



LUND UNIVERSITY

Reelltidsidentifiering med hjälp av minsta-kvadrat metoden

Försök på pilotdata

Wieslander, Johan

1968

Document Version:

Förlagets slutgiltiga version

[Link to publication](#)

Citation for published version (APA):

Wieslander, J. (1968). *Reelltidsidentifiering med hjälp av minsta-kvadrat metoden: Försök på pilotdata*. (Research Reports TFRT-3006). Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology (LTH).

Total number of authors:

1

General rights

Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: <https://creativecommons.org/licenses/>

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117
221 00 Lund
+46 46-222 00 00

REELLTIDSIDENTIFIERING MED HJÄLP
AV MINSTA-KVADRAT METODEN
FÖRSÖK PÅ PILOTDATA

J. WIESLANDER

RAPPORT 6810 DECEMBER 1968
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
INSTITUTIONEN FÖR REGLERTEKNIK

REELLTIDSIDENTIFIERING MED HJÄLP AV
MINSTA-KVADRAT METODEN

FÖRSÖK PÅ PILOTDATA

1. INLEDNING

Detta arbete är en vidareutveckling av mitt examensarbete: Identifiering av överföringsfunktionen för en pilot vid manuell styrning. Problemställningen här är följande: En pilot ser vid en simulering en röd och en vit fläck på en skärm. Båda är rörliga i två dimensioner. Den röda fläckens rörelser på skärmen står utanför pilotens kontroll medan han däremot med hjälp av en styrspak kan styra den vita. Hans uppgift är nu att styra denna så att den täcker den röda fläcken. Vinkelfelet mellan fläckarna och pilotens styrsignaler i horisontell och vertikal led registrerades. Målet var att ur dessa data beräkna en matematisk modell (överföringsfunktionen) för piloten. Den metod här för som kom till användning (minsta kvadrat metoden) förutsätter (liksom flertalet andra liknande metoder) att det undersökta systemet är tidsinvariant. Av skäl som redovisas i examensarbetet var det emellertid att vänta att pilotens parametrar skulle variera. Det stod också snart klart att det uppställda problemet ej skulle kunna lösas med de metoder som då stod till buds. I kapitel 2 presenteras en algoritm som beräknar en tidsvariabel skattning av systemparametrarna. En Algolprocedur för identifieringen anges i kapitel 3. Där presenteras även resultat av test på artificiella data. I kapitel 4 slutligen redovisas resultat av identifieringar på pilotdata. Det visade sig att primärdata innehöll en icke obetydlig bias. När denna med ögonmått uppskattats och avlägsnats erhöles de i diagram 2-5 redovisade skattningarna. Primärdata synes alltför osäkra för att man skall kunna dra några mer allmänna slutsatser.

2. REELLTIDSIDENTIFIERING BASERAD PÅ MINSTA KVADRAT METODEN MK-METODEN I TIDSINVARIANTA FALLET

Vi betraktar följande systemmodell:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) + b_1 u(t-1) - a_2 y(t-2) + b_2 u(t-2) + \dots + e(t)$$

där $e(t)$ betecknar mätvärdenas avvikelse från systemmodellen vid tidpunkten t .

Inför

$$Y = \begin{bmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \quad \phi = \begin{bmatrix} -y(n-1) & u(n-1) & \dots & -y(0) & u(0) \\ & & & & \\ & & & & \\ -y(N-1) & u(N-1) & & -y(N-n) & u(N-n) \end{bmatrix}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad E = \begin{bmatrix} e(n) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}$$

Vi kan nu beskriva resultatet av mätningen vid tidpunkterna $t=0,1,\dots,N$ med matrisekvationen

$$Y = \phi \theta + E$$

Vi bildar kvadratsumman av avvikelserna $e(t)$ och skriver den som

$$\sum_{n=0}^N e(t)^2 = E^T E$$

Man kan visa att minimum av förlustfunktionen

$$V(N) = \sum_{t=0}^N e(t)^2$$

fås för parameterskattningen $\hat{\theta} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T Y$. Numeriska synpunkter vid beräkning av denna skattning behandlas i ovan anförda arbete.

Om vi nu betraktar det fall att parametrarna i systemmodellen kan tänkas bero av tiden, inses intuitivt att skattningen skall bero väsentligen av de senaste, med aktuella, mätvärdena, medan mätvärden som ligger långt tillbaka i tiden skall ges mindre vikt. Detta kan åstadkommas med förlustfunktionen

$$V(N) = \sum_{t=0}^N \lambda^{N-t} e(t)^2 \quad \lambda < 1$$

Denna innebär att kvadratavvikelserna viktas med en exponentialfunktion $h(t) = \lambda^t$, se fig. 1.

Lemma

Vi visar först ett lemma:

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\{1 + CA^{-1}B\}^{-1} CA^{-1}$$

A är en kvadratisk matris, B och C är en kolonn resp radvektor.

Bevis: Multiplicera ihop!

$$\begin{aligned} (A + BC) \{A^{-1} - A^{-1}B\{1 + CA^{-1}B\}^{-1} CA^{-1}\} &= \\ &= E - B\{1 + CA^{-1}B\}^{-1} CA^{-1} + BCA^{-1} - BCA^{-1}B\{1 + CA^{-1}B\}^{-1} CA^{-1} = \\ &= E - \{B\{1 + CA^{-1}B\}^{-1} - B + BCA^{-1}B\{1 + CA^{-1}B\}^{-1}\} CA^{-1} = \\ &= E - B\{\{1 + CA^{-1}B\}^{-1} - 1 + CA^{-1}B\{1 + CA^{-1}B\}^{-1}\} CA^{-1} = E \end{aligned}$$

Algorithm för reelltidsidentifiering enligt minsta kvadrat metoden

Betrakta situationen vid tidpunkten N. Vi har då skattningen $\hat{\theta}(N) = (\phi_N^T \phi_N)^{-1} \phi_N^T Y_N$ som ger min av förlustfunktionen $E_N^T E_N$. Vi får så en ny mätpunkt vid tiden N + 1 och vill beräkna skattningen $\hat{\theta}(N + 1)$. Den definieras som den skattning som minimerar förlustfunktionen

$$\begin{aligned} V(N+1) &= \sum_{t=n}^{N+1} \lambda^{N+1-t} e(t)^2 = \lambda \sum_{t=n}^N \lambda^{N-t} e(t)^2 + e(N+1)^2 = \\ &= \lambda E_N^T E_N + e(N+1)^2 \end{aligned}$$

Inför nu beteckningarna $y = y(N+1)$ och $\varphi = \{-y(N) \ u(N) \ -y(N-1) \ \dots \ u(N-n+1)\}$.

Resultatet av mätningarna vid tidpunkterna $t = 0, t, \dots, N+1$ kan då skrivas

$$\begin{bmatrix} \mu Y_N \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \phi_N \\ \varphi \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} \mu E_N \\ e(N+1) \end{bmatrix} \quad \text{där } 0 < \mu \leq 1$$

Detta innebär att till det ekvationssystem som beskriver de N föregående mätningarna lägges ytterligare en ekvation samtidigt som de ursprungliga multipliceras med μ .

