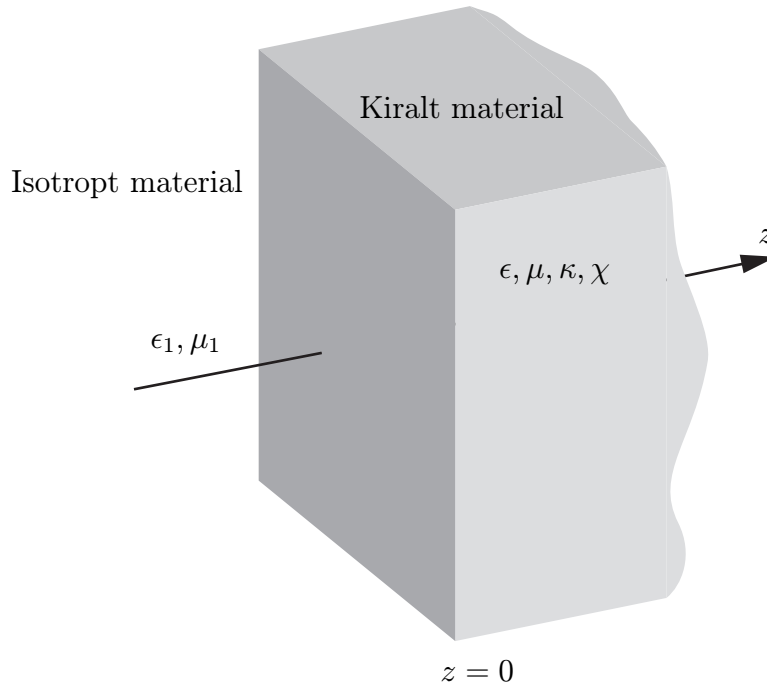
På samma sätt som i tidigare avsnitt ansätter vi lämpliga fält i de båda områdena 1 och 2. Till vänster om skiljeytan kan det elektriska fältet skrivas som en summa av en infallande våg $\mathbf{E}^i$ och en reflekterad våg $\mathbf{E}^r$.

$$\mathbf{E}_1(z, \omega) = \mathbf{E}^i(\omega)e^{ik_1 z} + \mathbf{E}^r(\omega)e^{-ik_1 z} \quad z_0 < z < 0$$

Vågtalet k_1 är vågtalet för material 1, $k_1 = \omega(\epsilon_1 \mu_1)^{1/2} / c_0$.

Motsvarande magnetiska fälts utvecklingskomponenter är

$$\eta_0 \mathbf{H}_1(z, \omega) = \frac{1}{\eta_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^i(\omega)e^{ik_1 z} - \frac{1}{\eta_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^r(\omega)e^{-ik_1 z} \quad z_0 < z < 0$$



Figur 4.20: Geometri för reflektion och transmission mot ett kiralt material.

där material 1:s relativa vågimpedans är $\eta_1 = (\mu_1/\epsilon_1)^{1/2}$.

Det totala elektriska och det totala magnetiska fältets värden vid gränssytan $z = 0$ blir därför

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1(z=0) = \mathbf{E}^i(\omega) + \mathbf{E}^r(\omega) \\ \eta_0 \mathbf{H}_1(z=0) = \frac{1}{\eta_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^i(\omega) - \frac{1}{\eta_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^r(\omega) \end{cases}$$

I det bi-isotropa materialet, $z > 0$, ansätter vi på liknande sätt ett elektriskt fält. Detta fält skall utbreda sig i positiva z -riktningen, eftersom vi antar att det inte finns några källor i material 2. Här är det emellertid lämpligare att ansätta det elektriska fältet som en linjärkombination av modlösningarna (4.37) och att utnyttja sambandet (4.38). Det elektriska och det magnetiska fältet uttryckta i dessa amplituder är ($z > 0$)

$$\begin{cases} \mathbf{E}_2(z, \omega) = E^+(\omega) (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) \exp\{ik_+z\} + E^-(\omega) (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) \exp\{ik_-z\} \\ \eta_0 \mathbf{H}_2(z, \omega) = -i\Gamma_+(\omega) E^+(\omega) (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) \exp\{ik_+z\} \\ \quad + i\Gamma_-(\omega) E^-(\omega) (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) \exp\{ik_-z\} \end{cases} \quad (4.39)$$

där vågtalen $k_{\pm}$ enligt ovan är

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c_0} \left((\epsilon\mu - \kappa^2)^{1/2} \pm \chi \right)$$

och

$$\Gamma_{\pm}(\omega) = \frac{1}{\mu} \left((\epsilon\mu - \kappa^2)^{1/2} \mp i\kappa \right)$$

Lägg märke till att både LCP- och RCP-vågorna fortplantar sig i $+\hat{\mathbf{z}}$ -riktningen. Fältens värden på gränssytan $z = 0$ i det bi-isotropa materialet blir med dessa beteckningar

$$\begin{cases} \mathbf{E}_2(z=0) = E^+(\omega) (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) + E^-(\omega) (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) \\ \eta_0 \mathbf{H}_2(z=0) = -i\Gamma_+(\omega) E^+(\omega) (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) + i\Gamma_-(\omega) E^-(\omega) (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) \end{cases}$$

eller i komponentform

$$\begin{cases} [\mathbf{E}_2](z=0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^+(\omega) \\ E^-(\omega) \end{pmatrix} = [\mathbf{A}] \begin{pmatrix} E^+(\omega) \\ E^-(\omega) \end{pmatrix} \\ \eta_0 [\mathbf{H}_2](z=0) = \begin{pmatrix} -i\Gamma_+ & +i\Gamma_- \\ \Gamma_+ & \Gamma_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^+(\omega) \\ E^-(\omega) \end{pmatrix} = [\mathbf{Y}] \begin{pmatrix} E^+(\omega) \\ E^-(\omega) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Randvillkoren på skiljeytan $z = 0$, kontinuitet av det elektriska och det magnetiska fältets tangentialkomponenter, ger följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} [\mathbf{E}^i] + [\mathbf{E}^r] = [\mathbf{A}] \begin{pmatrix} E^+ \\ E^- \end{pmatrix} \\ \frac{1}{\eta_1} [\mathbf{J}] [\mathbf{E}^i] - \frac{1}{\eta_1} [\mathbf{J}] [\mathbf{E}^r] = [\mathbf{Y}] \begin{pmatrix} E^+ \\ E^- \end{pmatrix} \end{cases}$$

Lösningen till detta system är

$$\begin{cases} [\mathbf{E}^r](\omega) = [\mathbf{r}](\omega) [\mathbf{E}^i](\omega) \\ \begin{pmatrix} E^+(\omega) \\ E^-(\omega) \end{pmatrix} = [\mathbf{t}](\omega) [\mathbf{E}^i](\omega) \end{cases}$$

där reflektionsmatrisen $[\mathbf{r}](\omega)$ och transmissionsmatrisen $[\mathbf{t}](\omega)$ är

$$\begin{cases} [\mathbf{r}](\omega) = ([\mathbf{J}] + \eta_1 [\mathbf{Y}] [\mathbf{A}]^{-1})^{-1} ([\mathbf{J}] - \eta_1 [\mathbf{Y}] [\mathbf{A}]^{-1}) \\ \quad = [\mathbf{A}] ([\mathbf{J}] [\mathbf{A}] + \eta_1 [\mathbf{Y}])^{-1} ([\mathbf{J}] [\mathbf{A}] - \eta_1 [\mathbf{Y}]) [\mathbf{A}]^{-1} \\ [\mathbf{t}](\omega) = [\mathbf{A}]^{-1} ([\mathbf{I}] + [\mathbf{r}]) \\ \quad = [\mathbf{I}] + ([\mathbf{J}] [\mathbf{A}] + \eta_1 [\mathbf{Y}])^{-1} ([\mathbf{J}] [\mathbf{A}] - \eta_1 [\mathbf{Y}]) [\mathbf{A}]^{-1} \end{cases}$$

med explicit koordinatrepresentation

$$\begin{cases} [\mathbf{r}] = \begin{pmatrix} r_{\parallel} & -r_{\perp} \\ r_{\perp} & r_{\parallel} \end{pmatrix} \\ [\mathbf{t}] = \begin{pmatrix} t_{+} & -it_{+} \\ t_{-} & it_{-} \end{pmatrix} \end{cases}$$

där

$$\begin{cases} r_{\parallel} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - \eta_1 \Gamma_+}{1 + \eta_1 \Gamma_+} + \frac{1 - \eta_1 \Gamma_-}{1 + \eta_1 \Gamma_-} \right\} & t_{+} = \frac{1}{1 + \eta_1 \Gamma_+} \\ r_{\perp} = i \left\{ \frac{1}{1 + \eta_1 \Gamma_+} - \frac{1}{1 + \eta_1 \Gamma_-} \right\} & t_{-} = \frac{1}{1 + \eta_1 \Gamma_-} \end{cases} \quad (4.40)$$

Reflektionsmatrisen $[\mathbf{r}]$ relaterar x - och y -komponenterna i det reflekterade fältet till motsvarande komponenter hos det infallande fältet. Notera att transmissionsmatrisen $[\mathbf{t}]$ inte har denna egenskap, utan relaterar koefficienterna (E^+, E^-) till x - och y -komponenterna hos det infallande fältet. För att erhålla det transmitterade fältets x - och y -komponenter måste de rätta linjärkombinationerna av fundamentalmoderna tas i enlighet med ekvation (4.39).

Effektflödestätheten hos den infallande vågen och den reflekterade vågen beräknas på samma sätt som i det isotropa fallet på sidan 75.

$$\begin{cases} \langle \mathbf{S}_i(t) \rangle (z=0, \omega) = \frac{1}{2\eta_0} |\mathbf{E}^i(\omega)|^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\eta_1(\omega)} \right\} \hat{\mathbf{z}} \\ \langle \mathbf{S}_r(t) \rangle (z=0, \omega) = -\frac{1}{2\eta_0} |\mathbf{E}^r(\omega)|^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\eta_1(\omega)} \right\} \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

Kvoten mellan effektflödestätheterna är således lika med kvoten mellan motsvarande elektriska fälts absolutbelopp i kvadrat. Reflektanserna $R_\perp$ och $R_\parallel$ definieras som

$$\begin{cases} R_\parallel = |r_\parallel|^2 \\ R_\perp = |r_\perp|^2 \end{cases}$$

$R_\parallel$ och $R_\perp$ anger hur stor del av effekten som reflekteras längs, respektive vinkelrätt mot den infallande vågens polarisationsriktning.

I ett reciprokt material är $\kappa = 0$. En rad förenklingar sker i uttrycken för reflektions- och transmissionskoefficienterna för ett reciprokt material. Vi observerar att för ett reciprokt bi-isotropt material gäller

$$\Gamma_+ = \Gamma_- = \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2}$$

Reflektions- och transmissionskoefficienterna i (4.40) förenklas därför till

$$\begin{cases} r_\parallel = \frac{1 - \eta_1 (\epsilon/\mu)^{1/2}}{1 + \eta_1 (\epsilon/\mu)^{1/2}} \\ r_\perp = 0 \\ t_+ = t_- = \frac{1}{1 + \eta_1 (\epsilon/\mu)^{1/2}} \end{cases} \quad (\text{Reciprokt bi-isotropt material}) \quad (4.41)$$

Det finns således ingen komponent hos den reflekterade vågen vinkelrätt mot den infallande vågens polarisation vid reflektion mot ett reciprokt bi-isotropt material. Omvändningen gäller också; ett bi-isotropt material, som inte ger någon reflektion vinkelrätt mot den infallande vågens polarisation, är reciprokt, dvs. $\kappa = 0$, se (4.40) och definitionen på $\Gamma_\pm$. Vi ser också att uttrycket på reflektionskoefficienten för ett icke-reciprokt bi-isotropt material är identiskt med motsvarande uttryck på reflektionskoefficienten för ett isotropt material med material parametrar ϵ och μ , se avsnitt 5.2. Ett reciprokt bi-isotropt material kan således inte skiljas från ett isotropt material i ett reflektionsexperiment.

Övningar till kapitel 4

- 4.1** Vilket villkor måste gälla mellan materialparametrarna, frekvensen och tjockleken på en platta för att en reflektionsfri yta skall erhållas? Är det möjligt att realisera detta för varje val av material? Hur ser villkoret ut om plattan omges av vakuum på båda sidor? Hur ser det ut om material 3 är ett metallplan?
- 4.2** En homogen planvåg utbreder sig i $\hat{z}$ -riktningen i ett anisotropt material, som antas vara icke-magnetiskt, dvs. karakteriseras av

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

Visa att effektlödestätheten kan skrivas

$$\langle S(t) \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \left\{ \frac{1}{v} \hat{z} |\mathbf{E}|^2 - \frac{1}{v} \operatorname{Re} [(\mathbf{E} \cdot \hat{z}) \mathbf{E}^*] - \frac{k_i}{\omega} \operatorname{Im} [(\mathbf{E} \cdot \hat{z}) \mathbf{E}^*] \right\}$$

där v är planvågens fashastighet och vågtalet $k = k_r + ik_i$.

- 4.3** En plan våg utbreder sig vinkelrätt mot optiska axeln i ett uniaxialt material. Materialet antas vara förlustfritt, dvs. ϵ , ϵ_z och μ är reella. Välj z -axeln parallell med planvågens utbredningsriktning. I en visst plan, $z = 0$, är det elektriska fältet $\mathbf{E}$ höger cirkulärt polariserat (RCP). Bestäm de plan, dvs. de z -värden (både positiva och negativa), där det elektriska fältet $\mathbf{E}$ är linjärt polariserat.
- 4.4** Bestäm vilka ”passband” och ”spärrband” som finns vid vågutbredning vinkelrätt mot det pålagda $\mathbf{B}$ -fältet i ett plasma, dvs. vilka frekvenser kan, respektive inte kan, utbreda sig i en riktning $\theta = \pi/2$. Vilken polarisation har vågorna? Antag att $\omega_g < 0$.
- 4.5** Beräkna hur stor Faradayrotationen blir vid propagation genom jonosfären om utbredningen sker parallellt med det pålagda $\mathbf{B}$ -fältet ($\theta = 0$).

Data för jonosfären:

$$\begin{aligned} \mu &= 1 \\ f &= 10 \text{ MHz} \\ B_0 &= 0.62 \cdot 10^{-4} \text{ Vs/m}^2 \\ N &= 2.83 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-3} \\ L &= 10 \text{ km} \end{aligned}$$

Anmärkning: Jonosfären är betydligt tjockare än 10 km, men dess elektrontäthet N varierar kraftigt. Ovanstående data kan därför ses som något fiktiva.

- 4.6** Visa att effekttransporten hos en plan våg i ett allmänt förlustfritt bianisotropt material alltid är vinkelrät mot vågens k -yta.

- 4.7 I övning 3.6 visades att de konstitutiva relationerna för ett ferritmaterial i det tids-harmoniska fallet under lämpliga antaganden är

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}_1$$

där $\boldsymbol{\mu}$ har komponentframställningen

$$\begin{cases} [\boldsymbol{\mu}] = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_g & 0 \\ -i\mu_g & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ [\epsilon] = \epsilon [\mathbf{I}] \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} \mu = 1 - \frac{\omega_0 \omega_m}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ \mu_g = \frac{\omega \omega_m}{\omega^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

De båda frekvenserna ω_0 (gyromagnetiska frekvensen) och ω_m (mättnadsfrekvensen) ges explicit av

$$\begin{cases} \omega_0 = -g\mu_0 H_0 \\ \omega_m = -g\mu_0 M_0 \end{cases}$$

Den gyromagnetiska kvoten g för elektroner är $g = -e/m \approx -1.76 \cdot 10^{11}$ C/kg. Dessa konstitutiva relationer leder, på samma sätt som för fallet med ett plasma, till Faradayrotation vid vågutbredning parallellt med z -axeln. I vilket frekvensintervall uppträder Faradayrotation om det statiska magnetfältet $H_0 = 3.0 \cdot 10^5$ A/m och mättnadsmagnetiseringen $M_0 = 2.0 \cdot 10^5$ A/m? Hur stor blir vridningsvinkeln/längdenhet om frekvensen är $f = 20.0$ GHz och $\epsilon = 10$?

- 4.8 Visa att reella ϵ , μ , κ och χ från avsnitt 4.5 är ekvivalent med att det bi-isotropa materialet är förlustfritt.

- 4.9 I ett förlustfritt bi-isotropt material är de elektriska och magnetiska planvågfälten $\mathbf{E}$ och $\mathbf{H}$ relaterade genom (fundamentalmoderna RCP och LCP)

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\omega) = E^\pm (\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}) \\ \eta_0 \mathbf{H}(\omega) = \mp i\Gamma_\pm E^\pm (\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}) \end{cases} \quad \Gamma_\pm(\omega) = \frac{1}{\mu} \left(\sqrt{\epsilon\mu - \kappa^2} \mp i\kappa \right)$$

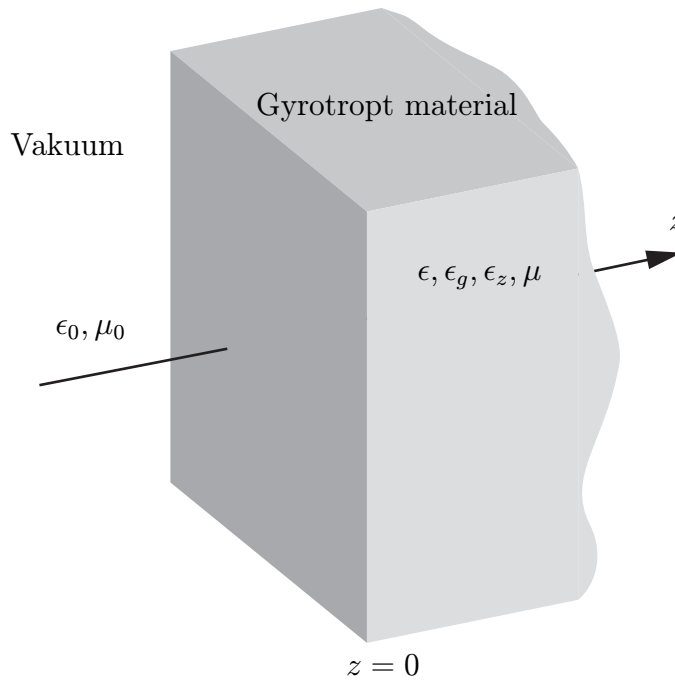
där vi antar att $\epsilon\mu > \kappa^2$. Visa först att de fysikaliska elektriska och magnetiska fälten $\mathbf{E}(t)$ och $\mathbf{H}(t)$ är

$$\begin{cases} \mathbf{E}(t) = |E^\pm| \{ \hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t - \alpha_\pm) \pm \hat{\mathbf{y}} \sin(\omega t - \alpha_\pm) \} \\ \mathbf{H}(t) = \frac{1}{\eta_0 \mu} |E^\pm| \left\{ \left(\mp \sqrt{\epsilon\mu - \kappa^2} \sin(\omega t - \alpha_\pm) - \kappa \cos(\omega t - \alpha_\pm) \right) \hat{\mathbf{x}} \right. \\ \left. + \left(\sqrt{\epsilon\mu - \kappa^2} \cos(\omega t - \alpha_\pm) \mp \kappa \sin(\omega t - \alpha_\pm) \right) \hat{\mathbf{y}} \right\} \end{cases}$$

där

$$E^\pm = |E^\pm| e^{i\alpha_\pm}$$

Bestäm därefter vinkeln ϕ mellan fälten $\mathbf{E}(t)$ och $\mathbf{H}(t)$, som är oberoende av tiden t . När är $\mathbf{E}(t)$ och $\mathbf{H}(t)$ vinkelräta mot varann?



Figur 4.21: Reflektion mot ett gyrotropt material för övning 4.10.

- 4.10** Låt planet $z = 0$ vara skiljeytan mellan ett förlustfritt gyrotropt material, som karakteriseras av materialparametrarna μ , ϵ , ϵ_g och ϵ_z , och vakuum, se figur 4.21. Det elektromagnetiska fältet har källor i området $z < 0$, dvs i vakuumet, och den magnetiska flödestätheten är riktad längs positiva z -axeln, dvs $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$. Beräkna reflektionskoefficienterna $r_\perp$ och $r_\parallel$ för det gyrotropa materialet uttryckt i parametrarna μ , ϵ , ϵ_g och ϵ_z .

Ledning: Analysera problemet så att resultaten från avsnitt 4.5.2 kan användas med lämpliga omdefinitioner.

- 4.11** En linjärt polariserad planvåg infaller i vakuum mot ett halvoändligt gyrotropt material, som karakteriseras av materialparametrarna ϵ , ϵ_g , ϵ_z och $\mu = 1$. Den magnetiska flödestätheten är riktad längs positiva z -axeln, dvs $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$. I övning 4.10 beräknades reflektionskoefficienterna $r_\perp$ och $r_\parallel$ för det gyrotropa materialet.

$$\begin{cases} r_\parallel = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - \Gamma_+}{1 + \Gamma_+} + \frac{1 - \Gamma_-}{1 + \Gamma_-} \right\} \\ r_\perp = i \frac{\Gamma_+ - \Gamma_-}{(1 + \Gamma_+)(1 + \Gamma_-)} \end{cases} \quad \Gamma_\pm = (\epsilon \mp \epsilon_g)^{1/2}$$

Vid vilken vinkelfrekvens $\omega > 0$ blir den reflekterade vågen vinkelrätt polariserad mot den infallande vågens polarisation?

- *4.12** Bestäm reflektions- och transmissionskoefficienterna för en platta (tjocklek d) bestående av ett kiralt material (materialparametrar $\epsilon, \mu, \kappa, \chi$). De omgivande materialen på båda sidor om plattan antas vara vakuum. Bestäm även hur mycket polarisationsplanet för en linjärt polariserad våg vrider sig vid transmission genom plattan.

Sammanfattning av kapitel 4

Vågutbredning längs fix riktning

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{xy}(z) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(z) \end{pmatrix} = i \frac{\omega}{c_0} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 & \mathbf{W}_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{xy}(z) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(z) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= -\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\zeta}_{\perp\perp} + \frac{\mathbf{J} \cdot (\boldsymbol{\zeta}_{\perp} (\mu_{zz} \boldsymbol{\epsilon}_z - \xi_{zz} \boldsymbol{\zeta}_z) - \boldsymbol{\mu}_{\perp} (\zeta_{zz} \boldsymbol{\epsilon}_z - \epsilon_{zz} \boldsymbol{\zeta}_z))}{\epsilon_{zz} \mu_{zz} - \xi_{zz} \zeta_{zz}} \\ \mathbf{W}_2 &= -\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\perp\perp} + \frac{\mathbf{J} \cdot (\boldsymbol{\zeta}_{\perp} (\mu_{zz} \boldsymbol{\xi}_z - \xi_{zz} \boldsymbol{\mu}_z) - \boldsymbol{\mu}_{\perp} (\zeta_{zz} \boldsymbol{\xi}_z - \epsilon_{zz} \boldsymbol{\mu}_z))}{\epsilon_{zz} \mu_{zz} - \xi_{zz} \zeta_{zz}} \\ \mathbf{W}_3 &= \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\perp\perp} - \frac{\mathbf{J} \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_{\perp} (\mu_{zz} \boldsymbol{\epsilon}_z - \xi_{zz} \boldsymbol{\zeta}_z) - \boldsymbol{\xi}_{\perp} (\zeta_{zz} \boldsymbol{\epsilon}_z - \epsilon_{zz} \boldsymbol{\zeta}_z))}{\epsilon_{zz} \mu_{zz} - \xi_{zz} \zeta_{zz}} \\ \mathbf{W}_4 &= \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp\perp} - \frac{\mathbf{J} \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_{\perp} (\mu_{zz} \boldsymbol{\xi}_z - \xi_{zz} \boldsymbol{\mu}_z) - \boldsymbol{\xi}_{\perp} (\zeta_{zz} \boldsymbol{\xi}_z - \epsilon_{zz} \boldsymbol{\mu}_z))}{\epsilon_{zz} \mu_{zz} - \xi_{zz} \zeta_{zz}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \boldsymbol{\epsilon}_{\perp\perp} + \hat{z} \boldsymbol{\epsilon}_z + \boldsymbol{\epsilon}_{\perp} \hat{z} + \hat{z} \epsilon_{zz} \hat{z} \\ \boldsymbol{\mu} &= \boldsymbol{\mu}_{\perp\perp} + \hat{z} \boldsymbol{\mu}_z + \boldsymbol{\mu}_{\perp} \hat{z} + \hat{z} \mu_{zz} \hat{z} \\ \boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{\xi}_{\perp\perp} + \hat{z} \boldsymbol{\xi}_z + \boldsymbol{\xi}_{\perp} \hat{z} + \hat{z} \xi_{zz} \hat{z} \\ \boldsymbol{\zeta} &= \boldsymbol{\zeta}_{\perp\perp} + \hat{z} \boldsymbol{\zeta}_z + \boldsymbol{\zeta}_{\perp} \hat{z} + \hat{z} \zeta_{zz} \hat{z} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} E_z \\ \eta_0 H_z \end{pmatrix} = -\frac{1}{\epsilon_{zz} \mu_{zz} - \xi_{zz} \zeta_{zz}} \begin{pmatrix} \mu_{zz} & -\xi_{zz} \\ -\zeta_{zz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_z \cdot \mathbf{E}_{xy} + \eta_0 \boldsymbol{\xi}_z \cdot \mathbf{H}_{xy} \\ \boldsymbol{\zeta}_z \cdot \mathbf{E}_{xy} + \eta_0 \boldsymbol{\mu}_z \cdot \mathbf{H}_{xy} \end{pmatrix}$$

Plana vågor

$$\begin{aligned} k &= k_r + i k_i \quad \text{vågta} \\ v &= \frac{|\omega|}{|k_r|} \quad \text{fashastighet} \\ \lambda &= \frac{2\pi}{k_r} \quad \text{våglängd} \\ n &= \frac{c_0}{v} \quad \text{brytningsindex} \end{aligned}$$

Isotropa material

$$\begin{aligned}
 k(\omega) &= k_0 (\epsilon(\omega)\mu(\omega))^{1/2} \\
 \eta(\omega) &= (\mu(\omega)/\epsilon(\omega))^{1/2} \\
 r(\omega) &= \frac{\eta_2(\omega) - \eta_1(\omega)}{\eta_2(\omega) + \eta_1(\omega)} \\
 t(\omega) &= \frac{2\eta_2(\omega)}{\eta_2(\omega) + \eta_1(\omega)} \\
 r(\omega) &= \frac{r_0(\omega) + r_d(\omega)e^{2ik_2(\omega)d}}{1 + r_0(\omega)r_d(\omega)e^{2ik_2(\omega)d}} \quad \text{platta} \\
 t(\omega) &= \frac{t_0(\omega)t_d(\omega)e^{ik_2(\omega)d}}{1 + r_0(\omega)r_d(\omega)e^{2ik_2(\omega)d}} \quad \text{platta}
 \end{aligned}$$

Uniaxiala material, ordinär våg

$$\begin{aligned}
 k_o &= k_0 (\epsilon\mu)^{1/2} \\
 \mathbf{E}^o(z, \omega) &= E^o(\omega)\hat{\mathbf{e}}_o e^{\pm ik_o z} \\
 \eta_0 \mathbf{H}^o(z, \omega) &= \mp \left(\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)} \right)^{1/2} E^o(\omega)\hat{\mathbf{e}}_{eo} e^{\pm ik_o z} \\
 \mathbf{D}^o(z, \omega) &= \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}^o(z, \omega) \\
 \mathbf{B}^o(z, \omega) &= \mu_0 \mu \mathbf{H}^o(z, \omega)
 \end{aligned}$$

