



# LUND UNIVERSITY

## Statiskt obestämda fackverk, balkar, ramar

Bengtsson, Åke; Pettersson, Ove

1972

[Link to publication](#)

*Citation for published version (APA):*

Bengtsson, Å., & Pettersson, O. (1972). *Statiskt obestämda fackverk, balkar, ramar*. (Bulletines of Division of Structural Mechanics and Concrete Construction, Bulletin 25; Vol. Bulletin 25). Lund Institute of Technology.

*Total number of authors:*

2

### General rights

Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: <https://creativecommons.org/licenses/>

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117  
221 00 Lund  
+46 46-222 00 00

**ÅKE BENGTSSON – OVE PETTERSSON**

**STATISKT OBESTÄMDA FACKVERK,  
BALKAR, RAMAR**

# **BYGG** *Handbok för hus-, väg- och vattenbyggnad*

Tredje upplagan omfattar följande nio huvuddelar

- 1 Allmänna grunder**
- 2 Materiallära**
- 3 Konstruktionsteknik**
- 4 Administration och ekonomi**
- 5 Arbetsmekanik**
- 6 Husbyggnadsteknik**
- 7 Husbyggnadsplanering**
- 8 Samhällsplanering**
- 9 Väg- och vattenbyggnad**

## Kap 161 Statiskt obestämda fackverk, balkar, ramar

Av civilingenjör Åke Bengtsson och professor Ove Pettersson

- :1 Allmänt
- :2 Castiglianos sats. Arbetskvationer
- :3 Elasticitetsekvationer
- :4 Primärmomentmetoden
- :5 Cross' metod
- :6 Matrismetoder och systematiserad analys
- :7 Jämförelse mellan olika metoder för bruksstadiet
- :8 Gränslastmetod
- Litteratur

### Hänvisningar

- Balkar, kap 162
- Ramar, kap 163
- Bågar, kap 164
- Fackverk, kap 165
- Tabellerna 1:44–1:48

### :1 Allmänt

#### :11 Begreppet statisk obestämdhet

Ett bärverk sägs vara *statiskt bestämt*, om samtliga krafter och moment vid upplag och i godtyckligt vald stång eller godtyckligt valt snitt kan beräknas ur enbart jämviktsekvationer. Om för en bestämning av dessa krafter och moment utöver jämviktsekvationer fordras ytterligare samband, t ex i form av deformationsekvationer, är bärverket *statiskt obestämt* med en grad av statisk obestämdhet, som är lika med antalet erforderliga samband utöver jämviktsekvationerna.

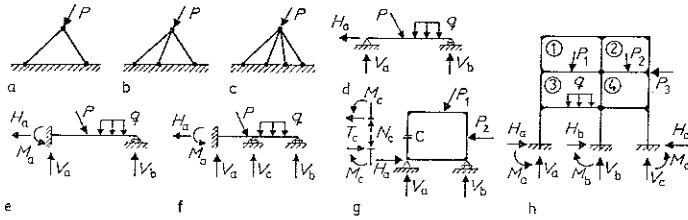


Fig :11 a-h

De båda begreppen detaljförtydligas genom några i fig :11a-h visade typer av plana bärverk. Det plana fackverket enligt fig :11a utgör därvid en statiskt bestämd konstruktion med 2 från början obekanta stångkrafter, som bestäms ur planets 2 projektionsekvationer för materiell punkt. För en bestämning av de i fig :11 b och c visade planfackverkens 3 respektive 4 stångkrafter fordras utöver punktens 2 jämviktsekvationer ytterligare 1 respektive 2 samband, varför dessa båda bärverk är 1-falt respektive 2-falt statiskt obestämda. För den fritt upplagda balken enligt fig :11d bestäms de tre upplagsreaktionskomponenterna  $H_a$ ,  $V_a$  och  $V_b$  ur den plana skivans 3 jämviktsekvationer, varpå krafter och moment i godtyckligt valt snitt av balken kan beräknas också ur enbart jämviktsekvationer. Balken är därför statiskt bestämd. Exempel på 1-falt och 2-falt statiskt obestämd balk ger fig :11 e och f, för vilka en bestämning av 4 respektive 5 obekanta upplagsreaktionskomponenter kräver 1 respektive 2 samband utöver den plana skivans 3 jämviktsekvationer. För den fritt upplagda, slutna ramen enligt fig :11 g kan krafter och moment i godtyckligt valt snitt direkt beräknas ur jämviktsekvationer vid kända upplagsreaktionskomponenter  $H_a$ ,  $V_a$  och  $V_b$  samt kända snittstorheter  $N_c$ ,  $M_c$  och  $T_c$  i ett snitt av ramen. För en bestämning av dessa 6 initieellt obekanta storheter fordras utöver den plana skivans 3 jämviktsekvationer ytterligare 3 samband, varför bärverket är 3-falt statiskt obestämt. För det i fig :11 h visade rambärverket i två fack och tre våningar slutligen möjliggörs en direkt beräkning av krafter och moment i godtyckligt valt snitt ur enbart jämviktsekvationer vid kända upplagsreaktionskomponenter (9 st) och kända snittstorheter  $N$ ,  $M$  och  $T$  i ett snitt av varje slutna ramcell ①-④ ( $4 \cdot 3 = 12$  st). En bestämning av dessa  $9 + 12 = 21$  initieellt obekanta storheter kräver utöver den plana skivans 3 jämviktsekvationer ytterligare 18 samband, varför rambärverket enligt fig :11 h är 18-falt statiskt obestämt.

Vid symmetriskt eller antisymmetriskt utformat och belastat bärverk kan graden av statisk obestämdhet beräkningstekniskt reduceras, om de statiskt obestämda storheterna så införs, att föreliggande symmetri- eller antisymmetriegenskaper utnyttjas. Samma beräkningstekniskt underlättande effekt kan uppnås vid osymmetriskt belastat, symmetriskt utformat, statiskt obestämt bärverk genom en uppdelning av den osymmetriska lasten i en symmetrisk och en antisymmetrisk lastdel. Förfarandet belyses av fig :11 i, av vilken framgår, hur för en 3-falt statiskt obestämd, symmetriskt utformad nollledsram en osymmetrisk last kan uppdelas i ett symmetriskt lastfall, karakteriserat av 2-falt statisk obestämdhet (normalkraft  $N_c$  och böjmoment  $M_c$  i hjässansnittet C), och ett antisymmetriskt lastfall, karakteriserat av 1-falt statisk obestämdhet (tvärkraft  $T_c$  i hjässans snitt C).

För begreppet *kinematisk obestämdhet* hänvisas till :6.

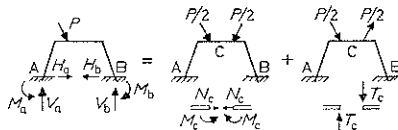


Fig :11 i

## :12 Bruks- och brottstadiemetoders tillämpbarhet

I litteraturen redovisade metoder för beräkning av statiskt obestämda fackverk, balkar och ramar kan i stort uppdelas i de båda huvudgrupperna

A Metoder för bruksstadiet

B Metoder för brottstadiet

Metoderna enligt *huvudgrupp A* bygger på förutsättningar om *elastiskt och homogent material, små deformationer samt initieellt plana tvärsnitts bi-behållande* med som konsekvens *giltighet av superpositionslagen*. Förutsättningarna gör metoderna med god precision tillämpbara för bestämning av de spänningar och deformationer, som uppträder vid exempelvis stål- och lättmetallkonstruktioner under ordinärt i praktiken verkande laster (brukslast). Även vid konstruktioner av armerad betong, trä och andra likartade material, som redan vid måttliga spänningar klart avviker från det rent elastiska tillståndet, kan beräkningsmetoderna enligt huvudgrupp A tillämpas, dock, genom minskad precision, i huvudsak för att ge en grov bild av bruksstadiets spännings- och deformationstillstånd. För betongkonstruktioner tillkommer därvid, utöver avvikelser från elastiskt material, det förhållandet, att dessa i bruksstadiet normalt karaktäriseras av sprickbildningar i böjdragzonen, vilket kan resultera i en väsentligt annorlunda styvhetsfördelning än den mot helt osprucken sektion svarande, och vilken man för undvikande av alltför mödosamma kalkyler som regel tvingas att räkna med.