Då gäller

$$V(N+1) = \lambda E_N^T E_N + e(N+1)^2 = \begin{bmatrix} \mu E_N \\ e(N+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mu E_N \\ e(N+1) \end{bmatrix} \quad \text{om } \lambda = \mu^2$$

På samma sätt som i det tidsberoende fallet fås nu minsta kvadrat skattningen:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(N+1) &= \left(\begin{bmatrix} \mu \phi_N \\ \varphi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mu \phi_N \\ \varphi \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mu \phi_N \\ \varphi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mu Y \\ y \end{bmatrix} = \\ &= (\lambda \phi_N^T \phi_N + \varphi^T \varphi)^{-1} (\lambda \phi_N^T Y + \varphi^T y) \end{aligned}$$

Med hjälp av lemmat kan nu den första faktorn omformas:

$$\begin{aligned} (\lambda \phi_N^T \phi_N + \varphi^T \varphi)^{-1} &= \frac{1}{\lambda} (\phi_N^T \phi_N)^{-1} - \frac{1}{\lambda} (\phi_N^T \phi_N)^{-1} \varphi^T \{1 + \\ &\quad + \varphi \frac{1}{\lambda} (\phi_N^T \phi_N)^{-1} \varphi^T\}^{-1} \varphi \frac{1}{\lambda} (\phi_N^T \phi_N)^{-1} \end{aligned}$$

Vi kan då samtidigt som vi inför $\phi = \phi_N$, skriva:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(N+1) &= (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T Y + \frac{1}{\lambda} (\phi^T \phi)^{-1} \varphi^T Y - \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} (\phi^T \phi)^{-1} \varphi^T \{1 + \varphi \frac{1}{\lambda} (\phi^T \phi)^{-1} \varphi^T\}^{-1} \varphi (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T Y - \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} (\phi^T \phi)^{-1} \varphi^T \{1 + \varphi \frac{1}{\lambda} (\phi^T \phi)^{-1} \varphi^T\}^{-1} \varphi \frac{1}{\lambda} (\phi^T \phi)^{-1} \varphi^T Y = \\ &= A + B - C - D \end{aligned}$$

Vi finner

$$A = \hat{\theta}(N)$$

$$C = \frac{1}{\lambda} (\phi^T \phi)^{-1} \varphi^T \{1 + \varphi \frac{1}{\lambda} (\phi^T \phi)^{-1} \varphi^T\}^{-1} \varphi \hat{\theta}(N) = K(N) \varphi \hat{\theta}(N)$$

$$\begin{aligned} B - D &= \frac{1}{\lambda} (\phi^T \phi)^{-1} \varphi^T \{1 + \varphi \frac{1}{\lambda} (\phi^T \phi)^{-1} \varphi^T\}^{-1} \{1 + \varphi \frac{1}{\lambda} (\phi^T \phi)^{-1} \varphi^T\}^{-1} \varphi^T Y - \\ &\quad - \varphi \frac{1}{\lambda} (\phi^T \phi)^{-1} \varphi^T Y = \frac{1}{\lambda} (\phi^T \phi)^{-1} \varphi^T \{1 + \varphi \frac{1}{\lambda} (\phi^T \phi)^{-1} \varphi^T\}^{-1} Y = K(N) Y \end{aligned}$$

Dvs

$$\hat{\theta}(N+1) = \hat{\theta}(N) + K(N)(y - \varphi^T \hat{\theta}(N))$$

där

$$K(N) = \frac{1}{\lambda} (\phi^T \phi)^{-1} \varphi^T \{1 + \varphi \frac{1}{\lambda} (\phi^T \phi)^{-1} \varphi^T\}^{-1}$$

Om vi dessutom inför

$$P(N) = \frac{1}{\lambda} (\phi_N^T \phi_N)^{-1}$$

kan vi skriva

$$K(N) = P(N) \varphi^T \{1 + \varphi P(N) \varphi^T\}^{-1}$$

Vi har nu funnit en rekursiv ekvation för parameterskattningen $\hat{\theta}$. Det återstår nu att finna en för P. Vi utnyttjar återigen lemmat:

$$\begin{aligned} P(N+1) &= \frac{1}{\lambda} (\phi_{N+1}^T \phi_{N+1})^{-1} = \frac{1}{\lambda} (\lambda \phi_N^T \phi_N + \varphi^T \varphi)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{1}{\lambda} (\phi_N^T \phi_N)^{-1} - \frac{1}{\lambda} (\phi_N^T \phi_N)^{-1} \varphi^T \{1 + \varphi \frac{1}{\lambda} (\phi_N^T \phi_N)^{-1} \varphi^T\}^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \varphi \frac{1}{\lambda} (\phi_N^T \phi_N)^{-1} \right\} = \frac{1}{\lambda} \{P(N) - K(N) \varphi P(N)\} \end{aligned}$$

Sammanfattning och tolkning av resultatet

Parametrarna i systemmodellen

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_1 u(t-1) \dots b_n u(t-n) + e(t)$$

skrives i vektorn $\theta = \{a_1 \ b_1 \ \dots \ a_n \ b_n\}^T$.

Dessutom införes $y = y(N+1)$ och $\varphi = \{-y(N) \ u(N) \ -y(N-1) \ \dots \ u(N-k+1)\}$. Den skattning som vid tidpunkten $N+1$ minimerar förlustfunktionen

$$V(N+1) = \sum_t \lambda^{N+1-t} e(t)^2 \quad \lambda \leq 1$$

ges av de rekursiva ekvationerna:

1. $\hat{\theta}(N + 1) = \hat{\theta}(N) + K(N)\{y - \varphi \hat{\theta}(N)\}$
2. $K(N) = P(N) \varphi^T \{1 + \varphi P(N) \varphi^T\}^{-1}$
3. $P(N + 1) = \frac{1}{\lambda} \{P(N) - K(N) \varphi P(N)\}$

Dessa ekvationer har en intressant tolkning. Termen $\varphi \hat{\theta}(N)$ i 1 är den enligt den aktuella skattningen av systemets parametrar förväntade utsignalen medan y är den verkliga utsignalen från systemet. Ekv 1 säger då att den nya parameterskattningen erhålles ur den gamla genom addition av en term vars storlek beror dels av hur bra den förra skattningen var, dels av vektorn K , som i sin tur beror av P .

En statistisk analys av minsta kvadrat metoden visar att elementen i matrisen P mäter osäkerheten i parameterskattningen $\hat{\theta}$. Ekv 2 visar nu att om elementen i P är små, kommer även elementen i K att vara små vilket innebär att korrektionen i ekv 1 blir liten. Normalt gäller för MK-skattningen att ju fler mät-punkter (N st) man förfogar över, ju noggrannare blir skattningen, dvs elementen i P minskar ($\sim \frac{1}{N}$) med ökande N . Ur ekv 3 framgår nu hur reelltidsvarianten av MK-metoden fungerar. Genom att dividera P med $\lambda < 1$ erhålles en motverkande tendens, som strävar att öka osäkerheten varigenom de senaste mätvärdena hela tiden kommer att påverka skattningen av $\hat{\theta}$.

