Knäckning

Pettersson, Ove

1971

LUND UNIVERSITY

PO Box 117
221 00 Lund
+46 46-222 00 00

LUND INSTITUTE OF TECHNOLOGY · LUND · SWEDEN · 1971
DIVISION OF STRUCTURAL MECHANICS AND CONCRETE CONSTRUCTION · BULLETIN 24

OVE PETTERSSON

KNÄCKNING

Kap 157 Knäckning

Av professor Ove Pettersson

Hänvisningar

Vippning och rymdknäckning, kap 158
Bågar (bågknäckning), kap 164
Skal (skalknäckning), kap 167
Oarmerad betong (pelare, väggar), kap 331
Armerad betong (tryck med knäckningsrisk), kap 332
Pelare och väggar av armerad betong, kap 335:2
Oarmerat murverk (knäckning), kap 342
Knäckning vid stålkonstruktioner, kap 353
Buckling vid stålkonstruktioner, kap 354
Aluminiumkonstruktioner, kap 357
Pelare och strävor av trä, kap 363

:1 Beteckningar och allmänna grundbegrepp

:11 Beteckningar

Jfr även Kap 111

I denna sammanställning har endast medtagits sådana beteckningar, som kommit till användning i ett flertal avsnitt av kapitlet. För i enstaka avsnitt tillämpade beteckningar hänvisas direkt till de i respektive avsnitt givna definitionerna.

C = fjäderkoefficient vid punktformigt elastiskt understöttad sträva
E_t = tangentmodul, E_d = dubbelmodul enligt ekv :33 (3)
L = spännvidd
L_f = mot 2. Euler-knäckningsfallet svarande fiktiv knäcklängd
M_t = av enbart transversallast orsakat böjmoment
P = axialkraft
P_k = mot P svarande knäckningslast
Q = transversell punktlast
S = styvhetstal för ramknäckningsberäkning enligt successiv approximation
a = ramdelslängd
a_x, b_x = i närmesamband för beräkning av tilläggsutböjning respektive tilläggsmoment vid axial- och samtidig transversallast ingående dimensionslösa koefficienter, jfr ekv :43 (8) respektive :43 (13)
c = fjäderkoefficient vid kontinuerligt elastiskt understöttad sträva
d = avstånd från tyngdpunktsaxel till maximalt tryckt kant
e = excentricitet
f = initialutböjning
k = $\sqrt{P/EI}$ (i :351 används dock k som dimensionslös inspänningskoefficient och i :372 som beteckning för förskjutningsmodul vid nit-, bult- eller spikförband)
q = fördelad transversallast
r = momentöverföringstal för ramknäckningsberäkning enligt successiv approximation
s = momentfördelningstal för ramknäckningsberäkning enligt successiv approximation; s används också i andra sammanhang som beteckning för säkerhetsfaktor

x = längskoordinat
y = utböjning (y_μ = av axial- och samtidig transversallast orsakad utböjning i det snitt μ, som har maximiutböjning vid knäckning; se :43)
y_t = utböjning av enbart transversallast ($y_{\mu t}$ = transversallastutböjning i det snitt μ, som har maximiutböjning vid knäckning; se :43)
Θ = vinkeländring (Θ_t = vinkeländring av enbart transversallast)
β = L_f/L
δ = translation (knutpunktsförskjutning); i :4 används dock δ_1 och δ_2 som beteckningar för dimensionslösa koefficienter, jfr ekv :43 (8) respektive (13)
ε_B = brottöjning eller brottstukning
λ = L_f/i = mot 2. Euler-knäckningsfallet svarande slankhetstal
σ_k = P_k/A = knäckningsspänning

:12 Begreppet ideell, centrisk knäckningslast

Ur *statisk* synpunkt kan begreppet *ideell, centrisk knäckningslast* definieras på följande sätt med exemplifiering på fallet initiellt rak, fullständigt elastisk sträva under centriskt tryck P (fig :12a). Ges denna genom någon form av yttre störningsbelastning H en utböjning (fig :12b) och avlägsnas därpå störningsbelastningen, kan beroende på storleken av tryckkraften P två principiellt skilda alternativ inträffa. Antingen återgår strävan till sitt raka ursprungsläge, trivial jämvikt (fig :12a), eller stannar den under inverkan av enbart kraften P i ett utböjt, icke-trivialt jämviktsläge (fig :12c). *Det minsta P-värde, för vilket ett utböjt jämviktsläge existerar, definieras som strävans ideella, centriska knäckningslast P_k.*

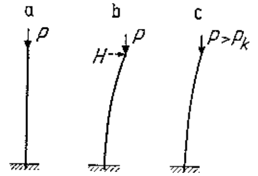


Fig :12a–c

Ur *kinetisk* synpunkt betecknar den på detta sätt definierade knäckningslasten det gränsvärde av den centriska tryckkraften, för vilket den initiellt raka strävan, genom någon impuls försatt i en transversell svängningsrörelse, får utböjningar, som övergår från att vara i tiden begränsade till att bli oändligt stora.

De ovan för specialfallet centriskt tryckt sträva givna definitionerna av begreppet ideell, centrisk knäckningslast är generella och kan direkt utsträckas till giltighet också för andra typer av centriskt tryckta konstruktioner, exempelvis ramar, bågar, plattor och skal. Vad gäller gruppen strävor, ramar och bågar kan det teoretiskt påvisas (fig 12:d), att redan ett obetydligt överskridande av den ideella, centriska knäckningslasten för dessa konstruktionstyper medför avsevärda utböjningar av en storleksordning, som normalt inte kan tolereras i praktiska fall. För strävor, ramar och bågar blir därför den ideella, centriska knäckningslasten mycket nära en absolut övre gräns för dessas bärförmåga. Principiellt annorlunda i detta avseende blir förhållandena vid centriskt tryckta, tunna plattor och skal (jfr :15).

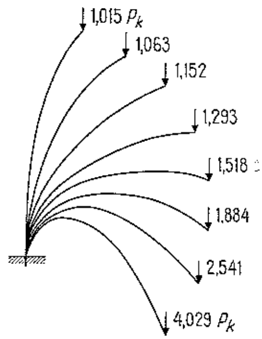


Fig :12d. [1]

:13 Oelastisk knäckning. Inverkan av excentriskt kraftangrepp

Den ideella, centriska knäckningslasten, definierad i :12, förutsätter

a en konstruktion, som i sin helhet är uppbyggd av homogent material med obegränsad elasticitet

b en belastning, som i varje punkt av den icke utböjda konstruktionen går genom tvärsnittets tyngdpunkt

Nu uppfyller emellertid de i praktiken aktuella konstruktionsmaterialen inte kravet på obegränsad elasticitet ända upp till brott. De uppför sig elastiskt endast upp till en viss spänningsgräns, proportionalitetsgränsen σ_p, ovan vilken det lineära sambandet mellan spänning σ och relativ längdändring ε upphör. Beroende på om den mot ideell, centrisk knäckningslast svarande tryckspänningen $\sigma_k = P_k/A$, där A är tvärsnittsytan, ligger under eller över proportionalitetsgränsen σ_p sägs *elastisk* respektive *oelastisk knäckning* föreligga.

Inte heller förutsättningen b om i varje tvärsnitt centriskt lastangrepp är praktiskt realiserbar. Smärre *initialkrokigheter och excentriciteter* är nämligen ofrånkomliga även vid mycket omsorgsfullt genomförda laboratorieförsök, vilket medför att man i praktiken i motsats till förhållandena vid den ideella, centriska knäckningen får definita utböjningar för varje yttre tryckbelastning, skild från 0. Med ökad tryckbelastning tillväxer dessa utböjningar med en tillväxthastighet, som blir större ju närmare den verkande belastningen kommer den ideella, centriska knäckningslasten. Det slutgiltiga knäckningsbrottet inträder praktiskt som ett *stabilitetsbrott*, vilket i motsats till ordinära spänningsbrott karaktäriseras av ett snabbt händelseförlopp. Speciellt för statiskt bestämd konstruktion innebär ett stabilitetsbrott, att denna utan nämnvärd föregående varning med hastigt ökande deformationer störtar samman.

Av ovanstående framgår, att *den ideella, centriska knäckningslasten närmast får rubriceras som en ren teoretisk storhet, vilken måste modifieras för att kunna läggas till grund vid en bestämning av för praktisk dimensionering tillåtna spänningar.* En sådan modifiering kan göras på många sätt, och litteraturen på området uppvisar också ett stort antal lösningar av problemet. I stort kan dessa lösningar uppdelas i två huvudgrupper.

Den *ena huvudgruppen* karaktäriseras av att man vid bestämning av tillåten knäckningsspänning utgår från det teoretiska fallet *initiellt rak, centriskt tryckt konstruktion,* beräknar med hänsyn tagen till det verkliga σ-ε-diagrammet brottspänningen och därpå erhåller tillåten spänning genom att brottspänningen divideras med en säkerhetsfaktor. I denna säkerhetsfaktor måste då inkluderas de i praktiken ofrånkomliga effekterna av initialkrokighet och initialexcentricitet, vilket medför, då dessa effekters betydelse ökar med konstruktionens slankhet, att säkerhetsfaktorn kommer att variera med det s k *slankhetstalet.*

Vid den *andra huvudgruppen* av lösningsmetoder utgår man från det mer realistiska fallet *initialkrokig konstruktion under tryckbelastning med viss initialexcentricitet,* beräknar det gränsvärde av tryckbelastningen, för vilket sträckgränsen uppnås i konstruktionens mest ansträngda punkt, och anser detta gränsvärde utgöra konstruktionens praktiska brottgräns. Principiellt innebär detta förenklade behandlingssätt, att den tryckta konstruktionens bärförmåga blir bestämd ur ett rent elastiskt spänningsbrott i stället för ur verklighetens elasto-plastiska stabilitetsbrott. Som konsekvens härav erhålls en viss överdimensionering, vilken emellertid kan visas ordinärt vara utan utslagsgivande praktisk betydelse (jfr ex [2], [3]).

En påtaglig fördel hos beräkningsmetoderna enligt den sistnämnda huvudgruppen är, att säkerhetsfaktorn — förhållandet mellan materialets sträckgräns och för dimensionering tillåten spänning — *blir oberoende av konstruktionernas slankhet.*

:14 Begreppen plan knäckning, rymdknäckning, vippning

Om vid en tryckt sträva, ram eller båge den till knäckningsförloppet hörande böjdeformationen försiggår i ett plan, sägs *plan knäckning* föreligga. Praktiskt är denna aktuell, då den för knäckning utsatta konstruktionen genom anslutande byggnadsdelar är stagad mot utböjning vinkelrät mot knäckningsplanet. Vid fria möjligheter för knäckningsdeformation i rymden däremot uppträder vid centriskt lastangrepp den plana knäckningen renodlat endast vid dubbelsymmetrisk sektion. I extrema fall, vid korta strävor av tunnväggig, öppen sektion, framför allt vid lättmetallkonstruktioner, kan dock vid centriskt tryckt, dubbelsymmetrisk balk den rena *vridningsknäckningen* bli dimensionerande framför den plana knäckningen. Knäckningsförloppet karaktäriseras därvid av att den tryckta strävan med bibehållen rak tyngdpunktsaxel får en ren vriddeformation (fig :14a).

Vid tryckt sträva med enkelsymmetrisk eller helt osymmetrisk sektion blir vid fria rymddeformationsmöjligheter den mot plan knäckning svarande kritiska lasten — eller i extrema fall den rena vridningsknäckningslasten — dimensionerande endast om tryckkraften i alla snitt går genom sektionens vridningsmedelpunkt. Är så inte fallet, inträder, även vid centrisk tryckkraft, *rymdknäckning* med sammankopplade böjnings- och vridningsdeformationer (jfr 158:5 och 357:44).

Till gruppen rymdstabilitetsfenomen hör också *vippningen* (fig :14b), som är praktiskt aktuell vid transversalbelastade balkar med liten böjstyvhet i riktning vinkelrät mot belastningsplanet och liten vridstyvhet. En störning av den centriska böjningsjämvikten resulterar därvid i ett icketrivialt jämviktsläge, karaktäriserat av sammankopplade böjnings- och vridningsdeformationer. Beträffande vippning hänvisas till kap 158.

Vid den nedan följande behandlingen förutsätts genomgående plan knäckning föreligga.

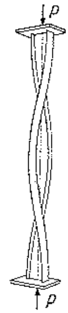


Fig :14a. Sträva utsatt för vridningsknäckning

Fig :14b. Balk utsatt för vippning

:15 Knäckning vid plattor och skal (buckling). Genomslagsfenomen

Som ovan påpekats kan de i avsnitt :12 för tryckt sträva givna definitionerna av begreppet ideell, centrisk knäckningslast oförändrade tillämpas också vid studiet av ytbärverks knäckning (buckling), illustrerad för två speciella fall i fig :15a och b, nämligen knäckning av fyrsidigt fritt upplagd, kvadratisk platta under likformigt tryck *n* i en riktning respektive rotationssymmetrisk knäckning av axiellt, likformigt tryckt, slutet cylinderskal.

Principiellt skiljer sig *knäckningen av tunn platta* från knäckningen av sträva, ram eller båge därigenom, att vid den tunna plattan bärförmågan ordinärt inte är uttömd i och med att den enligt :12 definierade knäckningslasten uppnås. Genom att redan vid ändliga utböjningar av storleksordningen plattjockleken en gynnsam omlagring inträder av den tunna plattans membrankrafttillstånd, är det nämligen ofta möjligt att stegra belastningen väsentligt över knäckningslasten (*överkritiskt område*), utan att praktiskt generande utböjningar uppkommer och utan att plattans brottlast uppnås. Se vidare 166:9 och 354:24.

Det omvända uppträder vid *knäckning av tunna skal* (se 167:5 och 354:7). För dessa har man genom stort upplagda försöksserier, omfattande bl a sfäriska och slutna cirkulärcylindriska skal, funnit, att de ofta blir ur stabilitetssynpunkt kritiska vid belastningar, som ligger väsentligt under de enligt :12 definierade knäckningslasterna. Stabilitetsbrottet uppträder därvid som ett *genomslagsfenomen*, varvid det tunna skalet plötsligt övergår från en jämviktsform till en annan med lägre potentiell energi. Fenomenet illustreras för ett sfäriskt skal under yttre övertryck av bildföljden i fig :15c.

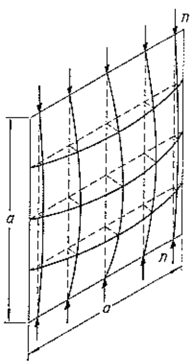


Fig :15a. Deformationsfigur vid knäckning av centriskt tryckt platta

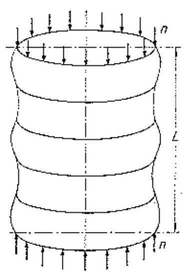


Fig :15b. Deformationsfigur vid rotationssymmetrisk knäckning av centriskt tryckt, slutet, cirkulärcylindriskt skal

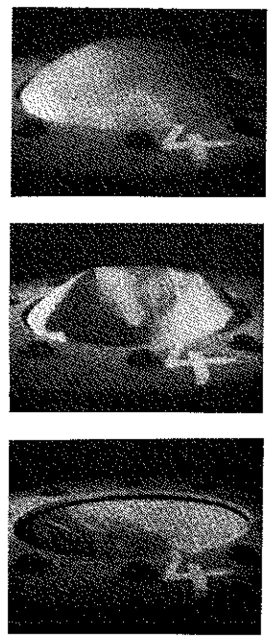


Fig :15c. Förloppet vid genomslag, [4]

:2 Metoder för beräkning av knäckningslast

De metoder som förekommer i litteraturen för beräkning av elastiska systems stabilitet kan i stort uppdelas enligt nedanstående schema.

A Statiska metoder

a Jämviktsmetod b Excentricitetsmetod c Energimetod

B Kinetiska metoder

Vid en behandling av ett elastiskt system enligt *jämviktsmetod* definieras som kritiska de centriska belastningar, för vilka utböjda jämviktslägen existerar, jfr :12. Vid en behandling enligt *excentricitetsmetod* karaktäriseras de kritiska belastningarna vid excentriskt lastangrepp av att de beräkningsmässigt ger systemet oändligt stora deformationer. Kännetecknande för de kritiska belastningarna vid en stabilitetsberäkning enligt *energiförfarande* är, att, då dessa uppnås, upphör systemets potential att vara positivt definit. Vid de *kinetiska beräkningsmetoderna* slutligen karaktäriseras de kritiska belastningarna av att lösningarna till rörelseekvationerna för det elastiska systemet försatt i svängning blir av icke-begränsad typ.

Tillämpningen av de olika beräkningsmetoderna illustreras nedan på ett elementärt stabilitetsproblem, nämligen plan elastisk knäckning av axiellt tryckt, rak sträva, ledartat upplagd i sina båda ändpunkter. För vidare tillämpningar hänvisas till litteraturen, t ex [1], [2], [5], [6], [9], [36], [48], [73], [127].

:21 Jämviktsmetod

För den i fig :21 visade initiellt raka, centriskt tryckta, elastiska strävan med efter sin längd konstant sektion söks det minsta värde av tryckkraften P, knäckningslasten, för vilket ett utböjt jämviktsläge existerar. Som lösningsmetod väljs en direkt integration av elastiska linjens ekvation, vilken för små utböjningar y har formen

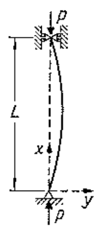


Fig :21

$$y'' = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = -M_x/EI_x \tag{1}$$

där M_x = böjmomentet i snitt x, E = elasticitetsmodulen och I_x = tröghetsmomentet i snitt x, i aktuellt fall konstant $= I$.

Ur fig :21 erhålls $M_x = Py$, vilket överför ekv (1) i

$$y'' + k^2y = 0, \quad k^2 = P/EI \tag{2}$$

Lösningen till ekv (2) lyder

$$y = A\cos kx + B\sin kx \tag{3}$$

där A och B är integrationskonstanter, som får bestämmas ur två randvillkor, exempelvis 1 $y=0$ för $x=0$, varav $A=0$, 2 $y=0$ för $x=L$, varav $B\sin kL=0$. Randvillkoret 2 är uppfyllt, om antingen $B=0$ eller $\sin kL=0$. $B=0$ i kombination med $A=0$ ger emellertid enligt ekv (3) $y=0$, vilket strider mot villkoret att ett utböjt jämviktsläge skall existera. För existens härav erhålls därför som entydigt villkor

$$\sin kL = 0, \text{ dvs } kL = n\pi, n = 0, 1, 2 \ldots \tag{4}$$

Som minsta häremot svarande knäckningslast $P_k (\neq 0)$ ger ekv (2)

$$P_k = \pi^2 EI/L^2 \tag{5}$$

:22 Excentricitetsmetod

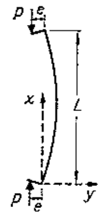


Fig :22

För en knäckningsberäkning enligt excentricitetsmetod modifieras belastningsfallet i fig :21 så, att den axiella tryckkraften P får en excentricitet e (fig :22). Därigenom förändras uttrycket för böjmomentet M_x till $M_x = P(e+y)$ och problemets grundekv :21(2) till

$$y'' + k^2 y = -k^2 e \tag{1}$$

med lösningen

$$y = A\cos kx + B\sin kx - e \tag{2}$$

För bestämning av integrationskonstanterna A och B gäller samma randvillkor som för det centriska fallet i :21, ur vilka beräknas $A = e$, $B = [(1 - \cos kL)/\sin kL]e$, varpå efter omformning för utböjningen y erhålls

$$y = (e/\sin kL)[\sin kx + \sin k(L-x) - \sin kL] \tag{3}$$

För bestämning av knäckningslasten P_k, karaktäriserad av att för denna y beräkningsmässigt blir oändlig, ger ekv (3) sambandet $\sin kL = 0$, dvs identiskt samma samband, som erhållits i :21 ur en beräkning enligt jämviktsmetod.

:23 Energimetod

För det centriska belastningsfallet enligt fig :21 studeras den potentialförändring som uppkommer då den tryckta strävan vid konstant värde på tryckkraften övergår från sitt raka ursprungsläge till ett utböjt läge. Därvid uppkommer ett potentiellt energitillskott ΔV från inre böjningsarbete i strävan och en potentiell energiminskning ΔT från yttre lastens förskjutning i sin egen riktning. Den resulterande potentialförändringen blir $\Delta V - \Delta T$, vilken upphör att vara positivt definit — kriteriet för att knäckningslasten uppnåtts — då

$$\Delta V = \Delta T \tag{1}$$

För ΔV och ΔT gäller uttrycken (jfr bl a [1])

$$\Delta V = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_x^2\,dx}{EI_x} = \frac{1}{2}\int_0^L EI_x (y'')^2\,dx \tag{2}$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}P\int_0^L (y')^2\,dx \tag{3}$$

vilka insatta i knäckningskriteriet, ekv (1), för knäckningslasten P_k ger ekv (4) eller med beaktande av att i aktuellt fall $M_x = Py$ ekv (5)

$$P_k = \int_0^L EI_x (y'')^2\,dx \bigg/ \int_0^L (y')^2\,dx \tag{4}$$

$$P_k = \int_0^L (y')^2\,dx \bigg/ \int_0^L \frac{y^2\,dx}{EI_x} \tag{5}$$

För bestämning av P_k ur ekv (4) eller (5) får väljas en ansats för utböjningen y. Allmänt gäller därvid, att om uttrycket för y så väljs, att det satisfierar problemets randvillkor men inte differentialekvationen — i aktuellt fall ekv :21 (2) — erhålls ett P_k-värde, som är större än jämvikts- eller excentricitetsmetodens mer exakta värde. Väljs omvänt för y en ansats, som satisfierar differentialekvationen men inte randvillkoren, ger ekv (4) och (5) P_k-värden, som blir större respektive mindre än jämvikts- eller excentricitetsmetodens värde, beroende på om vald ansats svarar mot randvillkor, som erbjuder större eller mindre motstånd mot strävans deformationer än aktuella randvillkor. Med ett y, som uppfyller samtidigt såväl differentialekvation som randvillkor, ger ekv (4) och (5) det exakta värdet

— i det aktuella fallet —

$$P_k = \pi^2 EI/L^2 \tag{6}$$

med ansatsen (jfr :21)

$$y = B \sin(\pi x/L) \tag{7}$$

Av ekv (4) och (5) är den sistnämnda mindre känslig än den förstnämnda, vad gäller val av ansats för y. Exempelvis erhålls för det i fig :21 visade belastningsfallet med de randvillkoren satisfierande ansatserna [6]

$$y = A(x/L)(1-x/L) \quad y = B(x/L)(1-2x^2/L^2+x^3/L^3) \tag{8}$$

ur ekv (4)

$$P_k = 12EI/L^2 \text{ (21,6 \% fel) resp } P_k = 9{,}8824EI/L^2 \text{ (0,130 \% fel)} \tag{9}$$

och ur ekv (5)

$$P_k = 10EI/L^2 \text{ (1,32 \% fel) resp } P_k = 9{,}8710\, EI/L^2 \text{ (0,014 \% fel)} \tag{10}$$

I gengäld har ekv (5) mer begränsat användningsområde, då den förutsätter att det böjande momentet i varje snitt av den tryckta strävan kan skrivas som Py, vilket är fallet endast vid statiskt bestämda upplagsförhållanden. Ekv (4) är tillämpbar också vid statiskt obestämda upplagsförhållanden, dock under förutsättning av att de vid upplagen verkande reaktionerna inte uträttar något arbete då den tryckta strävan övergår från trivialt till icke-trivialt utböjt jämviktsläge. Så är fallet vid ledartad uppläggning och fast inspänning men däremot inte vid exempelvis elastiskt inspända upplag. Från varje sådant tillkommer i täljaren av ekv (4) termer av typen $M_i^2\tau_i$ och $R_i^2\delta_i$ från elastisk inspänning mot rotation respektive translation, varvid M_i och R_i betecknar inspänningsmoment respektive transversell uppslagskraft i det utböjda, icke-triviala jämviktsläget samt τ_i och δ_i vinkeländring av $M_i = 1$ respektive transversell utböjning av $R_i = 1$ i upplagssnittet.

:24 Kinetisk metod

För strävan enligt fig :21, genom någon störning försatt i transversell svängning, söks det kritiska värde av den centriska tryckkraften, knäckningslasten, för vilket svängningsutböjningarna upphör att vara i tiden begränsade.

Under svängningsförloppet verkar per längdenhet av strävan en fördelad transversallast (fig :24)

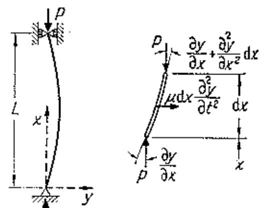


Fig :24

$$q_x = -Py'' - \mu\ddot{y} \tag{1}$$

där y'' och $\ddot{y}$ betecknar partiella derivator av y med avseende på längskoordinaten x respektive tiden t samt μ strävans massa per längdenhet. Insätts detta uttryck för q_x i elastiska linjens ekvation

$$y^{IV} = q_x/EI \tag{2}$$

erhålls för det svängande systemet grundekvationen

$$EIy^{IV} + Py'' + \mu\ddot{y} = 0 \tag{3}$$

Denna satisfieras av den mot svängning i en halvvåg svarande lösningsansatsen

$$y = \mathrm{F}(t)\sin(\pi x/L) \tag{4}$$

vilken också uppfyller systemets randvillkor $y = y'' = 0$ för $x = 0$ och $x = L$. Insätts ekv (4) i ekv (3), erhålls för den rena tidsfunktionen $\mathrm{F}(t)$ den ordinära differentialekvationen

$$\mu\mathrm{F}'' + \gamma\mathrm{F} = 0 \quad \gamma = (\pi^2/L^2)(\pi^2 EI/L^2 - P) \tag{5}$$

För $\gamma > 0$ representerar lösningen till ekv (5) en för varje tid t begränsad, harmonisk svängningsrörelse, medan för $\gamma < 0$ lösningen blir av icke-begränsad exponentialtyp. Transversalsvängningens utböjningar upphör alltså att vara i tiden begränsade för $\gamma = 0$, varav för knäckningslasten P_k enligt ekv (5) beräknas

$$P_k = \pi^2 EI/L^2 \tag{6}$$

:25 Gränser för de olika metodernas tillämpbarhet

Av de ovan redovisade huvudgrupperna av metoder för stabilitetsberäkningar är endast de kinetiska metoderna generellt tillämpbara på alla typer av mekaniska system, medan däremot de matematiskt mer lätthanterliga statiska metoderna äger starkt begränsad tillämpbarhet. För klargörande härav genomförs en klassificering av de mekaniska systemen enligt nedanstående tablå.

A Konservativa system

a Icke-gyroskopiskt system b Gyroskopiskt system

B Icke-konservativa system

a Dissipativt system b Cirkulatoriskt system c Instationärt system

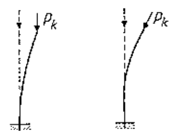


Fig :25a och b

Ett *konservativt system* karaktäriseras av att samtliga angripande krafter (aktiva och reaktiva) vid en godtyckligt vald förflyttning uträttar arbeten, som är entydigt bestämda av systemets begynnelse- och sluttillstånd. Om så inte är fallet, sägs ett *icke-konservativt system* föreligga. Ett exempel på ett konservativt stabilitetsproblem utgör det i fig :25a visade, knäckning av konsolsträva under inverkan av initiellt centrisk tryckkraft, som under utböjningsförloppet bibehåller sin vertikala kraftriktning. Om däremot den i fria konsoländen angripande tryckkraftens riktning påverkas av deformationerna, exempelvis enligt fig :25b, som illustrerar knäckning vid tangentiellt riktad kraft, blir tryckkraftens arbete ordinärt inte entydigt bestämt av systemets begynnelse- och sluttillstånd, och stabilitetsproblemet blir av icke-konservativ typ.

För *gyroskopiska krafter* gäller att de har kraftvektorer som är vinkelräta mot hastighetsvektorerna för respektive angreppspunkter. De gyroskopiska krafterna uträttar till följd härav alltid nollarbete vid aktuella rörelser och tillhör därför gruppen konservativa krafter. Beroende på om i ett konservativt system gyroskopiska krafter ingår eller inte, sägs systemet vara *gyroskopiskt* respektive *icke-gyroskopiskt*. Exempel på gyroskopiska stabilitetsproblem utgör bestämning av kritisk vinkelhastighet vid roterande axlar och skivor, medan exempelvis huvuddelen av hållfasthetslärans knäcknings- och vippningsfenomen tillhör gruppen icke-gyroskopiska stabilitetsproblem.

Av de icke-konservativa delsystemen karaktäriseras det *dissipativa* av att vid detta en energitransport äger rum från en kropp i rörelse till ett omgivande medium. Vad gäller stabilitetsfenomen, är så fallet vid knäckning under närvaro av dämpning, exempelvis vid knäckning av påle i plastiskt medium. Knäckning i elastiskt medium däremot faller vid kraft, som under knäckningsförloppet bibehåller sin riktning oförändrad, inom gruppen icke-gyroskopiskt, konservativt system.

Med ett *instationärt system* förstås ett sådant, vid vilket en eller flera av de aktiva, icke-konservativa krafterna är tidsberoende. Till denna systemgrupp hör exempelvis knäckning vid pulserande tryckbelastning. Om ett mekaniskt system i stället innehåller aktiva, icke-konservativa krafter, som är oberoende av tiden, betecknas systemet som *cirkulatoriskt*. Ett exempel på ett cirkulatoriskt stabilitetsproblem utgör det i fig :25b illustrerade, knäckning av konsolsträva vid tangentiell tryckkraft.

Av i litteraturen [7] genomförda undersökningar över tillämpbarheten av de ovan redovisade beräkningsmetoderna för elastiska systems stabilitet framgår att de kinetiska metoderna är generellt användbara för stabilitetsundersökningar vid alla kategorier av mekaniska system. *De statiska metoderna* däremot *kan oinskränkt tillämpas endast på icke-gyroskopiska stabilitetsproblem.* I begränsad omfattning är de statiska metoderna tillämpbara också på vissa typer av dissipativa och cirkulatoriska system [8].

:26 Beräkning av knäckningslast genom successiv approximation

En beräkning av balkars stabilitet enligt jämviktsmetod, excentricitetsmetod eller kinetisk metod innebär matematiskt en integration av elastiska linjens ekvation. Vid komplicerade balkutformningar och belastningar kan denna integration ofta bli svår och tidsödande att genomföra. En möjlighet till snabbare behandling erbjuder därvid det successiva approximationsförfarande, som i litteraturen benämns *Engesser-Vianellos metod* [2], [5], [9] eller *Stodolas metod* beroende på om det tillämpas på statiska knäckningsproblem eller svängningsproblem. Förfarandet illustreras nedan på fallet knäckning av centriskt tryckt sträva. Förutsätts därvid generellt variabel längskraft $P(x) = Pf_P(x)$ och variabelt tröghetsmoment $I_x = If_I(x)$, erhålls genom insättning i elastiska linjens ekvation $EI_x y'' + M_x = 0$ med beaktande av att böjmomentet M_x kan skrivas $M_x = Pf_M(x, y)$ för utböjningen y följande samband

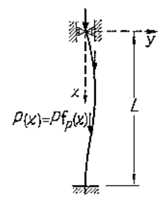


Fig :26a

$$y'' = k^2 F(x, y) \qquad k^2 = P/EI \tag{1}$$

Insätts i högra ledet av ekv (1) en på försök vald utböjning y_0, som uppfyller problemets randvillkor, kan genom direkt integration en förbättrad utböjningskurva y_1 beräknas. Med denna som utgångspunkt kan därefter, genom att förfarandet upprepas, en utböjningskurva y_2 beräknas osv. Man kan visa att kvoten mellan två på varandra följande, beräknade utböjningar y_{n-1} och y_n konvergerar mot ett värde s

$$s = \lim_{n\to\infty} (y_{n-1}/y_n) \tag{2}$$

vilket betecknar säkerheten ($s = P_k/P$) mot elastisk knäckning av systemet. Avbryts den upprepade integrationen efter ett ändligt antal etapper, vilket i praktiken alltid blir fallet, ger kvoten y_{n-1}/y_n ett med x varierande s-värde. Denna olägenhet undviks, om kvoten mellan utböjningarna ersätts med kvoten mellan utböjningarnas medelvärden enligt ekvationen

$$s = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^L y_{n-1}\,\mathrm{d}x \Big/ \int_0^L y_n\,\mathrm{d}x \right) \tag{3}$$

Om den upprepade integrationen genomförs numeriskt genom uppdelning av konstruktionen i ett ändligt antal element med inbördes lika längd Δx, modifieras ekv (3) till

$$s = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_0^L y_{n-1}\,\Delta x / \sum_0^L y_n\,\Delta x \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_0^L y_{n-1} / \sum_0^L y_n \right) \tag{4}$$

Att observera är därvid, att, medan utböjningskvoten enligt ekv (2) och (3) med ökat antal upprepade integrationer — ökat n — konvergerar mot det matematiskt korrekta s-värdet, konvergerar utböjningskvoten enligt ekv (4) mot ett s-värde, som något avviker från det matematiskt korrekta. Avvikelsen är karaktäristisk för vald elementindelning och blir mindre ju tätare elementindelningen görs.

Exempel. Beräkna med Engesser-Vianellos metod knäckningslasten P_k för den enligt fig :26b centriskt tryckta strävan, vilken har efter sin längd konstant tröghetsmoment I.

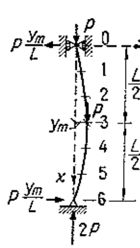


Fig :26b

Med beteckningar enligt fig :26b erhålls för den utböjda strävans böjmoment M_x uttrycken

$$\left.\begin{aligned} M_x &= P(y + y_m(x/L)) && \text{för } 0 \leqslant x \leqslant L/2 \\ M_x &= P[2y - y_m(1 - x/L)] && \text{för } L/2 \leqslant x \leqslant L \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

vilka insatta i elastiska linjens ekvation ger

$$\left.\begin{aligned} y'' &= -k^2(y + y_m(x/L)) && \text{för } 0 \leqslant x \leqslant L/2 \\ y'' &= -k^2[2y - y_m(1 - x/L)] && \text{för } L/2 \leqslant x \leqslant L \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

$$k^2 = P/EI \qquad \text{(c)}$$

För utböjningen y väljs som första approximation ansatsen

$$y_0 = 4y_m(x/L)(1 - x/L) \qquad \text{(d)}$$

vilken satisfierar villkoren: $y_0 = 0$ för $x = 0$ och $x = L$ samt $y_0 = y_m$ för $x = L/2$. Insätts denna i högra leden av ekv (b), erhålls för beräkning av en förbättrad utböjningskurva y_1 sambanden

$$\left.\begin{aligned} y_1'' &= -k^2 y_m(x/L)(5 - 4x/L) && \text{för } 0 \leqslant x \leqslant L/2 \\ y_1'' &= -k^2 y_m(-1 + 9x/L - 8x^2/L^2) && \text{för } L/2 \leqslant x \leqslant L \end{aligned}\right\} \qquad \text{(e)}$$

vilka efter integration, med beaktande av randvillkoren: 1 $y_1 = 0$ för $x = 0$. 2 $y_1 = 0$ för $x = L$, 3 y_1 lika på ömse sidor om $x = L/2$, 4 y_1' lika på ömse sidor om $x = L/2$, ger

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= (1/48)k^2L^2y_m(x/L)(23 - 40x^2/L^2 + 16x^3/L^3) \\ &\qquad \text{för } 0 \leqslant x \leqslant L/2 \\ y_1 &= (1/48)k^2L^2y_m(1 + 15x/L + 24x^2/L^2 - 72x^3/L^3 + 32x^4/L^4) \\ &\qquad \text{för } L/2 \leqslant x \leqslant L \end{aligned}\right\} \qquad \text{(f)}$$

Ur ekv (d) och (f) beräknas

$$\int_0^L y_{n-1}\,dx = \int_0^L y_0\,dx = \frac{2}{3}y_m L;$$

$$\int_0^L y_n\,dx = \int_0^L y_1\,dx = (1/10)\,y_m k^2L^3 = (1/10)\,y_m PL^3/EI$$

varpå ekv (3) för knäckningssäkerheten s ger $s = P_k/P = 20EI/3PL^2$

Härigenom bestämd knäckningslast $\qquad P_k = 6{,}667EI/L^2 \qquad$ (g)

är en första approximation, som kan förbättras genom förnyad integration av ekv (b), sedan i dessas högra led insatts funnet y_1 enligt ekv (f), osv. Förfarandet konvergerar mot det matematiskt exakta knäckningsvärdet

$$P_k = 6{,}536EI/L^2 \qquad \text{(h)}$$

I kompletterande syfte löses nedan problemet genom numerisk integration av elastiska linjens ekvation

$$y'' = -M_x/EI_x \qquad \text{(i)}$$

vilket ger

$$y' = -\sum_0^x (M_x/EI_x)\,\Delta x + C_1 \qquad \text{(k)}$$

$$y = \sum_0^x y'\Delta x + C_2 \qquad \text{(l)}$$

där C_1 och C_2 är integrationskonstanter, som får bestämmas ur randvillkoren: $y = 0$ för $x = 0$ och $x = L$. För M_x gäller därvid ekv (a).

Med begynnelsevärden för y enligt ansatsen (d) erhålls följande beräkningstabell, svarande mot en uppdelning av strävan i 6 lika delar $\Delta x = L/6$ (fig :26b).

Snitt	y_0	M_x/EI_x	y_1'	y_1	y_0/y_1
0	0	0		$\bar{C}_2 = 0$[1]	
			$\bar{C}_1$		
1	0,5556	0,7223		$\bar{C}_1 = 2,8056$[2]	0,1980
			$-0,7223 + \bar{C}_1$		
2	0,8889	1,2222		$-0,7223 + 2\bar{C}_1 = 4,8889$	0,1818
			$-1,9445 + \bar{C}_1$		
3	1	1,5000		$-2,6668 + 3\bar{C}_1 = 5,7500$	0,1739
			$-3,4445 + \bar{C}_1$		
4	0,8889	1,4445		$-5,1113 + 4\bar{C}_1 = 5,1111$	0,1739
			$-4,8890 + \bar{C}_1$		
5	0,5556	0,9445		$-11,0003 + 5\bar{C}_1 = 3,0277$	0,1835
			$-5,8335 + \bar{C}_1$		
6	0	0		$-16,8338 + 6\bar{C}_1 = 0$	
Σ	3,8890			21,5833	
Multiplikator	y_m	$\dfrac{Py_m}{EI}$	$\dfrac{Py_m L}{6EI}$	$\dfrac{Py_m L^2}{36EI}$	$\dfrac{36EI}{PL^2}$

[1] Följer av villkoret att $y_1 = 0$ för $x = 0$ (snitt 0)
[2] Följer av villkoret att $y_1 = 0$ för $x = L$ (snitt 6)

Tabellen ger

$$\sum_0^L y_{n-1} = \sum_0^L y_0 = 3,8890\, y_m$$

$$\sum_0^L y_n = \sum_0^L y_1 = 0,5995\, Py_m L^2/EI$$

varpå ur ekv (4) för knäckningslasten erhålls

$$P_k = 6,487\, EI/L^2 \tag{m}$$

Ny beräkning med y_1 som begynnelseutböjning ger

$$P_k = 6,400\, EI/L^2 \tag{n}$$

Slutvärdet efter upprepade numeriska integrationer blir

$$P_k = 6,387\, EI/L^2 \tag{o}$$

vilket avviker från det matematiskt korrekta värdet enligt ekv (h) med 2,3 %. Ökad precision kan erhållas genom tätare elementindelning. Exempelvis ger en upprepad numerisk integration med strävan uppdelad i 8 lika element ett slutvärde

$$P_k = 6,451\, EI/L^2 \tag{p}$$

dvs 1,3 % avvikelse från det matematiskt korrekta värdet.

:3 Knäckning vid centriskt tryckt sträva

:31 Eulers knäckningsfall

De fyra Euler-knäckningsfallen framgår, vad gäller belastning och upplagsförhållanden, av fig :31a. För knäckningsfallen gäller följande förutsättningar:

a initiellt rak konstruktion med efter sin längd konstant sektion, uppbyggd av homogent material med obegränsad elasticitet

b initiellt centrisk tryckkraft, som vid knäckningsutböjningen bibehåller sin riktning oförändrad

Härtill kommer för knäckningsfallen 2–4 en förutsättning om inbördes oförskjutbara upplag i riktning ⊥ konstruktionens längsutsträckning. Eulerknäckningsfallen är av konservativ icke-gyroskopisk typ och kan därför enligt :25 korrekt behandlas med statiska beräkningsmetoder, vilket ovan illustrerats i avsnitten :21–:23 för 2. knäckningsfallet. En analog behandling för de övriga knäckningsfallen resulterar i värden för knäckningslasten P_k enligt följande sammanställning.