Beräkningsmetoderna enligt *huvudgrupp B*, normalt kallade *gränslastmetoder* (ty Traglastmethode, eng limit design) är baserade på *idealiseringar av konstruktionsmaterialens verkliga, ända upp till brott gällande, spännings-töjnings-diagram* och kan användas för en bestämning av den last (gränslast), som svarar mot en konstruktions maximala bärförmåga, samt av till denna hörande *brots säkerhet* vid i praktiken aktuell belastning. Oftast består därvid idealiseringen i att det verkliga  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagrammet approximativt ersätts med ett *idealplastiskt diagram med obegränsad tåjbarhet* (jfr :81), vilket medför, att en statiskt obestämd konstruktion vid bestämning av dess gränslast utan kompletterande töjningsberäkningar kan behandlas som fullständigt genomplasticerad i samtliga, för uppkomst av en kinematisk kedja erforderliga snitt. Den praktiska tillämpbarheten av en sådan förenklad behandling är avhängig av aktuellt konstruktionsmaterials verkliga töjningsegenskaper. Vad gäller statiskt obestämda bärverk av *mjukt konstruktionsstål* pekar i litteraturen redovisade undersökningar entydigt på att töjningsförmågan normalt är tillräcklig för att en renodlad gränslastberäkning med god precision skall kunna genomföras. Även för bärverk av *aluminiumlegeringar* är ordinärt förutsättningarna för en tillämpning av renodlad gränslastmetod uppfyllda. Som kriterium härför anges i gällande försöksnorm »Aluminiumkonstruktioner (1966)», att

$$\delta_s [\%] \geq \sigma_{0,2} [\text{kp/mm}^2] (1,15 \sigma_B / \sigma_{0,2} - 1,1) \quad (1)$$

med  $\delta_s$  = normenlig brotttöjning,  $\sigma_{0,2}$  = spänningsvärde med 0,2% kvarstående deformation och  $\sigma_B$  = brotthållfasthet för materialet.

För bärverk av *armerad betong* har genom försök gränslastmetodens tillämpbarhet verifierats för sk under- eller normalarmerade konstruktioner, varmed förstås sådana, som karaktäriseras av att slutgiltigt brott inleds genom sträckgränsens uppnående i armeringen. Vid överarmerade konstruktioner däremot, karaktäriserade av att tvärsnittets maximala momentupptagande förmåga uppnås genom krossning av den tryckta betongzonen utan att flytning i armeringen inträtt, inkommer modifieringar därigenom att då ramverket definitivt störtar samman, har böjmomentet i de hårdast ansträngda snitten genom kraftig krossning i tryckt betongzon sjunkit under det värde, som svarar mot maximalt utnyttjad sektion [54]. Vad slutligen gäller statiskt obestämda bärverk av *trå*, kan för närvarande till följd av ringa underlag i form av experimentella resultat endast tillrådas försiktighet vid den renodlade gränslastmetodens tillämpning.

Det förtjänar i detta sammanhang att understrykas, att vare sig en statistiskt obestämd konstruktion dimensioneras enligt någon bruksstadiemetod eller någon gränslastmetod, måste självfallet parallellt *riskan för andra brottyper* beaktas. Exempelvis blir framför allt vid stål- och lättmetallkonstruktioner men också vid armerade betong- och träkonstruktioner *stabilitetsfenomenen, knäckning och vippning*, inte sällan dimensionerande framför det rena böjstillståndet. För armerade betongkonstruktioner tillkommer härutöver risken för förankrings- och skjuvbrott, varvid är att observera, att de stora kantstukningar, som en gränslastberäkning normalt förutsätter, genom tillhörande minskning av tvärsnittets inre hävarm starkt kan befrämja dessa brott. Avgörande vid en dimensionering kan vidare vara olika former av *nedböjningsbegränsande* föreskrifter. Vid en beräkning enligt fullständig gränslastmetod, varmed förstås, att såväl bestämningen av momentfördelningen som dimensioneringen av det enskilda tvärsnittet sker under förutsättning av fullt utbildad plasticering, måste man alltid parallellt genomföra en kontroll av att inga kvarstående bruksstadienedböjningar av generande art uppkommer.

## :2 Castiglianos sats. Arbetskvationer

### :21 Castiglianos sats. Beräkningsprincip

Då ett kraftsystem  $P_1, P_2 \dots P_i \dots P_n$  påläggs en konstruktion (se fig :21), deformeras denna, varvid krafterna  $P_i$  i egen längsriktning får förskjutningar  $\delta_i$ . För dessa förskjutningar gäller uttrycket

$$\delta_i = \partial W / \partial P_i \tag{1}$$

$$\text{i vilket } W = W(P_1, P_2 \dots P_i \dots P_n) \tag{2}$$

betecknar det inre arbete, som kraftsystemet ger upphov till i konstruktionen (Castiglianos sats, uppställd på 1870-talet).

Ingår i kraftsystemet yttre böjmoment  $M_i$  kan deras vinkeländring  $\theta_i$  i egen rotationsriktning bestämmas ur det analoga sambandet

$$\theta_i = \partial W / \partial M_i \tag{3}$$

Castiglianos sats, ekv (1) och (3), har sin direkta tillämpning på *rörelseberäkningar i elastiska system*. Genom att därvid uttryck uppställs för från början kända deformationer (normalt 0-rörelser), kan satsen vidare användas för *bestämning av övertaliga storheter i statiskt obestämda system*. För den detaljerade tillämpningen hänvisas till :23.

### :22 Castiglianos sats. Inre arbete $W$ vid stång- och balksystem

För att underlätta praktiska kalkyler sammanställs nedan uttryck för det inre arbetet  $W$  dels vid stångsystem och dels vid ramkonstruktioner, uppbyggda av raka eller enkelkrökta ramdelar.

*Inre arbetet  $W$  vid stångsystem*

$$W = \frac{1}{2} \sum \frac{S^2 L}{EA} \tag{1}$$

med  $S$  = stångkraft,  $L$  = stånglängd,  $E$  = elasticitetsmodul och  $A$  = tvärsnittsytta för en stång.

*Inre arbetet  $W$  från normalkraft, böjmoment och tvärkraft vid raka ramdelar* (fig :22a)

$$W = \frac{1}{2} \int_L \frac{N^2 dx}{EA} + \frac{1}{2} \int_L \frac{M^2 dx}{EI} + \frac{1}{2} \int_L \frac{\kappa T^2 dx}{GA} \tag{2}$$

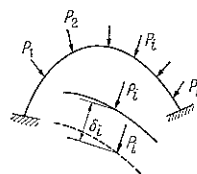


Fig :21

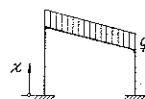


Fig :22a

med  $N$ ,  $M$  och  $T$  = normalkraft, böjmoment resp tvärkraft i snitt  $x$ ,  $E$  och  $G$  = elasticitets- resp skjuvmodul,  $A$  = tvärsnittsytta,  $I$  = tröghetsmoment,  $L$  = ramdelarnas sammanlagda längd samt  $\kappa$  = en tvärsnittskoefficient, som speciellt för rektangulär sektion = 6/5, för cirkulär sektion = 10/9 samt för I- och U-sektioner  $\approx A/A_{IIv}$ .