3. PROGRAMMERING OCH TESTNING AV IDENTIFIERINGSALGORITMEN ENLIGT KAPITEL 2

Inför programmeringen observerar man att det inte ingår några matrisinverser i de rekursiva uttrycken utan endast rättframma matrismultiplikationer. En procedur i Algol visas nedan (fig. 3). Som startvärden visar det sig lämpligt att sätta $P(0)$ som en diagonalmatris med stora värden (100-1000) i diagonalen. Initialvärde på parameterskattningen TH är likgiltigt med detta val av $P(0)$. Bildandet av vektorn FI , som innehåller de senaste mätpunkterna, förutsättes ske i huvudprogrammet.

För testning av proceduren har använts artificiellt genererade data enligt modellen:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) + b_1 u(t-1) + 0.1 e(t)$$

där $e(t)$ är normalfördelade $N(0,1)$ och insignalen $u(t) = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ med övergångssannolikheten 0.3.

Parametrarna a_1 och b_1 slutligen antar värdena

$$a_1 = \begin{cases} -0.5 & t < 120 & t \geq 180 \\ +0.5 & 120 \leq t < 180 \end{cases}$$

$$b_1 = \begin{cases} +1.0 & t < 60 & t \geq 120 \\ -1.0 & 60 \leq t < 120 \end{cases}$$

Fig. 2 visar parameterskattningen i varje tidpunkt då "glömskefaktorn" $\lambda = 0.832$. Man kan observera att det förekommer en viss återverkan mellan parameterskattningarna så att även skattningen av den oförändrade parametern påverkas vid en stor variation i systemdynamiken. Detta bör hållas i minnet vid studium av resultaten i kapitel 4.

4. IDENTIFIERINGAR PÅ SAAB-DATA. RESUMÉ AV RESULTAT ERHÅLLNA I EXAMENSARBETET

En möjlighet att identifiera en tidsvariabel processdynamik med hjälp av en tidsinvariant minsta kvadrat skattning är, förutsatt att tidsvariationerna är långsamma, att indela mätserien i mindre delar som identifieras var för sig. Detta knep tillgreps också snart, se examensarbetet. Resultatet blev att parameterskattningarna skiljde sig avsevärt mellan delarna, men en tendens till med tiden växande förstärkning kunde spåras. Av registreringarna från simuleringarna kunde utläsas att piloten ibland gjorde felaktiga styringrepp. Detta togs som förklaring till en del av parametervariationerna.

Processidentifiering på pilotdata

Vid identifieringen betraktades reaktionstidsfördröjning som känd = 0.12 sek. Dessutom förutsattes att det sökta systemet var av första ordningen. Viktfaktorn λ var konst = 0.85. För varje skattning beräknades motsvarande värde på förstärkning K och tidskonstant T i överföringsfunktionen

$$\frac{K e^{-0.12s}}{Ts + 1}$$

Vid utskriften som skedde med plottning direkt på radskrivaren angavs medelvärden av de 5 sista värdena i var 5:te samplingspunkt. De visade värdena är alltså på detta sätt utjämnade.

De första resultaten visade att pilotens förstärkning varierade hastigt. Se t.ex. diagram 1. Denna identifiering har utförts på data från simulering Torsdag 11, som utförts med en mycket rutinerad styrare. Det vore alltså mycket märkligt om denne skulle växla tecken på sin förstärkning så som diagram 1 antyder. Vid en plottning av felsignal och styrsignal i större skala än den på skrivarutskriften, ser man att pilotens styringrepp definitivt inte ändrar karaktär så som diagram 1 låter förmoda, men att felsignalen i stort sett hela tiden är positiv men att styrsignalen växlar tecken och det vid ungefär samma tidpunkter som skattningen av förstärkningsparametern ändrar tecken. Man leds alltså till slutsatsen att mätvärdena från simuleringarna har en likspänningskomponent överlagrad. Denna uppskattades med ögonmått ur diagram 2-5 del a och subtraherades från mätdata. Identifieringen på de så erhållna värdena visas i diagram 2-5 del b. Om vi betraktar diagram 4b som visar skattningar baserade på samma data som diagram 1 med den enda skillnaden att felsignalen på detta sätt minskats med 20, ser vi att förstärkningen ser avsevärt rimligare ut. Endast tillfälligtvis är förstärkningen nära noll eller negativ. Även skattningarna i de övriga diagrammen bär sannolikhetens prägel. Man bör ha i åtanke att de data som ligger till grund för identifieringarna i diagram 2 och 3 härrör från en pilot med ringa träning jämfört med i diagram 4 och 5. Det står dock klart att för att kunna göra mer precisa

uttalanden angående pilotens beteende krävs tillgång till data-materiel av högre kvalitet. Det är otillfredsställande att behöva med ögonmått avskilja likspänningsnivåer för att hindra dessa från att helt förvränga resultatet.

5. RESULTAT - SAMMANFATTNING

Man törs nog konstatera att den här föreslagna metoden för reelltidsidentifiering förmår att finna dynamiken även i svåra fall som de här redovisade. Det bör också konstateras att den komplikation det innebär att gå omvägen över en samplad modell för att finna en kontinuerlig överföringsfunktion är beroende av den speciella tillämpningen i detta fall. I allmänhet är man väl så intresserad av den samplade modellen som ju erhålles direkt. Slutligen skall påpekas att vi här har sett en annan tillämpning av reelltidsidentifiering förutom att beräkna parameterskattningar, nämligen att direkt vid mätningarna på ett objekt avgöra det erhållna datamaterialets kvalitet så att misstag med t.ex. bias som i detta exempel kan undvikas.

APPENDIX. FIGURER OCH DIAGRAM.

Figur 1. Viktfunktionen.

Figur 2. Test av algoritmen på genererade data.

Figur 3. ALGOL-proceduren RTLS.

Diagram 1. Identifiering på signalen i diagram 4a , utan
korrektion för bias.

Diagram 2. Försök Fredag 2 , horisontell styrning.