Uniaxiala material, extraordinär våg

$$\begin{aligned}
 k_{eo} &= k_0 \left(\frac{\epsilon\epsilon_z\mu}{\epsilon_{33}} \right)^{1/2} \\
 \epsilon_{33} &= \epsilon_z \cos^2 \alpha + \epsilon \sin^2 \alpha \\
 \mathbf{E}^{eo}(z, \omega) &= \left(\hat{\mathbf{e}}_{eo} - \hat{\mathbf{z}} \frac{(\epsilon_z - \epsilon) \cos \alpha \sin \alpha}{\epsilon_{33}} \right) E^{eo}(\omega) e^{\pm ik_{eo} z} \\
 \eta_0 \mathbf{H}^{eo}(z, \omega) &= \pm \left(\frac{\epsilon\epsilon_z}{\epsilon_{33}\mu} \right)^{1/2} E^{eo}(\omega)\hat{\mathbf{e}}_o e^{\pm ik_{eo} z} \\
 \mathbf{D}^{eo}(z, \omega) &= \epsilon_0 \frac{\epsilon\epsilon_z}{\epsilon_{33}} \mathbf{E}^{eo}(z, \omega) \\
 \mathbf{B}^{eo}(z, \omega) &= \mu_0 \mu \mathbf{H}^{eo}(z, \omega)
 \end{aligned}$$

Uniaxiala material, reflektion och transmission

$$\begin{aligned}
 r_{\text{eo}} &= \frac{1 - \eta_1 \left(\frac{\epsilon \epsilon_z}{\epsilon_{33} \mu} \right)^{1/2}}{1 + \eta_1 \left(\frac{\epsilon \epsilon_z}{\epsilon_{33} \mu} \right)^{1/2}} & t_{\text{eo}} &= \frac{2}{1 + \eta_1 \left(\frac{\epsilon \epsilon_z}{\epsilon_{33} \mu} \right)^{1/2}} \\
 r_{\text{o}} &= \frac{1 - \eta_1 \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2}}{1 + \eta_1 \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2}} & t_{\text{o}} &= \frac{2}{1 + \eta_1 \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2}}
 \end{aligned}$$

Gyrotropa material, $\theta = 0$

$$\begin{aligned}
 k_{\pm} &= k_0 (\mu(\epsilon \pm \epsilon_g))^{1/2} \\
 \mathbf{E}_{xy}^+(z, \omega) &= E^+(\omega) (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) e^{\pm i k_+ z} \\
 \mathbf{E}_{xy}^-(z, \omega) &= E^-(\omega) (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) e^{\pm i k_- z} \\
 \eta_0 \mathbf{H}_{xy}^+(z, \omega) &= \pm \left(\frac{(\epsilon + \epsilon_g)}{\mu} \right)^{1/2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{xy}^+(z, \omega) \\
 \eta_0 \mathbf{H}_{xy}^-(z, \omega) &= \pm \left(\frac{(\epsilon - \epsilon_g)}{\mu} \right)^{1/2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{xy}^-(z, \omega)
 \end{aligned}$$

Gyrotropa material, $\theta = \pi/2$

$$\begin{aligned}
 k_{\perp} &= k_0 \left(\mu \frac{\epsilon^2 - \epsilon_g^2}{\epsilon} \right)^{1/2} \\
 k_{\parallel} &= k_0 (\mu \epsilon_z)^{1/2} \\
 \mathbf{E}_{xy}^{\perp}(z, \omega) &= E^{\perp}(\omega) \left(\hat{\mathbf{e}}_{\perp} + \hat{\mathbf{z}} \frac{i\epsilon_g}{\epsilon} \right) e^{\pm i k_{\perp} z} \\
 \mathbf{E}_{xy}^{\parallel}(z, \omega) &= E^{\parallel}(\omega) \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} e^{\pm i k_{\parallel} z} \\
 \eta_0 \mathbf{H}_{xy}^{\perp}(z, \omega) &= \pm \left(\frac{\epsilon^2 - \epsilon_g^2}{\epsilon \mu} \right)^{1/2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{xy}^{\perp}(z, \omega) \\
 \eta_0 \mathbf{H}_{xy}^{\parallel}(z, \omega) &= \pm \left(\frac{\epsilon_z}{\mu} \right)^{1/2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{xy}^{\parallel}(z, \omega)
 \end{aligned}$$

Rotationsvinkel, Faradayrotation, $\theta = 0$

$$\frac{E_y}{E_x} = \tan \frac{\phi_+ - \phi_-}{2}$$

$$\frac{\phi_+ - \phi_-}{2} = \frac{z_0 \omega \sqrt{\mu}}{2c_0} (\sqrt{\epsilon + \epsilon_g} - \sqrt{\epsilon - \epsilon_g})$$

Bi-isotropa material, moder

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c_0} \left((\epsilon\mu - \kappa^2)^{1/2} \pm \chi \right)$$

$$\mathbf{E}^{\pm}(z, \omega) = \begin{cases} E^{\pm}(\omega) (\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}) \exp \{ik_{\pm}z\} \\ E^{\pm}(\omega) (\hat{\mathbf{x}} \mp i\hat{\mathbf{y}}) \exp \{-ik_{\pm}z\} \end{cases}$$

$$\eta_0 \mathbf{H}^{\pm}(z, \omega) = \begin{cases} \mp i\Gamma_{\pm}(\omega) E^{\pm}(\omega) (\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}) \exp \{ik_{\pm}z\} \\ \mp i\Gamma_{\pm}(\omega) E^{\pm}(\omega) (\hat{\mathbf{x}} \mp i\hat{\mathbf{y}}) \exp \{-ik_{\pm}z\} \end{cases}$$

$$\Gamma_{\pm}(\omega) = \frac{1}{\mu} \left((\epsilon\mu - \kappa^2)^{1/2} \mp i\kappa \right)$$

Bi-isotropa material, reflektion och transmission

$$[\mathbf{r}] = \begin{pmatrix} r_{\parallel} & -r_{\perp} \\ r_{\perp} & r_{\parallel} \end{pmatrix} \quad [\mathbf{t}] = \begin{pmatrix} t_{+} & -it_{+} \\ t_{-} & it_{-} \end{pmatrix}$$

$$r_{\parallel} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - \eta_1 \Gamma_{+}}{1 + \eta_1 \Gamma_{+}} + \frac{1 - \eta_1 \Gamma_{-}}{1 + \eta_1 \Gamma_{-}} \right\}$$

$$r_{\perp} = i \left\{ \frac{1}{1 + \eta_1 \Gamma_{+}} - \frac{1}{1 + \eta_1 \Gamma_{-}} \right\}$$

$$t_{\pm} = \frac{1}{1 + \eta_1 \Gamma_{\pm}}$$

Optisk aktivitet

$$\frac{E_y}{E_x} = \tan \frac{\psi_- - \psi_+}{2}$$

$$\frac{\psi_- - \psi_+}{2} = -\frac{\omega z_0 \chi}{c_0}$$

Kapitel 5

Vågutbredning i flera dimensioner

I kapitel 4 analyserade vi vågutbredning längs en fix riktning, s.k. planvågslösningar. Ett viktigt resultat var fundamentalekvationen, vars egenvärden gav den plana vågens möjliga vågtal och polarisationstillstånd som funktion av ω . I detta kapitel behandlas mer allmänna lösningar till Maxwells fältekvationer. Vi kan här analysera reflektions- och transmissionsproblem med källor som inte enbart genererar plana vågor. Flera resultat av denna mer generella analys påminner om eller har starka paralleller med resultaten från kapitel 4. Även i detta kapitel antar vi att materialet är homogent, dvs. de konstitutiva relationerna beror ej på rumskoordinaterna.

5.1 Maxwells fältekvationer

Vid reflektion och transmission mot en yta, $z = \text{konstant}$, kommer z -koordinaten att inta en särställning pga. att källorna till fältet antingen ligger till höger eller vänster om ett plan, $z = \text{konstant}$. Källornas placering leder till att fältet propagerar i antingen $+z$ -riktningen eller i $-z$ -riktningen. Tills vidare behåller vi därför fältens z -beroende, medan vi fouriertransformerar fälten i de övriga två rumsvariablerna, dvs. x - och y -variablerna.

Definiera Fouriertransformen m.a.p. rumsvariablerna x och y

$$\mathbf{E}(z, \mathbf{k}_t, \omega) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dx dy$$

med invers

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(z, \mathbf{k}_t, \omega) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dk_x dk_y$$

där vi, för att få mer kompakta beteckningar, definierat en vektor $\mathbf{k}_t$ och Ortsvektorn i x - y -planet $\boldsymbol{\rho}$

$$\mathbf{k}_t = \hat{\mathbf{x}}k_x + \hat{\mathbf{y}}k_y = k_t \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \quad \boldsymbol{\rho} = \hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y$$

Här är det transversella vågtalet, $k_t \geq 0$, definierat genom

$$k_t = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

och enhetsvektorn $\hat{\mathbf{e}}_{\parallel} = \mathbf{k}_t/k_t$.

På samma sätt definieras Fouriertransformen av övriga fält. Vi använder samma beteckningar på det tidsharmoniska fältet $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ som på dess Fouriertransform $\mathbf{E}(z, \mathbf{k}_t, \omega)$ för att inte få klumpiga beteckningar. Argumentet anger om fältet eller dess Fouriertransform avses. Denna konvention är helt i analogi med tidigare beteckningar för tidsharmoniska fält. Funktionsberoendet m.a.p. $\mathbf{k}_t$ och ω utelämnas där det ej kan missförstås vilket fält som avses, dvs. vi skriver rätt och slätt $\mathbf{E}(z)$ för $\mathbf{E}(z, \mathbf{k}_t, \omega)$.

Vi kommer nu att studera Fourierkoefficienterna $\mathbf{E}(z, \mathbf{k}_t, \omega)$ och deras egenskaper. Maxwells fältekvationer utan källor ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$) för harmoniska vågor, se (3.2) och (3.3) på sidan 37, transformeras till följande ekvationer (använd $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}_t + \hat{\mathbf{z}} \frac{d}{dz}$):

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{z}} \times \frac{d}{dz} \mathbf{E}(z) + i\mathbf{k}_t \times \mathbf{E}(z) = i\omega \mathbf{B}(z) \\ \hat{\mathbf{z}} \times \frac{d}{dz} \mathbf{H}(z) + i\mathbf{k}_t \times \mathbf{H}(z) = -i\omega \mathbf{D}(z) \end{cases}$$

Med en uppdelning av vektorerna i en komponent i x - y -planet och en z -komponent, t.ex. $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{xy} + E_z \hat{\mathbf{z}}$, kan vi ur dessa ekvationer projicera ut x - y - respektive z -komponenterna. Operera med $-\hat{\mathbf{z}} \times$ på båda sidor i ekvationerna samt utnyttja BAC-CAB-regeln för att få x - y -komponenterna. Resultatet blir:

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \mathbf{E}_{xy}(z) = i\mathbf{k}_t E_z(z) - i\omega \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_{xy}(z) \\ \frac{d}{dz} \mathbf{H}_{xy}(z) = i\mathbf{k}_t H_z(z) + i\omega \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{D}_{xy}(z) \end{cases} \quad (5.1)$$

På samma sätt, använd operationen $\hat{\mathbf{z}} \cdot$ för att få z -komponenterna. Vi får

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_{xy}(z)) = \omega B_z(z) \\ \hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{k}_t \times \mathbf{H}_{xy}(z)) = -\omega D_z(z) \end{cases} \quad (5.2)$$

De transversella komponenternas ekvation, (5.1), kan skrivas om som en vektorekvation.

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{xy}(z) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(z) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \mathbf{k}_t E_z \\ \mathbf{k}_t \eta_0 H_z \end{pmatrix} + i\omega \begin{pmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{xy}(z) \\ \eta_0 \mathbf{D}_{xy}(z) \end{pmatrix}$$

där den tvådimensionella linjära operatoren $\mathbf{J}$, som verkar på en vektor i x - y -planet (se även avsnitt 4.1), och som har matrisrepresentationen

$$[\mathbf{J}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

har använts. Denna operation svarar mot en rotation i x - y -planet av 90° . Notera att $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = -\mathbf{I}$, där $\mathbf{I}$ är identitets-operatorn i två dimensioner. Vi ser genast att analysen från kapitel 4 är ett specialfall av analysen i detta kapitel, nämligen genom att sätta $\mathbf{k}_t = \mathbf{0}$, jämför (4.1) med (5.1) och (5.2). De reflektions- och transmissionsresultat som vi erhöill i kapitel 4 kallas också, pga. att vågen endast utbreder sig vinkelrätt mot skiljeytan, för reflektion och transmission vid vinkelrätt infall.

Strategin för att lösa ekvationerna (5.1) ovan är att använda de konstitutiva relationerna för materialet och (5.2) för att uttrycka E_z och H_z samt $\mathbf{D}_{xy}$ och $\mathbf{B}_{xy}$ i $\mathbf{E}_{xy}$ - och $\mathbf{H}_{xy}$ -fälten. Därefter kan E_z och H_z , samt $\mathbf{D}_{xy}$ och $\mathbf{B}_{xy}$ elimineras i (5.1). Slutresultatet blir ett system av första ordningens ordinära differentialekvationer, vars form vi skriver

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{xy}(z) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(z) \end{pmatrix} = i \frac{\omega}{c_0} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 & \mathbf{W}_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{xy}(z) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(z) \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

där $\mathbf{W}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, är fyra enhetslösa 2×2 dyader. Vi noterar att detta system av ekvationer är en generalisering av fundamentalekvationen, (4.6), i kapitel 4. Egenvärdena till motsvarande koefficientmatris bestämmer vågutbrednings-egenskaperna i materialet precis som vid vågutbredning längs en fix riktning i kapitel 4.

Hittills i detta avsnitt har analysen gällt generellt för vågutbredning i ett bianisotropt material. Det explicita utseendet på dyaderna $\mathbf{W}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ är naturligtvis olika för olika material. Vi kommer i de följande avsnitten att begränsa oss till att analysera vågutbredning i isotropa material. De mer komplicerade materialen tas inte upp till behandling här.

5.2 Isotropa material

5.2.1 Fälthöjningar

Isotropa material kännetecknas av att de konstitutiva relationerna har formen

$$\begin{cases} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mu(\omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \end{cases}$$

där ϵ och μ är enhetslösa komplexvärda funktioner av ω . Motsvarande samband gäller naturligtvis även för de fouriertransformerade storheterna $\mathbf{D}(z, \mathbf{k}_t, \omega)$ osv.

Vår första uppgift blir att identifiera de fyra dyaderna $\mathbf{W}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ i (5.3) för ett isotropt material. För att åstadkomma detta uttrycker vi först E_z och H_z i motsvarande tangentiella fält. Detta sker med de konstitutiva relationernas hjälp och ekvation (5.2), som i detta specialfall medför

$$\begin{cases} \frac{\omega \mu}{c_0} \eta_0 H_z(z) = \hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_{xy}(z)) = -\mathbf{k}_t \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{xy}(z)) = -\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{xy}(z) \\ \frac{\omega \epsilon}{c_0} E_z(z) = -\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{k}_t \times \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(z)) = \mathbf{k}_t \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(z)) = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{J} \cdot \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(z) \end{cases}$$

Vi får

$$\begin{pmatrix} E_z(z) \\ \eta_0 H_z(z) \end{pmatrix} = \frac{c_0}{\epsilon\mu\omega} \mathbf{k}_t \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mu\mathbf{J} \\ -\epsilon\mathbf{J} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{xy}(z) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(z) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

I ekvationerna (5.1) kan vi nu eliminera E_z och H_z samt $\mathbf{D}_{xy}$ och $\mathbf{B}_{xy}$ mha. de konstitutiva relationerna. Vi skriver resultatet på samma form som i (5.3).

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{xy}(z) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(z) \end{pmatrix} = i \frac{\omega}{c_0} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 & \mathbf{W}_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{xy}(z) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(z) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

där $\mathbf{W}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, är fyra 2×2 dyader, vars explicita utseende är

$$\begin{cases} \mathbf{W}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{W}_2 = -\mu\mathbf{J} + \frac{c_0^2}{\epsilon\omega^2} \mathbf{k}_t (\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{J}) = -\mu\mathbf{J} + \tau\mu\hat{\mathbf{e}}_{\parallel} (\hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \cdot \mathbf{J}) \\ \mathbf{W}_3 = \epsilon\mathbf{J} - \frac{c_0^2}{\mu\omega^2} \mathbf{k}_t (\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{J}) = \epsilon\mathbf{J} - \tau\epsilon\hat{\mathbf{e}}_{\parallel} (\hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \cdot \mathbf{J}) \\ \mathbf{W}_4 = \mathbf{0} \end{cases}$$

där vi infört den enhetslösa beteckningen τ , definierad genom

$$\tau = \frac{k_t^2 c_0^2}{\epsilon\mu\omega^2}$$

och $\hat{\mathbf{e}}_{\parallel} = \mathbf{k}_t/k_t$. En alternativ framställning av dessa dyader är

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= \mathbf{0} & \mathbf{W}_2 &= -\mu\mathbf{J} - \mu\tau\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}\hat{\mathbf{e}}_{\perp} \\ \mathbf{W}_3 &= \epsilon\mathbf{J} + \epsilon\tau\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}\hat{\mathbf{e}}_{\perp} & \mathbf{W}_4 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

där $\{\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}, \hat{\mathbf{e}}_{\perp}, \hat{\mathbf{z}}\}$ är ett ortonormerat högersystem genom definitionen

$$\hat{\mathbf{e}}_{\perp} = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} = \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \cdot \mathbf{J}^t = -\hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \cdot \mathbf{J}$$

Detta är en koordinatberoende framställning av dyaderna $\mathbf{W}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Vi ser genast att basen $\{\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}, \hat{\mathbf{e}}_{\perp}, \hat{\mathbf{z}}\}$ har en framträdande roll i denna analys. Denna bas är lämplig för analys av de fouriertransformerade fälten. Slututtrycken för reflektion och transmission får i denna representation en speciellt enkel form. Basen är relaterad till Fouriervariablerna $\mathbf{k}_t$ uttrycka i de cylindriska koordinaterna (k_t, ψ) , se figur 5.1.

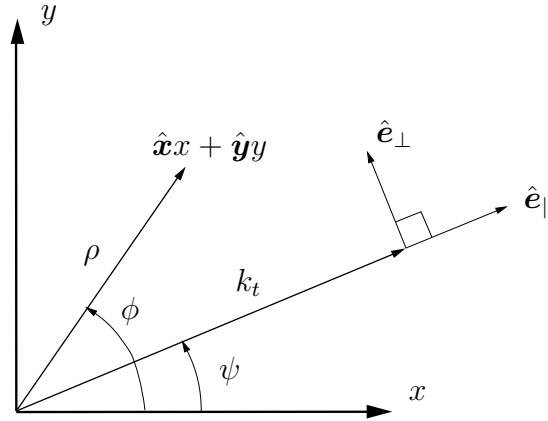
$$\mathbf{k}_t = \hat{\mathbf{x}}k_x + \hat{\mathbf{y}}k_y = \hat{\mathbf{x}}k_t \cos \psi + \hat{\mathbf{y}}k_t \sin \psi$$

I detta uttryck är det transversella vågtalet, $k_t \geq 0$,

$$k_t = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

och azimutvinkeln $\psi \in [0, 2\pi)$

$$\psi = \begin{cases} \arccos \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} & k_y > 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} & k_y < 0 \end{cases}$$



Figur 5.1: Definition av uppdelningen i cylindriska koordinater.

Enhetsvektor $\hat{e}_{\parallel}$ parallell med vektorn $\mathbf{k}_t$ blir

$$\hat{e}_{\parallel} = \frac{\mathbf{k}_t}{k_t} = \hat{x} \cos \psi + \hat{y} \sin \psi$$

Normalvektorn till skiljeplanen, $\hat{z}$, och den tangentiella vektorn $\hat{e}_{\parallel}$ spänner upp ett plan, det s.k. *utbredningsplanet*. Normalen till detta plan ges av, se figur 5.1

$$\hat{e}_{\perp} = -\hat{x} \sin \psi + \hat{y} \cos \psi = \mathbf{J} \cdot \hat{e}_{\parallel} = -\hat{e}_{\parallel} \cdot \mathbf{J}$$

De tangentiella komponenterna till vektorerna $\mathbf{E}(z)$ och $\mathbf{H}(z)$, dvs. fältens x - y -komponenter, kan vi representera på följande två sätt; dels i $(\hat{x}, \hat{y})$ -basen, dels i $(\hat{e}_{\parallel}, \hat{e}_{\perp})$ -basen:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{xy}(z) = \hat{x}E_x(z) + \hat{y}E_y(z) = \hat{e}_{\parallel}E_{\parallel}(z) + \hat{e}_{\perp}E_{\perp}(z) \\ \mathbf{H}_{xy}(z) = \hat{x}H_x(z) + \hat{y}H_y(z) = \hat{e}_{\parallel}H_{\parallel}(z) + \hat{e}_{\perp}H_{\perp}(z) \end{cases}$$

Vilken representation vi väljer beror på den specifika situation vi vill analysera. Vi betecknar de två koordinatrepresentationerna med

$$[\mathbf{E}]_{xy}(z) = \begin{pmatrix} E_x(z) \\ E_y(z) \end{pmatrix} \quad [\mathbf{H}]_{xy}(z) = \begin{pmatrix} H_x(z) \\ H_y(z) \end{pmatrix}$$

och

$$[\mathbf{E}]_t(z) = \begin{pmatrix} E_{\parallel}(z) \\ E_{\perp}(z) \end{pmatrix} \quad [\mathbf{H}]_t(z) = \begin{pmatrix} H_{\parallel}(z) \\ H_{\perp}(z) \end{pmatrix}$$

Transformationen mellan de båda representationerna ges av 2×2 matrisen $[\mathbf{P}]$.

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}]_{xy} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{x} \cdot \hat{e}_{\parallel} & \hat{x} \cdot \hat{e}_{\perp} \\ \hat{y} \cdot \hat{e}_{\parallel} & \hat{y} \cdot \hat{e}_{\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel} \\ E_{\perp} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel} \\ E_{\perp} \end{pmatrix} = [\mathbf{P}] [\mathbf{E}]_t \end{aligned} \quad (5.6)$$

med invers

$$[\mathbf{E}]_t = \begin{pmatrix} E_{\parallel} \\ E_{\perp} \end{pmatrix} = [\mathbf{P}]^{-1} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

och på samma sätt för övriga vektorfält.

Ortsvektorn i horisontalplanet $\hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y$ representeras lämpligen i cylindriska koordinater (ρ, ϕ) ($\rho \geq 0$, $\phi \in [0, 2\pi)$), se figur 5.1.

$$\hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y = \hat{\mathbf{x}}\rho \cos \phi + \hat{\mathbf{y}}\rho \sin \phi$$

Vidare gäller

$$\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho} = k_x x + k_y y = k_t \rho \cos(\psi - \phi)$$

Det tidsharmoniska fältets x - y -komponent blir uttryckt i cylinderkoordinatsrepresentationen

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{xy}(z, \mathbf{k}_t, \omega) e^{ik_x x + ik_y y} dk_x dk_y \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} (\hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \quad \hat{\mathbf{e}}_{\perp}) [\mathbf{E}]_t(z, \mathbf{k}_t, \omega) e^{ik_t \rho \cos(\psi - \phi)} k_t dk_t d\psi \end{aligned}$$

eftersom $dk_x dk_y = k_t dk_t d\psi$. Liknande uttryck gäller för de övriga vektorfälten.

Det är lämpligt att representera dyaderna $\mathbf{W}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, i cylinderkoordinatsystemet $\{\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}, \hat{\mathbf{e}}_{\perp}\}$. Deras explicita representationer är

$$\begin{aligned} [\mathbf{W}_1] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & [\mathbf{W}_2] &= \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 - \tau \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ [\mathbf{W}_3] &= \epsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 + \tau \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & [\mathbf{W}_4] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eigenvärdena till koefficientmatrisen i (5.5) bestämmer vilka vågor som kan utbreda sig i det isotropa materialet. Matrisen har dubbla egenvärden.

$$\begin{cases} l_1 = l_2 = (\epsilon\mu(1 - \tau))^{1/2} \\ l_3 = l_4 = -(\epsilon\mu(1 - \tau))^{1/2} \end{cases}$$

Grenen på kvadratroten väljs här alltid så att dess imaginärdel är icke-negativ. De möjliga moderna i det isotropa materialet är

$$\mathbf{E}_{xy}(z, \mathbf{k}_t, \omega) = \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) e^{\pm i k_z z}$$

där $\mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega)$ är en godtycklig vektor i x - y -planet (inga restriktioner på polarisationen) och vågtalet för utbredningen i z -riktningen är k_z —det longitudinella vågtalet—definierat av

$$k_z = k_0 (\epsilon\mu(1 - \tau))^{1/2} = (k^2 - k_t^2)^{1/2}$$

Vi har här infört vågtalet k och vågtalet för vakuum k_0 , som är

$$k = \frac{\omega}{c_0} (\epsilon\mu)^{1/2} \quad k_0 = \frac{\omega}{c_0}$$

Med dessa beteckningar får vi följande samband:

$$k^2 = k_t^2 + k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

Längden av vektorn $\mathbf{k}_t$, k_t , kallas också det transversella vågtalet. Notera att vektorn $\mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega)$ är oberoende av z , medan $\mathbf{E}_{xy}(z, \mathbf{k}_t, \omega)$ har z -beroendet $\exp\{\pm ik_z z\}$.

Har materialet förluster är k_z en komplex storhet. Om materialet däremot är förlustfritt, ϵ och μ reella, är k_z reell om $k_t^2 = k_x^2 + k_y^2 < k^2$, annars rent imaginärt. Notera att k_t alltid är ett reellt, icke-negativt tal.

Lösningen till (5.5) är

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{xy}(z, \mathbf{k}_t, \omega) = \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) e^{\pm ik_z z} \\ \mathbf{H}_{xy}(z, \mathbf{k}_t, \omega) = \mathbf{H}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) e^{\pm ik_z z} \end{cases}$$

där vektorn $\mathbf{H}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega)$ kan uttryckas i $\mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega)$ genom (5.5).

$$\begin{aligned} \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) &= \pm \frac{\omega}{k_z c_0} \mathbf{W}_3 \cdot \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) = \pm \frac{\omega}{k_z c_0} (\epsilon \mathbf{J} + \epsilon \tau \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}) \cdot \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) \\ &= \pm \frac{c_0}{\mu k_z \omega} (k^2 \mathbf{J} + k_t^2 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}) \cdot \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) = \pm \mathbf{Y} \cdot \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) \end{aligned} \quad (5.8)$$

där admittansdyaden $\mathbf{Y}$ ges av

$$\mathbf{Y} = \frac{c_0}{\mu k_z \omega} (k^2 \mathbf{J} + k_t^2 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}) = \frac{c_0}{\mu k_z \omega} (k^2 \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} - k_z^2 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}) \quad (5.9)$$

Vi har här använt

$$\begin{cases} \mathbf{I} = \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} + \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \\ \mathbf{J} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{I} = \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} - \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \end{cases}$$

med explicit representation i $\{\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}, \hat{\mathbf{e}}_{\perp}\}$ -systemet

$$[\mathbf{Y}] = \frac{c_0}{\mu \omega} \begin{pmatrix} 0 & -k_z \\ k^2/k_z & 0 \end{pmatrix}$$

Notera att detta uttryck på admittansdyaden generaliserar våra resultat i kapitel 4, se (4.10) på sidan 72.

Lösningen med plus-tecken i exponenten, dvs. $\exp\{ik_z z\}$, anger att källorna ligger till vänster om ett plan $z = z_0$ och att vågen propagerar i $+z$ -riktningen i området $z > z_0$, medan minus-tecknet, dvs. $\exp\{-ik_z z\}$, anger att källorna finns till höger och vågen propagerar i $-z$ -riktningen.

Den allmänna lösningen av det elektriska fältet blir

$$\mathbf{E}_{xy}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{\pm ik_z z} dk_x dk_y \quad (5.10)$$

där tecknet i exponenten beror på källornas placering i förhållande till planet $z =$ konstant. Detta är en allmän utveckling (integralrepresentation) av det elektriska fältet för harmoniska vågor, och den är inte begränsad till planvågsutbredning.