Av de i ekv (2) ingående termerna är ordinärt de mot normal- och tvärkrafternas arbeten svarande med god approximation försumbara. Undantag härifrån utgör konstruktioner, som karakteriseras av att de yttre lasterna i väsentlig grad upptas av normalkrafter (t ex bågkonstruktioner), vid vilka normalkrafternas arbeten måste beaktas, samt konstruktioner, som innehåller korta och höga ramdelar eller skjuvveka element av ex typen spikad balk, vid vilka tvärkrafternas arbeten måste inkluderas.

*Inre arbetet  $W$  från vridmoment vid raka ramdelar.*

För raka ramdelar med kvasivälvningsfritt tvärsnitt gäller för  $W$  uttrycket

$$W = \frac{1}{2} \int_L \frac{M_v^2 dx}{GK_v} \quad (3)$$

med  $M_v$  = vridmoment i snitt  $x$ ,  $G$  = skjuvmodul och  $K_v$  = vridstyvhets tvärsnittsfaktor.

*Inre arbetet  $W$  från normalkraft, böjmoment och tvärkraft vid enkelkrökta ramdelar (fig :22b).*

$$W = \frac{1}{2} \int_L \frac{1}{EA} \left( N - \frac{M}{R} \right)^2 ds + \frac{1}{2} \int_L \frac{M^2}{EJ} ds + \frac{1}{2} \int_L \frac{\kappa T^2}{GA} ds \quad (4)$$

med de nytillkomna storheterna  $s$  = båglängden,  $R$  = tyngdpunktsaxelns krökningsradie i snittet  $s$  vid obelastad konstruktion och  $J$  = med hänsyn till krökningen modifierat tröghetsmoment, bestämt ur formeln

$$J = \int_A \frac{\eta^2 dA}{1 - \eta/R} \quad (5)$$

För några vanligen förekommande sektionsformer finns  $J$  utvärderat i bl a [9]. För  $R/h \geq 10$ , där  $h$  = sektionshöjden, kan den enkelkrökta balken med god approximation behandlas som initialt rak enligt det av ekv (2) givna, matematiskt mera lätthanterliga  $W$ -sambandet. För den inbördes storleken av de i ekv (4) ingående deltermerna gäller i övrigt detsamma som för motsvarande termer i ekv (2).

Angiven form för den mot tvärkraften  $T$  svarande  $W$ -termen gäller strängt under förutsättning av en skärspänningsfördelning över tvärsnittet, som överensstämmer med den för rak ramdel gällande, en approximation, som för enkelkrökt konstruktion ger praktiskt försvinnande avvikelser för  $R/h > 3$ .

## :23 Tillämpning av Castiglianos sats för beräkning av statiskt obestämd kvantitet

Exemplifierad för ett I-falt statiskt obestämt rambärverk kännetecknas en tillämpning av Castiglianos sats för en bestämning av statiskt obestämd kvantitet av följande metodik.

Som statiskt obestämd kvantitet införs lämpligen en sådan snitt- eller reaktionsstorhet  $X_1$ , vars rörelse i egen riktning  $\delta_{x1}$  är från början känd i den verkliga konstruktionen. Normalt eftersträvas därvid ett sådant val av  $X_1$ , att tillhörande  $\delta_{x1}$  blir = 0.

För den praktiska utvärderingen av  $X_1$  är det — med exemplifiering för den i fig :23a visade 2-ledsramen — lämpligt att klyva verkligt lastfall med normalkraft  $N_p$ , moment  $M_p$  och tvärkraft  $T_p$  i två statiskt bestämda delfall enligt fig :23c och d.

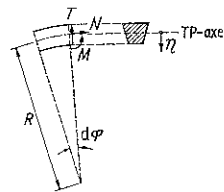
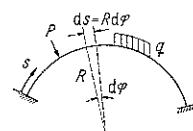


Fig :22b



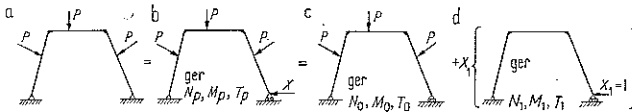


Fig :23a-d

Av dessa ger det i fig :23c visade med normalkraft  $N_0$ , moment  $M_0$  och tvärkraft  $T_0$  renodlat inverkan av den yttre lasten  $P$  ( $X_1=0$ ), medan dellast-fallet enligt fig :23d omfattar endast inverkan av den statistiskt obestämda kvantiteten  $X_1$ . Betecknas därvid av  $X_1=1$  orsakad normalkraft  $N_1$ , moment  $M_1$  och tvärkraft  $T_1$ , erhålls ur fig :23 genom direkt addition relationerna

$$N_P = N_0 + X_1 N_1 \quad M_P = M_0 + X_1 M_1 \quad T_P = T_0 + X_1 T_1 \quad (1)$$

Insättes dessa i uttrycket för  $W$  enligt ekv :22 (2) eller (4) och tillämpas därpå Castiglianos sats, ekv :21(1)

$$\delta_{x1} = \partial W / \partial X_1 \quad (2)$$

erhålls för bestämning av  $X_1$  erforderligt samband.

Speciellt för av raka delar uppbyggd ramkonstruktion ger en sådan be-handling med Castiglianos sats för  $X_1$  det generella uttrycket

$$\delta_{x1} = \int_L \frac{N_1 N_0 dx}{EA} + \int_L \frac{M_1 M_0 dx}{EI} + \int_L \kappa \frac{T_1 T_0 dx}{GA} + \int_L \frac{M_{v1} M_{v0} dx}{GK_v} + X_1 \left[ \int_L \frac{N_1^2 dx}{EA} + \int_L \frac{M_1^2 dx}{EI} + \int_L \kappa \frac{T_1^2 dx}{GA} + \int_L \frac{M_{v1}^2 dx}{GK_v} \right] \quad (3)$$

Är därvid i verklig konstruktion  $\delta_{x1} = 0$  erhålls

$$X_1 = - \frac{\int_L \frac{N_1 N_0 dx}{EA} + \int_L \frac{M_1 M_0 dx}{EI} + \int_L \kappa \frac{T_1 T_0 dx}{GA} + \int_L \frac{M_{v1} M_{v0} dx}{GK_v}}{\int_L \frac{N_1^2 dx}{EA} + \int_L \frac{M_1^2 dx}{EI} + \int_L \kappa \frac{T_1^2 dx}{GA} + \int_L \frac{M_{v1}^2 dx}{GK_v}} \quad (4)$$

I ekv (3) och (4) gäller för de olika deltermernas inbördes storlekar vad som ovan anförts i anslutning till ekv :22 (2).