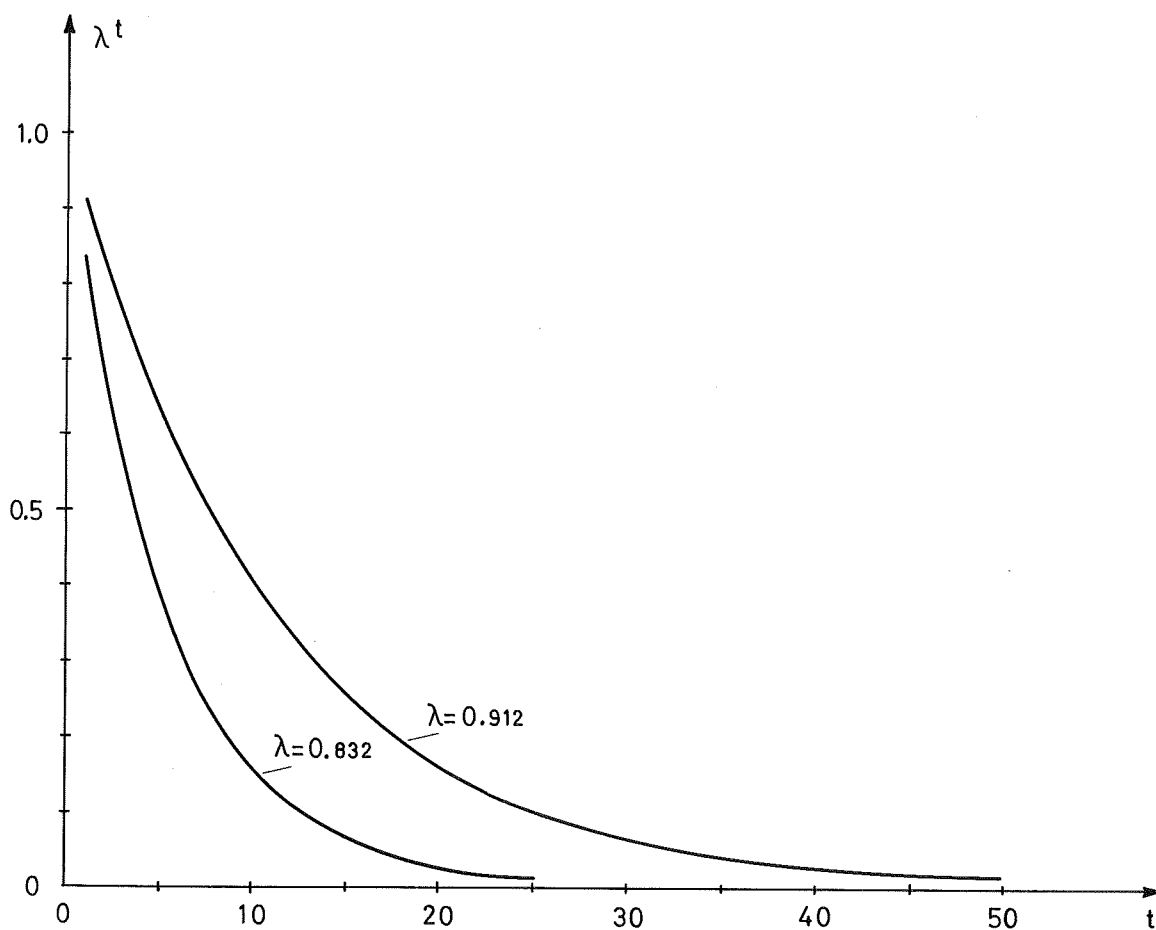
Diagram 3. Försök Fredag 2 , vertikal styrning.

Diagram 4. Försök Torsdag 11 , horisontell styrning.

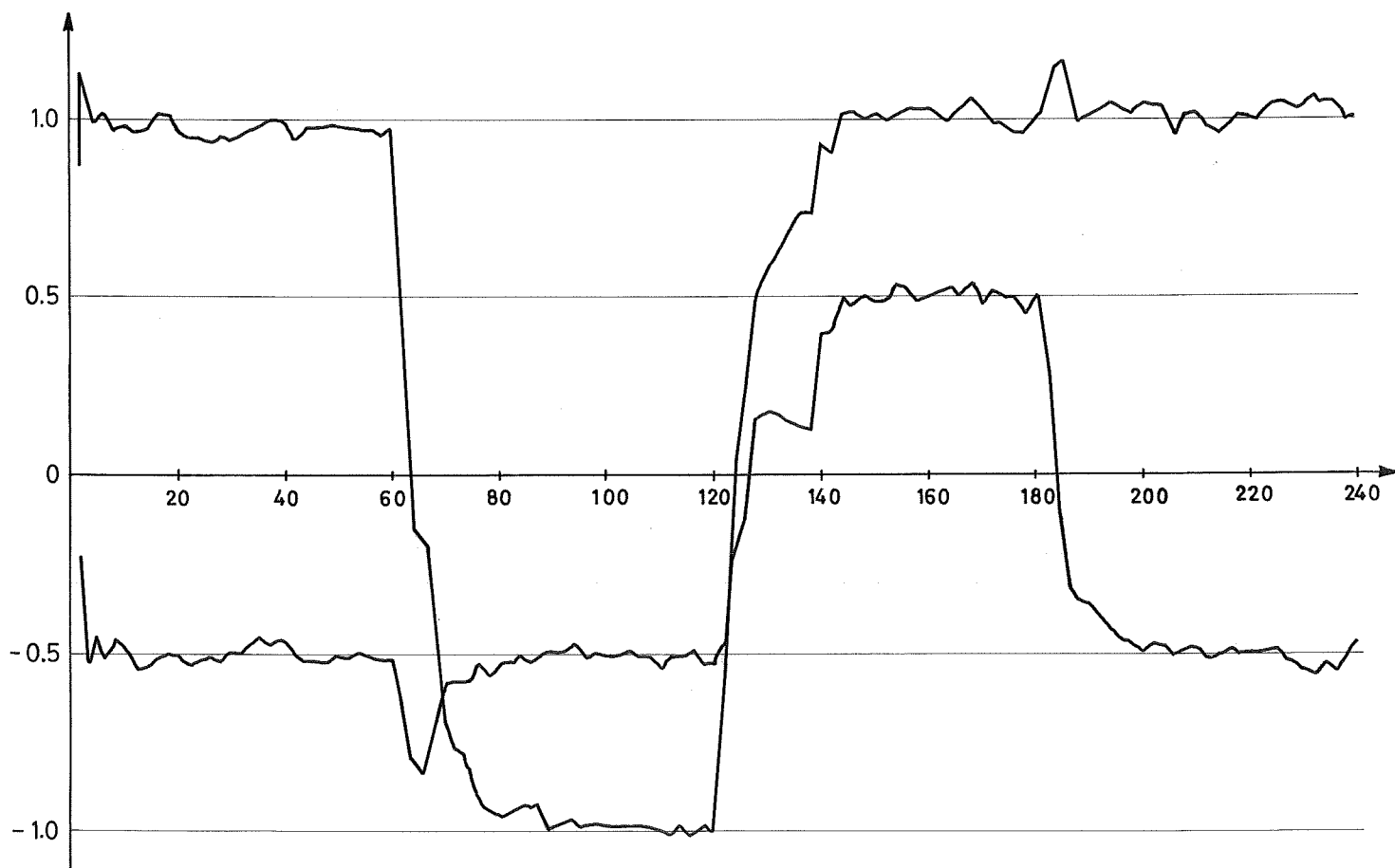
Diagram 5. Försök Torsdag 11 , vertikal styrning.

I diagram 2 - 5 visas i a) signalen från försöket och i b)
resultatet vid identifieringen. När i b) en punkt fallit utan-
för diagrammet är detta markerat med kryss.

I diagrammen markeras
felsignalen med heldragen linje
styrsignalen med streckad linje
förstärkningen med punkter och
tidskonstanten med ringar.



Figur 1. Viktfunktionen.