Det magnetiska fältet $\mathbf{H}_{xy}(\mathbf{r}, \omega)$ har en liknande integralrepresentation.

$$\mathbf{H}_{xy}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{\pm i k_z z} dk_x dk_y \quad (5.11)$$

där $\mathbf{H}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega)$ har komponenter som vi kan uttrycka i $\mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega)$ genom (5.8). Utvecklingskoefficienterna för z -komponenterna för fälten kan uttryckas i fältens tangentialkomponenter, se (5.4).

5.2.2 Reflektion mot plan skiljeyta

Låt $z = 0$ vara skiljeyta mellan två isotropa material, se figur 4.1 på sidan 73. Material 1, $z < 0$, innehåller källorna och karakteriseras av parametrarna ϵ_1 och μ_1 . Motsvarande materialparametrar i material 2, $z > 0$, betecknas ϵ_2 och μ_2 . Material 1 eller 2 behöver inte vara förlustfria, men i allmänhet har material 1 små förluster så att fälten från källorna kan propagera till skiljeytan.

Källorna i material 1 genererar ett infallande fält. De är lokaliserade i volymen $z < z_0 < 0$. I området mellan källorna och skiljeytan, $z_0 < z < 0$, antar vi att det infallande fältet kan representeras av

$$\mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{i k_{1z} z} dk_x dk_y \quad z_0 < z < 0$$

där

$$k_{1z} = (k_1^2 - k_t^2)^{1/2} \quad k_1 = \frac{\omega}{c_0} (\epsilon_1 \mu_1)^{1/2}$$

Notera plustecknet i exponenten av $\exp(i k_{1z} z)$, vilket motiveras av att källorna ligger till vänster om observationspunkten z .

Motsvarande magnetiska fälts utvecklingskomponenter är

$$\eta_0 \mathbf{H}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega) = \mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega)$$

där admittansdyaden $\mathbf{Y}_1$ är

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{c_0}{\mu_1 k_{1z} \omega} (k_1^2 \mathbf{J} + k_t^2 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}) = \frac{c_0}{\mu_1 k_{1z} \omega} (k_1^2 \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} - k_{1z}^2 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp})$$

Närvaron av skiljeytan ger upphov till ett reflekterat fält $\mathbf{E}_{xy}^r$, vars källor ligger till höger om $z = 0$. Vi representerar detta fält med en Fourierutveckling där vi pga. källornas placering väljer moden med $\exp(-i k_{1z} z)$.

$$\mathbf{E}_{xy}^r(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{xy}^r(\mathbf{k}_t, \omega) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{-i k_{1z} z} dk_x dk_y \quad z < 0$$

Motsvarande magnetiska fälts utvecklingskomponenter ges av

$$\eta_0 \mathbf{H}_{xy}^r = -\mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{E}_{xy}^r$$

Notera minus-tecknet i detta uttryck pga. att z -beroendet för det reflekterade fältet är $\exp(-ik_{1z}z)$.

I material 1, $z_0 < z < 0$, är det elektriska fältet summan av dessa båda fält.

$$\mathbf{E}_{1xy}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{E}_{xy}^r(\mathbf{r}, \omega) \quad z_0 < z < 0$$

Det totala fältet på ytan $z = 0$ i material 1 blir

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{1xy}(z = 0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega) + \mathbf{E}_{xy}^r(\mathbf{k}_t, \omega)) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dk_x dk_y \\ \mathbf{H}_{1xy}(z = 0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{H}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega) + \mathbf{H}_{xy}^r(\mathbf{k}_t, \omega)) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dk_x dk_y \end{cases}$$

I material 2, $z > 0$, ansätter vi ett transmitterat fält $\mathbf{E}^t$.

$$\mathbf{E}_{xy}^t(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{xy}^t(\mathbf{k}_t, \omega) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{ik_{2z}z} dk_x dk_y$$

där

$$k_{2z} = (k_2^2 - k_t^2)^{1/2} \quad k_2 = \frac{\omega}{c_0} (\epsilon_2 \mu_2)^{1/2}$$

Motsvarande magnetiska fälts utvecklingskomponenter är

$$\eta_0 \mathbf{H}_{xy}^t = \mathbf{Y}_2 \cdot \mathbf{E}_{xy}^t$$

där admittansdyaden $\mathbf{Y}_2$ är

$$\mathbf{Y}_2 = \frac{c_0}{\mu_2 k_{2z} \omega} (k_2^2 \mathbf{J} + k_t^2 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}) = \frac{c_0}{\mu_2 k_{2z} \omega} (k_2^2 \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} - k_{2z}^2 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp})$$

Det totala fältet på ytan $z = 0$ i material 2 blir

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{2xy}(z = 0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{xy}^t(\mathbf{k}_t, \omega) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dk_x dk_y \\ \mathbf{H}_{2xy}(z = 0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_{xy}^t(\mathbf{k}_t, \omega) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dk_x dk_y \end{cases}$$

Kontinuitet av det elektriska och magnetiska fältens tangentialkomponenter över skiljeytan ger följande ekvationssystem för Fourierkomponenterna av fältet på skiljeytan $z = 0$:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega) + \mathbf{E}_{xy}^r(\mathbf{k}_t, \omega) = \mathbf{E}_{xy}^t(\mathbf{k}_t, \omega) \\ \mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega) - \mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{E}_{xy}^r(\mathbf{k}_t, \omega) = \mathbf{Y}_2 \cdot \mathbf{E}_{xy}^t(\mathbf{k}_t, \omega) \end{cases}$$

med lösning

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{xy}^r(\mathbf{k}_t, \omega) = \mathbf{r}(k_t, \omega) \cdot \mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega) \\ \mathbf{E}_{xy}^t(\mathbf{k}_t, \omega) = \mathbf{t}(k_t, \omega) \cdot \mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega) \end{cases}$$

där reflektions- och transmissionsdyaderna ges av¹

$$\begin{cases} \mathbf{r} = (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2)^{-1} \cdot (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2) \\ \mathbf{t} = \mathbf{r} + \mathbf{I} \end{cases}$$

Koordinatrepresentationen i cylinderkoordinater, $\{\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}, \hat{\mathbf{e}}_{\perp}\}$, blir

$$\begin{aligned} [\mathbf{r}](k_t, \omega) &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_{1z}}{\mu_1} - \frac{k_{2z}}{\mu_2} \\ \frac{k_1^2}{\mu_1 k_{1z}} + \frac{k_2^2}{\mu_2 k_{2z}} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_{1z}}{\mu_1} + \frac{k_{2z}}{\mu_2} \\ \frac{k_1^2}{\mu_1 k_{1z}} - \frac{k_2^2}{\mu_2 k_{2z}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_{\parallel} & 0 \\ 0 & r_{\perp} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

och

$$[\mathbf{t}](k_t, \omega) = \begin{pmatrix} t_{\parallel} & 0 \\ 0 & t_{\perp} \end{pmatrix}$$

där de explicita uttrycken för $r_{\parallel}$, $r_{\perp}$, $t_{\parallel}$ och $t_{\perp}$ ges av

$$\begin{cases} r_{\parallel}(k_t, \omega) = \frac{1 - p_{\parallel}(k_t, \omega)}{1 + p_{\parallel}(k_t, \omega)} \\ r_{\perp}(k_t, \omega) = \frac{1 - p_{\perp}(k_t, \omega)}{1 + p_{\perp}(k_t, \omega)} \end{cases} \quad \begin{cases} t_{\parallel}(k_t, \omega) = \frac{2}{1 + p_{\parallel}(k_t, \omega)} \\ t_{\perp}(k_t, \omega) = \frac{2}{1 + p_{\perp}(k_t, \omega)} \end{cases} \quad (5.12)$$

där

$$\begin{cases} p_{\parallel}(k_t, \omega) = \frac{\epsilon_2 k_{1z}}{\epsilon_1 k_{2z}} \\ p_{\perp}(k_t, \omega) = \frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_{1z}} \end{cases}$$

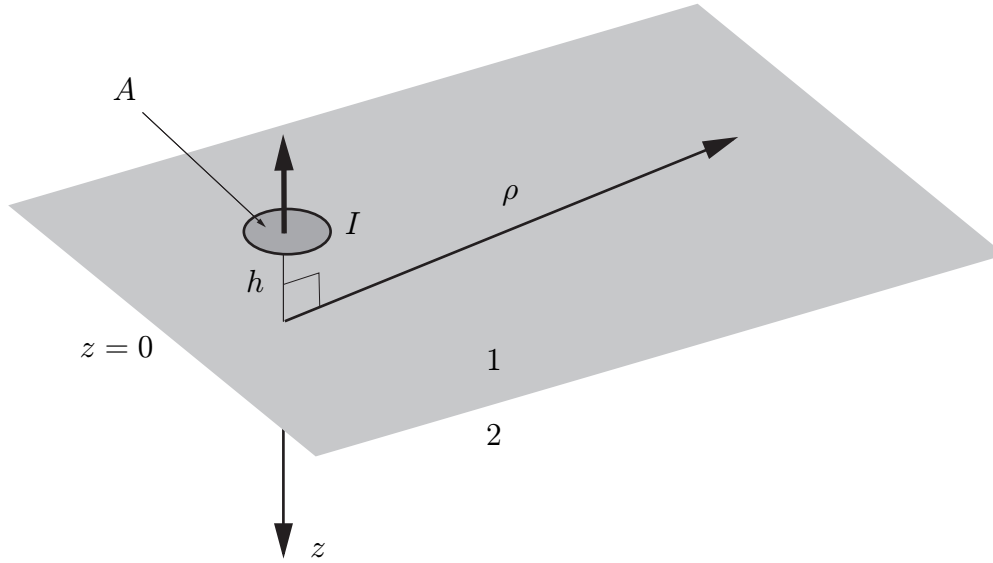
Detta är Fresnels reflektionskoefficienter.² Notera att matriserna $[\mathbf{r}]$ och $[\mathbf{t}]$ är diagonala i cylinderkoordinatrepresentationen. Detta är inte fallet om vi representerar $[\mathbf{r}]$ och $[\mathbf{t}]$ i x - y -systemet. Vår representation i cylindriska koordinater ger de enklaste slututtrycken på reflektions- och transmissionskoefficienterna.

¹Formen på de ingående dyaderna är

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (a\hat{\mathbf{e}}_{\perp}\hat{\mathbf{e}}_{\parallel} + b\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}\hat{\mathbf{e}}_{\perp})^{-1} \cdot (c\hat{\mathbf{e}}_{\perp}\hat{\mathbf{e}}_{\parallel} + d\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}\hat{\mathbf{e}}_{\perp}) \\ &= \left(\frac{1}{b}\hat{\mathbf{e}}_{\perp}\hat{\mathbf{e}}_{\parallel} + \frac{1}{a}\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}\hat{\mathbf{e}}_{\perp}\right) \cdot (c\hat{\mathbf{e}}_{\perp}\hat{\mathbf{e}}_{\parallel} + d\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}\hat{\mathbf{e}}_{\perp}) = \frac{c}{a}\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}\hat{\mathbf{e}}_{\parallel} + \frac{d}{b}\hat{\mathbf{e}}_{\perp}\hat{\mathbf{e}}_{\perp} \end{aligned}$$

dvs. framställningen är diagonal i basen $\{\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}, \hat{\mathbf{e}}_{\perp}\}$.

²Augustin Jean Fresnel (1788–1827), fransk fysiker.



Figur 5.2: Vertikal magnetisk dipol placerad på skiljeytan mellan två isotropa material med identiska magnetiska egenskaper $\mu_1 = \mu_2$. Antennen, vars magnetiska dipolmoment är m , har arean A och strömstyrkan I .

Fresnels reflektionskoefficienter känns kanske lättare igen om vi definierar en "infallsvinkel" θ_i och en "transmissionsvinkel" θ_t definierade av

$$\begin{cases} \cos \theta_i = \frac{k_{1z}}{k_1} \\ \cos \theta_t = \frac{k_{2z}}{k_2} \end{cases}$$

Vinklarna θ_i och θ_t är i allmänhet komplexa tal och alltså generaliseringar av begreppen infalls- och transmissionsvinkel. Alternativa uttryck på reflektionskoefficienterna i dessa vinklar är

$$\begin{cases} r_{\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \\ r_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \end{cases}$$

där $\eta_1 = (\mu_1/\epsilon_1)^{1/2}$ och $\eta_2 = (\mu_2/\epsilon_2)^{1/2}$ är respektive materials relativa vågimpedans.

Exempel 5.1

I detta exempel illustrerar vi analysen ovan genom att beräkna fältet från en magnetisk dipol ovan en isotrop halvrymd, se figur 5.2. Tillämpningarna på detta exempel finner vi speciellt i geofysiska problemställningar. Den magnetiska dipolen antar vi är placerad i material 1, och vidare att materialen 1 och 2 har identiska magnetiska egenskaper, $\mu_1 = \mu_2$. Detta exempel är en viktig modell för vågutbredning av radiovågor över en mark- eller vattenyta.

Det elektriska fältet från en magnetisk dipol i origo, med magnetiskt dipolmoment $\mathbf{m} = -\hat{z}m$ (dipolen med styrka m och är riktad längs negativa $\hat{z}$ -riktningen), i ett homogent

material 1 (utan närvaro av skiljeyta) är [8, sidan 605–607]

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, \omega) = -\hat{\phi}\omega k_1\mu_0\mu_1 m \frac{e^{ik_1 r}}{4\pi r} \left(1 + \frac{i}{k_1 r}\right) \sin\theta = -i\omega\mu_0\mu_1 m \nabla \times \left(\hat{\mathbf{z}} \frac{e^{ik_1 r}}{4\pi r}\right)$$

Vinkeln θ är vinkeln mellan $\hat{\mathbf{z}}$ och observationspunkten $\mathbf{r}$. En magnetisk dipol kan realiseras som en plan, sluten slinga med strömstyrka I . Dipolstyrkan m , strömstyrkan I och arean A på antennen är relaterade till varann.

$$m = IA$$

Fouriertransformerar vi det elektriska fältet med avseende på dess x - och y -variabler och dessutom identifierar fältets x - och y -komponenter får vi (detaljer överlämnas till läsaren³)

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega) e^{ik_t \rho \cos(\psi-\phi)} e^{ik_{1z}|z|} k_t dk_t d\psi$$

där

$$\mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega) = -\frac{i\omega\mu_0\mu_1 m k_t}{2k_{1z}} \hat{\mathbf{e}}_\perp$$

Vi låter den elektriska dipolen vara placerad i punkten $(0, 0, -h)$, dvs. på höjden $h \geq 0$ ovanför skiljeytan mellan de två isotropa materialen, se figur 5.2. Det infallande fältet från antennen i $(0, 0, -h)$ får vi genom att låta $z \rightarrow z + h$ i uttrycket för dipolfältet ovan, dvs.

$$\mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega) e^{ik_t \rho \cos(\psi-\phi)} e^{ik_{1z}|z+h|} k_t dk_t d\psi$$

Det infallande fältet på skiljeytan blir:

$$\mathbf{E}_{xy}^i(z=0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega) e^{ik_t \rho \cos(\psi-\phi)} e^{ik_{1z}h} k_t dk_t d\psi$$

Med hjälp av analysen i detta avsnitt, blir det totala elektriska fältet i material 1 (endast $r_\perp$ lämnar bidrag till det reflekterade fältet eftersom $\mathbf{E}_{xy}^i$ endast har en $\perp$ -komponent⁴)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{1xy}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty & \left(e^{ik_{1z}|z+h|} + r_\perp(\mathbf{k}_t, \omega) e^{-ik_{1z}(z-h)} \right) \\ & \times \mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega) e^{ik_t \rho \cos(\psi-\phi)} k_t dk_t d\psi \quad z \leq 0 \end{aligned}$$

För specialfallet då antennen befinner sig på skiljeytan, $h = 0$, skriver vi ut det elektriska fältet ovan skiljeytan, $z \leq 0$, mer explicit.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{1xy}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{i\omega\mu_0\mu_1 m}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty & \left(1 + \frac{k_{1z} - k_{2z}}{k_{1z} + k_{2z}} \right) e^{ik_t \rho \cos(\psi-\phi)} e^{-ik_{1z}z} \hat{\mathbf{e}}_\perp \frac{k_t^2}{k_{1z}} dk_t d\psi \\ = \hat{\phi} \frac{\omega\mu_0\mu_1 m}{2\pi} \int_0^\infty & J_1(k_t \rho) e^{-ik_{1z}z} \frac{k_t^2 dk_t}{k_{1z} + k_{2z}} \quad z \leq 0 \end{aligned}$$

³En representation på en sfärisk våg som är användbar i detta sammanhang är (grenen på kvadratroten väljs så att imaginärdelen är icke-negativ)

$$\frac{e^{ikr}}{4\pi r} = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty J_0(k_t \rho) e^{i(k^2 - k_t^2)^{1/2}|z|} \frac{k_t dk_t}{(k^2 - k_t^2)^{1/2}}$$

⁴Notera att det infallande fältet skall evalueras på skiljeytan för att resultaten i detta avsnitt skall ge rätt uttryck på det reflekterade fältet.

där vi använt oss av en integralrepresentation av Besselfunktionen $J_1(z)$, se (A.2) på sidan 167 i appendix A.

$$\frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos(\psi-\phi)} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} d\psi = J_1(z) \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$$

Detta är det fullständiga uttrycket på det elektriska fältet i material 1 då antennen befinner sig på skiljeytan. Den vertikala komponenten av det magnetiska fältet, H_{1z} , då antennen befinner sig på skiljeytan, ges av (det magnetiska fältet har även en $\hat{\rho}$ -komponent, som ej ges här)

$$H_{1z}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{im}{2\pi} \int_0^\infty J_0(k_t \rho) e^{-ik_{1z}z} \frac{k_t^3 dk_t}{k_{1z} + k_{2z}} \quad z \leq 0$$

vilket inses genom att använda (5.4) och integralrepresentationen av $J_0(z)$.

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos(\psi-\phi)} d\psi$$

Man kan explicit beräkna de återstående integralerna då även observationspunkten ligger på skiljeytan, $z = 0$. Vi ger här resultatet från en sådan beräkning utan några detaljer, se även övning 5.1.

$$\begin{cases} E_{1\phi}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{2i\omega\mu_0\mu_1 m}{k_1^2 - k_2^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{e^{ik_1\rho}}{4\pi\rho} - \frac{e^{ik_2\rho}}{4\pi\rho} \right) \right] \\ H_{1z}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{2m}{k_1^2 - k_2^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{e^{ik_1\rho}}{4\pi\rho} - \frac{e^{ik_2\rho}}{4\pi\rho} \right) \right] \right\} \end{cases} \quad z = 0 \quad (5.13)$$

Det dominerande bidraget till fältet på markytan långt från antennen, $\rho \rightarrow \infty$ blir

$$\begin{cases} E_{1\phi}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{i\omega\mu_0\mu_1 m}{2\pi (k_1^2 - k_2^2) \rho^2} (k_1^2 e^{ik_1\rho} - k_2^2 e^{ik_2\rho}) \\ H_{1z}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{im}{2\pi (k_1^2 - k_2^2) \rho^2} (k_1^3 e^{ik_1\rho} - k_2^3 e^{ik_2\rho}) \end{cases} \quad z = 0$$

Termerna inom parentes i dessa uttryck ger upphov till interferensmönster (för reella k_1 och k_2 blir perioden för detta interferensmönster $2\pi/|k_1 - k_2|$). ■

5.2.3 Brewster vinklar

Vi undersöker nu för vilka värden på k_t som det infallande fältet ger ett reflekterat fält som är noll. För att detta skall inträffa krävs att

$$\mathbf{r}(k_t, \omega) \cdot \mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega) = \mathbf{0}$$

eller att $\mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega)$ är en egenvektor till reflektionsmatrisen med egenvärde noll. Ett nödvändigt villkor för detta är, se (5.12)

$$\det[\mathbf{r}](k_t, \omega) = 0$$

vilket medför

$$\epsilon_1 k_{2z} = \epsilon_2 k_{1z} \quad (\parallel\text{-fallet}) \quad \text{respektive} \quad \mu_1 k_{2z} = \mu_2 k_{1z} \quad (\perp\text{-fallet})$$

Dessa samband kan efter kvadrering skrivas som

$$\epsilon_1^2 (k_2^2 - k_t^2) = \epsilon_2^2 (k_1^2 - k_t^2) \quad \text{respektive} \quad \mu_2^2 (k_1^2 - k_t^2) = \mu_1^2 (k_2^2 - k_t^2)$$

Löser vi ut k_t får vi

$$k_t^2 = \frac{\omega^2 \epsilon_1 \epsilon_2 (\epsilon_1 \mu_2 - \epsilon_2 \mu_1)}{c_0^2 (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)} \quad \text{respektive} \quad k_t^2 = \frac{\omega^2 \mu_1 \mu_2 (\epsilon_2 \mu_1 - \epsilon_1 \mu_2)}{c_0^2 (\mu_1^2 - \mu_2^2)}$$

För material med identiska magnetiska egenskaper $\mu_1 = \mu_2$ gäller

$$k_t^2 = \frac{\omega^2 \mu_1}{c_0^2} \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

för den första ekvationen medan den andra saknar lösning. Vi kan också uttrycka detta samband i "infallsvinkeln" θ_i .

$$\tan^2 \theta_i = \frac{k_1^2 - k_{1z}^2}{k_{1z}^2} = \frac{k_t^2}{k_1^2 - k_t^2} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 (\epsilon_1 + \epsilon_2) - \epsilon_1 \epsilon_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

5.2.4 Reflektion och transmission mot ändlig platta

I fallet med en platta av ändlig tjocklek blir analysen mycket analog den i avsnitt 5.2.2. Geometrin visas i figur 4.2 på sidan 78.

I material 1, till höger om källorna, $z_0 < z < 0$, representerar vi fälten som tidigare med en summa av ett infallande och ett reflekterat fält.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{1xy}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{ik_{1z}z} dk_x dk_y \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{xy}^r(\mathbf{k}_t, \omega) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{-ik_{1z}z} dk_x dk_y \quad z_0 < z < 0 \end{aligned}$$

där

$$k_{1z} = (k_1^2 - k_t^2)^{1/2} \quad k_1 = \frac{\omega}{c_0} (\epsilon_1 \mu_1)^{1/2}$$

Motsvarande magnetiska fälts utvecklingskomponenter är, se (5.8)

$$\begin{aligned} \eta_0 \mathbf{H}_{xy}^i &= \mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{E}_{xy}^i \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}^r &= -\mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{E}_{xy}^r \end{aligned}$$

med

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{c_0}{\mu_1 k_{1z} \omega} (k_1^2 \mathbf{J} + k_t^2 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}) = \frac{c_0}{\mu_1 k_{1z} \omega} (k_1^2 \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} - k_{1z}^2 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp})$$

Det totala fältet på ytan $z = 0$ i material 1 blir

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{1xy}(z = 0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega) + \mathbf{E}_{xy}^r(\mathbf{k}_t, \omega)) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dk_x dk_y \\ \mathbf{H}_{1xy}(z = 0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{H}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega) + \mathbf{H}_{xy}^r(\mathbf{k}_t, \omega)) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dk_x dk_y \end{cases}$$

I material 2, $0 < z < d$, ansätter vi ett fält som består av två delar; en del som propagerar i $+z$ -riktningen och en del som propagerar i $-z$ -riktningen, pga. att vi har ytterligare en skiljeyta, $z = d$, som ger reflektion, se figur 4.2.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{2xy}(\mathbf{r}, \omega) = & \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{xy}^+(\mathbf{k}_t, \omega) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{ik_{2z}z} dk_x dk_y \\ & + \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{xy}^-(\mathbf{k}_t, \omega) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{-ik_{2z}z} dk_x dk_y \end{aligned}$$

där

$$k_{2z} = (k_2^2 - k_t^2)^{1/2} \quad k_2 = \frac{\omega}{c_0} (\epsilon_2 \mu_2)^{1/2}$$

Motsvarande magnetiska fälts utvecklingskomponenter är

$$\eta_0 \mathbf{H}_{xy}^{\pm} = \pm \mathbf{Y}_2 \cdot \mathbf{E}_{xy}^{\pm}$$

där

$$\mathbf{Y}_2 = \frac{c_0}{\mu_2 k_{2z} \omega} (k_2^2 \mathbf{J} + k_t^2 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}) = \frac{c_0}{\mu_2 k_{2z} \omega} (k_2^2 \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} - k_{2z}^2 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp})$$

Det totala fältet på ytan $z = 0$ i material 2 blir

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{2xy}(z = 0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{E}_{xy}^+(\mathbf{k}_t, \omega) + \mathbf{E}_{xy}^-(\mathbf{k}_t, \omega)) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dk_x dk_y \\ \mathbf{H}_{2xy}(z = 0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{H}_{xy}^+(\mathbf{k}_t, \omega) + \mathbf{H}_{xy}^-(\mathbf{k}_t, \omega)) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dk_x dk_y \end{cases}$$

och på ytan $z = d$ i material 2 blir fälten

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{2xy}(z = d) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{E}_{xy}^+(\mathbf{k}_t, \omega) e^{ik_{2z}d} \\ \quad + \mathbf{E}_{xy}^-(\mathbf{k}_t, \omega) e^{-ik_{2z}d}) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dk_x dk_y \\ \mathbf{H}_{2xy}(z = d) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{H}_{xy}^+(\mathbf{k}_t, \omega) e^{ik_{2z}d} \\ \quad + \mathbf{H}_{xy}^-(\mathbf{k}_t, \omega) e^{-ik_{2z}d}) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dk_x dk_y \end{cases}$$

I material 3, $z > d$, ansätter vi ett transmitterat fält $\mathbf{E}^t$, som propagerar i $+z$ -riktningen.

$$\mathbf{E}_{xy}^t(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{xy}^t(\mathbf{k}_t, \omega) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{ik_{3z}z} dk_x dk_y$$

där

$$k_{3z} = (k_3^2 - k_t^2)^{1/2} \quad k_3 = \frac{\omega}{c_0} (\epsilon_3 \mu_3)^{1/2}$$

Motsvarande magnetiska fälts utvecklingskomponenter är

$$\eta_0 \mathbf{H}_{xy}^t = \mathbf{Y}_3 \cdot \mathbf{E}_{xy}^t$$

där

$$\mathbf{Y}_3 = \frac{c_0}{\mu_3 k_{3z} \omega} (k_3^2 \mathbf{J} + k_t^2 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}) = \frac{c_0}{\mu_3 k_{3z} \omega} (k_3^2 \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} - k_{3z}^2 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp})$$

Det totala fältet på ytan $z = d$ i material 3 blir

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{3xy}(z = d) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{xy}^t(\mathbf{k}_t, \omega) e^{ik_{3z}d} e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dk_x dk_y \\ \mathbf{H}_{3xy}(z = d) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_{xy}^t(\mathbf{k}_t, \omega) e^{ik_{3z}d} e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dk_x dk_y \end{cases}$$

Kontinuitet av de elektriska och magnetiska fältens tangentialkomponenter på skiljeytorna $z = 0$ och $z = d$ ger följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{xy}^i + \mathbf{E}_{xy}^r = \mathbf{E}_{xy}^+ + \mathbf{E}_{xy}^- \\ \mathbf{Y}_1 \cdot (\mathbf{E}_{xy}^i - \mathbf{E}_{xy}^r) = \mathbf{Y}_2 \cdot (\mathbf{E}_{xy}^+ - \mathbf{E}_{xy}^-) \\ \mathbf{E}_{xy}^+ e^{ik_{2z}d} + \mathbf{E}_{xy}^- e^{-ik_{2z}d} = \mathbf{E}_{xy}^t e^{ik_{3z}d} \\ \mathbf{Y}_2 \cdot (\mathbf{E}_{xy}^+ e^{ik_{2z}d} - \mathbf{E}_{xy}^- e^{-ik_{2z}d}) = \mathbf{Y}_3 \cdot \mathbf{E}_{xy}^t e^{ik_{3z}d} \end{cases}$$