Genom analog tillämpning kan för de statistiskt obestämda kvantiteterna  $X_1, X_2, X_3, \dots$  i en flerfalt statistiskt obestämd konstruktion med raka ramdelar följande ekvationssystem härledas

$$\delta_{x1} = \int_L \frac{N_1 N_0 dx}{EA} + \int_L \frac{M_1 M_0 dx}{EI} + \int_L \kappa \frac{T_1 T_0 dx}{GA} + \int_L \frac{M_{v1} M_{v0} dx}{GK_v} + X_1 \left[ \int_L \frac{N_1^2 dx}{EA} + \int_L \frac{M_1^2 dx}{EI} + \int_L \kappa \frac{T_1^2 dx}{GA} + \int_L \frac{M_{v1}^2 dx}{GK_v} \right] + X_2 \left[ \int_L \frac{N_1 N_2 dx}{EA} + \int_L \frac{M_1 M_2 dx}{EI} + \int_L \kappa \frac{T_1 T_2 dx}{GA} + \int_L \frac{M_{v1} M_{v2} dx}{GK_v} \right] + X_3 \left[ \int_L \frac{N_1 N_3 dx}{EA} + \int_L \frac{M_1 M_3 dx}{EI} + \int_L \kappa \frac{T_1 T_3 dx}{GA} + \int_L \frac{M_{v1} M_{v3} dx}{GK_v} \right] + \dots \quad (5a)$$

$$\delta_{x2} = \int_L \frac{N_2 N_0 dx}{EA} + \int_L \frac{M_2 M_0 dx}{EI} + \int_L \kappa \frac{T_2 T_0 dx}{GA} + \int_L \frac{M_{v2} M_{v0} dx}{GK_v} + X_1 \left[ \int_L \frac{N_1 N_2 dx}{EA} + \int_L \frac{M_1 M_2 dx}{EI} + \int_L \kappa \frac{T_1 T_2 dx}{GA} + \int_L \frac{M_{v1} M_{v2} dx}{GK_v} \right] + X_2 \left[ \int_L \frac{N_2^2 dx}{EA} + \int_L \frac{M_2^2 dx}{EI} + \int_L \kappa \frac{T_2^2 dx}{GA} + \int_L \frac{M_{v2}^2 dx}{GK_v} \right] + X_3 \left[ \int_L \frac{N_2 N_3 dx}{EA} + \int_L \frac{M_2 M_3 dx}{EI} + \int_L \kappa \frac{T_2 T_3 dx}{GA} + \int_L \frac{M_{v2} M_{v3} dx}{GK_v} \right] + \dots \quad (5b)$$

		$i$	$L i k$	$k$	$L i k$	$k = 4 k_m \frac{x}{L} (1 - \frac{x}{L})$		$k = k_m \frac{x^2}{L^2} (2L - x)$	$k_m$	$k = k_m \frac{x^2}{L^2}$		$\frac{1}{2} L i k$
		$i$	$\frac{1}{2} L i k$	$k$	$\frac{1}{2} L i k$	$\frac{1}{2} L i (k_1 + k_2)$	$\frac{1}{2} L i k$	$\frac{2}{3} L i k_m$		$\frac{1}{3} L i k_m$	$\frac{1}{2} L i k$	
		$i$	$\frac{1}{2} L i k$	$k$	$\frac{1}{2} L i k$	$\frac{1}{6} L i (k_1 + 2 k_2)$	$\frac{1}{6} L i k$	$\frac{5}{12} L i k_m$		$\frac{1}{4} L i k_m$	$\frac{1}{6} L (1 + \alpha) i k$	
		$i_1$	$\frac{1}{2} L (i_1 + 2 i_2) k$	$k$	$\frac{1}{6} L (i_1 + 2 i_2) k$	$\frac{1}{6} L \{ 2 i_1 k_1 + i_1 k_2 + i_2 k_1 + 2 i_2 k_2 \}$	$\frac{1}{6} L (1 + 2 i_2) k$	$\frac{1}{12} L (3 i_1 + 5 i_2) k_m$		$\frac{1}{12} L (i_1 + 5 i_2) k_m$	$\frac{1}{6} L k \{ (1 + \beta) i_1 + (1 + \alpha) i_1 \}$	
$i = 4 i_m \frac{x}{L} (1 - \frac{x}{L})$		$i_m$	$\frac{2}{3} L i_m k$	$k$	$\frac{2}{3} L i_m k$	$\frac{1}{3} L i_m (k_1 + k_2)$	$\frac{1}{3} L i_m k$	$\frac{7}{15} L i_m k_m$		$\frac{1}{5} L i_m k_m$	$\frac{1}{3} L (1 + \alpha, \beta) i_m k$	
$i = i_m \frac{x}{L} (2L - x)$		$i_m$	$\frac{5}{12} L i_m k$	$k$	$\frac{5}{12} L i_m k$	$\frac{1}{12} L i_m (3 k_1 + 5 k_2)$	$\frac{5}{12} L i_m k$	$\frac{8}{15} L i_m k_m$		$\frac{3}{10} L i_m k_m$	$\frac{1}{12} L (5 - \beta - \beta^2) i_m k$	
$i = i_m \frac{1}{L^2} (L^2 - x^2)$		$i_m$	$\frac{2}{3} L i_m k$	$k$	$\frac{2}{3} L i_m k$	$\frac{1}{12} L i_m (5 k_1 + 3 k_2)$	$\frac{1}{12} L i_m k$	$\frac{11}{30} L i_m k_m$		$\frac{2}{15} L i_m k_m$	$\frac{1}{12} L (5 - \alpha - \alpha^2) i_m k$	
$i = i_m \frac{x^2}{L^2}$		$i_m$	$\frac{1}{3} L i_m k$	$k$	$\frac{1}{3} L i_m k$	$\frac{1}{12} L i_m (k_1 + 3 k_2)$	$\frac{1}{4} L i_m k$	$\frac{2}{10} L i_m k_m$		$\frac{1}{5} L i_m k_m$	$\frac{1}{12} L (1 + \alpha + \alpha^2) i_m k$	
$i = i_m \frac{1}{L^2} (L - x)^2$		$i_m$	$\frac{1}{3} L i_m k$	$k$	$\frac{1}{3} L i_m k$	$\frac{1}{12} L i_m (3 k_1 + k_2)$	$\frac{1}{12} L i_m k$	$\frac{2}{15} L i_m k_m$		$\frac{1}{30} L i_m k_m$	$\frac{1}{12} L (1 + \beta + \beta^2) i_m k$	
		$i$	$\frac{1}{6} L (1 + \alpha) i k$	$k$	$\frac{1}{6} L (1 + \alpha) i k$	$\frac{1}{6} L i \{ (1 + \beta) k_1 + (1 + \alpha) k_2 \}$	$\frac{1}{6} L i k$	$\frac{1}{12} L (5 - \beta - \beta^2) i k_m$		$\frac{1}{12} L (1 + \alpha + \alpha^2) i k_m$	$\frac{1}{3} L i k$	

Fig 23e. Integralen  $\int L R_1 R_k dx$  för några olika  $R_1$ - och  $R_k$ -variationer

$$\begin{aligned}
 \delta_{x_3} = & \int_L \frac{N_3 N_0 dx}{EA} + \int_L \frac{M_3 M_0 dx}{EI} + \int_L \kappa \frac{T_3 T_0 dx}{GA} + \int_L \frac{M_{v_3} M_{v_0} dx}{GK_v} + \\
 & + X_1 \left[ \int_L \frac{N_1 N_3 dx}{EA} + \int_L \frac{M_1 M_3 dx}{EI} + \int_L \kappa \frac{T_1 T_3 dx}{GA} + \right. \\
 & \left. + \int_L \frac{M_{v_1} M_{v_3} dx}{GK_v} \right] + \\
 & + X_2 \left[ \int_L \frac{N_2 N_3 dx}{EA} + \int_L \frac{M_2 M_3 dx}{EI} + \int_L \kappa \frac{T_2 T_3 dx}{GA} + \int_L \frac{M_{v_2} M_{v_3} dx}{GK_v} \right] + \\
 & + X_3 \left[ \int_L \frac{N_3^2 dx}{EA} + \int_L \frac{M_3^2 dx}{EI} + \int_L \kappa \frac{T_3^2 dx}{GA} + \int_L \frac{M_{v_3}^2 dx}{GK_v} \right] + \dots \quad (5c)
 \end{aligned}$$

Därvid betecknar:

$\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \delta_{x_3}$  den verkliga konstruktionens deformationer i de statistiskt obestämda kvantiteternas  $X_1, X_2, X_3$  riktningar,

