



LUND UNIVERSITY

Processidentifiering - en jämförelse av störningskänsligheten hos spektralanalys och Maximun Likelihoodmetoden

Jonson, Anders; Ström, Lars-Magnus

1969

Document Version:
Förlagets slutgiltiga version

[Link to publication](#)

Citation for published version (APA):

Jonson, A., & Ström, L.-M. (1969). *Processidentifiering - en jämförelse av störningskänsligheten hos spektralanalys och Maximun Likelihoodmetoden*. (Technical Reports TFRT-7007). Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology (LTH).

Total number of authors:
2

General rights

Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: <https://creativecommons.org/licenses/>

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117
221 00 Lund
+46 46-222 00 00

PROCESSIDENTIFIERING – EN JÄMFÖRELSE AV
STÖRNINGSKÄNSLIGHETEN HOS SPEKTRALANALYS
OCH MAXIMUM LIKELIHOODMETODEN

ANDERS JONSON

LARS-MAGNUS STRÖM

RAPPORT 6917 AUGUSTI 1969
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
INST. FÖR REGLERINGSTEKNIK

PROCESSIDENTIFIERING - EN JÄMFÖRELSE AV STÖRNINGSKÄNSLIGHETEN
HOS SPEKTRALANALYS OCH MAXIMUM LIKELIHOODMETODEN †

Anders Jonson

Lars-Magnus Ström

ABSTRACT

Första delen av denna rapport behandlar störningskänsligheten hos spektralanalys och maximum likelihoodmetoden (ML-metoden). På en simulerad modell har störningar i form av vitt brus inlagts både före och efter själva modellfiltret. Dessa två störningar har varierats på olika sätt och några olika fall har studerats. Insignalen har i samtliga fall varit en PRBS-signal.

Jämförelser mellan spektralanalys och ML-metoden har gjorts genom att studera varje methods frekvenskurvor. För ML-metoden har dessa frekvenskurvor åstadkommit genom att en kontinuerlig modell har beräknats ur den samplade modell, som erhålles vid identifieringen. Dessutom har de genom ML-metoden erhållna viktfunktionerna jämförts med spektralanalysens korskovarianskurva.

I en senare del av rapporten har försök gjorts att skatta modellparametrarna direkt ur korskovarianskurvan, då insignalen är vittbrus eller en PRBS-signal. Dessutom har standardavvikelsen hos de viktfunktioner, som erhålles ur korskovarianskurvan, då insignalen är vitt brus, beräknats.

† Detta arbete har utförts med understöd av Styrelsen för Teknisk Utveckling under kontrakt 69-631/U489.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING	Sid.
I. INLEDNING	1
II. BESKRIVNING AV MODELLEN	2
1. Tidskontinuerlig modell	2
2. Övergång till samplat system	4
2.1 Val av samplingsintervall	4
2.2 Sampling av modellen	5
2.3 Filter för störningen	7
III. UTFÖRDA IDENTIFIERINGAR	10
1. Beskrivning av de olika försöksserierna	10
2. Resultat av gjorda försök	10
3. Sammanfattning och kommentarer	27
IV. UTNYTTJANDE AV KORSKOVARIANSEN FÖR BESTÄMNING AV MODELLPARAMETRAR	28
1. Beräkning av parametrarna	28
2. Beräkning av variansen hos parametrarna	30
3. Beräkning av varians enligt Monte Carlo metoden	32
4. Beräkning av a-parametrarna ur en tidigare simulerad modell	33
V. SAMMANFATTNING	34
LITTERATURFÖRTECKNING	35
APPENDIX: 1. Program ALSTRA	
2. Program MAXLI	
3. Program TESOVER	
4. Program TESTIMRE	
5. Program ADAM	
6. Program CROSS	

I. INLEDNING

I detta arbete testas två olika identifieringsmetoder på en modell där störningar av varierande storlek förekommer. Avsikten är att få en uppfattning om hur mycket störningarna påverkar identifieringens noggrannhet d.v.s. hur störningskänsliga identifieringsmetoderna är.

De metoder, som testas, är maximum likelihood-metoden (K.J. Åström och T. Bohlin, [4]) samt beräkning av autokovarians och spektrum enligt vanlig metod.

Vid identifiering enligt maximum likelihood-metoden har ett FORTRAN-program, som är utarbetat av I. Gustavsson (I. Gustavsson, [3]) använts. Vid beräkning av autokovarians och spektraltäthet har ett FORTRAN-program, som finns tillgängligt vid Uppsala datacentral, använts. (Auto-Correlation Analysis, FORTRAN, programmerat av John H. Devinney 17 aug. 1961). Detta program användes vid beräkningen av spektrum, ett fönster av "hamming"-typ. Denna metod finns beskriven i referens [2] (R.B. Blackman and V.W. Tukey, [2]).

I ett avslutande kapitel behandlas också några sätt att beräkna modellparametrarna ur korskovarianserna.

II. BESKRIVNING AV MODELLEN

1. TIDSKONTINUERLIG MODELL

Vi har utgått från en kontinuerlig överföringsfunktion av andra ordningen enligt:

$$G(S) = \frac{\beta_1}{S + \alpha_1} + \frac{\beta_2}{S + \alpha_2}$$

$1/\alpha_1$ och $1/\alpha_2$ är tidskonstanter.

Skillnaden mellan tidskonstanterna görs relativt stor, vilket troligen försvårar identifieringen. Dessutom vill vi undersöka om det uppstår några skillnader ur identifieringssynpunkt för en minimumfas överföringsfunktion och en icke minimumfas. Minimumfas innebär i detta fall att täljarens nollställe placeras i vänstra halvplanet. Icke minimumfas representeras här av en överföringsfunktion med ett nollställe i högra halvplanet som är spegelbilden i imaginära axeln av nollstället för minimumfas. β_1 och α_2 sättes lika med 1, vilket icke innebär någon inskränkning.

$$\text{Sätt } \begin{cases} \alpha_1 = a^2 \\ \beta_2 = k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} G(S) &= G_1(S) + G_2(S) = \frac{1}{S + a^2} + \frac{k}{S + 1} = \frac{S + 1 + kS + a^2k}{(S + a^2)(S + 1)} = \\ &= \frac{S(1 + k) + (1 + a^2k)}{(S + a^2)(S + 1)} \end{aligned}$$

Detta ger :

$$S = -\frac{1 + a^2k}{1 + k}$$

$$\frac{1 + a^2k}{1 + k} = -\frac{1 - a^2k}{1 - k} \quad \rightarrow \quad k = \pm \frac{1}{a}$$

Vi får alltså:

$$G(S) = \frac{1}{S + a^2} + \frac{1}{a(S + 1)} = \frac{a + 1}{a} \cdot \frac{S + a}{(S + a^2)(S + 1)} \quad (\text{II:1})$$

Ett lämpligt värde på kvoten mellan tidskonstanterna är 25.
 Detta ger $a = 5$.

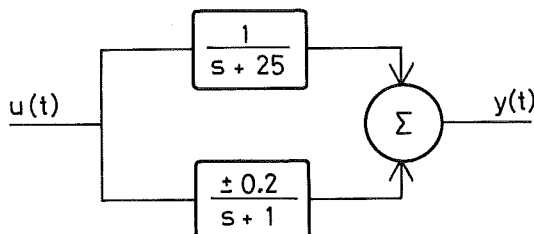


Fig. II:1 $G(S) = G_1(S) \pm G_2(S)$
 $+$ = minimumfas $-$ = icke minimumfas

Av ekv. (II:1) framgår, att amplitudkurvan blir lika för minimumfas och icke minimumfas så när som på en konstant faktor.

När man mäter på ett system i praktiken får man en utsignal, som avviker från den, man skulle få med en modellbeskrivning enligt fig. II:1. Denna avvikelse kan oftast beskrivas genom två slag av störningar, nämligen störningar på själva systemet och fel, som uppstått vid mätningen. Dessa störningar realiseras genom att lägga in vitt brus enl. fig. II:2.

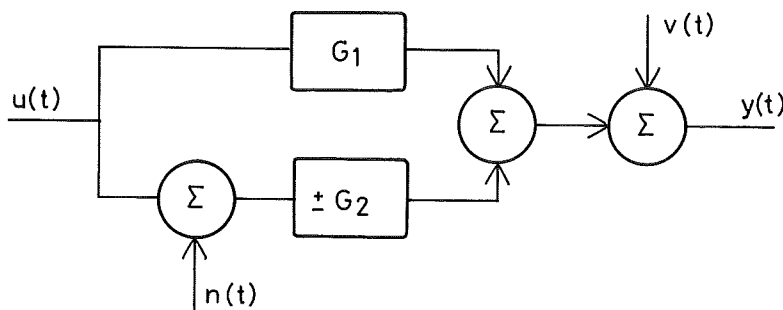


Fig. II:2 $n(t) \in N(0, \sigma_n^2)$
 $v(t) \in N(0, \sigma_v^2)$

Vi har nu skapat en modell, som på ett realistiskt sätt beskriver ett praktiskt system. Man kan nu realisera olika störningssituationer genom att variera σ_n och σ_v .

2. ÖVERGÅNG TILL SAMPLAT SYSTEM

I de flesta fall utföres mätningar vid diskreta tidpunkter. Vi övergår därför från en tidskontinuerlig till en tidsdiskret modellbeskrivning. Man ställs då inför problemet att välja lämpligt samplingsintervall.

2.1 VAL AV SAMPLINGSINTERVALL

Vid spektralanalys gäller Bendat & Piersol, [1], att samplingstiden ΔT måste väljas sådan, att $\Delta T \leq \frac{1}{2f_c}$ där f_c är den högsta frekvens (Hz), man vill ha med.

De tre brytpunkterna för asymptoten i Bode-diagrammet är $\frac{1}{2\pi}$, $\frac{5}{2\pi}$ och $\frac{25}{2\pi}$ Hz. Vi bör välja en högsta frekvens, som väl överstiger $\frac{25}{2\pi}$ Hz. Väljes t.ex. $f_c = 10$ Hz fås $\Delta T \leq 0,05$. Antag, att vi väljer $\Delta T = 0,05$ sek.

Maximala tidsförskjutningen (τ_{\max}), för vilken kovariansen beräknas, är $m\Delta T$. Vi väljer $m = 100$. Detta ger $\tau_{\max} = 5$ sek. Vi får nu frekvensupplösningen $B = \frac{1}{m\Delta T} = \frac{1}{5}$ Hz.

Antalet mätpunkter N bör väljas minst 10 m . Vi väljer $N = 1000$ mätpunkter.

Sammanfattningsvis:

Samplingstid	$\Delta T = 0,05$ sek
Antalet mätpunkter	$N = 1000$ värden
Maximal förskjutning	$m = 100$ mätpunkter

2.2 SAMPLING AV MODELLEN

Vi har den tidskontinuerliga modellen:

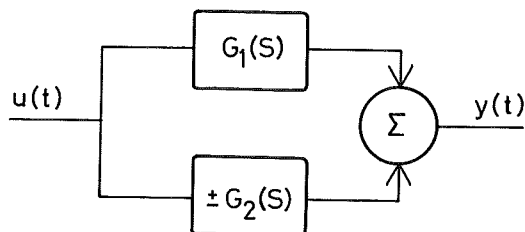


Fig. II:3

$$G_1(S) = \frac{1}{S + a^2}$$

$$G_2(S) = \frac{1}{a(S + 1)}$$

Vi har valt samplingstiden $\Delta T = 0,05$ sek.