Vi eliminerar fälten $\mathbf{E}_{xy}^{\pm}$ från dessa ekvationer. Detta leder till

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{xy}^r(\mathbf{k}_t, \omega) = \mathbf{r}(\mathbf{k}_t, \omega) \cdot \mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega) \\ \mathbf{E}_{xy}^t(\mathbf{k}_t, \omega) = \mathbf{t}(\mathbf{k}_t, \omega) \cdot \mathbf{E}_{xy}^i(\mathbf{k}_t, \omega) \end{cases}$$

där reflektions- och transmissionsdyaderna efter lite algebra ges av

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \{ \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \{ \mathbf{I} - 2\mathbf{Y}_3 \cdot (\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)^{-1} \} \cdot (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2) e^{2ik_{2z}d} \}^{-1} \\ \quad \cdot \{ \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2 + \{ \mathbf{I} - 2\mathbf{Y}_3 \cdot (\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)^{-1} \} \cdot (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2) e^{2ik_{2z}d} \} \\ \mathbf{t} = (\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)^{-1} \cdot \{ \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 - (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2) \cdot \mathbf{r} \} e^{i(k_{2z} - k_{3z})d} \end{cases}$$

eller omskrivet

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \{\mathbf{I} + \mathbf{a}^{-1} \cdot \mathbf{r}_d \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0 e^{2ik_{2z}d}\}^{-1} \cdot \{\mathbf{r}_0 + \mathbf{a}^{-1} \cdot \mathbf{r}_d \cdot \mathbf{a} e^{2ik_{2z}d}\} \\ \mathbf{t} = (\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)^{-1} \cdot \{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 - (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2) \cdot \mathbf{r}\} e^{i(k_{2z} - k_{3z})d} \end{cases} \quad (5.14)$$

där

$$\mathbf{a} = \mathbf{Y}_2^{-1} \cdot (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2)$$

och där de enskilda skiljeytornas reflektions- och transmissionsdyader för $z = 0$ och $z = d$ ges av

$$\begin{cases} \mathbf{r}_0 = (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2)^{-1} \cdot (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2) \\ \mathbf{t}_0 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{I} \end{cases}$$

respektive

$$\begin{cases} \mathbf{r}_d = (\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)^{-1} \cdot (\mathbf{Y}_2 - \mathbf{Y}_3) \\ \mathbf{t}_d = \mathbf{r}_d + \mathbf{I} \end{cases}$$

Med de explicita koordinatrepresentationerna av $\mathbf{r}_0$ och $\mathbf{r}_d$ från avsnitt 5.2.2 samt koordinatrepresentationerna av $\mathbf{Y}_1$ och $\mathbf{Y}_2$ får reflektions- och transmissionskoefficienterna $\mathbf{r}$ och $\mathbf{t}$ i (5.14) följande representationer i $\{\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}, \hat{\mathbf{e}}_{\perp}\}$ -systemet:

$$\begin{cases} [\mathbf{r}] = \begin{pmatrix} r_{\parallel} & 0 \\ 0 & r_{\perp} \end{pmatrix} \\ [\mathbf{t}] = \begin{pmatrix} t_{\parallel} & 0 \\ 0 & t_{\perp} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.15)$$

där de explicita uttrycken för $r_{\parallel}$, $r_{\perp}$, $t_{\parallel}$ och $t_{\perp}$ ges av

$$\begin{cases} r_{\parallel}(k_t, \omega) = \frac{r_{0\parallel}(k_t, \omega) + r_{d\parallel}(k_t, \omega) e^{2ik_{2z}d}}{1 + r_{0\parallel}(k_t, \omega) r_{d\parallel}(k_t, \omega) e^{2ik_{2z}d}} \\ r_{\perp}(k_t, \omega) = \frac{r_{0\perp}(k_t, \omega) + r_{d\perp}(k_t, \omega) e^{2ik_{2z}d}}{1 + r_{0\perp}(k_t, \omega) r_{d\perp}(k_t, \omega) e^{2ik_{2z}d}} \\ t_{\parallel}(k_t, \omega) = \frac{(1 + r_{0\parallel}(k_t, \omega))(1 + r_{d\parallel}(k_t, \omega)) e^{i(k_{2z} - k_{3z})d}}{1 + r_{0\parallel}(k_t, \omega) r_{d\parallel}(k_t, \omega) e^{2ik_{2z}d}} \\ t_{\perp}(k_t, \omega) = \frac{(1 + r_{0\perp}(k_t, \omega))(1 + r_{d\perp}(k_t, \omega)) e^{i(k_{2z} - k_{3z})d}}{1 + r_{0\perp}(k_t, \omega) r_{d\perp}(k_t, \omega) e^{2ik_{2z}d}} \end{cases}$$

Reflektionskoefficienterna för de enskilda skiljeytorna $z = 0, d$ ges av, se (5.12)

$$\begin{cases} r_{0\parallel}(k_t, \omega) = \frac{1 - p_{0\parallel}(k_t, \omega)}{1 + p_{0\parallel}(k_t, \omega)} \\ r_{0\perp}(k_t, \omega) = \frac{1 - p_{0\perp}(k_t, \omega)}{1 + p_{0\perp}(k_t, \omega)} \end{cases} \quad \begin{cases} r_{d\parallel}(k_t, \omega) = \frac{1 - p_{d\parallel}(k_t, \omega)}{1 + p_{d\parallel}(k_t, \omega)} \\ r_{d\perp}(k_t, \omega) = \frac{1 - p_{d\perp}(k_t, \omega)}{1 + p_{d\perp}(k_t, \omega)} \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} p_{0\parallel}(k_t, \omega) = \frac{\epsilon_2 k_{1z}}{\epsilon_1 k_{2z}} \\ p_{0\perp}(k_t, \omega) = \frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_{1z}} \end{cases} \quad \begin{cases} p_{d\parallel}(k_t, \omega) = \frac{\epsilon_3 k_{2z}}{\epsilon_2 k_{3z}} \\ p_{d\perp}(k_t, \omega) = \frac{\mu_2 k_{3z}}{\mu_3 k_{2z}} \end{cases}$$

5.3 Par-axiala approximationen

Vi skall i detta avsnitt beräkna fältstyrkan och effekttransporten hos en speciell typ av vågor, s.k. strålknippen. Beräkningarna är approximativa och utnyttjar den s.k. par-axiala approximationen.

Vi har i avsnitt 5.2.1 beräknat den allmänna lösningen av det elektriska fältet i ett homogent isotropt material, se (5.10).

$$\mathbf{E}_{xy}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} e^{\pm ik_z(\omega)z} dk_x dk_y$$

där

$$\mathbf{k}_t = \hat{\mathbf{x}}k_x + \hat{\mathbf{y}}k_y \quad k_z(\omega) = (k^2(\omega) - k_t^2)^{1/2} \quad k^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c_0^2} \epsilon(\omega) \mu(\omega)$$

och där Ortsvektorn och avståndet till z -axeln är

$$\boldsymbol{\rho} = \hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Det magnetiska fältet får vi från (5.8) och (5.11). De elektriska och magnetiska fälten blir

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) e^{ik_x x + ik_y y \pm ik_z(\omega)z} dk_x dk_y \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(\mathbf{r}, \omega) = \pm \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Y}(\mathbf{k}_t, \omega) \cdot \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) e^{ik_x x + ik_y y \pm ik_z(\omega)z} dk_x dk_y \end{array} \right.$$

där $\mathbf{Y}$ i cylinderkoordinater har följande representation, se (5.9):

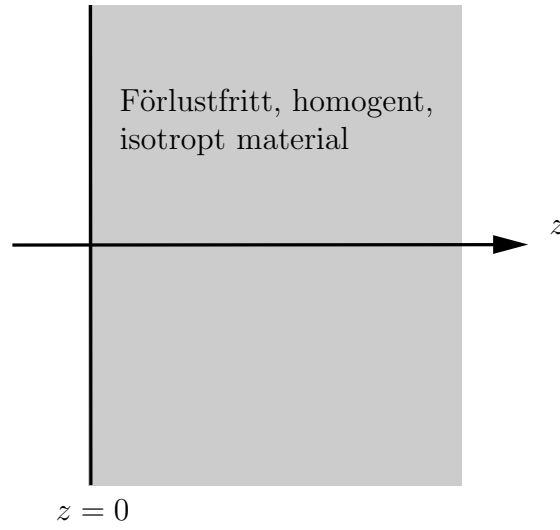
$$\mathbf{Y} = \frac{c_0}{\mu k_z \omega} (k^2 \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} - k_z^2 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp})$$

De longitudinella komponenterna, $\hat{\mathbf{z}}$ -komponenterna, ges av, se (5.4) och (5.8)

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z(\mathbf{r}, \omega) = \mp \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega)}{k_z(\omega)} e^{ik_x x + ik_y y \pm ik_z(\omega)z} dk_x dk_y \\ \eta_0 H_z(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c_0}{\mu(\omega) \omega} \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) k_t e^{ik_x x + ik_y y \pm ik_z(\omega)z} dk_x dk_y \end{array} \right.$$

där vi använt

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J} \cdot \mathbf{Y} = \frac{c_0}{\mu k_z \omega} \mathbf{J} \cdot (k^2 \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} - k_z^2 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}) = -\frac{c_0}{\mu k_z \omega} (k^2 \mathbf{I} - k_t^2 \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}) \\ \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{J} = \mathbf{k}_t \cdot (\hat{\mathbf{e}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} - \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}) = -k_t \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \end{array} \right.$$



Figur 5.3: Geometri för strålknippen.

samt att $\mathbf{k}_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_\perp = 0$.

Vi skall i detta avsnitt studera hur fälten propagerar i en förlustfri halvrymd, $z \geq 0$, se figur 5.3. Både $\epsilon(\omega)$ och $\mu(\omega)$ är därför reella storheter i detta avsnitt och vi kommer vidare att anta att de båda är positiva. Detta medför att vågtalet $k(\omega)$ är en reell storhet. Källorna till fälten antar vi finns i området $z < 0$, medan området $z \geq 0$ är källfritt. Vi väljer av denna anledning plustecknen i exponenten i fältens z -beroende, dvs.

$$\mathbf{E}_{xy}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) e^{ik_x x + ik_y y + ik_z(\omega)z} dk_x dk_y \quad z \geq 0$$

Speciellt gäller på ytan $z = 0$ att

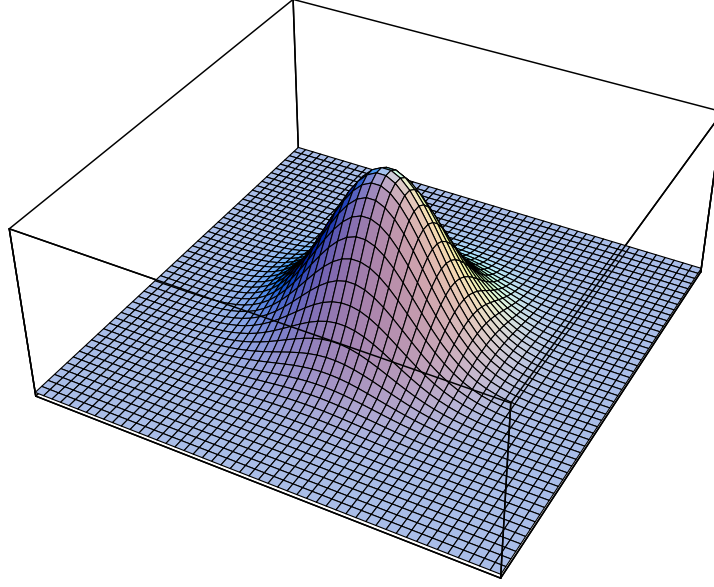
$$\mathbf{E}_{xy}(z = 0, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) e^{ik_x x + ik_y y} dk_x dk_y$$

Fouriertransformen av $\mathbf{E}_{xy}(z = 0, \omega)$ är med andra ord identisk med vektorfältet $\mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega)$.

Fälten, som specificeras av $\mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega)$, antar vi är på följande form:

$$\mathbf{E}_{xy}(z = 0, \omega) = \mathbf{A}(\omega) \exp \left\{ -\rho^2 / 2b^2(\omega) \right\}$$

där $\mathbf{A}(\omega)$ är en komplex vektor som ligger i x - y -planet. Detta fält är lokaliserat till en omgivning till origo. I x - y -planet är amplituden Gaussfördelad, se figur 5.4. Den reella storheten $b(\omega)$ kommer, som skall se, att vara ett mått på intensitetens bredd. Vi kommer nu att studera hur ett sådant fält propagerar i den högra halvrymden $z > 0$.



Figur 5.4: Strålnippets fältfördelning i planet $z = 0$.

Fouriertransformen av fältet $\mathbf{E}_{xy}(z = 0, \omega)$ beräknas lätt mha. integralen (α och β komplexa tal)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2 + \beta t} dt = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{\beta^2/4\alpha} \quad \text{Re } \alpha > 0 \quad (5.16)$$

Resultatet blir

$$\mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\omega) e^{-\rho^2/2b^2(\omega)} e^{-ik_x x - ik_y y} dx dy = 2\mathbf{A}(\omega) \pi b^2(\omega) e^{-(k_x^2 + k_y^2)b^2(\omega)/2}$$

Det elektriska fältet kan nu tecknas i området $z \geq 0$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\mathbf{A}(\omega)b^2(\omega)}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-(k_x^2 + k_y^2)b^2(\omega)/2} e^{ik_x x + ik_y y + ik_z(\omega)z} dk_x dk_y \\ E_z(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{b^2(\omega)\mathbf{A}(\omega)}{2\pi} \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{k}_t}{k_z(\omega)} e^{-(k_x^2 + k_y^2)b^2(\omega)/2} e^{ik_x x + ik_y y + ik_z(\omega)z} dk_x dk_y \end{cases} \quad (5.17)$$

Dessa uttryck på det elektriska fältet är exakta för denna excitation i planet $z = 0$. Inga approximationer har gjorts. Vi antar nu att det väsentliga bidraget till dessa integraler kommer ifrån en omgivning kring $\mathbf{k}_t = \mathbf{0}$. Detta är motiverat av att för stora värden på $|\mathbf{k}_t|$ är amplituden på Fouriertransformen mycket liten (proportionell mot $e^{-k_t^2 b^2/2}$). Följande approximation görs:

$$k_z = (k^2 - k_t^2)^{1/2} = k \left(1 - k_t^2/k^2\right)^{1/2} = k \left(1 - k_t^2/2k^2 + O((k_t/k)^4)\right) \approx k - k_t^2/2k$$

Detta är den s.k. par-axiala approximationen. Vi har tidigare sett att $\mathbf{k}_t = \mathbf{0}$ svarar mot en vågutbredning längs z -axeln. Vi förväntar oss således att denna approximation är god om vågutbredningen väsentligen är begränsad i en riktning, s.k. strålknippen (på engelska *beams*).

Vi kan nu, i den par-axiala approximationen, explicit beräkna de återstående integralerna i (5.17) ($k_t^2 = k_x^2 + k_y^2$).

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{A}(\omega) b^2(\omega) e^{ik(\omega)z} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-(k_x^2 + k_y^2)(b^2(\omega)/2 + iz/2k(\omega)) + ik_x x + ik_y y} dk_x dk_y \\ E_z(\mathbf{r}, \omega) \approx 0 \end{cases}$$

Med hjälp av (5.16) får vi

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{A}(\omega) \left(\frac{b(\omega)}{F(z, \omega)} \right)^2 e^{-\rho^2/2F^2(z, \omega) + ik(\omega)z} \\ E_z(\mathbf{r}, \omega) \approx 0 \end{cases}$$

där vi infört den komplexa funktionen $F(z, \omega)$

$$F^2(z, \omega) = b^2(\omega) + \frac{iz}{k(\omega)} = b^2(\omega) \left(1 + \frac{iz}{k(\omega)b^2(\omega)} \right)$$

Det är lämpligt att införa en enhetslös parameter ξ definierad genom

$$\xi(z, \omega) = \frac{z}{k(\omega)b^2(\omega)}$$

Denna parameter är reell genom antagandena i problemet. Den komplexa funktionen $F(z, \omega)$ kan nu skrivas

$$F^2(z, \omega) = b^2(\omega) (1 + i\xi(z, \omega))$$

För att beräkna det magnetiska fältet i den par-axiala approximationen undersöker vi k^2/k_z i admittansdyaden $\mathbf{Y}$.

$$\frac{k^2}{k_z} = k (1 - k_t^2/k^2)^{-1/2} = k (1 + k_t^2/2k^2 + O((k_t/k)^4)) \approx k + k_t^2/2k$$

Dyaden $\mathbf{Y}$ får därför i den par-axiala approximationen följande utseende:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \frac{c_0}{\mu k_z \omega} (k^2 \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} - k_z^2 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}) \\ &= \frac{c_0 k}{\mu \omega} \{ (1 + O((k_t/k)^2)) \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} - (1 + O((k_t/k)^2)) \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \} \\ &= \frac{c_0 k}{\mu \omega} \mathbf{J} (1 + O((k_t/k)^2)) \end{aligned}$$

dvs. dyaden $\mathbf{Y}$ är till ledande ordning i den par-axiala approximationen proportionell mot $\mathbf{J}$ —en rotation i x - y -planet av 90° . Vi får

$$\eta_0 \mathbf{H}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) \approx \frac{kc_0}{\mu\omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega)$$

vilket medför att

$$\begin{cases} \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\eta(\omega)} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{A}(\omega)}{\eta(\omega)} \left(\frac{b(\omega)}{F(z, \omega)} \right)^2 e^{-\rho^2/2F^2(z, \omega) + ik(\omega)z} \\ \eta_0 H_z(\mathbf{r}, \omega) \approx 0 \end{cases}$$

där den relativa vågimpedansen för materialet är $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$.

Vi övergår nu till att beräkna effekttransporten i området $z \geq 0$. Poyntings vektor $\langle \mathbf{S}(t) \rangle(z, \omega)$ beräknas

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}(t) \rangle(z, \omega) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, \omega) \} \\ &= \frac{1}{2\eta_0\eta(\omega)} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_{xy}(\mathbf{r}, \omega) \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{xy}^*(\mathbf{r}, \omega)) \} = \frac{\hat{\mathbf{z}}}{2\eta_0\eta(\omega)} |\mathbf{E}_{xy}(\mathbf{r}, \omega)|^2 \end{aligned}$$

Effekttransporten hos strålknippen blir proportionell mot

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_{xy}(\mathbf{r}, \omega)|^2 &= |\mathbf{A}(\omega)|^2 \left| \frac{b(\omega)}{F(z, \omega)} \right|^4 e^{-\rho^2 \operatorname{Re}(1/F^2(z, \omega))} \\ &= |\mathbf{A}(\omega)|^2 \frac{1}{1 + \xi^2(z, \omega)} e^{-\rho^2/b^2(\omega)(1+\xi^2(z, \omega))} \end{aligned}$$

Bredden⁵ på strålknippen ges av den reella funktionen $B(z, \omega)$, se figur 5.5

$$B(z, \omega) = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{Re}(1/F^2(z, \omega))}} = \sqrt{\frac{b^2(\omega)}{\operatorname{Re}[1/(1 + i\xi(z, \omega))]} = b(\omega) \sqrt{1 + \xi^2(z, \omega)}$$

eftersom $b(\omega)$ och $k(\omega)$ är reella storheter. För stora värden på z kan vi approximera funktionen $B(z, \omega)$.

$$B(z, \omega) = b(\omega) \frac{z}{k(\omega)b^2(\omega)} + O(1/z) \approx \frac{z}{k(\omega)b(\omega)} = b(\omega)\xi(z, \omega)$$

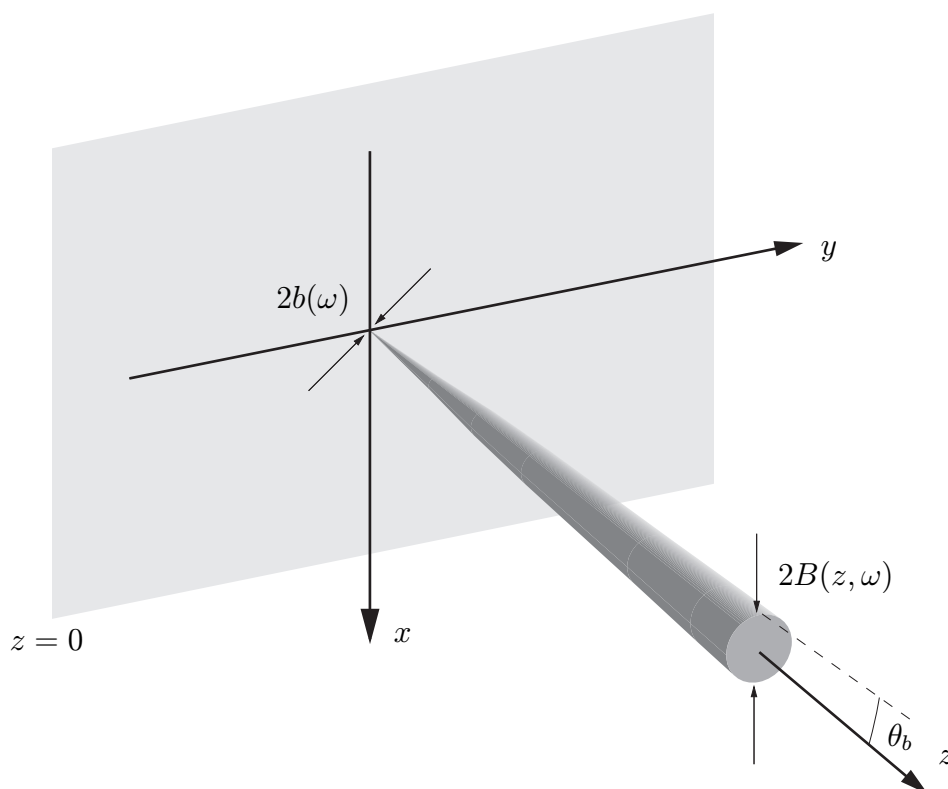
Effekttransporten hos strålknippen kan till slut skrivas som

$$|\mathbf{E}_{xy}(\mathbf{r}, \omega)|^2 = \frac{|\mathbf{A}(\omega)|^2}{1 + \xi^2(z, \omega)} e^{-\rho^2/B^2(z, \omega)}$$

Strålknippenets öppningsvinkel θ_b bestäms av

$$\tan \theta_b = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{B(z, \omega)}{z} = \frac{1}{k(\omega)b(\omega)}$$

⁵Bredden på strålknippen definierar vi som det transversella avstånd ρ , där **intensitetens** amplitud avtagit till $1/e$ av sitt maximala värde.



Figur 5.5: Strålnippets breddning $B(z, \omega)$ och öppningsvinkel θ_b . $b(\omega)$ är bredden i planet $z = 0$.

Vi noterar att ju smalare strålnippets bredd görs i planet $z = 0$ ju större blir öppningsvinkeln θ_b . Dessutom kan vi konstatera att strålnippet får smalare öppningsvinkeln θ_b ju högre frekvenser är, pga. att vågtalet i allmänhet växer med frekvensen ($k(\omega) = \omega\sqrt{\epsilon\mu}/c_0$).

Övningar till kapitel 5

***5.1** Visa van der Pols resultat från 1931.

$$\int_0^\infty J_0(k_t \rho) \frac{k_t dk_t}{(k_1^2 - k_t^2)^{1/2} + (k_2^2 - k_t^2)^{1/2}} = \frac{i}{k_1^2 - k_2^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{e^{ik_1 \rho}}{\rho} - \frac{e^{ik_2 \rho}}{\rho} \right)$$

Grenen på kvadratroten i detta uttryck väljs så att imaginärdelen är icke-negativ. Visa därefter resultatet i ekvation (5.13).

Ledning: Använd Sommerfelds resultat

$$\frac{e^{ikr}}{4\pi r} = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty J_0(k_t \rho) e^{i(k^2 - k_t^2)^{1/2} |z|} \frac{k_t dk_t}{(k^2 - k_t^2)^{1/2}}$$

- 5.2** Med en laser (ljusets våglängd $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$) vill man från jorden belysa ett cirkulärt område på månen. Områdets diameter (intensitetsbredd) är 500 m och avståndet till månen är $3.844 \cdot 10^8$ m. Hur stor måste strålknippets bredd vara på jorden för att åstadkomma denna belysning av månen?

Sammanfattning av kapitel 5

Integralrepresentation

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(z, \mathbf{k}_t, \omega) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dx dy \\
 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(z, \mathbf{k}_t, \omega) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dk_x dk_y \\
 E_{xy}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} E_{xy}(z, \mathbf{k}_t, \omega) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \boldsymbol{\rho}} dk_x dk_y \\
 \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} E_{xy}(z, \mathbf{k}_t, \omega) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(z, \mathbf{k}_t, \omega) \end{pmatrix} &= i \frac{\omega}{c_0} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1(\mathbf{k}_t, \omega) & \mathbf{W}_2(\mathbf{k}_t, \omega) \\ \mathbf{W}_3(\mathbf{k}_t, \omega) & \mathbf{W}_4(\mathbf{k}_t, \omega) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{xy}(z, \mathbf{k}_t, \omega) \\ \eta_0 \mathbf{H}_{xy}(z, \mathbf{k}_t, \omega) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Modlösningar, isotropa material

$$\begin{aligned}
 E_{xy}(z, \mathbf{k}_t, \omega) &= E_{xy}(\mathbf{k}_t, \omega) e^{\pm i k_z z} \\
 k_z &= (k^2 - k_t^2)^{1/2} \\
 k &= \frac{\omega}{c_0} (\epsilon \mu)^{1/2}
 \end{aligned}$$

Reflektion & transmission, isotropa material

$$\begin{aligned}
 r_{\parallel}(k_t, \omega) &= \frac{1 - p_{\parallel}(k_t, \omega)}{1 + p_{\parallel}(k_t, \omega)} & p_{\parallel}(k_t, \omega) &= \frac{\epsilon_2 k_{1z}}{\epsilon_1 k_{2z}} \\
 r_{\perp}(k_t, \omega) &= \frac{1 - p_{\perp}(k_t, \omega)}{1 + p_{\perp}(k_t, \omega)} & p_{\perp}(k_t, \omega) &= \frac{\mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_{1z}} \\
 t_{\parallel}(k_t, \omega) &= \frac{2}{1 + p_{\parallel}(k_t, \omega)} \\
 t_{\perp}(k_t, \omega) &= \frac{2}{1 + p_{\perp}(k_t, \omega)}
 \end{aligned}$$

Reflektion & transmission, isotrop platta

$$\begin{aligned}
 r_{\parallel} &= \frac{r_{0\parallel} + r_{d\parallel} e^{2ik_{2z}d}}{1 + r_{0\parallel} r_{d\parallel} e^{2ik_{2z}d}} \\
 r_{\perp} &= \frac{r_{0\perp} + r_{d\perp} e^{2ik_{2z}d}}{1 + r_{0\perp} r_{d\perp} e^{2ik_{2z}d}} \\
 t_{\parallel} &= \frac{(1 + r_{0\parallel})(1 + r_{d\parallel}) e^{i(k_{2z} - k_{3z})d}}{1 + r_{0\parallel} r_{d\parallel} e^{2ik_{2z}d}} \\
 t_{\perp} &= \frac{(1 + r_{0\perp})(1 + r_{d\perp}) e^{i(k_{2z} - k_{3z})d}}{1 + r_{0\perp} r_{d\perp} e^{2ik_{2z}d}}
 \end{aligned}$$

Strålnippen, intensitetsbredd

$$\begin{aligned}
 B(z, \omega) &= b(\omega) \sqrt{1 + \left(\frac{z}{k(\omega)b^2(\omega)} \right)^2} = b(\omega) \sqrt{1 + \xi^2(z, \omega)} \\
 \xi(z, \omega) &= \frac{z}{k(\omega)b^2(\omega)} \\
 \tan \theta_b &= \frac{1}{k(\omega)b(\omega)}
 \end{aligned}$$

Kapitel 6

Vågutbredning i inhomogena material

Vågutbredning i inhomogena material är, som vi skall se i detta kapitel, betydligt svårare att analysera än i homogena material. Endast ett fåtal mycket speciella fall med inhomogena material kan lösas analytiskt, varför man måste använda numeriska metoder för att lösa problemet i det allmänna fallet. Vi kommer i detta kapitel endast att behandla vågutbredning i inhomogena, isotropa material med infallande fält vars rumsberoende ej beror på x - eller y -koordinaterna, dvs. vinkelrätt infall.

