LUND UNIVERSITY

Punktkonstruktioner

Plem, Erik

1966

Link to publication

Citation for published version (APA):
Plem, E. (1966). *Punktkonstruktioner*. [Licentiatavhandling, Avdelningen för Brandteknik]. Lund Institute of Technology.

Total number of authors:
1

General rights
Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.
• Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
• You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
• You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: https://creativecommons.org/licenses/

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117
221 00 Lund
+46 46-222 00 00

Download date: 18. Dec. 2025

LUND INSTITUTE OF TECHNOLOGY · LUND · SWEDEN · 1966
DIVISION OF STRUCTURAL MECHANICS AND CONCRETE CONSTRUCTION · BULLETIN 2

ERIK PLEM

PUNKTKONSTRUKTIONER

P U N K T K O N S T R U K T I O N E R

av E r i k P l e m

Ingenjörsbyrån Centerlöf & Holmberg AB, Lund

Licentiatarbete i Byggnadsstatik, LTH.
Lund 1966.

Innehåll

	Sid.
Beteckningar	
Inledning	1
Påkänningstillståndet φ	5
Jämviktsvillkoren	7
Bestämning av vridmedelpunktens läge	12
Algoritm	26
Tillämpningar	38
Temperaturexpansion	45
Avslutning	47
Litteraturhänvisningar	49

Beteckningar

A :	exponent som är 0 eller 1 för en punkt i den plastiska respektive den elastiska zonen.
a :	radien R´s horisontalprojektion
b :	radien R´s vertikalprojektion
d :	avståndet från C. T till den yttre kraften
e :	den yttre kraftens excentricitet med avseende på C. G.
f :	avståndet mellan C. T. och C. G.
g :	en punkts vikt
I :	Punktgruppens polära tröghetsmoment med avseende på C. T.
I_o:	punktgruppens polära tröghetsmoment med avseende på C. G.
k :	elasticitetsfaktor
M:	yttre moment
M_o :	yttre momentets storlek vid $\varphi = 0$
M_1 :	yttre momentets storlek vid $\varphi = 1$
N :	yttre kraft
N_o :	yttre kraftens storlek vid $\varphi = 0$
N_1 :	yttre kraftens storlek vid $\varphi = 1$
n :	antalet punkter i konstruktionen
P :	punktkraft
P_o :	flytkraft vid en punkt med $g = 1$
R :	radien till en punkt räknad från C. T.
R_o :	gränsradie mellan elastisk och plastisk zon.
R_M :	max R
r :	radien till en punkt räknad från C. G.
S :	Σg
T :	tvångskraft vid styrd vridning
t :	temperaturstegring
u :	vridmedelpunktens abscissa
v :	vridmedelpunktens ordinata
x :	en punkts abscissa

y :	en punkts ordinata
α :	a i dimensionslös form
β :	b i dimensionslös form
γ :	vinkeln mellan abscissaaxeln och R
δ :	d i dimensionslös form alt. punktförflyttning
δ_{lim}:	brottförflyttning
θ :	rotationsvinkel
$\mathcal{H}_u$:	uttryck ingående i projektionsekvationerna (se sidan 00)
$\mathcal{H}_v$:	
μ :	M i dimensionslös form alt. längdutvidgningskoefficient för temperatur
μ_1 :	μ för $\varphi = 1$
ν :	N i dimensionslös form
ν_1 :	ν för $\varphi = 1$
π :	P i dimensionslös form
ρ :	R i dimensionslös form
Φ :	yttre arbete
φ :	påkänningstillstånd
φ_{lim}:	påkänningstillstånd vid brott
ψ :	inre arbete
ω :	formfaktor

Förkortningar:

C. G. = centre of gravity

C. T. = centre of twist

Inledning

En punktkonstruktion, sådan som behandlas i det följande, kan beskrivas som ett ändligt antal diskreta punkter belägna i ett plan, varmed de är förbundna på ett sådant sätt, att en förflyttning i planet av en punkt alstrar en förflyttningen motriktad kraft P, angripande vid punkten. För växande storlek på förflyttningen antas att kraften följer Hookes lag (ceiiinossstuv, Robert Hooke, 1635-1703) upp till ett gränsvärde P_o, varefter den förblir konstant oberoende av förflyttningen. Vidare antas att förflyttningen är en kongruensflyttning, vilket innebär att det ömsesidiga avståndet mellan två godtyckliga punkter inom konstruktionen är invariant i avseende på förflyttningen.

En sådan konstruktion är givetvis en idealisering men den kan tjäna som matematisk modell vid studiet av fenomen i samband med belastning av en rad konstruktioner av utpräglad punktkaraktär såsom friktionsförband, nitförband, spikförband eller vridna pålgrupper med enbart vertikalpålar.

Förutsättningen om kongruensflyttning får anses vara acceptabel inom det elastiska området och god sedan gränsvärdet P_o har uppnåtts vid någon punkt. Den bör under alla förhållanden lämna resultat på säkra sidan.

Den klassiska teorien för beräkning av sådana konstruktioner har utvecklats i samband med dimensionering av nit- och bultförband. Den bygger på Hookes lag, förutsättningen om kongruensflyttning och jämviktsvillkoren.

Betrakta vi ett nitförband med n nitar enligt fig. 1 belastat med kraften N behandlas detta efter den klassiska teorien så att kraften först parallellförflyttas sträckan e till nitgruppens viktade tyngdpunkt (C.G.) varefter den fördelas på samtliga nitar efter vikt, vilken här skall förstås som ett tal, som allt efter förhållandena är proportionellt mot antingen nitens diameter eller dess tvärsnittsarea. Införes beteckningen

$$S = \sum_n g \qquad (1)$$

där g betecknar den enskilda nitens vikt och summationen utsträckes över gruppens samtliga punkter, kan kraftandelen vid en godtycklig punkt tecknas

$$P_f = g \cdot \frac{N}{S} \qquad (2)$$

Kraftkomposanten har motsatt riktning mot N.

Det genom kraftförflyttningen uppkomna kraftparet med momentet $M = N \cdot e$ fördelas därefter enligt följande:

På grundval av förutsättningarna tecknas kraftkomposanten vid en nit

$$P_m = g \cdot C \cdot r \qquad (3)$$

där C är en konstant och r betecknar nitens avstånd till tyngdpunkten. Momentjämvikt uttryckes då genom ekvationen

$$M = \sum_n P_m \cdot r = C \cdot \sum_n g \cdot r^2 \qquad (4)$$

Elimineras C mellan (3) och (4) fås

$$P_m = g \cdot \frac{M}{I_o} \cdot r \qquad (5)$$

där vi med I_o menar gruppens polära tröghetsmoment med avseende på tyngdpunkten

$$I_o = \sum_n g \cdot r^2 \qquad (6)$$

Speciellt fås för den mest ansträngda niten, d.v.s. den med störst $r = r_M$

$$P_m = g \cdot \frac{M}{I_o} \cdot r_M \qquad (7)$$

Kraftkomposantens riktning är vinkelrätt mot r_M.

Genom vektoriell addition av (2) och (7) fås slutligen den resulterande maximala kraften inom nitgruppen.

Exempel 1. För nitförbandet enligt fig. 1 gäller med $n = 15$ och samtliga punkters vikt lika med 1, att

$$P_f = \frac{1}{15} \cdot N = 0.067 \cdot N$$

För gruppen är vidare

$$I_o = 12 \cdot a^2 + 10 \cdot 4a^2 + 2 \cdot 9a^2 = 70\,a^2$$

$$r_M = a \cdot \sqrt{13} \qquad e = \frac{7}{3}\,a$$

vilket ger

$$P_m = \frac{7}{3} a N \frac{a\sqrt{13}}{70\, a^2} = \frac{\sqrt{13}}{30} \cdot N = 0.120 \cdot N$$

Vektoriell addition av P_f och P_m ger maximal nitkraft

$$P_{max} = 0.167 \cdot N$$

Den elastiska förflyttningen av punktkonstruktionen blir enligt detta betraktelsesätt sammansatt av en translation och en rotation kring tyngdpunkten.

Johansen [2] har utnyttjat förhållandet att translation och rotation i varje tidsmoment kan uppfattas som ren rotation kring ett momentancentrum. Med samma förutsättningar som tidigare bestämmer han momentancentrums läge som en funktion av kraftens excentricitet i förhållande till gruppens tyngpunkt. Han kan därefter direkt ange storleken av en punktkraft utan att gå omvägen över en vektoriell addition. Vi skall senare återvända till denna metod, som, när man arbetar under renodlade elastiska förhållanden, är den klassiska metoden överlägsen.

Fördelen med en approximativt elasticitetsteoretisk beräkning är enkel kalkyl, nackdelarna är i huvudsak två. För det första kan det förväntas att de lämnade resultaten ligger mycket på säkra sidan på grund av det sämre uppfyllandet av förutsättningen om kongruensflyttning. Den andra nackdelen är den som i alla sammanhang vidlåter en elasticitetsteoretisk behandling av problemen nämligen den att inga besked om konstruktionens brottsäkerhet erhålles. Beaktas detta, kan det icke förvåna, att även andra vägar har provats. Således har det föreslagits av bl.a. Engelund [1] att man skall räkna med samma kraft P_o vid ett nitförbands alla nitar. Härvid har antagits att även under denna förutsättning rotation sker i enlighet med den klassiska teorin alltså kring gruppens tyngdpunkt. Johansen [2] är mera realistisk, då han utifrån maximalprincipen uppställer de korrekta ekvationerna för bestämning av momentancentrum under förutsättning av konstant punktkraft inom gruppen, men avstår från att lösa desamma på grund av de numeriska svårigheter detta innebär.

Som en approximation föreslår han att man begagnar samma momentancentrum som vid elastiska förhållanden. Som det omedelbart framgår av villkoret för momentjämvikt, erhålles därvid kraften vid en punkt ur

$$P = g \cdot P_o = g \cdot \frac{N \cdot e}{\Sigma g R} \qquad (8)$$

där P_o betecknar flytkraften vid en punkt med $g = 1$ och R betecknar en punkts radie med avseende på vridmedelpunkten. Det måste dock härvid beaktas, att projektionsekvationerna i allmänhet icke blir uppfyllda.

Vad som hittills har behandlats är två gränsfall, nämligen - med några approximationer - fallen då antingen rent elastiskt eller rent plastiskt tillstånd råder inom punktkonstruktionen. Plem [3] har angivet, hur även olika grader av plasticering kan behandlas samt anvisat en metod, enligt vilken man för varje sådant plasticeringstillstånd kan beräkna därtill hörande momentancentrum, allt under förutsättning att punktkonstruktionen är åverkad av enbart moment. Det framgår av denna undersökning, att punktskarans konfiguration har avgörande betydelse för brottsäkerheten. Således kan beräkningsmässigt påvisas, att vissa konfigurationer ger en spröd konstruktion, andra en seg.

Det är en utökning av denna metod, som utgör huvudinnehållet i föreliggande skrift, vilken i övrigt eftersträvar att framlägga en komplett teori för beräkning av plana punktgrupper under godtycklig yttre last och vid en godtycklig långt driven plasticering. Arbetet motiveras av den renässans punktgruppen har fått i senare tid dels i form av nitgrupper för lättmetallkonstruktioner dels i form av friktionsförband för stålkonstruktioner. Det skall i sammanhanget också erinras om rådande brist på en vederhäftig metod för beräkning av vridna pålgrupper med enbart vertikalpålar under byggnader utsatta för efter sin omkrets ojämnt fördelat jordtryck, en brist som härmed skulle vara avhjälpt.

Skriftens innehåll är i huvudsak disponerad enligt följande.
Efter introduktion av begreppet "påkänningstillståndet φ" uppställes problemets grundekvationer, vilka löses via betraktningar över punktkrafternas inre arbeten. En algoritm presenteras för problemets numeriska behandling, varefter metoden demonstreras på ett antal exempel. Även en punktgrupps beteende under inverkan av en temperaturexpansion görs till föremål för en analys.

Påkänningstillståndet φ

En punktkonstruktion enligt definitionen i början av det förra kapitlet vrides kring en linje, som är normal mot det av konstruktionen bestämda planet. Normalens skärningspunkt med planet betecknas i det följande för vridmedelpunkten. (C. T.). Vridningen alstrar ett påkänningstillstånd, som för punkter med vikten $g = 1$ åskådliggöres i fig. 2, där koordinatsystemet har lagts med origo i vridmedelpunkten. Avståndet därifrån till en godtycklig av konstruktionens punkter betecknas med R. Speciellt betecknas avståndet till den yttersta punkten med R_M.

Med $\rho = R/R_M$ betecknas det dimensionslösa avståndet till en punkt, varvid avståndet till den yttersta punkten blir lika med 1.

Med R_o avses radien i den cirkel med centrum i vridmedelpunkten, som delar punktmängden i två delmängder karakteriserade av respektive elastiska och plastiska förhållanden. I dimensionslös form tecknas denna radie $\varphi = R_o/R_M$. Kraften vid en godtycklig punkt kan därefter enligt fig. 2 skrivas

$$P = g \cdot P_o \cdot \left(\frac{R}{R_o}\right)^A \qquad A = \begin{cases} 0 & \text{för } R \geq R_o \\ 1 & \text{för } R < R_o \end{cases} \qquad (9)$$

Väljer vi nu gränslasten P_o (P_o betecknar här och i det följande undantagslöst flytlasten vid en punkt med $g = 1$) som enhet för kraft och betecknar den dimensionslösa kraften i en punkt med $\pi = P/P_o$, övergår (9) i

$$\pi = g \cdot \left(\frac{\rho}{\varphi}\right)^A \qquad A = \begin{cases} 0 & \text{för } \rho \geq \varphi \\ 1 & \text{för } \rho < \rho \end{cases} \qquad (10)$$

vilket är en dimensionslös beskrivning av påkänningstillståndet.

Vi skall nu med stöd av fig. 3 i detalj studera vad uttrycket (10) utsäger. Fig. 3a anger ett tillstånd, där flytning har uppnåtts i konstruktionens alla punkter. Tillståndet karakteriseras av att $\varphi = 0$. Vi kallar det för brottstadiet, eftersom konstruktionens hela bärförmåga därvid har tagits i anspråk. För fig. 3b gäller att $0 < \varphi \leq 1$. Detta är det elastoplastiska stadiet, där φ, som tidigare nämnts, markerar gränsen mellan elastiskt och plastiskt område.

Speciellt har vi för $\varphi = 1$ situationen att flytning uppträder vid punktskarans yttersta punkt och endast där. Enligt vanligt språkbruk kan vi därför säga, att konstruktionen då befinner sig vid flytgränsen. Det rent elastiska tillståndet karakteriseras av att $\varphi > 1$, vilket illustreras i fig. 3c. φ kan här icke ges samma innebörd som tidigare utan får betraktas som en fiktiv storhet, som anger graden av påkänning i konstruktionen. Av figuren framgår, att om φ går mot oändligheten påkänningstillståndet samtidigt konvergerar mot nollpåkänning. Det är emellertid möjligt att ge φ en reel innebörd även inom det elastiska området. Vi skall i följande kapitel visa, at φ här kan tolkas som säkerheten med avseende på flytgränsen. Som framgår av denna genomgång av samtliga möjliga värden på φ, kan konstruktionens påkänningstillstånd entydigt beskrivas med hjälp av detta tal, varför vi i fortsättningen rätt och slätt talar om "påkänningstillståndet φ".

Brott inträffar enligt definitionen, då påkänningstillståndet $\varphi = 0$. Vridmedelpunktens läge i relation till punktgruppen kan dock fordra så stor rotation av den senare, förrän φ antar värdet noll, att man i praktiken anser att brott har inträffat tidigare. Om emellertid brott istället definieras som den situation, då förflyttningen vid punkten med radien R_M uppnår ett visst värde δ_{lim} vi kan kalla det brottförflyttningen - kan vi beräkna motsvarande minsta tillåtna värde på påkänningstillståndet φ_{lim}. Vi inför härför ytterligare en materialkonstant k definierad genom sambandet

$$P = g \cdot k \cdot \delta \qquad (11)$$

där δ är den mot P svarande elastiska förflyttningen av en punkt. Enligt fig. 4 gäller då speciellt att

$$P_o = k \cdot \delta_o = k \cdot \theta \cdot R_o \qquad (12)$$

där θ är punktgruppens rotation. Detta ger

$$\theta = \frac{P_o}{k \cdot R_o} \qquad (13)$$

Vid punkten med störst förflyttning erhålles därefter

$$\delta_{lim} = \theta \cdot R_M = \frac{P_o}{k \cdot R_o} \cdot R_M = \frac{P_o}{k \cdot \varphi_{lim}} \qquad (14)$$

vilket ger gränsvärdet

$$\varphi_{lim} = \frac{P_o}{k \cdot \delta_{lim}} \qquad (15)$$

uttryckt i de tre materialkonstanterna P_o, k och δ_{lim}

Det skall här påpekas, att även med denna begränsning av φ samma kraftfördelning inom punktgruppen kan erhållas, som då brott bestäms

av villkoret $\varphi = 0$, nämligen i de fall, då

$$\rho_{min} \geq \varphi_{lim} \qquad (16)$$

Jämviktsvillkoren

Vår uppgift är nu tvåfaldig. Dels skall vi bestämma momentancentrum för punktkonstruktionens förflyttning under inverkan av den yttre lasten, dels skall vi bestämma sambandet mellan den yttre lasten och påkännings-tillståndet φ. För lösning av denna uppgift står de tre jämviktsekvationerna till förfogande. Dessa disponeras så, att de två projektions-ekvationerna reserveras för den första delen av uppgiften, varvid momentekvationen blir över för lösning av den andra. Vi behandlar de två delproblemen vart för sig och börjar med att uppställa ekvationerna för bestämning av förflyttningens momentancentrum.

Punktskaran inlägges i ett rätvinkligt koordinatsystem på sådant sätt, att riktningen för den yttre kraften N är motsatt y-axelns positiva riktning enligt fig. 5. Punkten med koordinaterna (u, v) avser den tillsvidare obekanta vridmedelpunkten (C. T.) och en godtycklig av gruppens punkter har koordinaterna (x, y). I figuren har för överskådlighetens skull visats endast en av konstruktionens punkter.

Projektionsekvationerna ger nu

$$\begin{aligned} -\Sigma P \cdot \cos\gamma + N &= 0 \\ -\Sigma P \cdot \sin\gamma &= 0 \end{aligned} \qquad (17)$$

Insättes häri (9) och införes beteckningarna

$$\begin{aligned} a &= x - u \\ b &= y - v \end{aligned} \qquad (18)$$

erhålles efter division med P_o

$$\begin{aligned} -\Sigma g \left(\frac{R}{R_o}\right)^A \cdot \frac{a}{R} + \frac{N}{P_o} &= 0 \\ -\Sigma g \left(\frac{R}{R_o}\right)^A \cdot \frac{b}{R} &= 0 \end{aligned} \qquad (19)$$

Summationerna uppdelas härefter i två, en, som utsträckes över den elastiska zonen (index e), vars bidrag erhålles, om A = 1 och en, som utsträckes över den plastiska zonen (index p), vars bidrag erhålles, om A = 0.

Detta ger

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{R_o}\sum_e g \cdot a - \sum_p g \cdot \frac{a}{R} + \frac{N}{P_o} = 0 \\
&-\frac{1}{R_o}\sum_e g \cdot b - \sum_p g \cdot \frac{b}{R} = 0
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

Införes beteckningarna

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_u &= -\frac{1}{R_o}\sum_e g \cdot a - \sum_p g \cdot \frac{a}{R} + \frac{N}{P_o} \\
\mathcal{H}_v &= -\frac{1}{R_o}\sum_e g \cdot b - \sum_p g \cdot \frac{b}{R}
\end{aligned}
\qquad (21)
$$

kan projektionsekvationerna sammanfattas i det vektoriella uttrycket

$$(\mathcal{H}_u, \mathcal{H}_v) = \overline{0} \qquad (22)$$

Införes vidare de dimensionslösa storheterna

$$\alpha = \frac{a}{R_M} \qquad \beta = \frac{b}{R_M} \qquad (23)$$

och

$$\nu = \frac{N}{P_o} \qquad (24)$$

ger uttrycken (19)

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\varphi} \cdot \Sigma g \cdot \alpha \cdot \left(\frac{\rho}{\varphi}\right)^{A-1} + \nu = 0 \\
&-\frac{1}{\varphi} \cdot \Sigma g \cdot \beta \cdot \left(\frac{\rho}{\varphi}\right)^{A-1} = 0
\end{aligned}
\qquad (25)
$$

vilket är projektionsekvationerna i dimensionslös form.
Ur dessa eller det alternativa uttrycket (22) kan vridmedelpunktens läge beräknas.