Enl. referens 4, sid. III:4 (K.J. Åström, [4]) fås

$$\underline{G_1(S)}$$

$$\phi_1 = e^{-a^2 \Delta T}$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{a^2} (1 - e^{-a^2 \Delta T})$$

$$\underline{G_2(S)}$$

$$\phi_2 = e^{-\Delta T}$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{a} (1 - e^{-\Delta T})$$

Där ϕ och Γ är koefficienter i den samplade överföringsfunktionen enligt:

$$H_1(z^{-1}) = \frac{\Gamma_1 z^{-1}}{1 - \phi_1 z^{-1}}$$

$$H_2(z^{-1}) = \frac{\Gamma_2 z^{-1}}{1 - \phi_2 z^{-1}}$$

$$H(z^{-1}) = H_1(z^{-1}) * H_2(z^{-1})$$

$$H^+(z^{-1}) = H_1(z^{-1}) + H_2(z^{-1})$$

$$H^-(z^{-1}) = H_1(z^{-1}) - H_2(z^{-1})$$

$$\text{med } \begin{cases} a = 5 \\ \Delta T = 0,05 \end{cases} \quad \text{fås}$$

$$H^+(z^{-1}) = \frac{0,0383 z^{-1}(1 - 0,7820 z^{-1})}{(1 - 0,2865 z^{-1})(1 - 0,9512 z^{-1})}$$

$$H^-(z^{-1}) = \frac{0,0190 z^{-1}(1 - 1,280 z^{-1})}{(1 - 0,2865 z^{-1})(1 - 0,9512 z^{-1})}$$

För att få rimliga förhållanden mellan ut- och insignal multipliceras $H(z^{-1})$ med en faktor 100.

Vår modell har nu alltså följande utseende:

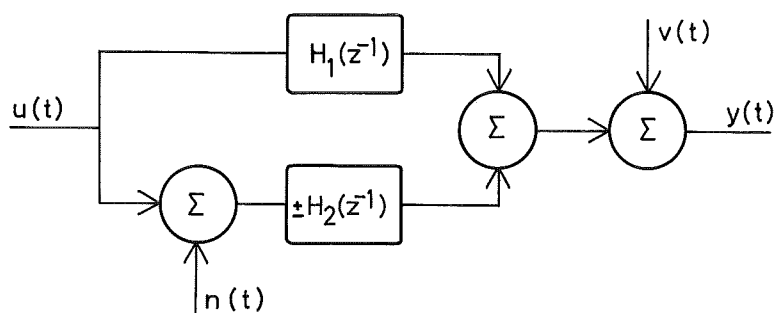


Fig. II:4

$$n(t) \in N(0, \sigma_n)$$

$$v(t) \in N(0, \sigma_v)$$

Skrives $H(z^{-1})$ på formen $\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ där

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

fås värden på koefficienterna för H^+ (minimumfas) och H^- (icke minimumfas) enligt tabell II:1.

Tabell II:1

	H^+	H^-
a_1	-1.238	-1.238
a_2	0.273	0.273
b_1	3.829	1.879
b_2	-2.994	-2.435

2.3 FILTER FÖR STÖRNINGEN

Istället för att beskriva systemet med två vita brus införes en identisk modell bestående av en brus källa och ett filter.

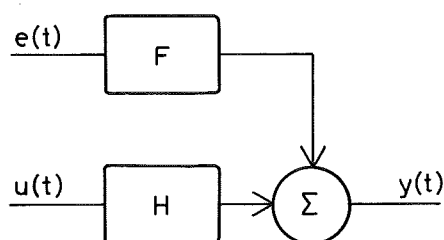


Fig. II:5

där $e(t) \in N(0,1)$

$$H(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad \text{och} \quad F(z^{-1}) = \lambda \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}$$

$\lambda =$ reellt positivt tal.

Enligt fig. II:4 fås:

$$y(t) = \left[\frac{\Gamma_1}{z - \phi_1} + \frac{\Gamma_2}{z - \phi_2} \right] u(t) + \left[\frac{v(t)}{z - \phi_2} + \frac{\Gamma_2}{z - \phi_2} n(t) \right]$$

Brusets spektraltäthetsfunktion vid utgången ges av:

$$\phi_1(z) = \sigma_v^2 + \frac{\Gamma_2^2 \sigma_n^2}{(z - \phi_2)(z^{-1} - \phi_2)}$$

(K.J. Åström, [5])

Enligt fig. II:5 fås:

$$\phi_2(z) = \lambda^2 \frac{(z - c)(z^{-1} - c)}{(z - \phi_2)(z^{-1} - \phi_2)}$$

$\phi_1(z) \equiv \phi_2(z)$ ger

$$\begin{cases} \lambda^2 c = \phi_2 \sigma_v^2 & \text{(II:2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda^2 (1 + c^2) = \sigma_v^2 (1 + \phi_2^2) + \Gamma_2^2 \sigma_n^2 & \text{(II:3)} \end{cases}$$

Vi får genom division mellan (II:2) och (II:3):

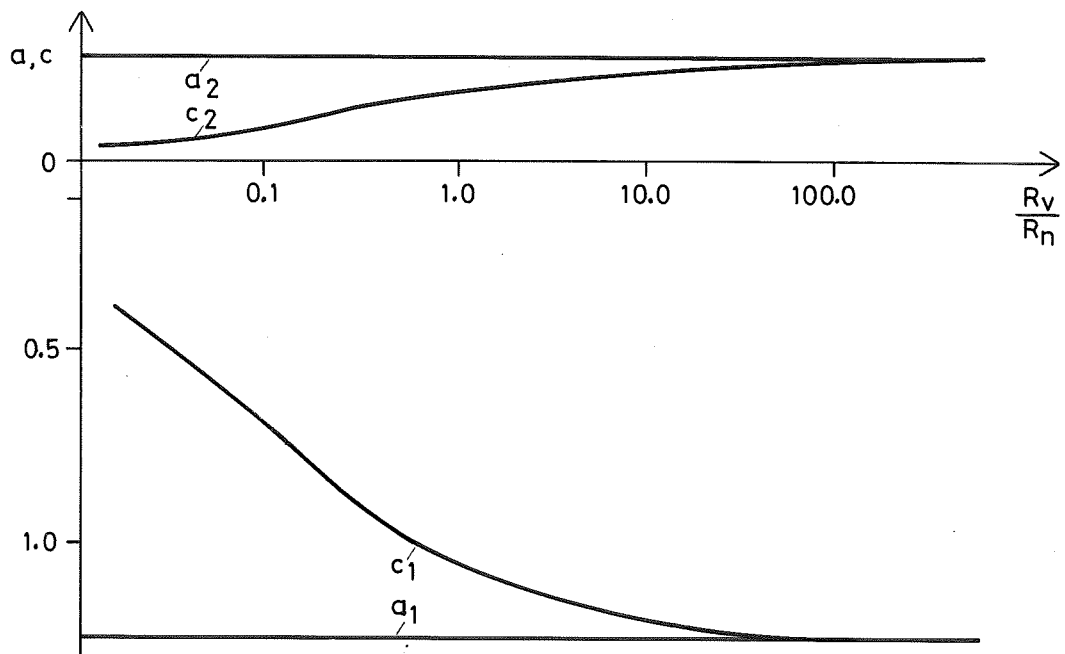
$$c = \frac{\sigma_v^2 (1 + \phi_2^2) + \Gamma_2^2 \sigma_n^2}{2\sigma_v^2 \cdot \phi_2} \pm \frac{\left[\sigma_v^2 (1 + \phi_2^2) + \Gamma_2^2 \sigma_n^2 \right]^2}{4\sigma_v^2 \phi_2^2} - 1$$

Härmed kan c beräknas för ett bestämt förhållande mellan σ_n och σ_v , som sedan genom (II:2) ger λ .

I polynomet $c(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}$ ges c_1 och c_2 av:

$$\begin{cases} c_1 = -(c + \phi_1) & \text{(II:4)} \\ c_2 = c \phi_1 & \text{(II:5)} \end{cases}$$

I fig. II:6 är c_1 och c_2 plottade som funktion av kvoten mellan $\frac{R_v}{R_n}$ där R_v och R_n är mätfelets resp. systembrusets varianser sett från utgången (se vidare kap. III).



R_v = mätfelets varians

R_n = systembrusets varians sett från utgången

I figuren är även a_1 och a_2 inprickade

Fig. II:6 C-parametrarna som funktion av kvoten $\frac{R_v}{R_n}$

III. UTFÖRDA IDENTIFIERINGAR

1. BESKRIVNING AV DE OLIKA FÖRSÖKSSERIerna

Med den i föregående kapitel beskrivna modellen utfördes ett antal simuleringar. Vid uppbyggnad av de olika försöken utgick vi från mätfelets och systembrusets varians sett från utgången. Vi valde att studera fyra olika fall.

Först sattes mätfelets och systembrusets varians lika. I följande två fall sattes systembrusets varians 50 gånger större än mätfelets resp. mätfelets varians 50 gånger större än systembrusets. I det sista fallet sattes på nytt varianserna lika dock med ett hundra gånger större belopp än i första fallet. För samtliga fall ovan identifieras såväl minimumfas som icke minimumfas.

2. RESULTAT AV GJORDA FÖRSÖK

Fall A:

Mätfelets varians vid utgången ges av $R_v = \sigma_v^2$ och systembrusets varians likaså vid utgången ges av:

$$R_n = \frac{\Gamma_2^2}{1 - \phi_2^2} \sigma_n^2 \quad (\text{K.J. Åström, [6]})$$

med beteckningar enligt modellen i föregående kapitel.

Sättes nu $\sigma_v^2 = 1$ och $R_v = R_n$ fås enligt ekv. (II:2), (II:3), (II:4) och (II:5):

$$c_1 = -1,015$$

$$c_2 = 0,209$$

$$\lambda = 1,145$$

Märk att

$$\sigma_n^2 = \frac{1 - \phi_2^2}{\Gamma_2^2} R_n \approx 0,1 \quad (R_n = 1)$$

Modellen får följande utseende:

$$y(t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t) + \lambda \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} e(t) \quad (\text{III:1})$$

$$\begin{aligned} \text{där} \quad A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \\ B(z^{-1}) &= b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \\ C(z^{-1}) &= 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} \end{aligned}$$

I ett FORTRAN-program ALSTRA (se appendix:1) genererades y-värden. Som insignal användes en PRBS-signal med perioden 263, och som brus-källa normalfördelade slungstal $e(t) \in N(0,1)$.

Spektrum och kovarians erhöles genom det i inledningen angivna FORTRAN-programmet. Med hjälp av ett program MAXLI (se appendix: 2) identifierades enligt maximum likelihood-metoden.