6.1 Grundekvationer

Vi startar med Maxwells fältekvationer utan källterm, se (3.2) och (3.3) på sidan 37.

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) \end{cases}$$

Materialets konstitutiva relationer för ett isotropt material är

$$\begin{cases} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mu(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \end{cases}$$

där $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$ och $\mu(\mathbf{r}, \omega)$ är enhetslösa komplexvärda funktioner av rumskoordinaterna $\mathbf{r}$ och (vinkel-)frekvensen ω .

Med de konstitutiva relationernas hjälp kan vi nu eliminera $\mathbf{D}$ - och $\mathbf{B}$ -fälten från Maxwells fältekvationer. Resultatet blir

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i \frac{\omega}{c_0} \mu(\mathbf{r}, \omega) \eta_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \\ \eta_0 \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = -i \frac{\omega}{c_0} \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \end{cases}$$

I detta kapitel behandlas material som är inhomogena endast m.a.p. en rumskoordinat, som vi väljer till z -koordinaten. Vidare antagas att alla fält är oberoende

av koordinaterna x och y , dvs. vinkelrätt infall. Fältekvationerna förenklas med dessa antaganden. Med hjälp av $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\mathbf{z}} \times \frac{d}{dz} \mathbf{E}(z, \omega)$ får vi

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{z}} \times \frac{d}{dz} \mathbf{E}(z, \omega) = i \frac{\omega}{c_0} \mu(z, \omega) \eta_0 \mathbf{H}(z, \omega) \\ \eta_0 \hat{\mathbf{z}} \times \frac{d}{dz} \mathbf{H}(z, \omega) = -i \frac{\omega}{c_0} \epsilon(z, \omega) \mathbf{E}(z, \omega) \end{cases}$$

Dessa ekvationer ger omedelbart att både de elektriska och de magnetiska fälten saknar z -komponenter, dvs. de ligger orienterade i x - y -planet. Det är lämpligt att skriva om ekvationerna ovan mha. dyaden $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{I}$ (vi använder här också $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = -\mathbf{I}$, där $\mathbf{I}$ är enhetsdyaden i x - y -planet).

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \mathbf{E}(z, \omega) = -i \frac{\omega}{c_0} \mu(z, \omega) \eta_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}(z, \omega) \\ \frac{d}{dz} \eta_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}(z, \omega) = -i \frac{\omega}{c_0} \epsilon(z, \omega) \mathbf{E}(z, \omega) \end{cases}$$

eller i matrisform

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{E}(z, \omega) \\ \eta_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}(z, \omega) \end{pmatrix} = -i \frac{\omega}{c_0} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mu(z, \omega) \mathbf{I} \\ \epsilon(z, \omega) \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}(z, \omega) \\ \eta_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}(z, \omega) \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Denna ekvation anger hur fälten $\mathbf{E}(z, \omega)$ och $\mathbf{H}(z, \omega)$ är relaterade till varann i det inhomogena materialet. Notera att dessa ekvationer formellt är identiska med motsvarande ekvationerna i fallet med homogena material.

6.2 Våguppdelning

I de reflektionsproblem som behandlas senare i detta kapitel genereras alltid fälten i området $z < 0$, som antas vara vakuum.

Den infallande vågen (effekttransport i $+z$ -riktningen) reflekteras mot det inhomogena materialet i området $z > 0$ och ger upphov till en reflekterad våg (effekttransport i $-z$ -riktningen). Vi kan systematiskt lösa dessa reflektionsproblem om vi delar upp fälten m.a.p. vilken riktning effekttransporten sker. Detta leder till en våguppdelning av fälten. För att åstadkomma denna våguppdelning är det lämpligt att införa en linjär transformation av fälten $\mathbf{E}(z, \omega)$ och $\mathbf{H}(z, \omega)$.

Vi inför nu våguppdelningstransformationen. Två nya fält $\mathbf{F}^\pm$ definieras

$$\mathbf{F}^\pm(z, \omega) = \frac{1}{2} (\mathbf{E}(z, \omega) \mp \eta_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}(z, \omega))$$

eller i matrisform

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}^+(z, \omega) \\ \mathbf{F}^-(z, \omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}(z, \omega) \\ \eta_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}(z, \omega) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Eftersom de elektriska och magnetiska fälten, $\mathbf{E}(z, \omega)$ och $\mathbf{H}(z, \omega)$, är kontinuerliga¹ över en eventuell skiljeyta, $z = 0$, kommer de nya fälten $\mathbf{F}^\pm(z, \omega)$ också att vara kontinuerliga över eventuella skiljeytor.

Vi kan lösa ut de ursprungliga fälten $\mathbf{E}(z, \omega)$ och $\eta_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}(z, \omega)$ ur de nya $\mathbf{F}^\pm(z, \omega)$ om vi vill. Resultatet är

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(z, \omega) \\ \eta_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}(z, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{F}^+(z, \omega) \\ \mathbf{F}^-(z, \omega) \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Notera att fälten $\mathbf{F}^\pm$ inte är rena elektriska eller magnetiska fält utan en blandning av dessa båda fält. Vi kommer rätt och slätt att kalla dem elektromagnetiska fält.

Vi analyserar nu effekttransporten längs z -axeln och finner följande:

$$\langle \mathbf{S}(t) \rangle \cdot \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}(z, \omega) \times \mathbf{H}^*(z, \omega) \} \cdot \hat{\mathbf{z}} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}(z, \omega) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}^*(z, \omega) \}$$

Inför vi nu våguppdelningen (6.3), finner vi

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}(t) \rangle \cdot \hat{\mathbf{z}} &= -\frac{1}{2\eta_0} \operatorname{Re} \{ (\mathbf{F}^+(z, \omega) + \mathbf{F}^-(z, \omega)) \cdot (-\mathbf{F}^+(z, \omega) + \mathbf{F}^-(z, \omega))^* \} \\ &= \frac{1}{2\eta_0} \left\{ |\mathbf{F}^+(z, \omega)|^2 - |\mathbf{F}^-(z, \omega)|^2 \right\} \end{aligned}$$

eftersom $\operatorname{Re} \{ \mathbf{F}^+ \cdot (\mathbf{F}^-)^* - \mathbf{F}^- \cdot (\mathbf{F}^+)^* \} = 0$.

I denna nya representation har vi gjort en uppdelning av vågen i en del, $\mathbf{F}^+$, som transporterar effekt i $+z$ -riktningen, och en del, $\mathbf{F}^-$, som transporterar effekt i $-z$ -riktningen.

Den nya uppsättningen av fält, $\mathbf{F}^\pm$, uppfyller

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^+(z, \omega) \\ \mathbf{F}^-(z, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{I} & \beta \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \delta \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{F}^+(z, \omega) \\ \mathbf{F}^-(z, \omega) \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

Vi kallar detta ekvationssystem för dynamiken för fälten. Vi bestämmer lätt uttrycken på funktionerna α , β , γ och δ genom att använda definitionen på våguppdelningen (6.2), dess invers (6.3) och ekvation (6.1).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^+(z, \omega) \\ \mathbf{F}^-(z, \omega) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{E}(z, \omega) \\ \eta_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}(z, \omega) \end{pmatrix} \\ &= -i \frac{\omega}{2c_0} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mu(z, \omega) \mathbf{I} \\ \epsilon(z, \omega) \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}(z, \omega) \\ \eta_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}(z, \omega) \end{pmatrix} \\ &= -i \frac{\omega}{2c_0} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mu(z, \omega) \mathbf{I} \\ \epsilon(z, \omega) \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{F}^+(z, \omega) \\ \mathbf{F}^-(z, \omega) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

¹Fälten $\mathbf{E}(z, \omega)$ och $\mathbf{H}(z, \omega)$ är tangentiella fält.

Från detta uttryck får vi omedelbart

$$\begin{cases} \alpha(z, \omega) = i \frac{\omega}{2c_0} (\epsilon(z, \omega) + \mu(z, \omega)) \\ \beta(z, \omega) = i \frac{\omega}{2c_0} (\epsilon(z, \omega) - \mu(z, \omega)) \\ \gamma(z, \omega) = -\beta(z, \omega) \\ \delta(z, \omega) = -\alpha(z, \omega) \end{cases}$$

Ekvation (6.4) anger hur fälten $\mathbf{F}^\pm(z, \omega)$ förändras som funktion av z . Denna ekvation är ekvivalent med (6.1), som erhöles från Maxwells ekvationer, men den senare ekvationen är mer lämpad för analys av reflektions- och transmissionsproblem.

I vakuum är $\epsilon(z, \omega) = \mu(z, \omega) = 1$ och dynamiken, (6.4), förenklas till

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^+(z, \omega) \\ \mathbf{F}^-(z, \omega) \end{pmatrix} = i \frac{\omega}{c_0} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{F}^+(z, \omega) \\ \mathbf{F}^-(z, \omega) \end{pmatrix}$$

med lösning

$$\mathbf{F}^\pm(z, \omega) = \mathbf{F}^\pm(\omega) e^{\pm i\omega z/c_0}$$

vilket är analogt med det resultat vi erhöles i kapitel 4. Vågorna $\mathbf{F}^\pm(z, \omega)$ frikopplas därmed från varann i vakuum och går i $+z$ -, respektive $-z$ -riktningen. De nya fälten $\mathbf{F}^\pm(z, \omega)$ projicerar ut det infallande fältet $\mathbf{E}^i(z, \omega)$ (propagerar i $+z$ -riktningen) respektive det reflekterade fältet $\mathbf{E}^r(z, \omega)$ (propagerar i $-z$ -riktningen) i vakuum ur summan $\mathbf{E}(z, \omega) = \mathbf{E}^i(z, \omega) + \mathbf{E}^r(z, \omega)$.

6.3 Riccatis ekvation för reflektionskoefficienten

Vi analyserar nu reflektion mot en platta, $0 < z < d$, bestående av ett inhomogent isotropt material. Området $z < 0$ antas vara vakuum (utom i det område där källorna genereras), se figur 6.1. Området bakom plattan, $z > d$, antas vara ett homogent isotropt material med materialparametrar ϵ_b och μ_b .

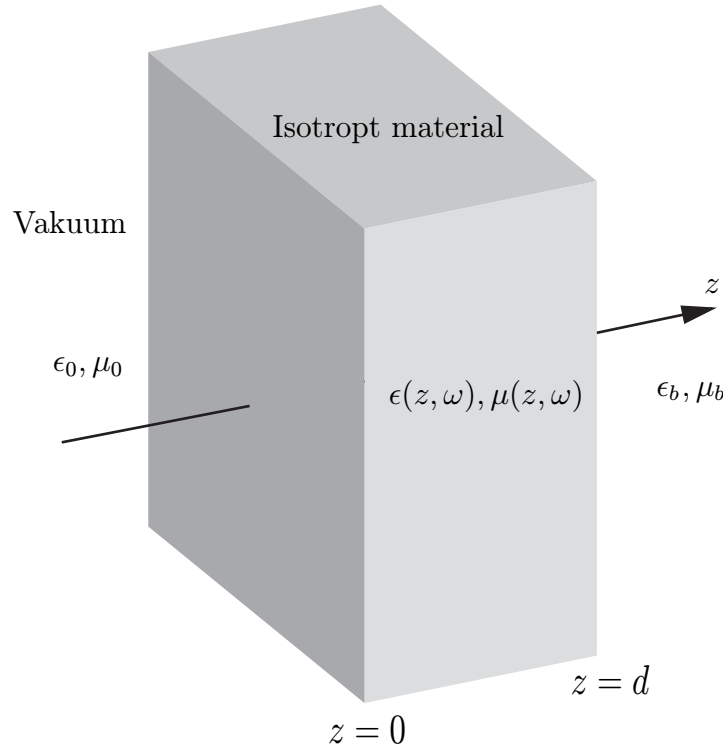
En infallande våg $\mathbf{F}^+(z, \omega)$ reflekteras mot det inhomogena materialet och ger upphov till en reflekterad våg $\mathbf{F}^-(z, \omega)$. Det (skalära) förhållandet mellan dessa fält, evaluerade på planet $z = 0$, är vår sökta reflektionskoefficient $r(\omega)$, dvs.

$$\mathbf{F}^-(z = 0, \omega) = r(\omega) \mathbf{F}^+(z = 0, \omega)$$

I vår analys i detta avsnitt behandlas ett mer generellt problem. Antag att vi istället för det fysikaliska materialet i området $z > 0$ har ett material trunkerat vid planet $z = \text{konstant}$. Detta trunkerade material består av det ursprungliga materialet till höger om z , medan det till vänster om z är vakuum. I figur 6.2 visas denna trunkering av dielektricitetsfunktionen $\epsilon(z, \omega)$. Permeabilitetsfunktionen $\mu(z, \omega)$ trunkeras på liknande sätt.

Eftersom $\mathbf{F}^\pm(z, \omega)$ svarar mot det infallande respektive reflekterade fältet mot det trunkerade materialet finner vi att det trunkerade materialets reflektionskoefficient $r(z, \omega)$ är

$$\mathbf{F}^-(z, \omega) = r(z, \omega) \mathbf{F}^+(z, \omega) \quad (6.5)$$



Figur 6.1: Geometri för reflektion och transmission mellan vakuum och ett inhomogent, isotropt material.

Reflektionskoefficienten $r(z, \omega)$ är här en funktion av djupet z . Denna storhet är reflektionskoefficient för ett material som blivit trunkerat vid z , se figur 6.2. Reflektionskoefficienten för det ursprungliga, otrunkerade materialet ges av $r(\omega) = r(0, \omega)$. Vårt mål är att beräkna denna storhet.

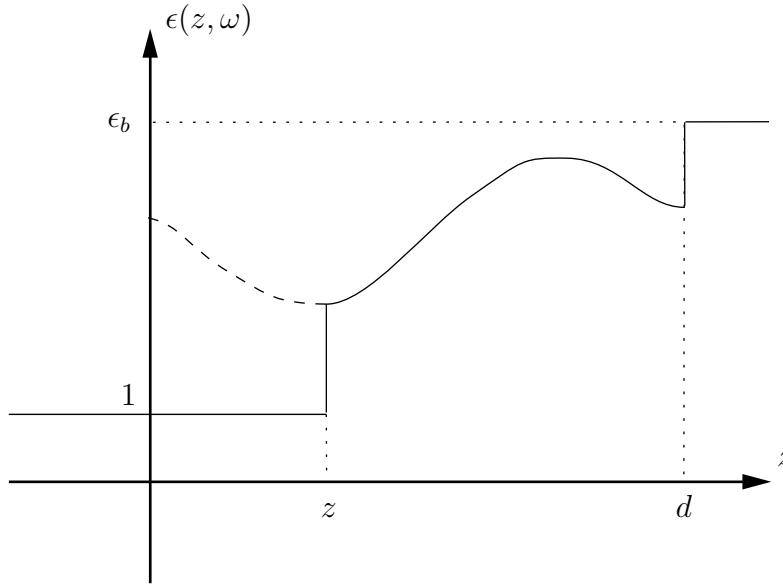
Vi härleder nu en ekvation för reflektionskoefficienten $r(z, \omega)$. Derivera höger led i (6.5) m.a.p. z och utnyttja (6.4). Vi får

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (r(z, \omega) \mathbf{F}^+(z, \omega)) &= \frac{dr(z, \omega)}{dz} \mathbf{F}^+(z, \omega) + r(z, \omega) \frac{d\mathbf{F}^+(z, \omega)}{dz} \\ &= \frac{dr(z, \omega)}{dz} \mathbf{F}^+(z, \omega) + r(z, \omega) (\alpha(z, \omega) \mathbf{F}^+(z, \omega) + \beta(z, \omega) \mathbf{F}^-(z, \omega)) \\ &= \frac{dr(z, \omega)}{dz} \mathbf{F}^+(z, \omega) + r(z, \omega) (\alpha(z, \omega) \mathbf{F}^+(z, \omega) + \beta(z, \omega) r(z, \omega) \mathbf{F}^+(z, \omega)) \end{aligned}$$

Å andra sidan kan vi med hjälp av (6.4) skriva om vänsterledet efter derivering m.a.p. z .

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{F}^-(z, \omega)}{dz} &= \gamma(z, \omega) \mathbf{F}^+(z, \omega) + \delta(z, \omega) \mathbf{F}^-(z, \omega) \\ &= \gamma(z, \omega) \mathbf{F}^+(z, \omega) + \delta(z, \omega) r(z, \omega) \mathbf{F}^+(z, \omega) \end{aligned}$$

Dessa båda uttryck, som är lika, skall gälla för godtyckliga infallande fält $\mathbf{F}^+(z, \omega)$.



Figur 6.2: Dielektricitetsfunktionen $\epsilon(z, \omega)$ för det trunkerade materialet. Den streckade linjen anger den del av materialet som har blivit trunkerat.

Ur denna likhet får vi följande Riccati-ekvation:

$$\frac{dr(z, \omega)}{dz} + r(z, \omega) [\alpha(z, \omega) - \delta(z, \omega) + \beta(z, \omega)r(z, \omega)] = \gamma(z, \omega)$$

eller explicit

$$\begin{aligned} -i \frac{2c_0}{\omega} \frac{dr(z, \omega)}{dz} + r(z, \omega) [2(\epsilon(z, \omega) + \mu(z, \omega)) + (\epsilon(z, \omega) - \mu(z, \omega))r(z, \omega)] \\ = \mu(z, \omega) - \epsilon(z, \omega) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Till denna Riccati-ekvation hör randvärdet

$$r(d, \omega) = \frac{\eta_b(\omega) - 1}{\eta_b(\omega) + 1} \quad (6.7)$$

Detta är den homogena bakgrundens reflektionskoefficient då materialet blivit trunkerat till $z = d$, se figur 6.2. Det homogena bakgrundsmaterialets relativa vågimpedans betecknas här $\eta_b(\omega)$.

$$\eta_b(\omega) = \left(\frac{\mu_b(\omega)}{\epsilon_b(\omega)} \right)^{1/2}$$

där $\epsilon_b(\omega)$ och $\mu_b(\omega)$ är det homogena bakgrundsmaterialets dielektricitets-, respektive permeabilitetsfunktion.

Den fysikaliska reflektionskoefficienten $r(\omega)$ till vårt ursprungliga problem är lösningen till (6.6) med randvillkoret (6.7) evaluerad i $z = 0$, dvs. $r(\omega) = r(0, \omega)$.

Exempel 6.1

Det homogena fallet— $\epsilon(z, \omega)$ och $\mu(z, \omega)$ oberoende av z —är ett specialfall som är enkelt att analysera. Vi antar vidare att materialet är halvoändligt, och i detta fall är reflektionskoefficienten oberoende av z , eftersom alla trunkerade material är identiska.

För det homogena, halvoändliga fallet, $\epsilon(z, \omega) = \epsilon(\omega)$ och $\mu(z, \omega) = \mu(\omega)$, gäller därför att

$$r(\omega) [2\epsilon(\omega) + 2\mu(\omega) + (\epsilon(\omega) - \mu(\omega))r(\omega)] = \mu(\omega) - \epsilon(\omega)$$

med lösningar

$$r(\omega) = \frac{\left((\mu(\omega))^{1/2} \pm (\epsilon(\omega))^{1/2}\right)^2}{\mu(\omega) - \epsilon(\omega)} = \frac{\eta(\omega) \pm 1}{\eta(\omega) \mp 1}$$

där $\eta(\omega) = (\mu(\omega)/\epsilon(\omega))^{1/2}$. Den ena lösningen (nedre tecken) överensstämmer med vår tidigare analys från kapitel 4, medan den andra roten är ofysikalisk. ■

Exempel 6.2

För flera profiler på dielektricitetsfunktionen $\epsilon(z)$ kan reflektionskoefficienten lösas analytiskt. Ett exempel på en sådan är den exponentiellt växande dielektricitetsfunktionen $\epsilon(z)$. Här antar vi att materialet är omagnetiskt, $\mu(z) = 1$.

Låt dielektricitetsfunktionen $\epsilon(z)$ i området $0 < z < d$ ges av

$$\epsilon(z) = ae^{bz} \quad 0 < z < d$$

där a är en komplexvärd funktion av ω och $b > 0$ och reell.²

För att lösa exemplet är det lämpligt att göra en omskrivning av problemet. Inför en funktion $Y(z)$ (admittans), som definieras av

$$r(z) = \frac{1 - Y(z)}{1 + Y(z)}$$

Det aktuella randvillkoret för reflektionskoefficienten

$$r(d, \omega) = \frac{\eta_b(\omega) - 1}{\eta_b(\omega) + 1}$$

transformeras till

$$Y(d, \omega) = \frac{1}{\eta_b(\omega)}$$

Man visar enkelt att $Y(z)$ satisfierar (jämför även övning 6.1) ekvationen

$$\frac{dY(z)}{dz} = -i\frac{\omega}{c_0}Y^2(z) + i\frac{\omega}{c_0}\epsilon(z)$$

Denna Riccati-ekvation transformerar vi till en linjär andra ordningens differentialekvation genom transformationen, se appendix D

$$Y(z) = -\frac{ic_0 u'(z)}{\omega u(z)}$$

²Ett komplext b kommer att ge $\text{Im } \epsilon < 0$ för något z , dvs. materialet är inte längre passivt.

Den nya ekvationen blir

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \epsilon(z) u(z) = 0$$

Insättning av vår dielektricitetsfunktion ger

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} a e^{bz} u(z) = 0$$

Låt

$$x = \frac{2\omega a^{1/2}}{bc_0} e^{bz/2}$$

Denna variabeltransformation överför ekvationen ovan till Bessels differentialekvation av ordning 0, se appendix A.

$$x^2 \frac{d^2 u(z(x))}{dx^2} + x \frac{du(z(x))}{dx} + x^2 u(z(x)) = 0$$

De lösningar som blir aktuella här är Besselfunktionen $J_0(x)$ och Neumannfunktionen $N_0(x)$. Vi får lösningen

$$Y(z) = -\frac{ic_0 \frac{d}{dz} [J_0(x(z)) + AN_0(x(z))]}{\omega [J_0(x(z)) + AN_0(x(z))]} = \frac{ia^{1/2} e^{bz/2} \left[J_1\left(\frac{2\omega a^{1/2}}{bc_0} e^{bz/2}\right) + AN_1\left(\frac{2\omega a^{1/2}}{bc_0} e^{bz/2}\right) \right]}{J_0\left(\frac{2\omega a^{1/2}}{bc_0} e^{bz/2}\right) + AN_0\left(\frac{2\omega a^{1/2}}{bc_0} e^{bz/2}\right)}$$

där konstanten A bestäms av randvillkoret vid $z = d$, $Y(b) = 1/\eta_b$, vilket ger

$$A = -\frac{J_0\left(\frac{2\omega a^{1/2}}{bc_0} e^{bd/2}\right) - i\eta_b a^{1/2} e^{bd/2} J_1\left(\frac{2\omega a^{1/2}}{bc_0} e^{bd/2}\right)}{N_0\left(\frac{2\omega a^{1/2}}{bc_0} e^{bd/2}\right) - i\eta_b a^{1/2} e^{bd/2} N_1\left(\frac{2\omega a^{1/2}}{bc_0} e^{bd/2}\right)}$$

Ett numeriskt exempel visas i figur 6.3. Dielektricitetsfunktionen $\epsilon(z, \omega)$ i detta exempel är ($d = c_0/\omega$)

$$\begin{cases} \epsilon(z, \omega) = \begin{cases} 1 & z < 0 \\ \exp\{5z\omega/c_0\} & 0 \leq z \leq d \\ \exp\{5d\omega/c_0\} & z > d \end{cases} \\ \mu(z, \omega) = 1 \end{cases} \quad (6.8)$$

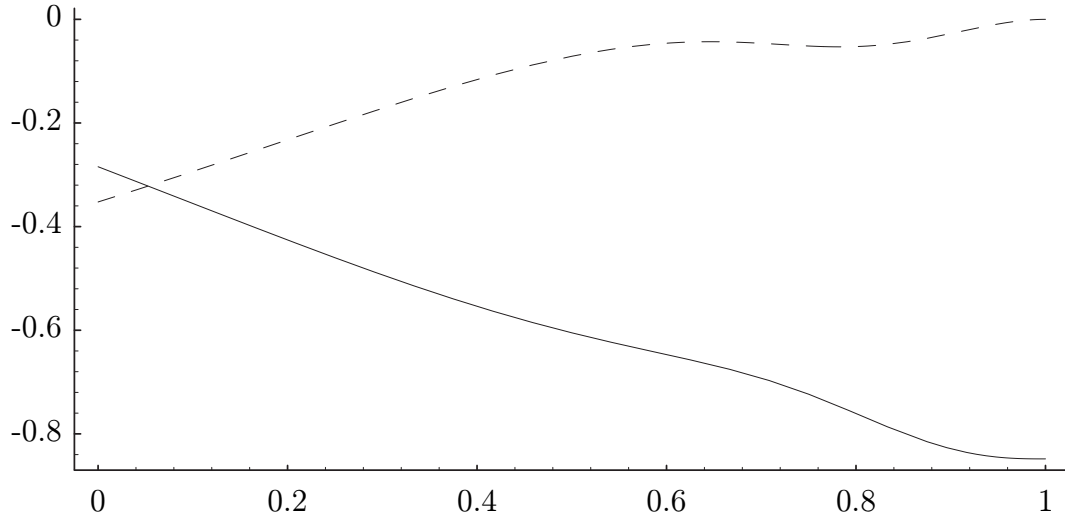
■

Exempel 6.3

De flesta profiler på dielektricitetsfunktionen måste beräknas numeriskt. I figur 6.4 visas ett numeriskt exempel där dielektricitetsfunktionen ges av ($d = c_0/\omega$)

$$\begin{cases} \epsilon(z, \omega) = \begin{cases} 1 & z < 0 \\ 1 + z\omega/c_0 & 0 \leq z \leq d \\ 1 + d\omega/c_0 & z > d \end{cases} \\ \mu(z, \omega) = 1 \end{cases} \quad (6.9)$$

■



Figur 6.3: Reflektionskoefficienten $r(z, \omega)$ som funktion av den enhetslösa variabeln $z\omega/c_0$. Materialparametrarna ges av (6.8). Den heldragna (streckade) linjen visar realdelen (imaginärdelen) av reflektionskoefficienten.

6.4 Ekvation för transmissionskoefficienten

I avsnitt 6.3 definierade vi reflektionskoefficienten $r(z, \omega)$ för det trunkerade materialet. På liknande sätt kan vi definiera en transmissionskoefficient $t(z, \omega)$ för det trunkerade materialet, se figur 6.2, genom

$$\mathbf{F}^+(d, \omega) = t(z, \omega) \mathbf{F}^+(z, \omega) \quad (6.10)$$

Transmissionskoefficienten för det ursprungliga, otrunkerade materialet ges, analogt med reflektionsfallet, av $t(\omega) = t(0, \omega)$.