Sambandet mellan påkänningstillståndet och den yttre kraften fås därefter ur momentekvationen

$$\Sigma R \cdot P - d \cdot N = 0 \qquad (26)$$

som med P enligt (9) efter division med P_o ger

$$\Sigma g \cdot \left(\frac{R}{R_o}\right)^A \cdot R - d \cdot \frac{N}{P_o} = 0 \qquad (27)$$

Uppdelas som tidigare i summationer över den elastiska respektive den plastiska zonen erhålles

$$\frac{1}{R_o} \sum_e g\ R^2 + \sum_p g\ R - d \cdot \frac{N}{P_o} = 0 \qquad (28)$$

Detta kan med de dimensionslösa beteckningarna

$$\delta = \frac{d}{R_M} \qquad (29)$$

och

$$\mu = \frac{M}{P_o \cdot R_M} = \frac{N}{P_o} \cdot \frac{d}{R_M} = \nu \cdot \delta \qquad (30)$$

transformeras till momentekvationens dimensionslösa form

$$\varphi \cdot \Sigma g \left(\frac{\rho}{\varphi}\right)^{A+1} = \mu \qquad (31)$$

vilket ger sambandet mellan den yttre lasten μ eller ν och påkänningstillståndet φ.

Om den yttre lasten är ett moment M enligt fig. 6, blir N = 0, varför sambandet (21) gäller oförändrat liksom projektionsekvationerna i vektoriell form (22).

Momentekvationen (28) ersättes av den motsvarande

$$\frac{1}{R_o} \sum_e g\ R^2 + \sum_p g\ R - \frac{M}{P_o} = 0 \qquad (32)$$

vilket vid övergång till dimensionslöst skrivsätt ger (31).

Speciellt gäller för renodlade elastiska förhållanden, alltså för A = 1 för samtliga punkter, att vridmedelpunkten enligt (25) bestämmes ur ekvationerna

$$\begin{aligned} \Sigma g \cdot \alpha &= \varphi \cdot \nu \\ \Sigma g \cdot \beta &= 0 \end{aligned} \qquad (33)$$

Som vi senare skall se (sid 00), ger dessa ekvationer alltid samma lösning för alla värden av $\varphi \geqq 1$. Detta medför, att μ enligt sambandet (31)

$$\mu = \delta \cdot \nu = \frac{1}{\varphi} \cdot \Sigma g \rho^2 \qquad (34)$$

är konstant lika med flytmomentet

$$\mu_1 = \delta \cdot \nu_1 = \Sigma g \rho^2 \qquad (35)$$

Ur (34) och (35) erhålles därför

$$\varphi = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{\mu_1}{\mu} \qquad (36)$$

vilket visar att under elastiska förhållanden φ kan tolkas som säkerheten mot flytning.

Jämviktsekvationerna i dimensionslös form enligt (25) och (31) har huvudsaklig akademiskt intesse. De har den nackdelen, att enheten för längd R_M i allmänhet ändrar storlek vid variation av φ, varför till olika φ-värden hörande μ-värden icke blir direkt jämförbara. För praktisk tillämpning i det följande arbetas därför med ekvationerna (22) och (32).

Vad vi hittills har sysslat med är jämviktsvillkor för ett punktsystem, vilket fritt kan förflytta sig och som därför vill vrida sig kring den mot situationen svarande naturliga vridmedelpunkten. Annorlunda ställer det sig om vi inför en tvungen vridmedelpunkt, som icke sammanfaller med den naturliga, alltså då vi betraktar ett fall av styrd vridning. Detta problem kan studeras på en modell, som framkommer av den ovan behandlade, om vi tillfogar en punkt, som i två avseenden skiljer sig från systemets övriga punkter. Den tillfogade punkten skall således karakteriseras av, pro primo att den kan bära en godtycklig stor kraft, pro secondo att dess förflyttning är noll oberoende av kraften vid punkten. En sådan punkt kommer att fungera som en påtvungen vridmedelpunkt för konstruktionen och belastas med en tvångskraft T, vilken, då punkten icke sammanfaller med vridmedelpunkten vid fri deformation, är skild från noll. Problemet att bestämma mot ett givet påkänningstillstånd φ och mot ett givet kraftläge svarande storlek på den yttre kraften och den uppkomna

tvångskraften kan enkelt lösas med hjälp av jämviktsvillkoren i kombination med ekv. (9). Tillvägagångssättet illustreras först med ett exempel.

Exempel 2. En punktgrupp med tre punkter alla med vikten $g = 1$ är given enligt fig. 7. Den yttre kraftens riktning är bestämd av att kraftlinjen skall bilda vinkeln 135° med x-axelns positiva riktning och innehålla punkten (8, 0). Konstruktionen utökas med en fast punkt C. T. med koordinaterna (-4, 1,5), vilken blir deformationens tvungna vridmedelpunkt. Sök den yttre kraftens storlek samt tvångskraftens storlek och riktning då påkänningstillståndet $\varphi = 0,8$.

Den grafiska konstruktionen som uttryckes i ekv. (9) ger direkt punktkrafterna $P_1 = P_2 = 0,441$ och $P_3 = 1$ då P_o väljes som enhet för kraft. Kraft- och linpolygon på krafterna P_1, P_2 och P_3 ger därnäst storlek och läge för en yttre kraft N' som fordras för jämvikt. N' uppdelas i komposanter efter den givna kraftriktningen och en riktning som bestämmes av C. T. och skärningspunkten mellan den givna kraftlinjen och verkningslinjen för N'. Komposanterna N och T är nu de sökta krafterna. Som jämförelse behandlas samma situation vid fri deformation i exempel 00 å sidan 00.

Analytiskt lösas problemet i anknytning till fig. 8.

Momentekvation med avseende på den fasta punkten C. T. ger enligt (28) den yttre kraften

$$N = \frac{P_o}{d} \cdot [\frac{1}{R_o} \sum_e g R^2 + \sum_p g R] \qquad (37)$$

varefter tvångskraftens komposanter efter koordinataxlarna T_x och T_y kan beräknas ur projektionsekvationerna. Vi erhåller

$$T = (T_x, T_y) = (\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u) \cdot P_o \qquad (38)$$

Under renodlade elastiska förhållanden ger (38) då punktskarans tyngdpunkt väljes som tvungen vridmedelpunkt, att T såväl till storlek som riktning motsvarar N, i överensstämmelse med det klassiska betraktelsesättet, som studerades i inledningen och belyses av exempel 1.

Bestämning av vridmedelpunktens läge

Vi skall nu ägna oss åt uppgiften att bestämma vridmedelpunktens läge för godtycklig grad av plasticering. I syfte att tillämpa principen om minimum av inre arbete för att lösa problemet startar vi med några energibetraktelser, vilka vi börjar med ett studium av det yttre arbete i anslutning till elementära jämviktsvillkor.

Låter vi det betraktade punktsystemet under inverkan av den yttre kraften N såsom i fig. 9 vrida sig vinkeln θ kring vridpunkten C.T. med de tills vidare obekanta koordinaterna (u, v), förflyttar sig kraften sträckan $s = \theta \cdot d$. Insättes häri uttrycket (13) erhålles

$$s = \frac{P_o \cdot d}{k \cdot R_o} = \frac{P_o \cdot d}{k \cdot R_M} \cdot \frac{1}{\varphi} = C_N \cdot \frac{1}{\varphi} \qquad (39)$$

vilket visar linearitet mellan s och $\frac{1}{\varphi}$.

I det generella fallet flyttar sig det momentana rotationscentrat under den del av uppvridningsproceduren, som bestämmes av $\varphi < 1$. För att systemet under hela förloppet skall rotera kring C.T. som förutsatt, måste vi därför i denna punkt införa den i föregående kapitel introducerade tvångskraften T vars storlek och riktning bestäms ur (38). Detta komplicerar dock inte den fortsatta deduktionen, då dess bidrag till det inre arbetet är identiskt noll. Tvångskraftens storlek konvergerar mot noll, vilket värde uppnås samtidigt med att θ antar det till det givna påkänningstillståndet φ svarande terminalvärdet.

En kraftpolygon i godtycklig skala på samtliga systemets inre punktkrafter vari inkluderas kraften T, har ett gap, som till storlek och riktning motsvarar den yttre kraften N. Låt N′ vara den yttre kraft som håller jämvikt med de givna punktkrafterna P, då kan enligt (20) vertikalkomposanten av N′ uttryckas på formen

$$N'_y = \alpha_1 \cdot \frac{1}{\varphi} + \beta_1 \qquad (40)$$

Ur (37) och (38) ses att vertikalkomposanten av T kan skrivas på likartat sätt

$$T_y = \alpha_2 \cdot \frac{1}{\varphi} + \beta_2 \qquad (41)$$

där α_1, α_2, β_1 och β_2 är konstanter som bestämmas av punktgruppens konfiguration samt av belastningssituationen. Av figuren, av (40)

och (41) samt av (39) framgår således att linearitet råder mellan N och s. Då $\frac{1}{\varphi}$ växer från 0 till 1 (d.v.s. då det elastiska området genomlöpes) är $\beta_1 = \beta_2 = 0$ och N därför proportionell med s. Då $\frac{1}{\varphi}$ uppnår värdet 1, börjar flytning vid punkten med radien R_M varvid värdena α_1 och β_1, respektive α_2 och β_2 momentant ändras. Vid den fortsatta stegringen av $\frac{1}{\varphi}$ blir sambandet mellan N och s fortfarande lineart, men nu med en lägre proportionalitetsfaktor än tidigare. Då cirkeln med radien R_o under sin vidare inryckning passerar en ny systempunkt, minskas åter proportionalitetsfaktorn och detta upprepas tills den vid total plasticering, då $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, antar gränsvärdet noll.

Det beskrivna förloppet visas i fig. 10, där N_1 betecknar den yttre kraften just då flytning påbörjas inom systemet och N_o är motsvarande kraft vid total plasticering. Det yttre arbetet Φ svarande mot ett givet påkänningstillstånd φ representeras i figuren av den streckade ytan med arean

$$\Phi = - \omega \cdot d \cdot \theta \cdot N = - \omega \cdot \frac{P_o \cdot N}{k \cdot \varphi} \cdot \frac{d}{R_M} \tag{42}$$

där ω är en faktor beroende av kurvans form.

För senare bruk framräknas derivatorerna till Φ med avseende på respektive u och v.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= - \omega \cdot \frac{P_o \cdot N}{k \cdot \varphi} \cdot \frac{1}{R_M^2} \cdot \left(R_M \cdot \frac{\partial d}{\partial u} - d \cdot \frac{\partial R_M}{\partial u} \right) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= - \omega \cdot \frac{P_o \cdot N}{k \cdot \varphi} \cdot \frac{1}{R_M^2} \cdot \left(R_M \cdot \frac{\partial d}{\partial v} - d \cdot \frac{\partial R_M}{\partial v} \right) \end{aligned} \tag{43}$$

Om vi enligt fig. 5 beaktar att $R = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ och att $\frac{\partial a}{\partial u} = - 1$ följer att

$$\frac{\partial R}{\partial u} = \frac{\partial R}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial u} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 a}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot (-1) = - \frac{a}{R} \tag{44}$$

vilket tillsammans med det analoga uttrycket för $\frac{\partial R}{\partial v}$ ger

$$\text{grad } R = - \frac{1}{R} (a, b) \tag{45}$$

där gradienten här och i det följande refererar till ett u, v, z-koordinatsystem, där z (u, v) är den funktion av två variabler, för vilken gradienten beräknas.

Speciellt erhålles ur (45) med beteckningar enligt fig. 9

$$\text{grad } R_M = -\frac{1}{R_M}\,(a_M, b_M) \tag{46}$$

vilket tillsammans med relationen

$$\text{grad } d = (-1, 0) \tag{47}$$

insatt i (43) ger

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= -\omega \cdot \frac{P_o \cdot N}{k \cdot R_o}\left(-1 + \frac{a_M \cdot d}{R_M^2}\right) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= -\omega \cdot \frac{P_o \cdot N}{k \cdot R_o} \cdot \frac{b_M \cdot d}{R_M^2} \end{aligned} \tag{48}$$

Om vi som yttre last istället för kraften N påför punktkonstruktionen ett yttre moment M enligt fig. 11, vrider sig gruppen vinkeln

$$\theta = \frac{P_o}{k\,R_o} = \frac{P_o}{k\,R_M} \cdot \frac{1}{\varphi} = C_M \cdot \frac{1}{\varphi} \tag{49}$$

En kraftpolygon på samtliga systemets inre krafter vari inkluderas tvångskraften T sluter sig. Elementen däri representerar emellertid ett moment M. Med beaktande av att T icke lämnar bidrag till momentet visar (32) att detta kan skrivas på formen

$$M = \alpha_3 \frac{1}{\varphi} + \beta_3 \tag{50}$$

där α_3 och β_3 är konstanter som bestämmas av punktgruppens konfiguration samt av belastningssituationen. Av (49) och (50) framgår att linearitet råder mellan M och θ. Då $\frac{1}{\varphi}$ växer från 0 till 1 är $\beta_3 = 0$ och M därför proportionell med θ. Då $\frac{1}{\varphi}$ uppnår värdet 1, inleds flytning vid punkten med radien R_M, varvid koefficienterna α_3 och β_3 momentant ändras. Vid den fortsatta stegringen av $\frac{1}{\varphi}$ blir sambandet mellan M och θ fortfarande lineärt, men nu med en lägre proportionalitetsfaktor än tidigare. Varje gång cirkeln med radien R_o för växande värde på $\frac{1}{\varphi}$ passerar en eller flera systempunkter minskas således proportionalitetsfaktorn för att slutligen vid passage av den innersta punkten, då $\alpha_3 = 0$, anta gränsvärdet noll.

Det beskrivna förloppet åskådliggöres i fig. 12 där M_1 betecknar det yttre momentet just då flytning påbörjas inom systemet och M_o motsvarande är momentet vid total plasticering.

Det yttre arbetet Φ svarande till ett givet φ representeras i figuren av den streckade ytan med arean

$$\Phi = - \omega \cdot \theta \cdot M = - \omega \cdot \frac{P_o \cdot M}{k \cdot \varphi} \cdot \frac{1}{R_M} \qquad (51)$$

där ω är den ovan definierade formfaktorn.

Deriveras uttrycket (51) med avseende på u och v erhålls

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) = + \omega \cdot \frac{P_o \cdot M}{k \cdot \varphi} \cdot \frac{1}{R_M^2} \cdot \left(\frac{\partial R_M}{\partial u}, \frac{\partial R_M}{\partial v}\right) \qquad (52)$$

vilket med användande av (46) övergår i

$$\text{grad } \Phi = - \omega \cdot \frac{P_o \cdot M}{k \cdot \varphi} \cdot \frac{1}{R_M^3} \left(a_M , b_M \right) \qquad (53)$$

Vi fortsätter härefter med ett studium av det av systemet konsumerade inre arbetet.

För att bestämma detta tänker vi oss vinkeln θ successivt ökad från 0 till det av det givna φ genom (49) bestämda terminalvärdet, varvid rotationen tänkes ske kring den sökta vridmedelpunkten C. T. Vid uppvridningsprocedurens början råder elastiska förhållanden inom hela systemet och betraktar vi fig. 13, ser vi, att en punkt därför bidrar till det inre arbetet ψ med andelen

$$\Delta \psi_e = \frac{1}{2} \cdot \theta \cdot R \cdot P \qquad (54)$$

vilket via uttrycken (9) och (13) alternativt kan tecknas

$$\Delta \psi_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_o}{k \cdot R_o} \cdot R \cdot g \cdot P_o \cdot \frac{R}{R_o} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{P_o^2}{R_M^2} \cdot g \cdot R^2 \qquad (55)$$

Fortsättes rotationen utöver det mot $\varphi = 1$ svarande värdet av θ, delas punktmängden i två delmängder, en elastisk och en plastisk, varvid gränslinjen utgörs av cirkeln med radien R_o. Punktskarans delkrafter konstituerar härefter ett icke-konservativt kraftsystem, ett dissipativt system.

En punkt i den elastiska zonen lämnar bidraget $\Delta\psi_e$ enligt (55) till det inre arbetet, varemot en punkt i den plastiska zonen enligt fig. 13 bidrar med andelen

$$\Delta\psi_p = \frac{1}{2} \cdot \theta \cdot R_o \cdot g \cdot P_o + (R - R_o) \cdot \theta \cdot g \cdot P_o \qquad (56)$$

vilket kan vidareutvecklas enligt följande

$$\Delta\psi_p = R \cdot \frac{P_o}{k R_o} \cdot g \cdot P_o - \frac{1}{2} \cdot \frac{P_o}{k R_o} \cdot R_o \cdot g \cdot P_o =$$

$$= \frac{P_o^2}{k R_o} \cdot g \cdot R - \frac{1}{2k} \cdot P_o^2 \cdot g$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{P_o^2}{R_M} \cdot g \cdot R - \frac{1}{2k} \cdot P_o^2 \cdot \frac{1}{\varphi} \cdot \varphi \cdot g \qquad (57)$$

Summation över det totala systemet ger därefter det inre arbetet

$$\psi = \frac{P_o^2}{2k} \cdot \frac{1}{\varphi} \left(\frac{1}{\varphi} \cdot \frac{1}{R_M^2} \cdot \sum_e g R^2 + 2 \cdot \frac{1}{R_M} \cdot \sum_p g R - \varphi \cdot S_p \right) \qquad (58)$$

där S_p står för Σg med summationen utsträckt över endast den plastiska zonen.

Nu deriveras ψ med avseende på u med tillämpning av sambanden (45) och (46)

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = \frac{P_o^2}{2k} \cdot \frac{1}{\varphi} \cdot \left[\frac{1}{\varphi} \cdot \frac{1}{R_M^4} \left(R_M^2 \cdot 2 \sum_e g R \frac{\partial R}{\partial u} - 2 R_M \frac{\partial R_M}{\partial u} \sum_e g R^2 \right) \right.$$

$$\left. + 2 \frac{1}{R_M^2} \left(R_M \sum_p g \frac{\partial R}{\partial u} - \frac{\partial R_M}{\partial u} \sum_p g R \right) \right]$$

$$= \frac{P_o^2}{k R_o} \left[\frac{1}{R_o} \sum_e g R \frac{\partial R}{\partial u} - \frac{1}{R_o} \cdot \frac{1}{R_M} \cdot \frac{\partial R_M}{\partial u} \sum_e g R^2 + \sum_p g \frac{\partial R}{\partial u} - \frac{1}{R_M} \cdot \right.$$

$$\left. \frac{\partial R_M}{\partial u} \sum_p g R \right] = \frac{P_o^2}{k R_o} \left[- \frac{1}{R_o} \sum_e g R \frac{a}{R} - \sum_p g \frac{a}{R} + \frac{1}{R_M} \right.$$

$$\left. \left(\frac{a_M}{R_M} \cdot \frac{1}{R_o} \sum_e g R^2 + \frac{a_M}{R_M} \sum_p g R \right) \right] \qquad (59)$$

eller alternativt

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = \frac{P_o^2}{k R_o} \left[- \frac{1}{R_o} \sum_e g a - \sum_p g \frac{a}{R} + \frac{a_M}{R_M^2} \left(\frac{1}{R_o} \sum_e g R^2 + \sum_p g R \right) \right] \qquad (60)$$

och analogt

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{P_o^2}{k R_o} \left[- \frac{1}{R_o} \sum_e g b - \sum_p g \frac{b}{R} + \frac{b_M}{R_M^2} \left(\frac{1}{R_o} \sum_e g R^2 + \sum_p g R \right) \right] \qquad (61)$$

Är den yttre belastningen kraften N omskrives dessa ekvationer enligt följande. Först ersättes de inre parenteserna med uttrycket i momentekvationen (28), varvid erhålles

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{P_o^2}{k R_o} \left[- \frac{1}{R_o} \sum_e g a - \sum_p g \frac{a}{R} + \frac{a_M \cdot d}{R_M^2} \cdot \frac{N}{P_o} \right]$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{P_o^2}{k R_o} \left[- \frac{1}{R_o} \sum_e g b - \sum_p g \frac{b}{R} + \frac{b_M \cdot d}{R_M^2} \cdot \frac{N}{P_o} \right] \qquad (62)$$

Utvecklas detta ytterligare, får man

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{P_o^2}{k R_o} \left[- \frac{1}{R_o} \sum_e g a - \sum_p g \frac{a}{R} + \frac{N}{P_o} \right] + \frac{P_o N}{k R_o} \left[- 1 + \frac{a_M \cdot d}{R_M^2} \right]$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{P_o^2}{k R_o} \left[- \frac{1}{R_o} \sum_e g b - \sum_p g \frac{b}{R} \right] + \frac{P_o N}{k R_o} \cdot \frac{b_M \cdot d}{R_M^2} \qquad (63)$$

Jämföres med (48) och (21) inses att

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{P_o^2}{k R_o} \cdot \mathcal{H}_u$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{P_o^2}{k R_o} \cdot \mathcal{H}_v \qquad (64)$$

eller i vektorform

$$\text{grad } \psi + \frac{1}{\omega} \cdot \text{grad } \Phi = \frac{P_o^2}{k R_o} \left(\mathcal{H}_u, \mathcal{H}_v \right) \qquad (65)$$

Är den yttre belastningen istället momentet M, fås utgående från (60) och (61) och med tillämpning av momentekvationen (32)

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{P_o^2}{k R_o} \cdot \left[- \frac{1}{R_o} \sum_e g a - \sum_p g \frac{a}{R} \right] + \frac{P_o \cdot M}{k \cdot \varphi} \cdot \frac{a_M}{R_M^3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{P_o^2}{k R_o} \cdot \left[- \frac{1}{R_o} \sum_e g b - \sum_p g \frac{b}{R} \right] + \frac{P_o \cdot M}{k \cdot \varphi} \cdot \frac{b_M}{R_M^3} \qquad (66)$$

En jämförelse med (53) visar, att även dessa uttryck för till ekvationen (65).