$N_0, M_0, T_0$  och  $M_{v_0}$  normalkraft, böjmoment, tvärkraft respektive vridmoment av yttre last  $P$  i den statistiskt bestämda jämförelsekonstruktion, som uppkommer, om samtliga statistiskt obestämda kvantiteter sätts = 0,

$N_1, M_1, T_1$  och  $M_{v_1}$  motsvarande snittstorheter i den statistiskt bestämda jämförelsekonstruktionen vid last av enbart  $X_1 = 1$ ,

$N_2, M_2, T_2$  och  $M_{v_2}$  motsvarande snittstorheter i den statistiskt bestämda jämförelsekonstruktionen vid last av enbart  $X_2 = 1$ ,

$N_3, M_3, T_3$  och  $M_{v_3}$  motsvarande snittstorheter i den statistiskt bestämda jämförelsekonstruktionen vid last av enbart  $X_3 = 1$ , etc

Sedan de statistiskt obestämda kvantiteterna  $X_1, X_2, X_3$  etc lösts ur uppställt ekvationssystem (5), erhålls den verkliga konstruktionens snittstorheter  $N_P, M_P, T_P$  och  $M_{v_P}$  ur de med ekv (1) analoga sambanden

$$\left. \begin{aligned}
 N_P &= N_0 + X_1 N_1 + X_2 N_2 + X_3 N_3 + \dots \\
 M_P &= M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + X_3 M_3 + \dots \\
 T_P &= T_0 + X_1 T_1 + X_2 T_2 + X_3 T_3 + \dots \\
 M_{v_P} &= M_{v_0} + X_1 M_{v_1} + X_2 M_{v_2} + X_3 M_{v_3} + \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

För att underlätta praktiska tillämpningar av ekv (3), (4) och (5) redovisas i fig :23e integralen  $\int_L R_i R_k dx$  för några olika  $R_i$ - och  $R_k$ -variationer (Beton-Kalender 1953, s 271-276). I tillämpning på de olika deltermerna i ekv (3), (4) och (5) kan därvid  $R_i$  representeras av t ex  $N_i, M_i, T_i$  eller  $M_{v_i}$  och  $R_k$  av  $N_0, M_0, T_0$  eller  $M_{v_0}$ . För specialfallet  $R_i = R_k$  ger tabellen integralerna i de till Castiglianos sats hörande uttrycken för det inre arbetet  $W$  — ekv :22 (2) — (4). De i tabellen sammanställda integralvärdena förutsätter balk eller ramdel med konstant sektion.

*Beräkningsexempel*

**Exempel 1.** Beräkna stångkrafterna i fackverket enligt fig :23f, om samtliga stänger har samma tvärsnittsytta  $A$  och samma elasticitetsmodul  $E$ .

Av symmetriskäl kan beräkningen begränsas till att omfatta endast ena hälften (012) av fackverket. På denna hälft verkar i knutpunkten 0 dels en vertikalkraft  $P/2$  och dels en obekant horisontalkraft  $X_1$ , vilken väljs som konstruktionens statistiskt obestämda storhet.

För  $X_1$ -s bestämning gäller villkoret, att  $X_1$ -s förskjutning i egen riktning  $\delta_{x_1}$  av symmetriskäl måste vara = 0. Med tillämpning på Castiglianos sats, ekv :21 (1), kan villkoret formuleras

$$\delta_{x_1} = \partial W / \partial X_1 = 0$$

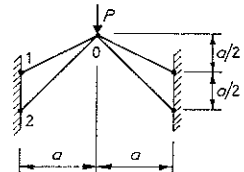


Fig :23f

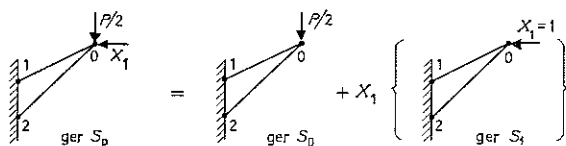


Fig :23g

Beräkningstekniskt är det enligt :23 fördelaktigt att dela upp det verkliga lastfallet med stångkrafter  $S_P$  enligt fig :23 g i ett delfall med den statiskt obestämda storheten  $X_1=0$ , mot vilket delfall svarar stångkrafter  $S_0$ , och i ett delfall med som enda last den statiskt obestämda storheten  $X_1$ , mot vilket delfall svarar stångkrafter  $X_1 S_1$  ( $S_1$  definieras alltså som stångkraften vid last av endast  $X_1=1$ ). För stångkraften i verklig konstruktion  $S_P$  ger en sådan uppdelning uttrycket

$$S_P = S_0 + X_1 S_1 \quad (7)$$

Genom insättning härav i ekv :22 (1) erhålls för fackverkets inre arbete  $W$  sambandet

$$W = \frac{1}{2} \sum \frac{(S_0 + X_1 S_1)^2 L}{EA} \quad (b)$$

vilket tillämpat på det ovan uppställda deformationsvillkoret, ekv (a), för  $X_1$ -s bestämning ger ekvationen

$$\delta_{x1} = \partial W / \partial X_1 = \sum \frac{(S_0 + X_1 S_1) S_1 L}{EA} = \sum \frac{S_0 S_1 L}{EA} + X_1 \sum \frac{S_1^2 L}{EA} = 0 \quad (c)$$

varur för  $X_1$  beräknas uttrycket

$$X_1 = - \frac{\sum \frac{S_0 S_1 L}{EA}}{\sum \frac{S_1^2 L}{EA}} \quad (8)$$

En tabellarisk beräkning av i ekv (8) ingående summor ger för det aktuella tillämpningsexemplet följande.

Stång	$L$	$S_0$	$S_1$	$\frac{S_0 S_1 L}{EA}$	$\frac{S_1^2 L}{EA}$	$S_P = S_0 + X_1 S_1$
0-1	$\frac{1}{2}\sqrt{5}a$	$+\frac{1}{2}\sqrt{3}P$	$-\sqrt{5}$	$-\frac{5\sqrt{5}Pa}{4EA}$	$\frac{5\sqrt{5}a}{2EA}$	$-0,373 P$
0-2	$\sqrt{2}a$	$-\sqrt{2}P$	$+\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{2}Pa}{EA}$	$\frac{2\sqrt{2}a}{EA}$	$-0,471 P$
				$-5,62 \frac{Pa}{EA}$	$8,42 \frac{a}{EA}$	

$$X_1 = 5,62P/8,42 = 0,667 P$$

**Exempel 2.** Beräkna för en I-falt statiskt obestämd balk enligt fig :23 h böjmomentvariationen, om balken har efter sin längd konstant sektion. Tvärkraftseffekten på balkens inre arbete  $W$  förutsätts försumbar.