Deriverar vi ekvationen ovan m.a.p. z och utnyttjar (6.4) samt definitionen på reflektions- och transmissionskoefficient i (6.5) och (6.10) får vi

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dt(z, \omega)}{dz} \mathbf{F}^+(z, \omega) + t(z, \omega) \frac{d\mathbf{F}^+(z, \omega)}{dz} \\ &= \frac{dt(z, \omega)}{dz} \mathbf{F}^+(z, \omega) + t(z, \omega) (\alpha(z, \omega) \mathbf{F}^+(z, \omega) + \beta(z, \omega) r(z, \omega) \mathbf{F}^+(z, \omega)) \end{aligned}$$

vilket gäller för godtyckliga infallande fält $\mathbf{F}^+(z, \omega)$. Vi får därför

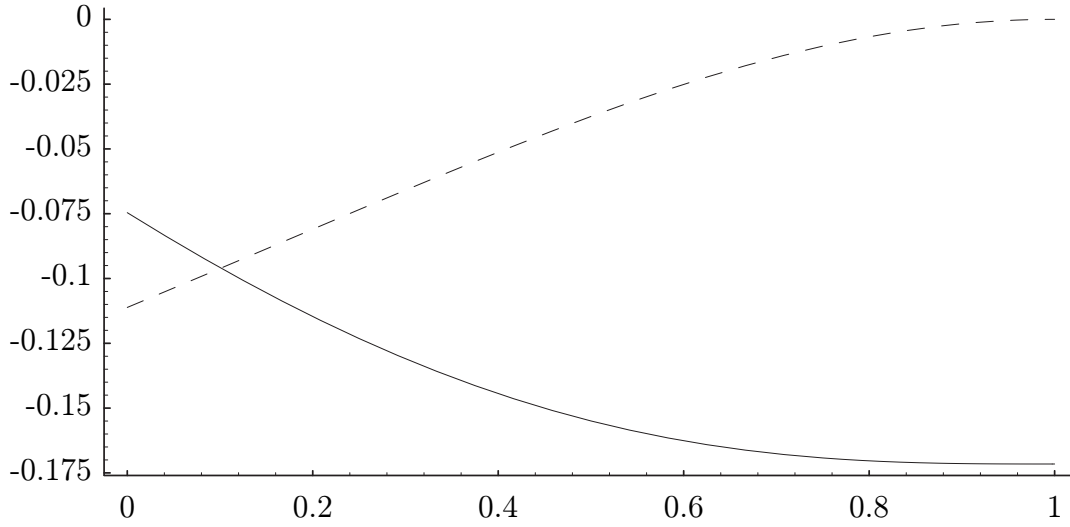
$$\frac{dt(z, \omega)}{dz} = -\alpha(z, \omega)t(z, \omega) - \beta(z, \omega)r(z, \omega)t(z, \omega)$$

eller explicit

$$i \frac{2c_0}{\omega} \frac{dt(z, \omega)}{dz} = (\epsilon(z, \omega) + \mu(z, \omega))t(z, \omega) + (\epsilon(z, \omega) - \mu(z, \omega))r(z, \omega)t(z, \omega) \quad (6.11)$$

Till denna ekvation hör randvärdet.

$$t(d, \omega) = \frac{2\eta_b(\omega)}{\eta_b(\omega) + 1} \quad (6.12)$$



Figur 6.4: Reflektionskoefficienten $r(z, \omega)$ som funktion av den enhetslösa variabeln $z\omega/c_0$. Materialparametrarna ges av (6.9). Den heldragna (streckade) linjen visar realdelen (imaginärdelen) av reflektionskoefficienten.

som är den homogena bakgrundens transmissionskoefficient då materialet blivit trunkerat till $z = d$.

Den fysikaliska transmissionskoefficienten $t(\omega)$ till vårt ursprungliga problem är lösningen till (6.11) med randvillkoret (6.12) evaluerad i $z = 0$, dvs. $t(\omega) = t(0, \omega)$.

6.5 Propagatorer

I detta avsnitt önskar vi relatera fälten inuti materialet och excitationen av materialet, dvs. hur de inre fälten $\mathbf{F}^\pm(z, \omega)$ är relaterade till excitationen på randen $\mathbf{F}^+(0, \omega)$. Vi behandlar här endast det fall då det homogena materialet bakom plattan är vakuum, dvs. $\epsilon(\omega) = \mu(\omega) = 1$, $z > d$. I slutet av avsnittet ges det allmänna resultatet utan härledning.

Vi definierar två nya funktioner, $g^\pm(z, \omega)$, som avbildar excitationen på vänstra sidan av materialet, $\mathbf{F}^+(0, \omega)$, till fälten $\mathbf{F}^\pm(z, \omega)$ inuti materialet. På grund av problemets linjaritet är dessa avbildningar en multiplikativ faktor mellan fälten $\mathbf{F}^\pm(z, \omega)$ och excitationen $\mathbf{F}^+(0, \omega)$, dvs.

$$\mathbf{F}^\pm(z, \omega) = g^\pm(z, \omega) \mathbf{F}^+(0, \omega)$$

Vi kan skriva detta samband i matrisform.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}^+(z, \omega) \\ \mathbf{F}^-(z, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^+(z, \omega) \mathbf{I} \\ g^-(z, \omega) \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{F}^+(0, \omega) \quad (6.13)$$

Ingen trunkering av materialet sker i detta avsnitt, utan fälten $\mathbf{F}^\pm(z, \omega)$ representerar de verkliga fälten inuti den inhomogena plattan. Alternativt kan vi säga att

propagatorerna $g^\pm(z, \omega)$ representerar de inre fält som genereras av ett exciterande enhetsfält, t.ex. $\mathbf{F}^+(0, \omega) = \hat{\mathbf{x}}$ eller $\mathbf{F}^+(0, \omega) = \hat{\mathbf{y}}$.

De totala elektriska och magnetiska fälten inuti plattan är, se (6.3)

$$\begin{cases} \mathbf{E}(z, \omega) = \mathbf{F}^+(z, \omega) + \mathbf{F}^-(z, \omega) \\ \eta_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{H}(z, \omega) = -\mathbf{F}^+(z, \omega) + \mathbf{F}^-(z, \omega) \end{cases}$$

Differentiera (6.13) m.a.p. z . Vi får

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^+(z, \omega) \\ \mathbf{F}^-(z, \omega) \end{pmatrix} = \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} g^+(z, \omega) \mathbf{I} \\ g^-(z, \omega) \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{F}^+(0, \omega)$$

Det vänstra ledet kan vi skriva om mha. dynamiken (6.4). Vi får

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^+(z, \omega) \\ \mathbf{F}^-(z, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{I} & \beta \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \delta \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{F}^+(z, \omega) \\ \mathbf{F}^-(z, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{I} & \beta \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \delta \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g^+(z, \omega) \mathbf{I} \\ g^-(z, \omega) \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{F}^+(0, \omega)$$

Om likhet skall gälla för alla excitationer $\mathbf{F}^+(0, \omega)$ får vi

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} g^+(z, \omega) \\ g^-(z, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^+(z, \omega) \\ g^-(z, \omega) \end{pmatrix}$$

eller

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} g^+(z, \omega) \\ g^-(z, \omega) \end{pmatrix} = i \frac{\omega}{2c_0} \begin{pmatrix} \epsilon(z, \omega) + \mu(z, \omega) & \epsilon(z, \omega) - \mu(z, \omega) \\ \mu(z, \omega) - \epsilon(z, \omega) & -\epsilon(z, \omega) - \mu(z, \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^+(z, \omega) \\ g^-(z, \omega) \end{pmatrix}$$

tillsammans med randvärdena

$$\begin{cases} g^+(0, \omega) = 1 \\ g^-(0, \omega) = r(\omega) \end{cases} \quad \begin{cases} g^+(d, \omega) = t(\omega) \\ g^-(d, \omega) = 0 \end{cases}$$

Det första randvärdet vid $z = 0$ är en ren identitet från (6.13), medan det andra utgör definitionen på reflektionskoefficienten $r(\omega)$ för det inhomogena materialet. Vid $z = d$ är det första randvärdet definitionen på transmissionskoefficienten $t(\omega)$, medan det andra uttrycker att vi inte har några källor till höger om planet $z = d$ (endast källor i området $z < 0$).

Det sistnämnda villkoret förändras om materialet till höger om plattan inte är vakuum, som vi antagit här. Detta beror på att vår vågupplösning ger en koppling mellan plus- och minusvågor om bakgrundsmaterialet till höger om plattan inte är vakuum. Med ett annat homogent bakgrundsmaterial (materialparametrar $\epsilon_b(\omega)$ och $\mu_b(\omega)$) kan man visa att randvärdena i $z = d$ ändras till, se övning 6.4

$$g^-(d, \omega) = g^+(d, \omega) \frac{(\mu_b(\omega)/\epsilon_b(\omega))^{1/2} - 1}{(\mu_b(\omega)/\epsilon_b(\omega))^{1/2} + 1} \quad (6.14)$$

Exempel 6.4

Det homogena fallet då $\epsilon(z, \omega)$ och $\mu(z, \omega)$ är oberoende av z kan lösas analytiskt.

För det homogena fallet, $\epsilon(z, \omega) = \epsilon(\omega)$ och $\mu(z, \omega) = \mu(\omega)$, gäller att

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} g^+(z, \omega) \\ g^-(z, \omega) \end{pmatrix} = i \frac{\omega}{2c_0} \begin{pmatrix} \epsilon(\omega) + \mu(\omega) & \epsilon(\omega) - \mu(\omega) \\ \mu(\omega) - \epsilon(\omega) & -\epsilon(\omega) - \mu(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^+(z, \omega) \\ g^-(z, \omega) \end{pmatrix}$$

Fundamentallösningarna till detta system är

$$\begin{pmatrix} g^+(z, \omega) \\ g^-(z, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\pm(\omega) \\ b^\pm(\omega) \end{pmatrix} e^{\pm ikz}$$

där

$$k = \frac{\omega}{c_0} (\epsilon(\omega)\mu(\omega))^{1/2}$$

Egenvektorererna $(a^\pm(\omega) \ b^\pm(\omega))^t$ har formen

$$\begin{pmatrix} a^+(\omega) \\ b^+(\omega) \end{pmatrix} = A(\omega) \begin{pmatrix} 1 \\ r_0(\omega) \end{pmatrix}$$

för egenvärdet $+ik$, och

$$\begin{pmatrix} a^-(\omega) \\ b^-(\omega) \end{pmatrix} = B(\omega) \begin{pmatrix} r_0(\omega) \\ 1 \end{pmatrix}$$

för egenvärdet $-ik$, och $A(\omega)$ och $B(\omega)$ är godtyckliga konstanter och reflektionskoefficienten för skiljeytan vid $z = 0$ är

$$r_0(\omega) = \frac{(\mu(\omega)/\epsilon(\omega))^{1/2} - 1}{(\mu(\omega)/\epsilon(\omega))^{1/2} + 1} = \frac{\eta(\omega) - 1}{\eta(\omega) + 1}$$

Den allmänna lösningen till vårt problem kan därför skrivas som en linjärkombination av dessa fundamentallösningar.

$$\begin{pmatrix} g^+(z, \omega) \\ g^-(z, \omega) \end{pmatrix} = A(\omega) \begin{pmatrix} 1 \\ r_0(\omega) \end{pmatrix} e^{ikz} + B(\omega) \begin{pmatrix} r_0(\omega) \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ikz} \quad 0 \leq z \leq d$$

Konstanterna $A(\omega)$ och $B(\omega)$ bestäms av randvärdena

$$\begin{cases} g^+(0, \omega) = 1 \\ g^-(d, \omega) = 0 \end{cases}$$

Resultatet blir

$$\begin{pmatrix} g^+(z, \omega) \\ g^-(z, \omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - r_0^2(\omega)e^{2ikd}} \begin{pmatrix} 1 \\ r_0(\omega) \end{pmatrix} e^{ikz} - \frac{r_0(\omega)e^{2ikd}}{1 - r_0^2(\omega)e^{2ikd}} \begin{pmatrix} r_0(\omega) \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ikz} \quad 0 \leq z \leq d$$

Från detta resultat avläser vi reflektions- och transmissionskoefficienten för hela plattan genom randvärdena

$$\begin{cases} g^-(0, \omega) = r(\omega) \\ g^+(d, \omega) = t(\omega) \end{cases}$$

Vi får

$$\begin{cases} r(\omega) = r_0(\omega) \frac{1 - e^{2ikd}}{1 - r_0^2(\omega)e^{2ikd}} \\ t(\omega) = e^{ikd} \frac{1 - r_0^2(\omega)}{1 - r_0^2(\omega)e^{2ikd}} \end{cases}$$

vilket överensstämmer med resultatet (4.18) på sidan 80. ■

Övningar till kapitel 6

6.1 Impedansen $Z(z)$ definieras genom reflektionskoefficienten $r(z)$.

$$r(z) = \frac{Z(z) - 1}{Z(z) + 1}$$

Härled den ekvation som impedansen $Z(z)$ satisfierar.

***6.2** Beräkna genom att använda Riccati-ekvationen, (6.6), reflektionskoefficienten för en homogen platta med dielektricitetsfunktion $\epsilon(\omega)$ och permeabilitetsfunktion $\mu(\omega)$. Bakgrundsmaterialets dielektricitetsfunktion och permeabilitetsfunktion antas vara $\epsilon_b(\omega)$ och $\mu_b(\omega)$.

***6.3** Beräkna mha. ekvationen för transmissionskoefficienten, (6.11), transmissionskoefficienten för en homogen platta med dielektricitetsfunktion $\epsilon(\omega)$ och permeabilitetsfunktion $\mu(\omega)$. Bakgrundsmaterialets dielektricitetsfunktion och permeabilitetsfunktion antas vara $\epsilon_b(\omega)$ och $\mu_b(\omega)$.

Ledning: Använd resultatet från övning 6.2

6.4 Visa randvillkoret i ekvation (6.14)

$$g^-(d, \omega) = g^+(d, \omega) \frac{(\mu_b(\omega)/\epsilon_b(\omega))^{1/2} - 1}{(\mu_b(\omega)/\epsilon_b(\omega))^{1/2} + 1}$$

om bakgrundsmaterialet inte är vakuum utan har materialparametrar $\epsilon_b(\omega)$ och $\mu_b(\omega)$.

Sammanfattning av kapitel 6

Riccatis ekvation

$$\begin{aligned}
 -i \frac{2c_0}{\omega} \frac{dr(z, \omega)}{dz} + r(z, \omega) [2(\epsilon(z, \omega) + \mu(z, \omega)) + (\epsilon(z, \omega) - \mu(z, \omega))r(z, \omega)] \\
 = \mu(z, \omega) - \epsilon(z, \omega) \\
 r(d, \omega) = \frac{\eta_b(\omega) - 1}{\eta_b(\omega) + 1}
 \end{aligned}$$

Transmissionskoefficientens ekvation

$$\begin{aligned}
 i \frac{2c_0}{\omega} \frac{dt(z, \omega)}{dz} = (\epsilon(z, \omega) + \mu(z, \omega))t(z, \omega) + (\epsilon(z, \omega) - \mu(z, \omega))r(z, \omega)t(z, \omega) \\
 t(d, \omega) = \frac{2\eta_b(\omega)}{\eta_b(\omega) + 1}
 \end{aligned}$$

Propagator ekvation

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} g^+(z, \omega) \\ g^-(z, \omega) \end{pmatrix} = i \frac{\omega}{2c_0} \begin{pmatrix} \epsilon(z, \omega) + \mu(z, \omega) & \epsilon(z, \omega) - \mu(z, \omega) \\ \mu(z, \omega) - \epsilon(z, \omega) & -\epsilon(z, \omega) - \mu(z, \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^+(z, \omega) \\ g^-(z, \omega) \end{pmatrix} \\
 \begin{cases} g^+(0, \omega) = 1 \\ g^-(0, \omega) = r(\omega) \end{cases} \quad \begin{cases} g^+(d, \omega) = t(\omega) \\ g^-(d, \omega) = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Bilaga A

Besselfunktioner

I vågutbredningsproblem dyker ofta Bessels differentialekvation upp, särskilt när vi har ett problem med axiell symmetri. I detta appendix sammanfattas ett antal viktiga samband som gäller för Besselfunktioner. Mer information och bevis av de olika resultaten ges t.ex. i ref. 1.

Bessels differentialekvation är

$$z^2 \frac{d^2}{dz^2} Z_n(z) + z \frac{d}{dz} Z_n(z) + (z^2 - n^2) Z_n(z) = 0$$

där n antas vara ett heltal.¹

Två linjärt oberoende lösningar finns till denna differentialekvation. En är reguljär i $z = 0$ och denna lösning kallas en Besselfunktion $J_n(z)$ av ordning n . Argumentet z är ett komplext tal. Ofta poängteras samhörigheten med axiell symmetri hos det underliggande problem genom att lösningarna kallas cylindriska Besselfunktioner av ordning n . Besselfunktionerna $J_n(z)$ är definierade så att de är reella för reellt argument z . De kan framställas i en överallt absolutkonvergent potensserie

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \quad (\text{A.1})$$

Vi ser omedelbart att $J_n(z)$ är en jämn funktion för jämna n och en udda funktion för udda n , dvs.

$$J_n(-z) = (-1)^n J_n(z)$$

En vanlig integralframställning av Bessel funktionerna är

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin t - nt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos t} e^{in(t - \frac{1}{2}\pi)} dt \quad (\text{A.2})$$

Från denna integralframställning ser vi att Besselfunktioner för positiva och negativa heltalsvärden på n är relaterade till varandra.

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

¹Mer generella definitioner med t.ex. n som ett komplext tal kan också göras, men då ser resultaten i flera fall annorlunda ut.

Från potensserieframställningen i (A.1) ser vi att för små argument gäller

$$J_n(z) = \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n + O(z^{n+2})$$

För stora argument gäller $(-\pi < \arg z < \pi)$

$$J_n(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left\{ P_n(z) \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - Q_n(z) \sin\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

där funktionerna $P_n(z)$ och $Q_n(z)$ har följande asymptotiska utvecklingar ($\nu = 4n^2$)

$$\begin{cases} P_n(z) \sim 1 - \frac{(\nu-1)(\nu-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\nu-1)(\nu-9)(\nu-25)(\nu-49)}{4!(8z)^4} - \dots \\ Q_n(z) \sim \frac{\nu-1}{8z} - \frac{(\nu-1)(\nu-9)(\nu-25)}{3!(8z)^3} + \dots \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Den andra, av Besselfunktionen linjärt oberoende lösningen, som är reell för reella argument, är Neumannfunktionen² $N_n(z)$. Dess potensserieutveckling är

$$\begin{aligned} N_n(z) &= \frac{2}{\pi} \left(\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) J_n(z) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \sum_{l=1}^k \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l+n} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k} \end{aligned}$$

där Eulers konstant $\gamma = 0.577\,215\,66\dots$, och där alla summor definieras till noll om övre summationsgräns är mindre summationsindex. Vi ser att denna lösning är singular i $z = 0$. För små argument blir det dominerande bidraget

$$\begin{aligned} N_0(z) &= \frac{2}{\pi} \left(\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma \right) + O(z^2) \\ N_n(z) &= -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} + \dots \end{aligned}$$

För stora argument kan Neumannfunktionen utvecklas som $(-\pi < \arg z < \pi)$

$$N_n(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left(P_n(z) \sin\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + Q_n(z) \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

där funktionerna $P_n(z)$ och $Q_n(z)$ är givna av (A.3).

²Dessa lösningar kallas också Besselfunktioner av andra slaget.

I vågutbredningssammanhang uppkommer behovet av en linjärkombination av Bessel- och Neumannfunktioner, de s.k. Hankelfunktionerna, $H_n^{(1)}(z)$ och $H_n^{(2)}(z)$ av första respektive andra slaget.³ Dessa definieras av

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(z) &= J_n(z) + iN_n(z) \\ H_n^{(2)}(z) &= J_n(z) - iN_n(z) \end{aligned}$$

En vanlig integralframställning av Hankelfunktionerna av första och andra slaget är

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(z) &= \frac{2}{i\pi} e^{-in\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{iz \cosh s} \cosh ns \, ds, & 0 < \arg z < \pi \\ H_n^{(2)}(z) &= \frac{2i}{\pi} e^{in\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-iz \cosh s} \cosh ns \, ds, & -\pi < \arg z < 0 \end{aligned}$$

För stora argument kan Hankelfunktionerna utvecklas som

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{i(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} (P_n(z) + iQ_n(z)), & -\pi < \arg z < 2\pi \\ H_n^{(2)}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-i(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} (P_n(z) - iQ_n(z)), & -2\pi < \arg z < \pi \end{aligned}$$

där funktionerna $P_n(z)$ och $Q_n(z)$ är givna av (A.3).

Mellan lösningar till Bessels differentialekvation av olika ordning finns rekursionssamband. Några av de viktigaste är ($n = 0, 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} Z_{n-1}(z) - Z_{n+1}(z) &= 2Z'_n(z) \\ Z_{n-1}(z) + Z_{n+1}(z) &= \frac{2n}{z} Z_n(z) \\ Z_{n+1}(z) &= \frac{n}{z} Z_n(z) - Z'_n(z) \\ Z'_n(z) &= Z_{n-1}(z) - \frac{n}{z} Z_n(z) \\ \left(\frac{d}{z dz}\right)^m [z^n Z_n(z)] &= z^{n-m} Z_{n-m}(z) \\ \left(\frac{d}{z dz}\right)^m [z^{-n} Z_n(z)] &= (-1)^m z^{-n-m} Z_{n+m}(z) \end{aligned}$$

Här är $Z_n(z)$ antingen en Besselfunktion $J_n(z)$, en Neumannfunktion $N_n(z)$ eller någon av Hankelfunktionerna $H_n^{(1)}(z)$ eller $H_n^{(2)}(z)$. Vi ser att speciellt gäller

$$J_1(z) = -J'_0(z)$$

som ofta används i beräkningar.

³Ett ofta använt alternativt namn på dessa lösningar är Besselfunktioner av tredje slaget.

Bilaga B

Vektorer och linjära transformationer

Detta appendix innehåller en kortfattad översikt av begreppen vektorer och linjära transformationer (dyader) av vektorer, samt hur dessa representeras i komponenter. Transformationer av en vektors komponenter mellan olika roterade koordinatsystem sammanfattas liksom motsvarande transformationer av en dyads komponenter.

B.1 Vektorer

Vi betecknar genomgående i denna bok vektorer med lutande fet stil, t.ex. $\mathbf{u}$. Vektorerna är i allmänhet funktioner av rums- och tidsvariablerna, dvs. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, men i detta appendix skrivs dessa variabler inte ut eftersom de inte är nödvändiga för analysen. En vektor som beror på rums- och tids-koordinaterna kallas ett *vektorfält*.

En vektor har i ett visst koordinatsystem $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ en komponentframställning¹

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{e}}_1 u_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 u_2 + \hat{\mathbf{e}}_3 u_3$$

En "hatt" (^) över en vektor, t.ex. $\hat{\mathbf{e}}_1$, anger vi att vektorn är en enhetsvektor. Vektorns komponenter, u_i , fås genom skalärprodukten

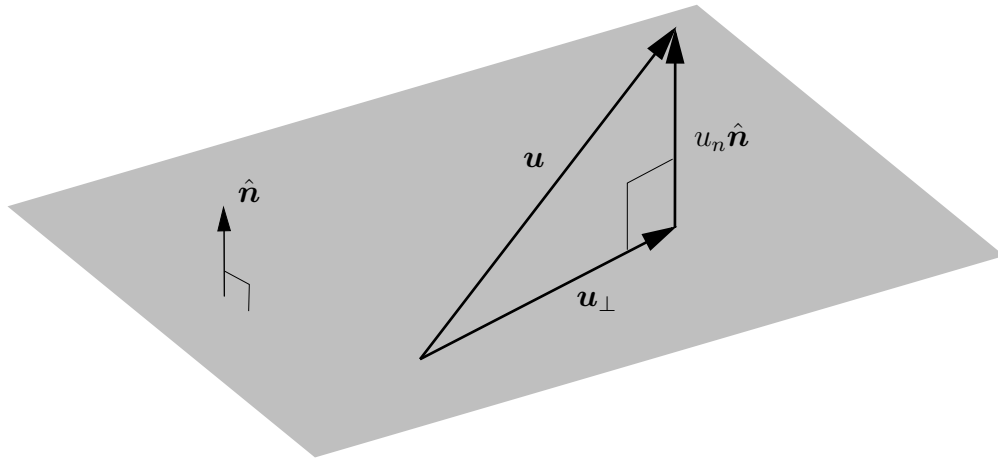
$$u_i = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \quad i = 1, 2, 3$$

Ofta skrivs vektorns komponenter som en kolonnvektor.

$$[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Här använder vi oss av hakparenteser runt vektorn, $[\mathbf{u}]$, för att särskilja koordinatrepresentationen av vektorn från vektorn $\mathbf{u}$. Lägg märke till att medan vektorn $\mathbf{u}$ är en geometrisk storhet, som är oberoende av koordinatsystem, så är $[\mathbf{u}]$ en komponentrepresentation av vektorn, vars värden varierar beroende på vilket koordinatsystem som vektorn representeras i.

¹Enhetsvektorena $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ antar vi bildar ett orto-normerat högersystem.



Figur B.1: Projektion av en vektor $\mathbf{u}$ i en komponent, $u_n \hat{\mathbf{n}}$, längs riktningen $\hat{\mathbf{n}}$ och en komponent, $\mathbf{u}_\perp$, vinkelrätt mot denna riktning.

I många vågutbredningssammanhang förekommer att vektorerna delas upp i en komponent längs en given riktning $\hat{\mathbf{n}}$ och i en komponent som ligger i planet vinkelrätt mot $\hat{\mathbf{n}}$. Denna uppdelning av en vektor $\mathbf{u}$ betecknar vi, se figur B.1

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\perp + u_n \hat{\mathbf{n}}$$

där

$$\begin{cases} u_n = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{u}_\perp = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = -\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

B.2 Linjära vektortransformationer, matriser och dyader

Vi har ofta anledning att studera linjära avbildningar från ett vektorfält till ett annat, dvs. en vektor $\mathbf{u}$ avbildas till en annan vektor $\mathbf{v}$, som båda varierar med variablerna $\mathbf{r}$ och t .

Den enklaste typen av linjär transformation är

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \underbrace{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})}_{\text{skalär}}$$

Vektorn $\mathbf{u}$ har här avbildats på en ny vektor riktad längs vektorn $\mathbf{a}$. Skalningen sker med vektorn $\mathbf{b}$ genom skalärprodukten $\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}$. Vi betecknar denna transformation med en *enkel dyad* och använder symbolen $\mathbf{ab}$ för transformationen, som definieras genom (skrivs antingen med eller utan parentes kring transformationen $\mathbf{ab}$)

$$\mathbf{v} = (\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{ab} \cdot \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})$$

Notera att vektorerna i transformationen $\mathbf{ab}$ skrivs samman utan tecken mellan vektorerna. Komponenterna hos vektorn $\mathbf{v}$ är

$$v_i = a_i \sum_{j=1}^3 b_j u_j \quad i = 1, 2, 3$$

Enkla dyader utgör ett kompakt sätt att uttrycka linjära transformationer av vektorfält på. Summan av två enkla dyader kallas en dyad,² t.ex. $\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2$, definierad genom operationen på en vektor $\mathbf{u}$ på följande sätt:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{u}$$

Notera att den linjära transformationen (dyaden) $\mathbf{A}$ skrivs med upprätt fet stil för att särskilja den från vektorn $\mathbf{A}$ (lutande fet stil).

I ett visst koordinatsystem $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ kan vi representera en allmän linjär transformation $\mathbf{A}$ från ett vektorfält $\mathbf{u}$ till ett vektorfält $\mathbf{v}$ kan mha. de enkla dyaderna $\hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j$, $i, j = 1, 2, 3$.

$$\mathbf{A} = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j$$

Genom beteckningen $\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} \hat{\mathbf{e}}_j$, $i = 1, 2, 3$, ser vi att den allmänna linjära transformationen $\mathbf{A}$ alltid kan skrivas

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{e}}_1 \mathbf{u}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 \mathbf{u}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3 \mathbf{u}_3$$

vilket visar att det räcker med tre enkla dyader för att representera en allmän dyad.

Den linjära transformationens verkan på vektorfältet $\mathbf{u}$ blir

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i A_{ij} (\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{u}) = \sum_{i,j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i A_{ij} u_j$$

eller i komponentform

$$v_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} u_j \quad i = 1, 2, 3$$

Vi ser att komponentframställningen av den linjära avbildningen $\mathbf{A}$ är representerad av en matris

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Notera att den linjära avbildningen $\mathbf{A}$'s matris, $[\mathbf{A}]$, har hakparenteser runt symbolen. Denna koordinatrepresentationen beror på vilket koordinatsystem som den linjära transformationen $\mathbf{A}$ representeras i. Beteckningssättet är helt analogt med en vektor $\mathbf{u}$ och dess komponentrepresentation $[\mathbf{u}]$.