Vid identifiering enligt maximum likelihood-metoden (ML-metoden) fås direkt a-, b- och c-parametrarna med systemuppställning enl. III:1. Tabellerna nedan jämför identifierade parametrar med originalparametrar.

Tabell III:1 Minimumfas

	Genererade data	Originaldata
a_1	-1,229 ± 0,017	-1,238
a_2	0,264 ± 0,014	0,273
b_1	3,805 ± 0,036	3,829
b_2	-2,954 ± 0,052	-2,994
c_1	-1,013 ± 0,035	-1,015
c_2	0,214 ± 0,034	0,209
λ	1,154	1,145
v	66,562	

Tabell III:2 Icke minimifas

	Genererade data	Originaldata
a_1	$-1,230 \pm 0,014$	$-1,238$
a_2	$0,266 \pm 0,014$	$0,273$
b_1	$1,851 \pm 0,036$	$1,879$
b_2	$-2,414 \pm 0,036$	$-2,435$
c_1	$-1,003 \pm 0,034$	$-1,015$
c_2	$0,206 \pm 0,034$	$0,209$
λ	$1,145$	$1,145$
v	$65,582$	

För att kunna jämföra resultaten från de båda identifieringsmetoderna uppritades Bode-diagram (amplitud, fas).

För ML-metoden erhöills Bode-diagrammen ur ett FORTRAN-program TESOVER (se appendix:3). Spektralanalysprogrammet ger direkt Bode-diagrammens värden.

Dessutom jämfördes korskovariansen med impulssvaret för de identifierade ML-parametrarna. Korskovariansen ges av:

$$R_{uy}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-\tau} y(k+\tau) u(k)$$

Impulssvaret, som erhöills enl. ett FORTRAN-program TESTIMRE (se appendix:4) är lika med korskovariansen om insignalen är vitt brus (K.J. Åström, [6]). I figur III:1 och III:2 ges Bode-diagram och korskovarianskurva för fall A. I de fall de streckade kurvorna (ML-metoden) icke syns i figurerna sammanfaller de helt med originalkurvorna.

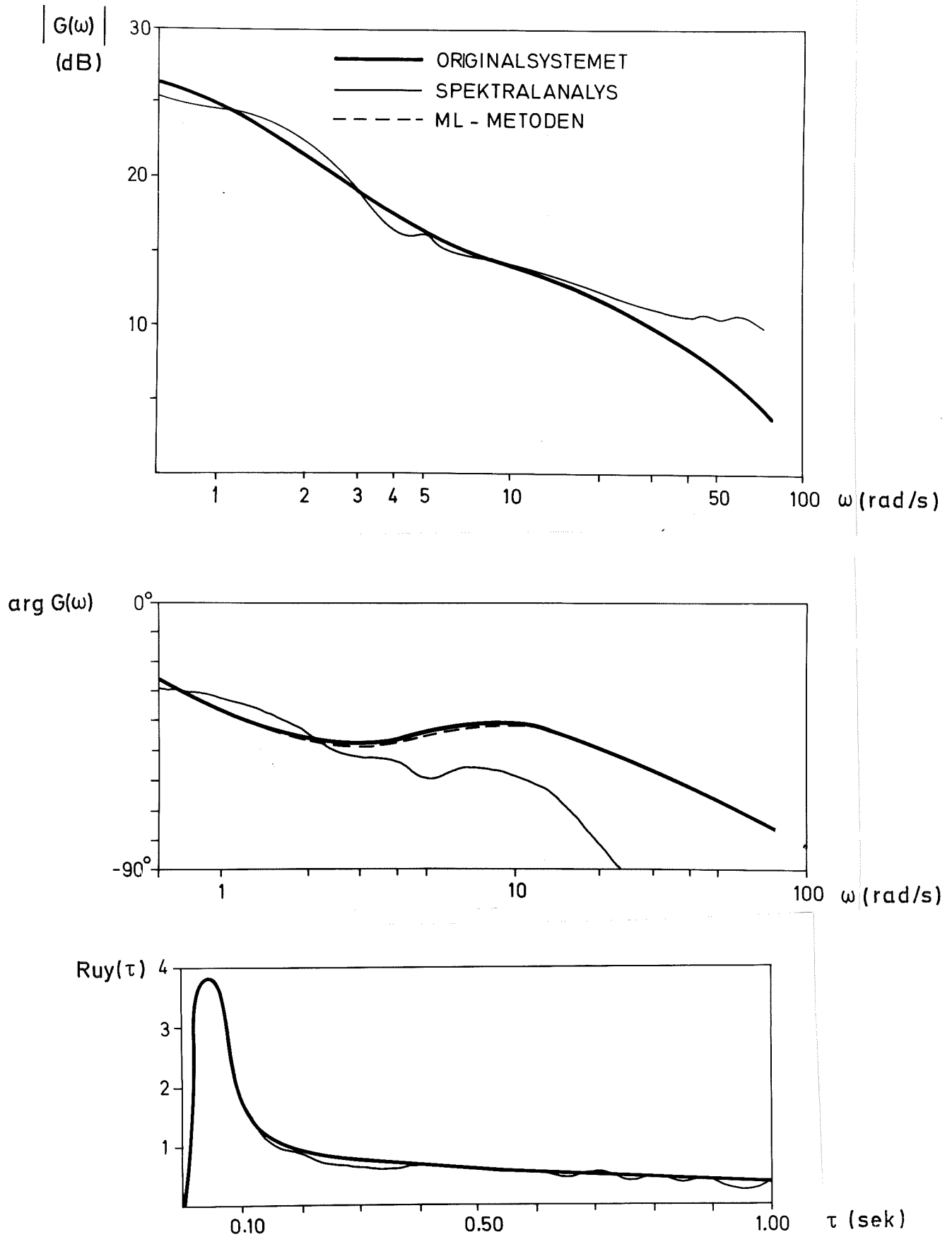


Fig.III:1 - Bodediagram samt korskovarianskurva för
 $R_n = R_v$ minimumfas ($\sigma_v^2 = 1$).

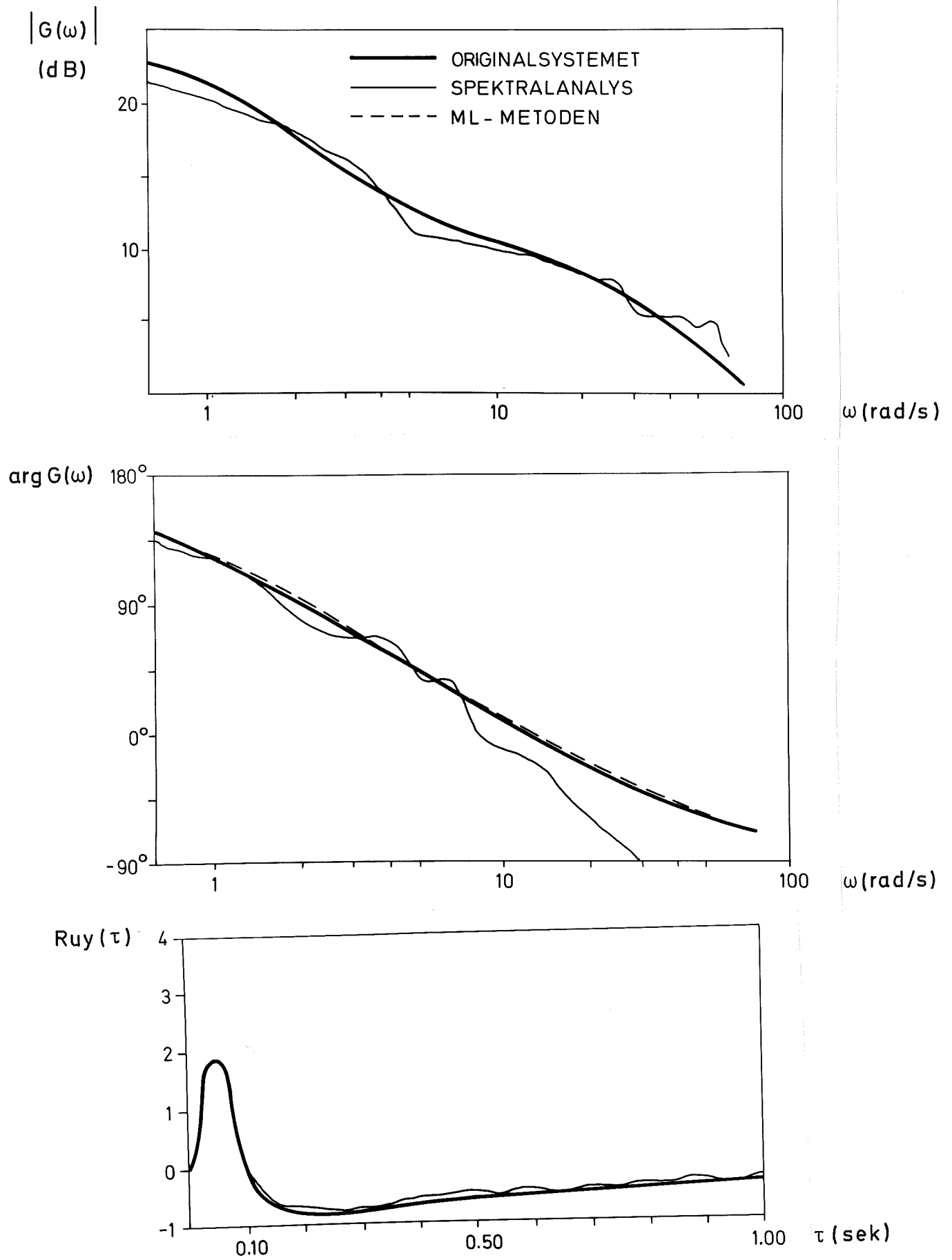


Fig.III:2 - Bodediagram samt korskovarianskurva för $R_n = R_v$ icke minimumfas ($\sigma_v^2 = 1$).

För att få en uppfattning om störningens storlek i systemet inför vi ett brus-signal förhållande BS, som definieras enligt:

$$BS = \frac{\lambda(1 + c_1 + c_2)}{b_1 + b_2} \cdot 100 (\%)$$

I detta fall fås för minimumfas 27% och för icke minimumfas 40%.

Dessa värden är relativt låga. Som synes av figurerna har också identifieringarna gett goda resultat.

Fall B:

Här sättes systembrusets varians vid utgången R_n 50 ggr större än mätfelets varians R_V . Mätfelets varians $R_V = \sigma_V^2$ sättes som i fall I lika med 1.

På samma sätt som förut fås (se fig. II:6):

$$\begin{aligned} c_1 &= -0,432 \\ c_2 &= 0,042 \\ \lambda &= 2,560 \end{aligned}$$

Tabellerna nedan jämför identifierade ML-parametrar med originalparametrar.