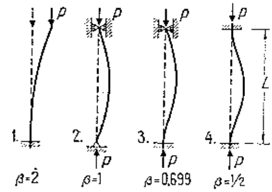


Fig :31a. Eulers fyra knäckningsfall

1. knäcknfallet $P_k = \pi^2 EI/4L^2$ $\quad \beta = 2$ (1)

2. » $P_k = \pi^2 EI/L^2$ $\quad \beta = 1$ (2)

3. » $P_k = 2{,}046\pi^2 EI/L^2 \approx 2\pi^2 EI/L^2$ $\quad \beta = 0{,}699 \approx 0{,}7$ (3)

4. » $P_k = 4\pi^2 EI/L^2$ $\quad \beta = 1/2$ (4)

Av ekv (1)–(4) framgår att det är möjligt att hänföra knäckningslasten för ett knäckningsfall till ett annat genom införande av en *fiktiv knäcklängd*

$$L_f = \beta L \tag{5}$$

vilket är av betydelse vid en modifiering av under förutsättning av ideella förhållanden beräknad knäckningslast med hänsyn till i praktiken oundvikliga avvikelser i form av initialkrokighet, initialexcentricitet och begränsad elastisk deformationsförmåga. Väljs därvid 2. knäckningsfallets kritiska last som referenslast, vilket är det ordinära i litteraturen inom området, erhålls som sammanfattande uttryck för samtliga Euler-knäckningslaster

$$P_k = \pi^2 EI/L_f^2 = \pi^2 EI/(\beta L)^2 \tag{6}$$

med β-värden enligt ekv (1)–(4).

Alternativt kan i stället knäckningsspänningen σ_k anges under formeln

$$\sigma_k = P_k/A = \pi^2 E/\lambda^2 \tag{7}$$

där A är strävans tvärsnittsyta och λ strävans slankhetstal, se ekv :34 (1).

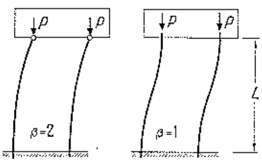


Fig :31b

Om upplagen vid de mot knäckningsfallen 2–4 svarande strävorna inbördes kan fritt förskjutas ⊥ strävornas längsriktning, erhålls för fallet tvåsidigt ledad uppläggning en geometriskt föränderlig konstruktion med $P_k = 0$. För de båda övriga uppläggningsfallen (fig :31b) erhålls med redovisning enligt ekv (6)

$\beta = 2$ vid ena upplaget ledat, andra upplaget fast inspänt

$\beta = 1$ vid båda upplagen fast inspända.

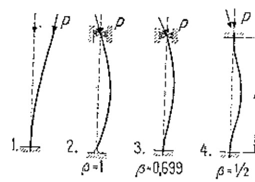


Fig :32a. Knäckning vid ändrad kraftriktning under deformationen

:32 Inverkan av under knäckningsförloppet ändrad kraftriktning

Om den initiellt centriska tryckkraften genom knäckningsutböjningarna påtvingas en *liten* riktningsförändring (fig :32a) medför detta för de mot Euler-knäckningsfallen 2–4 svarande upplagsförhållandena ingen ändring i det elastiska systemets verkningssätt. De för Euler-knäckningsfallen 2–4 angivna β-värdena gäller därför oförändrade också för de modifierade knäckningsfallen 2–4 enligt fig :32a.

Principiellt annorlunda blir förhållandena för den initiellt centriskt tryckta konsolstråvan. Inträder vid dennas knäckningsutböjning en *liten* riktningsförändring av tryckkraften (t ex enligt fig :32b) på ett sådant sätt, att i konsolspetsen tryckkraftens och konsoltangentens lutningsvinklar mot vertikalen Θ_P respektive Θ_L är direkt proportionella $\Theta_P = \alpha\Theta_L$ blir tryckkraftens yttre arbete under knäckningsutböjningen inte entydigt bestämt av dennas begynnelse- och sluttillstånd utan avhängigt också av hela det detaljerade deformationsförloppet. Det i fig :32b illustrerade knäckningsfallet blir därför av icke-konservativ typ och måste som en följd härav ana-

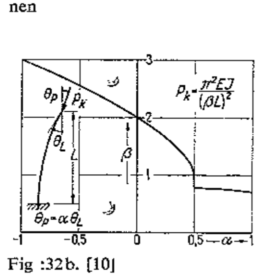


Fig :32b. [10]

lyseras enligt kinetisk beräkningsmetod. Knäckningslasten P_k erhålls enligt [10] som

$$P_k = \pi^2 EI/(\beta L)^2 \tag{1}$$

med β-värden enligt diagrammet i fig :32b.

Av diagrammet framgår att i förhållande till Euler-knäckningslasten ($\alpha = 0$) medför en riktningsförändring av tryckkraften vid positivt α (Θ_P och Θ_L har samma rotationsriktning) en förhöjning av den kritiska lasten, medan effekten blir den omvända vid negativt α (Θ_P och Θ_L har skild rotationsriktning). För $\alpha < \frac{1}{2}$ karaktäriseras knäckningsförloppet av en åt *ett* håll gående utböjning, som med tiden t växer över alla gränser. För $\alpha > \frac{1}{2}$ erhålls i stället ett knäckningsförlopp, som består i en oscillerande rörelse med ständigt ökad amplitud.

För området $\alpha < \frac{1}{2}$, inom vilket såväl statisk icke-trivial jämvikt som svängningsjämvikt kan visas möjlig, ger de statiska och kinetiska beräkningsmetoderna sammanfallande värden för knäckningslasten P_k. För området $\alpha > \frac{1}{2}$, inom vilket däremot endast svängningsjämvikt är möjlig, är problemet lösbart endast med kinetiska metoder.

:33 Oelastisk knäckning

Då de i avsnitt :31 redovisade Euler-knäckningslasterna förutsätter strävor av material med obegränsad elastisk deformationsförmåga, kan de oförändrade praktiskt tillämpas endast om den beräknade knäckningsspänningen $\sigma_k = P_k/A$ är mindre än aktuellt konstruktionsmaterials proportionalitetsgräns σ_p. För $\sigma_k > \sigma_p$ inträffar knäckning inom oelastiskt område, vilket medför ett kritiskt lastvärde, som ligger lägre än den tillhörande Euler-knäckningslasten.

Belysande för den problemställning, som i samband därmed uppkommer, är en återblick på den historiska utvecklingen inom området (jfr härför ex [2], [11]).

År 1889 framlade Engesser den s k *tangentmodul-teorin*, vilken i princip innebär att det generella uttrycket för Euler-knäckningslasten enligt ekv :31 (6) vid oelastiska förhållanden ersätts av det modifierade sambandet

$$P_{kt} = \pi^2 E_t I/(\beta L)^2 \tag{1}$$

där E_t är tangentmodulen, bestämd av lutningsvinkeln för tangenten till $\sigma - \varepsilon$-kurvan i punkten $\sigma_{kt} = P_{kt}/A$ (fig :33a).

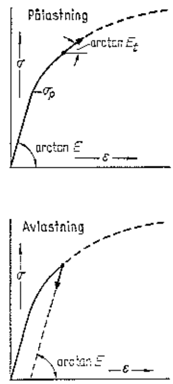


Fig :33a. $\sigma - \varepsilon$-sambandet vid pålastning och avlastning inom oelastiskt område

Tangentmodul-teorin innebär i sig själv en direkt motsägelse, vilket första gången påpekats av Jasinsky 1895. En nödvändig förutsättning för att vid övergång från ett rakt jämviktsläge till ett utböjt tangentmodulen E_t ensam skall vara avgörande för spänningsförändringen över strävans hela tvärsnitt, är nämligen att i varje punkt av tvärsnittet en spänningsökning inträder. Detta fordrar i sin tur en ökning av den yttre tryckbelastningen P utöver det knäckningsvärde P_{kt}, som ges av tangentmodul-teorin, vilket strider mot knäckningsdefinitionen att P_{kt} skall vara den minsta tryckkraft, som vid initiellt centriskt lastangrepp förmår ge strävan ett utböjt jämviktsläge.

Ett nödvändigt villkor för att en centriskt belastad sträva vid konstant tryckkraft skall kunna övergå från ett rakt till ett utböjt jämviktsläge är att den spänningsökning, som vid utböjningen uppkommer på strävans konkava sida, kompenseras av en spänningsminskning på den konvexa sidan. Bestämmande för sambandet mellan σ och ε är vid en spänningsökning tangentmodulen E_t, vid en spänningsminskning approximativt elasticitetsmodulen E, vilket för strävan i utböjt jämviktsläge medför en spänningsfördelning över tvärsnittet enligt fig :33b. Denna synpunkt framlades första gången 1891 av Considère, som samtidigt också påvisade att knäck-

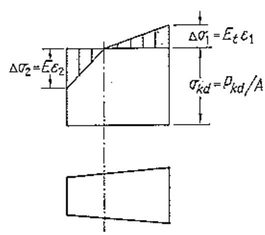


Fig :33b. Spänningsfördelning vid oelastisk knäckning enligt dubbelmodul-teorin ningsbelastningen vid oelastiska förhållanden P_{kd} generellt kan bestämmas ur samband av typen

$$P_{kd} = \pi^2 E_d I/(\beta L)^2 \qquad (2)$$

varvid E_d är en fiktiv modul, som ligger mellan tangentmodulen och elasticitetsmodulen. Considères teori, som med direkt översättning från den engelskspråkiga tekniska litteraturen kan betecknas som en *dubbelmodulteori*, har sedermera vidareutvecklats av Engesser 1895 och v Karman 1910, varvid bl a uppställts generella uttryck för dubbelmodulen E_d. Speciellt för sträva av rektangulär sektion gäller

$$E_d = 4EE_t/(\sqrt{E}+\sqrt{E_t})^2 \qquad (3)$$

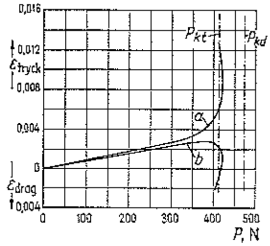


Fig :33c. [13] $g = 10$ m/s²

Dubbelmodul-teorin har sedan oreserverat ansetts som korrekt fram till 1946, då Shanley med stöd av experimentella resultat framlade en ingående kritisk analys av den oelastiska knäckningen [12]. Han konstaterade därvid att om inga utböjningsförhindrande åtgärder vidtas, uppkommer vid en centriskt tryckt, initiellt rak sträva alltid en utböjning då tangentmodulteorins knäckningslast P_{kt} överskrids. Vid denna utböjning, som är förenad med en *samtidig* lastökning, inträder till en början spänningsökningar i varje punkt av strävans sektion, varvid tangentmodulen E_t ensam bestämmer $\sigma-\varepsilon$-beroendet. Med ökad utböjning börjar efter ett tag en spänningsminskning att utbreda sig från strävans konvexa sida, varigenom tvärsnittets spänningstillstånd blir beroende också av elasticitetsmodulen E. Fenomenet illustreras av fig :33c, som redovisar experimentellt bestämda kanttöjningar för den konkava sidan (kurva *a*) och den konvexa sidan (kurva *b*) av en rektangulär aluminiumsträva, utsatt för oelastisk knäckning.

Shanley konstaterade vidare att *dubbelmodulteorins knäckningslast* P_{kd} *utgör ett övre gränsvärde*, som i praktiken aldrig kan uppnås, och som därför inte bör läggas till grund för beräkning av en strävas oelastiska knäckningslast. En korrekt bestämning härav förutsätter en behandling enligt Shanleys stränga teori. Då emellertid en sådan behandling är svår att genomföra även för mycket renodlade fall, kan ordinärt *rekommenderas att knäckningslasten vid oelastiska förhållanden, som en approximation något på säkra sidan, beräknas ur den jämförelsevis enkla tangentmodul-teorin.*

:34 Dimensioneringsprinciper

Jfr kap 353 och 357

Förutsättningarna för Euler-knäckningsfallens giltighet — initiellt rak, centriskt belastad konstruktion av material med obegränsad elastisk deformationsförmåga — är inte möjliga att praktiskt helt realisera. Avvikelser inkommer i praktiken dels genom att aktuella konstruktionsmaterial uppför sig elastiskt endast under proportionalitetsgränsen σ_p, en inverkan, som diskuterats i :33, dels genom att initialkrokigheter och initialexcentriciteter är oundvikliga, även vid mycket renodlade försöksbetingelser. Det problem, som på grundval härav måste studeras, för att en så korrekt bild som möjligt skall erhållas av verkligheten, är den excentriskt tryckta, initialkrokiga strävan med ett $\sigma-\varepsilon$-diagram, som överensstämmer med aktuellt konstruktionsmaterials. Något förenklas behandlingen därvid genom att deleffekterna av excentricitet och initialkrokighet är principiellt lika, varför man, utan någon begränsning av problemställningen, i stället kan studera något av de mera renodlade fallen excentriskt tryckt, initiellt rak sträva eller centriskt tryckt, initialdeformerad sträva. Även för dessa mera renodlade belastningsfall blir emellertid en sträng behandling ([2], [14]–[16] m fl) starkt komplicerad, varför man för praktisk dimensionering tvingas till ytterligare förenklingar.

Ett förenklat sätt att angripa problemet är därvid följande. För det ideella fallet centriskt tryckt, initiellt rak sträva beräknas enligt *tangentmodulteorin* (se :33) knäckningslasten P_k med hänsyn tagen till materialets verkliga $\sigma-\varepsilon$-diagram, varpå tillåten tryckbelastning erhålls genom division av P_k med en säkerhetsfaktor s. För anpassning till verkliga förhållanden måste därvid i säkerhetsfaktorn s inkluderas effekterna av möjlig initialkrokighet och initialexcentricitet. Då storleken av dessa effekter är beroende av en konstruktions slankhet, karaktäriserad t ex genom det s k *slankhetstalet*

$$\lambda = L_f/i \quad (1) \qquad \text{där } i = \sqrt{I/A} \quad (2)$$

är sektionens tröghetsradie, följer att säkerhetsfaktorn s också blir beroende härav.

Olägenheten med en med slankhetstalet varierande säkerhetsfaktor försvinner vid en mera realistisk behandling baserad på representativa värden för strävan av initialkrokighet och oavsiktlig lastexcentricitet. I tillämpning på strävor av *ideal-elastoplastiskt material* (fig :34a), t ex allmänna konstruktionsstål, kan en sådan behandling genomföras förhållandevis enkelt. Under förutsättning av antingen *belastningsexcentricitet* eller *initialkrokighet* med storlek, som täcker praktiskt möjlig summaeffekt av bådadera, beräknas därvid det samband, som vid elastiska förhållanden råder mellan strävans maximispänning σ_{max} och yttre tryckbelastning P. Som kritisk definieras därefter den tryckkraft P_k, för vilken σ_{max} blir lika med materialets sträckgräns σ_s, varpå tillåten belastning erhålls ur P_k genom division med en av λ oberoende säkerhetsfaktor, bestämd ur sambandet

$$s = \sigma_s/\sigma_{till} \quad (3)$$

i vilket σ_{till} = vid ren böjning tillåten spänning.

Den på detta sätt beräknade kritiska lasten P_k är generellt mindre än konstruktionens bärförmåga, varför det beskrivna beräkningsförfarandet innebär en viss överdimensionering. Av i litteraturen genomförda, jämförande beräkningar för ideal-elastoplastiskt material framgår emellertid att denna överdimensionering vid ordinära konstruktioner inte är av utslagsgivande praktisk betydelse. Allmänt gäller att skillnaden mellan den på detta sätt beräknade kritiska lasten P_k och bärförmågan växer med avtagande slankhetstal λ samt blir större, ju mera sektionens material koncentreras kring böjningsaxeln genom tyngdpunkten.

För storleken av den initialexcentricitet e eller initialkrokighet f, som bör läggas till grund för en praktisk knäckningsdimensionering har i litteraturen framförts och diskuterats ett stort antal olika alternativ (jfr ex [17], [18]), varav några sammanställts i vidstående tablå.

Av de redovisade alternativen är det av Timoshenko föreslagna något mindre realistiskt än de övriga. Det ger för viss längd L_f en initialkrokighet, som är oberoende av konstruktionens slankhet, vilket strider mot vad man erfarenhetsmässigt vet, nämligen att ju slankare en konstruktion är, desto större är risken för att vid tillverkning, transport och montage defekter skall uppkomma. För en vidare analys av vilken av de övriga ekvationerna, som bäst beskriver verkligheten, föreligger tyvärr inte tillräckligt statistiskt material, varför ett definitivt val mellan de föreslagna alternativen för närvarande får göras på grundval av andra förhållanden. Av betydelse är därvid, vad gäller en praktisk redovisning av resultaten i tabell- eller diagramform, att de mot Dutheils ekvation svarande knäckningskurvorna blir beroende endast av materialegenskaper och slankhetstal, under det att de knäckningskurvor, som beräknas med användning av Jasinskys, Chwallas och Aas-Jakobsens ekvationer blir beroende också av tvärsnittets utseende.

Som illustration till beräkningstekniken baserad på initialkrokig sträva redovisas nedan en bestämning av knäckningskurvor för strävor av ideal-elastoplastiskt material under förutsättning av en initialkrokighet enligt

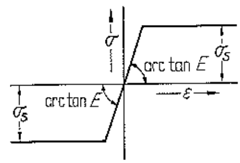


Fig :34a. Ideal-elastoplastiskt σ–ε-diagram

Jasinsky 1894
$f = i^2/10d + L_f/750$

Timoshenko 1936
$f = L_f/400$

Chwalla 1943
$e = i/20 + L_f/500$

Aas-Jakobsen 1946
$f = L_f^2\sigma_s/43{,}4iE$

Dutheil 1947
$f = 4{,}8 \cdot 10^{-5} L_f^2/d$

med d = avståndet från neutralaxeln till sektionens tryckta kant. (Aas-Jakobsen förutsätter vid sin behandling samtidigt såväl initialkrokighet som initialexcentricitet, vardera med en storlek = hälften av f enligt ovan.)

Dutheil. Behandlingen genomförs för det grundläggande fallet tvåsidigt fritt upplagd sträva (fig :34b).

Förutsätts strävans initialkrokighet y_0 vara sinusformad enligt sambandet

$$y_0 = f \sin(\pi x/L) \tag{4}$$

erhålls genom en beräkning ur elastiska linjens ekvation för totalutböjningen y (summan av initialutböjning y_0 och tillskottsutböjning y_1) uttrycket

$$y = y_0/(1 - P/P_{ke}) \tag{5}$$

där P_{ke} är den mot centriskt tryckt, initiellt rak, elastisk sträva svarande Euler-knäckningslasten enligt ekv :31 (2). För strävans maximimoment M_{max}, vilket uppträder i fackmitt, ger ekv (4) och (5)

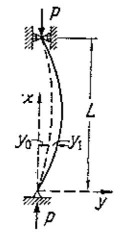


Fig :34b

$$M_{max} = Py_{max} = Pf/(1 - P/P_{ke}) \tag{6}$$

varpå ur Naviers spänningsformel för den maximala kantspänningen σ_{max} beräknas

$$\sigma_{max} = P/A + Pf/W(1 - P/P_{ke}) \tag{7}$$

där W = sektionens böjmotstånd.

Ur ekv (7) kan nu strävans kritiska tryckkraft P_k beräknas genom att σ_{max} sätts lika med sträckgränsen σ_s. Insätts därvid för f uttrycket enligt Dutheil, erhålls efter omformning för den kritiska tryckspänningen $\sigma_k = P_k/A$ följande samband

$$\sigma_k^2 - \sigma_k[\sigma_s + \pi^2 E(4{,}8 \cdot 10^{-5} + 1/\lambda^2)] = -\sigma_s(\pi^2 E/\lambda^2) \tag{8}$$

som för givet material (E och σ_s kända) ger σ_k som funktion av endast slankhetstalet λ.

I tabell :34 och i diagrammet i fig :34c har sammanställts några på initialkrokighet enligt Dutheil baserade och ur ekv (8) beräknade, för stål gällande σ_k-värden ($E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MN/m²). Sedan härur σ_k bestämts, erhålls tillåten tryckspänning $\sigma_{k\,till}$ genom division med säkerhetsfaktorn s, bestämd ur ekv (3). Tabellen och diagrammet, som härletts under förutsättning av mot 2. knäckningsfallet svarande upplagsförhållanden kan utsträckas till generell giltighet, om i uttrycket för slankhetstalet λ längden L ersätts med den fiktiva knäcklängden L_f (jfr :31).

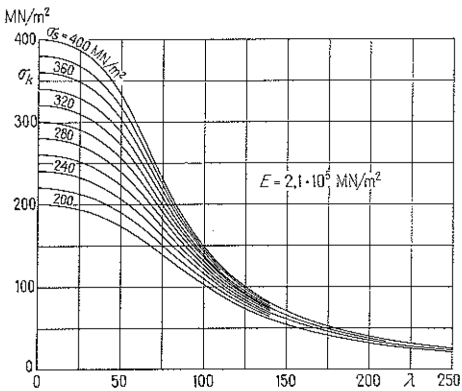


Fig :34c. Knäckningskurvor för stål, beräknade under förutsättning av initialkrokighet enligt Dutheil

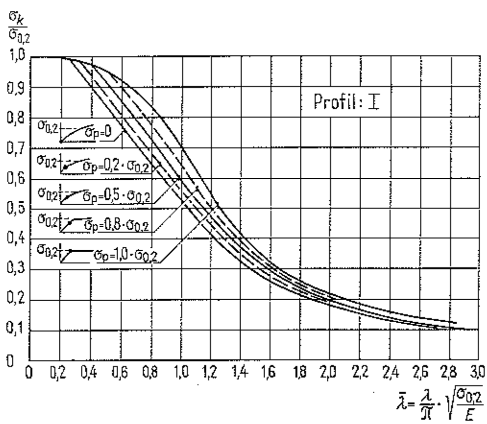


Fig :34d. Knäckningskurvor vid varierande förhållande $\sigma_p/\sigma_{0,2}$ för sträva med ideellt I-tvärsnitt och av material med krökt $\sigma - \varepsilon$-kurva av för aluminiumlegeringar representativ typ. Knäckning i styva riktningen. Initialexcentricitet enligt Dutheil [20]

Tabell :34. Knäckningsspänning σ_k (MN/m²) för stål, beräknad under förutsättning av initialkrokighet enligt Dutheil (g har antagits vara 10 m/s²)

λ	σ_s (MN/m²) 200,0	220,0	240,0	260,0	280,0	300,0	320,0	340,0	360,0	380,0	400,0
0	200,0	220,0	240,0	260,0	280,0	300,0	320,0	340,0	360,0	380,0	400,0
10	199,0	219,0	239,0	258,5	278,5	298,5	318,5	338,5	358,0	378,0	398,0
20	196,0	215,5	235,0	255,0	274,5	294,0	313,5	333,0	352,5	372,0	392,0
30	191,0	210,0	229,0	248,0	267,0	286,0	305,0	323,5	342,5	361,5	380,5
40	183,5	201,5	219,5	237,5	255,5	273,5	291,0	309,0	326,5	344,0	361,5
50	173,5	190,5	207,0	223,5	239,5	255,5	271,5	287,0	302,5	318,0	333,0
60	161,0	176,0	190,5	205,0	219,0	232,5	246,0	259,0	271,5	283,5	295,0
70	147,0	159,5	172,0	183,5	195,0	205,5	216,0	226,0	235,0	244,0	252,5
80	131,5	142,0	152,0	161,0	170,0	178,0	186,0	193,0	199,5	206,0	212,0
90	116,5	125,0	132,5	140,0	146,5	152,5	158,5	163,5	168,5	173,0	177,0
100	102,5	109,0	115,0	121,0	126,0	130,5	135,0	138,5	142,0	145,5	148,5
110	89,9	95,2	100,0	104,5	108,5	112,0	115,0	118,0	121,0	123,5	125,5
120	78,9	83,3	87,1	90,6	93,8	96,6	99,2	101,5	103.5	105,5	107,5
130	69,5	73,1	76,2	79,1	81,6	83,9	86,0	87,9	89,6	91,2	92,6
140	61,5	64,4	67,1	69,4	71,5	73,4	75,1	76,7	78,1	79,4	80,6
150	54,6	57,1	59,3	61,3	63,1	64,7	66,1	67,4	68,6	69,7	70,7
160	48,8	50,9	52,8	54,5	56,0	57,4	58,6	59,7	60,7	61,6	62,5
170	43,8	45,6	47,2	48,7	50,0	51,2	52,2	53,2	54,1	54,9	55,6
180	39,4	41,1	42,5	43,8	44,9	45,9	46,8	47,7	48,4	49,1	49,8
190	35,7	37,1	38,4	39,5	40,5	41,4	42,2	43,0	43,6	44,2	44,8
200	32,5	33,7	34,8	35,8	36,7	37,5	38,2	38,9	39,5	40,0	40,5
210	29,6	30,8	31,8	32,6	33,4	34,1	34,8	35,4	35,9	36,4	36,8
220	27,1	28,1	29,0	29,8	30,6	31,2	31,8	32,3	32,8	33,2	33,6
230	24,9	25,9	26,7	27,4	28,0	28,6	29,1	29,6	30,1	30,4	30,8
240	23,0	23,8	24,6	25,2	25,8	26,3	26,8	27,2	27,6	28,0	28,3
250	21,3	22,0	22,7	23,3	23,8	24,3	24,8	25,1	25.5	25,8	26,1

Det är i sammanhanget angeläget att understryka att den ovan beskrivna beräkningsmetoden är begränsat tillämpbar endast för bärverk av ideal-elastoplastiskt material. Vid bärverksmaterial med *elastoplastiskt* $\sigma-\varepsilon$-diagram, som på inte försumbart sätt avviker från för ideal-elastoplastiskt material karaktäristisk arbetskurva — t ex aluminiumlegeringar, betong och trä — måste beräkningsförfarandet modifieras med hänsyn till effekten av krökt $\sigma-\varepsilon$-kurva, se t ex [19] och [20]. Effekten belyses av fig :34d [20], i vilken redovisas för fem olika förhållanden mellan proportionalitetsgräns σ_p och 0,2-gräns $\sigma_{0,2}$ beräknade kurvsamband mellan knäckningsspänning σ_k och relativt slankhetstal $\bar{\lambda}$ för sträva av material med $\sigma-\varepsilon$-kurva av för aluminiumlegeringar representativ typ. Kurvorna gäller för knäckning i styva riktningen av sträva med ideellt I-tvärsnitt under förutsättning av en initialexcentricitet med storlek enligt Dutheil.

I vissa fall måste vid en dimensionering av tryckt sträva utöver imperfektioner i form av initialkrokighet och oavsiktlig lastexcentricitet också hållfasthetsnedsättande effekt från *egenspänningar* beaktas. Exempelvis anges i gällande svensk stålbyggnadsnorm [21], att hänsyn skall tas till sådan effekt av initiella tryckspänningar (σ_i) för svetsade stålsträvor med I- eller T-tvärsnitt enligt fig :34e vid knäckningsutböjning i x-riktningen, om $\sigma_i > 0{,}4\ \sigma_s$ och spänningsfördelningen har typutseende enligt figuren. Någon motsvarande reduktion behöver inte göras om för knäckningsutböjning i x-riktningen $\sigma_i < 0{,}4\sigma_s$ eller om knäckningsutböjningen försiggår i y-riktningen.

Omfattande redovisningar av för stålprofiler uppmätta initialspänningsfördelningar ges i [22], [23] och teoretiska analyser av initialspänningarnas inverkan på en strävas knäckningslast i t ex [24]–[26]. Exemplifierande belyses denna inverkan av fig :34f [25], i vilken för initiellt rak respektive initiellt sinusformat deformerad stålsträva med I-tvärsnitt redovisas teo-

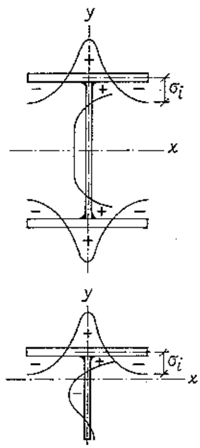


Fig :34e. Representativ fördelning av initiella spänningar σ_i (egenspänningar) för svetsad stålsträva med I- eller T-tvärsnitt [21]

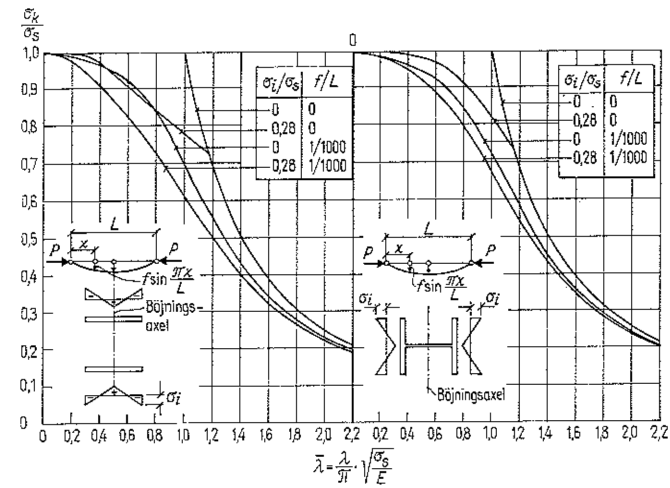


Fig :34f. Kurvsamband mellan knäckningsspänning σ_k och relativt slankhetstal $\bar{\lambda}$ för initiellt rak respektive initiellt sinusformat deformerad stålsträva med I-tvärsnitt vid dels egenspänningsfritt bärverk och dels bärverk med en största initialtryckspänning $\sigma_i = 0{,}28\ \sigma_s$ [25]

retiskt bestämd knäckningsspänning σ_k vid dels egenspänningsfritt bärverk och dels bärverk med en initialtryckspänningsfördelning över tvärsnittet enligt figuren med maximivärdet $\sigma_i = 0{,}28\sigma_s$. De redovisade kurvorna, som jämförande illustrerar initialspänningsinverkan vid knäckningsutböjning i veka respektive styva riktningen, har beräknats för det amerikanska konstruktionsstålet A36, vilket approximativt motsvarar det svenska konstruktionsstålet 1411.

Exempel. Beräkna tillåten tryckkraft P_{till} för den tvåsidigt fast inspända strävan (4. knäckningsfallet) enligt fig :34g, om strävan har rörsektion med ytterdiameter $D_y = 100$ mm och godstjocklek $t = 4$ mm. Material: Stål 1311 med $\sigma_s = 220$ MN/m², $\sigma_{\text{till}} = 147$ MN/m² ($g = 10$ m/s²).

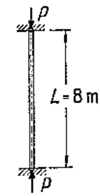


Fig :34g

$I = 139{,}2 \cdot 10^{-8}$ m^4, $A = 12{,}06 \cdot 10^{-4}$ m^2, $i = \sqrt{I/A} = 3{,}40 \cdot 10^{-2}$ m

$L_f = \beta L = \frac{1}{2} L = 4$ m, $\lambda = L_f / i = 117{,}8$

Beräkning under förutsättning av initialkrokighet enligt Dutheil:

$s = \sigma_s / \sigma_{\text{till}} = 1{,}5$, $\sigma_k = 86$ MN/m², $\sigma_{k\text{till}} = \sigma_k / s = 57{,}3$ MN/m²

$P_{\text{till}} = \sigma_{k\text{till}} A = 69{,}2$ kN

Beräkning enligt »Stålbyggnadsnorm 70»:

$\sigma_{k\text{till}} = 63{,}6$ MN/m² $\qquad P_{\text{till}} = 76{,}5$ kN

Som villkor för en tillämpning av de i »Stålbyggnadsnorm 70» angivna beräkningsreglerna gäller därvid att strävans maximala initialutböjning f i färdig konstruktion inte får överstiga 1/600 av knäcklängden L_f.

:35 Tabeller och diagram

De värden för tryckta strävors knäckningslaster, som anges i den följande sammanställningen, gäller strängt endast under förutsättning av:

a homogent material med obegränsad elastisk deformationsförmåga
b initiellt rak konstruktion
c initiellt centrisk tryckkraft

För i avsnitten :351–:357 redovisade knäckningslastvärden kompletteras förutsättningen c med en förutsättning om att verkande tryckkrafter skall medfölja strävans knäckningsutböjning utan riktningsförändring (konservativt kraftsystem).

Då förutsättningarna a–c inte är möjliga att helt realisera i praktiken, måste de sammanställda knäckningsvärdena, då de används för praktisk dimensionering, modifieras enligt de riktlinjer, som angetts i :32–:34. För att underlätta en sådan modifiering har knäckningsvärdena genomgående — med undantag för strävor med föränderlig sektion — redovisats under formen

$$P_k = \pi^2 EI/(\beta L)^2 \tag{1}$$

vilket möjliggör en snabb bestämning av det mot 2. Euler-knäckningsfallet svarande slankhetstalet

$$\lambda = \beta L/i \tag{2}$$

varpå den tillhörande tillåtna knäckningsspänningen $\sigma_{k\text{till}}$ direkt kan erhållas ur exempelvis gällande bestämmelsers knäckningskurvor eller, för specialfallet konstruktioner av ideal-elastoplastiskt material (t ex stål) ur ekv :34 (8) eller ur knäckningskurvor av typ enligt fig :34c. En användning av de sistnämnda knäckningskurvorna innebär därvid principiellt en beräkning under förutsättning av en initialkrokighet, som till sin matematiska struktur är affin med knäckningsutböjningen för den motsvarande raka, centriskt tryckta strävan, och som har en storlek, som täcker summaeffekten av praktiskt sannolik såväl initialkrokighet som initialexcentricitet, jfr Dutheils ekvation i :34.

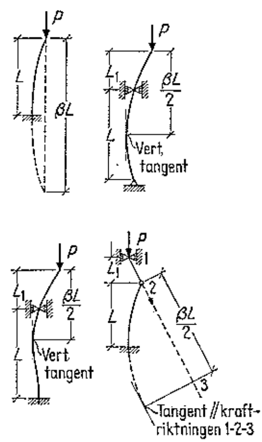


Fig :35a

Speciella dimensioneringsproblem inkommer vid knäckning av strävor med efter sin längd varierande normalkraft och sektion. Som en approximation på säkra sidan rekommenderas därvid för fallet *varierande normalkraft vid konstant sektion* [27], att den fiktiva knäcklängden βL bestäms ur det till tryckkraftens maximivärde hörande knäckningsvärdet, beräknat med hänsyn tagen till normalkraftens verkliga variation, varpå tillåten knäckningsspänning hämtas ur bestämmelsernas knäckningskurvor eller, för stål, ur fig :34c. Noggrannheten i ett sådant förfarande är för närvarande inte fullt utredd. Av i litteraturen omsorgsfullt genomförda undersökningar för fallet lineärt varierande normalkraft [28] torde dock slutsatsen kunna dras, att förfarandets precision vid ordinärt förekommande fall av varierande normalkraft är för praktiska förhållanden tillräcklig. De genomförda undersökningarna tyder på att den sämsta precisionen därvid kan förväntas kring slankhetstalet $\lambda \approx 100$. Vid fallet tryckt sträva med *varierande sektion* är de gällande bestämmelsernas knäckningskurvor generellt inte tilllämpbara. För hur knäckningsproblemet under sådana förhållanden kan behandlas hänvisas till :353.

För *grövre överslagsberäkningar* erhålls vid strävor med konstant sektion och normalkraft ofta tillräcklig precision, om det mot 2. Euler-knäckningsfallet svarande slankhetstalet λ bestäms genom skissning av knäckningsutböjningskurvan och därpå följande uppmätning av den fiktiva knäcklängden βL som avståndet mellan två på varandra följande momentnollpunkter. Förfarandet illustreras genom de i fig :35a visade belastningsfallen.

Exempel. Beräkna med hänsyn till knäckningsrisken erforderlig profil av stål 1411 för pelaren enligt fig :35b. $\sigma_s = 260$ MN/m², $\sigma_{\text{till}} = 173$ MN/m² (g = 10 m/s²).

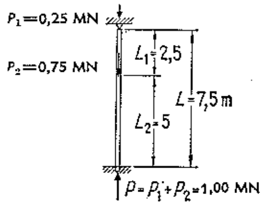


Fig :35b

$s = \sigma_s/\sigma_{\text{till}} = 1{,}5 \quad P_2/P = 0{,}750 \quad L_2/L = 0{,}667$

$\beta = 0{,}530$ (fig :352c) $\quad \beta L = 3{,}98$ m

Väljs på försök HE260A, erhålls

$A = 86{,}8 \cdot 10^{-4}$ m², $i = 6{,}50 \cdot 10^{-2}$ m, $\lambda = \beta L/i = 61{,}2$, $\sigma_k = 202{,}5$ MN/m² (tabell :34 eller fig :34c) $\sigma_{k\text{till}} = \sigma_k/s = 135$ MN/m², $P_{k\text{till}} = \sigma_{k\text{till}} A =$ 1,172 MN > aktuellt P.

En analog beräkning för HE240A resulterar i $P_{k\text{till}} = 0{,}979$ MN < aktuellt P. På grundval härav väljs HE260A.

:351 Elastiskt inspänd sträva med konstant sektion och normalkraft

Se fig :351a och b. Förutsättning: Elastisk inspänning av sådan art att stödvinkeländring Θ och stödmoment M är direkt proportionella, dvs för exempelvis ett upplag A

$$\Theta_a = k_a(L/EI)M_a \tag{1}$$

där k_a är en dimensionslös inspänningskoefficient med variationsområdet $0-\infty$, vilken kan bestämmas enligt de riktlinjer, som anges i nedanstående exempel. Speciellt motsvarar därvid $k_a = 0$ fast inspänning och $k_a = \infty$ fri uppläggning. Elastisk inspänning av denna art är vid knäckning aktuell t ex för tryckt ramdel, som är böjstyvt förbunden med ramdelar med ur knäckningssynpunkt försumbara normalkrafter. Jfr :55, fallen a–i.

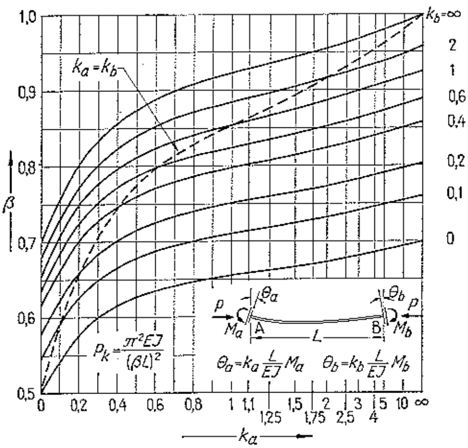


Fig :351a. Transversellt oförskjutbara stångändar [29], [30]

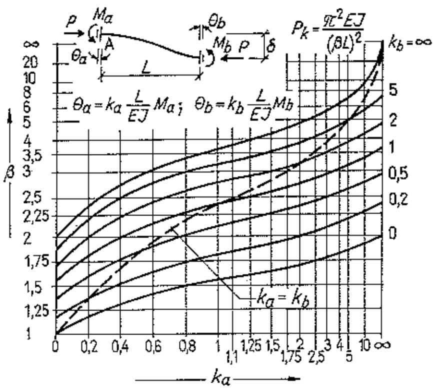


Fig :351b. Transversellt förskjutbara stångändar [31]

Exempel. Beräkna knäckningslasten P_k för den i fig :351c visade ramkonstruktionen.

För ramdelen BC gäller mellan stödvinkeländring Θ_b och stödmoment M_b sambandet

$$\Theta_b = M_b L_{bc}/3EI_{bc} = M_b L/4{,}5EI$$

vilket i kombination med ekv (1)

$$\Theta_b = k_b(L_{ab}/EI_{ab})M_b = k_b(L/EI)M_b \qquad \text{ger } k_b = 0{,}222$$

Då vidare $k_a = \infty$ (fri uppläggning) erhålls ur fig :351a för P_k uttrycket

$$P_k = \pi^2 EI/(\beta L)^2 \qquad \text{med } \beta = 0{,}811$$

varpå den tillhörande knäckningsdimensioneringen kan genomföras efter de linjer, som angetts i exemplet i :34.

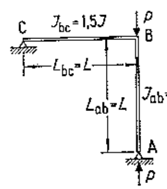


Fig :351c

:352 Konstant sektion, föränderlig normalkraft

a Språngvis föränderlig normalkraft

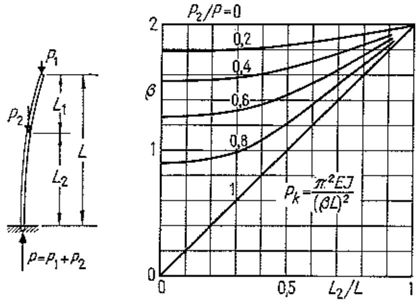


Fig :352a. [32]

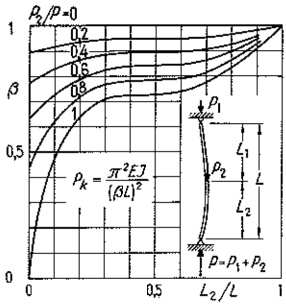


Fig :352b. [1], [32]

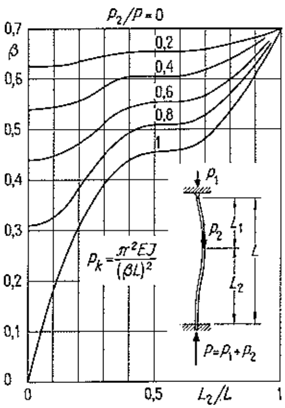


Fig :352c

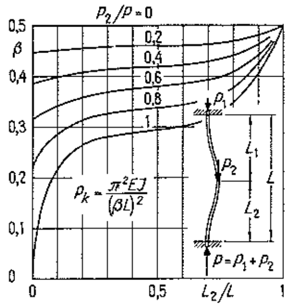


Fig :352d

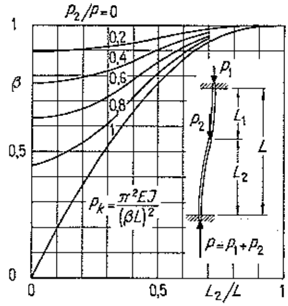


Fig :352e. [32]

b Lineärt föränderlig normalkraft

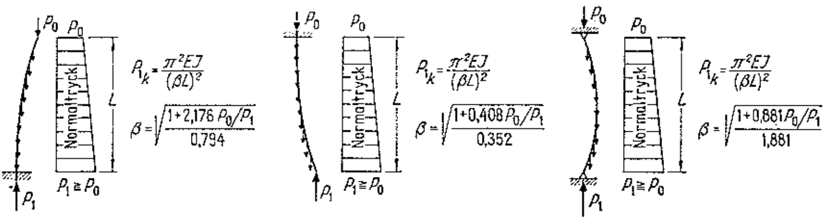


Fig :352f–h. [28]

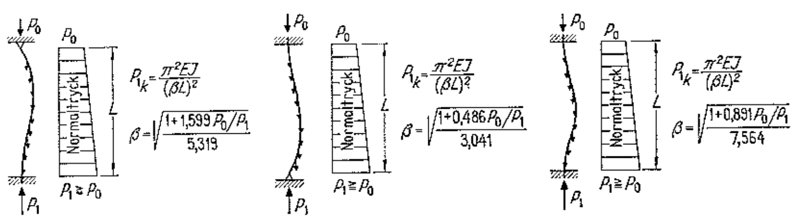


Fig :352i–k. [28]

De i fig :352f–k redovisade knäckningssambanden är närmeformler, som ger för ordinära praktiska förhållanden godtagbar noggrannhet inom området $1 \geqslant P_0/P_1 \geqslant -0{,}2$. För en knäckningsberäkning vid krav på förfinad precision hänvisas till vidareutvecklade närmesamband i [28].