Med upplagsreaktionen i A som statiskt obestämd storhet  $X_1$ , ger en behandling, baserad på ekv (4) — vilken är giltig, då i föreliggande fall  $\delta_{x1} = 0$  — följande (fig :23 i):

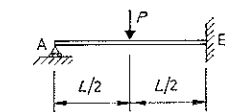
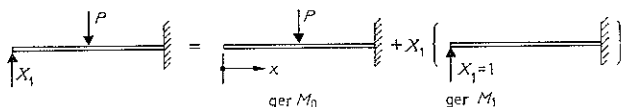


Fig :23h

Fig :23i

$$X_1 = - \frac{\int_L \frac{M_0 M_1 dx}{EI}}{\int_L \frac{M_1^2 dx}{EI}} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= 0 && \text{f\"or } 0 \leq x \leq L/2 \\ M_0 &= -P(x-L/2) && \text{f\"or } L/2 \leq x \leq L \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

$$M_1 = 1 \cdot x \quad \text{f\"or } 0 \leq x \leq L \quad (e)$$

$$\int_L \frac{M_0 M_1 dx}{EI} = - \frac{P}{EI} \int_{L/2}^L (x-L/2)x dx = -5PL^3/48EI$$

$$\int_L \frac{M_1^2 dx}{EI} = \frac{1}{EI} \int_0^L x^2 dx = L^3/3EI$$

$$X_1 = (5/16)P$$

$$\left. \begin{aligned} M_P &= M_0 + X_1 M_1 = (5/16)Px && \text{f\"or } 0 \leq x \leq L/2 \\ M_P &= M_0 + X_1 M_1 = \frac{1}{2}PL(1 - 11x/8L) && \text{f\"or } L/2 \leq x \leq L \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

**:24 Arbetsekvationer. Ber\u00e4kningsprincip**

Principen f\u00f6r behandlingen av en statiskt obest\u00e4md konstruktion med arbetsekvationer \u00e4r f\u00f6ljande. Konstruktionen \u00f6verf\u00f6rs till en statiskt best\u00e4md j\u00e4mf\u00f6relsekonstruktion. Detta kan ske dels genom uppsnittning p\u00e5 s\u00e5dant s\u00e4tt att en eller flera snittkrafter inte l\u00e4ngre kan \u00f6verf\u00f6ras, dels genom borttagande av reaktioner. I st\u00e4llet inf\u00f6rs obekanta snittkrafter respektive reaktionskrafter, de s\u00e5 kallade statiskt obest\u00e4mda. Genom utnyttjande av energisamband \u00e4r det sedan m\u00f6jligt att best\u00e4mma storleken p\u00e5 de statiskt obest\u00e4mda s\u00e5 att j\u00e4mf\u00f6relsekonstruktionens snitt sluter sig respektive att deformationen i de obekanta reaktionskrafternas riktning blir lika med den statiskt obest\u00e4mda konstruktionens verkliga deformation, normalt 0.

Antalet statiskt obest\u00e4mda \u00e4r f\u00f6r en given konstruktion entydigt best\u00e4mt. Valet av de obekanta  $X_1 \dots X_n$  f\u00f6r en  $n$ -falt statiskt obest\u00e4md konstruktion kan dock g\u00f6ras p\u00e5 m\u00e5nga olika s\u00e4tt. Allm\u00e4nt g\u00e4ller att de m\u00e5ste f\u00f6rs\u00e4kra  $n$  av varandra oberoende sp\u00e4nningstillst\u00e5nd. Fig :24b-e visar n\u00e5gra olika m\u00f6jligheter att v\u00e4lja de obekanta f\u00f6r den 2-falt statiskt obest\u00e4mda balken enligt fig :24a. Observera s\u00e4rskilt m\u00f6jligheten att v\u00e4lja olika statiskt be-

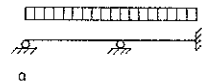


Fig :24 a

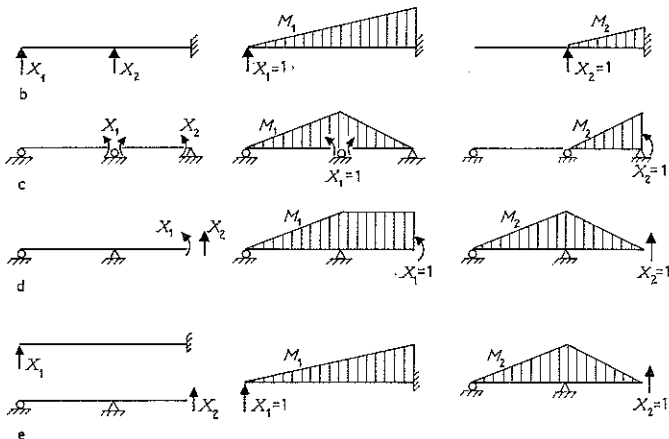


Fig :24b-e



Fig :24f och g

stämnda jämförelsekonstruktioner för de olika obekanta (fig :24e). För att minska beräkningsarbetet är det lämpligt att välja jämförelsekonstruktionerna så att inverkan av ett  $X_i = 1$  sträcker sig över en så liten del som möjligt av konstruktionen.

För den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen beräknas deformationerna i de punkter och riktningar som definierats av de obekanta. Vid obekanta inre snittkrafter förstås därmed de båda snittyornas relativa deformation. Vid obekanta reaktionskrafter förstås deformationen relativt jämförelsekonstruktionens fasta upplag.

Fig :24f och g visar deformationen av jämförelsekonstruktionen enligt fig :24c för var och en av de obekanta = 1.  $\delta_{ij}$  anger därvid deformationen (i detta fall = rotationen) i av  $X_j$  definierad punkt och riktning p g a  $X_j = 1$ .

Sedan ovan nämnda deformationer beräknats för dels var och en av de obekanta = 1, dels för yttre last verkande på den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen kan  $n$  deformationsvillkor formuleras. Deformationerna sätts till sitt verkliga värde, i allmänhet = 0, och därvid erhålls ett linjärt ekvationssystem för de  $n$  obekanta  $X_1 \dots X_n$ .

För deformationsberäkningen utnyttjas energisamband som följer ur lagen om energins oförstörbarhet och superpositionslagens tillämpbarhet. Studeras en godtyckligt vald konstruktion, som under uppkomst av inre spänningar  $\sigma_x$  och  $\tau_x$  belastats och deformerats enligt de heldragna linjerna i fig :24h av ett likaledes godtyckligt valt kraftsystem  $P_x$  ( $P_{x1}, P_{x2} \dots$ ). Med detta tillstånd som utgångspunkt ges konstruktionen på något sätt, exempelvis genom införande av ett nytt kraftsystem  $P$  eller genom uppvärmning, en tvångsdeformation till det i fig :24h streckmarkerade läget. Det under denna förflyttning konstanta  $P_x$ -systemet utträttar därvid ett yttre arbete  $W_{P_x, P}^y$ , för vilket gäller sambandet

$$W_{P_x, P}^y = \sum_1^n P_{xi} \delta_{Pxi, P} \quad (1)$$

varvid  $\delta_{Pxi, P}$  betecknar tvångsförskjutningen av kraften  $P_{xi}$  i dess egen riktning.

Samtidigt uppkommer i konstruktionen ett inre arbete  $W_{P_x, P}^i$  från de mot  $P_x$ -systemet svarande inre spänningarna  $\sigma_x$  och  $\tau_x$ , då dessa med konstant värde medföljer de till tvångsförskjutningen hörande inre deformationerna. Ur lagen om energins oförstörbarhet följer, att dessa yttre och inre arbeten skall vara lika, dvs

$$W_{P_x, P}^i = \sum_1^n P_{xi} \delta_{Pxi, P} \quad (2)$$

Väljs som  $P_x$ -system en enhetslast i den sökta deformationens riktning kan ekv (2) skrivas

$$W_{P_x, P}^i = 1 \cdot \delta_{P_x, P} \quad (3)$$

## :25 Inre arbetet vid stång- och balksystem

För att tillrätalägga behandlingen med arbetsekvationer för praktiska kalkyler sammanställs nedan uttryck för det inre arbetet  $W_{P_x, P}^i$  för stångsystem samt för rambarverk uppbyggda av raka och enkelkrökta ramdelar.

Inre arbetet  $W_{P_x, P}^i$  vid stångsystem, tvångsdeformerat av kraftsystem  $P$  och genom uppvärmning (jfr 165:3)

$$W_{P_x, P}^i = \sum (S_x S_P L / EA) + \sum S_x \alpha t L \quad (1)$$

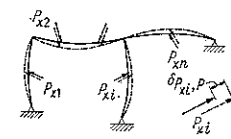


Fig :24h

där  $S_x$ =stångkraft från  $P_x$ -systemet,  $S_P$ =stångkraft från  $P$ -systemet,  $L$ =stånglängd,  $E$ =elasticitetsmodul,  $A$ =stångsektion,  $\alpha$ =längdutvidgningstal och  $t$ =temperaturhöjning för den enskilda stången.