²En enkel dyad benämns i anglosaxisk litteratur *dyad*, medan en dyad benämns *dyadic*.

Projektioner av en vektor $\mathbf{u}$ på ett plan med normalriktning $\hat{\mathbf{n}}$ kan ses som en linjär avbildning vars dyad är, se (B.1)

$$\mathbf{u}_\perp = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{I}_\perp \cdot \mathbf{u}$$

där projektdyaden $\mathbf{I}_\perp$ är

$$\mathbf{I}_\perp = \mathbf{I} - \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}$$

Även en godtycklig dyad $\mathbf{A}$ kan uppdelas i komponenter parallellt med och vinkelrätt mot en fix riktning $\hat{\mathbf{n}}$. Vi får genom att utnyttja $\mathbf{I} = \mathbf{I}_\perp + \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{I}_\perp + \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{I}_\perp + \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{u}$$

Denna uppdelning leder till att varje linjär transformation $\mathbf{A}$ kan skrivas på följande sätt:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\perp\perp} + \hat{\mathbf{n}}\mathbf{A}_n + \mathbf{A}_\perp\hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}}A_{nn}\hat{\mathbf{n}} \quad (\text{B.2})$$

där vi infört beteckningarna

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{\perp\perp} = \mathbf{I}_\perp \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_\perp \\ \mathbf{A}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_\perp \\ \mathbf{A}_\perp = \mathbf{I}_\perp \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ A_{nn} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{cases}$$

Notera att $\mathbf{A}_{\perp\perp}$ är en tvådimensionell dyad, vektorerna $\mathbf{A}_n$ och $\mathbf{A}_\perp$ är tvådimensionella vektorer i planet vinkelrätt mot riktningen $\hat{\mathbf{n}}$, samt att A_{nn} är en skalär. Om vi låter riktningen $\hat{\mathbf{n}}$ sammanfalla med $\hat{\mathbf{e}}_3$ blir en matrisrepresentationen av dessa storheter (vi använder här index 3 istället för n)

$$[\mathbf{A}_{\perp\perp}] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [\mathbf{A}_\perp] = \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\mathbf{A}_3] = \begin{pmatrix} A_{31} \\ A_{32} \\ 0 \end{pmatrix}$$

En sådan uppdelning visar sig lämplig att göra när vi analyserar vågutbredning längs en fix riktning, se kapitel 4.

Hittills har vi endast låtit en vektor verka på en dyad från höger. Även multiplikation från vänster kan definieras. Det ger ett nytt vektorfält definierat av

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^3 (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i) A_{ij} \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{i,j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_j A_{ij} u_i$$

eller i komponentform

$$v_i = \sum_{j=1}^3 A_{ji} u_j \quad i = 1, 2, 3$$

Vi ser att transformationen i detta fall sker med transponatet av matrisen $[\mathbf{A}]$. Denna operation definierar den transponerade transformationen $\mathbf{A}^t$.

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}$$

Motsvarande komponentframställning är

$$[\mathbf{A}^t] = [\mathbf{A}]^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Den komplexkonjugerade dyaden, $\mathbf{A}^*$, och Hermitekonjugering av en dyad, $\mathbf{A}^\dagger$, som markeras med ”dolktecknet” (†), definieras genom

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{A})^* \cdot \mathbf{u}$$

och

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{A})^*$$

Motsvarande komponentframställningarna är

$$[\mathbf{A}^*] = [\mathbf{A}]^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{13}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* & A_{23}^* \\ A_{31}^* & A_{32}^* & A_{33}^* \end{pmatrix} \quad [\mathbf{A}^\dagger] = [\mathbf{A}]^\dagger = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & A_{31}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & A_{32}^* \\ A_{13}^* & A_{23}^* & A_{33}^* \end{pmatrix}$$

Vi ser att $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{*t}$. En linjär transformation kallas symmetrisk (Hermiteisk) om $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$ ($\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$).

Den inversa transformationen, $\mathbf{A}^{-1}$, av en linjär transform $\mathbf{A}$ definieras genom inversen av komponentframställningen, dvs.

$$[\mathbf{A}^{-1}] = [\mathbf{A}]^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{-1}$$

om $\mathbf{A}$ ges av komponentframställningen

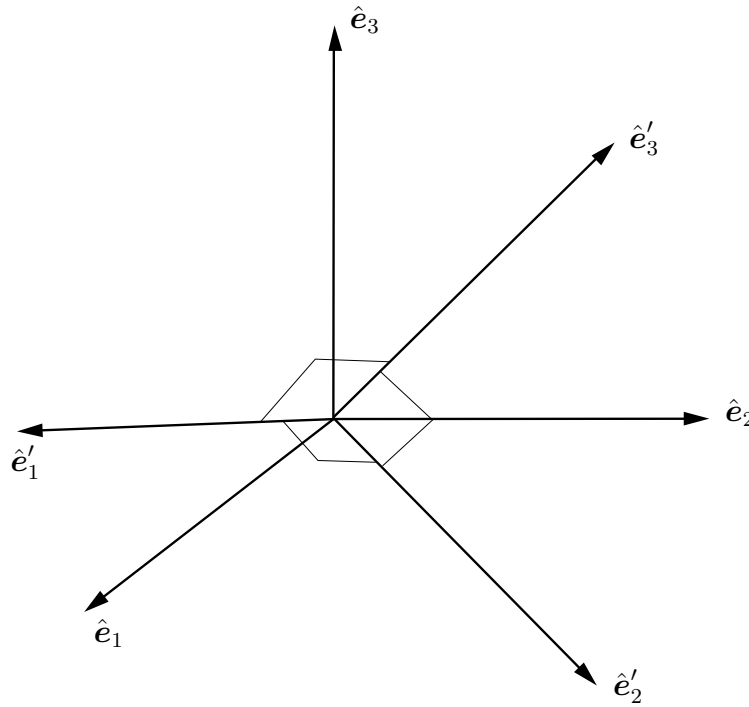
$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

På liknande sätt definieras den vektoriella produkten av en linjär transformation, $\mathbf{A}$, och ett vektorfält $\mathbf{u}$.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_i A_{ij} (\hat{\mathbf{e}}_j \times \mathbf{u})$$

Vektoriell produkt från vänster definieras av

$$\mathbf{u} \times \mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^3 (\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{e}}_i) A_{ij} \hat{\mathbf{e}}_j$$



Figur B.2: De två roterade koordinatsystemen $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ och $(\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3)$.

B.3 Rotation av koordinatsystem

Två koordinatsystem $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ och $(\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3)$, som båda är orto-normerade kartesiska högersystem, har ett gemensamt origo. Ett exempel på två sådana system ges i figur B.2.

Enhetsvektorerna $(\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3)$ kan uttryckas i enhetsvektorerna $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ på följande sätt:

$$\begin{cases} \hat{e}'_1 = \hat{e}_1 a_{11} + \hat{e}_2 a_{12} + \hat{e}_3 a_{13} \\ \hat{e}'_2 = \hat{e}_1 a_{21} + \hat{e}_2 a_{22} + \hat{e}_3 a_{23} \\ \hat{e}'_3 = \hat{e}_1 a_{31} + \hat{e}_2 a_{32} + \hat{e}_3 a_{33} \end{cases}$$

eller

$$\hat{e}'_i = \sum_{j=1}^3 \hat{e}_j a_{ij} \quad i = 1, 2, 3$$

Eftersom vi antagit att enhetsvektorerna $(\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3)$ och $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ båda är högersystem så gäller att determinanten av matrisen $[\mathbf{A}]$, vars element är a_{ij} , är 1, dvs. $\det[\mathbf{A}] = 1$.

Komponenterna a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ är riktningscosinerna³ mellan axlarna i och j .

$$a_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j \quad i, j = 1, 2, 3$$

³Ofta ser man beteckningen $a_{ij} = \cos(x_i, x_j)$ där (x_i, x_j) är vinkeln mellan $\hat{e}'_i$ - och $\hat{e}_j$ -axlarna.

Notera att i allmänhet är

$$\hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = a_{ij} \neq a_{ji} = \hat{\mathbf{e}}'_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \quad i, j = 1, 2, 3$$

De oprimmade enhetsvektorerna kan uttryckas i de primmade eftersom varje enhetsvektor $\hat{\mathbf{e}}_i$ kan uttryckas i $(\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3)$.

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{e}}'_1 (\hat{\mathbf{e}}'_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_i) + \hat{\mathbf{e}}'_2 (\hat{\mathbf{e}}'_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_i) + \hat{\mathbf{e}}'_3 (\hat{\mathbf{e}}'_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_i) \quad i = 1, 2, 3$$

eller omskrivet i riktningscosinerna a_{ij}

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}'_1 a_{11} + \hat{\mathbf{e}}'_2 a_{21} + \hat{\mathbf{e}}'_3 a_{31} \\ \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}'_1 a_{12} + \hat{\mathbf{e}}'_2 a_{22} + \hat{\mathbf{e}}'_3 a_{32} \\ \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}'_1 a_{13} + \hat{\mathbf{e}}'_2 a_{23} + \hat{\mathbf{e}}'_3 a_{33} \end{cases}$$

eller mer kortfattat

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}'_j a_{ji} \quad i = 1, 2, 3$$

Vi ser att om transformationen $\hat{\mathbf{e}}_i \rightarrow \hat{\mathbf{e}}'_i$ sker med a_{ij} så sker transformationen $\hat{\mathbf{e}}'_i \rightarrow \hat{\mathbf{e}}_i$ med a_{ji} . Matrisen $[\mathbf{A}]$ är därför en ortogonal matris, dvs. $[\mathbf{A}]^{-1} = [\mathbf{A}]^t$.

Vi ger nu den formella definitionen på en vektor. En vektor $\mathbf{u}$ är en geometrisk storhet vars komponenter (u_1, u_2, u_3) i $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ -systemet är relaterade till komponenterna (u'_1, u'_2, u'_3) i $(\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3)$ genom riktningscosinerna, a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, på följande sätt:

$$u'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} u_j \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{B.3})$$

eller uttryckt i kolonnvektorer och matrismultiplikation

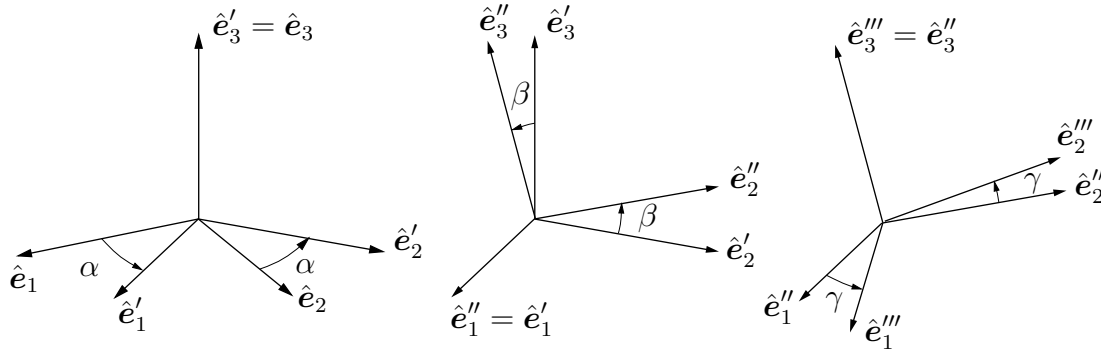
$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Definition 1: En fysikalisk storhet $\mathbf{u}$ vars komponenter i två transformerade koordinatsystem transformeras genom (B.3) kallas en **vektor**.⁴

⁴En vektor kallas också polär vektor till skillnad mot en axiell vektor som transformeras genom (B.3) där $\det[\mathbf{A}] = -1$. Beror vektorn på rumskoordinaterna, dvs. $\mathbf{u}$ är ett vektorfält, skall även rumskoordinaterna transformeras enligt

$$u'_i(x'_1, x'_2, x'_3) = \sum_{j=1}^3 a_{ij} u_j(x_1, x_2, x_3) \quad i = 1, 2, 3$$

där x'_1, x'_2, x'_3 och x_1, x_2, x_3 är Ortsvektorns komponenter i det primmade, respektive oprimmade koordinatsystemet.



Figur B.3: Definition av de tre Eulervinklarna α , β och γ .

Denna definition medför att för varje vektor $\mathbf{u}$ gäller

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \hat{\mathbf{e}}'_1 u'_1 + \hat{\mathbf{e}}'_2 u'_2 + \hat{\mathbf{e}}'_3 u'_3 = \sum_{i=1}^3 u'_i \hat{\mathbf{e}}'_i \\ &= \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} u_j \hat{\mathbf{e}}'_i = \sum_{j=1}^3 u_j \hat{\mathbf{e}}_j = \hat{\mathbf{e}}_1 u_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 u_2 + \hat{\mathbf{e}}_3 u_3\end{aligned}$$

Vi ser att genom denna definition blir en vektor en storhet som är oberoende av i vilket roterat koordinatsystem den representeras i.

På samma sätt definieras en dyad (eller tensor av andra slaget).

Definition 2: En fysikalisk storhet $\mathbf{D}$ vars komponenter i två transformerade koordinatsystem transformeras genom

$$D'_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 a_{ik} a_{jl} D_{kl} \quad i, j = 1, 2, 3$$

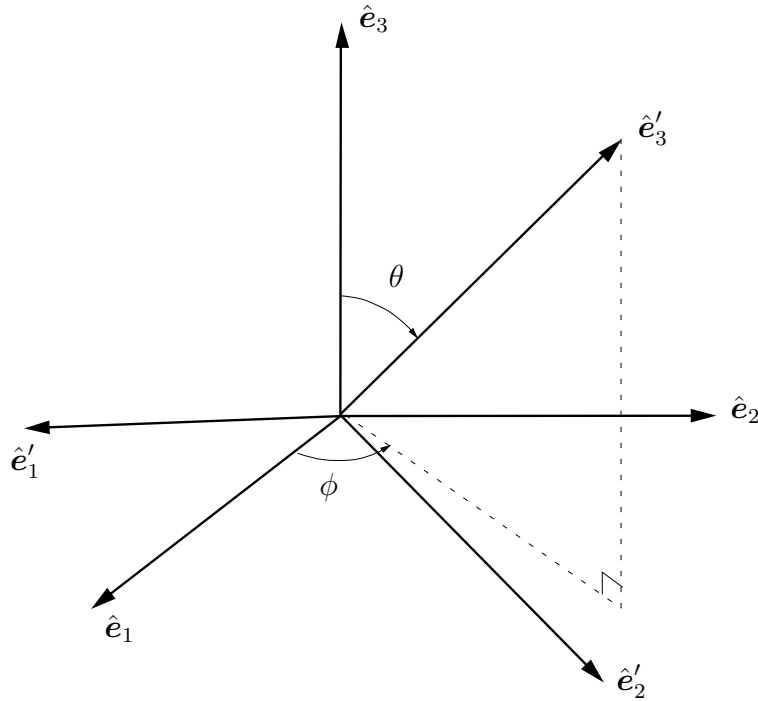
kallas en **dyad**. Detta samband kan även skrivas som en similaritetstransformation

$$[\mathbf{D}]' = [\mathbf{A}] [\mathbf{D}] [\mathbf{A}^t] \quad (\text{B.4})$$

Koordinatsystemens inbördes förhållande, som vi beskrev med hjälp av riktningscosinerna, kan alternativt beskrivas med tre rotationsvinklar, de s.k. Eulervinklarna α , β , γ . Dessa vinklar definieras av tre successiva rotationer, se figur B.3. De tre rotationerna är explicit specificerade genom:

1. En rotation med vinkeln α kring $\hat{\mathbf{e}}_3$ -axeln.
2. En rotation med vinkeln β kring $\hat{\mathbf{e}}'_1$ -axeln.
3. En rotation med vinkeln γ kring $\hat{\mathbf{e}}''_3$ -axeln.

De tre olika rotationerna transformeras med följande matriser:



Figur B.4: Rotationsvinklarna θ och ϕ . Enhetsvektorn $\hat{e}'_1$ ligger i $\hat{e}_1$ - $\hat{e}_2$ -planet i denna figur.

1. Den första rotationen ges av

$$[\mathbf{R}_1] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Den andra rotationen ges av

$$[\mathbf{R}_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

3. Den tredje rotationen ges av

$$[\mathbf{R}_3] = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Den totala transformationen ges av

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{R}_3] [\mathbf{R}_2] [\mathbf{R}_1]$$

På flera ställen i denna bok, se t.ex. avsnitt 4.3, similaritetstransformeras linjära transformationer. Detta sker med *rotationsmatrisen* $[\mathbf{R}]$ som är en kombination av

två rotationer. De sfäriska vinklarna θ och ϕ definieras i figur B.4. Relationen mellan dessa vinklar och Eulervinklarna α , β och γ är:

$$\alpha = \phi - \pi/2, \quad \beta = -\theta, \quad \gamma = 0$$

Vi får

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}] &= [\mathbf{R}_2] [\mathbf{R}_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Bilaga C

Lösning av Volterras integralekvation av andra slaget

Volterras integralekvation av andra slaget dyker upp i flera sammanhang när reflektions- och transmissionsproblem analyseras. I detta appendix presenteras en enkel numerisk metod för att lösa dessa ekvationer.

Den typiska formen på Volterras integralekvation av andra slaget är

$$f(t) + \int_0^t K(t-t')f(t') dt' = g(t), \quad t \in [0, T]$$

I denna ekvation antas data $g(t)$, $t \in [0, T]$ och kärnan $K(t)$, $t \in [0, T]$ vara kända funktioner. Funktionen $f(t)$, $t \in [0, T]$ är den sökta funktionen.

Volterraekvationer av andra slaget är lätta att lösa stabilt med enkla numeriska algoritmer. En enkel numerisk algoritm som ger bra resultat är att göra en indelning av intervallet $[0, T]$.

$$t_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, N, \quad Nh = T$$

Vi betecknar funktionsvärden i dessa punkter med index,

$$\begin{cases} f_i = f(t_i) \\ g_i = g(t_i) \\ K_i = K(t_i) \end{cases}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$$

och evaluera Volterraekvationen i indelningspunkterna t_i . Detta ger

$$f_i + \int_0^{t_i} K(t_i - t')f(t') dt' = g_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

För $i = 0$ får vi speciellt

$$f_0 = g_0$$

Tillämpa trapetsregeln på integralen i Volterraekvationen.

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} K(t_1 - t')f(t') dt' &= \frac{h}{2} (K_0 f_1 + K_1 f_0) + O(h^3) \\ \int_0^{t_i} K(t_i - t')f(t') dt' &= \frac{h}{2} (K_0 f_i + K_i f_0) + h \sum_{k=1}^{i-1} K_{i-k} f_k + O(h^2) \end{aligned}$$

där $i = 2, 3, 4, \dots, N$, och vi får, om termer av ordning h^2 försummas,

$$\begin{aligned} f_1 + \frac{h}{2}(K_0 f_1 + K_1 f_0) &= g_1 \\ f_i + \frac{h}{2}(K_0 f_i + K_i f_0) + h \sum_{k=1}^{i-1} K_{i-k} f_k &= g_i, \quad i = 2, 3, 4, \dots, N \end{aligned}$$

Lös ut f_i ur denna ekvation. Resultatet blir

$$\begin{cases} f_0 = g_0 \\ f_1 = \frac{1}{1 + \frac{h}{2}K_0} \left\{ g_1 - \frac{h}{2}K_1 f_0 \right\} \\ f_i = \frac{1}{1 + \frac{h}{2}K_0} \left\{ g_i - h \sum_{k=1}^{i-1} K_{i-k} f_k - \frac{h}{2}K_i f_0 \right\}, \quad i = 2, 3, 4, \dots, N \end{cases}$$

Denna algoritm genererar den okända funktionen $f(t)$ genom att först sätta $f_0 = g_0$ och beräkna f_1 , och därefter stega sig uppåt i algoritmen genom att lösa ut f_2 ($i = 2$) och sedan f_3 ($i = 3$) osv. upp till f_N ($i = N$). Vid varje nytt högre värde på i är alla de tidigare funktionsvärdena på f_i i högerledet i algoritmen kända.

Bilaga D

Riccatis differentialekvation

Riccatis differentialekvation dyker upp på flera ställen vid tillämpningar med reflektion av vågor. Detta appendix innehåller några användbara resultat om denna ekvation. Ett viktigt resultatet är att lösningen till Riccatis ekvation är ekvivalent med lösningen av en andra ordningens linjär differentialekvation.

Vi börjar med Bernoullis differentialekvation, som är

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^p(x)$$

där p antas vara ett godtyckligt reellt tal. För $p = 0, 1$ är ekvationen linjär och därmed lösbar. För övriga värden på p gör vi en transformation.

$$u(x) = y^{1-p}(x)$$

Den nya differentialekvationen i $u(x)$ blir linjär.

$$u'(x) = (1-p)a(x)u(x) + (1-p)b(x)$$

Bernoullis differentialekvation är därmed alltid lösbar.

Riccatis ekvation är kvadratisk i den beroende variabeln.

$$y'(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x)$$

Fallen $a(x) = 0$ (linjär ekvation) och $c(x) = 0$ (Bernoullis ekvation) är lösbara.

Riccatis ekvation kan omtransformeras till en andra ordningens linjär ekvation genom att definiera $u(x)$.

$$y(x) = -\frac{u'(x)}{a(x)u(x)}$$

Funktionen $u(x)$ bestäms således av $y(x)$ genom en första ordningens differentialekvation. Denna nya transformation leder till att $u(x)$ satisfierar

$$u''(x) - \left(\frac{a'(x)}{a(x)} + b(x) \right) u'(x) + a(x)c(x)u(x) = 0$$

Bilaga E

Enheter och konstanter

De elektromagnetiska grundekvationernas utseende varierar beroende på vilket enhetssystem som används. Det numera standardiserade SI-systemet används så gott som alltid i litteraturen, och denna bok utgör inget undantag. De konstanter som är relevanta för vår framställning finns angivna i detta appendix.

Ljushastigheten i vakuum c_0 har värdet (exakt)

$$c_0 = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

μ_0 och ϵ_0 är vakuums permeabilitets- respektive dielektricitetskonstant. Deras värden är (exakt)

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \\ \epsilon_0 &= \frac{1}{c_0^2 \mu_0} \text{ F/m}\end{aligned}$$

Approximativa värden på dessa konstanter är

$$\begin{aligned}\mu_0 &\approx 12.566\,370\,614 \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \\ \epsilon_0 &\approx 8.854\,187\,817 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}\end{aligned}$$

Vågimpedansen hos vakuum betecknas med

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = c_0 \mu_0 = 299\,792\,458 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \Omega \approx 376.730\,314 \Omega$$

Elektronens laddning $-e$ och massa m har värdena

$$\begin{aligned}e &\approx 1.602\,177\,33 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ m &\approx 9.109\,389\,8 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ e/m &\approx 1.758\,819\,63 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}\end{aligned}$$

Bilaga F

Beteckningar

Bra beteckningar leder till att texten blir mer lättläst och framställningen mer systematisk. De flesta beteckningar förklaras på det ställe i texten där de introduceras, medan andra som är mer allmänt förekommande finns samlade i detta appendix.

- Vektorfält betecknas med fet kursiverad stil, t.ex. $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$, och enhetsvektorer markeras med ”hatt” (^) över storheten, t.ex. $\hat{\mathbf{x}}$ och $\hat{\boldsymbol{\rho}}$.
- Vi särskiljer på en vektor $\mathbf{a}$ och dess komponentframställning i ett specifikt koordinatsystem, och betecknar komponentframställningen med en kolonnvektor eller hakparenteser runt vektorn, t.ex.

$$[\mathbf{a}] = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

där

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{x}}a_x + \hat{\mathbf{y}}a_y + \hat{\mathbf{z}}a_z$$

- Linjära vektorvärda transformationer betecknas med fet upprätt stil, t.ex. $\mathbf{A}$. En linjär transformation $\mathbf{A}$ verkande på ett vektorfält $\mathbf{u}$ blir ett nytt vektorfält $\mathbf{v}$ och vi använder skrivsättet

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$$

Den enklaste typen av linjär transformation är

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \underbrace{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})}_{\text{skalär}}$$

Vektorn $\mathbf{u}$ har här avbildats på en ny vektor riktad längs vektorn $\mathbf{a}$. Skalninen sker med vektorn $\mathbf{b}$ genom skalärprodukten $\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}$. Vi betecknar denna transformation med en *enkel dyad* och använder symbolen $\mathbf{ab}$ för transformationen, som definieras genom (skrivs antingen med eller utan parentes kring transformationen $\mathbf{ab}$)

$$\mathbf{v} = (\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{ab} \cdot \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})$$

Notera att vektorerna i transformationen $\mathbf{ab}$ skrivs samman utan tecken mellan vektorerna.

I ett specifikt koordinatsystem kan den linjära transformationen $\mathbf{A}$ ibland representeras med en 3×3 matris $[\mathbf{A}]$, där vi använder hakparenteser runt om $\mathbf{A}$ för att markera att komponentframställningen av $\mathbf{A}$ avses. Vektorn $\mathbf{v}$:s komponenter blir då

$$[\mathbf{v}] = [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{u}]$$

eller

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

- Enhetsmatrisen och nollmatrisen i tre dimensioner betecknas $[\mathbf{I}]$ respektive $[\mathbf{0}]$.

$$[\mathbf{I}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\mathbf{0}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eller i två dimensioner

$$[\mathbf{I}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\mathbf{0}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matrisen $[\mathbf{J}]$ utför en rotation av en tvådimensionell vektor en vinkel $\pi/2$ i x - y -planet,

$$[\mathbf{J}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Transponering och Hermitekonjugering av en dyad, $\mathbf{A}^t$ respektive $\mathbf{A}^\dagger$, markeras med $(^t)$ respektive dolktecknet $(^\dagger)$, och definieras genom

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \quad \mathbf{v} = \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{A})^*$$

Transponering av en matris markeras med $(^t)$ och Hermitekonjugering med dolktecknet $(^\dagger)$, dvs.

$$A_{ij}^t = A_{ji} \\ A_{ij}^\dagger = A_{ji}^*$$

- Vi använder ibland symbolerna o och O , som definieras

$$\begin{cases} f(x) = o(g(x)), & x \rightarrow a & \Longleftrightarrow & \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \\ f(x) = O(g(x)), & x \rightarrow a & \Longleftrightarrow & \frac{f(x)}{g(x)} \text{ begränsad i en omgivning av } a \end{cases}$$

- Symbolen ■ anger slut på exempel.
- Realdelen och imaginärdelen av ett komplext tal $z = x + iy$ betecknas med $\operatorname{Re} z$ respektive $\operatorname{Im} z$, dvs.

$$\operatorname{Re} z = x$$

$$\operatorname{Im} z = y$$

En stjärna (*) markerar komplexkonjugering, dvs. $z^* = x - iy$.

- Heavisides stegfunktion betecknas med $H(t)$ och definieras av

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

- Kroneckers deltafunktion betecknas med δ_{ij} och definieras av

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

- Det cylindriska koordinatsystemet (ρ, ϕ, z) definieras

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & y < 0 \end{cases} \\ z = z \end{cases}$$

Här tillhör $\rho \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$ och $z \in (-\infty, \infty)$.

- Det sfäriska koordinatsystemet (r, θ, ϕ) definieras

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \phi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & y < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Här tillhör $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ och $\phi \in [0, 2\pi)$.