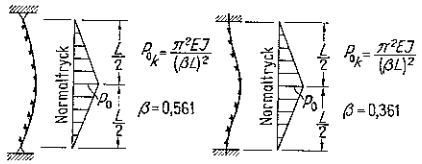


Fig :352 l och m. [33]

c På annat sätt föränderlig normalkraft

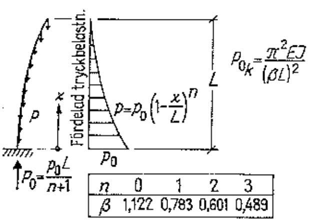


Fig :352n. [34]

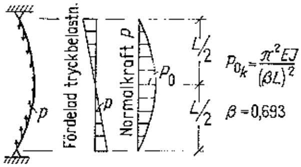


Fig :352o. [33]

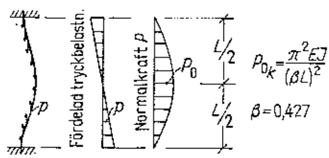


Fig :352p. [33]

:353 Föränderlig sektion, konstant normalkraft

A Allmänt

Vid en bestämmelsemässig knäckningsdimensionering beräknas först ett mot 2. Euler-knäckningsfallet svarande fiktivt slankhetstal $\lambda = L_f/i$, varefter den tillhörande tillåtna knäckningsspänningen $\sigma_{k\text{till}}$ erhålls ur knäckningskurvor eller knäckningstabeller. I de fall dessa har en med slankhetstalet varierande säkerhetsfaktor s, uppstår väsentliga dimensioneringstekniska svårigheter som följd av att vid varierande sektion slankhetstalet blir beroende av vilken sektion, som läggs till grund för dimensioneringen.

För knäckningsundersökning vid strävor med varierande sektion anges nedan en approximativ beräkningsteknik, som i princip kan beskrivas som en modifiering av ett i [3] föreslaget förfarande.

Strävan antas i obelastat tillstånd ha en initialkrokighet f, som till sin matematiska struktur är affin med knäckningsutböjningen vid den tillhörande centriskt belastade, initiellt raka strävan; jfr fig :353a, som visar antagen initialkrokighet för några grundläggande upplagsförhållanden. En tryckande axialkraft P medför en förstoring av initialkrokigheten till beloppet

$$y = f/(1 - P/P_k) \tag{1}$$

där P_k är den under förutsättning av initiellt rak, centriskt tryckt elastisk sträva beräknade knäckningslasten. För den tillhörande tryckkantspänningen σ erhålls med beaktande av att böjmomentet $M_x = Py$ uttrycket

$$\sigma = (P/A)[1 + fA/W(1 - P/P_k)] \tag{2}$$

varur tillåten knäckningsbelastning $P_{k\text{till}}$ kan bestämmas ur villkoret, att $P = sP_{k\text{till}}$ i farligaste snitt skall ge ett σ, som är $\leqslant$ sträckgränsen σ_s, dvs

$$\sigma_s \geqslant (sP_{k\text{till}}/A)[1 + fA/W(1 - sP_{k\text{till}}/P_k)] \tag{3}$$

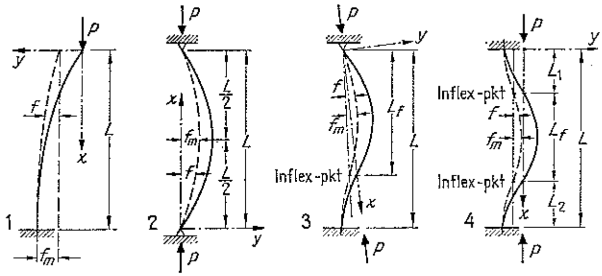


Fig :353a. Antagen initialkrokighet för några grundläggande upplagsförhållanden

För initialkrokighetens f variation längs strävan väljs för de fyra i fig :353a visade grundläggande uppläggningsfallen de approximativa uttrycken

1. uppläggningsfallet $f = f_m \sin(\pi x/2L)$ (4)
2. uppläggningsfallet $f = f_m \sin(\pi x/L)$ (5)
3. uppläggningsfallet $f = f_m \sin(\pi x/L_f)$ (6)
4. uppläggningsfallet $f = f_m \sin[\pi(x - L_1)/L_f]$ (7)

med L_f = avståndet mellan två på varandra följande inflexionspunkter. Vid komplicerad sektionsvariation kan dessas lägen för uppläggningsfallen 3 och 4 bli svårbestämbara. Under sådana omständigheter rekommenderas att inflexionspunkternas lägen väljs i överensstämmelse med förhållandena vid Euler-knäckning av sträva med konstant sektion, vilket medför att uttrycken för f enligt ekv (6) och (7) modifieras till sambanden

3. uppläggningsfallet $f = f_m \sin(4{,}49x/L)$, $L_f = 0{,}699L$ (6')
4. uppläggningsfallet $f = f_m \sin[2\pi(x/L - 1/4)]$, $L_f = \frac{1}{2}L$ (7')

För initialkrokighetens maximivärde f_m väljs i konsekvens med den i avsnitt :34 genomförda knäckningsbehandlingen en modifierad form av den av Dutheil föreslagna relationen

$$f_m = 4{,}8 \cdot 10^{-5} L_f^2/d_m \tag{8}$$

varvid d_m betecknar ett vägt medelvärde av avståndet från neutralaxeln till sektionens tryckta kant, bestämt ur sambandet

$$d_m = (1/L)\int_0^L d\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

B Exempel

Exempel 1. Beräkna ur knäckningssynpunkt tillåten tryckkraft $P_{k\text{till}}$ för den tvåsidigt ledartat infästade strävan enligt fig :353b, om strävan förutsätts avstyvad mot knäckning i veka riktningen.

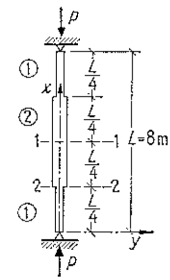


Fig :353b

Material: Stål 1411 med $\sigma_s = 260$ MN/m², $\sigma_{\text{till}} = 173$ MN/m², $s = \sigma_s/\sigma_{\text{till}} = 1{,}5$ ($g = 10$ m/s²).

För strävans ytterpartier ① resp mellanparti ② gäller

① HE 300B: $I_1 = 25166 \cdot 10^{-8}$ m⁴, $W_1 = 1680 \cdot 10^{-6}$ m³, $A_1 = 149{,}1 \cdot 10^{-4}$ m²

② HE 400B: $I_2 = 57680 \cdot 10^{-8}$ m⁴, $W_2 = 2880 \cdot 10^{-6}$ m³, $A_2 = 197{,}8 \cdot 10^{-4}$ m²

Med utnyttjande av fig :353g beräknas

$L_1/L = 0{,}25$, $\sqrt{I_1/I_2} = 0{,}661$, $\gamma = 0{,}79$, $P_k = 0{,}79\pi^2\, EI_2/L^2 = 14{,}76$ MN

och ur ekv (5), (8) och (9)

$d_m = 17{,}5 \cdot 10^{-2}$ m, $L_f = L = 8$ m, $f_m = 1{,}755 \cdot 10^{-2}$ m,

$f = 1{,}755 \cdot 10^{-2} \sin(\pi x/L)$ m

Dimensionerande spänning måste uppträda antingen i strävans mittsnitt 1 – 1 eller i det snitt 2 – 2, där sektionen diskontinuerligt förändras.

Snitt 1 – 1: $f = f_m = 1{,}755 \cdot 10^{-2}$ m

$260 \geqslant (sP_{k\mathrm{till}}/197{,}8 \cdot 10^{-4})[1 + 1{,}755 \cdot 197{,}8 \cdot 10^{-6}/2880 \cdot 10^{-8}(1 - sP_{k\mathrm{till}}/14{,}76)]$

enligt ekv (3) $sP_{k\mathrm{till}} \leqslant 4{,}39$ MN

Snitt 2 – 2: $f = f_m \sin 0{,}25\pi = 1{,}241 \cdot 10^{-2}$ m

$260 \geqslant (sP_{k\mathrm{till}}/149{,}1 \cdot 10^{-4})[1 + 1{,}241 \cdot 149{,}1 \cdot 10^{-6}/1680 \cdot 10^{-8}(1 - sP_{k\mathrm{till}}/14{,}76)]$

$sP_{k\mathrm{till}} \leqslant 3{,}39$ MN

Bestämmande för tillåten tryckkraft är följaktligen tryckspänningen i snitt 2 – 2, vilken ger $P_{k\mathrm{till}} = 3{,}39/1{,}5 = 2{,}26$ MN

Exempel 2. Beräkna $P_{k\mathrm{till}}$ för den i fig :353c visade, tvåsidigt fast inspända strävan av stål 1411 med $\sigma_s = 260$ MN/m², $\sigma_{\mathrm{till}} = 173$ MN/m², $s = \sigma_s/\sigma_{\mathrm{till}} = 1{,}5$ ($g = 10$ m/s²).

Strävan förutsätts avstyvad mot knäckning i veka riktningen. Partierna ① och ② karaktäriseras av

① HE 160B: $I_1 = 2492 \cdot 10^{-8}$ m⁴, $W_1 = 311 \cdot 10^{-6}$ m³, $A_1 = 54{,}3 \cdot 10^{-4}$ m²

② HE 180B: $I_2 = 3831 \cdot 10^{-8}$ m⁴, $W_2 = 426 \cdot 10^{-6}$ m³, $A_2 = 65{,}3 \cdot 10^{-4}$ m²

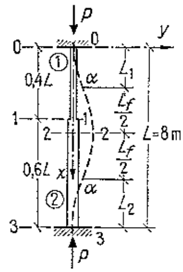


Fig :353c

Approximativ beräkning av P_k

Belastningsfallets knäckningslast P_k, vilken författaren veterligen inte finns utvärderad i litteraturen, kan noggrant bestämmas genom t ex direkt integration av elastiska linjens ekvation eller genom numerisk integration enligt Vianellos metod (se :26). En sådan bestämning blir emellertid tidsödande och är i aktuellt sammanhang inte heller erforderlig med hänsyn till de approximationer, som införts ovan vid val av initialkrokighet.

Approximativt kan P_k beräknas på följande sätt. I knäckningsögonblicket anses strävan uppbyggd av tre samtidigt knäckande delar L_1, L_f och L_2, begränsade av inflexionspunkter α och fasta inspänningar. För dessa delars knäckningslast P_k gäller, om de båda inflexionspunkterna α approximativt antas få samma knäckningsutböjning

$$P_k = \pi^2 EI_1/4L_1^2 \text{ (delen } L_1) \tag{a}$$

$$P_k = \pi^2 EI_2/4L_2^2 \text{ (delen } L_2) \tag{b}$$

$$P_k = \gamma\pi^2 EI_2/L_f^2 \text{ (delen } L_f) \tag{c}$$

varvid γ hämtas ur tabellen i fig :354b fall 2 ($P_2/P = 0$). Ur villkoret, att P_k enligt ekv (a)–(c) skall vara lika och ur villkoret, att

$$L_1 + L_2 + L_f = L \tag{d}$$

erhålls

$$L_1 = L/(2{,}24 + 2{,}48\sqrt{\gamma}),\ L_2 = 1{,}240 L_1,\ L_f = 2{,}48\sqrt{\gamma} L_1 \tag{e}$$

Väljs på försök ett värde γ, kan ur ekv (e) tillhörande L_1, L_2 och L_f beräknas. Därigenom blir ingångsstorheterna i fig :354b fall 2 bekanta och ett nytt γ-värde erhålls. Beräkningen upprepas tills på försök valt γ-värde överensstämmer med beräknat.

I aktuellt fall beräknas

$L_1 = 0{,}219L$, $L_2 = 0{,}272L$, $L_f = 0{,}509L$, $\gamma = 0{,}88$, $P_k = 4{,}21$ MN

Dimensionerande tryckspänning uppträder i något av snitten 0 – 0, 1 – 1, 2 – 2 eller 3 – 3.

Snitt 0 – 0:

$d_m = (0{,}4 \cdot 8 + 0{,}6 \cdot 9) \cdot 10^{-2} = 8{,}6 \cdot 10^{-2}$ m, $\quad f_m = 4{,}8 \cdot 10^{-5} L_f^2 / d_m = 0{,}927 \cdot 10^{-2}$ m

$f = f_m \sin\pi(x - L_1)/L_f = 0{,}927 \cdot 10^{-2} \sin 6{,}17(x/L - 0{,}219)\,\mathrm{m}\, f_0 = -0{,}905 \cdot 10^{-2}\mathrm{m}$

$260 \geqslant (sP_{k\mathrm{till}}/54{,}3 \cdot 10^{-4})\,[1 + 0{,}905 \cdot 54{,}3 \cdot 10^{-6}/311 \cdot 10^{-6}(1 - sP_{k\mathrm{till}}/4{,}21)]$

$sP_{k\mathrm{till}} \leqslant 1{,}16$ MN

Snitt 1 – 1: $\quad f_1 = 0{,}833 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} < |f_0|$

Härav följer, då sektionen är densamma i snitten 0 – 0 och 1 – 1, att maximala tryckspänningen i 1 – 1 inte kan vara dimensionerande.

Snitt 2 – 2: $\quad f_2 = f_m = 0{,}927 \cdot 10^{-2}$ m

$260 \geqslant (sP_{k\mathrm{till}}/65{,}3 \cdot 10^{-4})\,[1 + 0{,}927 \cdot 65{,}3 \cdot 10^{-6}/426 \cdot 10^{-6}(1 - sP_{k\mathrm{till}}/4{,}21)]$

$sP_{k\mathrm{till}} \leqslant 1{,}40$ MN

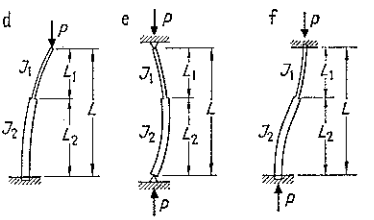
Snitt 3 – 3:

Då $|f_3| = 0{,}921 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} < f_2$ inses att snittets maximala tryckspänning inte kan vara dimensionerande.

Bestämmande för $P_{k\mathrm{till}}$ blir följaktligen spänningsförhållandena i det övre inspänningssnittet 0 – 0. $P_{k\mathrm{till}} = 1{,}16/1{,}5 = 0{,}773$ MN.

C Diagram

a Språngvis föränderlig sektion. Se fig :353 d–i.



$P_k = \gamma\pi^2 EI_2/L^2$, varvid för γ gäller de mot $P_2/P = 0$ svarande värdena i tabellerna i fig :354 b

Fig :353 d–f

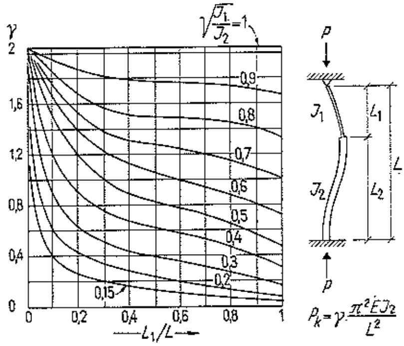


Fig :353 g. [31], [35]

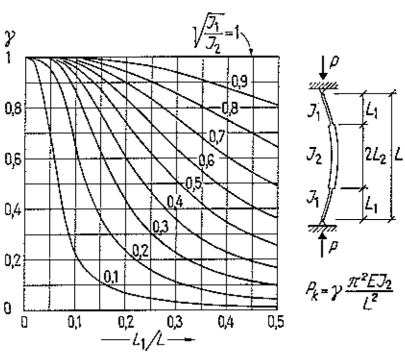


Fig :353 h. [1], [36]

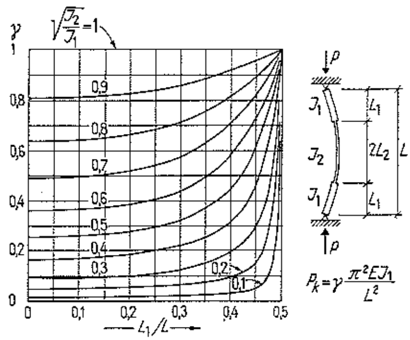


Fig :353 i. [1], [36]

För motsvarande knäckningslast P_k vid strävor uppbyggda av tre delar med tröghetsmomenten I_1, I_2 och I_3 hänvisas till [2] och [35].

b Kontinuerligt föränderlig sektion. Se fig :353 j–o

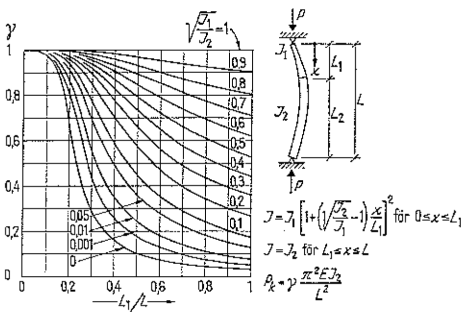


Fig :353 j. [37]

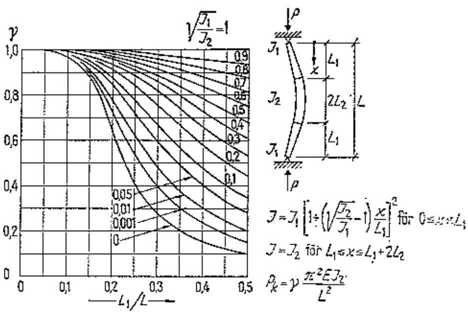
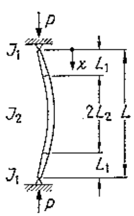


Fig :353 k. [37]



$$J=J_1\left[1+\left(\sqrt[n]{\frac{J_2}{J_1}}-1\right)\frac{x}{L_1}\right]^n \quad \text{för } 0\le x\le L_1$$

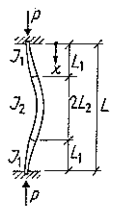
$$J=J_2 \quad \text{för } L_1\le x\le L_1+2L_2$$

$$P_k=\gamma\frac{\pi^2EJ_2}{L^2}$$

För $n=2$ finns γ mera detaljerat redovisad i fig :353 k

L_1/L	I_1/I_2	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
0		1	1	1	1
0,1	1	1	1	1	1
	0,8	0,999	0,999	0,999	0,999
	0,6	0,998	0,998	0,998	0,998
	0,4	0,997	0,997	0,997	0,997
	0,2	0,996	0,994	0,994	0,993
	0,1	0,995	0,992	0,990	0,990
0,2	1	1	1	1	1
	0,8	0,996	0,995	0,994	0,994
	0,6	0,989	0,987	0,987	0,987
	0,4	0,983	0,976	0,975	0,975
	0,2	0,976	0,956	0,951	0,950
	0,1	0,958	0,936	0,926	0,913
0,3	1	1	1	1	1
	0,8	0,991	0,983	0,982	0,982
	0,6	0,968	0,961	0,958	0,957
	0,4	0,931	0,927	0,923	0,922
	0,2	0,903	0,872	0,860	0,853
	0,1	0,879	0,819	0.794	0,778
0,4	1	1	1	1	1
	0,8	0,967	0,963	0,963	0,962
	0,6	0,924	0,916	0,914	0,913
	0,4	0,861	0,853	0,850	0,844
	0,2	0,810	0,759	0,741	0,730
	0,1	0,768	0,676	0,640	0,619
0,5	1	1	1	1	1
	0,8	0,939	0,936	0,935	0,935
	0,6	0,872	0,862	0,861	0,858
	0,4	0,797	0,771	0,762	0,758
	0,2	0,710	0,645	0,622	0,610
	0,1	0,657	0,547	0,508	0,487

Fig :353 l. [34], [37]



$$J=J_1\left[1+\left(\sqrt[n]{\frac{J_2}{J_1}}-1\right)\frac{x}{L_1}\right]^n \quad \text{för } 0\le x\le L_1$$

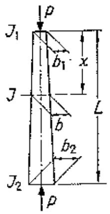
$$J=J_2 \quad \text{för } L_1\le x\le L_1+2L_2$$

$$P_k=\gamma\frac{\pi^2EJ_2}{L^2}$$

L_1/L	I_1/I_2	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
0		4	4	4	4
0,1	1	4	4	4	4
	0,8	3,83	3,83	3,83	3,83
	0,6	3,63	3,61	3,61	3,60
	0,4	3,35	3,30	3,29	3,28
	0,2	2,94	2,80	2,76	2,74
	0,1	—	2,37	—	2,27
0,2	1	4	4	4	4
	0,8	3,73	3,73	3,73	3,73
	0,6	3,42	3,41	3,40	3,40
	0,4	3,06	3,01	2,99	2,98
	0,2	2,58	2,46	2,43	2,41
	0,1	—	2,06	—	1,986
0,3	1	4	4	4	4
	0,8	3,68	3,68	3,68	3,68
	0,6	3,34	3,32	3,32	3,31
	0,4	2,93	2,89	2,88	2,87
	0,2	2,37	2,32	2,29	2,28
	0,1	—	1,909	—	1,842
0,4	1	4	4	4	4
	0,8	3,65	3,64	3,64	3,64
	0,6	3,26	3,24	3,24	3,24
	0,4	2,82	2,77	2,76	2,75
	0,2	2,27	2,15	2,12	2,10
	0,1	—	1,707	—	1,617
0,5	1	4	4	4	4
	0,8	3,59	3,58	3,58	3,58
	0,6	3,15	3,12	3,11	3,11
	0,4	2,65	2,59	2,57	2,56
	0,2	2,06	1,919	1,872	1,847
	0,1	—	1,458	—	1,348

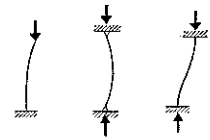
Fig :353 m. [34], [37]

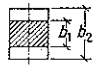
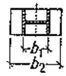
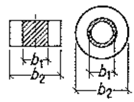
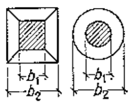
Fig :353n. [34], [38]. γ enligt tabell



$$I = I_1[1+(\sqrt[n]{I_2/I_1}-1)\,x/L]^n$$

$$P_k = \gamma\pi^2 EI_2/L^2$$



Sektion	n			
	$n=1$	γ_1	γ_2	γ_3
	$n=2$	γ_4	γ_5	γ_6
	$n=3$	γ_7	γ_8	γ_9
	$n=4$	γ_{10}	γ_{11}	γ_{12}

I_1/I_2	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0,1	0
γ_1	0,250	0,235	0,218	0,199	0,178	0,165	0,097
γ_2	1	0,899	0,792	0,677	0,548	0,472	0,372
γ_3	1	0,897	0,786	0,663	0,516	—	0,386
γ_4	0,250	0,234	0,216	0,193	0,161	0,137	0,025
γ_5	1	0,897	0,781	0,647	0,479	0,365	0,025
γ_6	1	0,895	0,780	0,647	0,476	0,365	0,025
γ_7	0,250	0,234	0,215	0,191	0,156	0,129	0
γ_8	1	0,896	0,777	0,637	0,458	0,331	0
γ_9	1	0,895	0,778	0,642	0,467	—	0
γ_{10}	0,250	0,234	0,215	0,190	0,153	0,122	0
γ_{11}	1	0,895	0,775	0,632	0,447	0,316	0
γ_{12}	1	0,895	0,777	0,639	0,462	0,337	0

För fallen γ_5 och γ_8 ges mera detaljerat dimensioneringsunderlag i [39] med behandling också av fallet böjd och samtidigt tryckt sträva. I [40] ges ett dimensioneringsunderlag med motsvarande omfattning för fallet γ_{10}. Mot γ_{10} svarande, modifierade fall med strävans minsta tvärsnitt inspänt behandlas i [41].

För överslagsberäkningar vid tvåsidigt ledad sträva med kontinuerligt föränderlig sektion, se fig :353o.

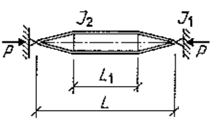
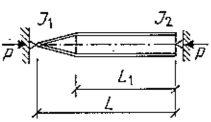
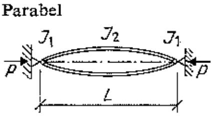
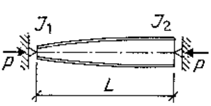
Tvärsnittsform		*Användningsområde*	*Koefficienten* $\gamma\approx$
	1	$L_1 \leqslant 0{,}5L$	$0{,}17+0{,}33v+0{,}5\sqrt{v}+(L_1/L)(0{,}62+\sqrt{v}-1{,}62v)$
	2	$L_1 = 0{,}5L$	$0{,}48(1-v)+\sqrt{v}$
	3	$0{,}5L < L_1 < 0{,}8L$	Lineär interpolation mellan ② och ④
	4	$L_1 \geqslant 0{,}8L$	1,0
	1	$L_1 \leqslant 0{,}5L$	$0{,}08+0{,}92v+(L_1/L)^2(0{,}32+4\sqrt{v}-4{,}32v)$
	2	$L_1 = 0{,}5L$	$0{,}16(1-v)+\sqrt{v}$
	3	$0{,}5L < L_1 < 0{,}8L$	Lineär interpolation mellan ② och ④
	4	$L_1 \geqslant 0{,}8L$	1,0
Parabel 			$0{,}48+0{,}02v+0{,}5\sqrt{v}$
Parabel 			$0{,}18+0{,}32v+0{,}5\sqrt{v}$

Fig :353o. Närmesamband för P_k, tillämpbara för tvåsidigt ledad sträva med kontinuerligt föränderlig sektion. Giltighetsområde $0{,}01 \leqslant v^2 \leqslant 1$ [27], [31].

$P_k = \gamma\pi^2 EI_2/L^2$

$v = \sqrt{I_1/I_2}$

:354 Föränderlig sektion och normalkraft

En approximativ knäckningsdimensionering vid sträva med föränderlig sektion och normalkraft kan i princip genomföras efter de riktlinjer, som angetts i avsnitt :353. Dock inkommer, som framgår av efterföljande exempel, en viss modifiering, dikterad av att de krafter, som vid föränderlig längsbelastning uppkommer i strävans inflexionspunkter, inte sammanfaller med dessa punkters förbindningslinje.

Exempel. Beräkna $P_{k\text{till}}$ för den i fig :354a visade, tvåsidigt ledartat infästade strävan om strävan förutsätts avstyvad mot knäckning i veka riktningen.

Material: 1311 med $\sigma_s = 220$ MN/m², $\sigma_{\text{till}} = 147$ MN/m², $s = \sigma_s/\sigma_{\text{till}} = 1{,}5$ ($g = 10$ m/s²).

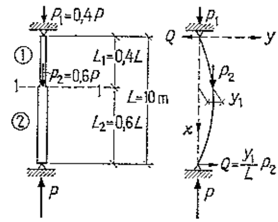


Fig :354a

För delarna ① och ② gäller

① HE200B: $I_1 = 5696 \cdot 10^{-8}$ m⁴, $W_1 = 570 \cdot 10^{-6}$ m³, $A_1 = 78{,}1 \cdot 10^{-4}$ m²

② HE400B: $I_2 = 57680 \cdot 10^{-8}$ m⁴, $W_2 = 2880 \cdot 10^{-6}$ m³, $A_2 = 197{,}8 \cdot 10^{-4}$ m²

Ur tabellen i fig :354b fall 2 beräknas

$$L_2/L = 0{,}6,\ I_1/I_2 = 0{,}0988,\ P_2/P = 0{,}6,\ \gamma = 0{,}36, P_k = 0{,}36\pi^2 E I_2/L^2 = 4{,}30\text{MN}$$

Ur ekv :353 (5), (8) och (9) erhålls för initialkrokigheten

$$L_f = 10 \text{ m},\ d_m = (0{,}4 \cdot 10 + 0{,}6 \cdot 20) \cdot 10^{-2} = 16{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ m},\ f_m = 3{,}00 \cdot 10^{-2} \text{ m},$$

$$f = 3{,}00 \cdot 10^{-2} \sin(\pi x/L) \text{ m}$$

Spänningsberäkning för snitt 1 – 1:

$$f_1 = 2{,}85 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$y_1 = f_1/(1 - sP_{k\text{till}}/P_k) = 2{,}85 \cdot 10^{-2}/(1 - sP_{k\text{till}}/4{,}30) \text{m}$$

$$M_1 = sP_1 y_1 + sQ \cdot 0{,}4L = sP_{k\text{till}}(0{,}4y_1 + 0{,}6 \cdot 0{,}4y_1) = 0{,}64 sP_{k\text{till}} y_1$$

Häremot svarande maximal spänning omedelbart ovan snitt 1 – 1 blir

$$\sigma_{1\max} = s \cdot 0{,}4P_{k\text{till}}/A_1 + M_1/W_1$$
$$= (sP_{k\text{till}}/78{,}1 \cdot 10^{-4})[0{,}4 + 0{,}250/(1 - sP_{k\text{till}}/4{,}30)] \leq \sigma_s = 220$$

varur beräknas

$$sP_{k\text{till}} = 1{,}99 \text{ MN}$$

Genom fortsatt, motsvarande kalkyl för ett snitt omedelbart under 1 – 1 samt för andra karaktäristiska snitt kan påvisas att det för snittet omedelbart ovan 1 – 1 framräknade knäckningsvärdet dimensionerar, varför

$$P_{k\text{till}} = 1{,}99/1{,}5 = 1{,}33 \text{ MN}$$

a Språngvis föränderlig sektion och normalkraft. Se fig :354b

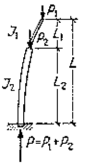
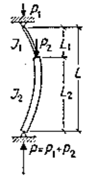
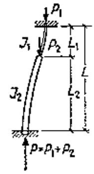
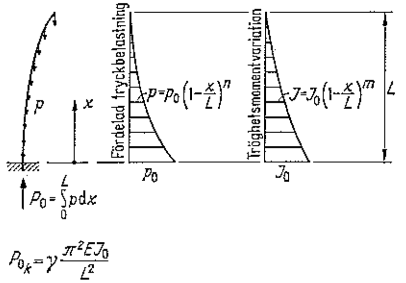
$\frac{L_2}{L}$	$\frac{I_1}{I_2}$	Fall 1 $P_k=\gamma\frac{\pi^2EI_2}{L^2}$ 						Fall 2 $P_k=\gamma\frac{\pi^2EI_2}{L^2}$ 						Fall 3 $P_k=\gamma\frac{\pi^2EI_2}{L^2}$ 					
		$P_2/P =$						$P_2/P =$						$P_2/P =$					
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,3	0,05	0,025	0,031	0,041	0,061	0,12	2,78	0,057	0,065	0,076	0,091	0,113	0,145	0,098	0,122	0,163	0,244	0,49	2,83
	0,1	0,047	0,059	0,078	0,117	0,23	2,78	0,113	0,130	0,151	0,181	0,222	0,283	0,187	0,234	0,311	0,465	0,92	2,87
	0,2	0,088	0,11	0,14	0,22	0,42	2,78	0,22	0,26	0,30	0,35	0,43	0,54	0,34	0,43	0,56	0,83	1,53	2,97
	0,4	0,15	0,19	0,24	0,36	0,70	2,78	0,44	0,50	0,57	0,67	0,81	1,00	0,58	0,71	0,92	1,30	2,06	3,15
	0,6	0,19	0,24	0,32	0,46	0,86	2,78	0,64	0,72	0,83	0,96	1,14	1,38	0,75	0,91	1,16	1,59	2,33	3,33
	0,8	0,23	0,28	0,37	0,53	0,97	2,78	0,82	0,93	1,06	1,22	1,44	1,71	0,88	1,07	1,35	1,80	2,53	3,50
	1	0,25	0,31	0,41	0,59	1,04	2,78	1,00	1,12	1,27	1,46	1,69	1,98	1,00	1,20	1,50	1,97	2,70	3,66
0,4	0,05	0,033	0,041	0,054	0,081	0,16	1,56	0,066	0,075	0,088	0,106	0,131	0,170	0,130	0,162	0,216	0,323	0,65	1,60
	0,1	0,060	0,075	0,10	0,15	0,30	1,56	0,130	0,148	0,173	0,207	0,255	0,329	0,24	0,30	0,40	0,58	1,04	1,65
	0,2	0,11	0,13	0,18	0,26	0,50	1,56	0,25	0,29	0,33	0,40	0,49	0,62	0,41	0,51	0,65	0,90	1,31	1,73
	0,4	0,17	0,21	0,28	0,40	0,70	1,56	0,48	0,54	0,62	0,73	0,88	1,08	0,63	0,75	0,93	1,18	1,52	1,88
	0,6	0,21	0,26	0,33	0,47	0,78	1,56	0,68	0,76	0,87	1,01	1,19	1,43	0,78	0,91	1,10	1,35	1,68	2,03
	0,8	0,23	0,29	0,37	0,51	0,82	1,56	0,85	0,95	1,08	1,23	1,43	1,69	0,89	1,04	1,24	1,50	1,82	2,17
	1	0,25	0,31	0,39	0,54	0,85	1,56	1,00	1,11	1,25	1,42	1,63	1,90	1,00	1,16	1,36	1,63	1,95	2,30
0,5	0,05	0,045	0,057	0,075	0,11	0,22	1,00	0,082	0,094	0,111	0,135	0,171	0,231	0,179	0,223	0,296	0,44	0,76	1,04
	0,1	0,083	0,10	0,14	0,20	0,38	1,00	0,159	0,183	0,215	0,261	0,328	0,439	0,31	0,38	0,49	0,67	0,90	1,08
	0,2	0,14	0,17	0,22	0,31	0,54	1,00	0,30	0,35	0,41	0,49	0,61	0,79	0,48	0,57	0,68	0,83	1,00	1,16
	0,4	0,19	0,24	0,30	0,41	0,63	1,00	0,55	0,62	0,72	0,85	1,02	1,28	0,66	0,75	0,87	1,00	1,15	1,30
	0,6	0,22	0,27	0,34	0,45	0,65	1,00	0,74	0,83	0,95	1,10	1,30	1,58	0,79	0,88	1,00	1,13	1,28	1,43
	0,8	0,24	0,29	0,36	0,47	0,67	1,00	0,89	0,99	1,12	1,28	1,49	1,77	0,90	1,00	1,12	1,26	1,40	1,55
	1	0,25	0,30	0,37	0,48	0,67	1,00	1,00	1,11	1,25	1,41	1,62	1,89	1,00	1,11	1,23	1,37	1,52	1,67
0,6	0,05	0,068	0,083	0,11	0,16	0,31	0,70	0,111	0,129	0,154	0,192	0,253	0,366	0,26	0,31	0,40	0,52	0,65	0,74
	0,1	0,12	0,14	0,19	0,26	0,44	0,70	0,21	0,25	0,29	0,36	0,47	0,67	0,39	0,46	0,53	0,62	0,70	0,78
	0,2	0,17	0,21	0,26	0,35	0,50	0,70	0,39	0,45	0,53	0,65	0,82	1,11	0,52	0,58	0,64	0,71	0,78	0,85
	0,4	0,22	0,26	0,31	0,40	0,52	0,70	0,65	0,74	0,86	1,02	1,23	1,53	0,67	0,72	0,79	0,85	0,92	0,99
	0,6	0,24	0,28	0,33	0,41	0,53	0,70	0,82	0,92	1,05	1,22	1,43	1,70	0,79	0,85	0,91	0,98	1,05	1,12
	0,8	0,25	0,29	0,34	0,42	0,53	0,70	0,93	1,03	1,17	1,33	1,53	1,79	0,90	0,96	1,03	1,09	1,16	1,23
	1	0,25	0,29	0,35	0,42	0,54	0,70	1,00	1,11	1,24	1,40	1,60	1,83	1,00	1,06	1,13	1,20	1,26	1,33
0,7	0,05	0,11	0,13	0,17	0,24	0,38	0,51	0,171	0,202	0,246	0,315	0,436	0,696	0,35	0,39	0,44	0,48	0,52	0,56
	0,1	0,16	0,20	0,24	0,31	0,41	0,51	0,32	0,37	0,45	0,57	0,77	1,14	0,43	0,47	0,50	0,54	0,57	0,60
	0,2	0,21	0,24	0,29	0,35	0,42	0,51	0,54	0,63	0,74	0,91	1,15	1,47	0,52	0,55	0,59	0,62	0,65	0,69
	0,4	0,24	0,27	0,31	0,36	0,43	0,51	0,79	0,89	1,02	1,18	1,38	1,60	0,67	0,70	0,73	0,77	0,80	0,83
	0,6	0,24	0,28	0,32	0,37	0,43	0,51	0,90	1,00	1,13	1,28	1,45	1,64	0,79	0,83	0,86	0,89	0,92	0,95
	0,8	0,25	0,28	0,32	0,37	0,43	0,51	0,96	1,06	1,18	1,32	1,48	1,65	0,90	0,93	0,97	1,00	1,03	1,06
	1	0,25	0,28	0,32	0,37	0,43	0,51	1,00	1,10	1,21	1,34	1,50	1,66	1,00	1,03	1,06	1,09	1,12	1,14
0,8	0,05	0,18	0,21	0,25	0,30	0,35	0,39	0,32	0,39	0,48	0,63	0,90	1,33	0,37	0,39	0,41	0,42	0,44	0,45
	0,1	0,22	0,25	0,28	0,31	0,35	0,39	0,55	0,65	0,78	0,96	1,19	1,40	0,43	0,45	0,46	0,48	0,49	0,51
	0,2	0,24	0,26	0,29	0,32	0,35	0,39	0,78	0,88	1,00	1,14	1,29	1,42	0,53	0,55	0,56	0,58	0,59	0,61
	0,4	0,25	0,27	0,29	0,32	0,35	0,39	0,92	1,01	1,11	1,21	1,32	1,43	0,70	0,71	0,72	0,74	0,75	0,77
	0,6	0,25	0,27	0,29	0,32	0,36	0,39	0,97	1,05	1,14	1,23	1,33	1,44	0,82	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88
	0,8	0,25	0,27	0,30	0,32	0,36	0,39	0,99	1,06	1,15	1,24	1,34	1,44	0,92	0,93	0,94	0,95	0,97	0,98
	1	0,25	0,27	0,30	0,32	0,36	0,39	1,00	1,07	1,16	1,24	1,34	1,44	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05

Fig :354b.[32]

I [42] ges ett mera detaljerat dimensioneringsunderlag för fall 1 ovan.

b Kontinuerligt föränderlig sektion och normalkraft. Se fig :354c och d



	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
$n=0$	0,794	0,586	0,372	0,1013	—
$n=1$	1,631	1,317	1,000	0,668	0,228
$n=2$	2,77	2,34	1,915	1,489	1,033
$n=3$	4,18	3,66	3,13	2,60	2,05
$n=4$	—	5,28	4,64	4,00	3,34

Fig :354c. [34]

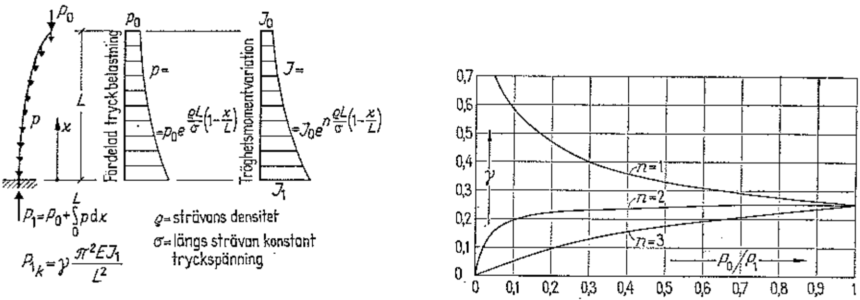


Fig :354d. Egenviktsknäckning av sträva med sektionsutformning som svarar mot i hela strävan konstant tryckspänning. [43]

:355 Sträva med utkragande ände

a Konstant sektion och normalkraft

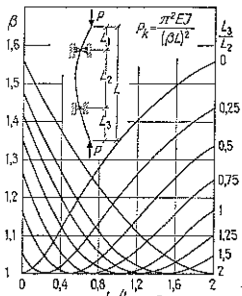


Fig :355a. [36], [44]

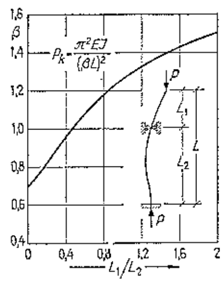
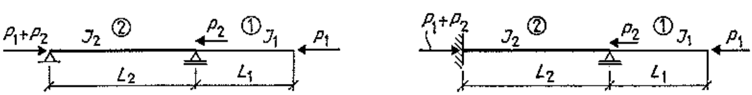