Figur 2. Identifiering på genererade data.

```

procedure RTLS(T,P,FI,y,n,lambda,res);

  value y,n,lambda; real y,lambda,res;

  integer n; array T,P,FI;

  begin real slask; integer i,j,N; array K,S[1:4];

    for i:=1 step 1 until n do

      begin K[i]:=0; for j:=1 step 1 until n do

        K[i]:=K[i]+P[i,j]×FI[j]

      end;

      for i:=1 step 1 until n do S[i]:=K[i]; slask:=1;

      for i:=1 step 1 until n do slask:= slask +FI[i]×K[i];

      for i:=1 step 1 until n do K[i]:=K[i]/slask;

      for i:=1 step 1 until n do

        for j:=1 step 1 until i do

          P[j,i]:=P[i,j]:=(P[i,j] - K[i]×S[j])/lambda;

        slask:=y; for i:=1 step 1 until n do

          slask:=slask - FI[i]×T[i];

        for i:=1 step 1 until n do

          T[i]:=T[i] + K[i]×slask;

        res:=slask

      end RTLS;;

```

Figur 3. Proceduren RTLS.

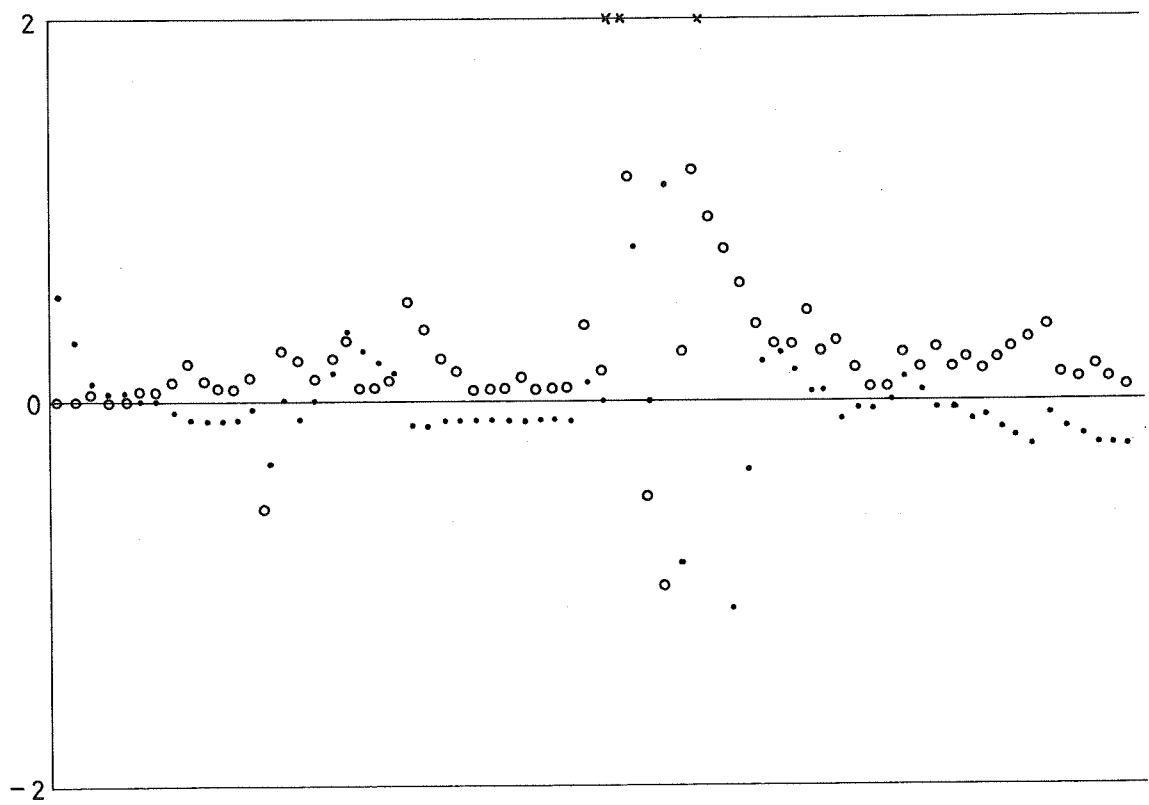


Diagram 1.

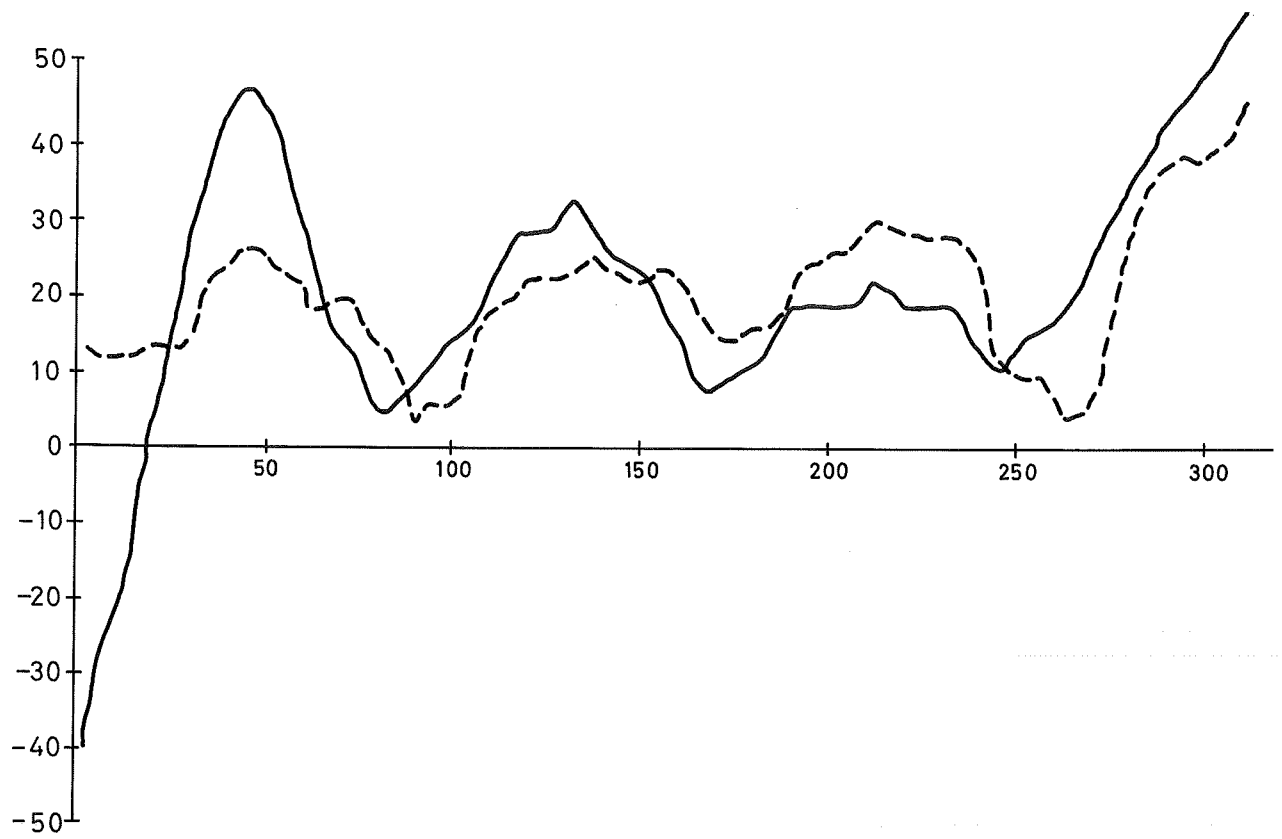


Diagram 2a.