Litteraturförteckning

- [1] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, Inc., Orlando, third edition, 1985.
- [2] C.F. Bohren and D.R. Huffman. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [3] O. Brander. *Vektoranalys, Modellering av fysikaliska problem i tre dimensioner*. Studentlitteratur, Lund, 1995.
- [4] L. Brillouin. *Wave propagation and group velocity*. Academic Press, New York, 1960.
- [5] K.G. Budden. *The propagation of radio waves*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [6] A. Chelkowski. *Dielectric Physics*. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1980.
- [7] H.C. Chen. *Theory of Electromagnetic Waves; A Coordinate-Free Approach*. McGraw-Hill, New York, 1983.
- [8] D.K. Cheng. *Field and Wave Electromagnetics*. Addison-Wesley, Reading, second edition, 1989.
- [9] W.C. Chew. *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*. IEEE Press, New York, 1995.
- [10] E.W. Cowan. *Basic electromagnetism*. Academic Press, New York, 1968.
- [11] R.S. Elliott. *Electromagnetics, History, Theory, and Applications*. IEEE Press, New York, 1993.
- [12] A.C. Eringen and G.A. Maugin. *Electrodynamics of Continua I, Foundations and Solid Media*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [13] A.C. Eringen and G.A. Maugin. *Electrodynamics of Continua II, Fluids and Complex Media*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [14] E. Hallén. *Elektricitetslära*. Almqvist & Wiksells, Uppsala, 1968.

- [15] A. Ishimaru. *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.
- [16] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, third edition, 1999.
- [17] O.D. Jefimenko. *Electricity and Magnetism*. Electret Scientific Company, Star City, second edition, 1989.
- [18] J.A. Kong. *Electromagnetic Wave Theory*. John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [19] J.D. Kraus. *Electromagnetics*. McGraw-Hill, New York, fourth edition, 1992.
- [20] A. Lakhtakia, V.K. Varadan, and V.V. Varadan. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields in Chiral Media*. Lecture Notes in Physics, vol. 335. Springer, New York, 1989.
- [21] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, and L.P. Pitaevskii. *Electrodynamics of Continuous Media*. Pergamon, Oxford, 1984.
- [22] S.Y. Liao. *Engineering Applications of Electromagnetic Theory*. West Publishing Company, St. Paul, 1988.
- [23] I.V. Lindell. *Methods for Electromagnetic Field Analysis*. IEEE Press, Piscataway, 1995.
- [24] I.V. Lindell, A.H. Sihvola, S.A. Tretyakov, and A.J. Viitanen. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media*. Artech House, Boston-London, 1994.
- [25] T.H. O'Dell. *The Electromagnetics of Magneto-electric Media*. North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [26] W.K.H. Panofsky and M. Phillips. *Classical electricity and magnetism*. Addison-Wesley, Reading, 1962.
- [27] B.D. Popović. *Introductory Engineering Electromagnetics*. Addison-Wesley, Reading, 1971.
- [28] D.M. Pozar. *Microwave Engineering*. John Wiley & Sons, New York, second edition, 1998.
- [29] P. Robert. *Electrical and Magnetic Properties of Materials*. Artech House, Norwood, 1988.
- [30] SIS-Standardiseringskommissionen i Sverige. *SI måttenheter*, September 1988.
- [31] J.A. Stratton. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill, New York, 1941.
- [32] I. Tolstoy. *Wave propagation*. McGraw-Hill, New York, 1973.

- [33] J. Van Bladel. *Electromagnetic Fields*. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1985.
 - [34] C.H. Yeh, K.C. and Lin. *Theory of Ionospheric Waves*. Academic Press, New York, 1972.
-

Facit

1.3 På ledarens yta är $\mathbf{S} = -\hat{\rho}_{\frac{1}{2}} a \sigma E^2$ där det elektriska fältet på ledarens yta bestäms av $I = \pi a^2 \sigma E$. Termerna i Poynting sats är

$$\iint_S \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\pi a^2 l \sigma E^2$$

$$\iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv = \pi a^2 l \sigma E^2$$

1.4 Det elektriska respektive magnetiska fältet mellan kondensatorplattorna är

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{z}} E_0 J_0 \left(\frac{\omega \rho}{c_0} \right) \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = -\hat{\phi} \frac{E_0}{\eta_0} J_1 \left(\frac{\omega \rho}{c_0} \right) \sin(\omega t + \alpha)$$

där vågimpedansen hos vakuum betecknas med

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Fasen α och amplituden E_0 är godtyckliga. Termerna i Poynting sats är

$$\iint_S \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \pi a d \frac{E_0^2}{\eta_0} J_0 \left(\frac{\omega a}{c_0} \right) J_1 \left(\frac{\omega a}{c_0} \right) \sin(2\omega t + 2\alpha)$$

$$\iiint_V \left[\mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right] dv = -\pi a d \frac{E_0^2}{\eta_0} J_0 \left(\frac{\omega a}{c_0} \right) J_1 \left(\frac{\omega a}{c_0} \right) \sin(2\omega t + 2\alpha)$$

1.5 $\omega_r = 2\sqrt{2}c_0/a$ $f_r = 13.5$ GHz

2.1

$$\mathbf{P}(t) = \begin{cases} \mathbf{0} & t \leq 0 \\ \epsilon_0 \alpha \tau \mathbf{E}_0 [1 - e^{-t/\tau}] & 0 < t < T \\ \epsilon_0 \alpha \tau \mathbf{E}_0 e^{-t/\tau} [e^{T/\tau} - 1] & t \geq T \end{cases}$$

2.2

$$\mathbf{M}(z, t) = \hat{\mathbf{x}} H(\tau) \frac{H_0 \alpha}{\beta} \left(1 - e^{-\beta \tau} \right) \quad \text{där } \tau = t - \frac{z}{c_0}$$

2.3

$$\mathbf{E}_1(t) = \begin{cases} \mathbf{0} & t \leq 0 \\ \hat{\mathbf{n}}E \left[1 + \frac{\alpha}{\beta} (1 - \cos \beta t) \right] & 0 < t < T \\ \hat{\mathbf{n}}E \frac{\alpha}{\beta} [\cos \beta(t - T) - \cos \beta t] & t \geq T \end{cases}$$

2.4

$$\mathbf{P}(y, t) = \hat{\mathbf{x}} H(\tau) \frac{E \epsilon_0 \alpha \beta}{\omega_0^2 - \beta^2} (\cos \beta \tau - \cos \omega_0 \tau) \quad \text{där } \tau = t - \frac{y}{c_0}$$

2.5

$$[\Sigma](t) = \omega_p^2 \begin{pmatrix} \cos \omega_g t & \sin \omega_g t & 0 \\ -\sin \omega_g t & \cos \omega_g t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.6

$$[\chi](t) = \frac{\omega_p^2}{\omega_g} \begin{pmatrix} \sin \omega_g t & 1 - \cos \omega_g t & 0 \\ -1 + \cos \omega_g t & \sin \omega_g t & 0 \\ 0 & 0 & \omega_g t \end{pmatrix}$$

- 3.1
1. Linjärt/Anisotropt/Icke homogent/Icke dispersivt
 2. Linjärt/Bianisotropt/Homogent/Dispersivt
 3. Linjärt/Bianisotropt/Homogent/Dispersivt
 4. Icke linjärt/Anisotropt/Homogent/Icke dispersivt
 5. Icke linjärt/Anisotropt/Homogent/Icke dispersivt
 6. Icke linjärt/Anisotropt/Homogent/Icke dispersivt
 7. Linjärt/Isotropt/Homogent/Dispersivt

3.2

$$\omega = \frac{1}{\tau}$$

3.3

$$2\alpha\beta + \alpha^2 + \omega^2 \geq 0 \text{ vilket medför } \beta \geq -\frac{\alpha}{2}$$

3.4

$$\alpha^2 - \beta^2 + \omega^2 \geq 0 \text{ vilket medför } |\beta| \leq \alpha$$

3.5

$$[\epsilon] = \begin{pmatrix} \epsilon & i\epsilon_g & 0 \\ -i\epsilon_g & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

där

$$\begin{cases} \epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_g^2} \\ \epsilon_g = -\frac{\omega_p^2 \omega_g}{\omega(\omega^2 - \omega_g^2)} \\ \epsilon_z = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{cases}$$

3.6

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_g & 0 \\ -i\mu_g & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ [\boldsymbol{\epsilon}] = \epsilon [\mathbf{I}] \end{cases}$$

där

$$\begin{cases} \mu = 1 - \frac{\omega_0 \omega_m}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ \mu_g = \frac{\omega \omega_m}{\omega^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

De båda frekvenserna ω_0 (gyromagnetiska frekvensen) och ω_m (mättnadsfrekvensen) ges explicit av

$$\begin{cases} \omega_0 = -g\mu_0 H_0 \\ \omega_m = -g\mu_0 M_0 \end{cases}$$

3.7

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2} + \frac{i\omega_n^2}{\omega(\nu - i\omega)}$$

där plasmafrekvensen för supraleddande respektive ”normalt” tillstånd är

$$\omega_s^2 = \frac{N_s e^2}{m\epsilon_0} \quad \omega_n^2 = \frac{N_n e^2}{m\epsilon_0}$$

3.9 1. Linjärt polariserat.

2. Höger cirkulärt polariserat.

3. Vänster cirkulärt polariserat.

3.10 Halvaxlarna i polarisationsellipsen är $\mathbf{a} = a(2\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}})$ och $\mathbf{b} = a(-\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})$. Fältet är höger elliptiskt polariserat.

3.11

$$\mathbf{E}(t) = \text{Re} \{ \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \}$$

där

$$\mathbf{E}_0 = E \left\{ \hat{\mathbf{e}}_1 \left[1 + \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \epsilon \right) \sin 2\phi \right] + \hat{\mathbf{e}}_2 i \left[\frac{1}{\epsilon} \sin^2 \phi + \epsilon \cos^2 \phi \right] \right\}$$

3.12 a)

$$\mathbf{E}_0 = \hat{\mathbf{e}}_1 E_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 E_2 \quad E_1, E_2 \text{ komplexa tal}$$

kan skrivas som

$$\mathbf{E}_0 = \underbrace{\frac{E_1 - iE_2}{2}(\hat{\mathbf{e}}_1 + i\hat{\mathbf{e}}_2)}_{\text{RCP}} + \underbrace{\frac{E_1 + iE_2}{2}(\hat{\mathbf{e}}_1 - i\hat{\mathbf{e}}_2)}_{\text{LCP}}$$

b)

$$|a| = |b|$$

dvs.

$$\mathbf{E}_0 = a(\mathbf{E}_+ + e^{i\alpha} \mathbf{E}_-)$$

3.14

$$\omega = \omega_0 + \omega_m$$

4.1

$$\begin{cases} e^{2ik_2d} = -\frac{r_0}{r_d} = -\frac{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_3 + \eta_2)}{(\eta_2 + \eta_1)(\eta_3 - \eta_2)} \\ e^{2ik_2d} = 1 \quad \text{vakuum p\aa b\aa da sidor} \\ e^{2ik_2d} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad \text{metallplan} \end{cases}$$

4.3

$$z = \frac{\pi c_0}{\omega} \frac{\frac{1}{2} + n}{\sqrt{\epsilon\mu} - \sqrt{\epsilon_z\mu}} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

4.4 Frekvenserna f\u00f6r passband \u00e4r

$$\begin{cases} \omega_- < \omega < \sqrt{\omega_p^2 + \omega_g^2} & \text{linj\u00e4r polarisation} \\ \omega_+ < \omega & \text{linj\u00e4r polarisation} \\ \omega > \omega_p & \text{linj\u00e4r polarisation} \end{cases}$$

$$\text{d\u00e4r } \omega_{\pm} = \pm \frac{|\omega_g|}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_g}{2}\right)^2 + \omega_p^2}.$$

4.5 $48.6 \text{ rad} \approx 7.7 \text{ varv}$.

4.7 Faradayrotation kan ske i frekvensintervallet

$$\omega < \omega_0 \approx 2\pi \cdot 10.6 \cdot 10^9 \text{ rad/s, eller } \omega > \omega_0 + \omega_m \approx 2\pi \cdot (10.6 + 7.03) \cdot 10^9 \text{ rad/s}$$

Rotationsvinkeln per l\u00e4ngdenhet blir

$$\frac{\sqrt{\epsilon}}{2c_0} \omega \left\{ \sqrt{1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 + \omega}} - \sqrt{1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 - \omega}} \right\} \approx 400 \text{ rad/m} \approx 230^\circ/\text{cm}$$

4.9

$$\cos \phi = -\frac{\kappa}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

dvs, vinkeln ϕ \u00e4r r\u00e4t om materialet \u00e4r reciprokt, annars inte.

4.10

$$\begin{cases} \Gamma_{\pm} = \sqrt{\epsilon \mp \epsilon_g} / \sqrt{\mu} \\ r_{\parallel} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - \Gamma_+}{1 + \Gamma_+} + \frac{1 - \Gamma_-}{1 + \Gamma_-} \right\} \\ r_{\perp} = i \frac{\Gamma_- - \Gamma_+}{(1 + \Gamma_+)(1 + \Gamma_-)} \\ t_+ = \frac{1}{1 + \Gamma_+} \\ t_- = \frac{1}{1 + \Gamma_-} \end{cases}$$

4.11

$$\omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \quad (\omega = \omega_g \text{ ingen rot})$$

4.12

$$\begin{cases} \mathbf{E}^r(\omega) = r_{\parallel} \mathbf{E}^i(\omega) + r_{\perp} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^i(\omega) \\ \mathbf{E}^t(\omega) = t_{\parallel} \mathbf{E}^i(\omega) + t_{\perp} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^i(\omega) \end{cases}$$

där

$$\begin{cases} r_{\parallel} = \frac{1}{2} \frac{[(1 - \Gamma_+)(1 + \Gamma_-) + (1 + \Gamma_+)(1 - \Gamma_-)] (1 - e^{i(k_+ + k_-)d})}{(1 + \Gamma_+)(1 + \Gamma_-) - (1 - \Gamma_+)(1 - \Gamma_-) e^{i(k_+ + k_-)d}} \\ r_{\perp} = i \frac{(\Gamma_+ - \Gamma_-) (1 - e^{i(k_+ + k_-)d})}{(1 + \Gamma_+)(1 + \Gamma_-) - (1 - \Gamma_+)(1 - \Gamma_-) e^{i(k_+ + k_-)d}} \\ t_{\parallel} = \frac{e^{-ik_1 d} (e^{ik_+ d} + e^{ik_- d}) (\Gamma_+ + \Gamma_-)}{(1 + \Gamma_+)(1 + \Gamma_-) - (1 - \Gamma_+)(1 - \Gamma_-) e^{i(k_+ + k_-)d}} \\ t_{\perp} = i \frac{e^{-ik_1 d} (e^{ik_+ d} - e^{ik_- d}) (\Gamma_+ + \Gamma_-)}{(1 + \Gamma_+)(1 + \Gamma_-) - (1 - \Gamma_+)(1 - \Gamma_-) e^{i(k_+ + k_-)d}} \end{cases}$$

och

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c_0} \left((\epsilon\mu - \kappa^2)^{1/2} \pm \chi \right) \quad \Gamma_{\pm}(\omega) = \frac{1}{\mu} \left((\epsilon\mu - \kappa^2)^{1/2} \mp i\kappa \right)$$

Rotationen av polarisationsplanet är

$$\phi = -\frac{\omega d \chi}{c_0}$$

5.2 $b = 12$ cm.

6.1

$$i \frac{c_0}{\omega} \frac{dZ(z)}{dz} - \epsilon(z) Z^2(z) + 1 = 0$$

6.2

$$\begin{cases} r(\omega) = \frac{r_0(\omega) + r_d(\omega) e^{2ikd}}{1 + r_0(\omega) r_d(\omega) e^{2ikd}} \\ r_0(\omega) = \frac{(\mu(\omega)/\epsilon(\omega))^{1/2} - 1}{(\mu(\omega)/\epsilon(\omega))^{1/2} + 1} \\ r_d(\omega) = \frac{(\mu_b(\omega)/\epsilon_b(\omega))^{1/2} - (\mu(\omega)/\epsilon(\omega))^{1/2}}{(\mu_b(\omega)/\epsilon_b(\omega))^{1/2} + (\mu(\omega)/\epsilon(\omega))^{1/2}} \\ k = \frac{\omega}{c_0} (\epsilon(\omega)\mu(\omega))^{1/2} \end{cases}$$

6.3

$$\begin{cases} t(\omega) = \frac{(1 + r_0(\omega)) (1 + r_d(\omega)) e^{ikd}}{1 + r_0(\omega) r_d(\omega) e^{2ikd}} \\ r_0(\omega) = \frac{(\mu(\omega)/\epsilon(\omega))^{1/2} - 1}{(\mu(\omega)/\epsilon(\omega))^{1/2} + 1} \\ r_d(\omega) = \frac{(\mu_b(\omega)/\epsilon_b(\omega))^{1/2} - (\mu(\omega)/\epsilon(\omega))^{1/2}}{(\mu_b(\omega)/\epsilon_b(\omega))^{1/2} + (\mu(\omega)/\epsilon(\omega))^{1/2}} \\ k = \frac{\omega}{c_0} (\epsilon(\omega)\mu(\omega))^{1/2} \end{cases}$$

Sakregister

- Admittans, 159
- Admittansdyad, 70, 133
 - bi-isotropa material, 114
 - gyrotropa material, 103, 105
 - isotropa material, 72
 - uniaxiala material, 85
- Aktiva material, 46
- Ampères (generaliserade) lag, 2
- Axiell vektor, 177
- Besselfunktioner, 167–169
- Bi-isotropa material, 112–119
 - kiralitetsparameter, 112
 - passiva material, 60
 - reciprocitetsparameter, 112
 - reflektionskoefficient, 118
 - transmissionskoefficient, 118
 - vågtal, 113
- Brewster vinklar, 139
- Brytningsindex, 70
- Debyemodell
 - Cole-Cole representation, 59
 - frekvensdomän, 42
 - tidsdomän, 27–29
- Dielektricitetsdyad, 39
- Dielektricitetsfunktion, 40
 - vakuum, 185
- Dispersion, 17
- Drudes modell, 26
- Dubbelbrytning, 88
- Dyad, 172–175
 - definition, 178
 - Hermitekonjugat, 175
 - Hermitesk, 175
 - invers, 175
 - komplexbkonjugat, 175
 - symmetrisk, 175
 - transponat, 174
 - uppdelning, 174
- Dyadic, 173
- Egenmod, 69
- Elektrisk flödestäthet, 2
- Elektrisk fältstyrka, 2
- Enkel dyad, 172, 187
- Eulervinklar, 178
- Faradayrotation, 107–111, 121
 - vridningsvinkel, 110
- Faradays induktionslag, 2
- Fashastighet, 70
- Ferritmaterial, 60, 100, 121
 - faradayrotation, 121
- Fouriertransform, 35–37, 127
- Fresnels reflektionskoefficienter, 136
- Fundamentalekvationen, 68, 129
- Förlustfria material, 46
 - konstitutiva relationer, 46
- Gauss lag, 2
- Gyromagnetiska kvoten, 60
- Gyrotrop frekvens, 33, 100
- Gyrotropa material, 98–111
 - passband, 107
 - reflektionskoefficient, 122
 - vågtal, 103, 104
- Hankelfunktioner, 167–169
- Impedansdyad, 70
 - isotropa material, 72
- Infallsvinkel, 137
- Integralrepresentation, 134
- Invariants under tidstranslation, 16
- Isotropa material, 16–22, 30, 71–80, 129–143

- reflektionskoefficient, 74, 79
- transmissionskoefficient, 74, 79
- vågta, 71
- Jonosfär, 120
- k -yt, 92
- Kapacitivitet, 40
- Kausalitet, 16
- Kirala material, 114
- Kiralitetsparameter, 112
- Konstitutiva relationer, 3, 16–22, 29–31
 - an-isotropa material, 30
 - bi-an-isotropa material, 30
 - bi-isotropa material, 30
 - dielektricitetsdyad, 39
 - dielektricitetsfunktion, 40
 - dispersionsmodell, 22
 - ferritmaterial, 60
 - förlustfria material, 46
 - flytande kristaller, 58
 - gyrotropa material, 32, 59, 99
 - isotropa material, 30
 - kapacitivitet, 40
 - Kerr effekt, 59
 - klassificering, 29–31, 39
 - konduktivitetsmodell, 22
 - kristallstruktur, 41
 - olika formuleringar, 15
 - optisk aktivitet, 58
 - permeabilitetsdyad, 39
 - permeabilitetsfunktion, 40
 - piezoelektriska material, 59
 - pyroelektriska material, 58
 - reciprocitet, 50
 - supraledare, 59
 - tidsharmoniska fält, 38–43
 - uniaxiala material, 41
 - vatten, 42
- Laddningens kontinuitetsekvation, 2
 - tidsharmoniska fält, 37
- Laddningskonservering, 2
- Laddningstäthet, 2
 - yt-laddningstäthet, 7
- Ledningsförmåga, 20–22, 27, 40
- Linjära material, 16
- Linjära transformationer, 172–175
- Lorentz-kraft, 2
- Lorentzmodell
 - frekvensdomän, 41
 - tidsdomän, 23–27
- Magnetisering, 4
 - inducerad, 4
 - permanent, 4
- Magnetisk dipol, 138
- Magnetisk flödestäthet, 2
- Magnetisk fältstyrka, 2
- Magneto-elektriska material, 31
- Materialbestämning, 77
- Matriser, 172–175
- Maxwells fältekvationer, 1, 2
 - inhomogena material, 154
 - svaga lösningar, 6
 - tidsharmoniska fält, 37
- Mod, 69
- Negativt uniaxiala material, 41, 81
- Neumannfunktioner, 167–169
- Ohms lag, 20, 40
- Optisk aktivitet
 - vridningsvinkel, 115
- Optisk axel, 41
- Optisk respons, 19, 42
- Optiskt aktiva material, 31, 58, 114–116
- Ortogonal matris, 177
- Par-axiala approximationen, 144–149
- Passiva material, 46
 - anisotropa material, 47
 - bi-isotropa material, 60
- Permeabilitetsdyad, 39
- Permeabilitetsfunktion, 40
 - vakuum, 185
- Plana vågor, 69–70
 - egenmod, 69
 - fas, 70
 - fashastighet, 70

- våglängd, 70
- vågta, 69
- Plasmafrekvens, 24, 100
- Polär vektor, 177
- Polarisation, 4
 - inducerad, 4
 - permanent, 4
- Polarisationsellips, 50–54
 - cirkulärpolarisation, 53
 - högerpolarisation, 53
 - linjär polarisation, 53
 - vänsterpolarisation, 53
- Positivt uniaxiala material, 41, 81
- Poyntings sats, 9, 45
 - tidsharmoniska fält, 45
- Poyntings vektor, 9
- Projection
 - vektorer, 172
- Propagatorer, 162
 - dynamik, 163
 - randvärden, 163
- Radom, 80
- Randvillkor, 7
 - ledare, 8
- Reciprocitet, 47–50
 - konstitutiva relationer, 50
- Reflektans, 75, 80, 97, 119
- Reflektionskoefficient
 - bi-isotropa material, 118
 - Fresnel, 136
 - gyrotropa material, 122
 - inhomogena material, 156
 - isotropa material, 74, 136, 137
 - uniaxiala material, 97
 - ändlig platta, 79, 143
- Relaxationsmodell
 - frekvensdomän, 42
 - tidsdomän, 27–29
- Relaxationstid, 27
 - etanol, 42
- Resonansmodell
 - frekvensdomän, 41
 - tidsdomän, 23–27
- Riccatis differentialekvation, 158, 183
- Riktningscosiner, 176
- Rotation av koordinatsystem, 176–180
- Rotationsmatris, 179
- Sfärisk våg, 138
- Similaritetstransformation, 81, 100, 178
- Strålnippen, 144
 - bredd, 148
- Strömtäthet, 2
 - ytströmtäthet, 7
- Susceptibilitetsfunktion, 18
 - generaliserad, 30
- Tidsharmoniska fält, 35–37
 - aktiva material, 46
 - förlustfria material, 46
 - passiva material, 46
 - villkor för reella fält, 36
- Tidsmedelvärde, 44
- Transmissionskoefficient
 - bi-isotropa material, 118
 - inhomogena material, 161
 - isotropa material, 74, 136
 - uniaxiala material, 97
 - ändlig platta, 79, 143
- Transmissionsvinkel, 137
- Transmittans, 80
- Uniaxiala material, 41, 81–98
 - egenmoder, 84
 - extraordinär våg, 84, 86
 - fashastigheter, 84
 - k -ytta, 90–94
 - ordinär våg, 84, 85
 - reflektionskoefficient, 97
 - transmissionskoefficient, 97
 - vågta, 84
- Utbredningsplan, 131
- Vågimpedans
 - isotropa material, 72
 - vakuum, 185
- Våglängd, 70
- Vågta, 69
 - bi-isotropa material, 113
 - gyrotropa material, 103, 104

- isotropa material, 71
- longitudinellt, 132
- transversellt, 128, 130, 133
- uniaxiala material, 84
- Våguppdelning, 154–156
- van der Pols resultat, 139, 149
- Vektor, 171–172
 - axiell vektor, 177
 - definition, 177
 - polär vektor, 177
 - vektorfält, 171
- Vektorfält, 171
- Villkor för vågutbredning, 70
- Vinkelrätt infall, 129, 153
- Volterras integralekvation, 77, 181–182
- Ytladdningstäthet, 7
- Ytströmtäthet, 7

Viktiga vektoridentiteter

- (1) $(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c}((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c})$
- (2) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
- (3) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- (4) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

Integrationsformler

Stokes sats och till denna analoga satser

- (1) $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$
- (2) $\iint_S \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \varphi \, dS = \int_C \varphi \, d\mathbf{r}$
- (3) $\iint_S (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla) \times \mathbf{A} \, dS = \int_C d\mathbf{r} \times \mathbf{A}$

Gauss sats (divergenssatsen) och till denna analoga satser

- (1) $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$
- (2) $\iiint_V \nabla \varphi \, dv = \iint_S \varphi \hat{\mathbf{n}} \, dS$
- (3) $\iiint_V \nabla \times \mathbf{A} \, dv = \iint_S \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A} \, dS$

Greens formler

- (1) $\iiint_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) \, dv = \iint_S (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$
- (2) $\iiint_V (\psi \nabla^2 \mathbf{A} - \mathbf{A} \nabla^2 \psi) \, dv$
 $= \iint_S (\nabla \psi \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}) - \nabla \psi (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{A}) - \psi (\hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{A})) + \hat{\mathbf{n}} \psi (\nabla \cdot \mathbf{A})) \, dS$

Samband mellan basvektorer

Cylindriska koordinater (ρ, ϕ, z)

Sfäriska koordinater (r, θ, ϕ)

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & y < 0 \end{cases} \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \phi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & y < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$(r, \theta, \phi) \longrightarrow (x, y, z)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \phi + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{x}} \cos \theta \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \cos \theta \sin \phi - \hat{\mathbf{z}} \sin \theta \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\mathbf{x}} \sin \phi + \hat{\mathbf{y}} \cos \phi \end{cases}$$

$$(x, y, z) \longrightarrow (r, \theta, \phi)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{r}} \sin \theta \cos \phi + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos \theta \cos \phi - \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin \phi \\ \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{r}} \sin \theta \sin \phi + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos \theta \sin \phi + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos \phi \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{r}} \cos \theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta \end{cases}$$

$$(\rho, \phi, z) \longrightarrow (x, y, z)$$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\mathbf{x}} \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \phi = (\hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y)/\sqrt{x^2 + y^2} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\mathbf{x}} \sin \phi + \hat{\mathbf{y}} \cos \phi = (-\hat{\mathbf{x}}y + \hat{\mathbf{y}}x)/\sqrt{x^2 + y^2} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

$$(x, y, z) \longrightarrow (\rho, \phi, z)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \cos \phi - \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin \phi \\ \hat{\mathbf{y}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \sin \phi + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos \phi \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

$$(r, \theta, \phi) \longrightarrow (\rho, \phi, z)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \sin \theta + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \cos \theta - \hat{\mathbf{z}} \sin \theta \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{cases}$$

$$(\rho, \phi, z) \longrightarrow (r, \theta, \phi)$$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\mathbf{r}} \sin \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos \theta \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{r}} \cos \theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta \end{cases}$$