Fig :355b

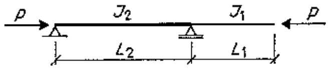
b Språngvis föränderlig sektion och normalkraft



$(P_1+P_2)_k=\pi^2EI_2/(\beta L_2)^2 \qquad n=(P_1+P_2)/P_1$

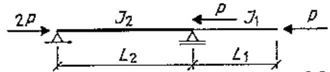
Fig :355c. [45], tabeller på nästa sida

$n=1$



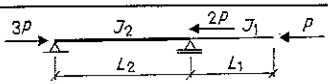
I_1/I_2	L_1/L_2 0,2	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	2,0	3,0
0,1	1,56	4,02	5,29	6,53	7,77	9,10	12,89	19,05
0,2	1,36	3,01	3,90	4,77	5,65	6,56	9,25	13,59
0,3	1,31	2,58	3,30	4,02	4,74	5,55	7,68	11,17
0,4	1,29	2,36	2,97	3,61	4,21	4,88	6,73	9,80
0,5	1,27	2,21	2,76	3,33	3,87	4,45	6,11	8,82
0,6	1,26	2,12	2,61	3,12	3,62	4,15	5,65	8,18
0,7	1,25	2,05	2,50	2,99	3,43	3,91	5,32	7,69
0,8	1,25	2,00	2,43	2,87	3,29	3,73	5,08	7,28
0,9	1,24	1,96	2,36	2,78	3,18	3,61	4,88	6,93
1,0	1,24	1,93	2,32	2,69	3,08	3,48	4,70	6,57

$n=2$



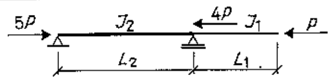
I_1/I_2	L_1/L_2 0,2	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	2,0	3,0
0,1	1,22	2,84	3,72	4,61	5,52	6,41	9,14	13,59
0,2	1,15	2,14	2,75	3,37	4,02	4,65	6,53	9,75
0,3	1,13	1,87	2,36	2,86	3,37	3,89	5,40	8,00
0,4	1,12	1,73	2,14	2,56	3,01	3,46	4,75	7,05
0,5	1,12	1,64	1,99	2,37	2,75	3,15	4,33	6,36
0,6	1,12	1,58	1,90	2,23	2,58	2,94	4,02	5,97
0,7	1,12	1,54	1,83	2,14	2,45	2,78	3,78	5,49
0,8	1,11	1,51	1,78	2,06	2,36	2,66	3,61	5,15
0,9	1,11	1,48	1,74	2,00	2,29	2,57	3,46	4,92
1,0	1,11	1,47	1,70	1,96	2,23	2,49	3,33	4,71

$n=3$



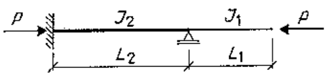
I_1/I_2	L_1/L_2 0,2	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	2,0	3,0
0,1	1,11	2,34	3,05	3,78	4,53	5,29	7,50	11,17
0,2	1,09	1,78	2,25	2,78	3,29	3,82	5,34	7,98
0,3	1,08	1,56	1,94	2,34	2,75	3,17	4,43	6,56
0,4	1,08	1,46	1,76	2,10	2,45	2,81	3,90	5,75
0,5	1,08	1,40	1,66	1,95	2,27	2,58	3,53	5,18
0,6	1,08	1,36	1,60	1,85	2,14	2,42	3,29	4,79
0,7	1,07	1,34	1,55	1,78	2,04	2,30	3,09	4,46
0,8	1,07	1,32	1,51	1,73	1,96	2,19	2,94	4,22
0,9	1,07	1,31	1,48	1,68	1,90	2,12	2,83	4,02
1,0	1,07	1,30	1,46	1,65	1,85	2,06	2,73	3,85

$n=5$



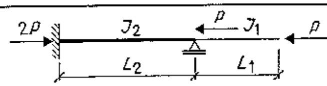
I_1/I_2	L_1/L_2 0,2	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	2,0	3,0
0,1	1,05	1,81	2,35	2,94	3,52	4,09	5,78	8,52
0,2	1,05	1,42	1,78	2,16	2,55	2,94	4,14	6,13
0,3	1,05	1,29	1,54	1,84	2,16	2,47	3,44	5,08
0,4	1,05	1,23	1,42	1,67	1,93	2,19	3,05	4,45
0,5	1,05	1,21	1,36	1,56	1,79	2,02	2,77	4,02
0,6	1,05	1,19	1,32	1,49	1,69	1,90	2,58	3,71
0,7	1,05	1,18	1,29	1,44	1,62	1,81	2,43	3,47
0,8	1,04	1,17	1,27	1,41	1,57	1,74	2,31	3,29
0,9	1,04	1,17	1,26	1,38	1,53	1,68	2,21	3,12
1,0	1,04	1,16	1,25	1,36	1,49	1,64	2,13	3,01

$n=1$



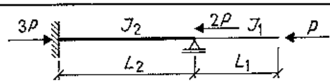
I_1/I_2	L_1/L_2 0,2	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	2,0	3,0
0,1	1,45	3,96	5,21	6,53	7,78	9,09	12,89	19,26
0,2	1,18	2,91	3,81	4,70	5,63	6,53	9,18	13,69
0,3	1,09	2,48	3,22	3,93	4,69	5,42	7,53	11,23
0,4	1,04	2,23	2,87	3,46	4,12	4,79	6,58	9,78
0,5	1,00	2,07	2,63	3,19	3,75	4,34	5,97	8,82
0,6	1,00	1,97	2,46	2,97	3,48	4,02	5,52	8,13
0,7	0,99	1,88	2,34	2,81	3,29	3,78	5,18	7,61
0,8	0,99	1,81	2,25	2,69	3,12	3,58	4,92	7,18
0,9	0,98	1,76	2,18	2,58	3,01	3,42	4,70	6,83
1,0	0,98	1,73	2,12	2,50	2,91	3,29	4,53	6,53

$n=2$



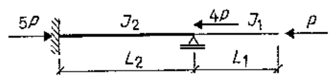
I_1/I_2	L_1/L_2 0,2	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	2,0	3,0
0,1	1,06	2,81	3,70	4,61	5,50	6,38	9,09	13,59
0,2	0,91	2,07	2,69	3,33	3,96	4,61	6,53	9,68
0,3	0,87	1,76	2,27	2,79	3,30	3,84	5,40	7,96
0,4	0,86	1,60	2,03	2,48	2,91	3,37	4,72	6,91
0,5	0,85	1,49	1,87	2,27	2,66	3,08	4,27	6,21
0,6	0,84	1,42	1,76	2,13	2,48	2,86	3,92	5,73
0,7	0,84	1,36	1,68	2,01	2,34	2,68	3,67	5,36
0,8	0,84	1,32	1,62	1,92	2,23	2.54	3,49	5,06
0,9	0,83	1,29	1,57	1,84	2,14	2,43	3,33	4,81
1,0	0,83	1,26	1,53	1,79	2,07	2,34	3,20	4,61

$n=3$



I_1/I_2	L_1/L_2 0,2	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	2,0	3,0
0,1	0,90	2,30	3,01	3,72	4,45	5,18	7,50	11,17
0,2	0,82	1,69	2,19	2,72	3,24	3,72	5,29	7,95
0,3	0,80	1,45	1,85	2,27	2,69	3,12	4,37	6,53
0,4	0,79	1,32	1,67	2,02	2,38	2,75	3,84	5,66
0,5	0,79	1,24	1,54	1,85	2,18	2,50	3,47	5,09
0,6	0,79	1,18	1,46	1,74	2,04	2,32	3,20	4,70
0,7	0,79	1,14	1,39	1,65	1,91	2,19	3,01	4,39
0,8	0,78	1,11	1,34	1,59	1,83	2,09	2,84	4,15
0,9	0,78	1,09	1,30	1,53	1,76	2,00	2,72	3,94
1,0	0,78	1,08	1,27	1,48	1,70	1,93	2,60	3,78

$n=5$



I_1/I_2	L_1/L_2 0,2	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	2,0	3,0
0,1	0,79	1,78	2,34	2,91	3,47	4,02	5,78	8,52
0,2	0,76	1,33	1,72	2,10	2,50	2,91	4,10	6,06
0,3	0,75	1,14	1,45	1,76	2,09	2,42	3,37	4,98
0,4	0,75	1,05	1,31	1,58	1,85	2,14	2,97	4,35
0,5	0,75	0,99	1,22	1,45	1,69	1,95	2,69	3,94
0,6	0,75	0,97	1,16	1,36	1,59	1,80	2,49	3,62
0,7	0,75	0,95	1,11	1,30	1,50	1,70	2,34	3,38
0,8	0,75	0,93	1,08	1,25	1,43	1,63	2,22	3,20
0,9	0,75	0,92	1,05	1,21	1,38	1,57	2,12	3,05
1,0	0,75	0,91	1,03	1,18	1,34	1,51	2,04	2,91

:356 Sträva med inre led

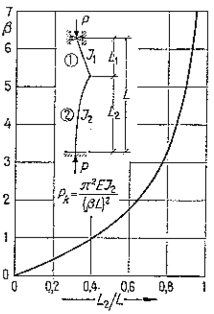


Fig :356a. [36], [44]. Diagrammet anger knäckningslasten P_k vid knäckning av strävdelen ②. Parallellt måste strävdelens ① knäckningslast kontrolleras, för vilken gäller $\beta=(L_1/L)\sqrt{I_2/I_1}$

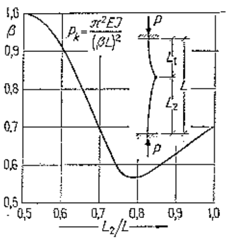


Fig :356b. [46]

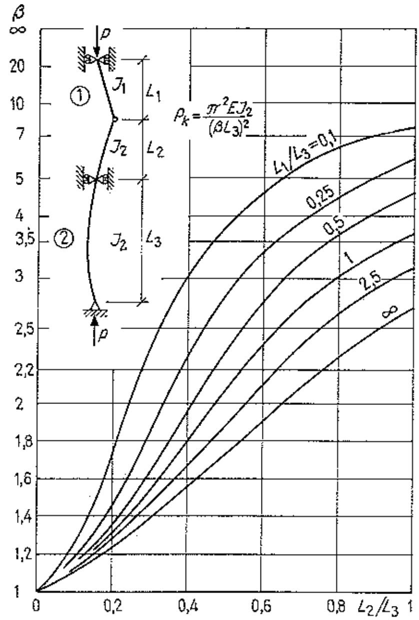


Fig :356c. [36], [44]. Diagrammet anger knäckningslasten P_k vid knäckning av strävdelen ②. Parallellt måste strävdelens ① knäckningslast kontrolleras, för vilken gäller $\beta=(L_1/L_3)\sqrt{I_2/I_1}$

:357 Kontinuerlig sträva

a Konstant sektion

$P_k=\pi^2EI/(\beta L_2)^2$	L_1/L_2 0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
a	0,70	0,72	0,74	0,77	0,79	0,81	0,84	0,88	0,91	0,95	1
b	0,50	0,52	0,54	0,56	0,58	0,61	0,65	0,70	0,75	0,81	0,88
c	0,70	0,72	0,73	0,75	0,77	0,79	0,80	0,82	0,84	0,86	0,88
d	0,50	0,51	0,53	0,54	0,55	0,57	0,60	0,62	0,64	0,67	0,70
e	0,50	0,53	0,56	0,60	0,65	0,70	0,75	0,81	0,87	0,93	1
f	0,70	0,73	0,76	0,79	0,82	0,85	0,88	0,91	0,94	0,97	1
g	0,70	0,72	0,74	0,76	0,78	0,80	0,83	0,87	0,91	0,95	1
h	0,88	0,89	0,90	0,91	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,97	1
i	0,50	0,51	0,53	0,55	0,57	0,60	0,63	0,70	0,78	0,86	0,94
j	0,88	0,89	0,91	0,92	0,92	0,93	0,93	0,93	0,94	0,94	0,94
k	0,70	0,72	0,74	0,77	0,79	0,81	0,84	0,88	0,91	0,95	1
l	0,70	0,72	0,74	0,77	0,79	0,81	0,84	0,88	0,91	0,95	1
m	0,70	0,72	0,74	0,77	0,79	0,81	0,84	0,88	0,91	0,95	1
n	0,88	0,89	0,90	0,91	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,97	1

Fig :357a–n. [32]

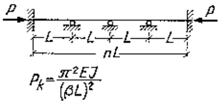
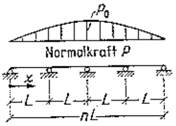


Fig :357 o. [47]

Antal fack n	2	3	4	6	8	10	12	20
β	0,699	0,816	0,876	0,939	0,964	0,976	0,983	0,994



$p = \frac{4P_0}{(nL)^2} x(nL-x)$

$P_{0k} = \frac{\pi^2 EJ}{(\beta L)^2}$

Fig :357 p. [47], [48]

Antal fack n	1	2	3	4	6	8	10
β	0,69	0,81	0,84	0,87	0,90	0,92	0,93

b Språngvis föränderlig sektion och normalkraft

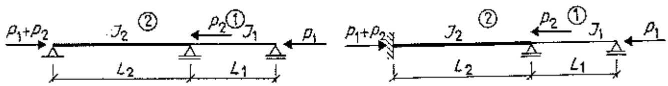
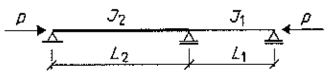


Fig :357 q. [45], tabellerna fortsätter på nästa sida

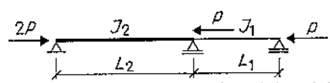
$(P_1 + P_2)_k = \pi^2 EI_2/(\beta L_2)^2 \quad n = (P_1 + P_2)/P_1$

$n = 1$



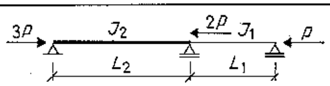
I_1/I_2 \ L_1/L_2	0,2	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	2,0	3,0
0,1	0,93	1,43	1,85	2,29	2,72	3,15	4,53	6,70
0,2	0,86	1,13	1,39	1,69	1,99	2,29	3,24	4,78
0,3	0,82	1,03	1,22	1,44	1,68	1,92	2,69	3,95
0,4	0,80	0,98	1,12	1,29	1,50	1,71	2,36	3,46
0,5	0,78	0,94	1,06	1,21	1,38	1,56	2,14	3,12
0,6	0,77	0,91	1,01	1,14	1,30	1,46	1,99	2,87
0,7	0,76	0,89	0,98	1,09	1,24	1,38	1,87	2,68
0,8	0,75	0,87	0,95	1,05	1,19	1,33	1,78	2,55
0,9	0,75	0,85	0,93	1,03	1,14	1,27	1,69	2,43
1,0	0,74	0,84	0,91	1,00	1,11	1,22	1,63	2,31

$n = 2$



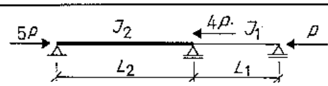
I_1/I_2 \ L_1/L_2	0,2	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	2,0	3,0
0,1	0,91	1,09	1,33	1,62	1,94	2,25	3,20	4,78
0,2	0,85	1,00	1,03	1,23	1,43	1,64	2,30	3,37
0,3	0,82	0,94	1,00	1,10	1,24	1,39	1,91	2,80
0,4	0,79	0,92	0,97	1,04	1,13	1,26	1,69	2,45
0,5	0,78	0,89	0,94	1,00	1,08	1,17	1,55	2,21
0,6	0,77	0,87	0,92	0,96	1,04	1,11	1,44	2,05
0,7	0,76	0,85	0,90	0,94	1,01	1,07	1,36	1,92
0,8	0,75	0,84	0,88	0,93	0,98	1,04	1,30	1,81
0,9	0,75	0,83	0,87	0,91	0,96	1,02	1,25	1,73
1,0	0,74	0,82	0,86	0,89	0,94	0,99	1,21	1,65

$n = 3$



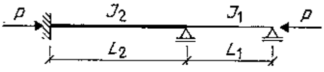
I_1/I_2 \ L_1/L_2	0,2	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	2,0	3,0
0,1	0,91	1,02	1,13	1,35	1,59	1,84	2,63	3,90
0,2	0,85	0,96	1,01	1,08	1,21	1,35	1,85	2,78
0,3	0,81	0,93	0,96	1,02	1,08	1,18	1,57	2,30
0,4	0,79	0,90	0,94	0,98	1,03	1,10	1,40	2,02
0,5	0,78	0,88	0,92	0,95	1,00	1,05	1,29	1,83
0,6	0,77	0,86	0,90	0,93	0,97	1,02	1,22	1,69
0,7	0,76	0,84	0,88	0,92	0,95	0,99	1,16	1,59
0,8	0,75	0,83	0,87	0,90	0,93	0,97	1,12	1,50
0,9	0,75	0,82	0,86	0,89	0,92	0,95	1,09	1,44
1,0	0,74	0,81	0,85	0,87	0,91	0,94	1,06	1,38

$n = 5$



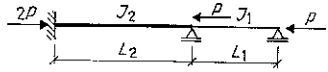
I_1/I_2 \ L_1/L_2	0,2	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	2,0	3,0
0,1	0,90	1,00	1,02	1,10	1,25	1,43	2,02	3,00
0,2	0,85	0,94	0,97	1,01	1,04	1,11	1,47	2,16
0,3	0,82	0,91	0,94	0,97	0,99	1,03	1,25	1,79
0,4	0,79	0,89	0,92	0,95	0,97	0,99	1,14	1,57
0,5	0,78	0,87	0,90	0,93	0,95	0,98	1,08	1,43
0,6	0,77	0,85	0,88	0,91	0,93	0,96	1,05	1,33
0,7	0,76	0,84	0,87	0,89	0,92	0,94	1,02	1,27
0,8	0,75	0,83	0,86	0,88	0,90	0,93	1,00	1,21
0,9	0,75	0,82	0,85	0,87	0,89	0,92	0,98	1,17
1,0	0,74	0,81	0,84	0,86	0,88	0,90	0,97	1,13

$n=1$



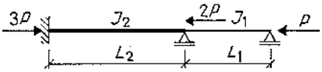
I_1/I_2 \ L_1/L_2	0,2	0,5	0,8	1,0	1,2	1,4	2,0	3,0
0,1	0,86	1,39	1,83	2,27	2,72	3,16	4,45	6,70
0,2	0,63	1,04	1,34	1,65	1,96	2,27	3,20	4,78
0,3	0,60	0,90	1,13	1,39	1,64	1,88	2,66	3,90
0,4	0,59	0,82	1,02	1,23	1,44	1,66	2,32	3,42
0,5	0,57	0,77	0,94	1,12	1,32	1,51	2,10	3,08
0,6	0,56	0,74	0,88	1,05	1,22	1,40	1,94	2,84
0,7	0,55	0,71	0,84	0,99	1,16	1,32	1,81	2,66
0,8	0,54	0,69	0,81	0,95	1,10	1,25	1,72	2,50
0,9	0,54	0,67	0,78	0,91	1,05	1,19	1,64	2,35
1,0	0,53	0,65	0,76	0,88	1,01	1,15	1,57	2,25

$n=2$



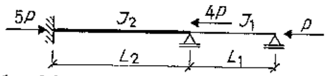
I_1/I_2 \ L_1/L_2	0,2	0,5	0,8	1,0	1,2	1,4	2,0	3,0
0,1	0,66	1,00	1,30	1,61	1,91	2,23	3,16	4,70
0,2	0,62	0,79	0,96	1,17	1,39	1,51	2,27	3,37
0,3	0,59	0,72	0,84	1,00	1,17	1,34	1,88	2,78
0,4	0,57	0,69	0,78	0,90	1,04	1,19	1,65	2,43
0,5	0,56	0,67	0,74	0,84	0,96	1,09	1,49	2,19
0,6	0,55	0,65	0,72	0,79	0,90	1,01	1,38	2,02
0,7	0,55	0,63	0,70	0,76	0,86	0,96	1,29	1,88
0,8	0,54	0,62	0,68	0,74	0,82	0,92	1,23	1,78
0,9	0,54	0,61	0,66	0,72	0,79	0,88	1,17	1,68
1,0	0,53	0,60	0,65	0,71	0,77	0,85	1,12	1,61

$n=3$



I_1/I_2 \ L_1/L_2	0,2	0,5	0,8	1,0	1,2	1,4	2,0	3,0
0,1	0,65	0,84	1,07	1,31	1,57	1,83	2,58	3,84
0,2	0,61	0,72	0,82	0,97	1,14	1,32	1,85	2,75
0,3	0,59	0,69	0,74	0,84	0,96	1,10	1,54	2,27
0,4	0,57	0,66	0,71	0,78	0,87	0,98	1,35	1,99
0,5	0,56	0,64	0,69	[illegible]	0,81	0,91	1,23	1,79
0,6	0,55	0,63	0,67	0,72	0,78	0,85	1,13	1,65
0,7	0,55	0,62	0,65	0,70	0,75	0,82	1,07	1,54
0,8	0,54	0,61	0,64	0,68	0,73	0,79	1,02	1,45
0,9	0,54	0,60	0,63	0,67	0,72	0,77	0,97	1,38
1,0	0,53	0,59	0,62	0,66	0,71	0,75	0,94	1,32

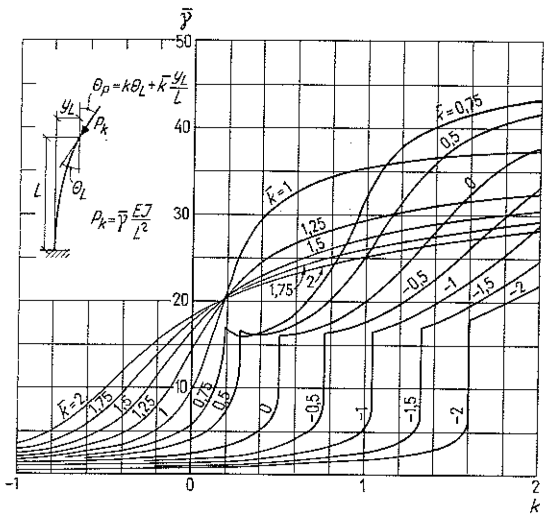
$n=5$



I_1/I_2 \ L_1/L_2	0,2	0,5	0,8	1,0	1,2	1,4	2,0	3,0
0,1	0,65	0,73	0,84	1,02	1,22	1,42	2,00	2,97
0,2	0,61	0,68	0,72	0,79	0,90	1,03	1,44	2,14
0,3	0,59	0,66	0,69	0,73	0,79	0,88	1,19	1,76
0,4	0,57	0,64	0,67	0,70	0,74	0,80	1,06	1,54
0,5	0,56	0,63	0,65	0,68	0,72	0,76	0,96	1,39
0,6	0,55	0,62	0,64	0,67	0,70	0,73	0,90	1,29
0,7	0,55	0,61	0,63	0,66	0,68	0,71	0,86	1,20
0,8	0,54	0,60	0,62	0,65	0,67	0,70	0,83	1,13
0,9	0,54	0,59	0,62	0,64	0,66	0,69	0,80	1,08
1,0	0,53	0,59	0,61	0,63	0,65	0,68	0,78	1,04

:358 Knäckning av sträva vid icke riktningstrogna krafter

För fenomenologisk beskrivning se :32.



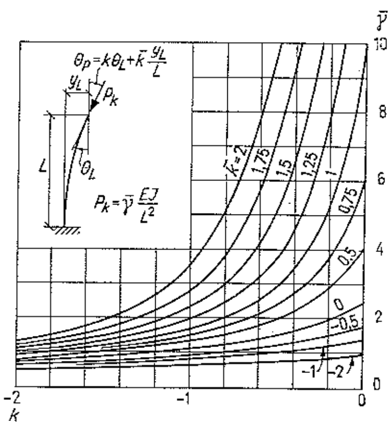


Fig :358 a. [49]

Fig :358 b. [31], [50]

System	Last: Riktningstrogen ändnormalkraft P_k	Tangenttrogen ändnormalkraft P_k	q_k	q_k	q_{0k}	q_{0k}
	$\frac{2.47EI}{L^2}$	$\frac{20,05EI}{L^2}$	$\frac{7,82EI}{L^3}$	$\frac{40,7EI}{L^3}$	$\frac{32,2EI}{L^3}$	$\frac{158,2EI}{L^3}$
	$\frac{9,87EI}{L^2}$		$\frac{18,58EI}{L^3}$	$\frac{18,96EI}{L^3}$	–	$\frac{62,28EI}{L^3}$
	$\frac{20,2EI}{L^2}$		$\frac{52,5EI}{L^3}$	$\frac{57,95EI}{L^3}$	–	$\frac{402,3EI}{L^3}$
	$\frac{39,5EI}{L^2}$		$\frac{74,7EI}{L^3}$	$\frac{81,37EI}{L^3}$	–	$\frac{328,0EI}{L^3}$

:36 Elastiskt understöttad sträva

:361 Allmänt

Knäckning av *elastiskt punktunderstöttad* sträva är praktiskt aktuell vid exempelvis fackverk av den typ, som visas i fig :361 a, vid vilka de dragna diagonalerna (ex 3–4 och 5–6) tjänstgör som elastiska stöd vid de tryckta diagonalernas (ex 1–2) sidoknäckning. Ett likartat exempel utgör det i fig :361 b visade fallet, sidoknäckning av tryckt övre horisontal vid öppen fackverksbro, där den elastiska punktunderstöttningen ges av fackverkslivets vertikaler och diagonaler. Ordinärt är därvid dessa understöttande element så böjvekt utformade att de vid de tryckta elementens utknäckning får icke försumbara utböjningar av samma storleksordning som knäckningsutböjningarna mellan understöttningarna. Primärt bestämmande för den knäckningsfigur, som uppträder vid elastiskt understöttad sträva är förhållandet mellan styvheten för understöttningarna och styvheten för den tryckta strävan. Allmänt gäller därvid att antalet knäckningsvågor ökar med ökad styvhet för understöttningarna, jfr fig :361 c, som schematiskt illustrerar detta för en elastiskt understöttad sträva med fri uppläggning i sina båda ändpunkter.

Med minskat avstånd mellan de elastiska punktunderstöttningarna erhålls som gränsfall knäckning av *kontinuerligt elastiskt understöttad* konstruktion. Praktiskt uppträder detta fenomen renodlat vid exempelvis rotationssymmetrisk knäckning av axiellt tryckt tunnväggig cylinder, varvid de cirkulära ringarna utgör kontinuerlig elastisk understöttning av generatriserna. Med för ordinära praktiska förhållanden tillräckligt god noggrannhet kan också till gruppen kontinuerligt elastiskt understöttad konstruktion hänföras knäckning av påle i lös mark (fig :361 d).

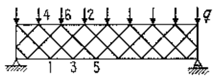


Fig :361 a

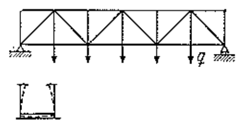


Fig :361 b

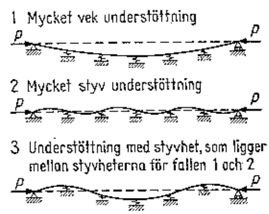


Fig :361 c

Fig :361 d

Vid last, som under deformationerna bibehåller sin riktning oförändrad, är knäckningsfenomenet vid elastiskt understöttad sträva konservativt, icke-gyroskopiskt (jfr :25) varför det korrekt kan studeras med varje statisk eller kinetisk beräkningsmetod. Dock måste i detta sammanhang en viss försiktighet tillrådas vid tillämpning av den i :26 beskrivna successiva approximationsmetoden, Engesser-Vianellos metod, vilken i sådana fall, då det på förhand kan vara svårt att bestämt utsäga något om formen på den elastiskt understöttade strävans knäckningskurva, lätt kan ge till resultat någon av de högre knäckningslasterna i stället för den lägsta.

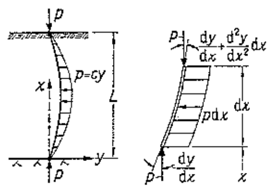


Fig :361e

För att något närmare belysa problemställningen vid en stabilitetskalkyl av elastiskt understöttad konstruktion genomräknas nedan enligt jämviktsmetod det i fig :361e visade fallet, knäckning av tvåsidigt fritt upplagd sträva, efter hela sin längd kontinuerligt elastiskt understöttad. Den elastiska understöttningen antas vara sådan att i varje punkt direkt proportionalitet råder mellan den fördelade reaktionen p från understöttningen och strävans knäckningsutböjning y, dvs

$$p = cy \tag{1}$$

I utböjt läge verkar ⊥ strävan per längdenhet en fördelad belastning

$$q_x = -P(\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2) - p = -P(\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2) - cy \tag{2}$$

vilken insatt i uttrycket för elastiska linjens ekvation

$$\mathrm{d}^4y/\mathrm{d}x^4 = q_x/EI \tag{3}$$

ger problemets differentialekvation under formen

$$y^{\mathrm{IV}} + k^2y'' + \alpha^4 y = 0 \tag{4}$$

varvid införts de förkortade beteckningarna

$$k^2 = P/EI, \alpha^4 = c/EI \tag{5}$$

Ekv (4) har lösningen

$$y = A\cos\lambda_1 x + B\sin\lambda_1 x + C\cos\lambda_2 x + D\sin\lambda_2 x \tag{6}$$

$$\text{med } \lambda_1 = \sqrt{k^2/2 + \sqrt{k^4/4 - \alpha^4}} \qquad \lambda_2 = \sqrt{k^2/2 - \sqrt{k^4/4 - \alpha^4}} \tag{7}$$

För bestämning av de 4 integrationskonstanterna A, B, C och D gäller gränsvillkoren:

1 $y = 0$ för $x = 0$ 2 $M_x = 0$ eller $y'' = 0$ för $x = 0$

3 $y = 0$ för $x = L$ 4 $y'' = 0$ för $x = L$

De två första gränsvillkoren ger $A = C = 0$, de två sista

$$\left.\begin{aligned} &B\sin\lambda_1 L + D\sin\lambda_2 L = 0 \\ &B\lambda_1^2\sin\lambda_1 L + D\lambda_2^2\sin\lambda_2 L = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

För ett utböjt jämviktsläge ($y \neq 0$) fordras att B och $D \neq 0$, vilket i sin tur fordrar att systemdeterminanten i ekv (8) blir $= 0$. Härav följer knäckningsvillkoret

$$(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)\sin\lambda_1 L \sin\lambda_2 L = 0 \tag{9}$$

med lösningarna [$\lambda_1 \neq \lambda_2$ enligt ekv (7)]

$$\lambda_1 L = n\pi, \lambda_2 L = n\pi \ (n = 1, 2, 3 \ldots) \tag{10}$$

vilka insatta i ekv (7) ger k, varpå ur ekv (5) erhålls knäckningslasten

$$P_k = n^2(\pi^2 EI/L^2) + cL^2/n^2\pi^2 = P_{ke} + P_{ku} \tag{11}$$

Knäckningslasten för den elastiskt understöttade strävan kan följaktligen anses sammansatt av en del P_{ke}, som betecknar den icke understöttade strävans kritiska last vid knäckning i n halvvågor, och en del P_{ku}, som härrör från den elastiska understöttningen. Med ökat antal halvvågor n växer delen P_{ke}, under det att delen P_{ku} avtar. Knäckningslastens P_k minimivärde inträffar för $dP_k/dn=0$ och beräknas till

$$P_{k\,\min}=2\sqrt{cEI} \tag{12}$$

$$\text{för } n\pi/L=\sqrt[4]{c/EI} \tag{13}$$

Av ekv (12) framgår bl a det intressanta förhållandet att $P_{k\,\min}$ är oberoende av pållängden L.

I fig :361f har för strävan i fig :361e P_k enligt ekv (11) redovisats under formen

$$P_k=\gamma\pi^2EI/L^2 \tag{14}$$

som funktion av storheten $\sqrt{cL^4/EI}$. Figuren visar att den lägsta knäckningslasten har en deformationsfigur med en halvvåg ($n=1$) för $\sqrt{cL^4/EI}<$ 19,7, två halvvågor ($n=2$) inom området $19{,}7<\sqrt{cL^4/EI}<59{,}2$, tre halvvågor ($n=3$) inom området $59{,}2<\sqrt{cL^4/EI}<118{,}4$ etc. Med växande förhållande mellan den elastiska understöttningens styvhet c och strävans böjstyvhet EI konvergerar P_k mot det av ekv (12) bestämda $P_{k\,\min}$.

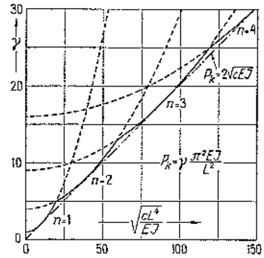


Fig :361f

:362 Elastiskt punktunderstöttad sträva

I de i fig :362a–j redovisade belastningsfallen karaktäriseras styvheten för den enskilda elastiska punktunderstöttningen genom en »fjäderkonstant» C = den koncentrerade kraft, som angripande i punktunderstöttningen ger denna en förskjutning $\delta=1$. Variationsområdet för C är $0-\infty$, varvid speciellt $C=\infty$ betecknar ett oeftergivligt upplag.

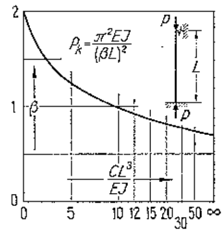


Fig :362a. [36], [37]

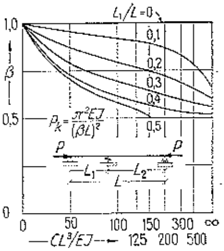


Fig :362b

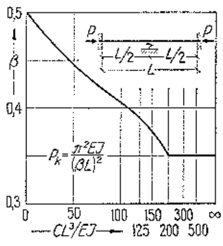


Fig :362c. [36]

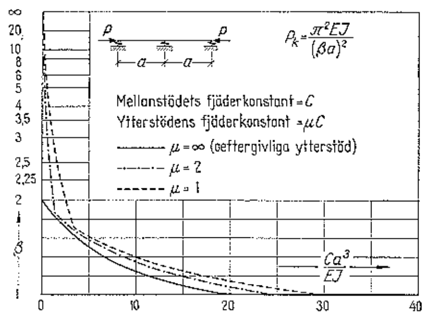


Fig :362d. [51], [52]

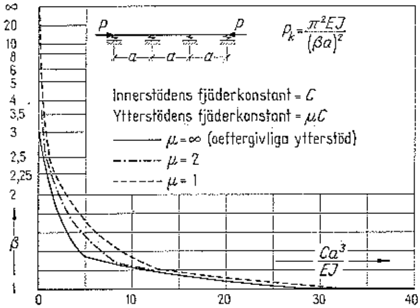


Fig :362e. [51]

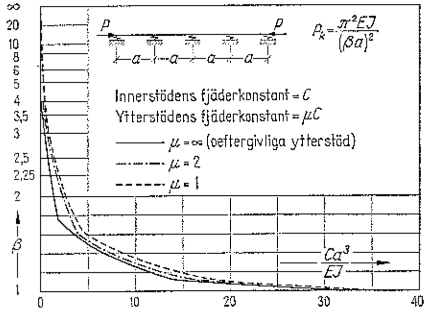


Fig :362f. [51]–[53]

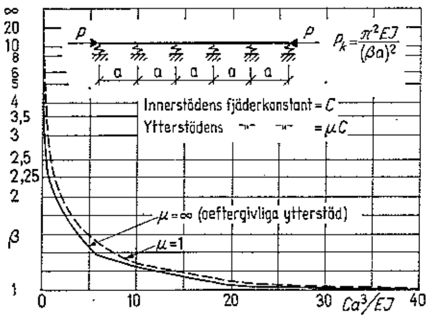


Fig :362g. [51]

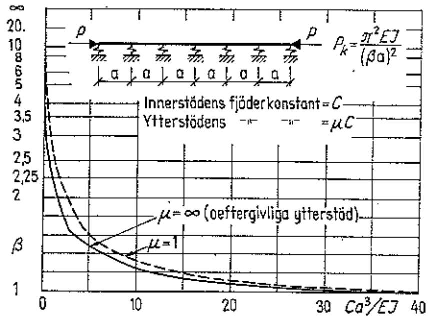


Fig :362h. [51], [53]

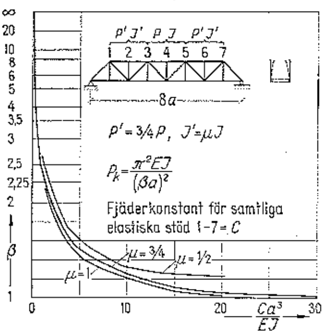


Fig :362i. Öppen fackverksbro i 8 fack. Sidoknäckningslast för tryckt övre horisontal vid jämnt fördelad last över hela bron [52]

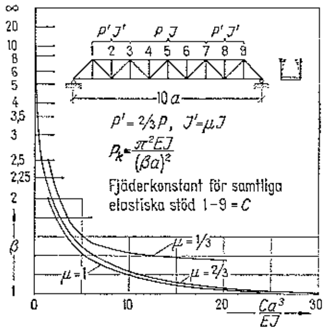


Fig :362j. Öppen fackverksbro i 10 fack. Sidoknäckningslast för tryckt övre horisontal vid jämnt fördelad last över hela bron [52]

:363 Kontinuerligt elastiskt understöttad sträva

De i fig :363a–d redovisade belastningsfallen förutsätter en kontinuerlig elastisk understöttning, som karaktäriseras av direkt proportionalitet i varje punkt mellan fördelad reaktion p från understöttningen och den tryckta strävans knäckningsutböjning y, eller

Jfr 162:621

$$p = cy$$

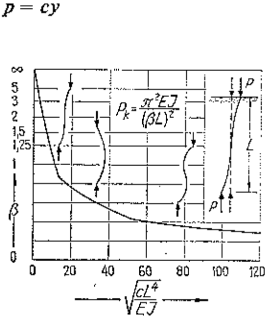


Fig :363a. [37], [54]

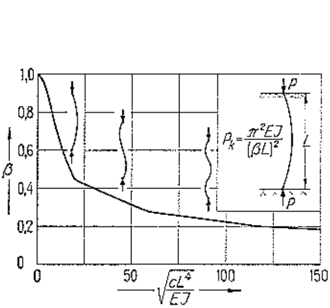


Fig :363b. [37], [54]. Jfr även fig :361e och f

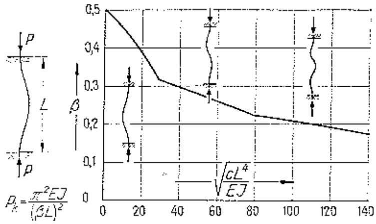


Fig :363c. [37], [54]

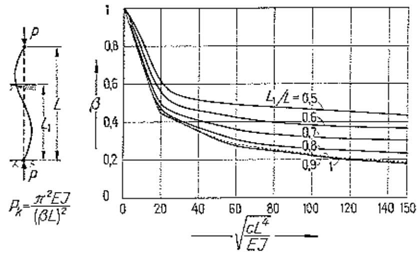


Fig :363d. [55], [56], [58]

För knäckningsberäkning av kontinuerlig elastiskt understöttad sträva med föränderlig sektion och normalkraft hänvisas till bl a [33] och [37]. Knäckning av pålgrupp i dess helhet, såväl böjningsknäckning som vridningsknäckning, finns behandlad i [57].

:37 Knäckning av sammansatt sträva

:371 Allmänt

Jfr kap 353

De ovan i :31–36 angivna knäckningslasterna för *massiva strävor* är härledda under förutsättning av att knäckningsutböjningen y bestäms enbart av böjmomentet M_x utan att påverkas av samtidigt uppträdande tvärkraft T_x. Denna förutsättning är uppfylld med god approximation, vad gäller strävor av massiv sektion. Vid *sammansatta strävor* (fackverkssträvor, ramverkssträvor) däremot blir som regel inverkan av tvärkraften av en sådan storleksordning att den inte kan försummas vid en knäckningsdimensionering.

Med hänsyn tagen till inverkan av tvärkraften T_x lyder elastiska linjens ekvation (jfr ekv :21 (1))

$$d^2y/dx^2 = -M_x/EI_x + d(\varkappa T_x/GA_x)/dx \tag{1}$$

där G = skjuvmodulen = $E/2(1+\nu)$, ν = kontraktionstalet och $\varkappa$ = en av sektionsformen och kontraktionstalet avhängig, dimensionslös koefficient, som för massiva sektioner varierar mellan 1 och 2 [59].

Vid deformationsberäkning av sammansatt sträva utnyttjas vid studium av tvärkraftens effekt lämpligast det förhållandet att termen $\varkappa/GA_x$ motsvarar skjuvvinkeln γ_x vid $T_x = 1$ (jfr [1], [2], [18], [48] m fl).

En beräkning ur ekv (1) av knäckningslasten P_{ks} med hänsyn tagen till tvärkraftens effekt resulterar för fallet längs strävan konstant sektion och normalkraft i sambandet

$$P_{ks} = P_k/(1 + P_k\varkappa/GA) = P_k/(1 + \gamma P_k) \tag{2}$$

i vilket P_k betecknar den utan hänsyn tagen till tvärkraftens inverkan bestämda knäckningslasten, jfr :31 och :35. Alternativt kan P_{ks} redovisas under formen

$$P_{ks} = \pi^2 EI/(\beta_s L)^2 \tag{3}$$

varvid ekv :35 (1)–(2) och ekv :371 (2) för β_s ger uttrycket

$$\beta_s = \beta\sqrt{1 + 2\pi^2(1+\nu)\varkappa/\lambda^2} = \beta\sqrt{1 + \gamma P_k} \tag{4}$$

Med $\lambda = \beta L/i$ förstås därvid det mot 2. Euler-knäckningsfallet svarande slankhetstalet för den aktuella strävan, beräknat utan beaktande av tvärkraftens effekt.