Beaktar vi nu att $\psi - \Phi = 0$ fås ur (65)

$$\text{grad } \psi = \frac{\omega}{1+\omega} \cdot \frac{P_o^2}{k R_o} (\mathscr{U}_u, \mathscr{U}_v) \tag{67}$$

Läget för punktskarans vridmedelpunkt bestämmes därefter enligt principen om minimum av inre arbete ur villkoret

$$\text{grad } \psi = \bar{0} \tag{68}$$

Enligt (58) och (67) går såväl ψ som grad ψ mot oändligheten, då φ går mot noll. Detta är dock en skenbar komplikation, som försvinner enligt förutsättningen att punktgruppen skall vara uppbyggd av diskreta punkter. En följd av denna förutsättning är nämligen, att det alltid skall vara möjligt att uppnå total plasticering för ett $\varphi > 0$. Detta innebär, att vi för ett fortsatt studium av grad ψ är berättigade att endast behandla parentesens innehåll och bortse från den konstanta faktorn. Innan denna faktor bortkastas, skall dock ett par ord sägas om dess storlek.

För rent elastiska förhållanden är $\omega = \frac{1}{2}$ varvid faktorn antar värdet $\frac{1}{3} \cdot P_o^2/kR_o$. För total plasticering är $\omega = 1$ varför faktorn blir $\frac{1}{2} \cdot P_o^2/kR_o$. Mellan dessa gränser måste värdet därför ligga i det allmänna fallet. Vi kan av kurvorna i fig. 10 och fig. 12 dessutom dra den slutsatsen, att om cirkeln med radien R_o under sin inryckning mot slutläget, svarande mot ett givet φ, samtidigt passerar ett stort antal av punktskarans punkter, vi får ett mindre ω-värde och en sprödare konstruktion än om cirkeln med radien R_o successivt passerar samma punkter, då vi får ett större ω och en segare konstruktion. Ett studium av ω's variation inom det elastoplastiska området kan alltså ge upplysningar om konstruktionens seghet.

Vid det fortsatta arbetet med problemets grundekvation grad $\psi = \bar{0}$ går vi två skilda vägar avhängig av om $\varphi \geq 1$ eller om $\varphi < 1$. Vi behandlar först det elastiska lösningsområdet alltså fallet $\varphi \geq 1$.

Är punktgruppen åverkad av enbart momentet M ger grad $\psi = \bar{0}$ ekvationerna

$$\mathscr{H}_u = \frac{1}{R_o} \Sigma g a = 0$$
$$\mathscr{H}_v = \frac{1}{R_o} \Sigma g b = 0 \qquad (69)$$

vilket visar att vridmedelpunkten sammanfaller med gruppens viktade tyngdpunkt. Momentjämnvikt enligt (32) ger därefter

$$\frac{1}{R_o} \Sigma g R^2 = \frac{1}{R_o} \cdot I_o = \frac{M}{P_o} \qquad (70)$$

där I_o betecknar gruppens polära tröghetsmoment med avseende på tyngdpunkten. Multiplikation med $g \cdot R$ ger nu

$$g \cdot \frac{R}{R_o} \cdot I_o = g \cdot \frac{M}{P_o} \cdot R \qquad (71)$$

eller med ett alternativt skrivsätt

$$P = g \cdot \frac{M}{I_o} \cdot R \qquad (72)$$

vilket är problemets klassiska lösning.

Är punktgruppen belastad med kraften N ger grad $\psi = \bar{0}$

$$\frac{1}{R_o} \Sigma g a = \frac{N}{P_o}$$
$$\frac{1}{R_o} \Sigma g b = 0 \qquad (73)$$

vilket som första resultat ger beskedet att vridmedelpunkten ligger på samma höjd som tyngdpunkten.

Fig. 14 ger därefter sambandet

$$R^2 = a^2 + b^2 = (f + c)^2 + b^2 = r^2 + f^2 + 2 c f \qquad (74)$$

som insatt i momentekvationen (28) ger

$$\frac{1}{R_o} \cdot \Sigma g r^2 + \frac{1}{R_o} f^2 \cdot \Sigma g + 2 f \Sigma g c = d \frac{N}{P_o} \qquad (75)$$

Med $\Sigma g r^2 = I_o$, $\Sigma g = S$ och $\Sigma gc = 0$ erhålles

$$\frac{1}{R_o}(I_o + f^2 \cdot S) = \frac{I}{R_o} = d \cdot \frac{N}{P_o} \tag{76}$$

där I betecknar gruppens polära tröghetsmoment med avseende på vridmedelpunkten. N/P_o enligt (76) insatt i den första av ekvationerna (73) ger

$$\frac{1}{R_o} \Sigma g (f + c) = \frac{1}{R_o} \cdot f \cdot S = \frac{I}{d R_o} \tag{77}$$

varur erhålles sambandet

$$d \cdot f = \frac{I}{S} \tag{78}$$

Utnyttjas att $d = e + f$ kan vi vidareutveckla enligt följande

$$(e + f) \cdot f = e \cdot f + f^2 = \frac{I}{S} \tag{79}$$

eller

$$e \cdot f \cdot S + S \cdot f^2 = I_o + f^2 \cdot S \tag{80}$$

vilket slutligen leder till den av K W Johansen loc. cit. angivna lösningen

$$e \cdot f = \frac{I_o}{S} \tag{81}$$

Härefter är med användning av (9), (76), (78) och (81)

$$P = g \cdot P_o \cdot \frac{R}{R_o} = g \cdot R \cdot \frac{d \cdot N}{I} = g \cdot \frac{d}{e} \cdot \frac{e \cdot N}{I} = g \cdot \frac{M_o}{I_o} \cdot R \tag{82}$$

Exempel 3. Fig. 15 visar samma nitförband som behandlades i exempel 1, även belastningen är den samma, varför vi direkt ur (81) kan beräkna

$$f = \frac{3 \cdot 70 \cdot a^2}{15 \cdot 7 \cdot a} = 2\,a$$

Nu är $R_M = 5\,a$ vilket enligt (82) ger

$$P_{max} = \frac{7}{3} \cdot a \cdot N \cdot \frac{5a}{70a^2} = \frac{1}{6} N = 0.167\ N$$

alltså samma resultat som vi erhöll i exempel 1.

Inom det elastoplastiska lösningsområdet, fallet $\varphi < 1$, kan vi i allmänhet icke lösa ut koordinaterna (u, v) för vridmedelpunktens läge, utan vi får nöja oss med att konstatera, att vårt problem nu är återfört till det triviala att söka minimum av en funktion av två variabler. För detta har vi till förfogande de två derivatorerna $\mathcal{H}_u$ och $\mathcal{H}_v$ enligt (21), vilket är tillräckligt för problemets lösning. Den numeriska behandlingen överlämnas med fördel åt en datamaskin, varför det är nödvändigt att uppställa en lämplig algoritm. Detta göres i följande kapitel. Här skall vi belysa några genom analys åtkomliga specialfall.

Vi betraktar en punktgrupp belastad med enbart moment, där belastningen antas stegrad till brott, varmed vi här avser att påkänningstillståndet $\varphi = 0$ inträffar.

Villkoret grad $\psi = \bar{0}$ kan då enligt (45) skrivas

$$\frac{\partial \Sigma g R}{\partial u} = 0 \qquad \frac{\partial \Sigma g R}{\partial v} = 0 \tag{83}$$

Härmed är utsagt att vridmedelpunkten för en punktskara, där alla punkter har samma vikt, i brottstadiet är den punkt, som karakteriseras av att summan av avstånden från den samma till konstruktionens samtliga punkter är minimal. Punkten med den omtalade egenskapen är Torricellis punkt (Evangelista Torricelli, 1608-47). Den spelar en viss roll för Torricellis princip, för vilket redogörs i hans bok <u>De Motu gravium naturaliter descendentium et projektorum</u> (Florence 1644).

För några enkla punktfigurationer kan Torricellis punkt direkt anges.

En konstruktion med endast två punkter måste för att uppfylla jämviktsvillkoren ha sin vridmedelpunkt belägen på linjestycket som begränsas av de två punkterna. I själva verket kan en godtycklig punkt på detta liniestycke betraktas som Torricelli punkt för ifrågavarande konstruktion. För en konstruktion med tre punkter vilka bildar hörnpunkter i en triangel, där ingen vinkel är 120° eller större kan Torricellis punkt bestämmas ur fig. 16. Denna visar att villkoret för kraftjämvikt är, att vinkeln mellan krafterna två och två alltid måste vara 60° oberoende av triangelns form.

Då vinkelsumman i fyrhörningen ATBE skall vara 360° blir därför vinkeln ATB = 120°, vilket innebär att punkten T ligger på den geometriska orten för de punkter, från vilka linjestycket AB ses under 120°. Orten är en cirkelbåge, vars konstruktion framgår av figuren. Upprepas konstruktionen för de två andra triangelsidorna erhålles tre cirkelbågar, som skär varandra i Torricellis punkt.

Exempel 4. Räkna med enbart momentåverkan på konstruktionen i fig. 16. Vid flytgränsen sammanfaller vridmedelpunkten och tyngdpunkten med koordinater $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Nu beräknas

$$R_A = R_o = 4.533 \qquad R_B = 3.902 \qquad R_C = 2.749$$

Flytmomentet är då

$$M_1 = R_o \cdot P_o + \frac{P_o}{R_o}\left(R_B^2 + R_C^2\right) = 9.56 \cdot P_o$$

Vid brottgränsen sammanfaller vridmedelpunkten och Torricellis punkt. Enligt figuren är brottmomentet

$$M_o = 10.97 \cdot P_o$$

Sedan flytmomentet har uppnåtts, finnes således en ytterligare hållfasthetsreserv om ca 15 % innan konstruktionen kollapsar.

Exempel 5. Vi betraktar en punktgrupp enligt fig. 17 med tre punkter placerade som hörn i en likbent triangel.
Alla punkter har vikten 1 och konstruktionen angripes av enbart moment.
Ur (9) erhålles

$$P = \frac{h - a}{R_o} \cdot P_o = \frac{1}{\varphi} \cdot (h - a) \cdot \frac{P_o}{R_M} \tag{84}$$

Ur kraftpolygonen fås

$$P = 2 \cdot P_o \cdot \sin\gamma = 2 \cdot a \cdot \frac{P_o}{R_M} \tag{85}$$

(84) och (85) ger därefter

$$\frac{1}{\varphi}(h - a) = 2a \tag{86}$$

eller

$$a = \frac{h}{1 + 2\varphi} \tag{87}$$

Relationen gäller då $h - a \leq R_o$ vilket villkor kan omformas till det likvärdiga villkoret

$$tg\,\vartheta \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2} + \varphi\right) \qquad (88)$$

För $\varphi = 0$ erhålles $tg\,\vartheta \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ d.v.s. $\vartheta \leq 30°$.

Om villkoret är uppfyllt, gäller enligt (87) $a = h$.
Väljes den således bestämda Torricellis punkt som vridmedelpunkt, uppfylles dock icke den horisontella projektionsekvationen. Problemet har således ingen lösning för $\varphi = 0$ men väl för alla $\varphi \neq 0$.

Om $\varphi = 0$ och $\vartheta > 30°$ finnes en lösning, som dock inte bestämmes av (87). Torricellis punkt bestämmes i detta fall av konstruktionen i det föregående exemplet men framgår för övrigt av krafttriangeln där för $P = P_o$ erhålles $\gamma = 30°$.
För $\varphi = 1$ erhålles $tg\,\vartheta \leq \sqrt{3}$ d.v.s. $\vartheta \leq 60°$.

Om villkoret är uppfyllt gäller enligt (87) att $a = \frac{1}{3}h$.
Vridmedelpunkten ligger således som även tidigare visat i de tre punkternas tyngdpunkt.

För en konstruktion med fyra punkter placerade i hörnen på en egentlig konvex fyrhörning sammanfaller såsom framgår av fig. 18 Torricellis punkt och diagonalernas skärningspunkt. Principen kan utsträckas att gälla för ett godtyckligt jämt antal punkter placerade på sådant sätt att förbindningslinjerna mellan punktparen skär varandra i en och samma punkt.

Som omedelbart inses ändrar sig icke läget av Torricellits punkt för en sådan figur därest en eller flera punkter förflyttas efter den halvlinje som utgår från vridmedelpunkten och innehåller punktens ursprungliga läge.

Dessutom inses att om man har bestämt läget av Torricellis punkt för en trepunktskonstruktion förändrar sig icke detta, om man utökar till en fempunktskonstruktion, därest förbindningslinjen mellan de tillfogade två punkterna innehåller den ursprungliga vridmedelpunkten. Efter dessa regler kan man ibland uppleta Torricellis punkt för mera komplicerade punktkonfigurationer.

Lastfallet kraft inom det elastoplastiska lösningsområdet är än mindre tillgängligt för en analytisk behandling. Vi skall dock som avslutning på detta kapitel ge ett enkelt exempel.

Exempel 6. Vi betraktar en punktgrupp enligt fig. 19 med endast två punkter, den ena med vikten 1 den andra med vikten g_o. Punktgruppen angripes av kraften N verkande vinkelrätt mot punkternas förbindningslinje.

Enligt (9) gäller

$$P = g_o \cdot P_o \cdot \frac{a}{R_o} = \frac{a}{R_M} \cdot \frac{g_o}{\varphi} \cdot P_o = \frac{a}{l - a} \cdot \frac{g_o}{\varphi} \cdot P_o \qquad (89)$$

En vertikal projektionsekvation ger

$$P_o - P + N = 0 \qquad (90)$$

som med P enligt (89) insatt kan skrivas

$$a \left(1 + \frac{g_o}{\varphi} \right) - 1 = (1 - a) \cdot \frac{N}{P_o} \qquad (91)$$

Momentjämvikt kring vridmedelpunkten C. T. ger

$$a \cdot P + (1 - a) \cdot P_o - (a + e) \cdot N = 0 \qquad (92)$$

som med P insatt ger

$$a^2 \left(1 + \frac{g_o}{\varphi}\right) + l^2 - 2 a l = (a + e)(l - a) \cdot \frac{N}{P_o} \qquad (93)$$

Elimineras N/P_o ur (91) och (93) erhålles efter hyfsning sambandet

$$a = \frac{\varphi}{\varphi + g_o \cdot \frac{e}{l + e}} \cdot l \qquad (94)$$

Relationen gäller under förutsättningen $a \leq R_o$, vilket kan transformeras till det likvärdiga villkoret

$$1 + \frac{l}{e} \leq g_o \qquad (95)$$

Om detta villkor ej är uppfyllt, gäller ett på likartat sätt härlett samband

$$a = \frac{\varphi^{-1}}{\varphi^{-1} + g_o \frac{e}{l + e}} \cdot l \qquad (96)$$

För $g_o = 2$ erhålles ur (89) och (91) för olika e-värden

$$e = \infty \qquad a = \frac{\varphi}{\varphi + 2} \cdot l \tag{97}$$

$$e = l \qquad a = \frac{\varphi}{\varphi + 1} \cdot l \tag{98}$$

$$e = \frac{1}{2} l \qquad a = \frac{3}{2\varphi + 3} \cdot l \tag{99}$$

$$e = 0 \qquad a = l \tag{100}$$

$$e = -\frac{1}{2} l \qquad a = \frac{\varphi}{\varphi - 2} \cdot l \tag{101}$$

$$e = -l \qquad a = 0 \tag{102}$$

De ur dessa uttryck beräknade sambanden mellan e och a åskådliggöres i fig. 20 för påkänningstillstånden $\varphi = 0,5$ och $\varphi = 0$. Som framgår ger de erhållna lösningarna för $\varphi = 0$ svar som, bortsett från de två triviala fallen $e = 0$ och $e = -l$, strider mot jämviktsekvationerna. För $\varphi = 0$ har problemet således generellt ingen lösning.

Om vi betraktar gränsfallet $e = l$ ser vi att a beräknas enligt (98) då e närmar sig detta värde från höger. Därest i stället e närmar sig värdet l från vänster beräknas ur (96)

$$a = \frac{1}{1 + \varphi} \cdot l \tag{103}$$

Det existerar alltså en neutral zon av längden

$$\frac{1}{1 + \varphi} \cdot l - \frac{\varphi}{1 + \varphi} \cdot l = \frac{1 - \varphi}{1 + \varphi} \cdot l \tag{104}$$

inom vilken vridmedelpunkten aldrig kan falla.