Tabell III:3 Minimumfas

	Genererade data	Originaldata
a_1	-1,219 ± 0,040	-1,238
a_2	0,256 ± 0,035	0,273
b_1	3,777 ± 0,080	3,829
b_2	-2,949 ± 0,145	-2,994
c_1	-0,426 ± 0,051	-0,432
c_2	0,040 ± 0,032	0,042
λ	2,535	2,560
v	3212,047	

Tabell III: 4 Icke minimumfas

	Genererade data	Originaldata
a_1	$-1,220 \pm 0,036$	-1,238
a_2	$0,259 \pm 0,034$	0,273
b_1	$1,824 \pm 0,080$	1,879
b_2	$-2,428 \pm 0,088$	-2,435
c_1	$-0,421 \pm 0,048$	-0,432
c_2	$0,043 \pm 0,033$	0,042
λ	2,540	2,560
v	3225,287	

Brussignalförhållandet BS blir i detta fall för minimumfas 187% och för icke minimumfas 281%.

Figurerna III:3 och III:4 ger på samma sätt som i fall A Bode-diagram och korskovarianskurvor.

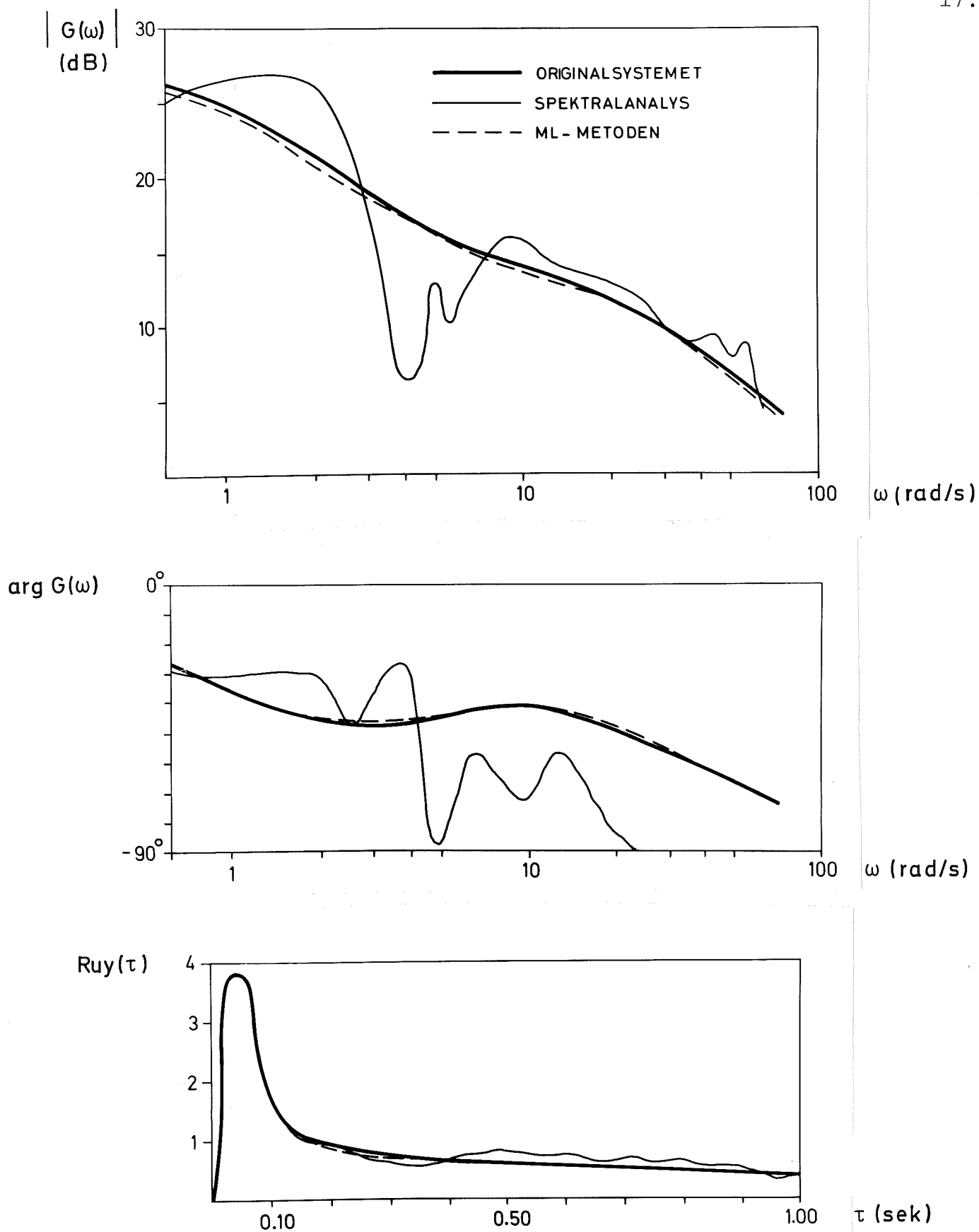


Fig.III:3 - Bodediagram samt korskovarianskurva för $R_n = 50R_v$ minimumfas ($\sigma_v^2 = 1$).

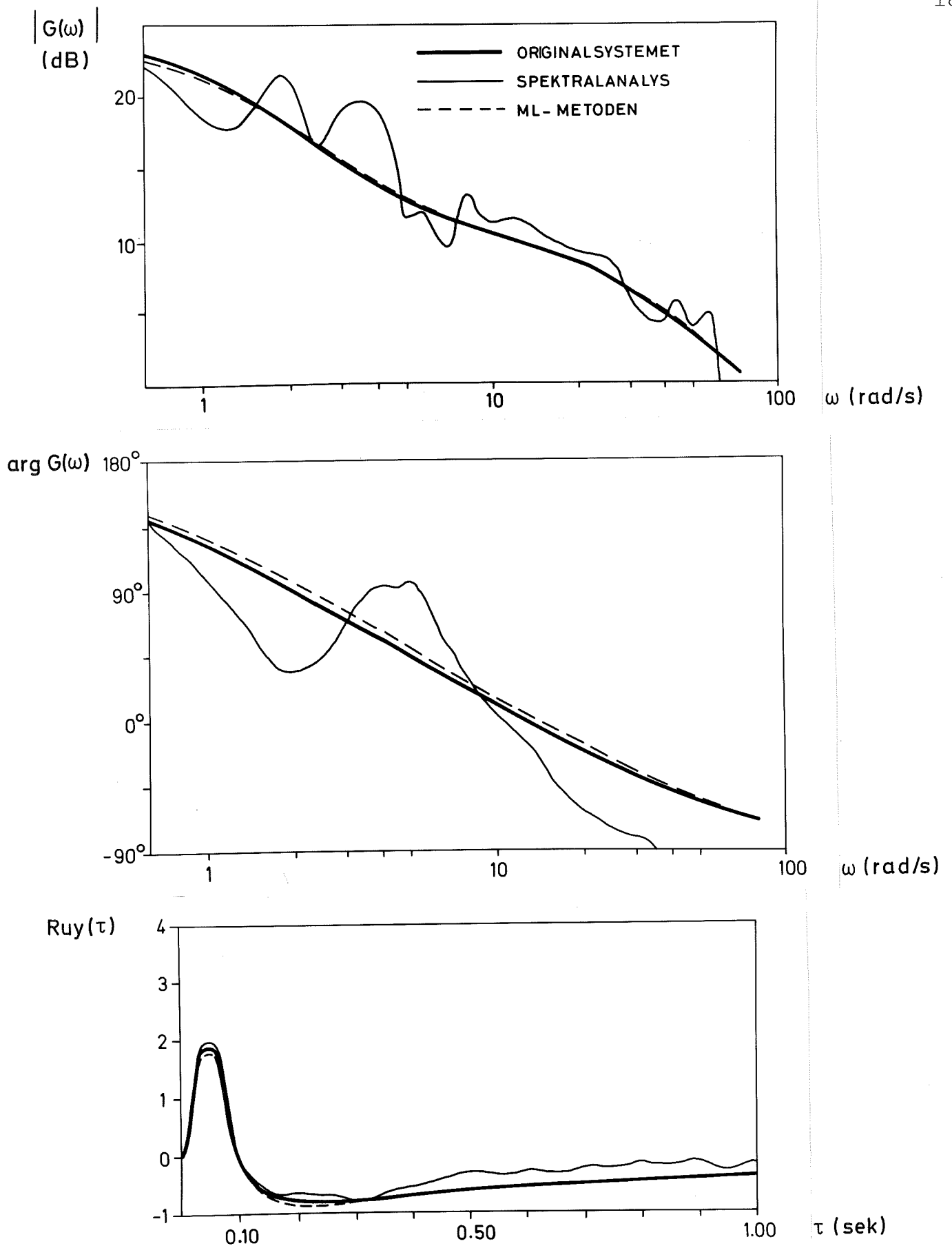


Fig.III:4 - Bodediagram samt korskovarianskurva för
 $R_n = 50R_v$ icke minimumfas ($\sigma_v^2 = 1$).

Fall C:

Här är mätfelets varians R_v 50 ggr större än systembrusets varians vid utgången R_n .

Sättes $R_n = 1$ fås:

$$c_1 = -1,243$$

$$c_2 = 0,275$$

$$\lambda = 7,090$$

Tabell III:5 Minimumfas

	Genererade data	Originaldata
a_1	$-1,161 \pm 0,103$	-1,238
a_2	$0,206 \pm 0,093$	0,273
b_1	$3,672 \pm 0,222$	3,829
b_2	$-2,652 \pm 0,283$	-2,994
c_1	$-1,176 \pm 0,108$	-1,243
c_2	$0,222 \pm 0,098$	0,275
λ	7,026	7,090
v	24684,564	

Tabell III:6 Icke minimumfas

	Genererade data	Originaldata
a_1	$-1,183 \pm 0,089$	-1,238
a_2	$0,215 \pm 0,087$	0,273
b_1	$1,721 \pm 0,222$	1,879
b_2	$-2,283 \pm 0,240$	-2,435
c_1	$-1,202 \pm 0,094$	-1,243
c_2	$0,224 \pm 0,094$	0,275
λ	7,005	7,090
v	24534,063	

Minimumfas BS = 75%.

Icke minimumfas BS = 112%.

Figurerna III:5 och III:6 ger Bode-diagram och korskovarianser.