Ur ekv (3) och (4) kan det med hänsyn till tvärkraftens inverkan modifierade slankhetstalet

$$\lambda_s = \beta_s L/i \qquad (5)$$

bestämmas, varpå den tillhörande tillåtna knäckningsspänningen $\sigma_{k\text{till}}$ direkt kan hämtas ur exempelvis gällande bestämmelsers knäckningskurvor eller, för specialfallet konstruktioner av ideal-elastoplastiskt material (t ex stål), ur knäckningskurvorna i fig :34c.

Som illustration till storleken av tvärkraftens effekt på knäckningslasten vid *massiv sträva* har i nedanstående tabell $\lambda_s/\lambda = \beta_s/\beta$ och P_{ks}/P_k, beräknade ur ekv (4) och fig :34c, redovisats för fallet stålsträva med $\nu = 0{,}3$ och med $\varkappa$ som övre extremvärde satt $= 2$.

λ	λ_s/λ	P_{ks}/P_k $\sigma_s=200$	$\sigma_s=300$	$\sigma_s=400$ MN/m²
10	1,2303	0,998	0,998	0,997
20	1,0622	0,998	0,997	0,997
30	1,0281	0,997	0,997	0,996
40	1,0159	0,997	0,996	0,995
50	1,0102	0,997	0,995	0,994
100	1,0026	0,997	0,996	0,996
150	1,0011	0,998	0,998	0,998
200	1,0006	0,999	0,999	0,999

Tabellen verifierar det ovan gjorda påståendet att tvärkraftens inverkan med god approximation kan försummas vid en knäckningsdimensionering av massiv sträva.

Vid fackverkssträvor och i ännu högre grad vid ramverkssträvor däremot måste vid knäckningsberäkningar ordinärt hänsyn tas till tvärkraftseffekten. För att underlätta sådana beräkningars genomförande har i :372 för några vanligare utförandeformer sammanställts uttryck för den i ekv (2) och (4) ingående skjuvvinkeln γ.

Den beskrivna beräkningstekniken är strängt korrekt, vad gäller sammansatta strävor, endast vid oändligt stort antal fack, men ger dock för ordinära praktiska förhållanden tillräckligt god noggrannhet vid strävor med 5 fack eller flera [48]. Vid mindre antal fack får en stabilitetskalkyl i stället genomföras enligt exempelvis de riktlinjer för ramknäckningsberäkning som anges i :5.

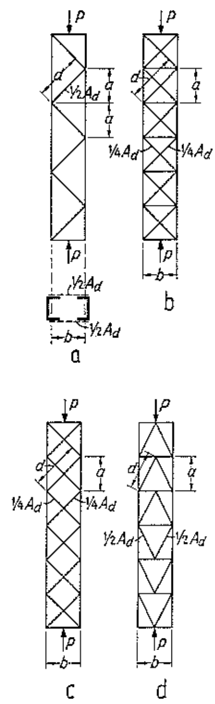


Fig :372a–d. [1], [2], [18], [48] m fl

:372 Skjuvvinkeln γ vid fackverks- och ramverkssträvor med efter sin längd konstant sektion och normalkraft

För samtliga i fig :372a–d visade fackverksutföranden gäller formeln

$$\gamma = d^3/EA_d ab^2 \qquad (1)$$

Detta samband förutsätter dels att de olika strävdelarna i knutpunkterna är *styvt förbundna* med varandra, vilket med god approximation är fallet vid svetsade och limmade förbindningar, dels att anslutningarna mellan diagonaler, transversaler och vertikaler är *noggrant centrerade* (fig :372e).

Vid nitade, bultade eller spikade förbindningar tillkommer en för knäckningslasten inte försumbar *effekt från deformationerna* i dessa, vilket överför uttrycket för γ i det modifierade sambandet [3], [60], [61]

$$\gamma = (d^2/ab^2)(d/EA_d + 2/nk_d) \qquad (2)$$

där n = det antal nit-, bult- eller spikskär, som svarar mot varje infästning av en diagonal med sektionen A_d i en vertikal
k_1 = den enskilda nitens, bultens eller spikens förskjutningsmodul, refererad till kraftriktningen, dvs i aktuellt fall diagonalriktningen

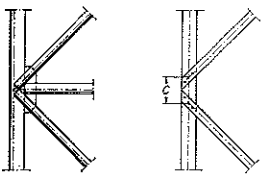


Fig :372e, t v. Centrerad knutpunktsutformning

Fig :372f, t h. Excentrisk diagonalanslutning

Vid *excentrisk diagonalanslutning* enligt fig :372f, ett förenklat förfarande, som ibland kommer till användning vid spikade fackverkssträvor av trä, tillkommer ytterligare en term i uttrycket för γ, vilken härrör från de extramoment, som den excentriska anslutningen framkallar i vertikalerna. Resulterande uttryck för γ blir då [61]

$$\gamma = (d^2/ab^2)[d/EA_d + 2/nk_d + (ab^3c^2/6EI_v d^2)(1-c/2a)^3] \tag{3}$$

med I_v = yttröghetsmomentet för en vertikal med avseende på dess tyngdpunktsaxel.

För fackverkssträva uppbyggd enligt fig :372g gäller vid *centrerade* och *styvt utbildade knutpunkter* [1], [2], [18], [48] m fl

$$\gamma = (1/Eab^2)(d^3/A_d + b^3/A_h) \tag{4}$$

Vid centrerade knutpunkter med icke försumbara *deformationer i infästningarna* — nit-, bult- och spikförband — gäller [61]

$$\gamma = (1/ab^2)[d^2(d/EA_d + 2/n_d k_d) + b^2(b/EA_h + 2/n_h k_h)] \tag{5}$$

där n_d, n_h = det antal nit-, bult- eller spikskär, som svarar mot varje infästning av en diagonal med sektion A_d resp horisontal med sektion A_h i en vertikal
k_d, k_h = den enskilda nitens, bultens eller spikens förskjutningsmodul, refererad till belastning i diagonal- resp horisontalriktningen

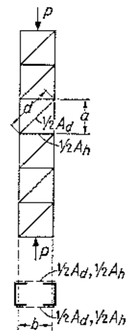


Fig :372g

För den i fig :372h visade ramverksssträvan gäller för γ vid *styva infästningar* av horisontalerna i vertikalerna uttrycket [1], [62]

$$\gamma = a'b/12EI_h + a'^2/24EI_v(1-\alpha) + \varkappa a'/GA_h b \tag{6}$$

i vilket $\varkappa$ = den i ekv :371 (1) införda tvärsnittskonstanten (= 1,2 för horisontaler av rektangulär sektion) och

$$\alpha = P_{ks}/2\pi^2 EI_v/a'^2 \tag{7}$$

Därvid kan för de flesta praktiska fall storheten α, som härrör från lokal knäckning av vertikalerna mellan horisontalerna, sättas = 0. Undantag härifrån utgör ramverkssträvor med i förhållande till horisontalerna böjveka vertikaler.

Vid horisontaler, som fixeras vid vertikalerna genom nit-, bult- eller spikförband, tillkommer deformationseffekten i dessa förband, vilken för de fall att varje infästning har 2 eller 3 nitar, bultar eller spikar, modifierar γ-uttrycket till [3], [60]

$$\gamma = a'b/12EI_h + a'^2/24EI_v(1-\alpha) + \varkappa a'/GA_h b + a'/e^2nk \tag{8}$$

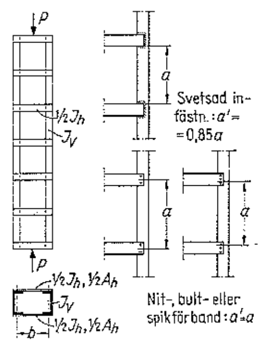


Fig :372h

varvid n = det antal nit-, bult- eller spikskär, som svarar mot varje infästning av horisontal med sektion A_h i en vertikal
k = den enskilda nitens, bultens eller spikens förskjutningsmodul
e = avståndet mellan de yttersta nitarna, bultarna eller spikarna i den enskilda knutpunkten

Förfarande för noggrann, systematiserad dimensionering av ramverkssträva över datorberäkning anges i [63].

:373 Närmeformel för λ_s

Vid en *överslagsdimensionering* av tryckta fackverks- och ramverkssträvor kan med fördel följande av Engesser [27], [31] uppställda närmeformel för den sammansatta strävans slankhetstal λ_s användas

$$\lambda_s = \sqrt{\lambda^2 + \lambda_{v1}^2\, m/2} \qquad (1)$$

där λ = slankhetstalet för den sammansatta strävan, beräknat under förutsättning av fullständig samverkan mellan de enskilda vertikalerna

λ_{v1} = slankhetstalet kring axel 1—1 för den enskilda vertikalen, räknad som fritt upplagd mellan två närbelägna knutpunkter

m = en sektionskoefficient med värden enligt fig :373

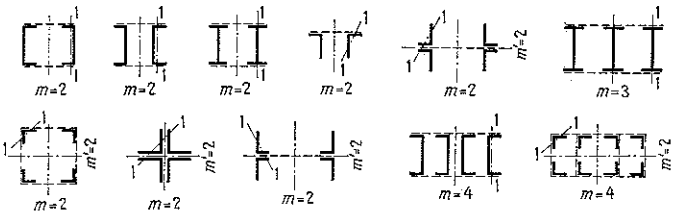


Fig :373

Närmeformeln gäller under förutsättning av centrerade knutpunkter med försumbara deformationer i infästningarna. För ramverkssträvor tillkommer dessutom en förutsättning om försumbara skjuvkraftsdeformationer i horisontalerna. För specialfallet ramverksssträva med svetsade eller nitade förbindningar anges i [3] vidareutvecklade närmeformler, som beaktar såväl deformationerna i infästningarna som horisontalernas skjuvdeformationer.

:374 Dimensionering av den sammansatta strävans tvärförband

Vid centriskt tryckt, initiellt rak sträva blir tvärförbanden såväl vid ramverkssträva (fig :372h) som vid statiskt bestämd fackverkssträva (fig :372a, c, d och g) obelastade så länge tryckkraften är mindre än knäckningslasten. Vid fackverkssträva, som är statiskt obestämt utformad (fig :372b), får tvärförbanden däremot även vid det ideella fallet centriskt belastad, rak konstruktion för en dimensionering ordinärt icke försumbara krafter.

Då knäckningslasten uppnås uppkommer genom den tillhörande knäckningsutböjningen en tvärkraft T i strävan. Häremot svarar i *fackverksssträvors tvärförband* stångkrafter, som lätt kan beräknas ur jämviktsekvationer — exempelvis erhålls i varje diagonal vid sträva enligt fig :372g stångkraften

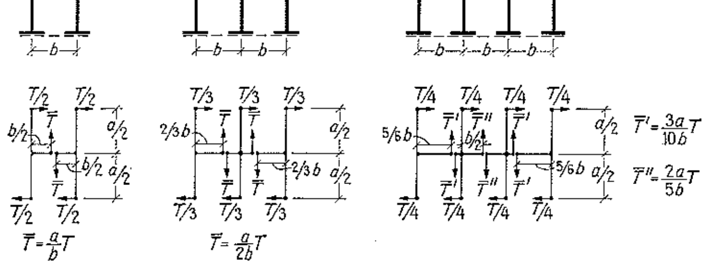


Fig :374a

$D = Td/2b$ och i varje horisontal stångkraften $H = {}^1/_2 T$. I *ramverksssträvor* ger tvärkraften T upphov till böjmoment såväl i tvärförbanden som i vertikalerna, jfr härför fig :374a [27].

En konsekvent *bestämning av dimensionerande tvärkraft* T kan genomföras enligt den av Engesser [21], [31], [64] föreslagna jämnstarkhetsprincipen, vilken innebär att för den sammansatta strävan i knäckningsutböjt läge sträckgränsen σ_s samtidigt uppnås i tvärförbandens och vertikalernas mest ansträngda punkter. För en mot 2. Euler-knäckningsfallet svarande, tvåsidigt fritt upplagd sträva med sinusformad knäckningsutböjning, fig :374b, ger en beräkning enligt Engessers jämnstarkhetsprincip för den maximala tvärkraften T_{max} sambandet [1], [2], [18], [48]

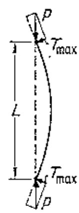


Fig :374b

$$T_{max} = KA\sigma_s;\ K = \pi(1 - \sigma_{ks}/\sigma_s)/\lambda_s \tag{1}$$

där A = den sammanlagda tvärsnittsytan för strävans samtliga vertikaler, λ_s = den sammansatta strävans slankhetstal, bestämt ur ekv :371 (4) och (5), samt σ_{ks} = den till λ_s hörande knäckningsspänningen.

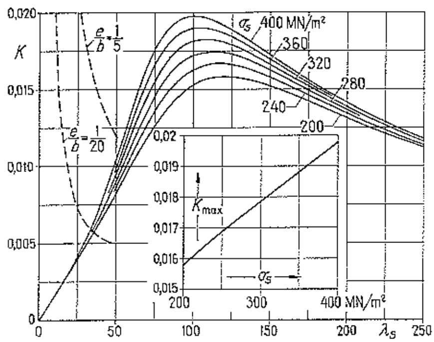


Fig :374c ($g = 10$ m/s²)

Väljs för fallet stålsträva knäckningsspänningen σ_{ks} enligt diagrammet i fig :34c, vilket innebär ett accepterande av en initialkrokighet enligt Dutheil, erhålls ur ekv (1) ovan för koefficienten K de i diagrammet i fig :374c redovisade värdena. I diagrammet har också genom streckmarkerade kurvor redovisats de K-värden [18], som svarar mot T_{max} vid en antagen initialexcentricitet enligt fig :374d.

Fig :374d

Med hänsyn till i praktiken sannolik förekomst av såväl initialkrokighet enligt fig :374b som initialexcentricitet enligt fig :374d rekommenderas i [18] användning av ett av λ_s oberoende K-värde = K_{max}, vilket för σ_s varierande mellan 200 och 400 MN/m² finns redovisat i ett deldiagram i fig :374c. Vid känt K_{max} erhålls för tvärförbanden dimensionerande tvärkraft T_{dim} ur ekvationen

$$T_{dim} = K_{max} A \sigma_{till} \tag{2}$$

med σ_{till} = den mot $\lambda_s = 0$ svarande tillåtna spänningen.

:375 Beräkningsexempel

Genomför en knäckningsdimensionering av den i fig :375 visade, tvåsidigt fritt upplagda fackverksströvan av material stål 1311 med $\sigma_s = 220$ MN/m², $\sigma_{till} = 147$ MN/m², dvs $s = \sigma_s/\sigma_{till} = 1{,}5$ ($g = 10$ m/s²). Samtliga förbindningar antas svetsade.

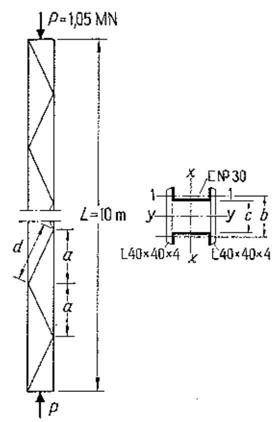


Fig :375

Knäckning kring x-axeln:

För knäckning kring x-axeln gäller teorin för massiv sträva. Väljs på försök vertikaler av UNP 300, erhålls (jfr exemplet i :34)

$I_x = 16\,060 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^4$, $A = 117{,}6 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$, $i_x = \sqrt{I_x/A} = 11{,}69 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$,

$\lambda_x = L/i_x = 85{,}5$

$\sigma_k = 132{,}5\ \text{MN/m}^2$ (fig :34c)

$\sigma_{k\text{till}} = \sigma_k/s = 88{,}3\ \text{MN/m}^2$

$P_{k\text{till}} = \sigma_{k\text{till}} A = 1{,}04\ \text{MN} \approx P_{\text{aktuell}}$

Knäckning kring y-axeln:

Först genomförs en överslagsdimensionering enligt Engessers närmeformel, ekv :373 (1). Väljs därvid på försök $a = 0{,}625$ m, $c = 0{,}25$ m, erhålls ($g = 10\ \text{m/s}^2$)

$I_y = 28\,160 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^4$, $A = 117{,}6 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$, $i_y = 15{,}47 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$, $\lambda_y = L/i_y = 64{,}6$

$I_{v1} = 495 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^4$, $A_v = 58{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$, $i_{v1} = 2{,}90 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$, $\lambda_{v1} = 2a/i_{v1} = 43{,}1$

$\lambda_{sy} = \sqrt{\lambda_y^2 + \lambda_{v1}^2} = 77{,}7\ (m = 2)$

$\sigma_k = 146\ \text{MN/m}^2, \sigma_{k\text{till}} = 97{,}3\ \text{MN/m}^2, P_{k\text{till}} = 1{,}14\ \text{MN} > P_{\text{aktuell}} = 1{,}05\ \text{MN}$

För den häremot svarande för tvärförbanden dimensionerande tvärkraften

T_{dim} ger ekv :374 (2) och fig :374c

$K_{\max} = 0{,}0162$, $T_{\text{dim}} = K_{\max} A \sigma_{\text{till}} = 0{,}028\ \text{MN}$

med en tillhörande maximal stångkraft per diagonal

$D = (d/2b)\, T_{\text{dim}} = 0{,}032\ \text{MN}\ (b = 0{,}304\ \text{m},\ d = 0{,}695\ \text{m})$

vilken vid på försök vald sektion av L$40 \times 40 \times 4$ ger

$i = 1{,}206 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$, $\lambda = d/i = 57{,}6$, $\sigma_k = 179{,}5\ \text{MN/m}^2$, $\sigma_{k\text{till}} = 119{,}5\ \text{MN/m}^2$

$D_{k\text{till}} = 0{,}0368\ \text{MN} > D_{\text{aktuell}} = 0{,}032\ \text{MN}$

På basis av de vid den ovan genomförda överslagskalkylen funna värdena genomförs så en slutgiltig knäckningsdimensionering.

Ur ekv :371(4) och :372(1) erhålls

$P_{ky} = \pi^2 EI_y/L^2 = 5{,}84\ \text{MN}\ (E = 2{,}1 \cdot 10^5\ \text{MN/m}^2)$; $\gamma = d^3/EA_d ab^2 = 0{,}0449$ 1/MN

$\lambda_{sy} = \lambda_y \sqrt{1 + \gamma P_{ky}} = 72{,}5$; $\sigma_k = 155\ \text{MN/m}^2$; $\sigma_{k\text{till}} = 103{,}5\ \text{MN/m}^2$

$P_{k\text{till}} = 1{,}22\ \text{MN} > P_{\text{aktuell}} = 1{,}05\ \text{MN}$

Med $a = 0{,}625$ m, $c = 0{,}25$ m och med profiler enligt sektionen i fig :375 har följaktligen fackverkssträvan kring x-axeln en knäckningssäkerhet som är lika med den erforderliga, under det att knäckningssäkerheten kring y-axeln är något högre än vad som erfordras, vilket möjliggör exempelvis en smärre minskning av distansen c, överslagsmässigt till $c = 0{,}23$ m.

:38 Knäckning vid sträva av material utan draghållfasthet

Jfr kap 342

Detta problem är praktiskt aktuellt vid tryckta slanka pelare och väggar av oarmerad betong, tegel och liknande murverksmaterial som karaktäriseras av i förhållande till tryckhållfastheten med god approximation försumbar draghållfasthet.

För det idealiserade fallet initiellt rak sträva under initiellt centrisk tryckbelastning gäller vid elastiska förhållanden Euler-knäckningslasten och vid oelastiska förhållanden, som en approximation något på säkra sidan, tangentmodul-teorins knäckningslast, oberoende av om strävan äger böjdragupptagande förmåga eller inte. Detta är emellertid en omständighet som saknar direkt praktisk betydelse därigenom att i praktikens konstruktioner avvikelser i form av initialkrokighet och initialexcentricitet alltid är ofrånkomliga, och vid närvaro härav blir förhållandena principiellt olika vid strävor av material med god såväl tryck- som dragupptagande förmåga och vid strävor av material som saknar draghållfasthet. Detta illustreras av fig :38a, som för tvåsidigt fritt upplagd, excentriskt tryckt, rak sträva av *obegränsat elastiskt* material och med rektangulär sektion visar sambandet mellan tryckkraften P i förhållande till Euler-knäckningslasten P_{ke} och summan av initialexcentricitet e och maximiutböjning y_{max} i förhållande till sektionshöjden h. De heldragna linjerna i figuren gäller därvid för sträva av material utan draghållfasthet, de streckmarkerade för sträva av material som kan uppta såväl tryck- som dragspänningar. Av figuren framgår exempelvis att för en initialexcentricitet $e=0,05\ h$ följs de båda strävorna åt till $P=0,65\ P_{ke}$, svarande mot $e+y_{max}=h/6$. Vid ytterligare utböjningsökning passerar tryckkraften P ut ur mittsektionens kärnyta, vilket för strävan utan draghållfasthet medför att uppsprickning börjar inträda i mittsektionen. Därmed är inte bärförmågan helt uttömd, utan tryckkraften kan under fortsatt uppsprickning av strävan ytterligare något ökas till $P=P_{max}=0,70\ P_{ke}$, svarande mot $e+y_{max}=0,23\ h$. Vid större utböjningar är genom den tillhörande kraftiga uppsprickningen jämviktslägen möjliga endast för P-värden$<P_{max}$. För $e+y_{max}=h/2$ försvinner helt mittsektionens tryckzon och därmed också den lastupptagande förmågan för strävan, som saknar draghållfasthet. För strävan, som med obegränsad elastisk töjbarhet kan uppta såväl tryck- som dragspänningar, kan den excentriska tryckkraften däremot under ständigt accelererade utböjningar kontinuerligt ökas till Euler-knäckningslasten P_{ke}.

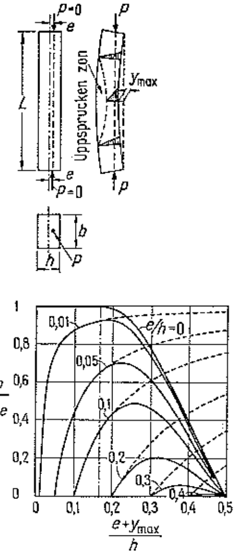


Fig :38a

Det ovan analyserade kraft-deformationsdiagrammet (fig :38a) är något orealistiskt därigenom att det förutsätter obegränsad stukbarhet. Vid en praktisk dimensionering av exempelvis en slank tegelvägg måste hänsyn tas till materialets begränsade brottstukning ε_B, vilket något modifierar förhållandena. Som illustration härtill har medtagits de i fig :38b visade di-

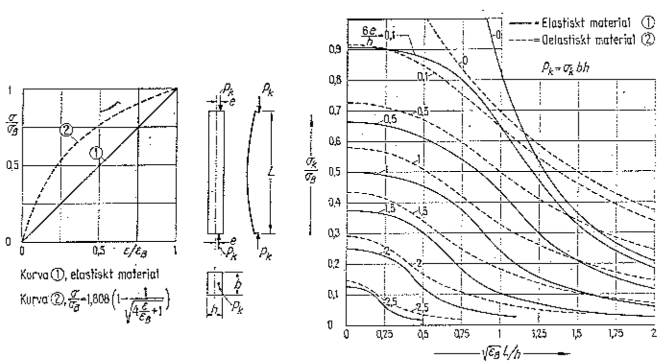


Fig :38b

mensioneringsdiagrammen för excentriskt tryckt, rektangulär sträva av material utan draghållfasthet. Diagrammen ger den mot maximal bärförmåga svarande kritiska tryckspänningen $\sigma_k=P_k/A$, där A är den ospruckna sektionens yta, i förhållande till materialets tryckhållfasthet σ_B dels för elastiskt material (heldragna kurvor) och dels för ett oelastiskt material (streckade kurvor) med spänningsstukningskurvor enligt vänstra diagrammet i fig :38b, [66].

Den ovan givna summariska framställningen syftar primärt till en översiktlig fenomenbeskrivning. För en mer ingående analys och knäckningsdimensionering av sträva av material utan draghållfasthet hänvisas till t ex [67]–[69].

:4 Böjd och samtidigt tryckt eller dragen balk

:41 Allmänt

Vid *slanka* balkar och pelare, som åverkas samtidigt av transversella och axiella belastningar, framkallar axialkrafterna för en praktisk dimensionering ordinärt icke försumbara förändringar i det deformations- och momenttillstånd som härrör från den rena transversallasten. Allmänt gäller därvid (jfr fig :41) att utböjningar och böjande moment förstoras vid *tryckande* axiallast, och detta kraftigare ju närmare den aktuella axialbelastningen ligger konstruktionens knäckningslast. Omvänt erhålls vid *dragande* axiallast i stället en reduktion av de av enbart transversalkrafterna orsakade böjdeformationerna och momenten.

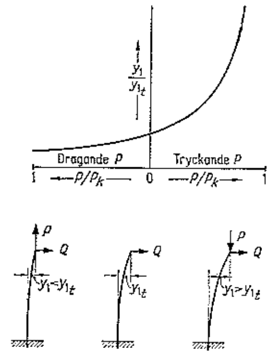


Fig :41

:42 Noggrann beräkningsmetod vid elastiska förhållanden

:421 Allmänt

En matematiskt sträng hållfasthetsberäkning enligt teorin för *stora deformationer* av axiellt och samtidigt transversellt belastad balk blir starkt komplicerad och tidsödande även för renodlade belastningsfall, vilket sannolikt är en väsentlig orsak till att den tekniska litteraturen inom området är av ringa omfattning, se t ex [70]–[72]. De förefintliga arbetena möjliggör inte att detaljerade slutsatser dras, men de är dock tillräckliga för ett grovt konstaterande av att vid i ordinärt byggnadssammanhang förekommande fall av samtidigt axial- och transversalbelastade balkar är en förenklad hållfasthetsberäkning enligt teorin för *små utböjningar* tillräckligt noggrann. I efterföljande exempel illustreras en sådan förenklad beräkning för ett renodlat belastningsfall genom en direkt lösning av elastiska linjens ekvation.

Exempel. Beräkna utböjningen y och böjande momentet M_x för den i fig :421 a visade, axiellt tryckta och samtidigt transversalbelastade balken med efter sin längd konstant böjstyvhet EI.

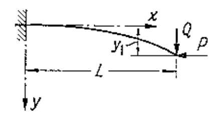


Fig :421 a

För den utböjda balkens moment M_x gäller sambandet

$$M_x = Q(L-x)+P(y_1-y) \qquad \text{(a)}$$

vilket insatt i elastiska linjens ekvation $y''=M_x/EI$ ger problemets differentialekvation under formen

$$y''+k^2y=(Q/EI)(L-x)+k^2y_1,\ k^2=P/EI \qquad \text{(b)}$$

Lösningen till ekv (b) lyder

$$y=A\cos kx+B\sin kx+(Q/k^2EI)(L-x)+y_1 \qquad \text{(c)}$$

där A och B är integrationskonstanter som jämte spetsutböjningen y_1 får bestämmas ur problemets randvillkor: 1 $y=0$ för $x=0$, 2 $y'=0$ för $x=0$, 3 $y=y_1$, för $x=L$. Härur beräknas efter omformning för utböjningen

$$y=(Q/k^3EI)[(\sin kL-\sin k(L-x))/\cos kL-kx] \qquad \text{(d)}$$

$$y_1=(Q/k^3EI)(\tan kL-kL) \qquad \text{(e)}$$

och för böjmomentet M_x efter insättning av y och y_1 enligt ekv (d) och (e) i ekv (a)

$$M_x=Q\sin k(L-x)/k\cos kL \qquad \text{(f)}$$

Ur ekv (d) erhålls genom gränsvärdesövergången $y\to\infty$ knäckningsvillkoret (jfr :221) $\cos kL=0$, vilket i kombination med ekv (b) ger strävans lägsta knäckningslast

$$P_k=\pi^2EI/4L^2 \qquad \text{(g)}$$

Som illustration till hur den mot enbart transversalbelastningen Q svarande utböjningen y_t och böjmomentet M_{xt} förändras genom samtidig närvaro av axiell tryckkraft P, har i nedanstående tabell sammanställts ur ekv (e) och (f) beräknade värden för konsolspetsens nedböjningsförhållande y_1/y_{1t} och inspänningssnittets momentförhållande M_0/M_{0t} vid varierande P/P_k.

P/P_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0 7	0,8	0,9	1
y_1/y_{1t}	1	1,110	1,247	1,423	1,658	1,986	2,479	3,301	4,943	9,872	∞
M_0/M_{0t}	1	1,091	1,205	1,351	1,545	1.817	2,223	2,900	4,253	8,307	∞

Tabellen verifierar det ovan anförda förhållandet att utböjningar och böjmoment accelererat tillväxer med ökad axiell tryckkraft. För gränsfallet, att den aktuella tryckkraften blir lika med konstruktionens knäckningslast, erhålls beräkningsmässigt oändligt stora utböjningar och böjmoment, vilket är en följd av att problemet lösts under förutsättning av små deformationer. I verkligheten uppträder för $P=P_k$ visserligen stora men dock fullt ändliga deformationer och moment, vilkas bestämning emellertid kräver en komplicerad beräkning enligt teorin för stora utböjningar.

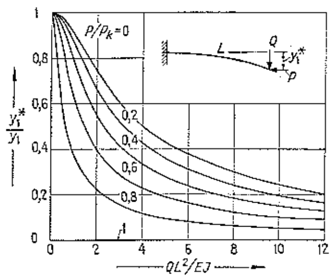


Fig :421 b

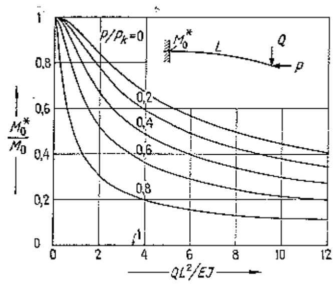


Fig :421 c

I kompletterande syfte har i fig :421 b och c [72] redovisats de värden som för belastningsfallet enligt fig :421 a erhålls för spetsnedböjning y_1^* och inspänningsmoment M_0^* vid en beräkning enligt den stränga teorin för stora deformationer, varvid dessa storheter angetts i förhållande till motsvarande storheter y_1 respektive M_0, bestämda ur den elementära teorin för små deformationer. De i figurerna redovisade kurvorna är strängt giltiga endast för det i fig :421 a visade belastningsfallet. För en *grov* uppskattning av de fel som kan förväntas vid en beräkning enligt den elementära teorin, är dock kurvorna tillämpbara även vid godtyckligt valt fall av tryckt och samtidigt transversalbelastad balk, om parametern QL^2/EI utbyts mot $2\theta_{1t}$, där $\theta_{1t}=$ den av enbart transversallasten orsakade, maximala lutningsvinkeln, bestämd enligt den elementära teorin för små deformationer.

:422 Berry-funktioner

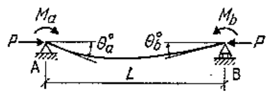


Fig :422 a

Berry-funktionerna ψ, φ och χ intar en central roll i t ex en systematiserad ramanalys med avseende på elastisk instabilitet och tillhörande andra ordningens spänningar. Definitionsmässigt beskriver funktionerna ψ och φ stödvinkeländringarna θ_a^o och θ_b^o för en tvåsidigt fritt upplagd balk AB med efter sin längd konstant böjstyvhet EI vid samtidig belastning av axiell tryckkraft P och stödböjmoment M_a och M_b (fig :422a) över sambanden

$$\theta_a^\circ = M_a\,\psi L/3EI + M_b\,\varphi L/6EI \qquad (1)$$

$$\theta_b^\circ = M_a\,\varphi L/6EI + M_b\,\psi L/3EI \qquad (2)$$

Analogt beskriver funktionen χ t ex motsvarande stödvinkeländringar θ_a och θ_b° vid samtidig belastning av axiell tryckkraft P och jämnt fördelad transversallast q (fig :422b) över sambandet

$$\theta_a^\circ = \theta_b^\circ = \chi q L^3/24EI \qquad (3)$$

Definitionerna ger över en lösning av elastiska linjens ekvation enligt teorin för små utböjningar för Berry-funktionerna uttrycken

$$\psi = (3/kL)(1/kL - 1/\tan kL) \qquad (4)$$

$$\varphi = (6/kL)(1/\sin kL - 1/kL) \qquad (5)$$

$$\chi = \tfrac{1}{3}(4\psi^2 - \varphi^2) = 24(\tan \tfrac{1}{2}kL - \tfrac{1}{2}kL)/(kL)^3 \qquad (6)$$

$$\text{med } kL = L\sqrt{P/EI} = \pi\sqrt{P/P_k},\ P_k = \pi^2 EI/L^2 \qquad (7)$$

Uttrycken är giltiga också för fallet axiell dragkraft P, om P byts mot $-P$.

Berry-funktionerna har direkt koppling till de styvhetstal S_a' (fig :422c) och S_a'' (fig :422d), transporttal r (fig :422d) samt till translation δ hörande inspänningsböjmoment $M_{1\delta}$ (fig :422e) och $M_{2\delta}$ (fig :422f), som utgör basstorheter i det i :52 redovisade förfarandet för ramknäckningsberäkning enligt successiv momentutjämningsmetod. Kopplingen till dessa storheter — definierade genom fig :422c–f samt mera detaljerat i :52 — ges genom sambanden

$$S_a' = (1/\psi)(3EI/L) \qquad (8)$$

$$S_a'' = (\psi/\chi)(4EI/L) \qquad (9)$$

$$r = \varphi/2\psi \qquad (10)$$

$$M_{1\delta} = (1/\psi)(3\delta EI/L^2) \qquad (11)$$

$$M_{2\delta} = [(2\psi + \varphi)/3\chi](6\delta EI/L^2) \qquad (12)$$

Omfattande tabeller för Berry-funktionerna — grafiskt visade i fig :422g [73] — och andra för en systematiserad beräkning av rambärverks knäckningslast och andra ordningens spänningar aktuella funktioner ges i t ex [74]. För tabeller över de till en ramknäckningsberäkning enligt successiv momentutjämningsmetod hörande basstorheterna — jfr fig :521d, :521e, :522g och :522h — hänvisas till t ex [75], [76].

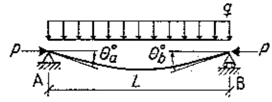


Fig :422b

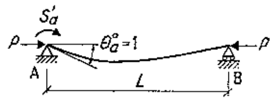


Fig :422c

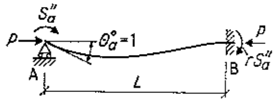


Fig :422d

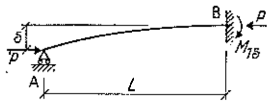


Fig :422e

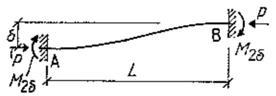


Fig :422f

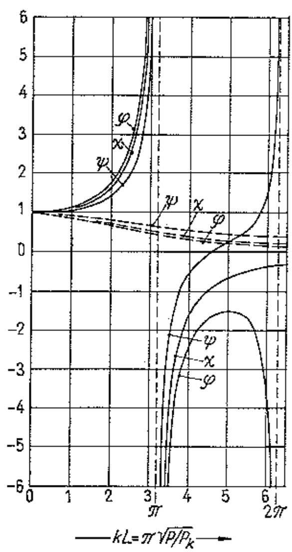


Fig :422g. Berry-funktionerna ψ, φ och χ. Heldragna kurvor svarar mot axiell tryckkraft P, streckade mot axiell dragkraft P [73]

:43 Approximativ beräkningsmetod vid elastiska förhållanden

A Allmänt

Som påpekats i :42 erhålls för normalt i praktiken förekommande fall av axiellt och samtidigt transversellt belastad balk tillfredsställande beräkningsnoggrannhet genom en lösning av elastiska linjens ekvation för små deformationer. En sådan lösning kan genomföras med rimlig arbetsinsats för renodlade belastningsfall — jfr [1], [2], [32], [77] m fl — men blir vid mer komplicerade fall, exempelvis vid belastningar med diskontinuitetspunkter och vid statiskt obestämda konstruktionstyper, tidsödande och svåröverskådlig. Som en följd härav har i litteraturen framlagts ett stort antal tidsbesparande närmemetoder för beräkning av axial- och transversalbelastade balkar.

Flera av dessa närmemetoder redovisar för fallet tryck och samtidig transversallast böjmomentet M_x i princip under formen

$$M_x = [(1 + b_x P/P_k)/(1 - P/P_k)] M_{x:} \tag{1}$$

varvid $M_{x:}$ betecknar böjmomentet av enbart transversallasten och b_x är en dimensionslös koefficient som beror av belastning och balkutformning. Ljungberg [78] och Rambøll [79] bestämmer denna koefficient genom jämförelse med den lösning som för små deformationer erhålls genom en direkt integration av elastiska linjens ekvation. Dischinger [80] och Mörsch [81] genomför i stället en b_x-bestämning genom ett iterativt beräkningsförfarande, varvid Dischinger använder sig av en rent analytisk teknik, Mörsch av en halvgrafisk. En vidareutveckling av Dischingers beräkningsmetod har framlagts av Aas-Jakobsen [82] som lyckats starkt reducera erforderligt beräkningsarbete genom att under iterationsprocessen för utböjningen y införa närmesambandet, jfr ekv :34(5)

$$y = y_t/(1 - P/P_k) \tag{2}$$

i vilket y_t betecknar den mot enbart transversallasten svarande utböjningen. En momentrepresentation enligt ekv (1) används också av Kasarnowsky [83], som med utnyttjande av ekv (2) bestämmer koefficienten b_x vid *statiskt bestämd balk* genom enbart *jämviktsekvation*, vid *statiskt obestämd balk* genom tillämpning av *arbetsekvationer* eller *Castiglianos sats.*

En annan huvudgrupp av i litteraturen redovisade närmemetoder för beräkning av axial- och samtidigt transversalbelastade balkar karaktäriseras av serieutvecklingar av uttrycket för utböjningskurvan. Till denna grupp hör Timoshenkos metod [1] med utveckling av y i trigonometrisk serie med tillämpning på fritt upplagd balk, den av Bergström [84] angivna tekniken med utveckling av den mot transversalbelastningen svarande utböjningen y_t i serie efter knäckningsfunktioner samt arbeten av Dimitrov [85] med serieutveckling av tilläggsmomenten efter normerade egenfunktioner.

Nedan genomgås i sina huvuddrag en i [30] och [72] utvecklad närmemetod, som utan någon integration möjliggör en direkt bestämning av utböjningar och böjande moment vid samtidigt axial- och transversalbelastad balk.

B Beräkning av utböjningen y

Närmemetoden utnyttjar det förhållandet att det genomgående vid axiellt och samtidigt transversellt belastad balk är möjligt att finna något *snitt* μ, för vilket gäller att utböjningen y_μ med god approximation kan bestämmas ur tillhörande transversallastutböjning $y_{\mu t}$ genom tillämpning av närmesambanden

tryckande axialkraft P: $y_\mu = y_{\mu t}/(1 - P/P_k)$ (3)

dragande axialkraft P: $y_\mu = y_{\mu t}/(1 + P/P_k)$ (4)

Av en i [30] genomförd systematisk undersökning framgår att ett sådant snitt μ utgör det snitt som har maximiutböjning i knäckningsögonblicket ($P = P_k$), dvs vid konsolbalk den fria änden, vid tvåsidigt fritt upplagd eller tvåsidigt fast inspänd balk med konstant sektion mittsnittet etc. För tvåsidigt elastiskt inspänd balk med konstant sektion framgår läget av snittet μ av diagrammet i fig :451 c.

För *utböjningen y i godtyckligt valt snitt* av samtidigt axial- och transversalbelastad balk ger en approximativ beräkning ur närmesamband av typen ekv (3) och (4) ofta för praktiska förhållanden otillräcklig precision. Förbättrad noggrannhet kan erhållas ur vidareutvecklade närmesamband av typen

tryckande axialkraft P: $y = [(1 + a_x P/P_k)/(1 - P/P_k)] y_t$ (5)

dragande axialkraft $P \leqslant P_k$: $y = [(1 - a_x P/P_k)/(1 + P/P_k)] y_t$ (6)

dragande axialkraft $P > P_k$: $y = [(1 - a_x\sqrt{P/P_k})/(1 + P/P_k)] y_t$ (7)

i vilka y_t är utböjningen i aktuellt snitt av enbart transversallast och a_x är en dimensionslös koefficient som kan bestämmas ur uttrycket [30]

$$a_x = \delta_1 y_{\mu t}/y_t - 1 \tag{8}$$

varvid δ_1 (jfr även :451) betecknar förhållandet mellan knäckningsutböjningen y_k i aktuellt snitt x och maximala knäckningsutböjningen $y_{\mu k}$ i snittet μ, dvs

$$y_k = \delta_1 y_{\mu k} \tag{9}$$

Beräkningsgång

a Bestäm enligt :451 δ_1 samt det snitt μ, som har maximiutböjning i knäckningsögonblicket.
b Beräkna de av enbart transversallasten orsakade utböjningarna y_t i aktuellt snitt samt $y_{\mu t}$ i snittet μ.
c Beräkna a_x ur ekv (8) samt y ur ekv (5)–(7). Speciellt för snittet μ erhålls $y = y_\mu$ ur ekv (3) och (4).