Algoritm

I föreliggande kapitel skall presenteras en algoritm för beräkning av bland annat vridmedelpunktens läge. Algoritmen har skrivits som en procedure i ALGOL 60 (se t. ex. [4]), varför den även kan användas som del i ett datamaskinprogram. I slutet på kapitlet skall exempel givas på ett sådant, som har nyttjats vid beräkning av de senare visade tillämpningarna, men först visas och kommenteras algoritmen.

```
real procedure P(m,fi,xp,yp,psi,x0,y0,N,M,t);
value xp,yp,psi,t;
integer m,t;
real fi,xp,yp,psi,x0,y0,N,M;
begin integer i,j;
      real Sx,Sy,u,v,u1,v1,u2,v2,d,e,f,h;
      own real S,I,u0,v0,ut,vt,si,co,e0,h0,R0,mi,eps;
      array a,b,R2[1:200];
      own real array xi,yi,R[1:200];
      switch part:=gravitycenter,coordtrans,twistcenter,force;
      real procedure RM(p,q);
      value p,q; real p,q;
      begin integer i;
            real U,pp,qq,rr,r;
            U:=0; for i:=1 step 1 until n do
            begin pp:=a[i]:=xi[i]-p; qq:=b[i]:=yi[i]-q;
                  rr:=R2[i]:=pp×pp+qq×qq; r:=R[i]:=sqrt(rr);
                  if r>U then begin U:=r; mi:=i end
            end;
            RM:=U
      end RM;
      real procedure deriv(c,t); value t;
      integer t; array c;
      begin integer i;
            real sum1,sum2,R0,U;
            sum1:=sum2:=0;
            R0:=fi×RM(u,v);
            for i:=1 step 1 until n do if R[i]≥R0 then
            sum1:=sum1+g[i]×(if R[i]=0 then 0 else c[i]/R[i]) else
            sum2:=sum2+g[i]×c[i];
            U:=sum1+(if R0=0 then 0 else sum2/R0);
            if t≠0 then
            begin sum1:=sum2:=0;
                  for i:=1 step 1 until n do if R[i]≥R0 then
                  sum1:=sum1+g[i]×R[i] else sum2:=sum2+g[i]×R2[i];
                  sum1:=sum1+(if R0=0 then 0 else sum2/R0);
                  U:=U-sum1/(d-u)
            end; deriv:=-U
      end deriv;
      real procedure w(k,c,t); value t;
      integer t; real k; array c;
      begin real d1,d2;
            d1:=deriv(c,t); if d1=0 then begin w:=k; go to L2 end;
            h:=-sign(d1)×abs(h);
      L1:   k:=k+h; d2:=deriv(c,t);
            if d1×d2≤0 then w:=k+h×d2/(d1-d2) else
            begin d1:=d2; go to L1 end;
      L2:
      end w;
Begin of procedure:
      go to part[t];
gravitycenter:
      Sx:=Sy:=S:=I:=0;
      for i:=1 step 1 until n do
      begin S:=S+g[i]; Sx:=Sx+g[i]×x[i]; Sy:=Sy+g[i]×y[i] end;
      u0:=Sx/S; v0:=Sy/S; ;
```

```
coordtrans:
      if psi=90∨psi<0 then
      begin ut:=u0; vt:=v0;
            for i:=1 step 1 until n do
            begin xi[i]:=x[i]; yi[i]:=y[i] end
      end else
      begin v:=psi/57.29577951; si:=sin(v); co:=cos(v);
            ut:=u0×si-v0×co;
            vt:=u0×co+v0×si;
            for i:=1 step 1 until n do
            begin xi[i]:=x[i]×si-y[i]×co;
                  yi[i]:=x[i]×co+y[i]×si
            end
      end;
constants:
      if t=1 then begin h0:=RM(ut.vt)/10; e0:=h0/20; eps:=e0/5;
      for i:=1 step 1 until n do I:=I+g[i]×R2[i] end;
twistcenter:
      h:=h0; x0:=u:=u1:=u2:=ut; y0:=v:=v1:=v2:=vt; j:=0;
      if psi<0 then begin i:=0; f:=0; go to if fi<1 then L1 else rotation end;
      d:=if psi=90 then xp else xp×si-yp×co; e:=d-ut;
      if abs(e)<e0 then go to translation;
      f:=I/S/e; x0:=u:=u1:=u2:=ut-f; i:=1;
      if fi≥1 then go to L2;
L1:   j:=1+j;
      x0:=u:=u2:=w(u.a,i);
      y0:=v:=v2:=w(v,b,0);
      e:=sqrt((u1-u2)↑2+(v1-v2)↑2);
      if e>eps then begin if j>1 then h:=e; u1:=u2; v1:=v2; go to L1 end;
L2:   if psi=90∨psi<0 then go to rotation;
      x0:=u2×si+v2×co;
      y0:=-u2×co+v2×si;
rotation:
      R0:=fi×RM(u2.v2);
      if fi<1 then begin Sx:=Sy:=0; for i:=1 step 1 until n do
      if R[i]≥R0 then Sx:=Sx+g[i]×R[i] else Sy:=Sy+g[i]×R2[i];
      M:=Sx+(if R0=0 then 0 else Sy/R0) end else M:=(S×f↑2+I)/R0;
      if psi≥0 then begin f:=d-u2; N:=M/f end else N:=0;
      if fi≠0 then go to L3;
control:
      Sx:=Sy:=0;
      for i:=1 step 1 until n do if R[i]≥eps then
      begin Sx:=Sx+g[i]×a[i]/R[i]; Sy:=Sy+g[i]×b[i]/R[i] end;
      if sqrt((Sx-N)↑2+Sy↑2)>S/sqrt(n)/1000 then
      begin fi:=0.01; go to twistcenter end;
L3:   N:=abs(N); go to force;
translation:
      N:=if fi>1 then  S/fi else S;
      M:=0;
force:
      if m=0 then begin m:=mi; P:=if fi≤1 then g[mi] else
      g[mi]/fi end else
      P:=if M=0 then begin if fi≤1 then g[m] else g[m]/fi end
      else begin if R[m]<eps then 0 else
      if R[m]≥R0 then g[m] else g[m]×R[m]/R0 end
end P;;
```

Proceduren förutsätter de globala variablerna x, y, g och n, där n är av typen <u>integer</u> och anger antalet punkter i punktgruppen, medan x, y, g [1:n] är deklarerade <u>array</u> och anger punkternas koordinater i ett godtyckligt valt rättvinkligt koordinatsystem jämte punkternas vikter.
P antar vid anrop värdet av punktkraften vid punkt nummer m. Punkterna antas härvid numrerade i löpande följd med början vid 1.
De formella parametrarna har följande betydelse:
<u>Input</u>

xp, yp : koordinater för en punkt på den yttre lastens verkningslinje för fallet då den yttre lasten är en kraft. Då den yttre lasten är ett moment är xp, yp odefinierade.

psi : vinkeln mellan x-axelns positiva riktning och verkningslinjen för den yttre kraften, varvid gäller relationen $0^{\circ} \leq psi < 180^{\circ}$. Därest den yttre lasten är ett moment, sättas psi = - 1.

t: en parameter som via en switch styr beräkningens omfattning.

Input/Output

m: som input anger m nummer på den punkt för vilken kraften P önskas beräknad. Därest m = 0 vid anrop, fås som output m = nummer till den mest ansträngda punkten.

fi : som input anger fi det önskade påkänningstillståndet φ för vilket konstruktionen skall beräknas. Därest problemt icke har någon lösning för $\varphi = 0$ genomförs beräkningen för $\varphi = 0.01$ vilket värde fi antar som output.

Output

x0, y0: de sökta koordinaterna till vridmedelpunkten. För renodlad translation är x0, y0 odefinierade.

N: mot påkänningstillståndet φ svarande yttre kraft. I fallet då den yttre lasten är ett moment, erhålles N = 0.

M: kraften N´s moment med avseende på vridmedelpunkten. För renodlad translation erhålles M = 0.

För såväl P som N och M avses den med hänsyn till kraft dimensionslösa formen, varför resultatet skall multipliceras med P_o.

Vi övergår härefter till att kommentera procedurens interna deklarationer, av vilken endast de tre procedurdeklarationerna skall göras till föremål för en närmare förklaring.

real procedure RM (p, q) ; RM är största avståndet från punkt (p, q) till någon punkt inom punktgruppen. Proceduren beräknar samtliga avstånd och utpekar det största. Alla beräknade avstånd liksom kvadraten på dessa samt radiernas projektioner a respektive b på koordinataxlarna sparas för eventuellt senare bruk. Dessutom antecknas numret för punkten vid RM.

real procedure deriv (c, t); deriv antar värdet på det inre arbetets derivata i punkt (u, v) med avseende på antingen u eller v. Vilken som skall väljas styrs via parametern c, genom att denna sättas lika med antingen a eller b. Derivatorn beräknas med utelämnande av faktor $\frac{\omega}{1+\omega} \cdot \frac{P_o^2}{kR_o}$ (jfr 67) enligt uttrycken

$$\mathcal{H}_u = -\frac{1}{R_o}\sum_e g a - \sum_p g \frac{a}{R} + \frac{1}{d}\left(\frac{1}{R_o}\sum_e g R^2 + \sum_p g R\right)$$
$$\mathcal{H}_v = -\frac{1}{R_o}\sum_e g b - \sum_p g \frac{b}{R} \qquad (105)$$

vilka erhålles ur (21) i kombination med (28).
(105) kan skrivas i den generella formen

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{R_o}\sum_e g c - \sum_p g \frac{c}{R} + \frac{1}{d}\left(\frac{1}{R_o}\sum_e g R^2 + \sum_p g R\right) \qquad (106)$$

där c står för antingen a eller b. Om den sista termen skall medräknas eller ej, beror nu på om derivatorn önskas i u-led eller i v-led. Termens medtagande eller utelämnande styrs via parametern t.

<u>real procedure</u> w (k, c, t). Enligt (58) kan vi uppfatta en vriden punktgrupps inre arbete som en funktion av de två variablerna u och v. En geometrisk avbildning av denna funktion är en krökt yta, för vilken gäller att projektionen av dess lägsta punkt på u-v-planet är punktgruppens vridmedelpunkt. Ett plan parallellt med antingen ψ-u-planet eller v- ψ -planet skär ytan i en kurva, för vilka vi nu söker ett approximativt värde w på den oberoende variabeln svarande mot kurvans minimumspunkt. Tekniken är följande. Med start i en given punkt beräknas kurvans derivata i den betraktade riktningen med hjälp av proceduren deriv. Därefter gås ett steg med en given steglängd h i den riktning som för oss till en lägre punkt på kurvan vilken riktning bestäms av derivatans tecken. Detta upprepas tills vi har bestämt ett intervall av längden h för vilket gäller att derivatorn har motsatt tecken i intervallets båda ändpunkter. Kurvans minimipunkt ligger då inom det således bestämda intervallet och utpekas approximativt som läget för minimumspunkten för en andragradsparabel med samma tangentlutningar i intervalländpunkterna som den betraktade kurvan. Förfarandet belyses i fig. 21 där w framräknas ur uttrycket

$$w = u_i + \frac{d_1}{d_1 - d_2} \cdot h \qquad (107)$$

Av procedurens parametrar har c och t samma betydelse som för procedure deriv och k är det stegvis framåtskridande värdet på antingen u eller v.

Den egentliga algoritmen kan nu kommenteras label för label.
Begin of procedure:

Här väljes var i det följande programmet beräkningen skall starta. De alternativa möjligheterna framgår av switchlistan och valet styrs av parametern t. Första gången måste t åsättas värdet 1.

gravitycenter:

$S = \Sigma g$ jämte läget för punktgruppens viktade tyngdpunkt beräknas.

coordtrans:

för fallet då den yttre lasten är en kraft har vi vid deduktionen av alla formler hittills förutsatt den yttre kraftens verkningslinje parallell med y-axeln. Som visades ovan ålägger vi icke kraften uppfattad som aktuell parameter denna restriktion utan vrider i stället koordinatsystemet, tills villkoret är uppfyllt, och vi kan nyttja tidigare härledda formler.

constants:

Första gången algoritmen genomlöps beräknas här vissa initialvärden, h0, e0, eps och I. Då RM betecknar största avståndet till någon punkt räknat med avseende på tyngdpunkten gäller följande samband

$$h0 = \frac{1}{10} \cdot RM$$

$$e0 = \frac{1}{200} \cdot RM \qquad (108)$$

$$eps = \frac{1}{1000} \cdot RM$$

där h0 betecknar startvärdet för den under procedure w. omtalade steglängden h. e0 och eps kommer att omtalas nedan. I betecknar här punktgruppens polära tröghetsmoment med avseende på tyngdpunkten.

twistcenter:

Detta är algolritmens centrala avsnitt där vridmedelpunktens läge beräknas. Först undersökes om den yttre kraftens verkningslinje går genom punktgruppens tyngdpunkt. Om så är fallet blir gruppens rörelse en renodlad translation och punktkrafterna fördelas efter vikt. Oundvikliga avrundningsfel gör, att vissa gränser får anges inom vilka den yttre kraften skall ligga, för att translation skall anses föreligga. Här har valts toleransen $\pm$ e0 enligt (108) och vi skall ett

ögonblick uppehålla oss vid konsekvenserna av detta val.
Då avståndet från punktgruppen till vridmedelpunkten är mycket stort, vilket är fallet vid kvasitranslation erhålles praktiskt taget samma punktkrafter för alla värden av φ, då φ ligger i intervallet $0 \leq \varphi \leq 1$. Vi är därför berättigade att beräkna vridmedelpunktens läge enligt uttrycket (81), som i samband med e0 enligt (108) ger

$$f \geq \frac{200 \cdot I}{n \cdot R_M} \tag{109}$$

Vid en antagen punktfördelning svarande mot en konstant punktintensitet på periferien av två koncentriska cirklar, av vilka den ena har dubbelt så stor radie som den andra, erhålles därest samtliga viktar är lika med 1

$$I = \frac{2}{3} n \cdot R_M^2 + \frac{1}{3} n \left(\frac{1}{2} R_M\right)^2 = \frac{3}{4} n \; R_M^2 \tag{110}$$

som insatt i (109) ger

$$f \geq \frac{200 \cdot 3 \cdot n \cdot R_M^2}{4 \cdot n \cdot R_M} = 150 \cdot R_M \tag{111}$$

Maximala felet på en punktlast beräknas därefter till

$$\frac{\Delta P}{P} \cdot 100 = \frac{N \cdot e0}{I} \cdot R_M \cdot \frac{n}{N} \cdot 100 = \frac{R_M \cdot 4 \cdot R_M \cdot n \cdot 100}{200 \cdot 3 \cdot n \cdot R^2{}_M} =$$

$$= 0{,}67\ \% \tag{112}$$

vilket visar att de fel, som kan uppkomma genom bortseende från en viss liten excentricitet, är av acceptabel storleksordning.

Därest translation icke kan anses föreligga, beräknas vridmedelpunktens läge enligt uttrycket (81). Om $\varphi \geq 1$ är det således beräknade läget definitivt. Om å andra sidan $\varphi < 1$ måste en justering ske med utgångspunkt från det beräknade. Ett plan parallellt med ψ-u-planet innehållande den funna vridmedelpunkten betraktas. Punkten w_u bestämmas i detta plan och ett nytt plan parallellt med v-ψ-planet läggs genom w_u. I det nya planet bestäms w_v och avståndet e mellan startpunkten och punkt (w_u, w_v) beräknas och jämföras med eps enligt (108). Förfarandet upprepas med följande modifikationer. Som startpunkt i nästa beräkningssteg väljes punkten (w_u, w_v) och steglängden ingående i procedure w sätts lika med e. Således fortsättes till första gången relationen $e \leq$ eps är uppfylld, då beräkningen avbrytes.

rotation:

I detta avsnitt beräknas M och N.

control:

Då för $\varphi \to 0$ vridmedelpunkten konvergerar mot en av punktgruppens punkter kommer punktkraften vid denna punkt momentant att utsläckas, då gränsen nås för $\varphi = 0$. Som framgår av exemplen 5 och 6 kan det då inträffa att jämviktsvillkoren härefter icke är uppfyllda och problemet således ingen lösning har. Den här betraktade algoritm vill i en sådan omöjlig situation felaktigt utpeka denna till konstruktionen hörande punkt som vridmedelpunkt. För att hindra detta verkställes en kontroll baserad på de två projektionsekvationerna. Om dessa icke satisfieras, med en viss tolerans, åsättes φ det nya värdet 0.01 och beräkningen görs om. En svårighet är emellertid att här fastsätta en passande tolerans. Fordrar man å den ena sidan att kraftsummorna skall vara exakt noll skall man med tanke på oundvikliga avrundningsfel med säkerhet aldrig finna jämvikt. Tillåter man å andra sidan ett för stort glapp i kraftpolygonen förlorar kontrollen sitt värde. En rimlig avvägning av glappets storlek har försökts enligt följande. I fig. 22 anger punkter (u, v) den verkliga vridmedelpunkten svarande mot påkänningstillståndet $\varphi = 0$ och ett givet kraftläge. På grund av det iterativa förfarande som tillämpas vid beräkningen hamnar punkten i stället någonstans inom ytan av den visade felcirkeln med radiens ε. I fortsättningen antas att det ogynnsammaste inträffar nämligen att den beräknade vridmedelpunkten kommer att ligga på cirkelns periferi. Vi inskränker oss härefter till att studera endast den vertikala projektionsekvationen vari ingår summan

$$\Sigma g \frac{a}{R} \qquad (113)$$

och vi börjar med att undersöka storleken av bidraget till felet i denna summa härrörande från en godtycklig punktkraft. Felandelen kan enligt figuren tecknas

$$\Delta = g\frac{a}{R} - g\frac{a'}{R'} = g\ (\cos\gamma - \cos\gamma') \qquad (114)$$

Som framgår är

$$\operatorname{tg} \gamma' = \frac{R \cdot \sin\gamma - \varepsilon \cdot \sin\theta}{R \cdot \cos\gamma - \varepsilon \cdot \cos\theta} \tag{115}$$

vilket i samband med (114) och under antagande att $\frac{\varepsilon}{R} << 1$ ger

$$\Delta \approx g \cdot \sin\gamma \cdot \sin(\gamma - \theta) \cdot \frac{\varepsilon}{R} \tag{116}$$

Låter vi nu vridmedelpunkten rotera ett varv på felcirkeln beräknas medelfelen till

$$\Delta_m \approx \frac{1}{\pi} \cdot g \cdot \frac{\varepsilon}{R} \cdot \sin\gamma \int_{\gamma}^{\gamma+\pi} \sin(\gamma - \theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi}\, g \cdot \frac{\varepsilon}{R} \cdot |\sin\gamma| \tag{117}$$

vilket samband åskådliggörs i fig. 23. Som framgår är medelfelets maximala värde

$$\Delta_{mm} = \frac{2}{\pi} \cdot g \cdot \frac{\varepsilon}{R} \tag{118}$$

Det största totala felet Δ_t erhålles nu genom summation över samtliga inre krafter. Summationen baseras på det maximala medelfelet Δ_{mm}, varför vi med hänsyn till den i fig. 22 visade fördelning uppskattningsvis väljer att multiplicera med $\sqrt{n}$ i stället för med punkternas totala antal n. Som medelradie väljas R_M, där R_M räknas med avseende på tyngdpunkten, och som medelvikt räknas S/n. Vi erhåller då

$$\Delta_t \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{S}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{R_M} \cdot \sqrt{n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{R_M} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \tag{119}$$

Med ε/R_M enligt (108) ger (119)

$$\Delta_t \approx \frac{1}{1500} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \tag{120}$$

som, med hänsyn till att ett liknande bidrag erhålles från kraftpolyganens horisontalprojektion, justeras till

$$\Delta_t = \frac{1}{1000} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \tag{121}$$

translation:

för fallet renodlad translation beräknas här N.

force:

i detta sista avsnitt beräknas punktkraften enligt uttrycket (9)

Vid tillämpning av <u>real procedure</u> P har följande algol-program begagnats:

dot structure:

```
begin integer ident,alfa,n,nm,nfi,np,e,i,j,k,q,t;
      real psi,F,M,N,xM,yM,f;
      array x,y,g[1:200],fi,xp,yp[1:20];
      integer array m[1:200];
      switch styr:=L1,L2,L3,L4,L5;
      comment insert procedure P;;

      ident:=read; n:=read; alfa:=read; t:=1;
      for i:=1 step 1 until n do
      begin x[i]:=read; y[i]:=read; g[i]:=if alfa=1 then 1 else read end;
      nm:=read;
      for i:=1 step 1 until nm do m[i]:=if nm=n then i else read ;
L1:   nfi:=read;
      for i:=1 step 1 until nfi do fi[i]:=read;
      if t≠1 then go to styr[read];
L2:   psi:=read; if t=3 then t:=2;
      if t≠1 then go to styr[read] else if psi≥0 then
L3:   begin np:=read;
            for i:=1 step 1 until np do
            begin xp[i]:=read; yp[i]:=read end
      end else np:=1;
      if t≠1 then go to styr[read];
L4:   for i:=1 step 1 until np do
      begin if i≠1 then t:=3;
            for j:=1 step 1 until nfi do
            begin if j≠1 then t:=3; f:=fi[j];
                  for k:=1 step 1 until nm do
                  begin if k≠1 then t:=4; q:=m[k];
                        F:=P(q,f,xp[i],yp[i],psi,xM,yM,N,M,t);
                        if j=1∧k=1 then
                        begin punch(1); punch(1); print(5,0,ident); punch(8);
                        print(1,0,n); if psi≥0 then begin for e:=1 step 1 until
                        if n<10 then 10 else if n<100 then 9 else 8 do
                        punch(0); print(3,2,psi); punch(0); punch(0);
                        print(5,2,xp[i]); print(yp[i]) end; punch(1) end;
                        if k=1 then
                        begin punch(1); print(3,2,f); print(5,3,N); print(M);
                        if M≠0 then begin punch(0); print(5,2,xM);
                        print(yM) end; punch(1) end;
                        print(6,0,q); print(3,3,F); punch(1)
                  end k
            end j
      end i; t:=3; go to styr[read];
L5:   go to dot structure
end
```

Programmet som uteslutande är av administrativ karaktär skall icke närmare kommenteras utan det får räcka med en hänvisning till fig. 24, där ett flödesdiagram visar dess struktur. Av programmet inlästa variabler har den betydelse som framgår av tabell 1.

Tabell 1. Data för programmet "dot structure".

Identifierare	Type	Begränsning	Betydelse
ident	integer		Punktgruppens identifikationsnummer
n	integer	$2 \leq n \leq 200$	Antalet punkter i konstruktionen
alfa	integer	0, 1	En parameter, $\alpha = 0$ innebär att konstruktionens punkter har olika vikter. $\alpha = 1$ innebär att samtliga punkter har vikten $g = 1$
t	integer	$1 \leq t \leq 4$	Beräkningsstyrande parameter. Se real procedure P.
x, y	array		Punktgruppens koordinater
g	array		Punkternas vikter
nm	integer	$1 \leq nm \leq n$	Antalet m-värden
m	integer array		Punktnummer för vilka punktkraften önskas beräknat
nfi	integer	$1 \leq nfi \leq 20$	Antalet φ-värden
fi	array	$[fi] \geq 0$	Påkänningstillstånd φ för vilka beräkning skall ske
psi	real	$0^o \leq psi < 180^o$ eller -1	Vinkeln med x-axeln och yttre kraftens verkningslinje. psi = -1 markerar ren momentverkan
np	integer	$1 \leq np \leq 20$	Antalet kraftlägen med samma psi.
xp, yp	array		Verkningslinjebestämmande punkter för parallella kraftlägen
β	integer	$1 \leq \beta \leq 5$	Beräkningsstyrande parameter enligt fig. 24.