Inre arbetet  $W_{P_x, P}^i$  för rambärverk av raka ramdelar, tvångsdeformerat av kraftsystem  $P$  och genom uppvärmning

Vid en temperaturfördelning för den enskilda ramdelen enl fig :25a gäller

$$W_{P_x, P}^i = \int_L \frac{N_x N_P dx}{EA} + \int_L \frac{M_x M_P dx}{EI} + \int_L \frac{\kappa T_x T_P dx}{GA} + \int_L \frac{M_{vx} M_{vP} dx}{GK_v} + \int_L N_x \alpha(t_0 + \beta x) dx + \int_L M_x \alpha \gamma dx \quad (2)$$

där  $N_x, M_x, T_x, M_{vx}$ =normalkraft, böjmoment, tvärkraft respektive torsionsmoment från  $P_x$ -systemet,  $N_P, M_P, T_P, M_{vP}$  dito från  $P$ -systemet,  $E, G$ =elasticitets- respektive skjvmodul,  $A$ =tvärsnittsarea,  $I$ =tröghetsmoment,  $K_v$ =vridstyvhetens tvärsnittsfaktor,  $x$ =längskoordinat,  $L$ =ramdelarnas sammanlagda längd och  $\kappa$ =den i anslutning till ekv :22 (2) beskrivna tvärsnittskonstanten.

För den inbördes storleken av de i ekv (2) ingående deltermerna gäller oförändrat vad som ovan anförts för deltermerna i den analoga ekv :22 (2). De i ekv (2) ingående integralerna finns tabellerade i fig :23e för ett antal vanligt förekommande lastfall.

Inre arbetet  $W_{P_x, P}^i$  för rambärverk av enkelkrökta ramdelar, tvångsdeformerat av kraftsystem  $P$  och genom uppvärmning

Vid en temperaturfördelning för den enskilda ramdelen enligt fig :25 b gäller

$$W_{P_x, P}^i = \int_L \frac{1}{EA} \left( N_x - \frac{M_x}{R} \right) \left( N_P - \frac{M_P}{R} \right) ds + \int_L \frac{M_x M_P ds}{EI} + \int_L \kappa \frac{T_x T_P ds}{GA} + \int_L N_x \alpha(t_0 + \beta s) ds + \int_L M_x \alpha \gamma ds \quad (3)$$

med de i förhållande till ekv (2) nytillkomna storheterna  $s$ =båglängden,  $R$ =tyngdpunktsaxelns krökningsradie i snitt  $s$  vid obelastad konstruktion och  $J$ =enkelkrökta balkens modifierade tröghetsmoment, bestämt genom ekv :22 (5).

För  $R/h \geq 10$ , där  $h$ =sektionshöjden, kan ekv (3) med god approximation ersättas med det matematiskt mera lätthanterliga sambandet för rak ramdel enligt ekv (2). För den inbördes storleken av de i ekv (3) ingående deltermerna gäller i allt väsentligt detsamma som för motsvarande deltermer i ekv :22 (2).

## :26 Tillämpningar av arbetsekvationer

### :261 Deformationsberäkning vid statiskt bestämd konstruktion

Vertikaldeformationen i konsoländan för den statiskt bestämda konstruktionen enligt fig :261a under lasten  $P$  kan bestämmas på följande sätt.

Konstruktionen tänks belastad med en enhetslast  $X_1=1$  verkan i den sökta deformationens  $\delta$  riktning (fig :261b). Påförs därefter lasten  $P$  deformeras konsoländan  $\delta$  och lasten  $X_1$  utträtt därvid ett yttre arbete (fig :261c)

$$W_{x_1, P}^v = X_1 \delta = \delta \quad (1)$$

Eftersom det yttre arbetet är lika med det samtidigt uppkommande inre arbetet  $W_{x_1, P}^i$  enligt ekv :24 (1), (2) och (3) erhålls

$$\delta = W_{x_1, P}^i \quad (2)$$

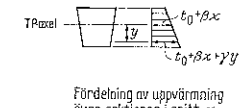
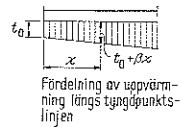


Fig :25a

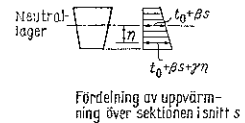
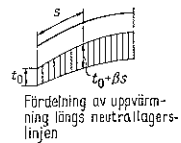


Fig :25b

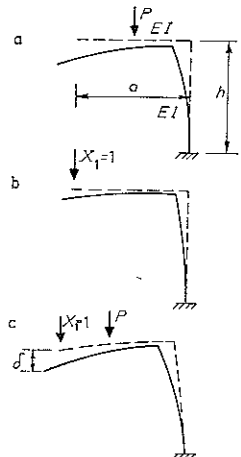


Fig :261a-c

Momenten av  $X_1=1$  respektive  $P$  framgår av fig :261 d och e. Försummas normal- och tvärkraftsarbetena erhålls enligt ekv :25 (2) för ramen enligt fig :261 a

$$\delta = W_{x_1, P}^i = \int_L \frac{M_x M_P}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^a (-x) \frac{Pa}{2} \left( 1 - \frac{2x}{a} \right) dx + \int_0^h (-a) \left( -\frac{Pa}{2} \right) dx \right] = (Pa^3/2EI) [5/24 + h/a] \quad (3)$$

Enligt ekv (2) kan alltså deformationen i en punkt av en last  $P$  beräknas som det inre arbete som spänningarna av en tänkt last  $X_1=1$ , verkande i den sökta deformationens punkt och riktning, utträttar när de medföljer i den av  $P$  orsakade deformationen.

**:262 Beräkning av statiskt obestämda kvantiteter i flerfalt statiskt obestämda konstruktioner**

Beräkningsprincipen illustreras genom tillämpning på balk i tre fack med konstanta böjstyvheten  $EI$  och belastad med 2 punktlaster (fig :262 a). Balken är 2-falt statiskt obestämd och som obekanta storheter väljs dels upplagsreaktionen vid upplag B ( $X_1$ ) dels stödmomentet vid C ( $X_2$ ). Sedan stödet B borttagits och momentled införts vid C erhålls den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen (fig :262 b). Belastas denna med den yttre lasten respektive med lastfallen  $X_1=1$  och  $X_2=1$  erhålls deformationer och momentfördelning enligt fig :262 c-e. Försummas tvärkraftsarbetet kan de i fig :262 c-e markerade deformationerna i de obekantade riktningar beräknas ur följande uttryck

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} &= \int_L \frac{M_1 M_0}{EI} dx \\ \delta_{20} &= \int_L \frac{M_2 M_0}{EI} dx \\ \delta_{11} &= \int_L \frac{M_1 M_1}{EI} dx \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = \int_L \frac{M_1 M_2}{EI} dx \\ \delta_{22} &= \int_L \frac{M_2 M_2}{EI} dx \end{aligned} \right\}$$

Formuleras villkoren att vertikaldeformationen vid B och relativa vinkeländringen vid C skall vara 0 erhålls

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 &= -\delta_{10} \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 &= -\delta_{20} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Som framgår av ekv (1) är  $\delta_{21} = \delta_{12}$ . Ekvationssystemet (2) är därför symmetriskt. Ur ekv (2) kan  $X_1$  och  $X_2$  beräknas. Den resulterande momentfördelningen över konstruktionen kan sedan erhållas enligt

$$M_P = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 \quad (3)$$

Genom analog tillämpning som ovan kan följande ekvationssystem för en  $n$ -falt statiskt obestämd konstruktion härledas