C Beräkning av böjmomentet M_x (jfr även :44 B)

För böjmomentet M_x i godtyckligt valt snitt gäller för ordinära praktiska fall med tillfredsställande noggrannhet de med ekv (5)–(7) analoga närmesambanden (jfr ekv (1))

tryckande axialkraft P: $M_x = [(1 + b_x P/P_k)/(1 - P/P_k)] M_{xt}$ (10)

dragande axialkraft $P \leqslant P_k$: $M_x = [(1 - b_x P/P_k)/(1 + P/P_k)] M_{xt}$ (11)

dragande axialkraft $P > P_k$: $M_x = [(1 - b_x \sqrt{P/P_k})/(1 + P/P_k)] M_{xt}$ (12)

där M_{xt} är böjmomentet av enbart transversallast. För den dimensionslösa koefficienten b_x (jfr även :452) gäller därvid relationen [30]

$$b_x = \delta_2 P_k y_{\mu t}/M_{xt} - 1 \tag{13}$$

med δ_2 (jfr även :451) bestämd av förhållandet mellan knäckningsböjmomentet M_{xk} i snittet x och maximala knäckningsutböjningen $y_{\mu k}$ i snittet μ

enligt sambandet $M_{xk} = \delta_2 P_k y_{\mu k}$ (14)

I undantagsfall, nämligen för starkt osymmetriskt placerade snitt vid extrem osymmetri i konstruktion och belastning, ger de approximativa ekv (10)–(12) i vissa fall sämre noggrannhet än vad som kan tolereras vid en praktisk dimensionering. För sådana extrema fall rekommenderas att böjmomentet M_x i stället beräknas ur nedanstående, vidareutvecklade närmerelationer [30]

$$M_x = [(1 + b_{1x} P/P_k + b_{2x}(P/P_k)^2)/(1 - P/P_k)] M_{xt} \tag{15}$$

vid tryckande axialkraft P,

$$M_x = [(1 - b_{1x} P/P_k + b_{2x}(P/P_k)^2)/(1 + P/P_k)] M_{xt} \tag{16}$$

vid dragande axialkraft $P \leqslant P_k$,

$$M_x = [(1 - (b_{1x} - b_{2x})\sqrt{P/P_k})/(1 + P/P_k)] M_{xt} \tag{17}$$

vid dragande axialkraft $P > P_k$

med de nya dimensionslösa koefficienterna b_{1x} och b_{2x} bestämda ur sambanden

$$b_{1x} = (P_k/M_{xt})[y_t + (\delta_2 - \delta_1) y_{\mu t}] - 1 \tag{18}$$

$$b_{2x} = b_x - b_{1x} = (P_k/M_{xt})(\delta_1 y_{\mu t} - y_t) \tag{19}$$

Allmänt gäller för dessa vidareutvecklade ekv (15)–(17) att de i förhållande till de enklare ekv (10)–(12) ger en något mer korrekt bild av böjmomentets förlopp längs balken. För böjmomentet i det snitt μ, som har maximiutböjning i knäckningsögonblicket däremot, ger ekv (15)–(17) och ekv (10)–(12) sammanfallande värden. (Jfr vidare :44 B.)

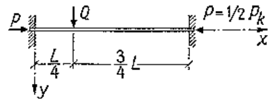


Fig :43a

D Exempel

Beräkna för den i fig :43a visade tryckta och samtidigt transversalbelastade, tvåsidigt fast inspända balken med efter sin längd konstant sektion a nedböjningen i fackmitt, b momentdiagrammet.

Problemet b löses snabbast direkt ur b_x-diagrammen i :452 (jfr :44 B). För en något mer detaljerad belysning av den ovan beskrivna approximativa beräkningsmetoden genomförs dock i detta sammanhang momentbestämningen utan användning av dessa diagram.

a Balkens mittsnitt utgör det snitt μ, som har maximiutböjning i knäckningsögonblicket. För nedböjningen y_μ i detta snitt gäller med god approximation ekv (3), vilken i aktuellt fall ger (jfr tabell 1:40 i 1 B).

$$y_\mu = 2y_{\mu t} = QL^3/192EI \qquad \text{(a)}$$

b För transversallastens böjmoment M_{xt} erhålls ur tabell 1:40 i 1 B.

$$\left.\begin{aligned} M_{xt} &= -(9/64)\,QL(1-6x/L) \text{ för } 0 \leqslant x \leqslant L/4 \\ M_{xt} &= (1/64)\,QL(7-10x/L) \text{ för } L/4 \leqslant x \leqslant L \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

och för storheterna P_k och δ_2 enligt :31 resp :451

$$P_k = 4\pi^2 EI/L^2 \qquad \text{(c)} \qquad \delta_2 = -\tfrac{1}{2}\cos 2\pi x/L \qquad \text{(d)}$$

Insättning härav i ekv (13) ger för b_x uttrycken

$$\left.\begin{aligned} b_x &= \pi^2 \cos(2\pi x/L)/27(1-6x/L) - 1 \text{ för } 0 \leqslant x \leqslant L/4 \\ b_x &= -\pi^2 \cos(2\pi x/L)/3(7-10x/L) - 1 \text{ för } L/4 \leqslant x \leqslant L \end{aligned}\right\} \qquad \text{(e)}$$

vilka i kombination med det approximativa sambandet (10), som i aktuellt fall lyder

$$M_x = (2+b_x)\,M_{xt} \qquad \text{(f)}$$

ger det sökta böjmomentet M_x. Detta har jämte transversallastens böjmoment M_{xt} grafiskt redovisats i fig :43b.

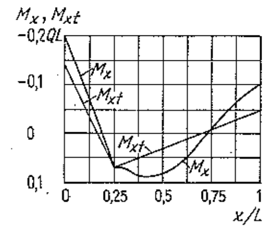


Fig :43b

E Interaction-formler

I ett flertal länders normer anges s k interaction-formler för en approximativ dimensionering av böjd och samtidigt axiellt tryckt, slank balk eller pelare. En dimensionering över sådana formler bygger på att tillåten last för den böjda och samtidigt tryckta balken eller pelaren bestäms som funktion av kvoterna

$$K = \sigma_t/\sigma_{t\,\text{till}} \text{ och } B = \sigma_b/\sigma_{b\,\text{till}} \qquad (20)$$

med σ_t = största tryckspänning orsakad av den centriska tryckkraften P, $\sigma_{t\,\text{till}}$ = den med hänsyn till utknäckning i lastplanet tillåtna tryckspänningen, σ_b = största tryckspänning, orsakad av enbart det till transversallasten hörande böjmomentet och $\sigma_{b\,\text{till}}$ = tillåten spänning vid böjning. Funktionellt ger därvid kvoten K en uppfattning om konstruktionens utnyttjande med hänsyn till balkens eller pelarens knäckningslast och kvoten B en uppfattning om utnyttjandet av balkens eller pelarens förmåga att uppta böjmoment.

Vad gäller svenska normer anges på interaction-formler baserat dimensioneringsförfarande i Stålbyggnadsnorm 70 [21]. I [86] redovisas ett i förhållande härtill utvidgat förfarande, karaktäriserat av att kvoterna K och B utsträckts till att gälla ansträngningen av tryckkraft respektive böjmoment i godtyckligt valt snitt av en slank balk eller pelare.

Med beteckningar enligt fig :43c gäller för den i [86] framlagda, approximativa dimensioneringsmetoden att

$$K = \sigma_t/\sigma_{b\,\text{till}} + (\sigma_t/\sigma_{t\,\text{till}} - \sigma_t/\sigma_{b\,\text{till}}) \sin(\pi x/L_f) \tag{21}$$

$$B = \sigma_b/\sigma_{b\,\text{till}} \tag{22}$$

varvid σ_t och σ_b nu utgör tryckspänning från centrisk tryckkraft respektive maximal böjspänning från enbart transversallast i enskilt snitt x. Som dimensioneringsvillkor gäller vid tillämpning på stålbärverk att för varje snitt x av balken eller pelaren

$$K + B \leqslant 1 \tag{23}$$

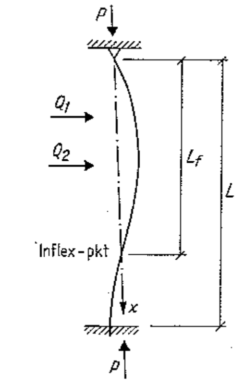


Fig :43c

För balk eller pelare med för knäckning ogynnsamt tvärsnitt — t ex vid böjning i veka riktningen av bärverk med I-tvärsnitt — ger [86] en modifiering av dimensioneringsvillkoret till ett påvisande av att för varje snitt x

$$\left.\begin{array}{l} 1{,}1\,K + B \leqslant 1 \text{ för } K \leqslant 3B \text{ eller} \\ K + 1{,}3\,B < 1 \text{ för } K > 3B \end{array}\right\} \tag{24}$$

om $0{,}8 < \sqrt{\sigma_{su}/\sigma_{k_{el}}} < 1{,}6$

Därvid betecknar σ_{su} normerad undre sträckgräns och $\sigma_{k_{el}}$ tryckspänning för den enligt elasticitetsteorin beräknade knäckningslasten.

Illustrativa beräkningsexempel på det beskrivna, utvidgade interactionförfarandet ges i [86].

:44 Dimensioneringsprinciper

A Allmänt

Vid axial- och samtidigt transversalbelastade balkar av sådan slankhet att av axialkrafterna orsakade förändringar i transversallastens utböjningar och böjande moment inte är försumbara, blir enligt ovan sambandet mellan spänning och belastning icke-lineärt. Detta medför, då vid en dimensionering primärt eftersträvas en viss säkerhet mot att aktuell belastning blir lika med konstruktionens brottlast, att säkerhetsfaktorn s måste läggas direkt på belastningarna och inte på spänningarna. Med andra ord *dimensioneringen får utföras så, att den mot $s \times$ aktuell last svarande maximala spänningen $\sigma_{\max}$ högst uppgår till materialets praktiska brotthållfasthet σ_B.*

En korrekt dimensionering med hänsyn tagen till materialets verkliga $\sigma - \varepsilon$-diagram resulterar i starkt komplicerade beräkningar, vilket för praktiska kalkyler tvingar till införandet av approximationer, i princip analoga med dem som införts ovan i :34 vid behandlingen av initialdeformerad tryckt sträva. För material med $\sigma - \varepsilon$-diagram av approximativt idealelastoplastisk typ, exempelvis *stål*, innebär detta att $\sigma_{\max}$ — som en approximation något på säkra sidan — beräknas under förutsättning av elastiska förhållanden, exempelvis enligt :43, samt att σ_B sätts lika med materialets sträckgräns σ_s. För den i närmesambanden i :43 ingående knäckningslasten P_k skall därvid alltid insättas det *elastiska* knäckningslastvärdet. För säkerhetsfaktorn s gäller uttrycket

$$s = \sigma_s/\sigma_{\text{till}} \tag{1}$$

med σ_{till} = vid ren böjning tillåten spänning.

Det icke-lineära sambandet mellan spänning och belastning medför att superpositionslagen inte oinskränkt kan tillämpas vid axial- och samtidigt transversalbelastad balk. *I modifierad form är dock superpositionslagen tillämpbar,* beroende på att icke-lineäriteten endast inkommer från axialbelastningen men däremot inte från transversalbelastningen, jfr exempelvis ekv :421 (d)–(f) eller :43 (10)–(13). Detta medför att *inverkningar (nedböjningar, böjmoment, spänningar etc) av transversella delbelastningar direkt kan adderas, om varje transversell delbelastningsinverkan bestäms med hänsyn tagen till den förändring som axiallasten ger upphov till* — jfr fig :44a, som illustrerar detta för böjmomentet M_x vid tryckt och samtidigt transversalbelastad balk.

Vid en realistisk dimensionering bör förutom till den direkta transversallasten i kombination med axialbelastning hänsyn tas också till möjlig förekomst av *initialdeformation och avvikelser från centriskt axialkraftangrepp*. I konsekvens med den i :34 genomförda knäckningsbehandlingen rekommenderas, till dess att för en säkrare bedömning statistiskt tillräckligt observationsmaterial föreligger, att summan f av initialdeformation och -excentricitet väljs till sin form överensstämmande med knäckningsutböjningen vid centriskt tryckt, rak sträva — jfr :353, där genom ekv (4)–(9) och (6′)–(7′) uttrycket för f finns redovisat för några grundläggande upplagsfall. Sedan den på detta sätt valda initialutböjningen f beräknats, erhålls det tillhörande böjmomentet M_x ur sambanden

tryckande axialkraft P: $M_x = Pf/(1-P/P_k)$ (2)

dragande axialkraft P: $M_x = Pf/(1+P/P_k)$ (3)

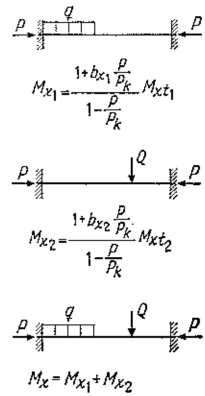


Fig :44a

B Beräkningsgång

a Välj säkerhetsfaktor s ($=\sigma_s/\sigma_{\text{till}}$ vid material av typen stål)

b Beräkna P_k enligt :31 och :35

c Beräkna böjande momentet M_{xt} av $s\times$transversallasten (sQ, sq, sM etc) t ex med hjälp av formlerna i tabellgruppen i 1B. Vid uppdelning i delbelastningsfall beräknas varje sådant för sig

d Beräkna böjande momentet M_x av $s\times$transversallasten$+s\times$axiallasten ($sQ+sP$, $sq+sP$, $sM+sP$ etc)
Generell metod (jfr :43 D)
Beräkna δ_2 enligt :451 eller ekv :43 (14)
Beräkna b_x enligt ekv :43 (13)
Beräkna M_x enligt ekv :43 (10)–(12) eller — vid fall av extrem osymmetri i belastning och konstruktionsutformning — enligt ekv :43 (15)–(19)
Metod i specialfall (jfr nedanstående exempel)
Bestäm $b_x M_{xt}$ ur :452
Beräkna M_x ur ekv :43 (10)–(12)

e Beräkna inverkan av initialkrokigheten f enligt ekv (2) och (3)

f Beräkna $\sigma_{\max} = sP/A + (\Sigma M_x)_{\max}/W \leqslant \sigma_s$, där ΣM_x är summan av böjande momenten i ett givet snitt av delbelastningarna ($sQ+sP$, $sq+sP$, $sM+sP$ etc) och initialkrokigheten (f)

C Exempel

Beräkna för den i fig :44b visade, axial- och transversalbelastade, pelaren erforderlig HEB-profil av stål 1411 med sträckgräns $\sigma_s = 260$ MN/m², om vid ren böjning tillåten spänning $\sigma_{\text{till}} = 173$ MN/m² ($g = 10$ m/s²).

$E = 2{,}1\cdot10^5$ MN/m² $\qquad s = \sigma_s/\sigma_{\text{till}} = 1{,}5$

Belastningsplanet förutsätts sammanfalla med maximala böjstyvhetens plan.

Välj på försök HE180B med $A = 65{,}3\cdot10^{-4}$ m², $I = 3\,831\cdot10^{-8}$ m⁴ och

$W = 426\cdot10^{-6}$ m³

$P_k = 2{,}046\pi^2 EI/L^2 = 2{,}54$ MN (jfr ekv :31 (3)) (a)

Enligt ekv :43 (10) blir

$M_x = [(1+b_x sP/P_k)/(1-sP/P_k)]M_{xt} = [(1+0{,}207b_x)/(1-0{,}207)]M_{xt}$

$= 1{,}261\,M_{xt} + 0{,}261\,b_x M_{xt}$ (b)

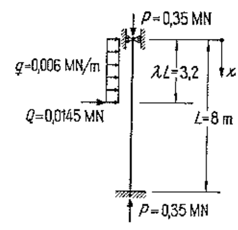


Fig :44b

a *Inverkan av delbelastning $sQ+sP$*

Ur formelsammanställningar i tabellgruppen i 1B beräknas för transversallastmomentet

$$M_{xt}=0{,}432sQx=0{,}0752\,x/L \text{ MNm för } 0\leqslant x\leqslant 3{,}2 \text{ m} \qquad \text{(c)}$$

$$M_{xt}=sQL(0{,}4\text{–}0{,}568x/L)=0{,}0696(1-1{,}420x/L)\text{ MNm för } 3{,}2\leqslant x\leqslant 8 \text{ m} \qquad \text{(c)}$$

För storheten b_xM_{xt} ger diagrammet i fig :452 j

$$b_xM_{xt}=(5/32)sQLk_Q=0{,}0272k_Q \text{ MNm} \qquad \text{(d)}$$

där k_Q = den på diagrammets vertikalaxel redovisade, mot $\lambda=0{,}4$ svarande koefficienten.

b *Inverkan av delbelastning $sq+sP$*

$$\left.\begin{aligned} M_{xt}&=sqLx(0{,}283-x/2L)=0{,}1630(x/L)(1-1{,}766x/L)\text{ MNm för } 0\leqslant x\leqslant 3{,}2\text{ m}\\ M_{xt}&=sqL^2(0{,}08-0{,}1168x/L)=0{,}0461(1-1{,}460x/L)\text{ MNm för } 3{,}2\leqslant x\leqslant 8\text{ m}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(e)}$$

$$b_xM_{xt}=(1/8)sqL^2k_q=0{,}0720k_q \text{ MNm} \qquad \text{(f)}$$

där k_q = den mot $\lambda=0{,}4$ svarande koefficienten i diagrammet i fig :452k.

c *Inverkan av initialkrokighet f + axiallast sP*

För initialkrokigheten f gäller med form enligt Dutheil (jfr exempelvis ekv :353 (6′)–(8′))

$$\left.\begin{aligned} &L_f=0{,}699L=5{,}59\text{ m}, && d=9\cdot10^{-2}\text{ m},\\ &f_m=4{,}8\cdot10^{-5}L_f^2/d=1{,}668\cdot10^{-2}\text{ m} && f=1{,}668\sin 4{,}49(x/L)\cdot10^{-2}\text{ m}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(g)}$$

För tillhörande böjmoment M_x ger ekv :44 (2)

$$M_x=sPf/(1-sP/P_k)=0{,}01104\sin 4{,}49x/L \text{ MNm} \qquad \text{(h)}$$

Ur ovanstående närmesamband har efterföljande tabell beräknats, vilken ger förloppet längs pelaren av böjmomenten M_x och M_{xt} dels för de olika delbelastningarna och dels för den resulterande belastningen. Tabellen, vars framräknande inte är i sin helhet nödvändigt för en lösning av den rena dimensioneringsuppgiften, har i detta sammanhang medtagits för en mer detaljerad belysning av problemet tryckt och samtidigt transversalbelastad balk.

	x/L	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	Sort
sQ	M_{xt}	0,752	1,503	2,255	3,007	2,018	1,030	0,042	−0,947	−1,935	−2,923	10^{-2} MNm
	b_xM_{xt}	0,342	0,468	0,202	−0,551	−0,053	0,056	−0,051	−0,157	−0,042	0,464	10^{-2} MNm
	M_x	1,038	2,017	2,896	3,648	2,531	1,313	0,040	−1,235	−2,451	−3,565	10^{-2} MNm
	M_{xt}	1,343	2,109	2,300	1,916	1,244	0,571	−0,102	−0,773	−1,446	−2,119	10^{-2} MNm
sq	b_xM_{xt}	−0,448	−0,497	−0,290	0,094	0,365	0,318	0,094	−0,129	−0,171	0,106	10^{-2} MNm
	M_x	1,577	2,529	2,824	2,441	1,664	0,803	−0,104	−1,008	−1,868	−2,644	10^{-2} MNm
f	M_x	0,479	0,863	1,077	1,076	0,863	0,478	−0,001	−0,480	−0,864	−1,077	10^{-2} MNm
$sQ+$ $sq+$	M_{xt}	2,095	3,612	4,555	4,923	3,262	1,601	−0,060	−1,720	−3,381	−5,042	10^{-2} MNm
f	M_x	3,094	5,409	6,797	7,165	5,058	2,594	−0,065	−2,723	−5,183	−7,286	10^{-2} MNm

Av tabellen framgår att maximalt moment uppträder i inspänningssnittet

$M_{x\max} = -0{,}0729$ MNm

vilket i kombination med axialkraften $sP = 0{,}525$ MN för den maximala spänningen ger

$\sigma_{\max} = sP/A + M_{x\max}/W = 80{,}4 + 171{,}1 = 251{,}5$ MN/m$^2 < \sigma_s = 260$ MN/m^2

En spänningsberäkning för närmast lägre profilnummer, HE160B, ger $\sigma_{\max} > \sigma_s$. Den på försök valda profilen HE180B är följaktligen lämplig.

:45 Diagram

:451 μ, δ_1 och δ_2 (jfr :43 B och C) för elastiskt inspänd balk med konstant sektion och normalkraft [30], [72]

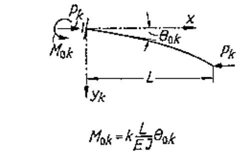


Fig :451 a. Betr k se :351

A Konsolbalk (Fig :451 a)

Snittet för maximiutböjning vid knäckning = konsolspetsen (dvs $\mu = 1$)

$\delta_1 = 1 - \sin[(\pi/\beta)(1 - x/L)]/\sin(\pi/\beta)$ (1) $\delta_2 = 1 - \delta_1$ (2)

med β = den i fig :351 b för $k_b = \infty$ redovisade knäckningskoefficienten. Tecknet på δ_2 förutsätter att böjmoment som ger dragning i konsolbalkens överkant räknas positiva.

För specialfallet fast inspänd konsolbalk ($k_a = 0$ i fig :351 b) gäller

$\beta = 2$; $\delta_1 = 1 - \sin[(\pi/2)(1 - x/L)]$; $\delta_2 = \sin[(\pi/2)(1 - x/L)]$ (3)

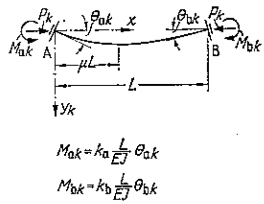


Fig :451 b. Betr k_a och k_b, se :351

B Tvåstödsbalk (Fig :451 b)

$\delta_1 = \varkappa_1 \sin(\pi x/\beta L) + \varkappa_2(1 - \cos(\pi x/\beta L)) + \varkappa_3 \pi x/\beta L$ (4)

$\delta_2 = \varkappa_1 \sin(\pi x/\beta L) - \varkappa_2 \cos(\pi x/\beta L)$ (5)

med knäckningskoefficienten β bestämd av fig :351 a och $\varkappa_1$–$\varkappa_3$ av fig :451 d–f, i vilka k_a och k_b bestäms enligt :351. Tecknet på δ_2 förutsätter att böjmoment som ger dragning i tvåstödsbalkens underkant räknas positiva.

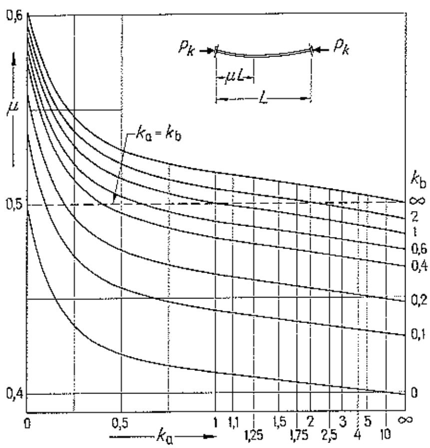


Fig :451 c. Snittet μ för maximiutböjning vid knäckning av tvåsidigt elastiskt inspänd balk

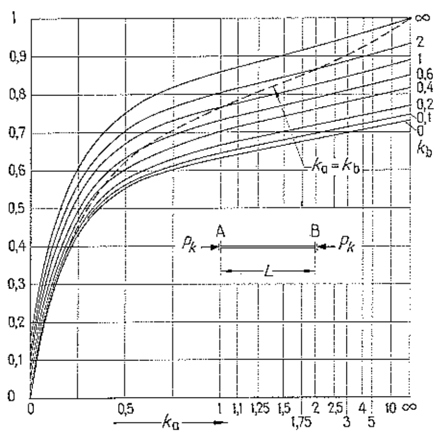


Fig :451 d

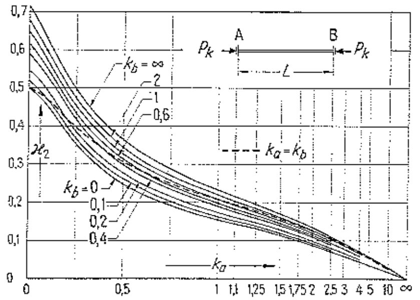


Fig :451e

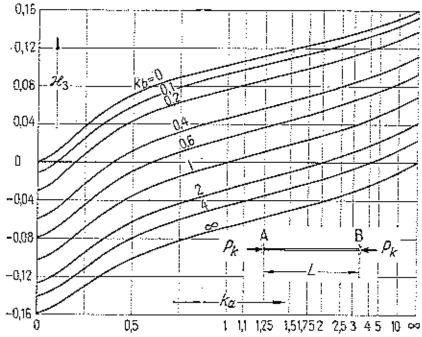


Fig :451f

Speciellt gäller för

1 tvåsidig fri uppläggning: $k_a = k_b = \infty$, $\mu = 0{,}5$, $\beta = 1$, $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = \varkappa_3 = 0$
2 tvåsidig fast inspänning: $k_a = k_b = 0$, $\mu = 0{,}5$, $\beta = 0{,}5$, $\varkappa_1 = \varkappa_3 = 0$, $\varkappa_2 = 0{,}5$
3 fri uppläggning i A, fast inspänning i B: $k_a = \infty$, $k_b = 0$, $\mu = 0{,}398$, $\beta = 0{,}699$, $\varkappa_1 = 0{,}733$, $\varkappa_2 = 0$, $\varkappa_3 = 0{,}1592$

:452 b_x för fast inspänd konsolbalk, tvåsidigt fritt upplagd balk, ensidigt fast inspänd balk och tvåsidigt fast inspänd balk med konstant sektion och normalkraft

I fig :452a–q redovisade $b_x M_{xL}$-diagram förutsätter att böjmoment som ger dragning i överkant vid konsolbalk och dragning i underkant vid övriga balktyper räknas positiva.

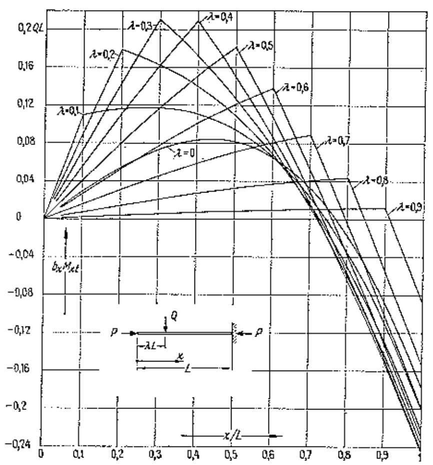


Fig :452a

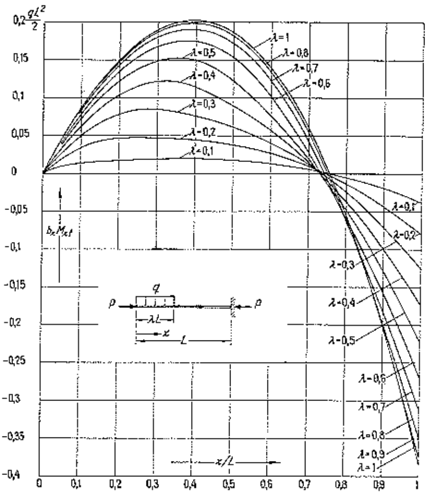


Fig :452b

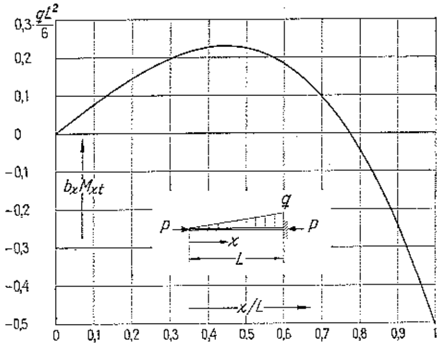


Fig :452c

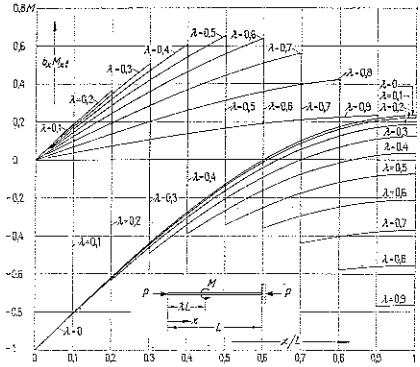


Fig :452d

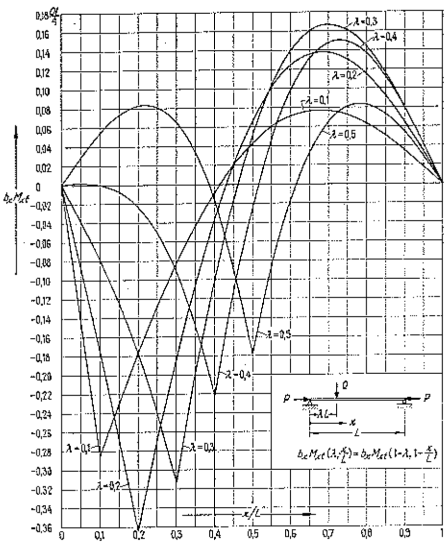


Fig :452e

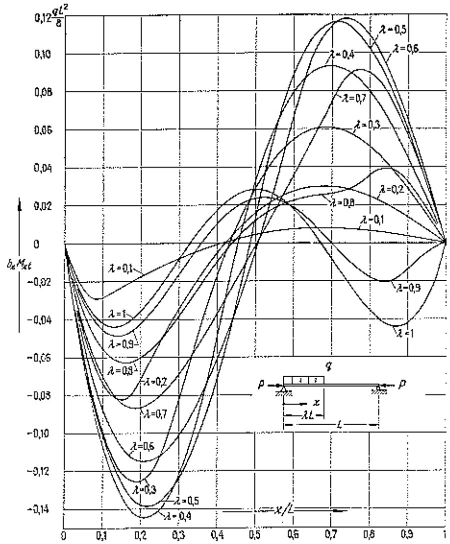


Fig :452f

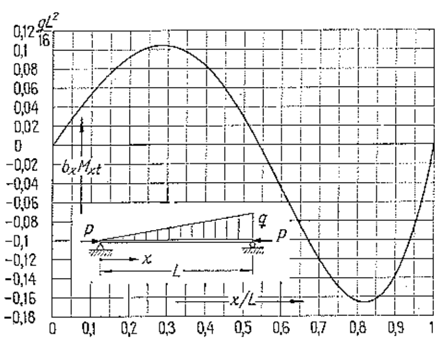


Fig :452g

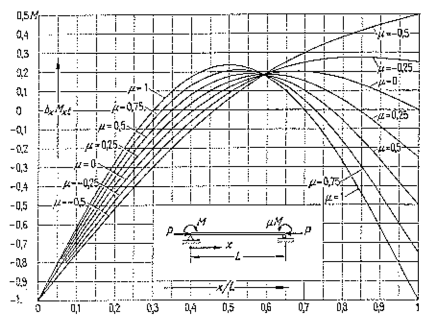


Fig :452h

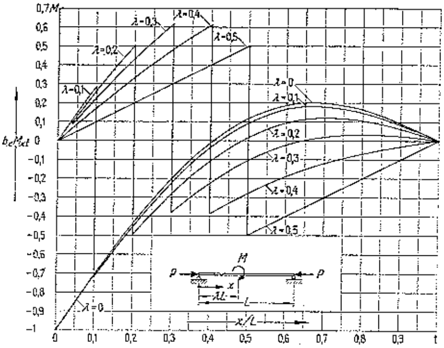


Fig :452i

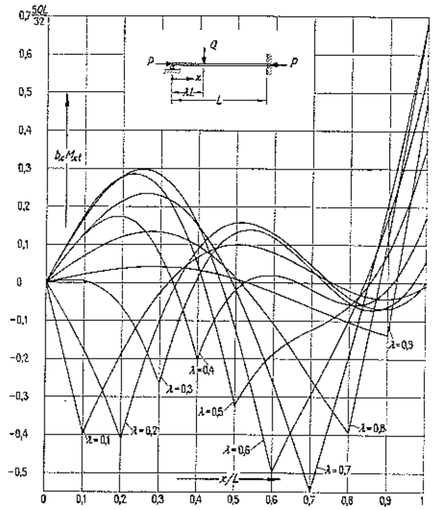


Fig :452j

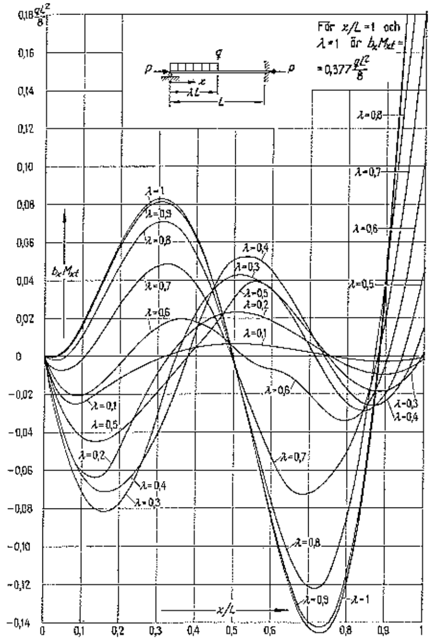


Fig :452k

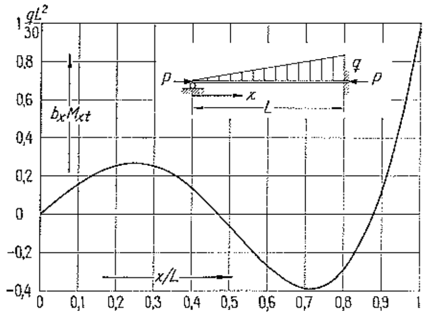


Fig :452 l

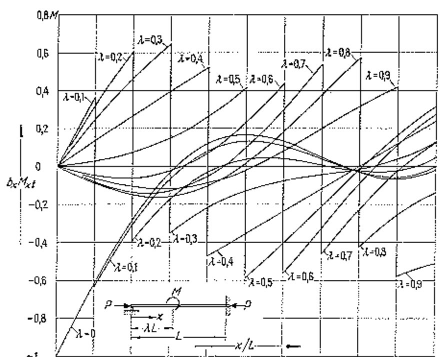


Fig :452m

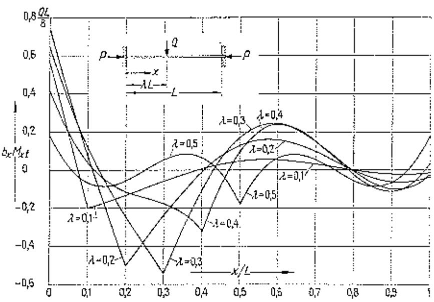


Fig :452n

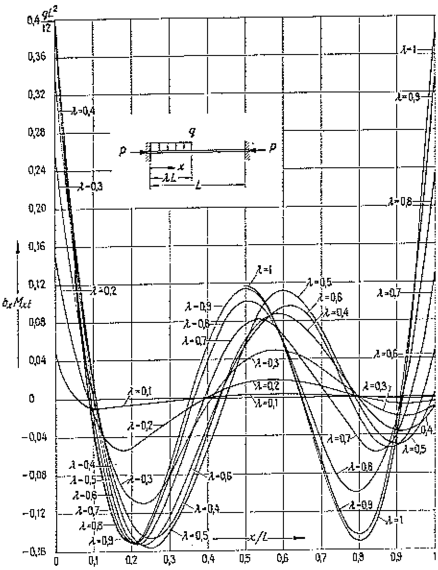


Fig :452o

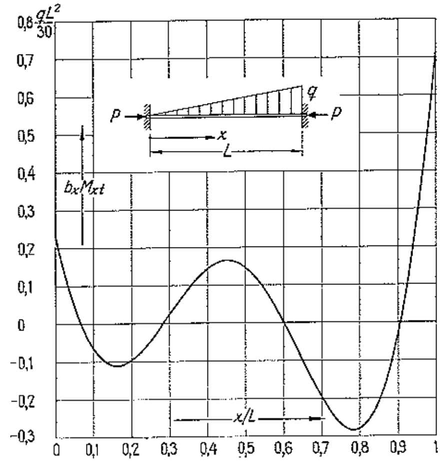


Fig :452p

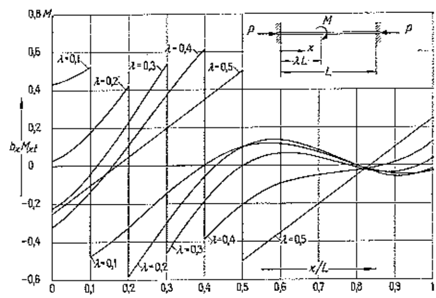


Fig :452q

:5 Ramars stabilitet

:51 Problemställning. Allmänt om beräkningsmetoder

För att knäckningsfenomenet renodlat skall kunna uppträda vid en ramkonstruktion fordras dels att all yttre belastning inkommer centriskt i knutpunkterna, dels att samtliga ramdelar är ideellt raka och har en sådan slankhetsgrad att de av normalkrafterna orsakade axiella hoptryckningarna av ramdelarna med god approximation kan försummas. Under dessa förutsättningar råder för belastningar, som är mindre än knäckningslasten P_k, endast ett icke-utböjt jämviktsläge med en axialkraftfördelning som svarar mot stångkrafterna i ramkonstruktionens knutpunktsfigur. Då ramverket, sedan knäckningslasten uppnåtts, förs ut i ett utböjt jämviktsläge, uppkommer i ramdelarna böjmoment som i sin tur medför förändringar i axialkraftfördelningen. Dessa förändringar är emellertid av ringa storleksordning och kan därför genomgående med god tillnärmelse försummas vid ramknäckningsberäkningar.

I praktiken uppträder alltid ramknäckningsfenomenet i modifierad form. *Störande effekter inkommer dels från praktiskt ofrånkomlig initialkrokighet och oavsiktlig lastexcentricitet och dels från det förhållandet, att vid ramkonstruktioner axialbelastningen ordinärt uppträder i kombination med transversallast.* Den förstnämnda effekten kan beaktas på i princip samma sätt

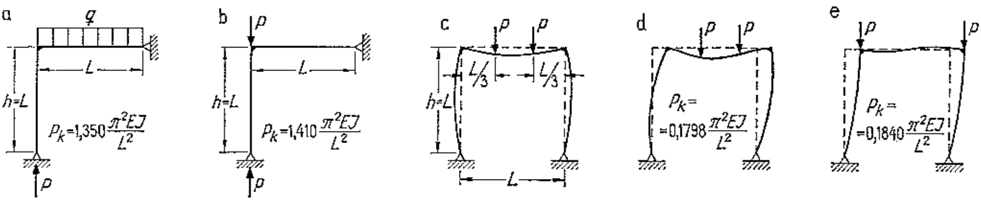


Fig :51 a–e

som vid knäckningsberäkning av tryckt sträva (jfr :34). Den sistnämnda effekten är vid ordinära konstruktionsutformningar försumbar vad gäller utvärdering av den rena knäckningslasten, då definierad enligt excentricitetsmetoden som den last, för vilken utböjningarna beräkningsmässigt blir oändligt stora. Detta illustreras exempelvis av i [73] genomräknat och i fig :51 a och b visat belastningsfall, för vilket en beräkning av knäckningslasten under förutsättning av renodlat knutpunktsangrepp inte ger större avvikelse än 4,4 % från det knäckningsvärde som erhålls ur en noggrannare beräkning med hänsyn tagen till de transversallastmoment som finns i ramen då knäckningslasten uppnås.

Samma förhållande illustreras också av det i fig :51 c–e visade belastningsfallet [87], för vilket motsvarande avvikelse uppgår till 2,3 % (fig :51 d och e). Detta belastningsfall är belysande också ur andra synpunkter. Det visar att en 2-ledsram med fria knutpunktsförskjutningsmöjligheter har en lägsta knäckningslast som svarar mot en antisymmetrisk deformationsfigur även vid symmetrisk last och utformning, vilket lätt inses genom jämförelse med exempelvis de Eulerska knäckningsfallen. Så länge aktuell belastning P är mindre än knäckningslasten P_k karaktäriseras det visade ramverket av en symmetrisk utböjning enligt fig :51 c, vilken emellertid, då knäckningslasten just uppnås, genom horisontell knutpunktsförskjutning diskontinuerligt övergår till att bli osymmetrisk enligt fig :51 d (ty Verzweigung, eng bifurcation). För en mer ingående analys av problemet inverkan av transversallast på ett rambärverks knäckningslast hänvisas till t ex [88].

Med några få undantag är de *beräkningsmetoder* som framlagts i den hållfasthetstekniska litteraturen för undersökning av ramkonstruktioners stabilitet, baserade på *förutsättning av renodlade knutpunktsbelastningar*. I stark dominans är därvid beräkningsmetoder av typen jämviktsmetod (jfr :2), bland vilka kan nämnas betydande arbeten av Zimmermann [89], Bleich [47], [48], Osgood [90], Mises-Ratzersdorfer [37], [91], Prager [92], Chwalla-Jokisch [93], Rambøll [94], Schaber [95], Vetter [96] m fl. Ramknäckningsberäkning enligt energimetod finns genomförd i litteraturen av bl a Kasarnowsky-Zetterholm [97] och Bleich [98]. Ramknäckningsberäkning enligt excentricitetsförfarande slutligen representeras t ex av den av James [99] och Lundquist [100] framlagda successiva momentutjämningsmetoden, i princip en vidareutveckling av Cross metod för beräkning av transversalbelastade ramar samt av det av Klöppel-Ebel [101] angivna förfarandet, vilket kan beskrivas som en utvidgning av Kanis iterationsförfarande till en beräkning av instabilitet och tillhörande andra ordningens spänningsproblem. För en systematiserad ramknäckningsanalys över matrismetoder hänvisas till kap 161 :6 samt till t ex [74] och [102]–[105].