Tillämpningar

I det följande skall det utvecklade programmet demonstreras på nio enkla exempel, vilka har beräknats på datamaskinen SMIL vid Lunds datacentral. Där ej annat sägs har alla punkter vikten $g = 1$.

Exempel 7. Fig. 25 visar ännu en gång den nitgrupp som vi redan har behandlat under elastiska förhållanden i exemplen 1 och 3. En genomräkning med samma kraftläge som tidigare gav inom det elastoplastiska påkänningsområdet den i figuren visade vandringen av vridmedelpunkten vars läge har markerats för $\varphi = 1\ (-0.2)\ 0$. För $\varphi = 1$ är vridmedelpunkten bestämd av koordinaterna $(-2a, 0)$ och kraftens storlek $N_1 = 6 \cdot P_o$. Den successiva stegringen av N slutade vid brottvärdet $N_o = 9.143 \cdot P_o$ med därtill hörande vridmedelpunkt $(-1.76a, -0.54a)$. Av figuren framgår att den maximala punktkraften vid brott är $P_{max} = 0.1095\ N_o$. Ett mått på konstruktionens seghet har man i förhållandet N_o/N_1, vilket för det betraktade lastläget blir

$$\frac{N_o}{N_1} = \frac{9.143}{6.000} = 1.52$$

Vi kan således efter att ha uppnått flytlasten stegra N med ytterligare 52 % innan konstruktionen kollapsar och kan därför klassificera denna kombination av konstruktion och last som seg.

Exempel 8. Det exempel som illustreras i fig. 26 behandlar samma konstruktion ansträngd till samma påkänningstillstånd ($\varphi = 0.8$) av en yttre kraft i samma läge som vi studerade i exempel 2. Medan där punkternas rörelser var bundna av den införda tvångsmedelpunkten, är nu tvånget borttaget så, att konstruktionen själv kan välja sin naturliga vridmedelpunkt. En genomförd beräkning utpekade punkten med koordinaterna $(-6.29,\ 4.65)$ som vridmedelpunkt och den i figuren visade konstruktionen av kraft- och linpolygon på de härav bestämda punktkrafterna visar att detta var korrekt.

Exempel 9. Vi studerar den i det föregående exemplet betraktade 3-punktskonstruktionen då den yttre lastens läge är det i fig. 27 visade. Exemplet skall illustreras ett fall, där vi erhåller en lång vandring av vridmedelpunkten inom det elastoplastiska påkänningsområdet.

Då den yttre lasten växer från 0 till flytlasten $N_1 = 0.773 \cdot P_o$ ligger vridmedelpunkten fast i punkten $\{-2.79, 1\}$. Flytning inträffar nu vid punkt 3. En ytterligare stegring av N sätter därefter vridmedelpunkten i rörelse efter den i figuren visade krökte linjen fram till brytpunkten, vilken uppnås samtidigt som flytning påbörjas vid punkt 2. Då N fortsätter att växa följer vridmedelpunkten sedan den räta linje som pekar mot punkt 1. Då denna punkt uppnås inträffar en omöjlig situation eftersom vi nu icke kan satisfiera jämviktsekvationerna. Konsekvent gav beräkningen enligt programmet för begärd vridmedelpunkt vid $\varphi = 0$ detta för $\varphi = 0.01$ varvid N antog värdet $N_o = 1.023 \cdot P_o$. Konstruktionens seghet vid det givna lastläget uttryckes således genom

$$\frac{N_o}{N_1} = \frac{1.023}{0.773} = 1.32$$

Exempel 10. Vi betraktar än en gång 3-punktskonstruktionen från exempel 4 enligt fig. 28 a. Som förut är belastningen enbart moment och påkänningstillståndet $\varphi = 0$. En beräkning av läget för Torricellis punkt gav $\{-0.16, 2.23\}$ i överensstämmelse med vad vi tidigare fann genom en geometrisk konstruktion. Brottmomentet beräknades samtidigt till $M_o = 10.97\ P_o$.

Enligt vad som sagts i kapitel 4 (sidan 00) kan vi utöka den aktuella punktgruppen till en 5-punktskonstruktion med bibehållen Torricellis punkt genom att komplettera med två ytterligare punkter så belägna, att deras sammanbindningslinje innehåller den ursprungliga Torricellis punkt. En ny beräkning för konstruktionen utökad med punkterna $\{-6, 2.23\}$ och $\{4, 2.23\}$ enligt fig. 28 b gav i överensstämmelse härmed Torricellis punkt för den kompletterade konstruktionen $\{-0.16, 2.23\}$. Brottmomentet beräknades härvid till $M_o = 20.97 \cdot P_o$.

I fig. 28 c visas återigen 3-punktskonstruktionen, denna gång belastad med en yttre kraft vars verkningslinje är bestämd av att den lutar 135° mot x - axeln och innehåller punkten $\{0, 2\}$. Vridmedelpunkten vid $\varphi = 0$. beräknades vara $\{-6.22, -3.02\}$ och tillhörande brottlast $N_o = 2.811 \cdot P_o$. Om vi nu utökar konstruktionen till en 5-punktskonstruktion på i fig. 28 d antytt sätt, inses det att vridmedelpunktens läge icke härigenom rubbas om det på jämviktsekvationerna baserade villkoret

$$R_4 + R_5 = 2 \cdot a \cdot \sin \vartheta$$

är uppfylld.

I det valda fallet har de två tillkommande punkterna koordinaterna $(-6.22, 2)$ resp. $(0, -3.02)$, varför

$R_4 + R_5 = 5.02 + 6.22 = 11.24$. a är $5.62 \cdot \sqrt{2}$ och $\vartheta = 45^o$ med

$2 \cdot a \cdot \sin\vartheta = 2 \cdot 5.62 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 11.24$. De två tillkommande punkterna ändrar således icke vridmedelpunktens läge. En ny beräkning gav i överensstämmelse härmed koordinaterna $(-6.22, -3.02)$ för vridmedelpunkten.

Tillhörande brottlast beräknades till $N_o = 4.225 \cdot P_o$.

De principer som här har demonstrerats äger naturligtvis giltighet även då man utgår från annat än en 3-punktskonstruktion.

Exempel 11. Fig. 29 visar en konstruktion innehållande 12 punkter placerade asymmetriskt på två varandra korsande linjer. Angrips konstruktionen av ett yttre moment, vet vi, att vridmedelpunktens vandring skall börja i punkternas gemensamma tyngdpunkt och sluta i linjernas korsningspunkt (Torricellis punkt) då påkänningstillståndet φ går från 1 till 0. Beräkningen gav den i figuren antydda vägen för denna vandring.

Sambandet mellan å ena sidan det påkänningstillstånd som råder i konstruktionen och å andra sidan det yttre momentet (eller kraften) som förorsakar detta, kan åskådliggöras i en för varje punktkonstruktion särskild karakteristik. För den betraktade 12-punktskonstruktionen gällande karakteristik har framräknats och återges i figuren. Kurvdelen till höger om $\varphi = 1$ är här och generellt en del av en hyperbelgren, varemot kurvdelen avseende det elastoplastiska området får en av punktkonfigurationen betingad växlande form. Ur den här redovisade karakteristiken framgår att seghetstalet blev 1.42.

Exempel 12. En punktskara med 41 punkter ordnade i koncentriska cirklar enligt fig. 30 betraktas. Punkttätheten på cirklarna är den samma för alla cirklarna och konstruktionen åverkas av det yttre momentet M. Sambandet mellan moment och påkänningstillstånd har framräknats och åskådliggöres i fig. 30 med den visade karakteristiken. Som synes finns det en tendens till en särskild ökning av momentet varje gång den inåtryckande cirkeln med radien R_o skall passera en punktbarriär.

Det ligger nära till hands att jämföra denna konstruktion med en konstruktion av jämfördelade punkter inom en cirkelyta, i synnerhet som den senare konstruktionen är åtkomlig för en analytisk behandling då belastningen är renodlad momentåverkan. Antag enligt fig. 31 en cirkel med radien R och med punkttätheten lika med n punkter per ytenhet, då är det totala antalet punkter i konstruktionen

$$t = n \cdot \pi \cdot R^2 \qquad (123)$$

Med vridcentrum i cirkelns centrum erhålles ur momentekvationen och (9) följande samband gällande inom det elastoplastiska området

$$M = 2\pi \cdot \frac{P_o}{R_o} \cdot n \cdot \int_o^{R_o} x^3\,dx + 2\pi n P_o \int_{R_o}^{R} x^2\,dx = \frac{1}{6}\pi n P_o \cdot R^2 \cdot (4 - \varphi^3) \qquad (124)$$

vilket med (123) ger

$$M = \frac{1}{6} \cdot t \cdot P_o \cdot R\,(4 - \varphi^3) \qquad (125)$$

Ur (125) erhålles brottmomentet M_o vid $\varphi = 0$

$$\frac{M_o}{P_o} = \frac{2}{3} \cdot t \cdot R \qquad (126)$$

och flytmomentet M_1 vid $\varphi = 1$

$$\frac{M_1}{P_o} = \frac{1}{2} \cdot t \cdot R \qquad (127)$$

Förhållandet mellan brott- och flytmoment blir således

$$\frac{M_o}{M_1} = \frac{4}{3} = 1.33 \qquad (128)$$

Inom det elastoplastiska området blir ekvationen för punktgruppens karakteristik därefter

$$M = \left(1 - \frac{\varphi^3}{4}\right) \cdot M_o \qquad (129)$$

och inom det elastiska området

$$M = \frac{3}{4\varphi} \cdot M_o \qquad (130)$$

Med $t = 41$ och $R = 4,5$ vilket svarar mot den först betraktade konstruktionen erhålles den i fig. 31 visade karakteristiken.

Exempel 13. Detta exempel skall illustrera att ett nitförbands seghet är starkt beroende av den yttre kraftens läge. Ett långsmalt förband enligt fig. 32 belastas av en kraft i de två alternativa lägen I och II. För lasten i läge I gav en beräkning flytlastens $N_1 = 1304.13 \cdot P_o$ och brottlasten $N_o = 1325.30 \cdot P_o$.
Detta ger

$$\frac{N_o}{N_1} = 1.04$$

vilket indikerar en synnerligen spröd konstellation.
Om å andra sidan lasten stod i läge II gav beräkningen $N_1 = 152.52 \cdot P_o$ och $N_o = 204.50$ med förhållandet

$$\frac{N_o}{N_1} = 1.38$$

alltså uppvisar denna konstellation en avsevärd större seghet.

Alla punkter hade vikten $g = 1$, varför för hela konstruktionen $\Sigma g = 20$.

För att vinna ytterligare kunskap om denna konstruktion upprepades de ovannämnda beräkningar, men med olika viktfördelningar inom gruppen. Som första alternativ omfördelades vikterna så att en punkts vikt blev proportionerad med dess avstånd från x-axeln men med bibehållen totalsumma $\Sigma g = 20$. Beräkningen gav för kraften i läge I $N_1 = 1958.02 \cdot P_o$ och $N_o = 1974.02 \cdot P_o$ varför

$$\frac{N_o}{N_1} = 1.02$$

Med lasten i läge II erhölls $N_1 = 222.72 \cdot P_o$ och $N_o = 273.00 \cdot P_o$ samt

$$\frac{N_o}{N_1} = 1.22$$

alltså en ökning av den yttre lasten men till priset av en större sprödhet jämfört med grundkonstruktionen.

Som nästa alternativ betraktades gruppen med en omfördelning av vikterna så att en punkts vikt blev omvänd proportional med punktens avstånd från x-axeln, men fortfarande med bibehållen totalsumma $\Sigma g = 20$. Denna beräkning gav för kraften i läge I $N_1 = 501.33 \cdot P_o$ och $N_o = 533.64 \cdot P_o$ varför

$$\frac{N_o}{N_1} = 1.17$$

Med lasten i läge II erhölls $N_1 = 64.14 \cdot P_o$ och $N_o = 115.68 \cdot P_o$ samt

$$\frac{N_o}{N_1} = 1.83$$

Jämfört med grundkonstruktionen har vi här vunnit i seghet på bekostnad av bärförmåga.

Konstruktionen har vidare undersökts för renodlad momentåverkan då alla punkter har vikten g = 1. Den framräknade karakteristiken visas i figuren. Det ligger nära till hands att jämföra denna konstruktion med en konstruktion av jämtfördelade punkter utefter en rät linje, eftersom den senare är åtkomlig för en analytisk behandling då belastningen är enbart moment. Antag ett linjestycke med längden 2 R och med punkttätheten lika med n punkter per längdenhet, då är konstruktionens totala antal punkter

$$t = 2 \cdot n \cdot R \qquad (131)$$

Med vridcentrum i linjestyckets mittpunkt erhålles ur momentekvationen och (9) följande samband gällande inom det elastoplastiska området

$$M = 2 \cdot n \cdot \frac{P_o}{R_o} \cdot \int_o^{R_o} x^2\, dx + 2\, n\, P_o \int_{R_o}^{R} x\, dx = \frac{1}{3} \cdot n \cdot P_o \cdot R^2 \cdot$$

$$(3 - \varphi^2) \qquad (132)$$

vilket med (131) ger

$$M = \frac{1}{6} \cdot t \cdot P_o \cdot R\,(3 - \varphi^2) \qquad (133)$$

Ur (133) erhålles brottmomentet M_o vid $\varphi = 0$

$$\frac{M_o}{P_o} = \frac{1}{2} \cdot t \cdot R \qquad (134)$$

och flytmomentet M_1 vid $\varphi = 1$

$$\frac{M_1}{P_o} = \frac{1}{3} \cdot t \cdot R \qquad (135)$$

Förhållandet mellan brott- och flytmoment blir således

$$\frac{M_o}{M_1} = \frac{3}{2} = 1.50 \qquad (136)$$

Inom det elastoplastiska området blir ekvationen för punktgruppens karakteristik därefter

$$M = \left(1 - \frac{\varphi^2}{3}\right) \cdot M_o \qquad (137)$$

och inom det elastiska området

$$M = \frac{2}{3\varphi} \cdot M_o \qquad (138)$$

Med t = 20 och R = 20 vilket svarar mot den först betraktade konstruktionen erhålles den i fig. 33 visade karakteristiken.

Exempel 14. Fig. 34 visar en vanlig stånginfästning som vi träffar den i t.ex. ett fackverk. Ofta går det icke att undvika en smärre avvikelse mellan kraftlinjen, som är den infästa stångens tyngdpunktslinje, och nitraden. Att denna excentricitet medför en reduktion av förbandets kraftöverförande förmåga framgår av den tillhörande karakteristiken som visas i figuren för olika värden på e/a. Det skall särskild uppmärksammas att med de excentriciteter som i detta sammanhang kan bli aktuella och i synnerhet för e = 0 är denna nitgruppsutformning extremt spröd.

I en verklig konstruktion är segheten sannolikt något större än här visad beroende på att förutsättning om kongruensflyttning först är helt giltig då brott i nitarna inträffar.

Exempel 15. Som en kuriositet skall vi i det sista exemplet betrakta stjärnorna α, β, γ, δ, ε, ζ, η i stjärnbilden <u>ursa major</u> som en punktkonstruktion. Stjärnan δ är av 3′ magnituden, den tilldelas vikten g = 2. De övriga sex stjärnorna är av 2′ magnituden, de får därför vardera vikten g = 5. Vi söka nu maximal storlek samt läge för den kraft, som erfordras för att frambringa en rotation kring polstjärnan P av denna konstruktion, dels då rörelsen skall vara helt elastisk och dels då den skall vara helt plastisk. Resultatet som har framkommit genom ytinterpolation mellan resultat från försöksberäkningar framgår av fig. 35.

Temperaturexpansion

Vi betraktar som förut en punktkonstruktion vars enskilda punkter är elastoplastiskt förbundna med ett fast underlag. Det hittills förutsatta kongruensvillkoret kan tolkas som att punkterna ingår i en indeformabel plåt parallell med underlaget.
Vid en likformig uppvärmning av denna plåt vill punktgruppen expandera varvid kongruensvillkoret upphör att gälla och ersättes av ett affinitetsvillkor. Vi ställer här uppgiften att finna polen för denna affinitet.

Inom det elastiska påkänningsområdet erhålles enligt (11)

$$P = g \cdot k \cdot \delta = g \cdot k \cdot \mu \cdot t \cdot R \qquad (139)$$

där μ är materialets längdutvidgningskoefficient och t är temperaturstegringen.

Inom det plastiska området kan vi analogt skriva

$$P = g \cdot k \cdot \mu \cdot t \cdot R_o \qquad (140)$$

där R_o som tidigare markerar gränsen mellan den elastiska och den plastiska zonen.

Påkänningstillståndet φ införes genom att betrakta en punkt på avståndet R_o från polen och med $g = 1$. (140) ger då

$$P_o = k \cdot \mu \cdot t \cdot \varphi \cdot R_M \qquad (141)$$

eller alternativt

$$\varphi = \frac{P_o}{k \cdot \mu \cdot t \cdot R_M} \qquad (142)$$

Det senare uttrycket ger det funktionella sambandet mellan φ och t. Elimineras $k \cdot \mu \cdot t$ mellan å ena sidan (139) jämte (140) och å andra sidan (141) erhålles

$$\begin{aligned} P &= g \cdot P_o \cdot \left(\frac{R}{R_o}\right) && \text{(elastiskt)} \\ P &= g \cdot P_o && \text{(plastiskt)} \end{aligned} \qquad (143)$$

Alltså samma samband som uttryckes i (9), dock med den skillnaden, att punktkrafternas riktning nu har ändrats med $\pi/2$ mot tidigare.

I enlighet med fig. 36 uppskrivas de två projektionsekvationerna för punktkrafterna med tillämpning av samma teckenregel som förut

$$\begin{aligned} \Sigma P \sin\gamma &= 0 \\ -\Sigma P \cos\gamma &= 0 \end{aligned} \qquad (144)$$

Insättes häri (9) och (18) och uppdelas samtidigt summationerna i två, en som utsträckes över den elastiska zonen och en som utsträckes över den plastiska, erhålles

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_o} \sum_e g b + \sum_p g \frac{b}{R} &= 0 \\ -\frac{1}{R_o} \sum_e g a - \sum_p g \frac{a}{R} &= 0 \end{aligned} \qquad (145)$$

Då den yttre kraften i det aktuella fallet är $N = 0$ ger (145) i samband med (21) projektionsekvationerna i vektoriell form

$$(-\mathcal{L}_v \cdot \mathcal{M}_u) = \bar{0} \qquad (146)$$

vilket villkor bestämmer polen för den betraktade affinitetsrörelsen. Det inses att den punkt som satisfierar (146) är den samma som satisfierar (68) varför problemet har återförts till det tidigare behandlade, att finna punktgruppens vridmedelpunkt vid renodlad momentbelastning. Polen ligger således under elastiska förhållanden i gruppens viktade tyngdpunkt och vandrar, då påkänningstillståndet går från flytgräns till brottgräns, från tyngdpunkten till Torricellis punkt.

Exempel 16. Fig. 37 visar samma 3-punktskonstruktion som vi betraktade i exempel 4. Vi skall här studera inverkan av en likformig uppvärmning av konstruktionen.
För en serie φ-värden beräknades dels polens läge dels de enskilda punktkrafterna. Ur (142) bestämdes de mot de olika φ-värdena svarande temperaturstegringarna t. Det således erhållna sambandet mellan de enskilda punktkrafterna och t redovisas till höger i figuren. Som kontroll har för $\varphi = 2/3$ vilket svarar mot

$$t = 0.297 \cdot \left(\frac{P_o}{\mu k}\right)$$

ritats kraft- och linpolygon på de punktkrafter som uppkommer vid denna temperaturstegring. Krafterna har härvid orienterats mot den beräknade polen. Som framgår sluter sig båda polygonerna, varför jämviktsekvationerna är satisfierade.

Avslutning

Punktkonstruktioner av den typ som här har behandlats förekommer inom byggnadstekniken huvudsakligen i följande former.

Nitförband i stål- eller lättmetallkonstruktioner
Skruvförband
Friktionsförband
Spikförband
Pålgrupper av vertikalpålar

För användningen av den ovan framlagda beräkningsmetodiken fordras uppgift om materialkonstanterna, flytgränsen P_o och elasticitetsfaktorn k liksom ett tolerabelt värde på brottförskjutningen δ_{lim} i vissa fall måste fastläggas. Det faller emellertid utanför ramarna för föreliggande arbete att redovisa numeriska värden för dessa storheter, varför vi här nöjer oss med en hänvisning till hållfasthetslärans litteratur och avrundar med några påpekanden av mera principiell natur.