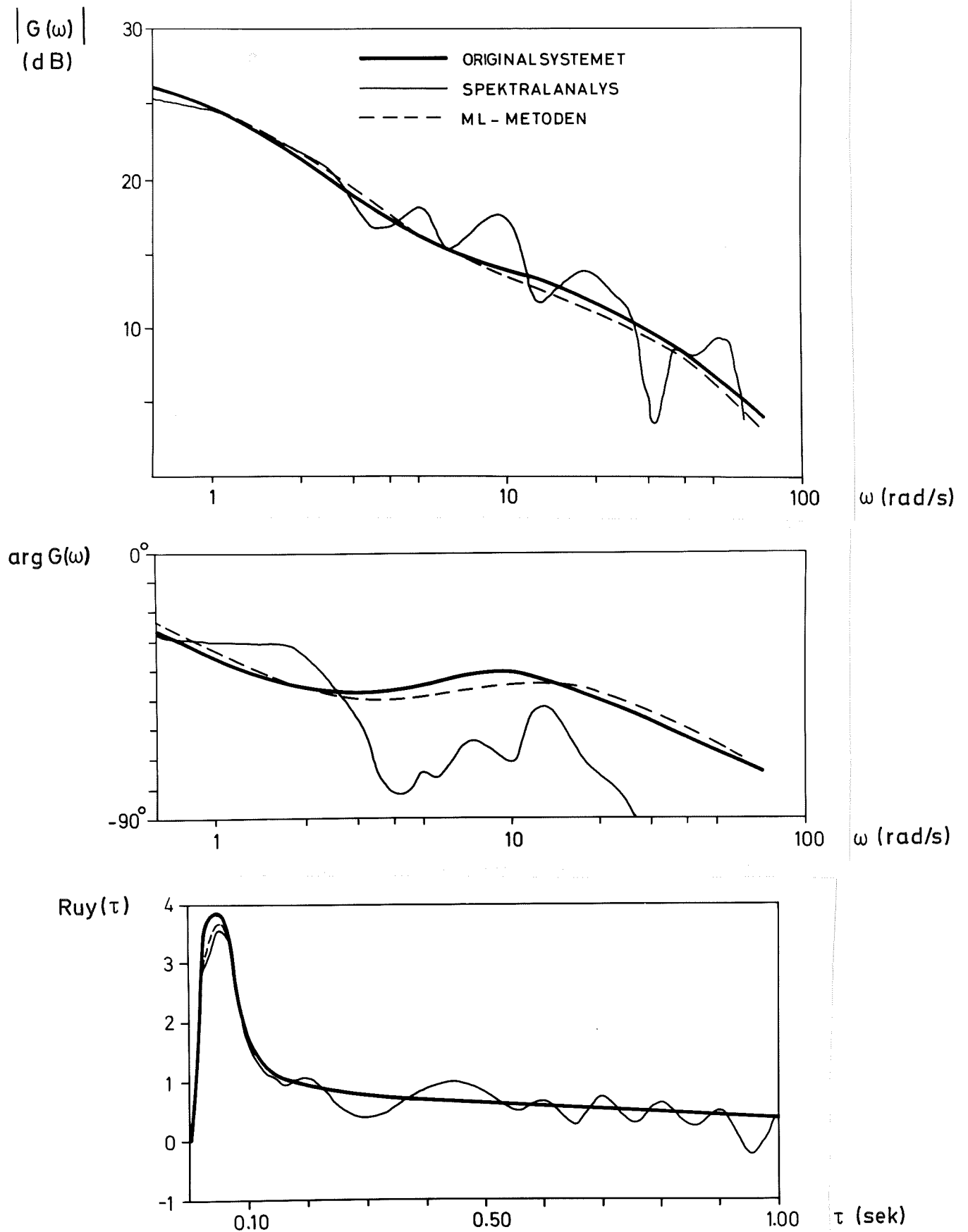


Fig.III:5 - Bodediagram samt korskovarianskurva för
 $R_v = 50R_n$ minimumfas ($\sigma_n^2 = 0.1$).

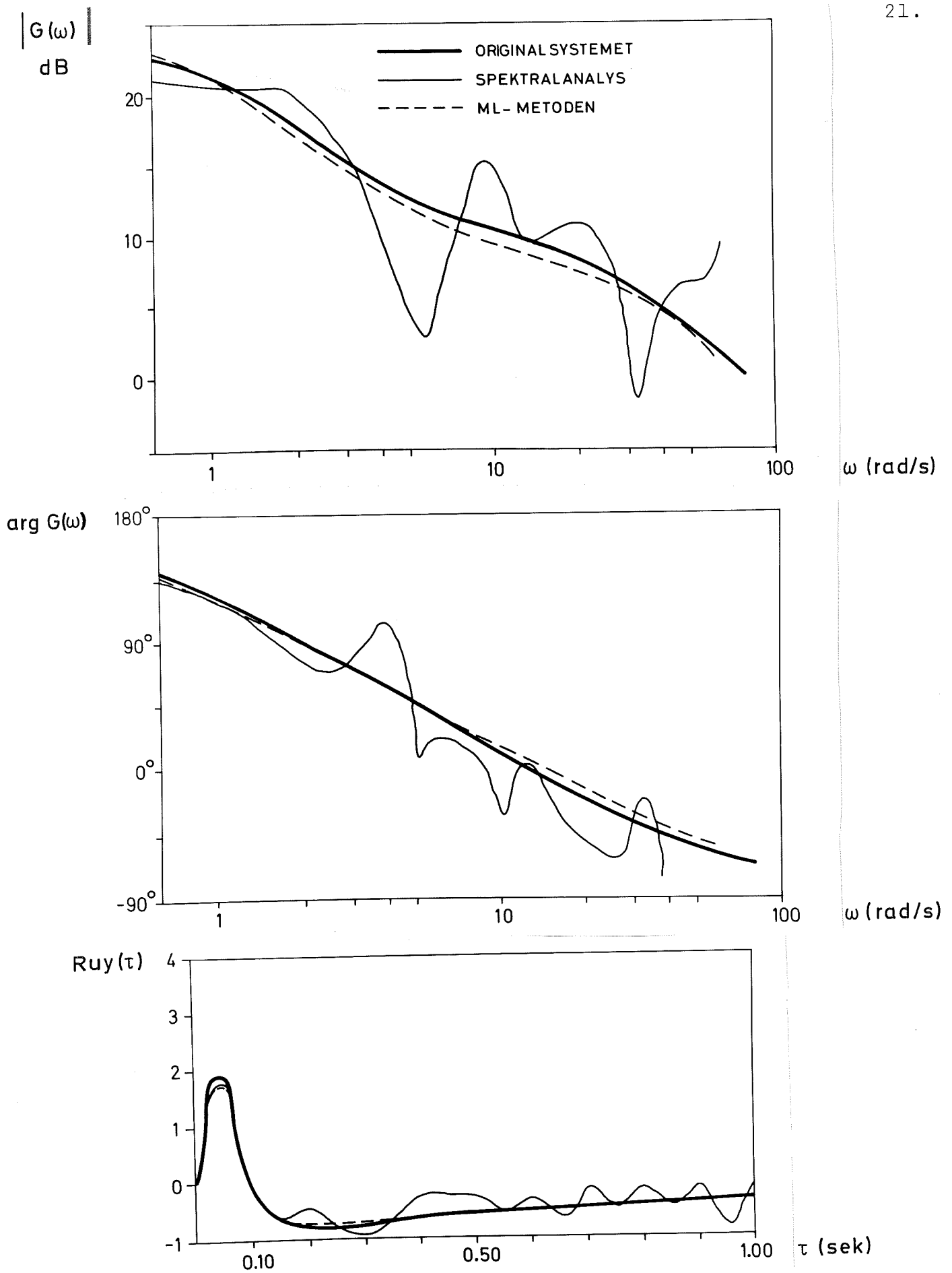


Fig.III:6 - Bodediagram samt korskovarianskurva för
 $R_v = 50R_n$ icke minimumfas ($\sigma_n^2 = 0.1$).

Fall D:

Mätfelets varians är här som i fall A lika med systembrusets varians sett från utgången. R_n och R_v har här istället fått värdet 100.

Detta ger (se fall A):

$$c_1 = -1,015$$

$$c_2 = 0,209$$

$$\lambda = 11,450$$

Tabell III:7 Minimumfas

	Genererade data	Originaldata
a_1	$-1,137 \pm 0,157$	-1,238
a_2	$0,182 \pm 0,147$	0,273
b_1	$3,593 \pm 0,358$	3,829
b_2	$-2,599 \pm 0,434$	-2,994
c_1	$-0,929 \pm 0,161$	-1,015
c_2	$0,154 \pm 0,120$	0,209
λ	11,32	11,45
v	64047,618	

Tabell III:8 Icke minimumfas

	Genererade data	Originaldata
a_1	$-1,155 \pm 0,154$	-1,238
a_2	$0,199 \pm 0,147$	0,273
b_1	$1,641 \pm 0,359$	1,879
b_2	$-2,253 \pm 0,361$	-2,435
c_1	$-0,946 \pm 0,159$	-1,015
c_2	$0,167 \pm 0,122$	0,209
λ	11,327	11,45
v	64147,392	

Minimumfas BS = 267%.

Icke minimumfas BS = 400%.

Bode-diagram och korskovarianser framgår av fig. III:7 och III:8.

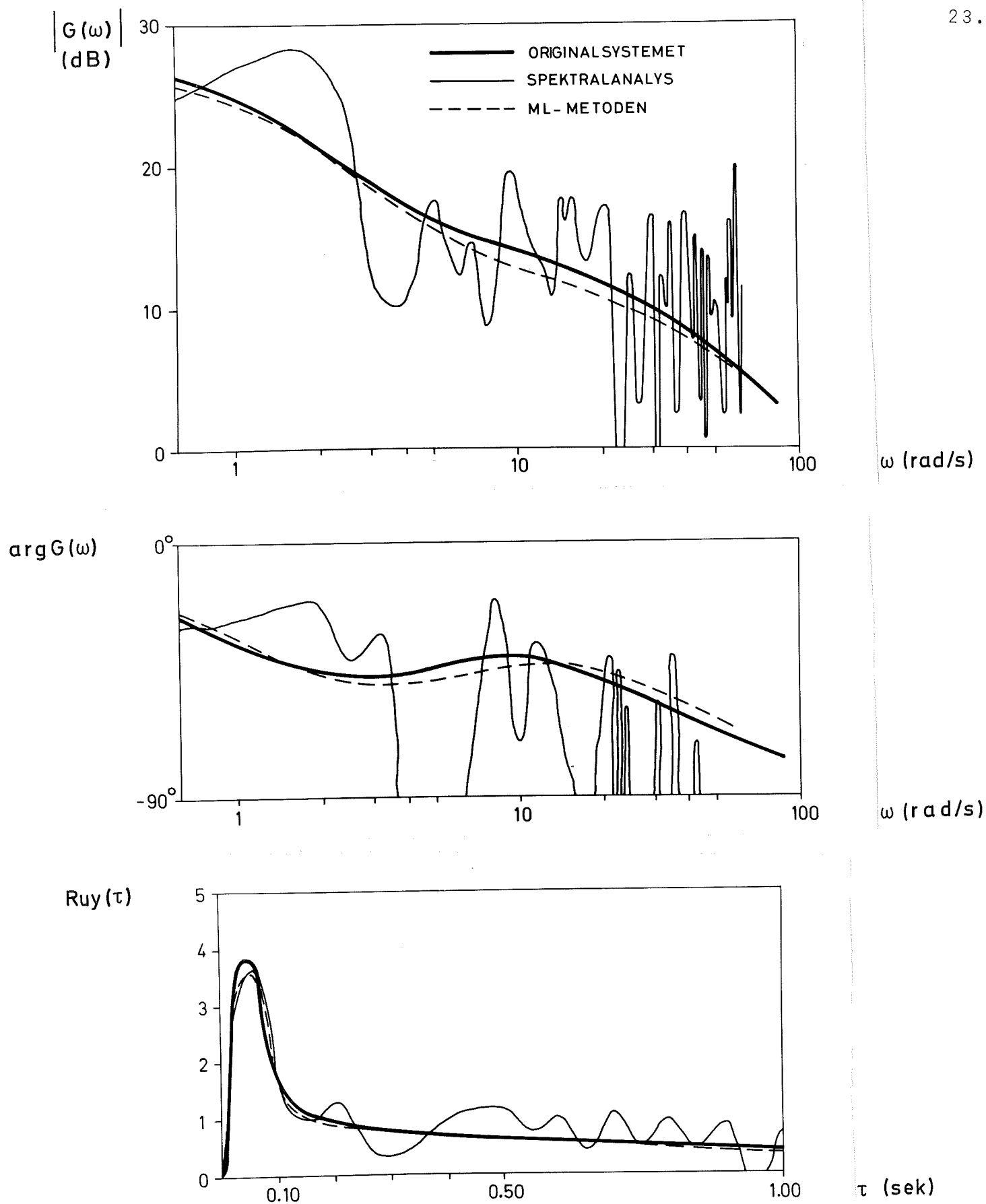


Fig.III:7 - Bodediagram samt korskovarianskurva för
 $R_n = R_v$ minimumfas ($\sigma_v^2 = 100$).