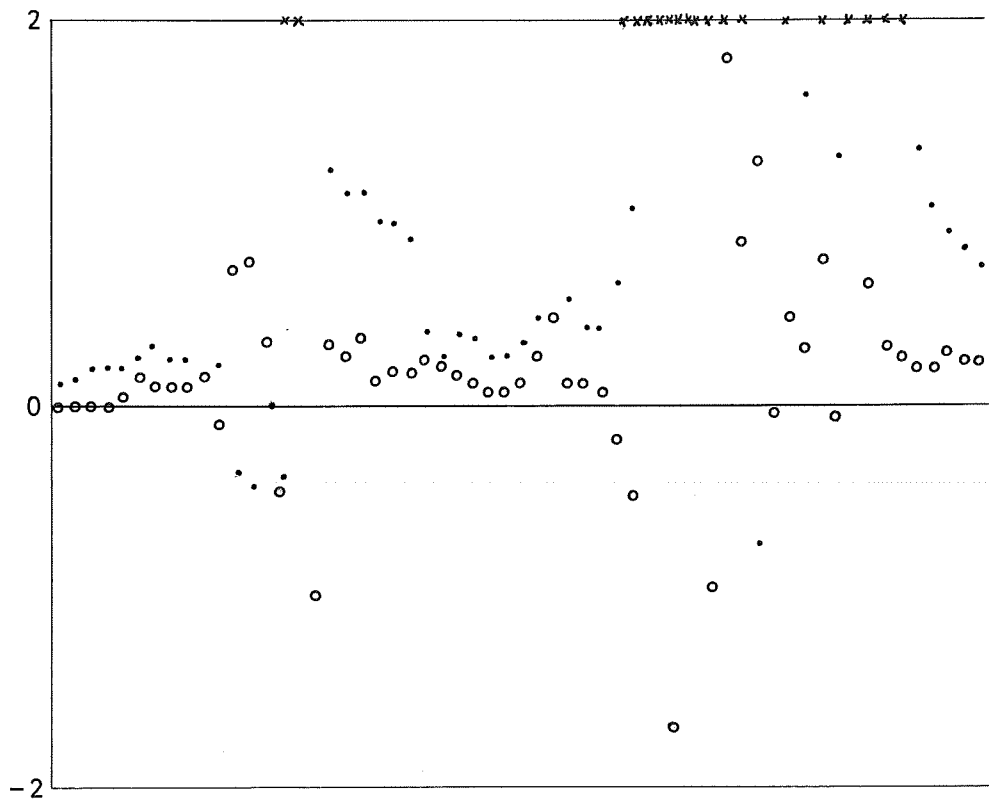


Diagram 2b.

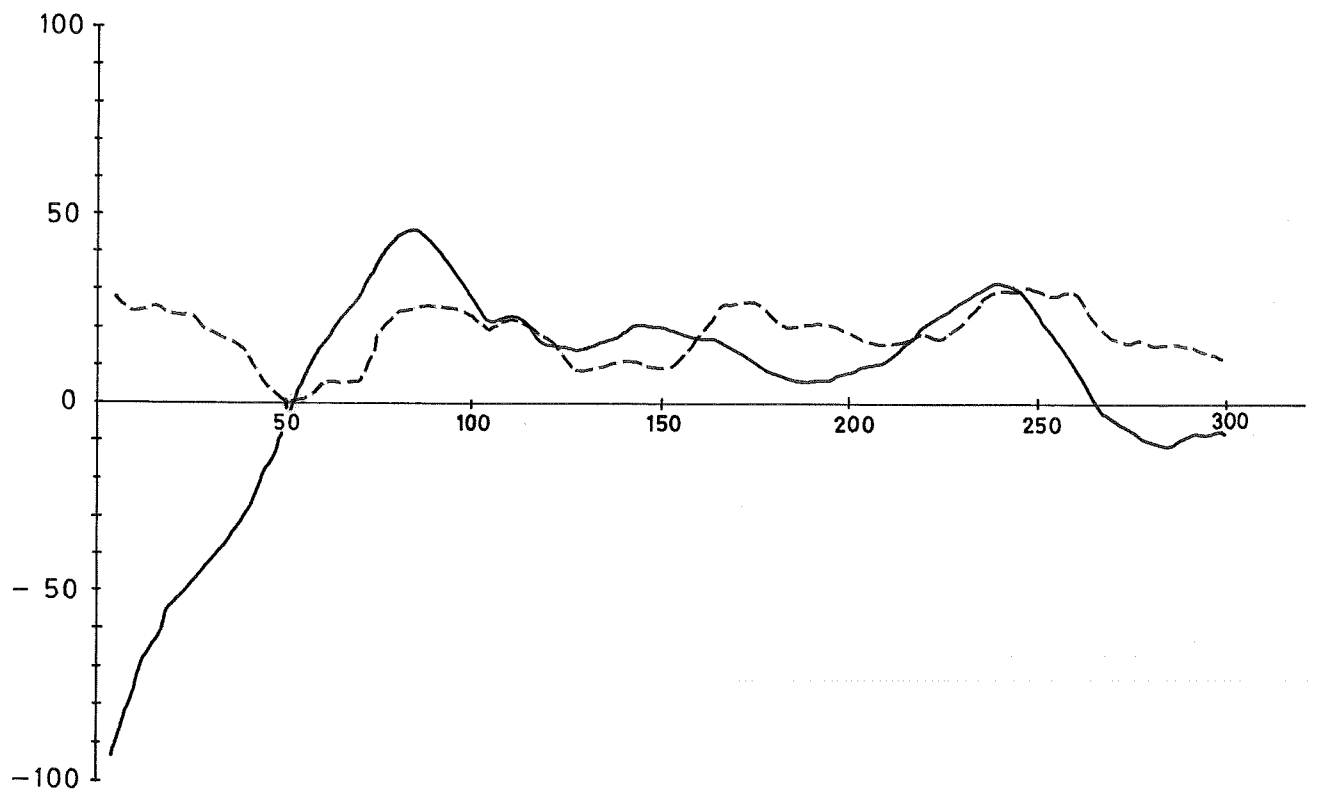


Diagram 3a.