För inom byggnadstekniken förekommande punktkonstruktioner kan sambandet mellan kraft och förflyttning ofta åskådliggöras med hjälp av kurva av i fig. 38 visad typ som kan sägas vara representativ för t. ex. spikförband och pålgrupper. I figuren har likaledes visats en för beräkningarna godtagbar approximation som motsvarar de i inledningen uppställda förutsättningarna.

En variant av typen i fig. 39 är aktuell då ett förband är belastat med en initial klämkraft så som är fallet vid nitförband och fram för allt vid friktionsförband. Sambandet mellan kraft och förflyttning är här lineärt upp tills det att friktionen släpper, härefter fås en förflyttning utan kraftstegring varefter vid begynnande hålkantstryck återigen en kraftstegring inträffar. För konstruktioner av denna typ kan det idealiserade diagrammet väljas som 0-1-2 med P_o på nivån 1-2 eller alternativt 0-5-4 med P_o på nivån 5-4 beroende på den faktiska kurvans form. En bättre approximation erhålles av det idealiserade sambandet som återges av 0-1-2-3-4. En beräkning baserad på detta antagande låter sig emellertid icke utföras med det här utvecklade datamaskinprogrammet. De tillämpade principerna kan dock utan svårigheter modifieras så att de täcker även detta fall. Intresserar man sig för endast det plastiska till-

ståndet, och således lämnar det mellanliggande elastoplastiska tillståndet utan avseende, kan datamaskinprogrammet i sin här visade form alltid tillämpas med P_o på nivån 5-4 såvida icke hänsyn till δ_{lim} förbjuder detta.

I anknytning härtill påpekas, att sist nämnda konstruktioner icke kan anses vara egentliga punktkonstruktioner i samma bemärkelse som t. ex. spikförbanden, då det kraftöverförande mediet här är en yta och icke en punkt. Johansen, loc. cit., har dock visat, att de här tillämpade idealiserade förutsättningar lämnar resultat, som är på säkra sidan.

Avslutningsvis skall nämnas att vid en gränslastberäkning av t. ex. en ram har man vid bestämning av elementarmekanismernas (balkmekanismer och knutpunktförskjutningsmekanismer) gränslastmoment, för de fall då en flytled kan bildas i en stånginfästning av punktkonstruktionskaraktär, att ta hänsyn till mekanismens verkliga vridningspunkter, vilka icke alltid sammanfaller med systemets knutpunkter.

Litteraturhänvisningar

(1) Engelund, Anker, 1943, Staalkonstruktioner I, p.66. Köbenhavn.

(2) Johansen, K W, 1952, Ekscentrisk paavirkede Nittegrupper. Bygningsstatiske Meddelelser, Vol. 23, p. 17. Köbenhavn.

(3) Plem, Erik, 1964, Vridning med punktreaktioner. NordSAM 64, p. 731. Stockholm.

(4) Naur, Peter (Editor), 1964, Revised Report on the Algorithmic Language ALGOL 60. Copenhagen.

Figurtexter

Fig. 1. Nitberäkning enligt den klassiska teorin.

-"- 2. Antagen påkänningsfördelning inom en punktgrupp i det elastoplastiska tillståndet.

-"- 3. Dimensionslös påkänningsfördelning vid olika påkänningstillstånd φ.

-"- 4. Sambandet mellan δ_o, förflyttningen vid gränsradien R_o, och brottförflyttningen δ_{lim}.

-"- 5. Beteckningar för jämviktsekvationernas uppställande då yttre lasten är en kraft.

-"- 6. Beteckningar för jämviktsekvationernas uppställande då yttre lasten är ett moment.

-"- 7. Exempel med tvångsstyrning. C.T. är en påtvungen vridmedelpunkt. Konstruktion av kraft- och linpolygon ger tvångskraften T.

-"- 8. Beteckningar för uppställandet av ett generellt uttryck för tvångskraften T.

-"- 9. Storheter av intresse då kraften N's yttre arbete beräknas.

-"- 10. Sambandet mellan yttre kraften N's storlek och dess förflyttning s. Den streckade ytan är ett mått på kraftens arbete.

-"- 11. Storheter av intresse då momentet M's yttre arbete beräknas.

-"- 12. Sambandet mellan det yttre momentet M's storlek och konstruktionsnens vinkeländring θ.
Den streckade ytan är ett mått på momentets arbete.

-"- 13. En punkt i den elastiska respektive den plastiska zonen vid beräkning av punktkrafternas inre arbete.

-"- 14. Geometriska samband som är aktuella vid beräkning av vridmedelpunktens läge då konstruktionen som helhet befinner sig i det elastiska skedet.

-"- 15. Beräkning av maximal nitkraft för nitförband i det elastiska tillståndet.

-"- 16. Grafisk konstruktion av Torricellis punkt för en 3-punktskonstruktion.

Fig. 17. Analytisk bestämning av Torricellis punkt för en 3-punktskonstruktion.

-"- 18. Torricellis punkt vid en 4-punktskonstruktion.

-"- 19. En 2-punktskonstruktion belastad med en yttre kraft vinkelrät mot punkternas förbindningslinje.

-"- 20. Vridmedelpunktens läge för konstruktionen i fig. 19 då $\varphi = 0.5$ och då $\varphi = 0$ vid olika kraftlägen.

-"- 21. Sektion genom ytan $\mathcal{F}(u,v)$ och approximerande parabel.

-"- 22. Felcirkel med radius ε .

-"- 23. Numeriskt värde av medelfelet Δ_m för olika värden på punktvinkeln γ .

-"- 24. Flödesdiagram för Algol-programmet "dot structure".

-"- 25. Beräkning av maximal nitkraft för nitförband i det plastiska tillståndet.

-"- 26. Punktkonstruktion ansträngd till påkänningstillståndet $\varphi = 0.8$ jämte kontroll av kraftjämvikten.

-"- 27. Exempel på lång vandring av vridmedelpunktens läge vid påkänningsstegring från $\varphi \cong 1$ till $\varphi = 0$.

-"- 28. Utökning av en 3-punktskonstruktion till en 5-punktskonstruktion med bibehållen vridmedelpunkt då den yttre åverkan är ett moment (a och b) och då den yttre åverkan är en kraft (c och d).

-"- 29. Punktkonstruktion belastad med moment. Figuren visar vridmedelpunktens vandring från tyngdpunkten fram till Torricellis punkt. Karakteristiken anger sambandet mellan det yttre momentet och påkänningstillståndet.

-"- 30. Koncentrisk cirkulär punktkonstruktion med tillhörande karakteristik svarande mot momentåverkan.

-"- 31. Cirkulärt begränsat område av punktkonstruktion med konstant punktintensitet jämte härtill svarande på analytiskt väg framtagen karakteristik.

-"- 32. Långsmal punktkonstruktion med två lastlägen jämte mot momentåverkan svarande karakteristik.

-"- 33. På analytisk väg framtagen karakteristik för linjeformig punktkonstruktion med konstant punktintensitet.

-"- 34. Stånginfästning av punktkaraktär med till olika exentriciteter hörande karakteristiker.

Fig. 35. Ursa major betraktad som en punktkonstruktion med vridmedelpunkt i polstjärnan P.

a. Vid renodlade elastiska förhållanden.

b. Vid renodlade plastiska förhållanden.

-"- 36. Beteckningar för jämviktsekvationernas uppställande vid temperaturexpansion.

-"- 37. Figuren återger från vänster till höger en 3-punktskonstruktion utsatt för temperaturexpansion, punktkrafterna pekande mot affinitetspolen jämte krafternas linpolygon, kraftpolygonen samt krafternas variation med temperaturen.

-"- 38. Typ av arbetslinje för punktkonstruktion med endast en nivå för flytkraften P_o.

-"- 39. Typ av arbetslinje för punktkonstruktion med två olika nivåer för flytkraften P_o.

Resume

Punktkonstruktioner

Punktkonstruktioner förekommer inom byggnadstekniken huvudsakligen i form av nit-, bult- friktions- eller spikförband samt som vridbelastade pålgrupper av vertikalpålar. Beräkning av sådana konstruktioner företas för närvarande efter elasticitetsteorin varefter eventuellt brottlasten bestämmas efter något approximativt förfarande.

Denna handling framlägger en komplett teori för beräkning av dessa konstruktioner. Teorin täcker såväl det elastiska som det plastiska stadiet. Även ett godtyckligt påkänningstillstånd inom det mellanliggande elastoplastiska området kan behandlas.

För beräkningarnas genomförande har ett datamaskinprogram utvecklats. med vilket en konstruktions verkliga vridmedelpunkt kan framtagas vid varierande last och vid önskat påkänningstillstånd. Programmet, som har skrivits i det universella programmeringsspråket ALGOL 60, redovisas och kommenteras. Det tillämpas på ett antal exempel, vilka bl.a. ger anledning till några reflexioner över punktkonstruktioners seghet och sprödhet.

Ett kapitel ägnas åt ett studium av en punktkonstruktions beteende vid en likformig temperatursexpansion.

Avslutningsvis berörs kortfattat sambandet mellan gjorda antagen och ingående materials verkliga arbetslinjer.

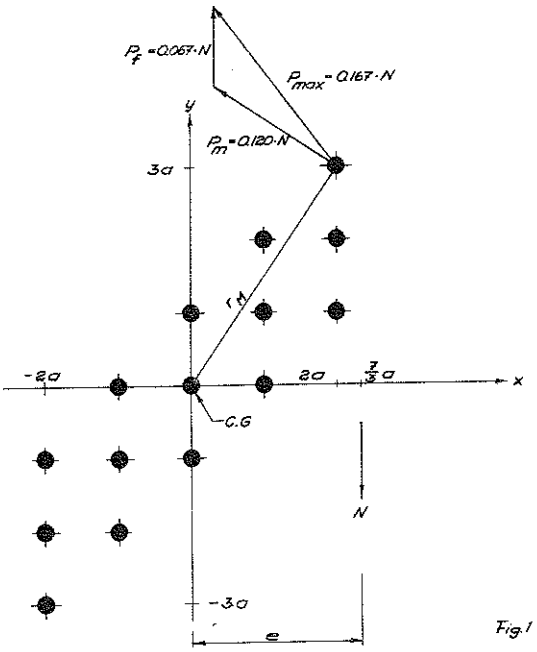


Fig.1

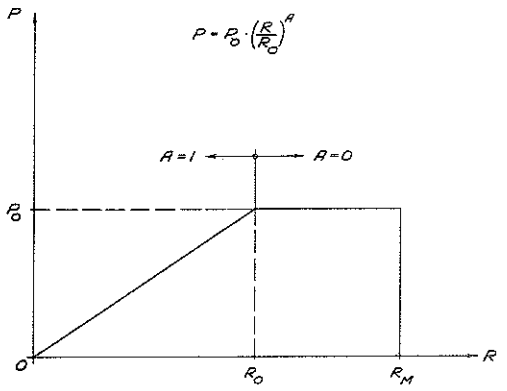


Fig.2

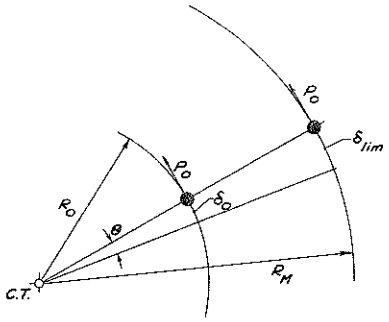
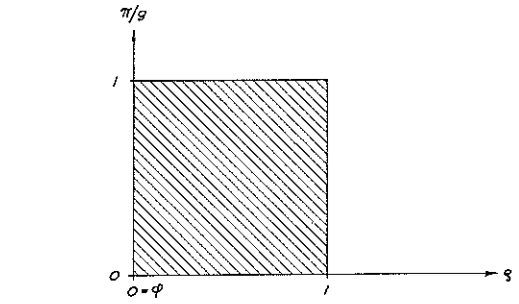
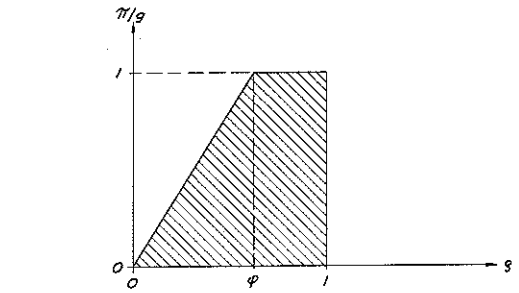


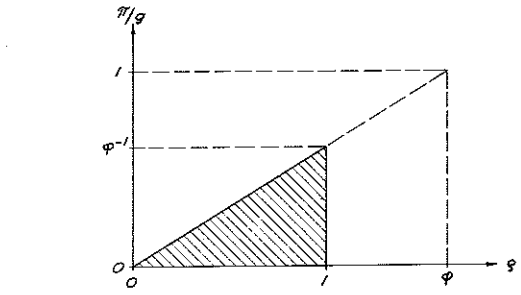
Fig.4



a. Plastiskt tillstånd



b. Elastoplastiskt tillstånd



c. Elastiskt tillstånd

Fig.3

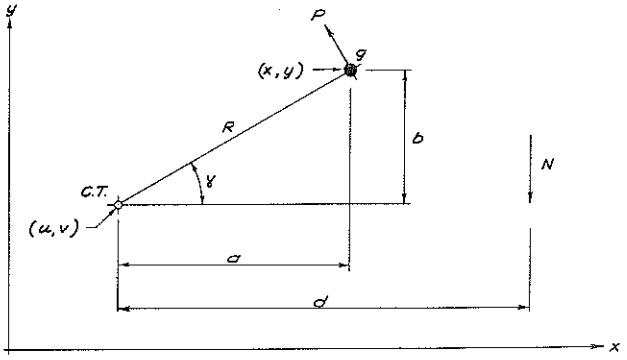


Fig.5

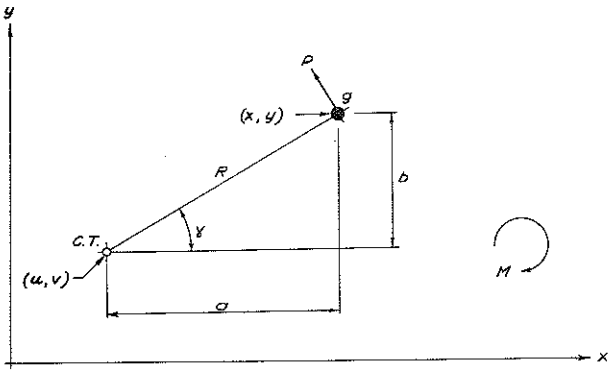


Fig.6

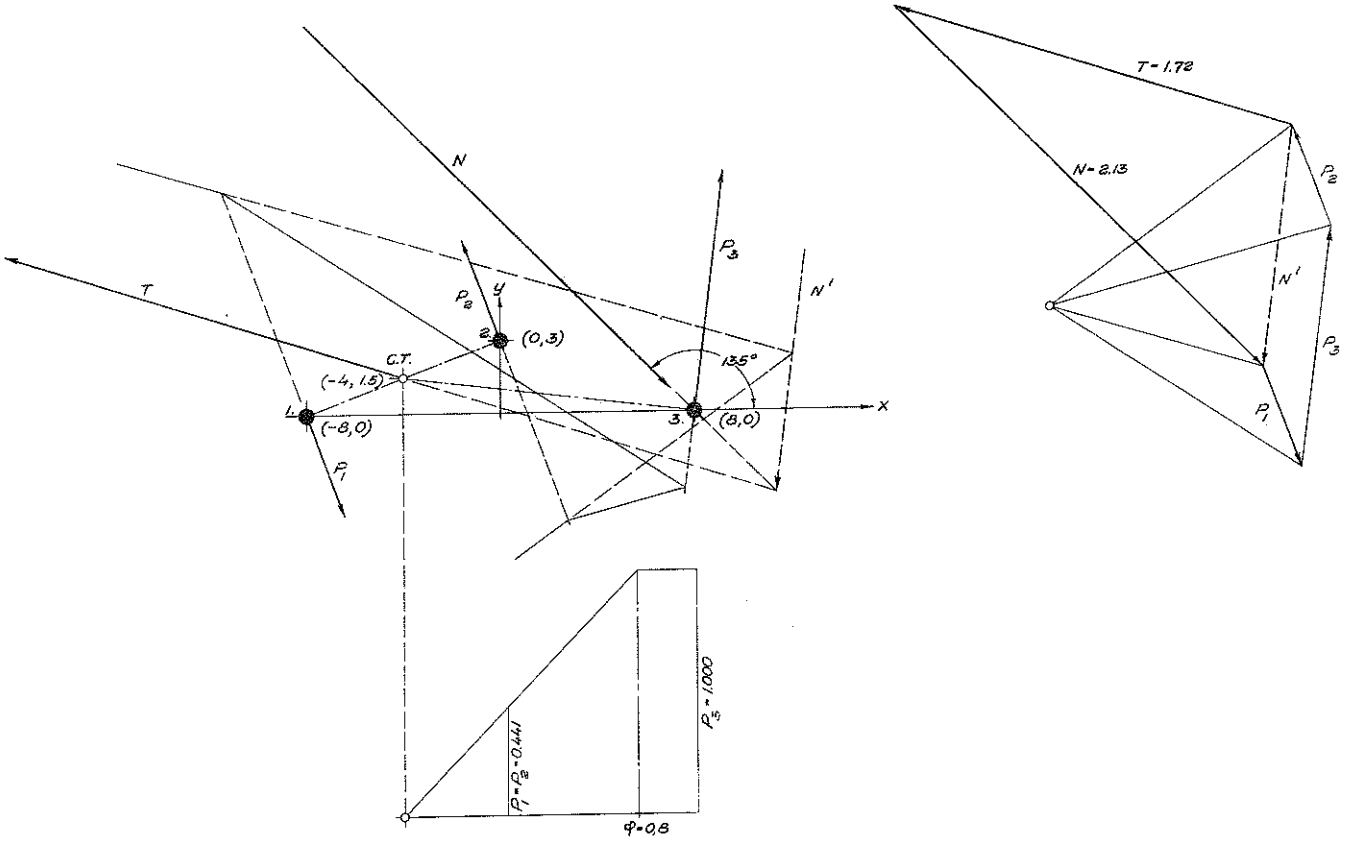


Fig. 7

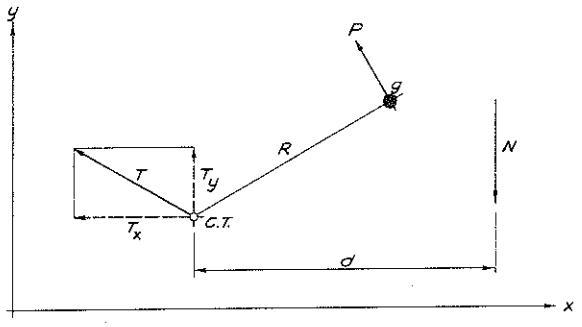


Fig. 8

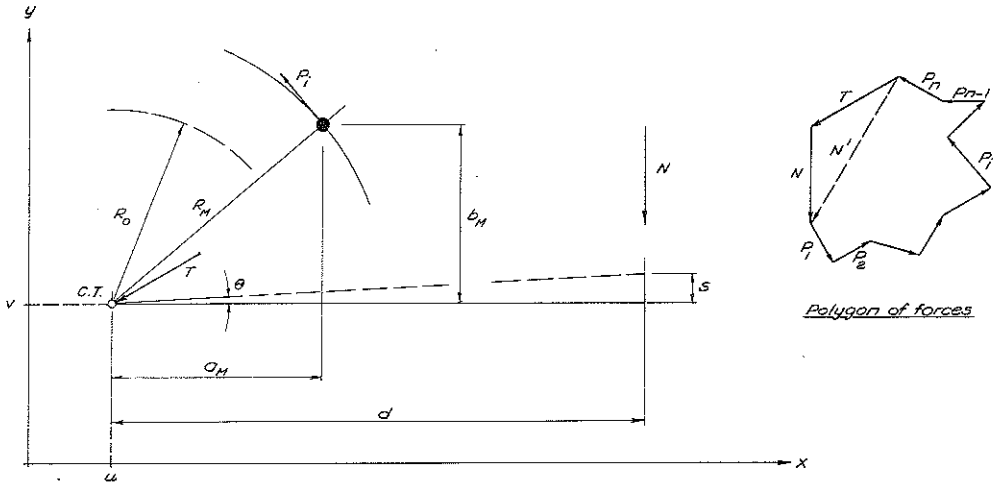


Fig. 9

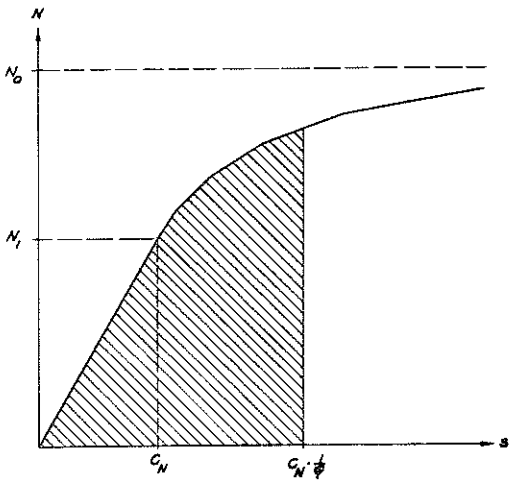
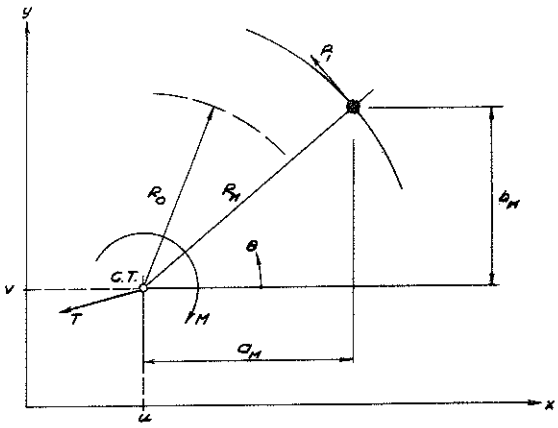
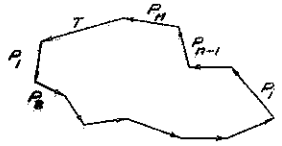