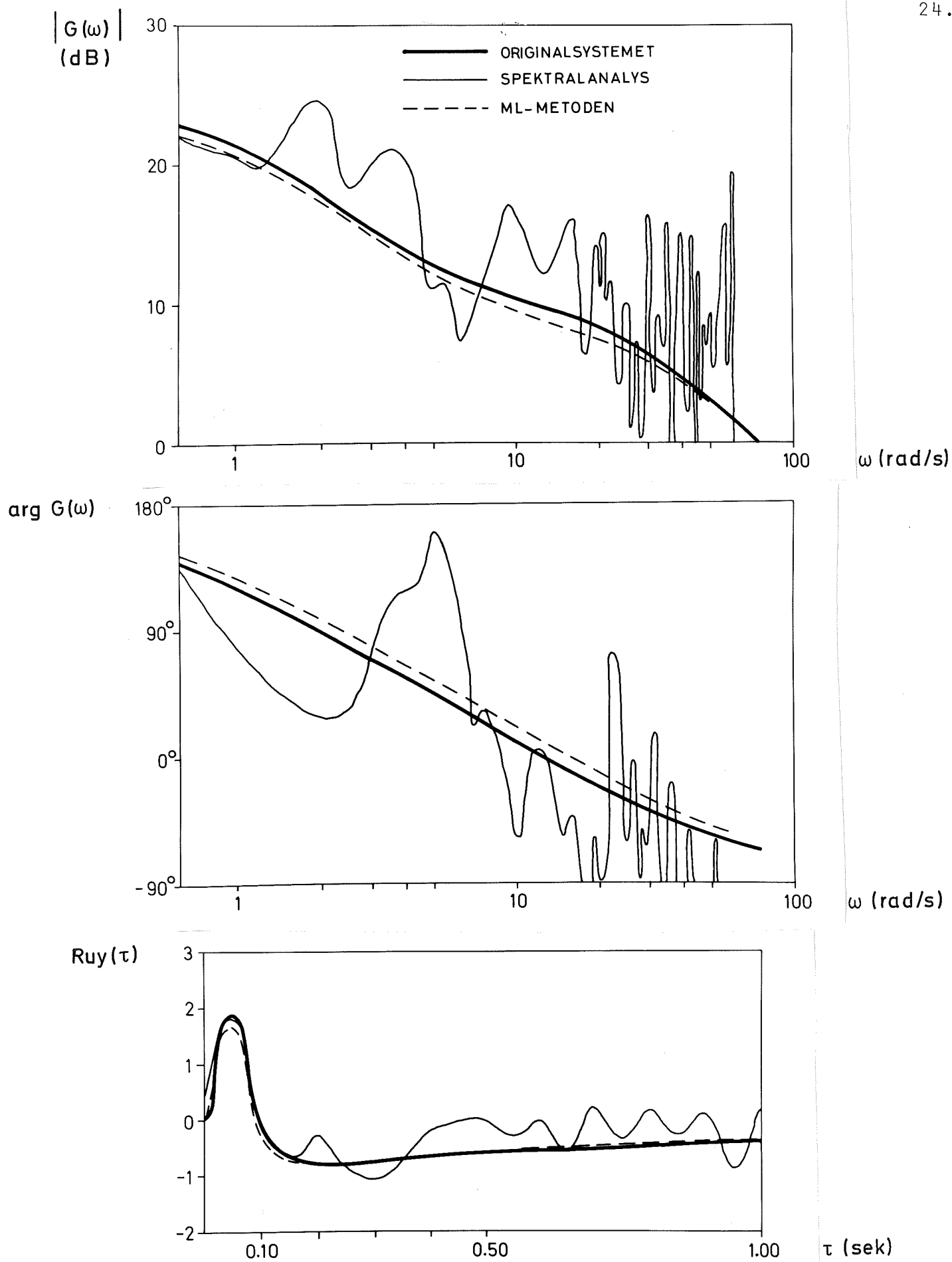


Fig.III:8 - Bodediagram samt korskovarianskurva för
 $R_n = R_v$ icke minimumfas ($\sigma_v^2 = 100$).

För minimumfas av detta fall har insignal, utsignal, y-deterministik, störningar och residualer plottats (se fig. III:9).

Y-deterministik (y_{det}) är den del av utsignalen (y), som härrör från insignalen (u). Störningen blir alltså $y - y_{\text{det}}$.

Residualerna $\left\{ \epsilon(t) \right\}$ definieras av:

$$C(z) \epsilon(t) = A(z) y(t) - B(z) u(t)$$

Som synes av figuren utgör störningen den största delen av utsignalen. Tabell III:7 visar, att koefficienterna ändå fått goda värden vid identifieringen.

Residualerna antages vid identifieringen vara oberoende och normalfördelade $(0, \lambda)$.

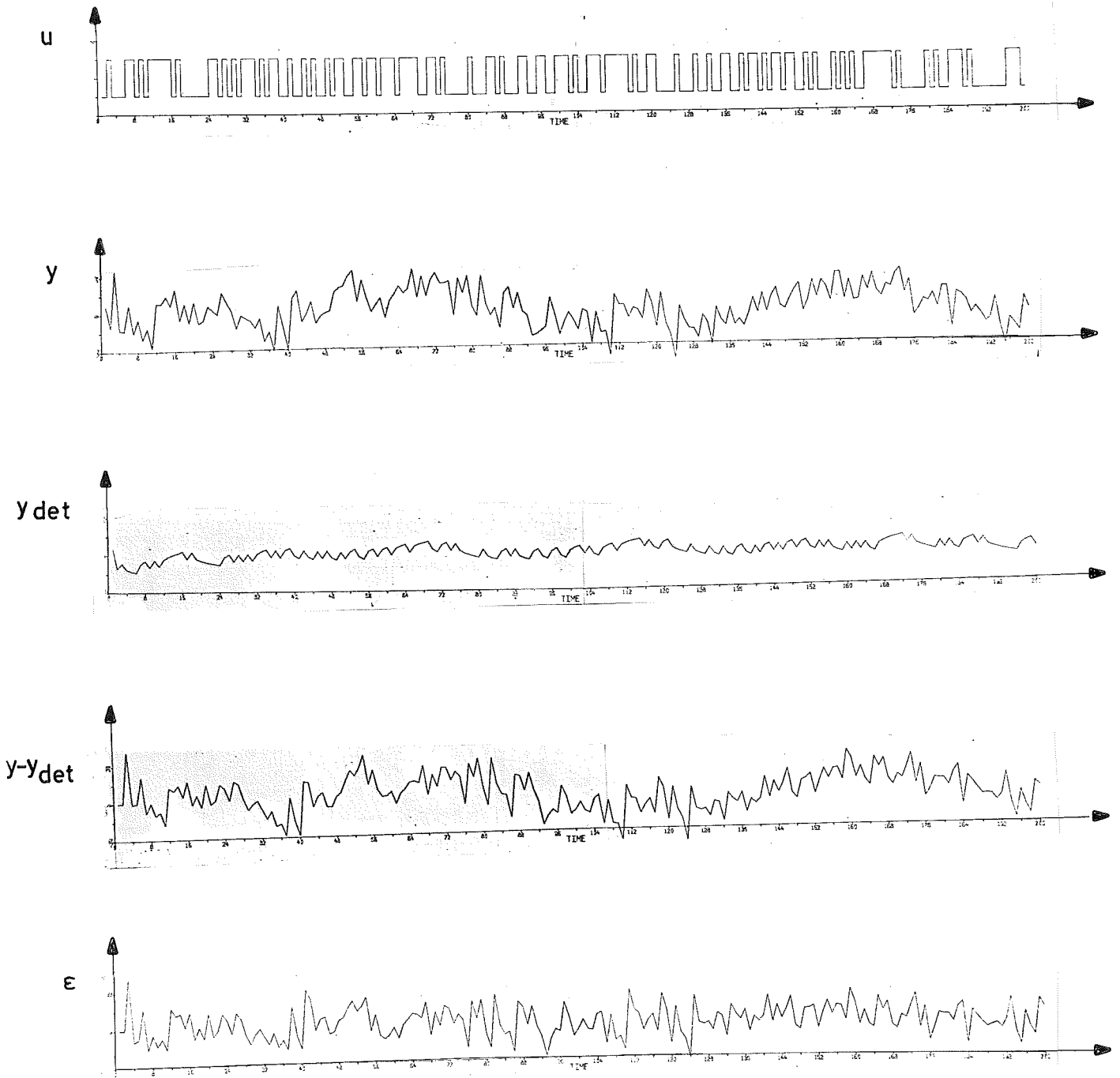


Fig.III:9 - Fall IV minimum fas.

3. SAMMANFATTNING OCH KOMMENTARER

Mellan resultaten från minimumfas och icke minimumfas har icke någon större skillnad kunnat iakttagas. Brusförhållandet har dock vid icke minimumfas genomgående varit större (1,5 ggr brusförhållandet vid minimumfas), medan däremot identifierade koefficienter vid ML-metoden blivit något bättre för icke minimumfas. Icke minimumfas tycks således vara något lättare att identifiera.

Vid den konventionella metoden (korskovarians och spektralanalys) har korskovarianserna bästa överensstämmelsen med originalkurvorna. En direkt övergång till frekvensplanet genom Fouriertransform av kovarianskurvan ger osäkra resultat som synes av plottade argument- och amplitudkurvor. Argumentkurvan visar relativt god överensstämmelse upp till $1/10$ av f_c (Nyquist-frekvensen). Amplitudkurvorna har vid kraftig störning stor avvikelse även under denna gräns.

Identifierade koefficienter enligt ML-metoden visar vid låg störning mycket god överensstämmelse med originalsystemet. Den försämring, som inträder vid ökad störning, är relativt liten. De koefficienter, som först försämras, är b-koefficienterna, vilka bestämmer amplituden, medan a-koefficienten, som ger tidskonstanterna, hålls mera indifferent.