:52 Ramknäckningsberäkning enligt successiv momentutjämningsmetod

:521 Oförskjutbara knutpunkter

Se 161:5

För beskrivning av beräkningsmetodiken vid en stabilitetsundersökning av ramar enligt successiv momentutjämningsmetod studeras den i fig :521 a visade, centriskt knutpunktsbelastade ramkonstruktionen. Om denna i någon knutpunkt, ex 1, störningsbelastas med ett böjmoment M_1, uppkommer ett utböjt jämviktsläge enligt fig :521 b med en vridningsvinkel θ_1 för den momentbelastade knutpunkten. Denna vridningsvinkel ökar med växande axialbelastning och blir enligt excentricitetsmetoden beräkningsmässigt oändlig, då konstruktionens knäckningsbelastning uppnås. Ramverkets knäckningskriterium kan därför skrivas

$$\theta_1 = \infty \qquad (1)$$

Ekv (1), som i sig själv är föga lämpad för numeriska knäckningsberäkningar, låter sig lätt omformas till det praktiskt mer användbara »*styvhetskriteriet*» enligt Lundquist [100]

$$\Sigma S = 0 \qquad (2)$$

vilket innebär att i ramknäckningsögonblicket summan av styvheterna för i knutpunkten 1 anslutande ramdelar = 0. Då knäckningsutböjningen för ramverk med momentstyva förbindningar omfattar hela konstruktionen, följer att ΣS samtidigt måste vara = 0 också för ramverkets övriga knutpunkter [106].

Den i ekv (2) ingående *styvheten S* definieras för exempelvis den i knutpunkten 1 anslutande ramdelen 1–2, fig :521 c, som det böjmoment som måste anbringas i den fritt upplagda änden 1, för att i kombination med verkande axialbelastning P i 1 ge upphov till en stödvinkeländring $\theta_1 = 1$. Den motsatta ramdelsänden 2 förutsätts därvid ha den inspänning som råder i den verkliga ramkonstruktionen. För de båda specialfallen att ramdelsänden 2 är fritt upplagd eller fast inspänd, har styvheterna S' respektive S'' — jfr :422 — grafiskt redovisats i fig :521 d och e såväl för tryckande som för dragande axialbelastning P, varvid som oberoende variabel använts storheten

$$kL = L\sqrt{P/EI} \qquad (3)$$

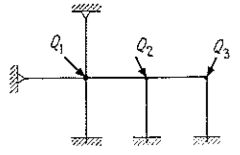


Fig :521 a

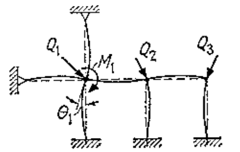


Fig :521 b

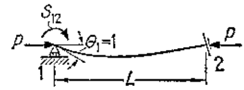


Fig :521 c

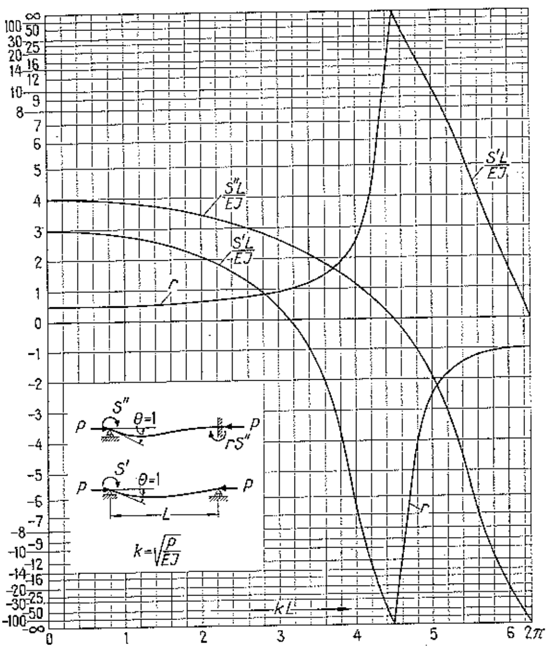


Fig :521 d. [72], [74]–[76], [100], [107], [108] m fl

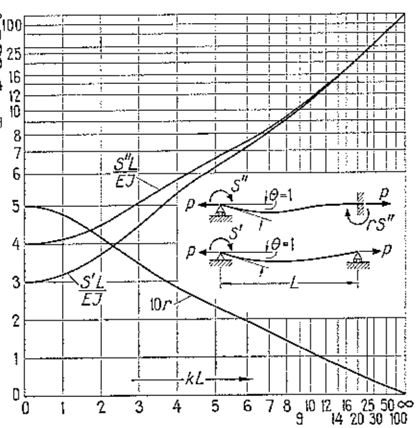


Fig :521 e. [72], [74]–[76], [100], [107], [108] m fl jfr ekv :21 (2). Av figurerna framgår det karaktäristiska förhållandet att en tryckande axialkraft i princip verkar förminskande, en dragande förhöjande på en konstruktions böjstyvhet. Då vid tryck verkande axialbelastning överskrider ramdelens knäckningslast, vilket inträffar för S'-fallet vid $kL=\pi$ och för S''-fallet vid $kL=4{,}493$, övergår ramdelens styvhet från att vara positiv till att bli negativ, vilket medför att böjmomenten S' och S'' byter riktning och därigenom kommer att verka reducerande på den utböjningsandel som härrör från den tryckande axialbelastningen.

Lundquists styvhetskriterium kan med fördel användas vid ramkonstruktioner av den typ som visas i fig :521 f, gemensamt karaktäriserade av att de endast innehåller *en* inre knutpunkt. Under sådana förhållanden kan nämligen de i ekv (2) ingående styvheterna S lätt direkt bestämmas. Vid mer komplicerade utförandeformer däremot är normalt en stabilitetsberäkning ur det »*seriekriterium*», [101], [109], som nedan kommer att beskrivas, att praktiskt föredra framför en behandling enligt styvhetskriteriet.

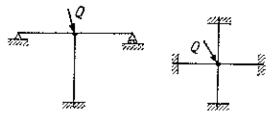


Fig :521 f

I princip grundar sig seriekriteriet på det förhållandet att en successiv momentutjämningsberäkning av en knutpunktsbelastad ramkonstruktion konvergerar, om verkande axialbelastning är mindre än tillhörande knäckningslast, men divergerar, om knäckningslasten överskrids. Tillämpat på exempelvis det i fig :521 b visade rambärverket innebär detta att om vid en successiv utjämning av det i knutpunkten 1 angripande störningsmomentet M_1 summan av de moment, som efter en lösgöring och därpå följande fastlåsning av den momentbelastade knutpunkten återtransporteras till denna, är mindre än M_1, så är konstruktionen under verkande axialbelastning stabil. Blir däremot summan av återtransporterade moment större än M_1, föreligger i stället en labil konstruktion. Gränsfallet, att summan av de återtransporterade momenten blir $=M_1$, svarar mot att aktuell axialbelastning är identisk med rambärverkets knäckningslast. Jfr 161:5

Ramknäckningsberäkning enligt seriekriteriet

Praktiskt kan en ramknäckningsberäkning enligt seriekriteriet lämpligen genomföras enligt följande schema (jfr fig :521 a och b).

1 Bestäm för ett lastsystem nQ, där Q är aktuellt lastsystem och n en på försök vald multiplikator, tillhörande axialkrafter i de olika ramdelarna.

2 Bestäm mot dessa axialkrafter svarande styvheter S' och S'' samt transporttal r för ramdelarna. För ramdel med konstant sektion och normalkraft hämtas därvid dessa storheter enklast ur diagrammen i fig :521 d och e, vilka också klargör storheternas innebörd — jfr också :422.

3 Inför i någon knutpunkt (1) ett yttre störningsmoment $M_1=1$. Fördela och transportera detta moment under antagande av att rambärverkets övriga knutpunkter — utom de som är fritt upplagda — samtliga är fastlåsta mot rotation. De härvid erhållna transporterade momenten utjämnas successivt enligt Cross-metoden under antagande av att knutpunkt 1 hela tiden är fastlåst mot ytterligare rotation. När de härvid till knutpunkt 1 återtransporterade momenten M_t blir så små att de praktiskt kan försummas, avbryts momentutjämningen. Jfr 161:5

4 Bilda summan $\Sigma_1 M_t$ av de vid förfarandet enligt 3 i knutpunkten 1 erhållna, återtransporterade momenten. Beroende på om därvid $\Sigma_1 M_t$ blir <1 eller >1, är valt lastsystem $nQ <$ respektive $>$ den sökta knäckningslasten.

5 Genomför förnyade beräkningar enligt ovan för andra lastvärden nQ, till dess att det nQ-värde, knäckningslasten, som svarar mot $\Sigma_1 M_t=1$ kan bestämmas.

För de flesta praktiska fall torde 2 à 3 beräkningsomgångar vara tillräckliga för att ge den sökta knäckningslasten med erforderlig precision.

Vid höggradigt statiskt obestämda system, exempelvis vid större fackverk med momentstyvt utformade knutpunkter, blir även en knäckningsberäkning enligt seriekriteriet ordinärt mycket mödosam. För sådana fall kan t ex ett av Slavin [110], [111] angivet närmeförfarande rekommenderas, vilket i princip innebär att i stället för en hel fackverkskonstruktion ett antal ur denna approximativt uttagna delsystem, uppbyggda kring ur knäckningssynpunkt kritiska ramdelar, stabilitetsundersöks enligt styvhets- eller seriekriterium var för sig. Jfr också [95].

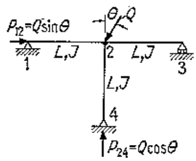


Fig :521 g

Exempel 1. Bestäm för det i fig :521 g visade belastningsfallet den mot knäckning svarande lasten Q_k som funktion av dess lutningsvinkel mot vertikalen θ inom området $0 \leqslant \theta \leqslant 90°$. Konstruktionens samtliga ramdelar förutsätts ha samma längd L och tröghetsmoment I.

Då ramverket endast har *en* inre knutpunkt kan det med fördel stabilitetsberäknas enligt Lundquists styvhetskriterium, ekv (2), vilket nedan genomförs mer i detalj endast för $\theta = 15°$.

Efter jämförelse med exempelvis knäckningsvärdena för Eulers 2. och 3. knäckningsfall, mellan vilka $P_{24k} = Q_k \cos\theta$ måste ligga, väljs på försök $Q_k = 1{,}6\pi^2 EI/L^2$. Häremot svarar enligt ekv (3) och fig :521 d i tabell :521 a angivna värden samt

Tabell :521 a

Ramdel	P	kL	$S=S'$
1–2	0,4141	2,022	2,07
2–3	0	0	3
2–4	1,5455	3,906	−4,96
Mult	$\pi^2 EI/L^2$		EI/L

$$\sum_2 S = 0{,}11\, EI/L$$

dvs $\Sigma_2 S > 0$, vilket betyder att det på försök valda Q_k-värdet är mindre än konstruktionens knäckningslast. En förnyad beräkning för

$$Q_k = 1{,}62\pi^2 EI/L^2$$

ger $\Sigma_2 S = -0{,}27$, varpå genom rätlinig interpolation erhålls för det mot $\Sigma_2 S = 0$ svarande knäckningsvärdet

$$Q_k = 1{,}606\pi^2 EI/L^2$$

Analog kalkyl för andra lutningsvinklar Θ ger för knäckningslasten Q_k värden enligt tabell :521 b av vilken framgår att knäckningslasten Q_k för studerat fall förhållandevis måttligt påverkas av lastriktningen. Orsaken härtill är den att den tryckkraftsminskning, som med växande Θ erhålls i ramdelen 2–4, i knäckningsavseende motverkas av en samtidig tryckkraftsökning i ramdelen 1–2 med minskad böjstyvhet för denna som följd.

Tabell :521 b

Θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	
Q_k	1,598	1,606	1,689	1,761	1,689	1,606	1,598	$\pi^2 EI/L^2$

Exempel 2 [72]. Beräkna knäckningslasten Q_k för den i fig :521 h visade kontinuerliga ramen med lika I och L för samtliga ramdelar.

Tabell :521 c

Ramdel	P	kL	S', S''	r
1–2, 2–3, 3–4	0	0	4	½
4–5	0	0	3	0
1–9	1,45	3,783	1,568	1,805
2–8, 3–7, 4–6	2,9	5,350	−4,20	−1,548
Mult	$\pi^2 EI/L^2$		EI/L	

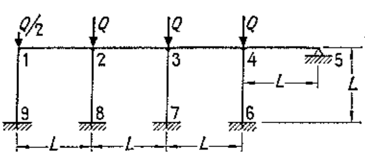


Fig :521 h

Beräkningen genomförs enligt seriekriteriet med ett störningsmoment $M = 1$ applicerat i knutpunkten 3 för

$$Q_k = nQ = \gamma\pi^2 EI/L^2$$

Genom jämförelse med Euler-knäckningsfallen inses därvid att förväntat γ-värde måste ligga mellan 2 och 4, gissningsvis i närheten av 3. På försök väljs $\gamma = 2{,}9$. Häremot svarar enligt ekv (3) och fig :521 d i tabell :521 c angivna ramdelsstorheter.

För tillhörande fördelningstal s beräknas

Jfr 161:5

knutpunkt 1: $s_{12} = S_{12}/\Sigma_1 S = 0{,}718, \quad s_{19} = 1 - s_{12} = 0{,}282$

knutpunkt 2: $s_{21} = s_{23} = 1{,}053, \quad s_{28} = 1 - s_{21} - s_{23} = -1{,}106$

knutpunkt 3: $s_{32} = s_{34} = 1{,}053, \quad s_{37} = 1 - s_{3\_} - s_{34} = -1{,}106$

knutpunkt 4: $s_{43} = 1{,}429, \quad s_{45} = 1{,}071, \quad s_{46} = 1 - s_{43} - s_{45} = -1{,}500$

Fördelningstalen s har införts inramade vid knutpunkterna i fig :521 i, i vilken också transporttalen r angetts vid tillhörande ramdel.

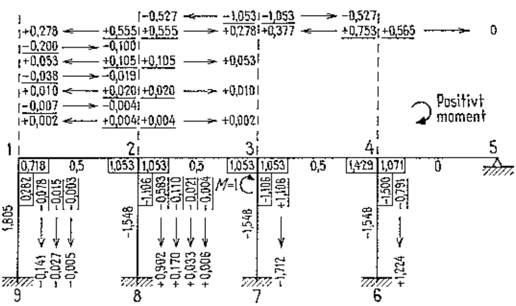


Fig :521 i

Så studeras genom successiv momentutjämning inverkan av ett störningsmoment $M = 1$ i knutpunkten 3. Under antagande av att till en början knutpunkterna 1, 2 och 4 är fastlåsta mot rotation uppkommer av $M = 1$ i de i 3 anslutande ramdelarna fördelade moment i proportion till ramdelarnas fördelningstal s (i 3 − 2 och 3 − 4 $-1{,}053 \cdot 1$; i 3 − 7 $+1{,}106 \cdot 1$). De fördelade momenten transporteras på konventionellt sätt till ramdelarnas bortre ändpunkter. För den fortsatta kalkylen låses knutpunkten 3 fast mot ytterligare rotation, varpå knutpunkterna 1, 2 och 4 successivt lösgörs från sina antagna fastlåsningar, balanseras och därefter ytterligare låses fast mot rotation. Det successiva momentutjämnandet för knutpunkterna 1, 2 och 4 fortsätts, till dess att de moment, som vid varje knutpunkts lösgörande från antagen fastlåsning mot rotation skall balanseras, blir så små att de praktiskt kan försummas. Härvid uppkommer i knutpunkten 3 ett antal återtransporterade moment med en summa $= \Sigma_3 M_t = 0{,}720$, dvs $\Sigma_3 M_t < 1$, varför ramkonstruktionen under det på försök valda lastsystemet $Q_k = nQ$ ($\gamma = 2{,}9$) är stabil.

Betr teckenregler, se 161:5

En analog beräkning för ett lastsystem svarande mot $\gamma = 3$ ger $\Sigma_3 M_t = 1{,}140$, varpå genom rätlinig interpolation erhålls för det till $\Sigma_3 M_t = 1$ hörande γ-värdet 2,97. Ramkonstruktionens knäckningslast blir följaktligen

$$Q_k = nQ = 2{,}97\pi^2 EI/L^2$$

:522 Förskjutbara knutpunkter

Då vid en knutpunktsbelastad ram enligt fig :522a knäckningslasten uppnås, uppkommer vid störning av det raka jämviktsläget i stället ett utböjt jämviktsläge enligt fig :522b, karaktäriserat av att — i motsats till förhållandet vid det i fig :521a visade ramverket — vissa knutpunkter 1 och 2 utöver för rotation också blir utsatta för translation. För detta utböjda jämviktsläge fordras i knäckningsögonblicket förutom de båda Q-lasterna ingen ytterligare belastning i form av exempelvis en i knutpunkten 1 eller 2 angripande horisontalkraft H, vilket däremot är erforderligt vid varje Q-belastning, som är mindre än knäckningslasten, jfr :12. *Knäckningskriteriet för en ramkonstruktion med fria knutpunktsförskjutningsmöjligheter kan därför skrivas* [107]

$$H = 0 \tag{1}$$

Praktiskt kan en *stabilitetskalkyl* med användning av ekv (1) utföras på följande sätt, illustrerat på den i fig :522a visade ramen. För aktuellt lastsystem Q multiplicerat med en på försök vald multiplikator n ges knutpunkterna 1 och 2 under antagande av fastlåsning mot rotation en horisontell translation δ (fig :522c). Därvid i ramdelarnas 1–4 och 2–3 ändpunkter uppkomna inspänningsmoment $M_{14\delta}$ och $M_{41\delta}$ resp $M_{23\delta}$ och $M_{32\delta}$ beräknas. Dessa moment utjämnas därefter genom att de antagna fastlåsningarna mot rotation av knutpunkterna 1 och 2 successivt lösgörs under tillsats av för knutpunkternas jämvikt erforderliga kompensationsmoment samt fördelning och överföring av dessa. Vid avslutad successiv momentutjämning verkar i ramdelarnas 1–4 och 2–3 ändpunkter nu i stället inspänningsmomenten $\overline{M}_{14\delta}$ och $\overline{M}_{41\delta}$ resp $\overline{M}_{23\delta}$ och $\overline{M}_{32\delta}$. Tillhörande horisontella upplagsreaktioner i 3 och 4, $\overline{H}_{3\delta}$ och $\overline{H}_{4\delta}$, beräknas ur jämviktsekvationer för rambenen 1–4 och 2–3 till

$$\left.\begin{aligned} \overline{H}_{3\delta} &= (1/L_{23})(\overline{M}_{23\delta} + \overline{M}_{32\delta} - P_{23}\,\delta) \\ \overline{H}_{4\delta} &= (1/L_{14})(\overline{M}_{14\delta} + \overline{M}_{41\delta} - P_{14}\,\delta) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

varvid för de tryckande axialkrafterna i rambenen gäller $P_{14} = nQ_1$ och $P_{23} = nQ_2$.

För den häremot svarande resultanten

$$H = \overline{H}_{3\delta} + \overline{H}_{4\delta} \tag{3}$$

kan tre fall inträffa, nämligen

1 $H > 0$. För att ett utböjt jämviktsläge enligt fig :522b skall existera, fordras då utöver nQ_1 och nQ_2 också angrepp av en åt vänster riktad horisontalkraft $= H$ i knutpunkten 1 eller 2. För detta fall föreligger därför *stabilitet*.
2 $H < 0$. Den påskjutande effekten av nQ_1- och nQ_2-krafterna är då så stor, att i knutpunkten 1 eller 2 en åt höger riktad, utböjningsbromsande horisontalkraft $= H$ måste anbringas. Konstruktionen är därför för detta fall *labil*.
3 $H = 0$. Konstruktionen övergår då från stabilt till labilt tillstånd, dvs de på försök valda nQ_1- och nQ_2-krafterna är *identiska med den sökta knäckningsbelastningen.*

Den ovan genomgångna beräkningsmetodiken för bestämning av knäckningslasten vid 1-våningsram med fria knutpunktsförskjutningsmöjligheter kan utvidgad tillämpas också vid motsvarande studium av *ramar i flera våningar*.

Förfarandet beskrivs nedan summariskt för det i fig :522d visade *3-våningsrambärverket.*

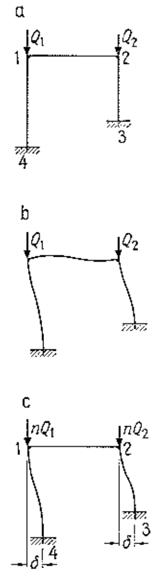


Fig :522a–c

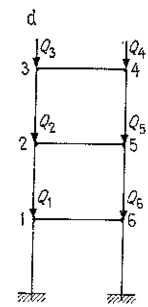


Fig :522d

I en första beräkningsetapp ges rambärverkets knutpunkter 1–6 under antagande av fastlåsning mot rotation renodlade translationsrörelser med tills vidare obekanta, inbördes horisontalförskjutningar δ_1–δ_3 mellan de olika transversalerna, (fig :522e). Därvid i de vertikala ramdelarnas ändpunkter uppträdande inspänningsmoment bestäms och utjämnas successivt. Efter avslutad momentutjämning uppträder i ramen det till den verkliga deformationsfiguren (fig :522f) hörande momenttillståndet. Mot detta svarar i horisontalsnitten I–I, II–II och III–III genom de olika våningarna resulterande horisontalkrafter H_I, H_II resp H_III, vilka kan beräknas ur med ekv (2) och (3) analoga samband och vilka, om verkande belastning Q är identisk med konstruktionens knäckningslast Q_k, samtliga skall bli $=0$. Om så inte blir fallet kan avgöra om vald belastning är $<$ eller $> Q_k$, på exempelvis följande sätt. De resulterande horisontalkrafterna H_I och H_II för våningarna I och II sätts $=0$, varigenom erhålls δ_2 och δ_3 som lineära funktioner av δ_1. Insättning härav i uttrycket för nedersta våningens horisontalresultant H_III, ger denna under formen

$$H_\mathrm{III} = A\delta_1 \tag{4}$$

Beroende på om därvid vid translationsriktning enligt fig :522e A blir $>$ eller <0, är den på försök valda belastningen $<$ resp $>$ knäckningslasten Q_k.

I avsikt att underlätta praktiska beräkningar redovisas i diagrammen i fig :522g och h för axiellt tryckt eller dragen, ensidigt eller tvåsidigt fast in-

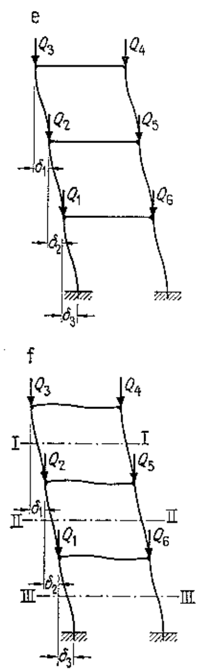


Fig :522e–f

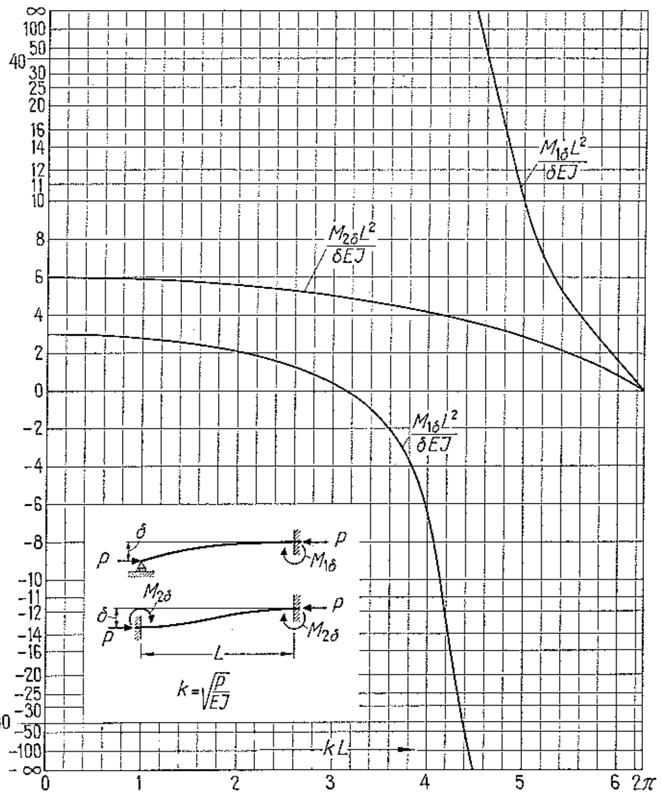
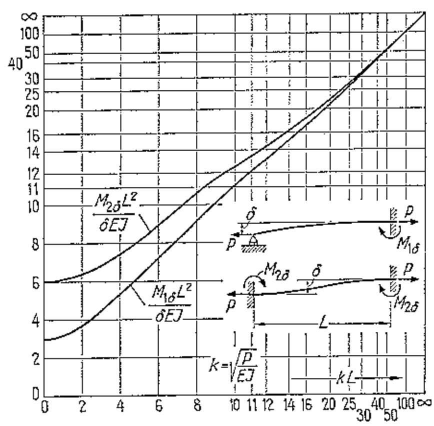


Fig :522g. [72], [74], [75], [107], [108] m fl



Tabell :522

Ramdel	P	kL	S', S''	r	M_δ
1–2, 2–3, 3–4	0	0	4	0,5	—
4–5	0	0	3	0	—
1–9	0,475	2,165	3,33	0,655	5,51
2–8, 3–7, 4–6	0,95	3,062	2,56	0,953	4,99
Mult	π^2EI/L^2		EI/L		$\delta EI/L^2$

Fig :522h. [72], [74], [75], [107], [108] m fl

spänd balk de mot en inbördes knutpunktstranslation δ svarande inspänningsmomenten M_δ — jfr :422. Diagrammen förutsätter balkar med efter sin längd konstant sektion och axialkraft.

Exempel [72]. Beräkna knäckningslasten Q_k för den ovan i exempel 2, avsnitt :521, behandlade kontinuerliga ramen, om för denna fixlagret i knutpunkten 5 ersätts med ett horisontellt glidlager. Genom denna förändring kan ramen knäckningsdeformeras med horisontell förskjutning av knutpunkterna 1–5, vilket *väsentligt reducerar konstruktionens knäckningslast.*

Inverkan av en åt vänster riktad translation δ av knutpunkterna 1–5 studeras för ett efter jämförelse med exempelvis Euler-knäckningsfallen på försök valt knäckningslastvärde

$nQ = \gamma\pi^2EI/L^2 = 0{,}95\pi^2EI/L^2$

Häremot svarar vid mot rotation fastlåsta knutpunkter 1–4 för de olika ramdelarna styvhetstal S', S'' och transporttal r samt för rambenens ändpunkter inspänningsmoment M_δ, för vilka ur fig :521d och :522g tabell :522 erhålls.

För tillhörande fördelningstal s beräknas

knutpunkt 1: $s_{12} = 0{,}546$, $s_{19} = 0{,}454$
knutpunkt 2: $s_{21} = s_{23} = 0{,}379$, $s_{28} = 0{,}242$
knutpunkt 3: $s_{32} = s_{34} = 0{,}379$, $s_{37} = 0{,}242$
knutpunkt 4: $s_{43} = 0{,}418$, $s_{45} = 0{,}314$, $s_{46} = 0{,}268$

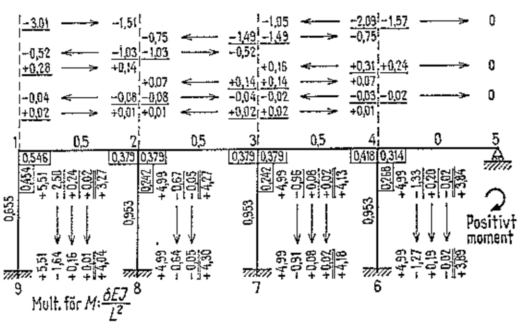


Fig :522 i

En successiv utjämning av inspänningsmomenten M_δ har genomförts i fig :522i. Därvid erhållna slutmoment $\overline{M}_\delta$ finns, vad gäller rambenen, angivna i figuren under $=\!=\!=$. Mot dessa svarande resultant H till rambenens horisontella upplagsreaktioner $\overline{H}_\delta$ beräknas ur ekv (2) och (3) till

$$\overline{H}_{91\delta} = (1/L)[(4{,}04+3{,}27)\delta EI/L^2 - 0{,}475\pi^2 EI\delta/L^2] = 2{,}62\delta EI/L^3$$

$$\overline{H}_{82\delta} = -0{,}81\delta EI/L^3,\ \overline{H}_{73\delta} = -1{,}07\delta EI/L^3,\ \overline{H}_{64\delta} = -1{,}65\delta EI/L^3$$

$$H = \Sigma \overline{H}_\delta = -0{,}91\delta EI/L^3 < 0$$

varav följer att på försök vald belastning med $\gamma = 0{,}95$ är större än konstruktionens knäckningslast.

En förnyad beräkning för belastning svarande mot $\gamma = 0{,}9$ ger

$$H = 1{,}45\delta EI/L^3 > 0$$

varpå genom rätlinig interpolation för det till $H = 0$ hörande knäckningslastvärdet erhålls

$$Q_k = 0{,}930\pi^2 EI/L^2$$

Knäckningslasten uppgår således för det fall att knutpunkten 5 är utformad som horisontellt glidlager endast till 31,3 % av knäckningslasten för motsvarande ram med fixlager i knutpunkten 5.

:53 Närmemetod för beräkning av tilläggsmoment vid samtidigt axial- och transversalbelastade ramar

På elasticitetsteori baserade metoder för beräkning av tilläggsmoment vid samtidigt axial- och transversalbelastade rambärverk (andra ordningens teori) anges i t ex [48], [72], [73], [87], [112], [113]. En översikt av olika metoder lämnas i [114]. För en systematiserad behandling över matrismetoder hänvisas till kap 161 :6 samt till t ex [102]–[104]. I här aktuellt sammanhang begränsas framställningen till en illustration genom några genomräknade exempel av i [72] framlagd beräkningsmetod, vilken i princip kan sägas vara en *kombination av den i* :43 *beskrivna approximativa beräkningstekniken för axial- och transversalbelastade balkar och av en vidareutvecklad Cross-metod.*

Se 161:5

:531 Oförskjutbara knutpunkter

Exempel 1 [72]. **Ram med från början kända axialkrafter**

Beräkna stödmomenten för den i fig :531a visade, axial- och samtidigt transversalbelastade, kontinuerliga balken, vilken kan vara exempelvis en

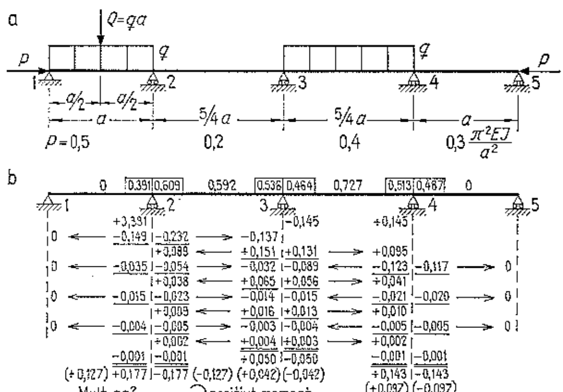


Fig :531a–b

genomgående övre stång i en fackverksbalk. Tröghetsmomentet I förutsätts konstant och lika i samtliga fack.

Först beräknas med hänsyn tagen till verkande axialkrafter P styvhetstal S', S'', transporttal r samt inspänningsmoment M vid mot rotation fastlåsta knutpunkter 2, 3 och 4.

Fack 1–2: Ekv :521 (3) och fig :521 d ger $P=0{,}5\pi^2EI/a^2$; $kL=2{,}22$; $S'=1{,}83EI/a$; $r=0$ varpå med den i :43 redovisade närmemetoden beräknas

$M_{21t}=-(3/16)Qa-(1/8)qa^2=-(5/16)qa^2$ (tabell 1:39 i 1B)

$b_x M_{21t}=0{,}354(5/32)Qa+0{,}377(1/8)qa^2=0{,}1025qa^2$ (fig :452 j och k)

$P_k=2{,}046\pi^2EI/a^2$ (ekv :31 (3)); $P/P_k=0{,}244$; $M_{21}=-0{,}381qa^2$

(ekv :43 (10))

Fack 2–3: $P=0{,}2\pi^2EI/a^2$; $kL=1{,}756$; $S''=3{,}58\cdot 4EI/5a=2{,}86EI/a$; $r=0{,}592$

Fack 3–4: $P=0{,}4\pi^2EI/a^2$; $kL=2{,}48$; $S''=3{,}10\cdot 4EI/5a=2{,}48EI/a$; $r=0{,}727$

$M_{34t}=-(25/192)qa^2$; $b_x M_{34t}=0{,}0499qa^2$; $P_k=2{,}56\pi^2EI/a^2$; $P/P_k=0{,}1563$;

$M_{34}=-0{,}145qa^2$; $M_{43}=+0{,}145qa^2$

Fack 4–5: $P=0{,}3\pi^2EI/a^2$; $kL=1{,}721$; $S'=2{,}35EI/a$; $r=0$

Tillhörande fördelningstal s; knutpunkt 2: $s_{21}=0{,}391$; $s_{23}=0{,}609$
knutpunkt 3: $s_{32}=0{,}536$; $s_{34}=0{,}464$
knutpunkt 4: $s_{43}=0{,}513$; $s_{45}=0{,}487$

På basis av de ovan beräknade grundstorheterna kan nu en successiv utjämning enligt det ordinära Cross-förfarandet genomföras av de under antagande av mot rotation fastlåsta knutpunkter verkande inspänningsmomenten M_{21}, M_{34} och M_{43}.

En sådan utjämning, redovisad i fig :531 b, resulterar i slutmoment M, vilka utgör summan av startmoment, fördelade moment och transporterade moment, och vilka finns angivna i fig :531 b under ═══. Som jämförelse anges inom parentes de momentvärden, som erhålls vid en beräkning utan hänsyn tagen till axialkrafternas effekt.

Exempel 2 [72]. **Ram med från början obekanta axialkrafter**

Beräkna för den i fig :531 c visade ramkonstruktionen stödmomenten i knutpunkterna 2 och 3, om samtliga ramdelar har lika styvhet EI.

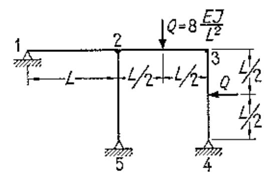


Fig :531 c

Konstruktionen skiljer sig i princip från den i exempel 1 behandlade därigenom att de olika ramdelarnas axialkrafter bestäms av det slutgiltiga momenttillståndet och därför inte är kända vid momentberäkningens början. Det sökta sluttillståndet måste till följd härav itereras fram genom en serie av successiva momentutjämningsprocesser.

I en första beräkningsetapp bestäms stödmomenten i 2 och 3 genom ett ordinärt Cross-förfarande utan hänsyn tagen till tillskottsmoment från axialkrafterna. En sådan beräkning ger för stödmomenten värdena (↷ = positivt moment)

$$\overline{M}_{21}=0{,}0341QL;\ \overline{M}_{23}=-0{,}0682QL;\ \overline{M}_{25}=0{,}0341QL;\ \overline{M}_{32}=-\overline{M}_{34}=0{,}1704QL \qquad \text{(a)}$$

med tillhörande tryckande axialkrafter, som ur jämviktsekvationer för de olika ramdelarna bestäms till

$$P_{12}=0{,}636Q;\ P_{23}=0{,}670Q;\ P_{34}=0{,}602Q;\ P_{25}=0{,}432Q \qquad \text{(b)}$$

I nästa beräkningsetapp genomförs så en successiv momentutjämning under förutsättning av en axialkraftfördelning enligt ekv (b). Därvid erhålls

$$\overline{M}_{21}=0{,}0294QL;\ \overline{M}_{23}=-0{,}0659QL;\ \overline{M}_{25}=0{,}0365QL;\ \overline{M}_{32}=-\overline{M}_{34}=0{,}2101QL \qquad \text{(c)}$$

och $P_{12}=0{,}674Q$; $P_{23}=0{,}710Q$; $P_{34}=0{,}642Q$; $P_{25}=0{,}385Q$ (d)

En förnyad successiv momentutjämning med axialkraftsvärden enligt ekv (d) ger

$$\overline{M}_{21} = 0{,}0279QL;\ \overline{M}_{23} = -0{,}0660QL;\ \overline{M}_{25} = 0{,}0381QL;\ \overline{M}_{32} = -\overline{M}_{34} = 0{,}2136QL \qquad \text{(e)}$$

och $P_{12} = 0{,}676Q;\ P_{23} = 0{,}714Q;\ P_{34} = 0{,}648Q;\ P_{25} = 0{,}380Q$ (f)

moment- och axialkraftsvärden, som mycket nära överensstämmer med de slutvärden, som erhålls efter ytterligare successiva momentutjämningsprocesser, och som uppgår till

$$\overline{M}_{21} = 0{,}0278QL;\ \overline{M}_{23} = -0{,}0660QL;\ \overline{M}_{25} = 0{,}0382QL;\ \overline{M}_{32} = -\overline{M}_{34} = 0{,}2139QL \qquad \text{(g)}$$

och $P_{12} = 0{,}676Q;\ P_{23} = 0{,}714Q;\ P_{34} = 0{,}648Q;\ P_{25} = 0{,}380Q$ (h)

:532 Förskjutbara knutpunkter

Vid en successiv momentutjämningsberäkning av axial- och transversalbelastade ramkonstruktioner med förskjutbara knutpunkter måste förutom axialkraftfördelningen också knutpunkternas translationer itereras fram genom en serie successiva momentutjämningsprocesser. En lösningsväg är därvid den i efterföljande exempel demonstrerade.