Fig. 10





Polygon of forces

Fig. 11

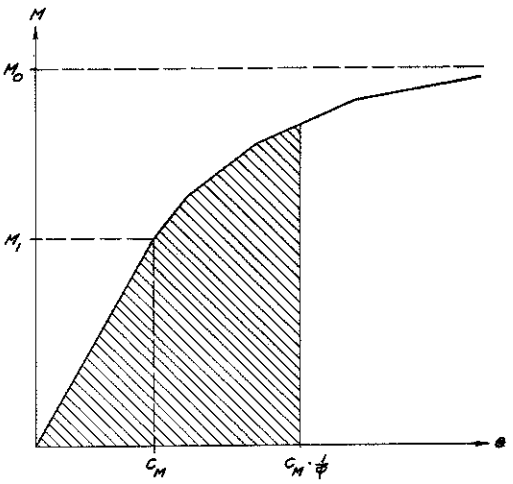


Fig. 12

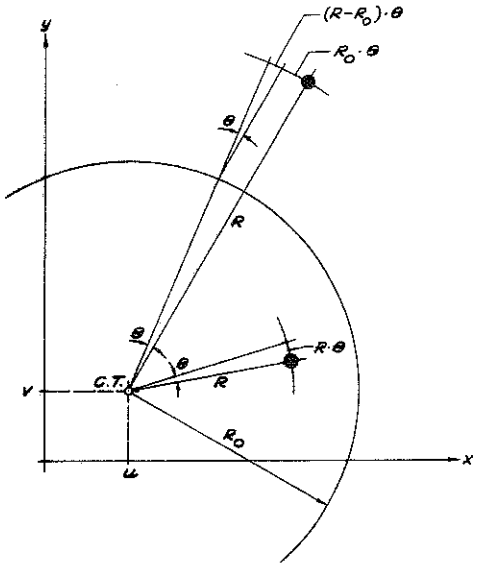


Fig. 13

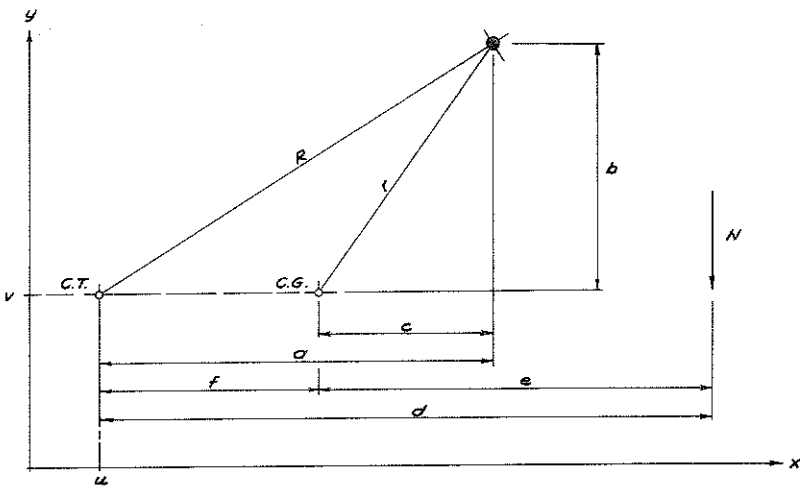


Fig. 14

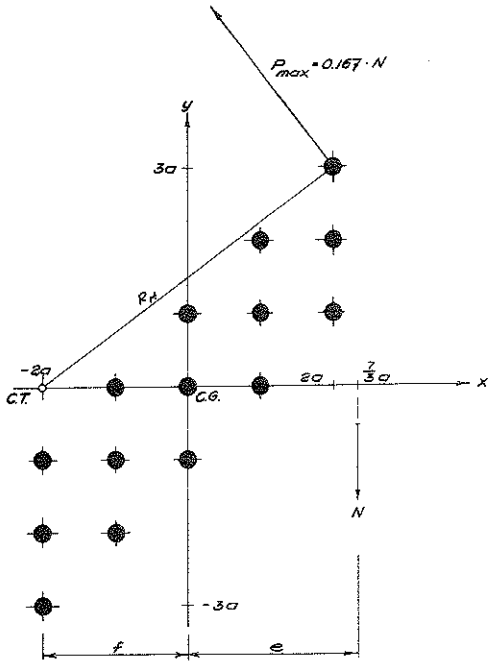
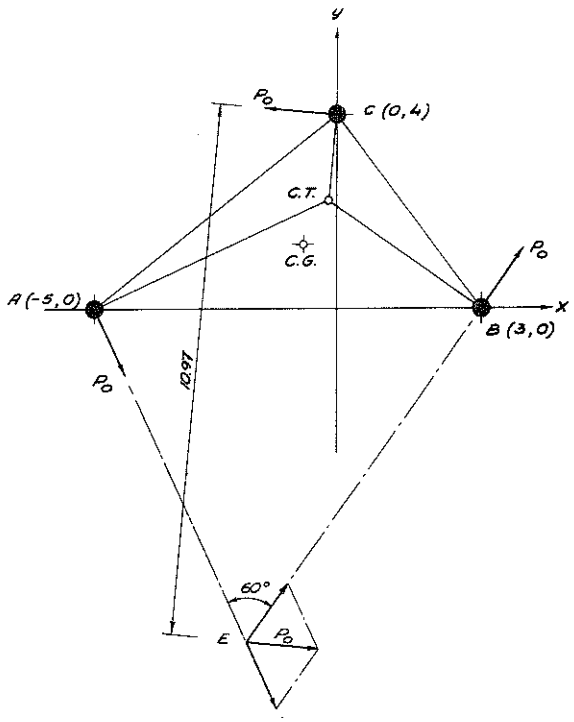


Fig. 15



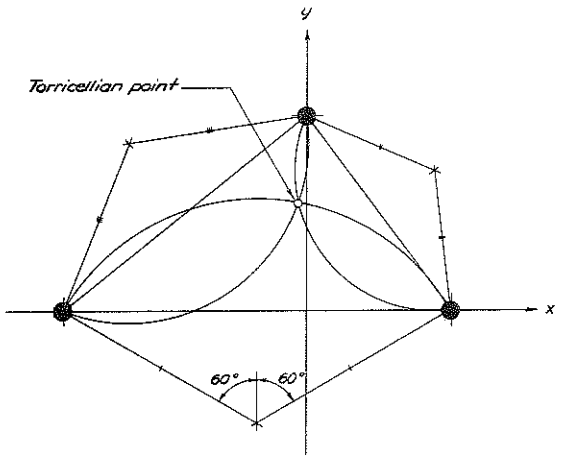
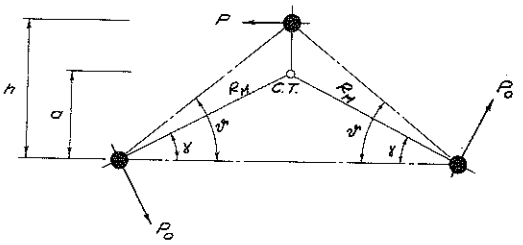


Fig. 16



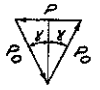
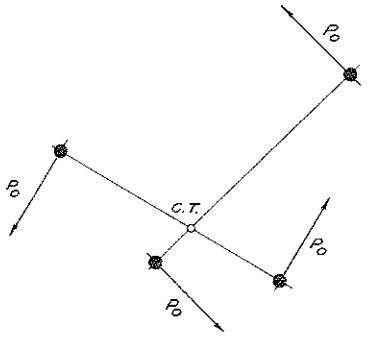