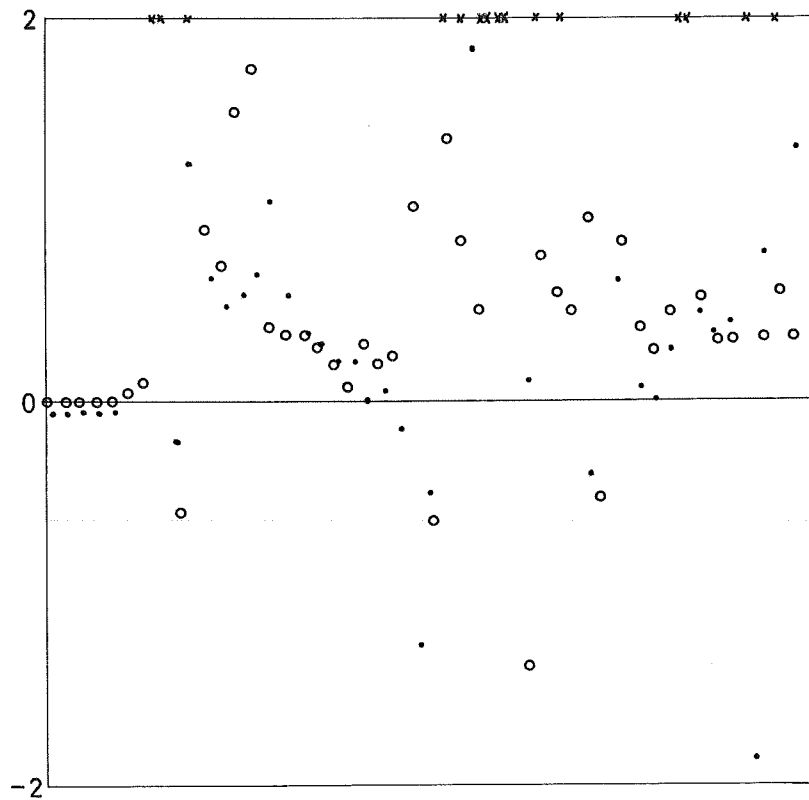


Diagram 3b.

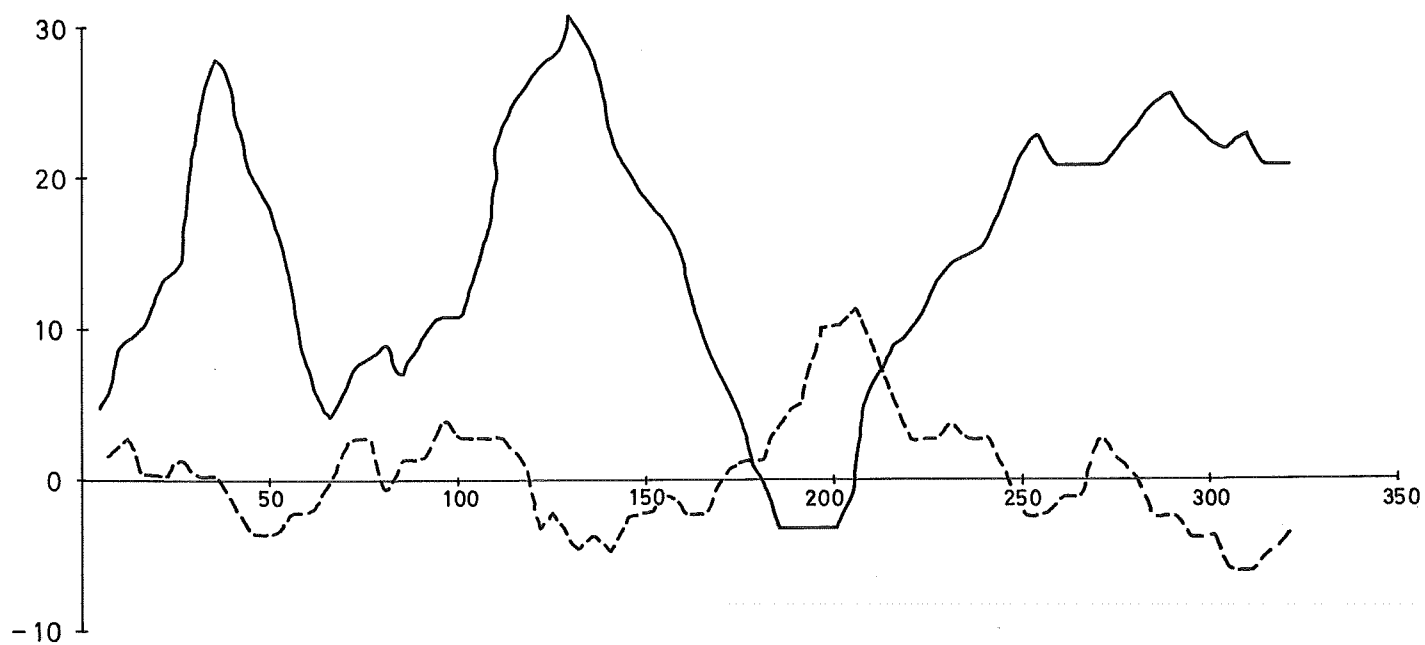


Diagram 4a.

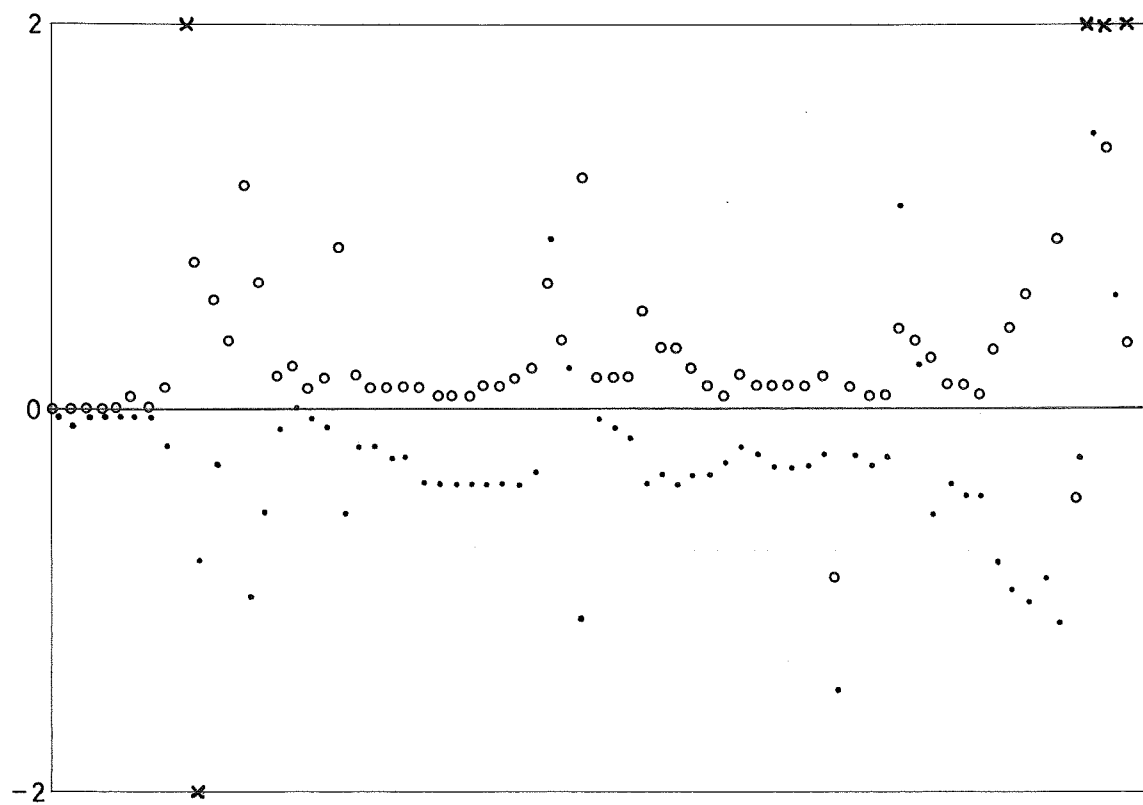


Diagram 4b.