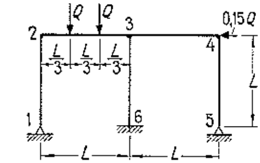
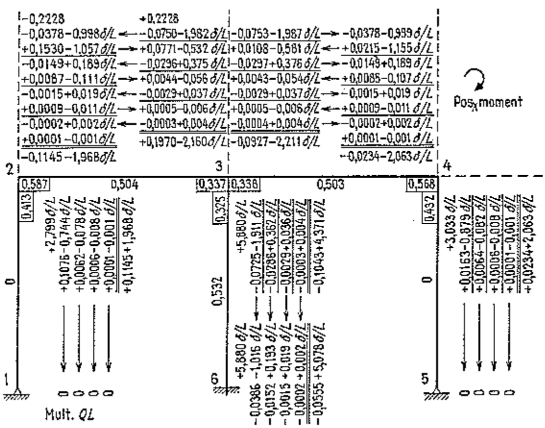


Fig :532a

Exempel [72]. Vid det i fig :532a visade rambärverket har samtliga ramdelar lika styvhet EI. Beräkna inspänningsmomenten i 2, 3, 4 och 6, om $Q = EI/L^2$



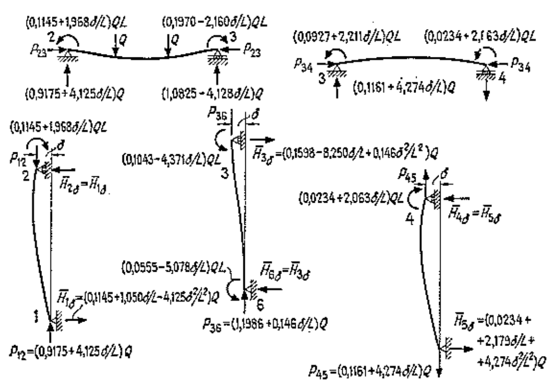


Fig :532b

I en första beräkningsetapp bestäms inspänningsmomenten med hänsyn tagen till knutpunkternas 2, 3 och 4 translation δ men utan hänsyn tagen till tillskottsmoment från axialkrafterna. En sådan beräkning, vars utförande är analogt med det i fig :532b visade, ger en åt vänster riktad translation

$$\delta = 0{,}01218L \tag{a}$$

samt inspänningsmoment (↷ = positivt moment)

$$\overline{M}_{21} = -\overline{M}_{23} = 0{,}1428QL;\ \overline{M}_{32} = 0{,}1684QL;\ \overline{M}_{34} = -0{,}1172QL;$$

$$\overline{M}_{36} = -0{,}0512QL;\ \overline{M}_{43} = -\overline{M}_{45} = -0{,}0475QL;\ \overline{M}_{63} = 0{,}0110QL \tag{b}$$

De häremot svarande axialkrafterna för de olika ramdelarna beräknas ur jämviktsekvationer till

$$P_{12} = 0{,}9744Q(\text{tryck});\ P_{23} = 0{,}1428Q(\text{tryck});\ P_{34} = 0{,}1026Q(\text{tryck});$$

$$P_{45} = 0{,}1647Q(\text{dragning});\ P_{36} = 1{,}1903Q(\text{tryck}) \tag{c}$$

I nästa beräkningsetapp bestäms inspänningsmomenten med hänsyn tagen till såväl knutpunktsförskjutningen som tillskottsmoment från axialkrafterna, varvid axialkrafterna antas fördelade enligt ekv (c). Ur diagrammen i fig :521d–e och :522g–h samt med användning av den i :43 redovisade närmemetoden erhålls följande grundstorheter

1–2: $P = 0{,}9744EI/L^2;\ kL = 0{,}9871;\ S' = 2{,}799EI/L;\ r = 0;$
$M_{21\delta} = 2{,}799\delta EI/L^2$

2–3: $P = 0{,}1428EI/L^2;\ kL = 0{,}3779;\ S'' = 3{,}981EI/L;\ r = 0{,}504;$
$M_{23} = -M_{32} = -0{,}2228QL$

3–4: $P = 0{,}1026EI/L^2;\ kL = 0{,}3203;\ S'' = 3{,}986EI/L;\ r = 0{,}503$

4–5: $P = 0{,}1647EI/L^2;\ kL = 0{,}4058;\ S' = 3{,}033EI/L;\ r = 0;$
$M_{45\delta} = 3{,}033\delta EI/L^2$

3–6: $P = 1{,}1903EI/L^2;\ kL = 1{,}0910;\ S'' = 3{,}839EI/L;\ r = 0{,}532;$
$M_{36\delta} = M_{63\delta} = 5{,}880\delta EI/L^2$ (d)

med de tillhörande fördelningstalen 2: $s_{21} = 0{,}413;\ s_{23} = 0{,}587$
3: $s_{32} = 0{,}337;\ s_{34} = 0{,}338;\ s_{36} = 0{,}325$
4: $s_{43} = 0{,}568;\ s_{45} = 0{,}432$ (e)

På grundval av de i ekv (d) och (e) sammanställda grundstorheterna genomförs så en successiv momentutjämning enligt fig :532b. Därvid erhålls för de utjämnade inspänningsmomenten uttryck, som beror av den ännu så länge obekanta translationen δ. För bestämning av denna beräknas ur jämviktsekvationer för varje ramdel axialkrafter och upplagsreaktioner enligt nedre hälften av fig :532b, varpå jämviktsvillkoret

$\overline{H}_{1\delta} + \overline{H}_{5\delta} - \overline{H}_{6\delta} = 0{,}15Q$ (f) ger $\delta = 0{,}01498L$ (g)

De häremot svarande inspänningsmomenten och axialkrafterna beräknas ur fig :532b till

$$\overline{M}_{21} = -\overline{M}_{23} = 0{,}1440QL;\ \overline{M}_{32} = 0{,}1646QL;\ \overline{M}_{34} = -0{,}1258QL;$$

$$\overline{M}_{36} = -0{,}0388QL;\ \overline{M}_{43} = -\overline{M}_{45} = -0{,}0543QL;\ \overline{M}_{63} = 0{,}0206QL \tag{h}$$

$$P_{12} = 0{,}9793Q(\text{tryck});\ P_{23} = 0{,}1293Q\ (\text{tryck});\ P_{34} = 0{,}0931Q\ (\text{tryck});$$

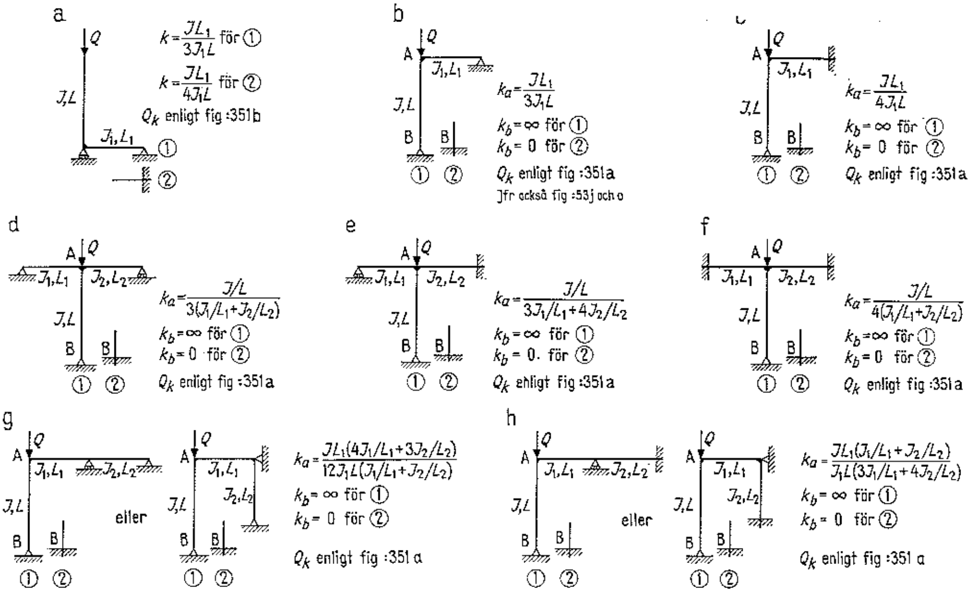
$$P_{45} = 0{,}1801Q\ (\text{dragning});\ P_{36} = 1{,}2008Q\ (\text{tryck}) \tag{i}$$

En förnyad iterationsberäkning, baserad på en axialkraftfördelning enligt ekv (i) resulterar i inspänningsmoment och axialkrafter, som med mindre än $^1/_2$% avviker från de ovan i beräkningsetapp 2 erhållna. I detta speciella exempel är alltså en kalkyl med två successiva momentutjämningsprocesser för ordinärt praktiskt bruk tillräcklig.

:54 Systematiserad beräkning över matrismetoder av samtidigt axial- och transversalbelastade ramar

Se kap 161:6.

:55 Diagram



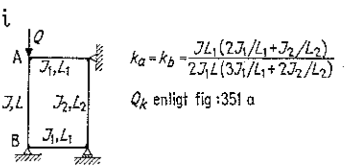


Fig :55a–i. Rambärverk av typen tryckt ramben anslutet till balkar med ur knäckningssynpunkt försumbar normalkraft

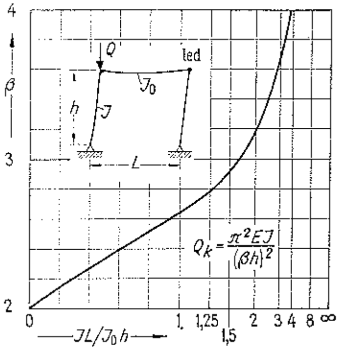
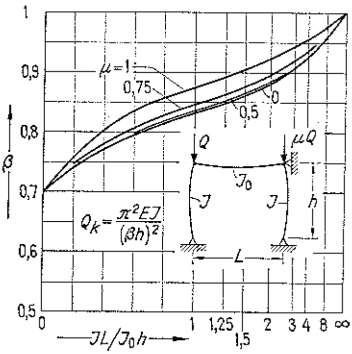


Fig :55j, t v. 3-ledsram. [115]. Om leden är fasthållen i sidled motsvaras detta av fall ① i fig :55b. I [115] behandlas utöver det i figuren visade fallet också fallet att Q angriper rambenet på godtyckligt vald höjd

Fig :55k, t h. 2-ledsram. ($\mu=1$ i [2], [87] m fl). Fallet att Q-krafterna angriper på godtyckligt vald höjd finns behandlat för $\mu=1$ i [115]. I [116] redovisas i allmän form knäckningsekvationerna för 2-ledsram med olika styvhet för de båda rambenen



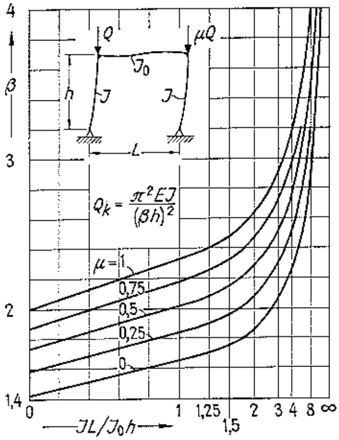
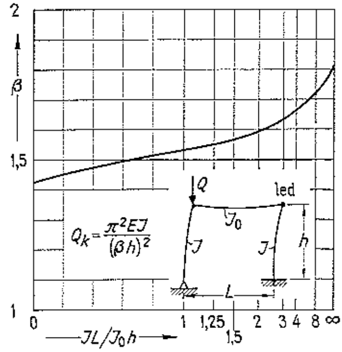


Fig :55 l, t v. 2-ledsram. ($\mu=1$ i [1], [2], [87], [115] m fl). Fallet att Q angriper på godtyckligt vald höjd behandlas för $\mu=1$ i [115]. I [116] redovisas i allmän form knäckningsekvationerna för 2-ledsram med olika styvhet för de båda rambenen

Fig :55 m, t h. 2-ledsram



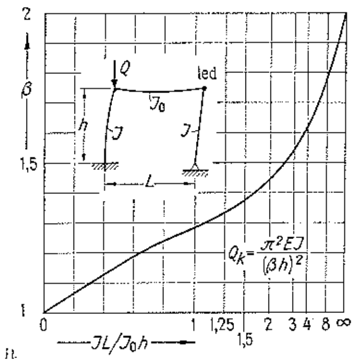
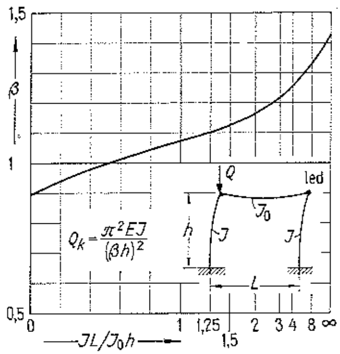


Fig :55n, t v. 2-ledsram

Fig :55o, t h. 1-ledsram. Om leden är fasthållen i sidled, motsvaras detta av fall ② i fig :55b



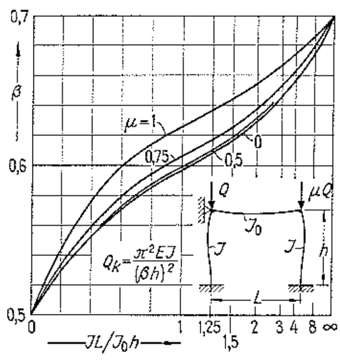
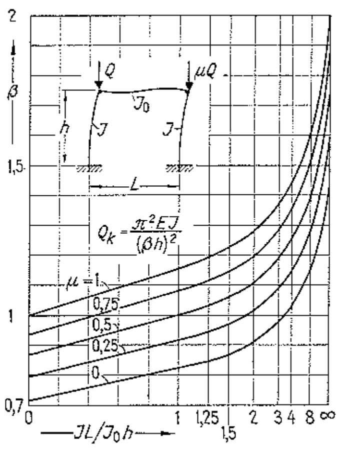


Fig :55p, t v. 0-ledsram. ($\mu=1$ i [2], [87] m fl). För elastiskt inspända ramben hänvisas till [89]

Fig :55q, t h. 0-ledsram ($\mu=1$ i [2], [87] m fl). För elastiskt inspända rambe hänvisas till [89]



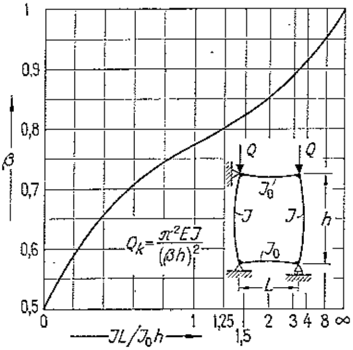


Fig :55r, t v. [1], [32]. Sluten ram

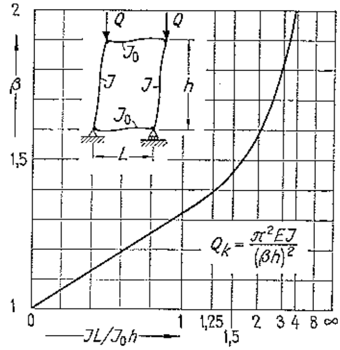


Fig :55s, t h. [32]. Sluten ram

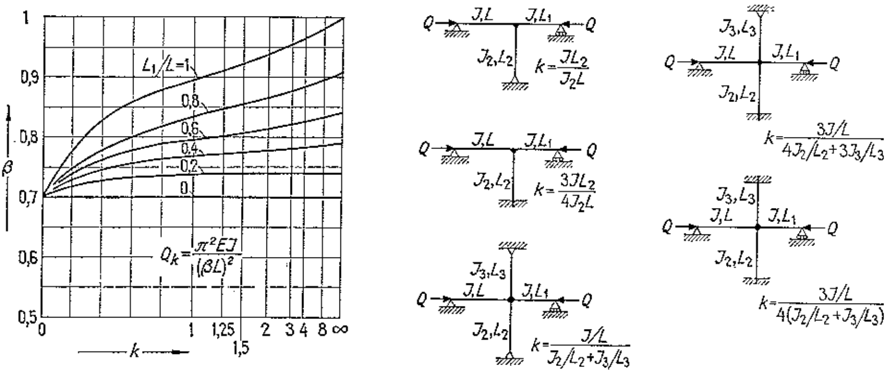


Fig :55t. [32]. Kontinuerliga rambärverk

För knäckning av envåningsram med för rambenen språngvis föränderlig sektion och normalkraft hänvisas till [117].

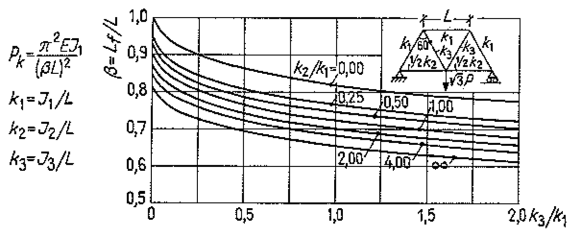


Fig :55u. [118]. Rambärverk i form av tre liksidiga triangelfält

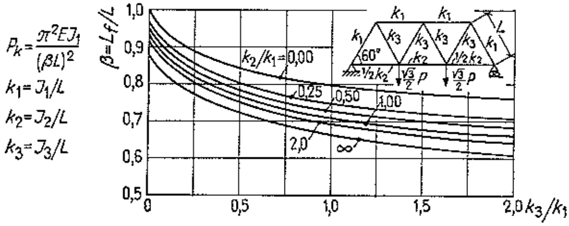
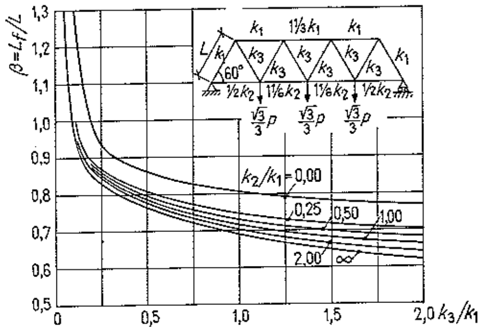
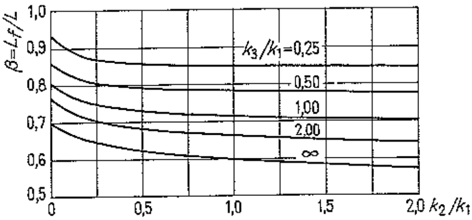


Fig :55v. [118]. Rambärverk i form av fem liksidiga triangelfält





$P_k = \pi^2 EJ_1/(\beta L)^2$, $k_1 = J_1/L$, $k_2 = J_2/L$, $k_3 = J_3/L$

Fig :55x. [118]. Rambärverk i form av sju liksidiga triangelfält

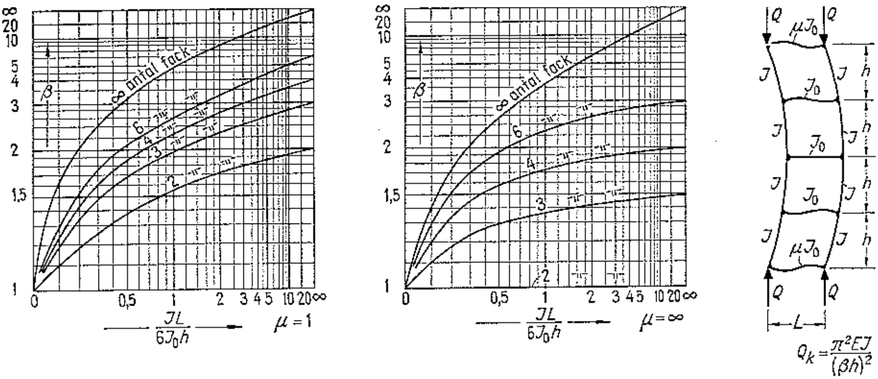


Fig :55y. Flervåningsram. [78], [91], [119]–[122]. För beräkning av det allmännare fallet med olika styvheter och axialkrafter i de olika våningarna hänvisas till bl a [121] och [123]. Närmeformler för detta fall anges i [124] för upp till 4-våningsram

De i fig :55y redovisade diagrammen kan tillämpas också för en beräkning av den elastiska knäckningslasten Q_k för en enligt fig :55 z utformad flervåningsram i m horisontalfack, om ingångsstorheten $IL/6I_0h$ utbyts mot

$$\eta(m)\, IL/6I_0 h$$

För koefficienten $\eta(m)$ gäller därvid följande tabell [125].

m	1	2	3	4	6	8	∞
$\eta(m)$	1	1,577	1,768	1,854	1,927	1,961	2

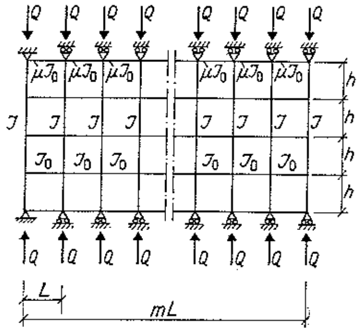


Fig :55z

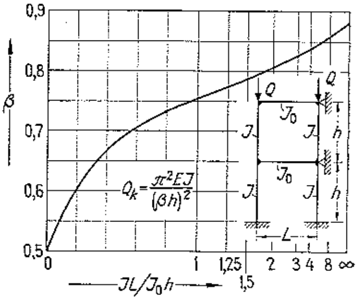
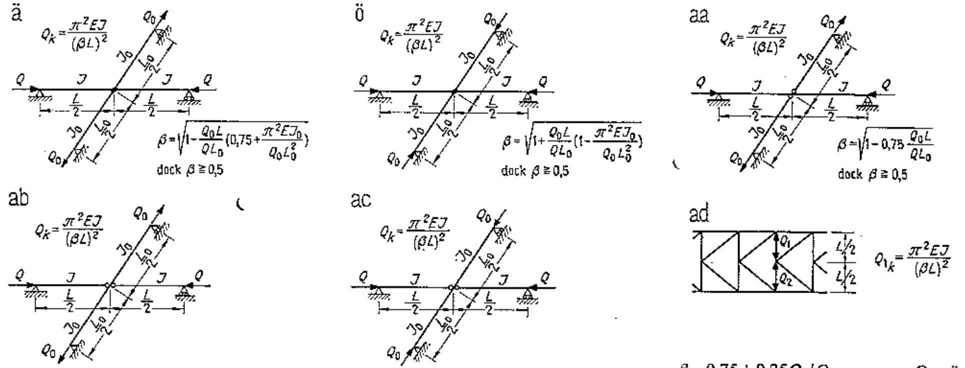


Fig :55å. 2-våningsram [48]



$\beta=0{,}5$ oinskränkt, om $Q_0L/QL_0 \geqslant 1$. Om $Q_0L/QL_0<1$, får räknas med $\beta=0{,}5$ endast om vid böjning ⊥ fackverkets plan $EI_0 \geqslant s_k(QL_0^3/12L)$ $(1-Q_0L/QL_0)$, där s_k=för tryckstaven Q fordrad knäcksäkerhet

$\beta=0{,}5$, om tryckstaven Q_0 vid böjning ⊥ fackverkets plan uppfyller kravet $EI_0 \geqslant s_k(QL_0^3/12L)[(1+1{,}21$ $Q_0L/QL_0)$. För $s_k \leqslant 2{,}5$ måste dessutom tryckstaven Q_0 kontrolleras för knäckning, varvid sätts $\beta_0=1/\sqrt{1-QL_0^3/12EI_0L}$

$\beta=0{,}75+0{,}25Q_2/Q_1$, om Q_2 är tryckkraft $\leqslant Q_1$. Om Q_2 är dragande, insätts det med minustecken med tillseende av att $\beta \geqslant 0{,}5$. För specialfallet att strävan 1–2 utformas som enkel likformig L-profil rekommenderas i [126] en beräkning med $\beta=0{,}84+0{,}17\ Q_2/Q_1$

Fig :55ä–ad. Knäckning av ramverk ⊥ deras plan. [27], [31]

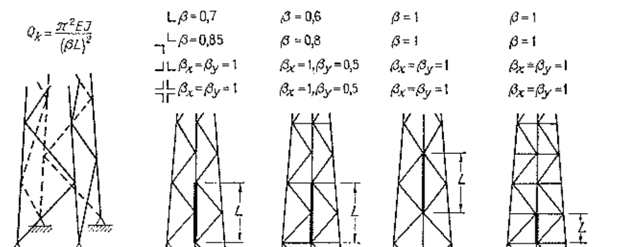


Fig :55ae. Fiktiv knäcklängd βL för hörnsträva vid i huvudsak *böjningsbelastad* fackverksmast, [27], [126]

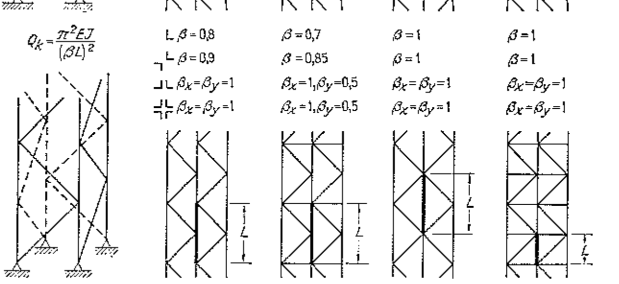


Fig. :55af. Fiktiv knäcklängd βL för hörnsträva vid i huvudsak *axiellt tryckbelastad* fackverksmast, [27,] [126]

Litteratur

Av i nedanstående litteraturförteckning medtagna hänvisningar är [1], [2], [5], [6], [9], [36], [37], [48], [72], [73], [104] och [127] *allmänna arbeten* som behandlar större delar av knäckningsområdet, de övriga hänvisningarna *specialarbeten* över mer avgränsade knäckningsproblem.

[1] Timoshenko, S och Gere, J M: *Theory of elastic stability*. New York–Toronto–London 1961

[2] Kollbrunner, C och Meister, M: *Knicken, Biegedrillknicken, Kippen*. Berlin–Göttingen–Heidelberg 1961

[3] Wästlund, G och Bergström, S G: *Buckling of compressed steel members*. KTH handlingar nr 30. Stockholm 1949

[4] Klöppel, K och Jungbluth, O: *Beitrag zum Durchschlagproblem dünnwandiger Kugelschalen*. Der Stahlbau (22) 1953, s 121. Berlin

[5] Asplund, S O och Edlund, B: *Stabilitetsproblem inom bärverksstatiken*. CTH, Institutionen för byggnadsstatik. Publikation 64:7. Göteborg 1964

[6] Belluzzi, O: *Scienza delle costruzioni*. Vol 4. Bologna 1955

[7] Ziegler, H: *Linear elastic stability*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, Heft 2 und 3 1953. Berlin

[8] Herrmann, G: *Stability of equilibrium of elastic systems subjected to nonconservative forces*. Applied mechanics reviews. Vol 20, No 2. Easton 1967

[9] Hartmann, F: *Knickung, Kippung, Beulung*. Leipzig–Wien 1937

[10] Pettersson, O: *Ett icke-konservativt knäckningsproblem*. Festskrift till professor Carl Forssell. Stockholm 1956

[11] Osgood, W R: *The double-modulus theory of column action*. Civil engineering (5) 1935, s 173. New York

[12] Shanley, F R: *The column paradox*. Journal of the aeronautical sciences, s 678. New York 1946

[13] Horsfall, W P och Sandorff, P E: *Strain distribution during column failure*. Lockhead aircraft corporation. Report No 5728. 1946

[14] Kármán, T von: *Untersuchungen über Knickfestigkeit*. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens Nr 81. Berlin 1910

[15] Chwalla, E: *Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl*. Akademie der Wissenschaften in Wien. Sitzungsberichte Abteilung II a, Bd 137, s 469. 1928

[16] Ježek, K: *Die Tragfähigkeit des exzentrisch beanspruchten und des querbelasteten Druckstabes aus einem ideal-plastischen Material*. Akademie der Wissenschaften in Wien. Sitzungsberichte Abteilung II a, Bd 143. 1934

[17] Massonnet, C: *Réflexions concernant l'établissement de prescriptions rationnelles sur le flambage des barres en acier*. L'Ossature métallique 1950, s 358

[18] Nylander, H: *Dimensionering av tryckta stålsträvor* (rotaprint). Stockholm 1952

[19] Ylinen, A: *Über die Festigkeit von gedrückten Holzstäben*. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. Abhandlung, 26. Band, s 611. Zürich 1966

[20] Baehre, R: *Theoretische Untersuchungen zum Tragverhalten von Druckstäben aus elastoplastischem Material*. Byggforskningen. Rapport 31/68. Stockholm 1968

[21] *Stålbyggnadsnorm* 70. Statens stålbyggnadskommitté. StBK-N1

[22] Beedle, L S och Tall, L: *Basic column strength*. Proceedings, ASCE, struct div, juli 1960. New York

[23] Alpsten, G: *Egenspänningar i varmvalsade stålprofiler*. KTH, Institutionen för brobyggnad. Stockholm 1967

[24] Beer, H: *Beitrag zur Stabilitätsuntersuchung von Stabwerken mit Imperfektionen*. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. Abhandlung, 26. Band, s 43. Zürich 1966

[25] Batterman, R H och Johnston, B G: *Behavior and maximum strength of metal columns*. Proceedings, ASCE, struct div, april 1967. New York

[26] Nylander, H: *I-balk med initialspänningar initiellt utböjd och åverkad av excentrisk tryckkraft. Utböjning i veka riktningen. Bedömning med utgång från idealiserat tvärsnitt*. KTH, Institutionen för byggnadsstatik. Meddelande 74. Stockholm 1968

[27] DIN 4114. *Stabilitätsfälle* (Knickung, Kippung, Beulung)

[28] Reinitzhuber, F: *Das Knicken gerader Stäbe mit linear veränderlicher Längskraft in elastischen und unelastischen Bereich*. Bautechnik-Archiv, Heft 11. Berlin 1955

[29] Nøkkentved, C: *Elastisk indspændte søjler*. Bygningsstatiske meddelelser. Vol 4, s 21. Köpenhamn 1930

[30] Pettersson, O: *Approximativ metod för beräkning av tryckta eller dragna och samtidigt transversalbelastade balkar*. KTH, Institutionen för byggnadsstatik. Meddelande 20. Stockholm 1953

[31] *Aluminiumkonstruktioner. Stabilitetsproblem*. SVRs aluminiumnormkommitté. Stockholm 1970

[32] Langendonck, T van: *Cálculo de concreto armado*. Bd 1. São Paulo 1954

[33] Dondorff, J: *Knickfestigkeit des geraden Stabes mit veränderlichem Querschnitt und veränderlichem Druck*. Diss. Aachen 1907

[34] Dinnik, A N: *Iswestia gornogo instituta*, Ekaterinoslav 1914 och *Westnik Ingenerow*, Moscow 1916

[35] Kollbrunner, C F, Milosavljevic, S och Hajdin, N: *Knickdiagramme für Stäbe mit sprungweise veränderlichem Trägheitsmoment*. Mitteilungen, Forschung und Konstruktion im Stahlbau, Heft 24, 1959 och Heft 27, 1960. Zürich

[36] Pflüger, A: *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*. Berlin–Göttingen–Heidelberg 1964

[37] Ratzersdorfer, J: *Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken*. Wien 1936

[38] Tölke, F: *Über die Bemessung von Druckstäben mit veränderlichem Querschnitt*. Der Bauingenieur 1930, s 500. Berlin

[39] Fogel, C M och Ketter, R L: *Elastic strength of tapered columns*. Proceedings, ASCE, struct div, oktober 1962. New York

[40] Likar, O: *Verformungsmomente und Knicklasten hoher konischer Türme*. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 6 och 7. Berlin 1968

[41] Likar, O: *Knicklast am schmalen Fuss eingespannter, am Kopf beweglicher, konischer Stäbe*. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 9. Berlin 1969

[42] Eibl, J: *Knicklänge der Kragstütze mit sprunghaft veränderlichem Trägheitsmoment*. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 6. Berlin 1968

[43] Olsson, R Gran: *Elastische Knickung gerader Stäbe, die als Säulen von konstanter Druckspannung ausgebildet sind*. Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaues, Heft 6. Berlin 1943

[44] Heintzelmann, F: *Knickung und Knickbiegung von Stabzügen*. Jahrbuch deutscher Luftfahrt-Forschung 1940. s 825

[45] Zöphel, J: *Knicklängen von Zwei-Feld-Druckstäben*. Die Bautechnik, Heft 7. Berlin 1970

[46] Andrews, W A: *Where should a steel column be spliced.* Civil engineering 1955, s 368

[47] Bleich, F: *Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen.* Der Eisenbau 1919, s 27, 71, 117, 163

[48] Bleich, F: *Buckling strength of metal structures.* New York–Toronto–London 1952

[49] Pettersson, O: *Cirkulatorisk instabilitet vid tryckta strävor och plattor.* LTH, Institutionen för byggnadsstatik. Lund 1969

[50] Hauger, W: *Die Knicklasten elastischer Stäbe unter gleichmässig verteilten und linear veränderlichen, tangentialen Druckkräften.* Ingenieur-Archiv, s 221. Berlin 1966

[51] Lazard, A: *Flambement en milieu élastique discontinu.* Annales des ponts et chaussées 1946. s 289

[52] Schibler, W: *Das Tragvermögen der Druckgurte offener Fachwerkbrücken mit parallellen Gurtungen.* Mitteilungen aus dem Institut für Baustatik Nr 19. ETH. Zürich 1946

[53] Eb, W J van der: *Over enige bijzondere knikgevallen.* Commissie inzake onderzoek van constructies TNO. Rapport St I-9-4022. Delft 1952

[54] Hetényi, M: *Beams on elastic foundation.* Ann Arbor, Michigan 1946

[55] Granholm, Hj: *On the elastic stability of piles surrounded by a supporting medium.* IVA, handlingar 89. Stockholm 1929

[56] Walter, H: *Das Knickproblem bei Spitzenpfählen.* Bautechnik-Archiv, Heft 6. Berlin 1951

[57] Forssell, C: *Knäcksäkerhet hos pålar och pålgrupper.* Kungl väg- och vattenbyggnadskårens 75-årsskrift, s 145. Stockholm 1926

[58] Schiel, F: *Statik der Pfahlwerke.* Berlin–Göttingen–Heidelberg 1960

[59] Olsson, R Gran: *Über den Einfluss der Querkraft auf die Knicklast eines Stabes.* Der Bauingenieur, s 520. Berlin 1937

[60] Chwalla, E: *Genaue Theorie der Knickung von Rahmenstäben.* HDI-Mitteilungen 1933, s 170

[61] Granholm, Hj: *Om sammansatta balkar och pelare med särskild hänsyn till spikade träkonstruktioner.* CTH handlingar 88. Göteborg 1949

[62] Koenigsberger, F och Mohsin, M E: *Design and load carrying capacity of welded battened struts.* The structural engineer (34), s 183. London 1956

[63] Klöppel, K och Uhlmann, W: *Versuchsmässige und rechnerische Bestimmung der Traglasten mehrteiliger Rahmenstäbe unter Verwendung elektronischer Rechenautomaten.* Der Stahlbau, Heft 6, 7 och 8. Berlin 1965

[64] Engesser, F: *Zum Einsturz der Brücke über den St Lorenzstrom bei Quebeck.* Zentralblatt der Bauverwaltung 1907, s 609

[65] Chapman, J C och Slatford, J: *The elastic buckling of brittle columns.* Proceedings, Institution of civil engineers (6), s 107. London 1957

[66] Angervo, K: *Über die Knickung und Tragfähigkeit eines exzentrisch gedrückten Pfeilers ohne Zugfestigkeit.* Statens tekniska forskningsanstalt, Publikation 26. Helsingfors 1954

[67] Sahlin, S: *Structural interaction of walls and floor slabs.* KTH, Institutionen för byggnadsstatik. Meddelande 33. Stockholm 1959

[68] Hellers, B G: *Eccentrically compressed columns without tensile strength subjected to uniformly distributed lateral loads.* Byggforskningen. Rapport 35/67. Stockholm 1967

[69] Sahlin, S och Hellers, B G: *Transversalbelastning på mellan bjälklag inspända väggar utan draghållfasthet.* Byggforskningen. Rapport 19/68. Stockholm 1968

[70] Schleusner, A: *Strenge Theorie der Knickung und Biegung.* Leipzig och Berlin 1937

[71] Saelman, B: *Some formulas for large deflections of beam columns.* Journal of the Franklin institute 1954. s 125

[72] Pettersson, O: *Några stabilitets- och 2. ordningens påkänningsproblem vid balkar, ramar, bågar och plattor.* KTH, Institutionen för hållfasthetslära. Publikation 113. Stockholm 1955

[73] Odqvist, F K G: *Hållfasthetslära.* Stockholm 1948

[74] Edlund, B, Wahlström, S och Åkesson, B: *Flexibiliteter och styvheter hos prismatiska balkpelare med konstant axialkraft.* CTH, Institutionen för byggnadsstatik. Publikation 64:5. Göteborg 1964

[75] Livesley, R K och Chandler, D B: *Stability functions for structural frameworks.* University of Manchester 1956

[76] Lundquist, E E och Kroll, W: *Extended tables of stiffness and carry-over factor for structural members under axial load.* National advisory committee for aeronautics, ARR 4 B 24. Washington

[77] Zimmermann, H: *Lehre vom Knicken auf neuer Grundlage.* Berlin 1930

[78] Ljungberg, K: *Hållfasthetslära.* De Tekniska Vetenskaperna (DTV). Vol II:2. Stockholm 1931. *Probleme beim Entwurf von Kraftleitungsmasten und Bogenkonstruktionen aus Stahl.* Der Bauingenieur Heft 43/44, 1934. *Sicherheit bei Druck-Knickung und Biegung.* Der Bauingenieur Heft 25/26, 1939. Berlin

[79] Rambøll, B J: *Momenter i søjler med bjælkebelastning.* Festskrift till professor P M Frandsen. Köpenhamn 1950

[80] Dischinger, F: *Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken.* Der Bauingenieur Heft 33/34, 35/36, 39/40. Berlin 1937

[81] Mörsch, E: *Statik der Gewölbe und Rahmen.* Del B. Stuttgart 1947

[82] Aas-Jakobsen, A: *Bågbroars tilläggsmoment och knäcksäkerhet.* Tidskriften Betong 1943. s 1. Stockholm

[83] Kasarnowsky, S: *Beräkning av balkar utsatta för böjning och samtidig axialbelastning.* Tekniska skrifter nr 106. Stockholm 1944

[84] Bergström, S G: *Approximativ beräkning av tilläggsmoment vid tryck och samtidig böjning.* Tidskriften Betong 1947, s 70. Stockholm

[85] Dimitrov, N: *Beiträge zur Verformungstheorie.* Diss. TH Karlsruhe 1949. *Die Einflusslinie der Theorie II. Ordnung und einige praktische Formeln.* Der Bauingenieur Heft 1. Berlin 1953

[86] Höglund, T: *Approximativ metod för dimensionering av böjd och tryckt stång.* KTH, Institutionen för byggnadsstatik. Meddelande 77. Stockholm 1968

[87] Chwalla, E: *Die Stabilität lotrecht belasteter Rechteckrahmen.* Der Bauingenieur 1938, s 69. Berlin

[88] Lu, L W: *Stability of frames under primary bending moments.* Proceedings, ASCE, struct div, juni 1963. New York

[89] Zimmermann, H: *Die Knickfestigkeit der Stabverbindungen.* Berlin 1925

[90] Osgood, W R: *Contribution to the design of compression members in aircraft.* National bureau of standards (US), Research paper RP 698. Washington 1934

[91] Mises, R von och Ratzersdorfer, J: *Die Knicksicherheit von Rahmentragwerken.* Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, s 181. Berlin 1926

[92] Prager, W: *Elastic stability of plane frameworks.* Journal of the aeronautical sciences, s 388. New York 1936

[93] Chwalla, E och Jokisch, F: *Über das ebene Knickproblem des Stockwerkrahmens.* Der Stahlbau, s 33. Berlin 1941

[94] Rambøll, B J: *Stabilitets- og spændingsberegning af rammesystemer*. Köpenhamn 1944

[95] Schaber, E: *Beitrag zur Stabilitätsberechnung ebener Stabwerke*. Stahlbau-Verlags GMBH. Köln 1960

[96] Vetter, H: *Stabwerkknickung*. VEB Verlag Technik. Berlin 1960

[97] Kasarnowsky, S och Zetterholm, D: *Zur Theorie der Seitensteifigkeit offener Fachwerkbrücken*. Der Bauingenieur, s 760. Berlin 1927

[98] Bleich, F och Bleich, H: *Beitrag zur Stabilitätsuntersuchung der punktweise elastisch gestützen Stabes*. Der Stahlbau, s 17. Berlin 1937

[99] James, B W: *Principal effects of axial load on moment distribution analysis of rigid structures*. NACA techn note 534. Washington 1935

[100] Lundqvist, E E: *Stability of structural members under axial load*. NACA techn note 617. Washington 1937. *Method for estimating the critical buckling load for structural members*. NACA techn note 717. Washington 1939

[101] Klöppel, K och Ebel, H: *Beitrag zur Berechnung von Stockwerkrahmen auf Stabilität und nach Spannungstheorie II. Ordnung*. Der Stahlbau, Heft 1, Berlin 1962

[102] Sundstrand, A: *Beräkningssystem för strukturanalys*. KTH-avhandling nr 191. Stockholm 1964

[103] Wang, P C: *Numerical and matrix methods in structural mechanics*. New York–London–Sidney 1966

[104] Gregory, M: *Elastic instability*. London 1967

[105] Halldorsson, O P och Wang, C K: *Stability analysis of frameworks by matrix methods*. Proceedings, ASCE, struct div, juli 1968. New York

[106] Wessman, H E och Kavanagh, T C: *End restraints on truss members*. Proceedings, ASCE, s 951. New York 1949

[107] Winter, G, Hsu, P T, Koo, B och Loh, M H: *Buckling of trusses and rigid frames*. Engineering experiment station. Cornell university, Bull No 36. 1948

[108] *Hilfstafeln zur Berechnung von Spannungsproblemen der Theorie zweiter Ordnung und von Knickproblemen*. Beilage: Sonderdruck des Aufsatzes Chwalla, E: *Die neuen Hilfstafeln zur Berechnung von Spannungsproblemen der Theorie zweiter Ordnung und von Knickproblemen*. Stahlbau-Verlags GMBH. Köln 1959

[109] Hoff, N J: *Stable and unstable equilibrium of plane frameworks*. Journal of the aeronautical sciences, s 115. New York 1941

[110] Slavin, A: *Stability studies of structural frames*. Transactions, New York acad sci, s 82. Ser II 1950

[111] Sattler, K: *Das Verfahren von Slavin zur Untersuchung der Stabilität ganzer Fachwerksysteme*. Die Bautechnik, s 222. Berlin 1953

[112] Chwalla, E: *Aussermittig gedrückte Baustahlstäbe mit elastisch eingespannten Enden und verschieden grossen Angriffshebeln*. Der Stahlbau, s 49. Berlin 1937

[113] Kollbrunner, C F och Haueter, O: *Dreimomentengleichung des kontinuierlichen Druckstabes mit Querbelastung*. Mitteilungen über Forschung und Konstruktion im Stahlbau Nr 16. Zürich 1953

[114] Klöppel, K och Friemann, H: *Übersicht über Berechnungsverfahren für Theorie II. Ordnung*. Der Stahlbau, Heft 9. Berlin 1964

[115] Bültmann, W: *Die Stabilität des Dreigelenkrechteckrahmens*. Der Stahlbau 1941, s 3 och 24. Berlin

[116] Schmidt, G: *Die Stabilität des Zweigelenkrahmens mit ungleich langen Stielen*. Der Stahlbau 1944, s 69. Berlin

[117] Hassan, K: *Zur Bestimmung der Knicklänge von Rahmenstielen*. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. Abhandlung, Band 28-1, s 31. Zürich 1968

[118] Salem, A H: *Buckling of rigidly-jointed plane trusses*. Proceedings, ASCE, struct div, juni 1969. New York

[119] Ljungberg, K: *Bidrag till beräkning av för knäckning åverkade ramkonstruktioner*. Teknisk tidskrift 1916:8. Stockholm

[120] Kármán, T von och Biot, M A: *Mathematical methods in engineering*. New York och London 1940

[121] Rinkert, A: *Beräkning av sammansatta ramars knäcklast*. Tidskriften Betong 1951, s 213

[122] Merchant, W och Salem, A H: *The use of stability functions in the analysis of rigid frames*. IABSE, prel publ, sixth congress, s 457. Stockholm 1960

[123] Sattler, K: *Das Durchbiegungsverfahren zur Lösung von Stabilitätsproblemen*. Die Bautechnik 1953, s 288 och 326. Berlin

[124] Sahmel, P: *Näherungsweise Berechnung der Knicklängen von Stockwerkrahmen*. Der Stahlbau 1955, s 89. Berlin

[125] Hellers, B G: *Buckling of multi-storey frames*. Bygningsstatiske meddelelser, Köpenhamn 1972

[126] Girkmann, K och Königshofer, E: *Die Hochspannungs-Freileitungen*. Wien 1952

[127] Bürgermeister, G, Steup, H och Kretzschmar, H: *Stabilitätstheorie*. Del I, Berlin 1966. — Del II, Berlin 1963