Fig. 17



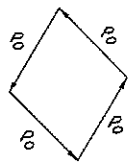


Fig. 18

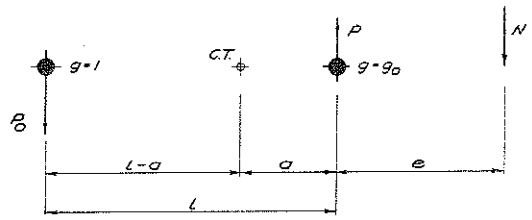


Fig. 19

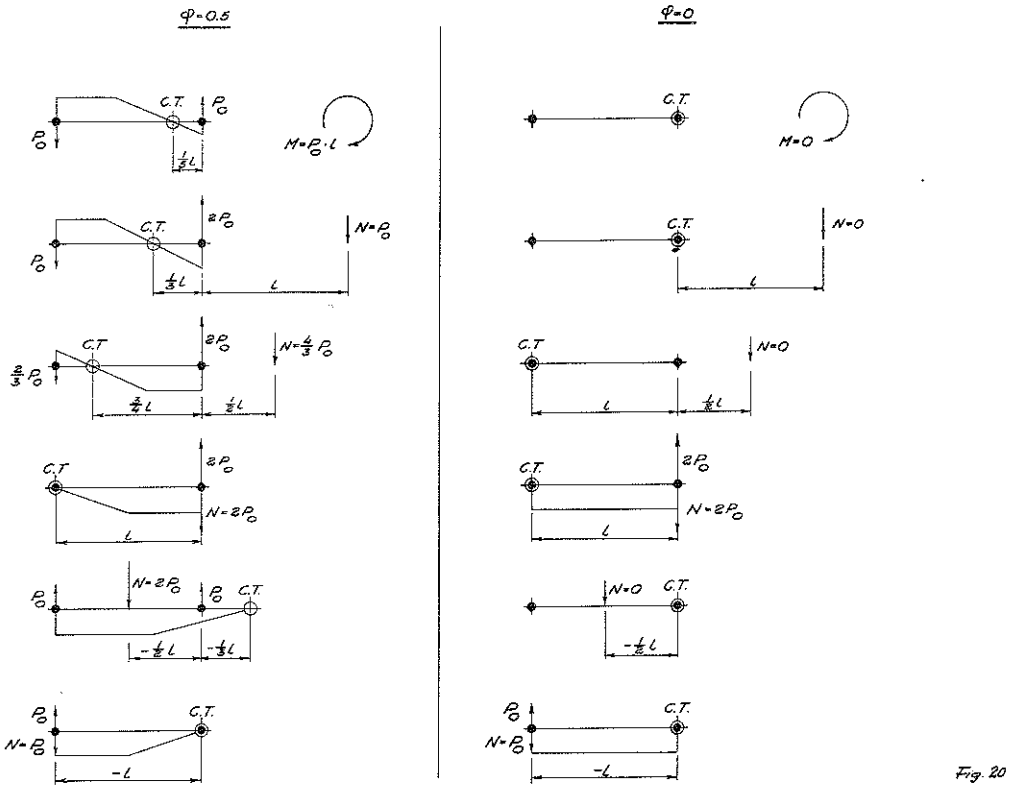


Fig. 20

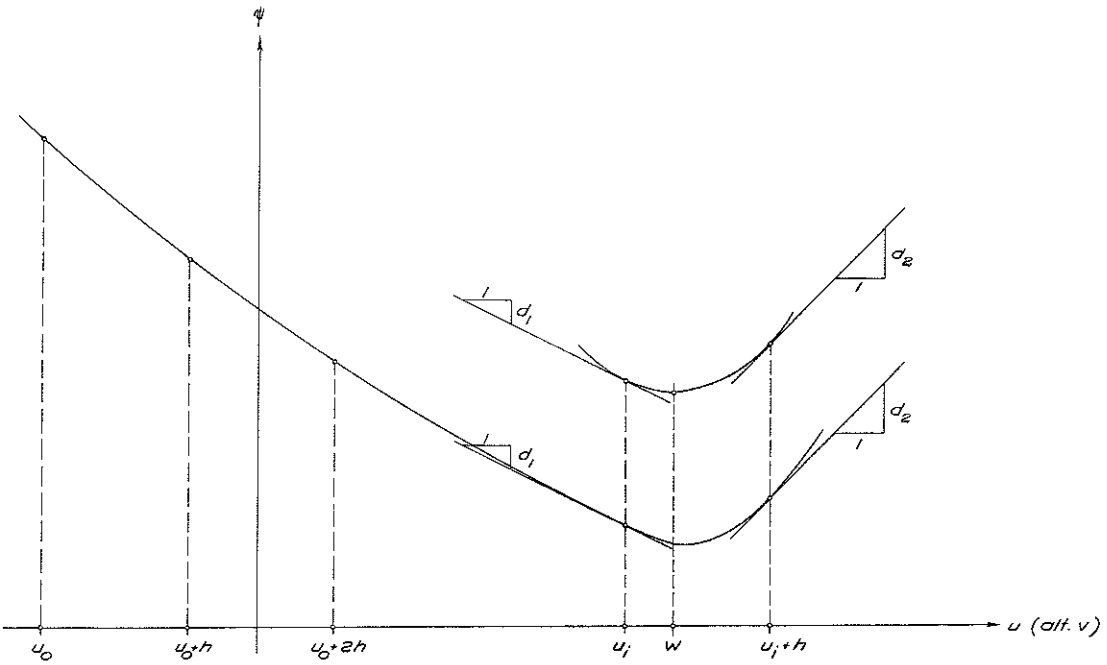


Fig. 21

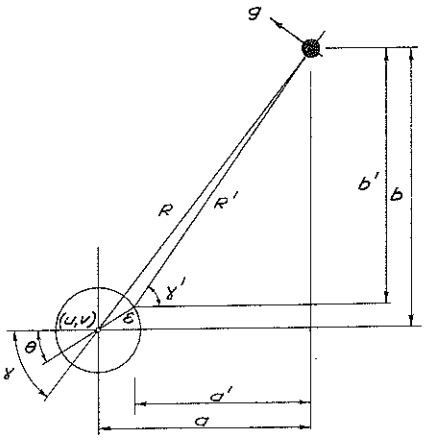


Fig. 22

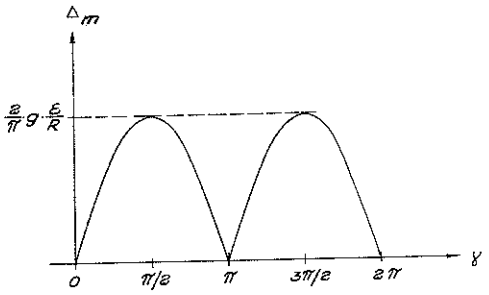


Fig. 23

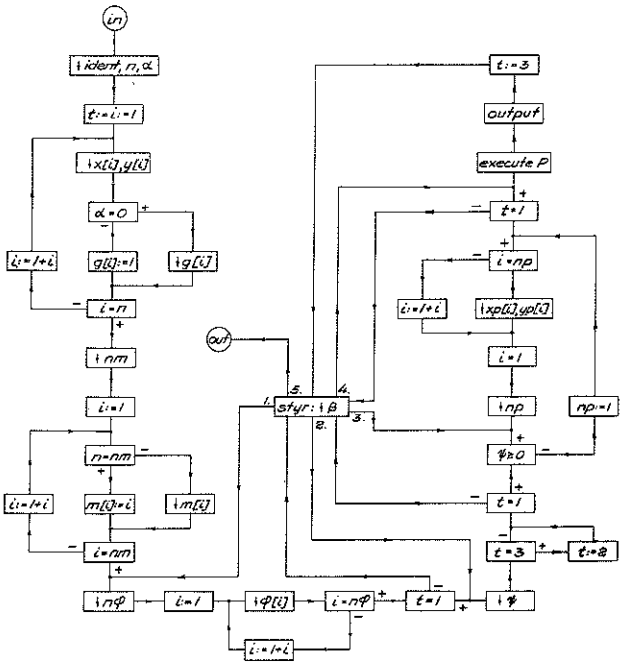


Fig. 24

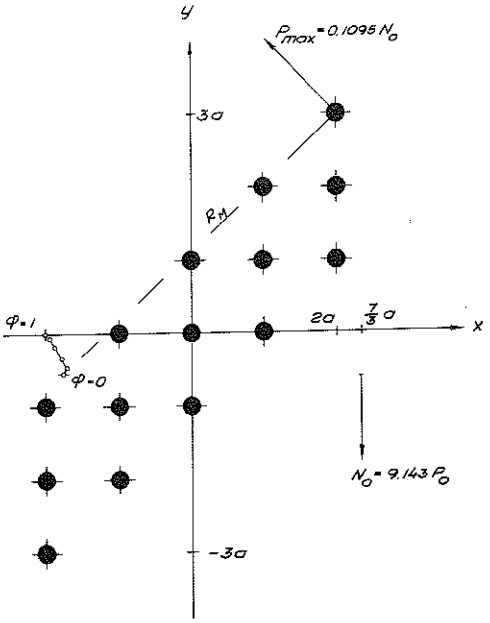


Fig. 25

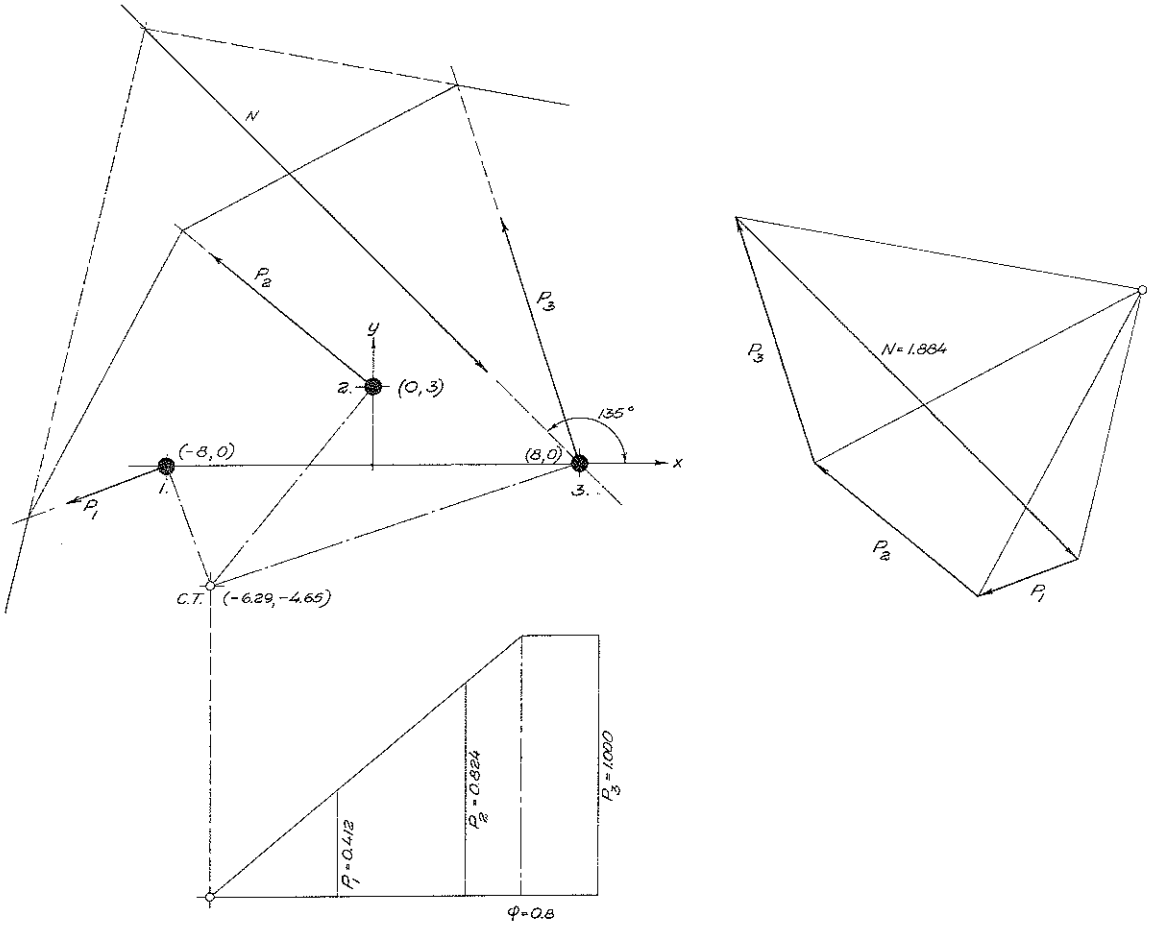


Fig. 26

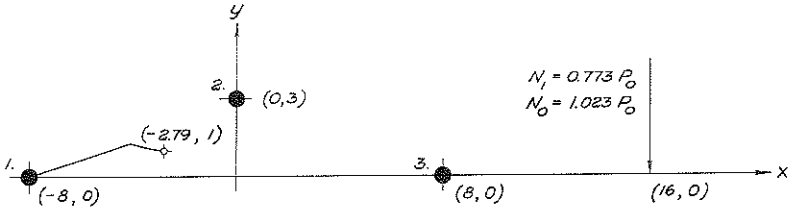


Fig. 27

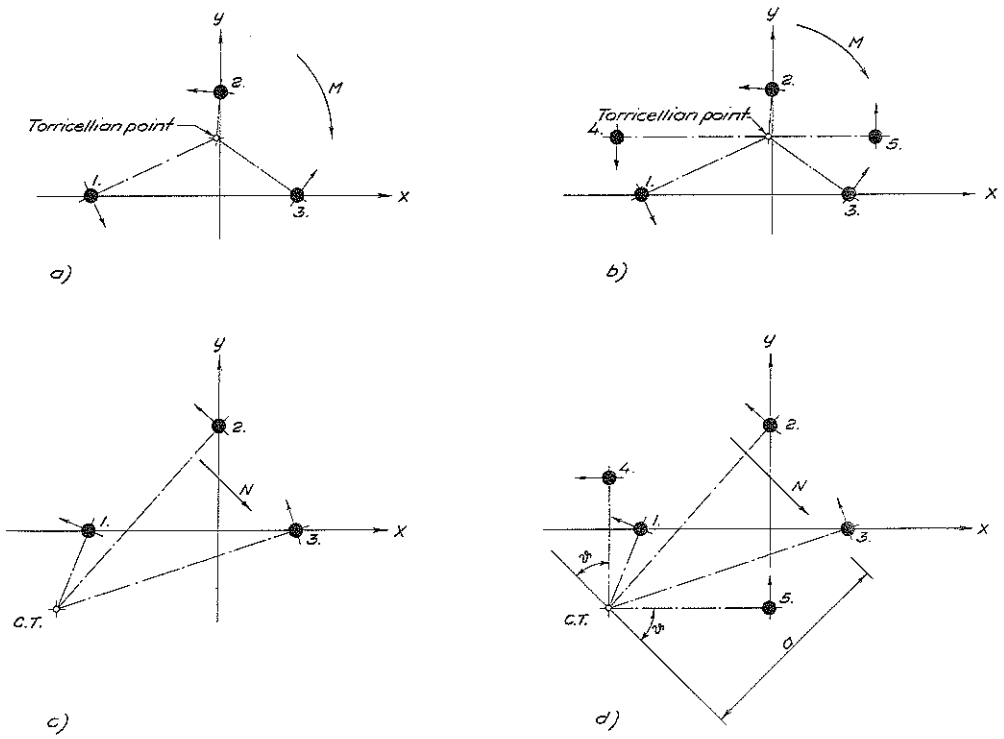


Fig. 28

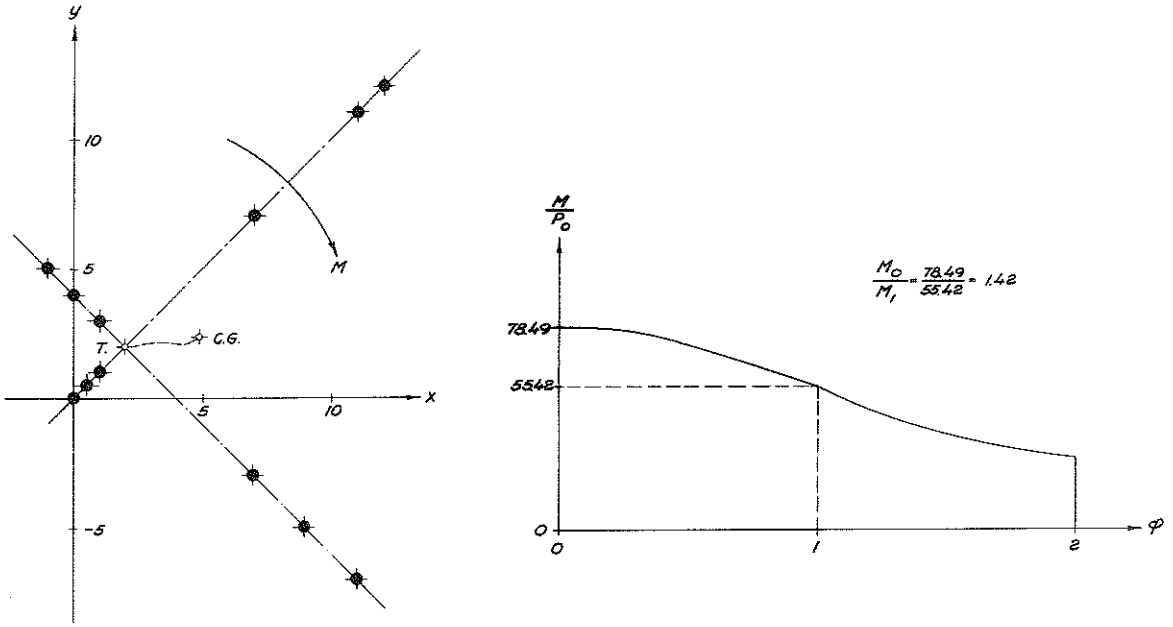


Fig. 29

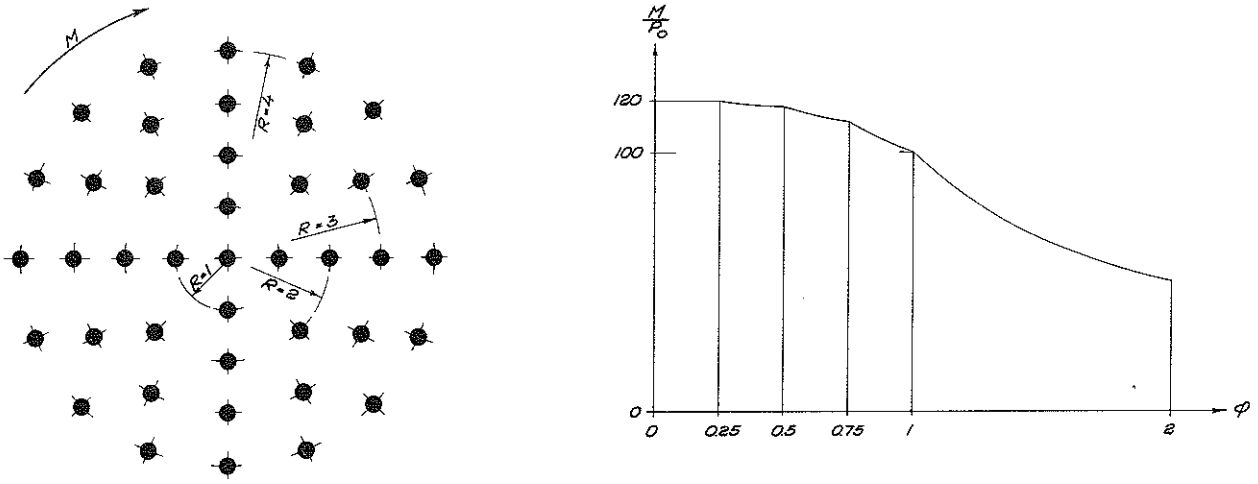


Fig 30

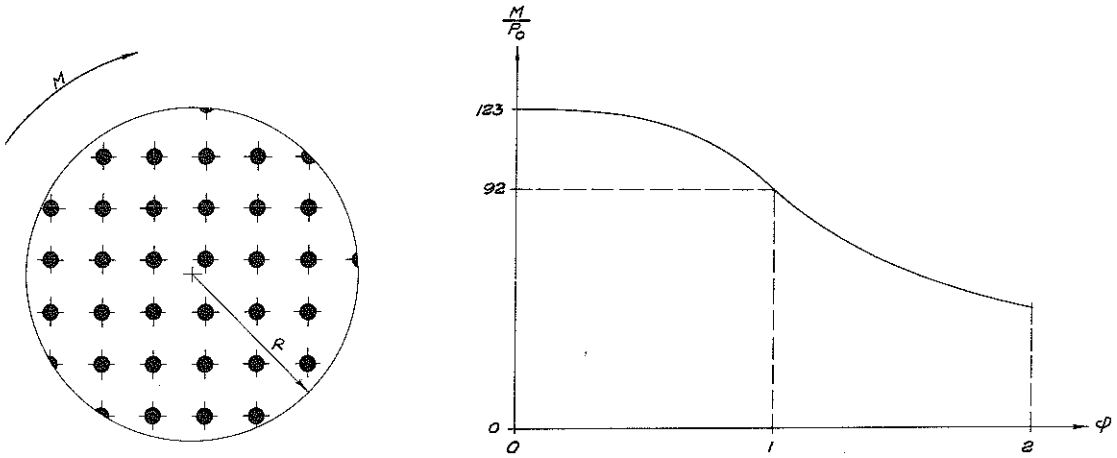
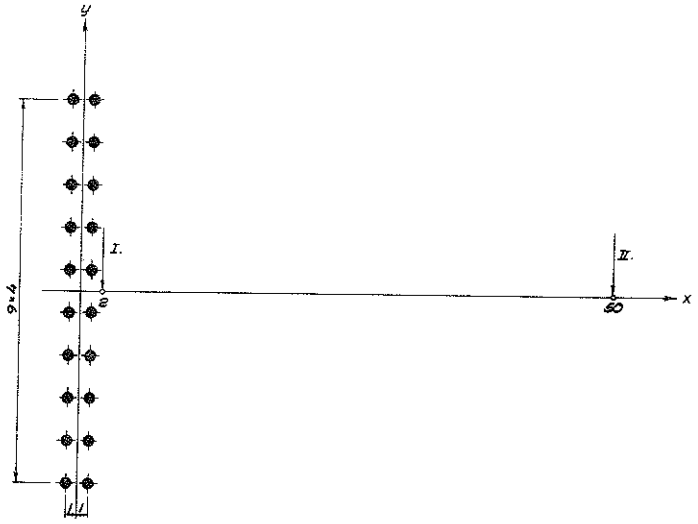


Fig. 31



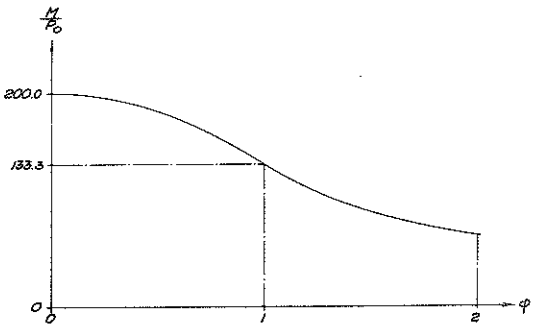


Fig. 33

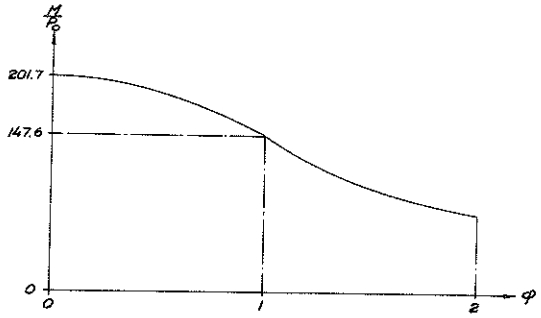


Fig. 32

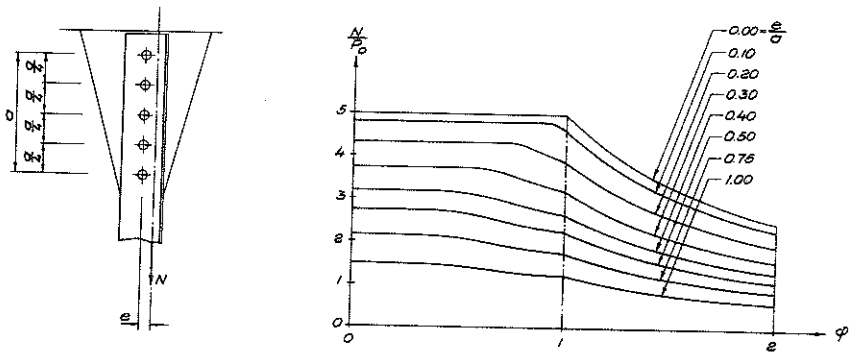


Fig. 34

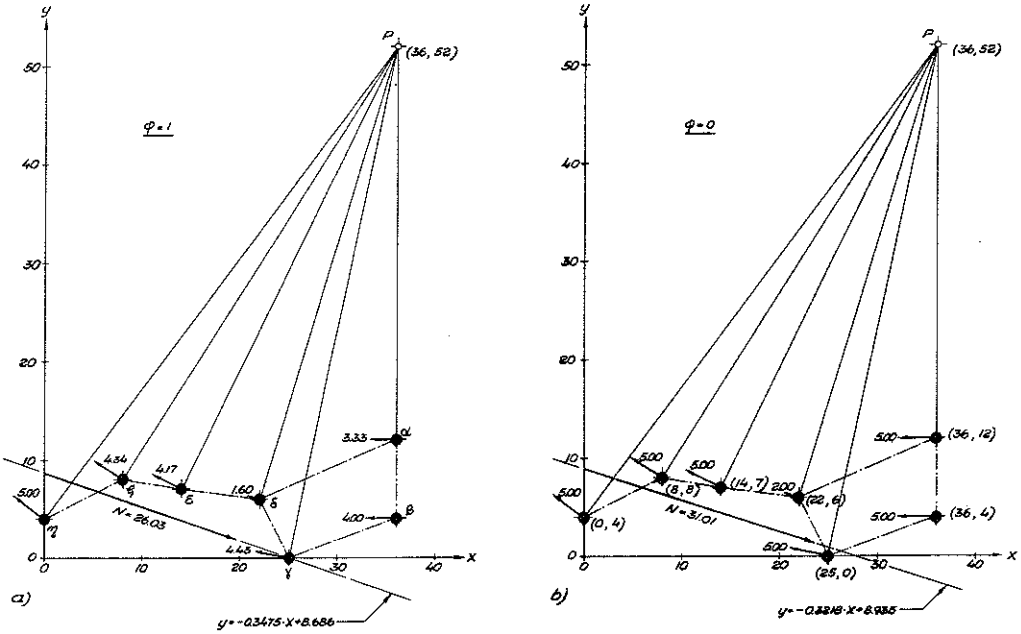


Fig. 35

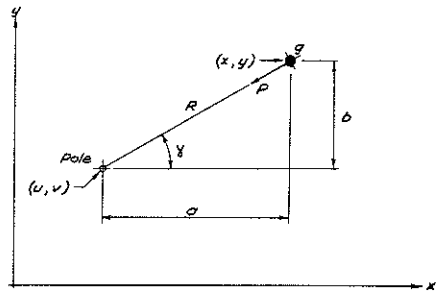


Fig. 36

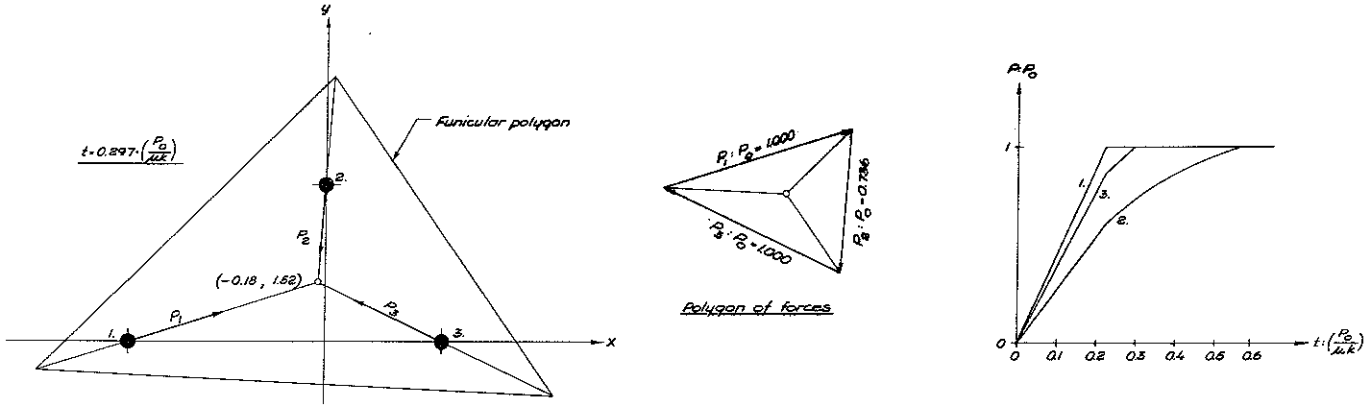


Fig. 37

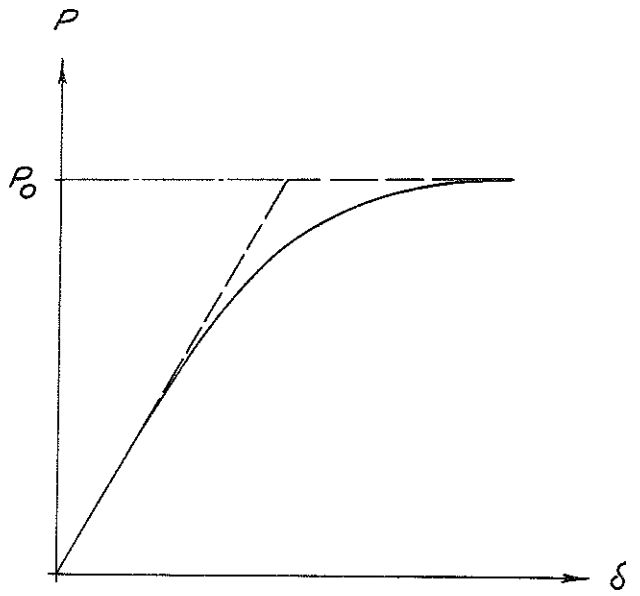


Fig. 38

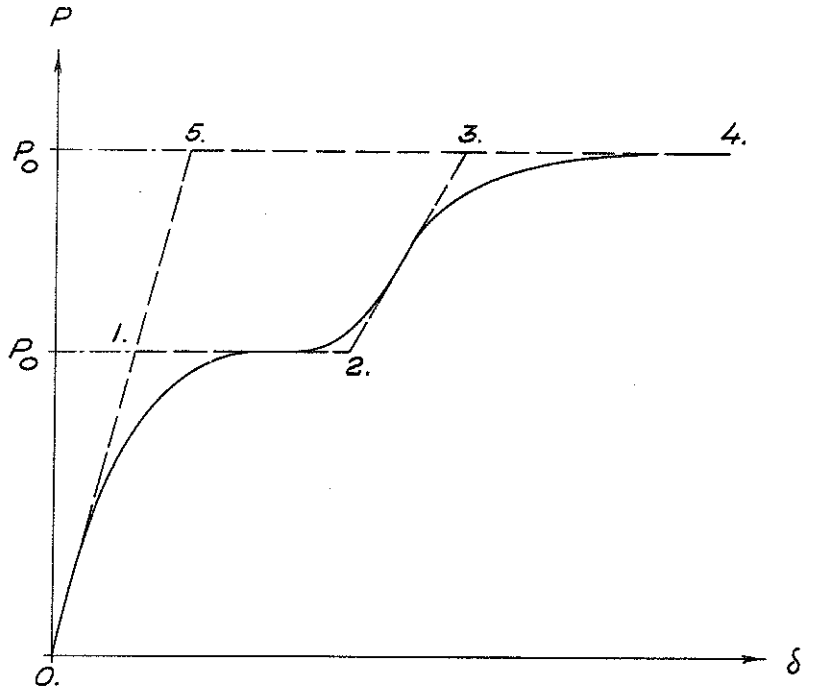


Fig. 39