Sammanfattningsvis kan alltså konstateras, att ML-metoden visat sig mindre känslig för störningar än spektralanalys. Vid högt brusförhållande är ML-metoden väsentligt bättre än spektralanalysen.

IV. UTNYTTJANDE AV KORSKOVARIANSEN FÖR BESTÄMNING AV MODELL- PARAMETRAR

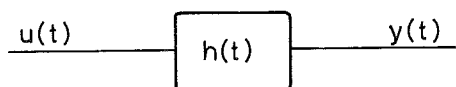
1. BERÄKNING AV PARAMETRARNA

Vi såg i det föregående att korskovarianskurvorna anslöt relativt bra till originalkurvorna, medan kurvorna i frekvensplanet hade stora fel. Det kan därför te sig lockande att med utnyttjande av korskovarianskurvorna direkt skatta systemparametrarna i modellen.

$$A(z^{-1}) y(t) = B(z^{-1}) u(t) + \lambda C(z^{-1}) e(t)$$

I detta fall gäller det då endast en skattning av $B(z^{-1})$ (amplitudparametrarna) och $A(z^{-1})$ (parametrar för bestämning av tidskonstanerna i systemet).

Betrakta följande modell:



Insignal-utsignalrelationen kan då skrivas:

$$y(t) = \sum_{s=0}^{\infty} h(s) u(t - s) \quad (\text{IV:1})$$

där $h(t)$ är viktfunktionen.

Samplingsintervallet har satts till en enhet.

Då definitionen på z-transform är

$$H(z) = \sum_{s=0}^{\infty} z^{-s} h(s) \text{ samt}$$

$$z^{-k} u(t) = u(t - k) \text{ fås}$$

$$y(t) = H(z) u(t) \quad (\text{IV:2})$$

Korskovariansen mellan insignal och utsignal är då signalernas medelvärden är noll och insignalen en stationär process:

$$R_{uy}(\tau) = E u(s) y(s + \tau) = \sum_{\ell=0}^{\infty} h(\ell) R_{uu}(\tau - \ell) \quad (\text{IV:3})$$

där $R_{uu}(\tau)$ är insignalens autokovarians (K.J. Åström, [6]).

Antar vi nu, att insignalen är vitt brus blir

$$R_{uu}(\tau) = \delta(\tau) \text{ och} \quad (\text{IV:4})$$

$$R_{uy}(\tau) = h(\tau)$$

Enligt IV:1 fås om insignalen är en diracfunktion $\delta(t)$

$$y(t) = h(t) \quad (\text{IV:5})$$

Ekv. (IV:2) ger:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) - \dots - a_n y(t-n) + b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \dots + b_n u(t-n) \quad (\text{IV:6})$$

Om $u(t)$ är en puls av värdet 1 vid $t = 0$ fås av (IV:4), (IV:5) och (IV:6) följande ekvationer:

$$R_{uy}(0) = b_0$$

$$R_{uy}(1) = -a_1 R_{uy}(0) + b_1$$

$$R_{uy}(2) = -a_2 R_{uy}(0) - a_1 R_{uy}(1) + b_2$$

⋮

$$R_{uy}(n) = -a_n R_{uy}(0) - \dots - a_1 R_{uy}(n-1) + b_n$$

$$R_{uy}(n+1) = -a_n R_{uy}(0) - \dots - a_1 R_{uy}(n)$$

⋮

$$R_{uy}(n+1+k) = -a_n R_{uy}(k) - \dots - a_1 R_{uy}(n+k) \quad (\text{IV:7})$$

Ur dessa ekvationer kan a- och b-parametrarna beräknas.

2. BERÄKNING AV VARIANSEN HOS PARAMETRARNA

In- och utsignalernas medelvärden antages såsom tidigare vara noll.

Antag ett utfall av $R_{uy}(\tau) = \xi_{uy}(\tau)$.

Variansen av $\xi_{uy}(\tau)$ beräknas.

$$\begin{aligned} \text{Var} (\xi_{uy}(\tau)) &= E \left[y(t + \tau) u(t) - (E y(t + \tau) u(t)) \right]^2 = \\ &= E \left[y(t + \tau) u(t) y(t + \tau) u(t) \right] - (E y(t + \tau) u(t))^2 \end{aligned}$$

där $E(y(t + \tau) u(t)) = R_{uy}(\tau)$

Eftersom

$$\begin{aligned} E(X_1 X_2 X_3 X_4) &= E(X_1 X_2) E(X_3 X_4) + E(X_1 X_3) E(X_2 X_4) + \\ &+ E(X_1 X_4) E(X_2 X_3) \quad \text{då} \quad EX_1 = EX_2 = EX_3 = EX_4 = 0 \end{aligned}$$

och $X_1 \dots X_4$ normalfördelade fås:

$$\text{Var} \xi_{uy}(\tau) = E y^2(t + \tau) E u^2(t) + R_{uy}^2(\tau)$$

Är nu insignalen vitt brus $N(0,1)$ fås:

$$\begin{aligned} \text{Var} \xi_{uy}(\tau) &= R_{yy}(0) + R_{uy}^2(\tau) \\ \text{ty } E y^2(t) &= R_{yy}(0) \end{aligned}$$

Antag vi har N mätpunkter:

Då

$$\hat{R}_{uy}(\tau) = \frac{1}{N - \tau} \sum_{n=0}^{N-\tau} u(n) y(n + \tau) = \frac{1}{N - \tau} \sum_{n=0}^{N-\tau} \xi_n(\tau)$$

$$\text{fås } \text{Var} \hat{R}_{uy}(\tau) = \frac{1}{N - \tau} (R_{yy}(0) + R_{uy}^2(\tau)) \quad (\text{IV:8})$$

Då $R_{yy}(\tau)$ är normalfördelat fås:

$$\hat{R}_{yy}(\tau) \in N \left[R_{yy}(\tau), \sqrt{\frac{R_{yy}(0) + R_{yy}^2(\tau)}{N - \tau}} \right]$$

Om vi nu har en insignal, som är vitt brus, $N(0,1)$, kan vi alltså genom att studera $\hat{R}_{yy}(\tau)$ få en uppfattning om systemets tidsfördröjning, ty vid en tidsfördröjning på k tidsintervall skall $R_{yy}(0), \dots, R_{yy}(k-1)$ vara identiskt noll. Genom att vi känner medelavvikelsen för $\hat{R}_{yy}(\tau)$ kan vi alltså med en viss konfidensgrad påstå, att $R_{yy}(\tau)$ skall vara noll eller skall vara skilt från noll.

Om vi har ett system, där vi med ovanstående resonemang kan anse, att $b_0 = 0$ kan vi alltså ge felgränser för bestämning av b_1 -termen. Denna b_1 -term kan då bestämmas på två sätt:

Ett sätt är att vi låter b_1 få värdet $\hat{R}_{yy}(1)$. Vi får då:

$$\hat{b}_1 \in N \left[b_1, \sqrt{\frac{R_{yy}(0) + b_1^2}{N - 1}} \right]$$

Ett annat sätt är att från $\hat{R}_{yy}(1)$ dra bort värdet $\hat{R}_{yy}(0)$. Vi får då en annan felmarginal. I likhet med 2 fås:

$$\begin{aligned} \text{Var} (\xi(1) - \xi(0)) &= E[(y(t) - y(t-1)) u(t-1) \cdot \\ &\cdot (y(t) - y(t-1)) u(t-1)] - [E[(y(t) - y(t-1)) u(t-1)]]^2 = \\ &= E^2[(y(t) - y(t-1)) u(t-1)] + E[(y(t) - y(t-1))^2] E[(u(t-1))^2] + \\ &+ E^2[(y(t) - y(t-1)) u(t-1)] - E^2[(y(t) - y(t-1)) u(t-1)] = \\ &= 2R_{yy}(0) - 2R_{yy}(1) + b_1^2 \end{aligned}$$

Vi får då:

$$\hat{b}_1 \in N \left[b_1, \sqrt{\frac{2[R_{yy}(0) - R_{yy}(1)] + b_1^2}{N - 1}} \right]$$

Man kan alltså genom att studera utsignalens autokovarianskurva välja den lämpligaste skattningen av b_1 .

3. BERÄKNING AV VARIANS ENLIGT MONTE CARLO METODEN

Vi utgick från modell enligt fall II minimumfas. Här saknas b_0 -term och då fås enligt (IV:&):

$$R_{yy}(1) = b_1$$

Modellen är:

$$y(t) = \frac{3,829 z^{-1} - 2,994 z^{-2}}{1 - 1,238 z^{-1} + 0,273 z^{-2}} u(t) + 2,560 \frac{(1 - 0,432 z^{-1} + 0,042 z^{-2})}{1 - 1,238 z^{-1} + 0,273 z^{-2}} e(t)$$

där $u(t), e(t) \in N(0,1)$.

Genom ett FORTRAN-program ADAM (se appendix: 5) beräknades $R_{yy}(T)$ och $R_{yy}(1)$ för 50 olika serier $u(t)$ och $e(t)$. Detta gav:

$$R_{yy}(1) = b_1 = 3,76 \pm 0,31$$

Teoretiskt fås:

$$\hat{b}_1 \in N(b_1, \sqrt{\frac{R_{yy}(0) + b_1^2}{N - 1}})$$

Tas $R_{yy}(0)$ som medelvärdet av de 50 genererade och b_1 enligt ovan fås:

$$\hat{b}_4 = b_1 \pm 0,30$$

4. BERÄKNING AV A-PARAMETRARNA UR EN TIDIGARE SIMULERAD MODELL

Ur ekvationssystemet (IV:7) kan a-parametrarna erhållas. För ett 2:a ordningens system fås t.ex.:

$$a_1 = - \frac{\hat{R}_{uy}(\tau) \cdot \hat{R}_{uy}(\tau + k - 2) - \hat{R}_{uy}(\tau - 2) \cdot \hat{R}_{uy}(\tau + k)}{\hat{R}_{uy}(\tau - 1) \cdot \hat{R}_{uy}(\tau + k - 2) - \hat{R}_{uy}(\tau - 2) \cdot \hat{R}_{uy}(\tau + k - 1)}$$

där $\tau \geq 3$ $k = 1, 2 \dots$

Här ser man, att om inte medelavvikelsen för $\hat{R}_{uy}(n)$ är mycket mindre än $\hat{R}_{uy}(n)$ fås stora varianser för a_1 .

a_1 och a_2 har beräknats enligt ovannämnda metod för fall I minimumfas d.v.s. en modell med låg störning och god anslutning på korskovarianskurvan. Beräkningen utfördes i ett program CROSS (se appendix: 6). $\hat{R}_{uy}(1)$ t.o.m. $\hat{R}_{uy}(7)$ har utnyttjats, vilket ger 10 skattningar av a_1 och a_2 . Dessa skattningars medelvärde blev:

$$a_1 = - 1,16 \pm 1,57$$

$$a_2 = 0,31 \pm 1,13$$

Rätta värden är:

$$a_1 = - 1,238$$

$$a_2 = 0,273$$

Betraktar man korskovarianskurvan (fall I minimumfas) ser man, att kurvan planar ut efter ett fåtal samplingsintervall. Detta gör, att man bara kan utnyttja de första värdena för skattning av a-parametrarna. Felen ökar då kurvan planar ut. De beräkningar, där endast värden kring kurvans topp utnyttjats, har också gett de bästa skattningarna. Metoden kommer alltså bättre till sin rätt, då man samplar tätare i förhållande till tidskonstanterna i systemet, d.v.s. får en bredare topp. Har man väl beräknat a-parametrarna kan återstående b-parametrar beräknas (se ekv. (IV:7)). (Första b-parametern är beroende av a-parametrarna. Se avsnitt 3.)