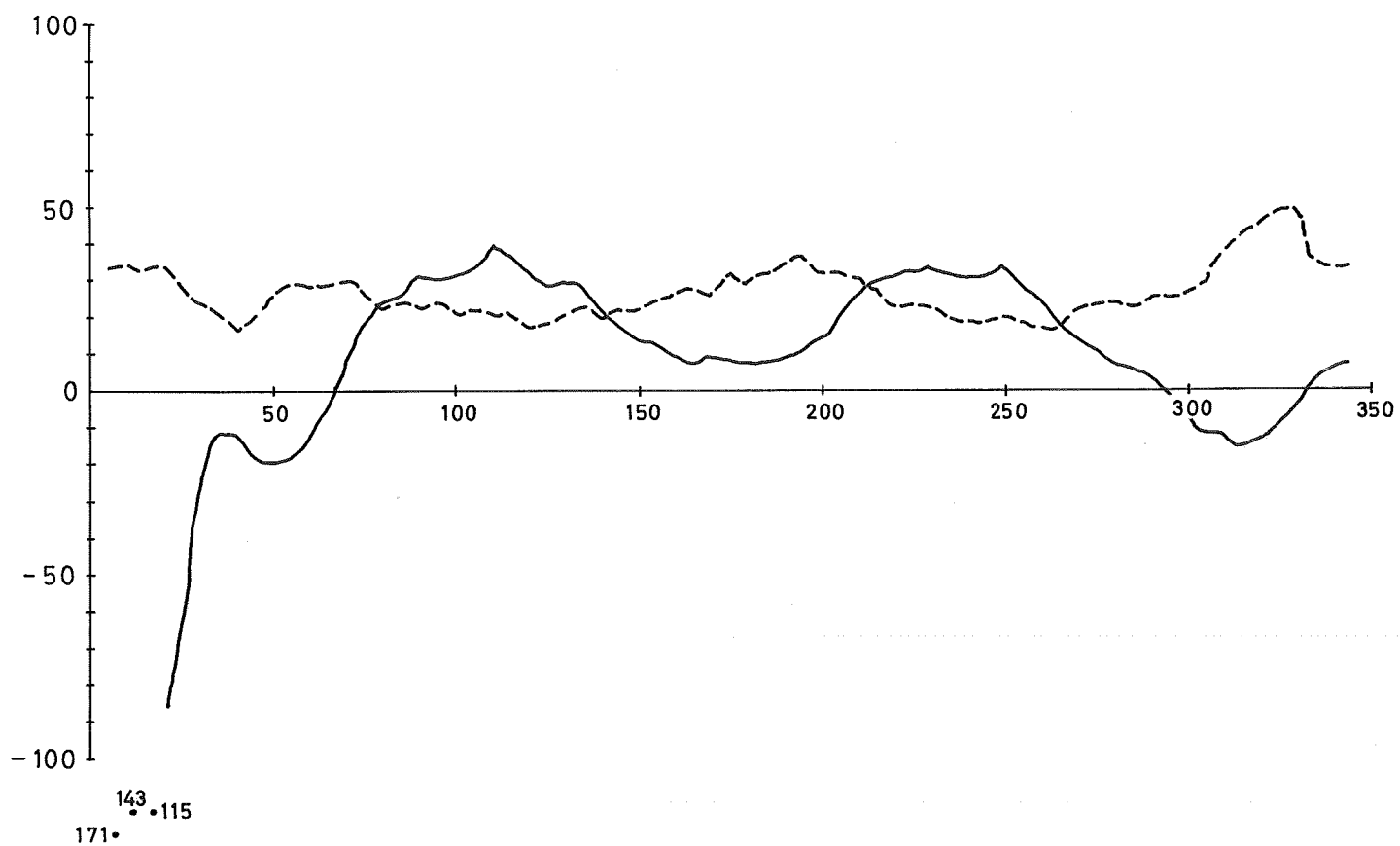


Diagram 5a.

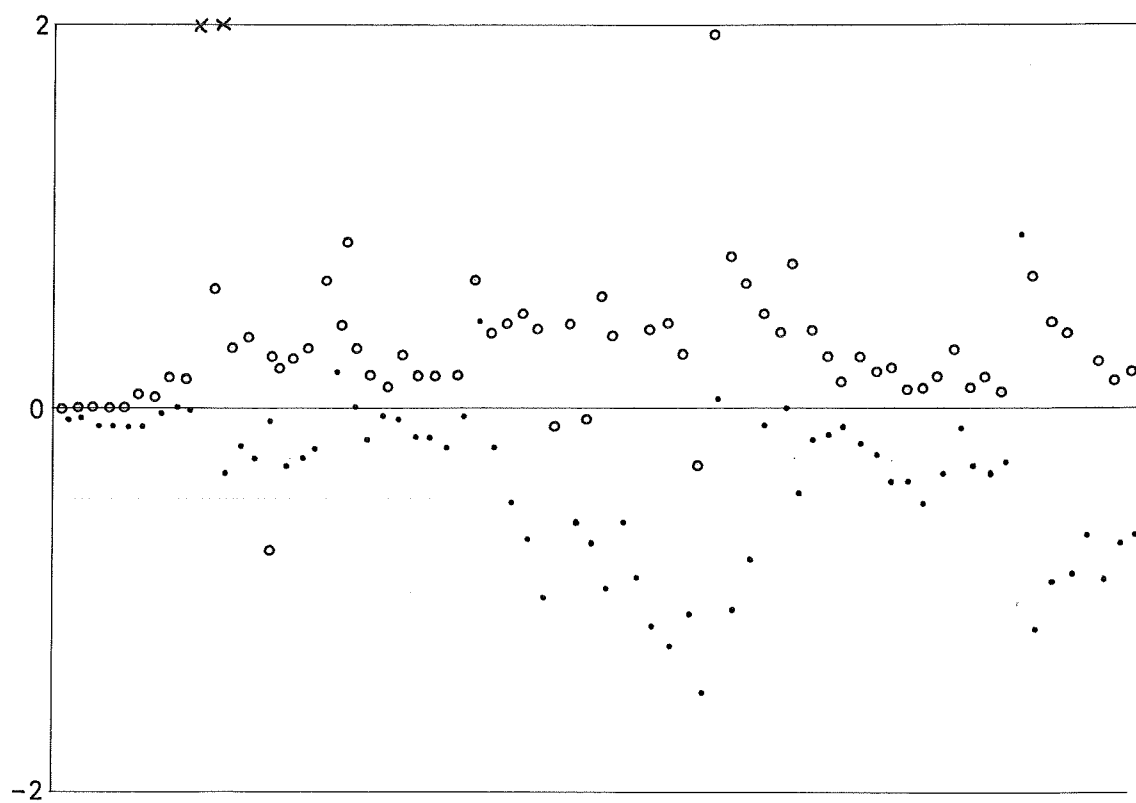


Diagram 5b.