V. SAMMANFATTNING

Resultaten av de gjorda försöken kan i korthet sammanfattas:

1. Maximum likelihoodmetoden har gett goda resultat även då systemet varit utsatt för stora störningar.
2. Spektralanalysen har gett osäkrare värden både vad det gäller fas och amplitud hos överföringsfunktionen. Vid stort brusförhållande är värdena osäkra i hela intervallet, medan vid lågt brusförhållande värdena är acceptabla upp till $1/10$ av Nyquist-frekvensen. Bättre värden kunde tänkas åstadkomma genom utnyttjande av ett "fönster" av något slag vid beräkningarna.
3. Korskovarianserna har visat bättre anslutning än kurvorna i frekvensplanet. Beräkning av parametervärden ur korskovarianserna visar dock, att denna bättre anpassning är delvis skenbar då försök till beräkning av modellparametrar ur dessa kurvor ger höga varianser hos skattningarna.

LITTERATURFÖRTECKNING

- [1] Bendat & Piersol: Measurement and Analysis of Random Data, J. Wiley & Sons, New York, 1966.
- [2] R.B. Blackmann and J.W. Tukey: The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communications Engineering, Dover Publications, New York, 1958.
- [3] I. Gustavsson: Parametric Identification of Multiple Input Single Output Linear Dynamic Systems, Report 690 , May, 1969, Lund Institute of Technology, Division of Automatic Control.
- [4] K.J. Åström och T. Bohlin: Numerical Identification of Linear Dynamic Systems from Normal Operating Records, Proceedings of the IFAC Conference on Self-Adaptive Control Systems, Teddington (1965).
- [5] K.J. Åström: Samplade system, föreläsningar vid LTH, TLTH/VBV 1968.
- [6] K.J. Åström: Stokastiska system, föreläsningar vid LTH, TLTH/VBV 1968.

IN5.4B

28/02-09

```

PROGRAM ALSTRA
DIMENSION IPR(263),UA(1100),YA(1100),EA(1100)
95 READ 90,NT
90 FORMAT(15)
   IF (NT-2)9,9,333
9 READ 100,A1,A2,B1,B2,C1,C2,ALAM,KOD
NP=1100
J1=1
CALL PRBN(263,IPR,263)
DO 5 I=1,NP
5 UA(I)=PRB(J1,IPR,263,1.,263)
IT=1
DO 10 I=1,NP
10 CALL RANSS(IT,EA(I))
YA(1)=YA(2)=0.0
DO 20 I=3,NP
20 YA(I)=-A1*YA(I-1)-A2*YA(I-2)+B1*UA(I-1)+B2*UA(I-2)+ALAM*(EA(I)+C1*
1EA(I-1)+C2*EA(I-2))
DO 30 I=1,1000
UA(I)=UA(I+100)
30 YA(I)=YA(I+100)
NP=1000
NP8=NP/8
DO 50 I=1,NP8
N1=8*(I-1)
50 PUNCH 101,YA(N1+1),YA(N1+2),YA(N1+3),YA(N1+4),YA(N1+5),YA(N1+6),
1YA(N1+7),YA(N1+8),KOD,I
100 FORMAT(7F8.4,15)
101 FORMAT(8F8.3,I11,15)
GO TO 95
333 CONTINUE
CALL EXIT
END

```


04/03-69

FTN5.4B

```
PROGRAM MAXLI
COMMON EE,V,Y,U(2),E(10),C(70),EC(70),VI(70),VCC(140),ECC(140),
LV2(70,70),JAT(2000)
DIMENSION UA(1000),YA(1000)
READ 100,(UA(I),I=1,1000)
95 READ 90,NI
90 FORMAT(I5)
IF(NI=2) 69,69,70
69 READ 101,(YA(I),I=1,1000)
100 FORMAT (10F8.3)
101 FORMAT (8F8.3)
NP=1000
DO 10 I=1, NP
I1=2*I-1
I2=2*I
DAT(I1)=UA(I)
10 JAT(I2)=YA(I)
CALL MISDID (2,1,1000,IERR)
GO TO 95
70 CONTINUE
CALL EXIT
END
```

FTN5.4B

27/03-69

```

PROGRAM TESOVER
C
C TEST OF SUBROUTINE OVER
C AUTHOR, ANDERS JONSON 7/2 1969
C
C SUBROUTINE REQUIRED
C OVER
C POLYROOT
C BODE
C
DIMENSION A(10),B(10)
95 READ 90,NT
90 FORMAT(15)
IF(NT-2)9,9,333
9 READ 101,NA,NB,T,OMEGAMIN,NDECADE,IPRINT,ZPLUS
NA1=NA+1
NB1=NB+1
READ100,(A(I),I=1,NA1)
READ100,(B(I),I=1,NB1)
PRINT 102
PRINT 100,(A(I),I=1,NA1)
PRINT 103
PRINT100,(B(I),I=1,NB1)
PRINT 104
PRINT 105,NA,NB,T,OMEGAMIN,NDECADE,IPRINT,ZPLUS
100 FORMAT(10F8.3)
101 FORMAT(2I2,F6.3,F12.8,2I5,F10.5)
102 FORMAT(/5X*TEST OF SUBROUTINE OVER*//10X*A-COEFF. IN Z-TRANSFORM*
1//)
103 FORMAT(10X*B-COEFF. IN Z-TRANSFORM*//)
104 FORMAT (5X*NA*5X*NB*5X*T*5X*OMEGAMIN*5X*NDECADE*5X*
1IPRINT*5X*ZPLUS*//)
105 FORMAT (5X,I2,5X,I2,3X,F6.3,2X,F12.8,1X,I5,5X,I5,3X,F10.5)
CALL OVER(A,B,NA,NB,T,OMEGAMIN,NDECADE,IPRINT,ZPLUS)
GO TO 95
333 CONTINUE
CALL EXIT
END

```

FTN5.4B

07/02-69

```
PROGRAM TESTIMRE
DIMENSION A(11),B(11),RS(500),RI(500)
READ 100,N,M,IP,IPRINT
100 FORMAT(4I5)
5 READ 90,NT
90 FORMAT(I5)
IF (NT-2) 10,10,20
10 NP1=N+1
READ 101,(A(I),I=1,NP1)
READ 101,(B(I),I=1,NP1)
101 FORMAT(10F8.3)
CALL STIMRESP(A,B,N,M,IP,RS,RI,IPRINT)
GO TO 5
20 CONTINUE
CALL EXIT
END
```

FTNS.4B

24/04-69

```

PROGRAM ADAM
DIMENSION Y(1100),U(1100),E(1100),ROY(100),ROU(100),RYU(100),
RYY(100)
IT=1
IR=3
READ 100,A1,A2,B1,B2,C1,C2,ALAM
100 FORMAT(7F8.4)
DO 17 K=1,50
9 IT=IT+2
IR=IR+2
DO 1 I=1,1100
CALL RANSS(IT,U(I))
1 CALL RANSS(IR,E(I))
Y(I)=Y(I)+0.0
DO 2 I=3,1100
2 Y(I)=-A1*Y(I-1)-A2*Y(I-2)+B1*U(I-1)+B2*U(I-2)+ALAM*(E(I)+
IC1*E(I-1)+C2*E(I-2))
DO 3 I=1,1000
U(I)=U(I+100)
3 Y(I)=Y(I+100)
S=T=0.0
DO 4 I=1,1000
T=T+Y(I)
4 S=S+U(I)
T0=T/1000.0
S0=S/1000.0
DO 5 I=1,1000
Y(I)=Y(I)-T0
5 U(I)=U(I)-S0
DO 12 J=1,100
R1=R2=R3=R4=0.0
J=J-1
JI=1000-J
DO 13 I=1,JI
13 R1=R1+U(I)*Y(I+J)
A=J
J=J+1
12 ROY(J)=R1/(1000.0-A)
DO 7 J=1,2
R1=R2=R3=R4=0.0
J=J-1
JI=1000-J
DO 6 I=1,JI
6 R4=R4+Y(I)*Y(I+J)
A=J
J=J+1
7 RYY(J)=R4/(1000.0-A)
PRINT 200
200 FORMAT(/5X*ROY*/)
PRINT 101,(ROY(J),J=1,100)
PRINT 203
203 FORMAT(/5X*RYY*/)
101 FORMAT(5E16.8)
PRINT 101,(RYY(J),J=1,2)
17 CONTINUE
CALL EXIT

```

23/04-69

-TNS.48

```

PROGRAM CROSS
DIMENSION H(30),A1(90),A2(90)
NP=7
READ 100,(H(I),I=1,NP)
100 FORMAT(8F10.6)
N=NP-1
K1=0
DO 12 K=2,N
K2=N-K+1
DO 10 J=1,K2
A1(J1)=- (H(K+1)*H(K+J-1)-H(K+J+1)*H(K-1)) / (H(K)*H(K+J-1)-H(K+J)*
H(K-1))
J1=K1+J
10 A2(J1)=- (H(K)*H(K+J+1)-H(K+J)*H(K+1)) / (H(K)*H(K+J-1)-H(K+J)*
H(K-1))
12 K1=J1
NA=((N-1)*(N-2))/2
T01=T02=T1=T2=V1=V2=V3=V4=V01=V02=S01=S02=0.0
DO 15 I=1,NA
T1=T1+A1(I)
15 T2=T2+A2(I)
T01=T1/NA
T02=T2/NA
DO 20 I=1,NA
V1=V1+A1(I)**2
20 V2=V2+A2(I)**2
V3=V1/NA
V4=V2/NA
V01=V3-T01**2
V02=V4-T02**2
S01=SQRT(V01)
S02=SQRT(V02)
PRINT 111
PRINT 110,(A1(I),I=1,NA)
PRINT 112
PRINT 110,(A2(I),I=1,NA)
110 FORMAT( 4F20.10)
111 FORMAT(10X*A1*/)
112 FORMAT(10X*A2*/)
PRINT 115
PRINT 116,T01,T02,V01,V02,S01,S02
115 FORMAT( 5X*T01*5X*T02*5X*V01*5X*V02*5X*S01*5X*S02*/)
116 FORMAT( 6F13.5)
CALL EXIT
END

```

LOAD

RUN*3,1500, ,1

EXECUTION STARTED AT 1422 -39