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1n} X_n &= -\delta_{10} \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2n} X_n &= -\delta_{20} \\ \vdots & \\ \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \dots + \delta_{nn} X_n &= -\delta_{n0} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

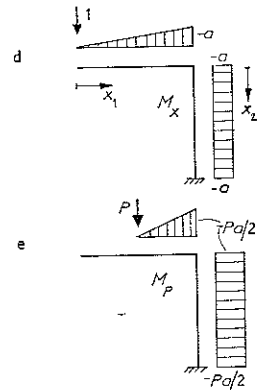


Fig :261 d och e

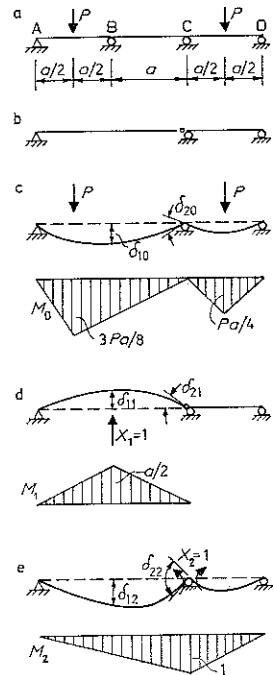


Fig :262 a-e



Här är

$$\delta_{ij} = \int_L \frac{N_i N_j}{EA} dx + \int_L \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int_L \frac{\kappa T_i T_j}{GA} dx + \int_L \frac{M_{vi} M_{vj}}{GK_v} dx$$

$$\delta_{i0} = \int_L \frac{N_i N_0}{EA} dx + \int_L \frac{M_i M_0}{EI} dx + \int_L \frac{\kappa T_i T_0}{GA} dx + \int_L \frac{M_{vi} M_{v0}}{GK_v} dx$$

$$+ \int_L N_i \alpha(t_0 + \beta x) dx + \int_L M_i \alpha \gamma dx$$

Därvid betecknar

$\delta_{ij}$  deformationen hos den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen i punkt och riktning definierad av  $X_i$  p g a  $X_j=1$

$\delta_{i0}$  deformationen hos den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen i punkt och riktning definierad av  $X_i$  p g a yttre last och uppvärmning

$N_i, M_i, T_i$  och  $M_{vi}$  snittkrafter av  $X_i=1$ .

De statiskt obestämda  $X_1 \dots X_n$  erhålls genom att ekvationssystemet (4) löses och de resulterande snittkrafterna kan sedan beräknas ur de med ekv (3) analoga sambanden

$$\left. \begin{aligned} N_P &= N_0 + \sum_{i=1}^n X_i N_i \\ M_P &= M_0 + \sum_{i=1}^n X_i M_i \\ T_P &= T_0 + \sum_{i=1}^n X_i T_i \\ M_{vP} &= M_{v0} + \sum_{i=1}^n X_i M_{vi} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

### :263 Deformationsberäkning vid statiskt obestämd konstruktion

Sedan snittkraftsfördelningen  $N_P, M_P, T_P$  är känd kan deformationen i en godtyckligt vald punkt och riktning beräknas genom studium av en lämpligt vald statiskt bestämd jämförelsekonstruktion.

Balken enligt fig :263a är belastad med jämnt utbredd last på mittspannet. Den därav orsakade momentfördelningen framgår av fig :263b. Deformationen i punkt A söks. Denna kan dock även beräknas som deformationen i punkt  $\bar{A}$  hos den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen enligt fig :263c, som belastats med ett  $P$ -system som utgör den resulterande statiskt obestämda snittkraftsfördelningen enligt fig :263b.

Deformationen hos en statiskt obestämd konstruktion kan alltså sedan snittkraftsfördelningen bestämts enligt :262 beräknas för en lämpligt vald statiskt bestämd jämförelsekonstruktion på det sätt som beskrivits under :261. Som resulterande deformation erhålls därvid förskjutningar och rotationer relativt jämförelsekonstruktionens fasta upplag.

### :27 Beräkningsexempel

**Exempel 1.** Deformationsberäkning i statiskt bestämd konstruktion. Beräkna för den i fig :27a visade, fritt upplagda cirkelbågen med efter sin utsträckning konstant sektion horisontalrörelsen  $\delta_h$  i glidlagret.

Vid  $P_x$ -system av en kraft  $P_{x1}=1$ , verkan i den sökta rörelsens riktning (fig :27b), gäller för  $\delta_h$  sambandet, jfr ekv :25 (3),

$$\delta_h = \int_L \frac{1}{EA} \left( N_1 - \frac{M_1}{R} \right) \left( N_P - \frac{M_P}{R} \right) ds + \int_L \frac{M_1 M_P ds}{EJ} + \int_L \frac{\kappa T_1 T_P ds}{GA} \quad (a)$$

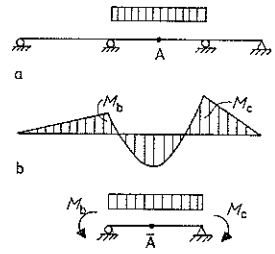


Fig :263a-c

I aktuellt fall beräknas ur fig :27 a

$$N_P = -(P/2)(1 + 1/\sqrt{3}) \sin \varphi; \quad M_P = \frac{1}{2}(1 + 1/\sqrt{3})(\sqrt{3}/2 - \sin \varphi) PR;$$

$$T_P = (P/2)(1 + 1/\sqrt{3}) \cos \varphi \quad \text{för } 60^\circ \geq \varphi \geq 30^\circ$$

$$N_P = (P/2)(1 - 1/\sqrt{3}) \sin \varphi; \quad M_P = \frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{3})(\sqrt{3}/2 + \sin \varphi) PR;$$

$$T_P = -(P/2)(1 - 1/\sqrt{3}) \cos \varphi \quad \text{för } 30^\circ \geq \varphi \geq -60^\circ$$

och ur fig :27 b

$$N_1 = \cos \varphi; \quad M_1 = (\cos \varphi - \frac{1}{2}) R; \quad T_1 = \sin \varphi \quad \text{för varje } \varphi$$

vilket för de i ekv (a) ingående integralerna ger

$$\int_L \frac{1}{EA} \left( N_1 - \frac{M_1}{R} \right) \left( N_P - \frac{M_P}{R} \right) ds = -\frac{\pi}{24EA} (2\sqrt{3} - 1) PR;$$

$$\int_L \frac{M_1 M_P ds}{EJ} = (1/24EJ)(6\sqrt{3} + \pi - 2\pi\sqrt{3}) PR^3; \quad \int_L \frac{T_1 T_P ds}{GA} = PR/4GA$$

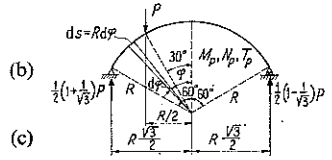


Fig :27a

Fig :27b

Insatt i ekv (a) ger detta för den sökta horisontalrörelsen uttrycket

$$\delta_h = (PR^3/24EJ)[6\sqrt{3} + \pi - 2\pi\sqrt{3} - \pi(2\sqrt{3} - 1)\alpha + 6\beta] = 0,1105(PR^3/EJ)(1 - 2,92\alpha + 2,26\beta)$$

i vilket

$$\alpha = J/AR^2; \quad \beta = \kappa EJ/GAR^2$$

**Exempel 2.** Flerfalt statiskt obestämd ramkonstruktion. Beräkna momentdiagrammet för den i fig :27c visade 3-falt statiskt obestämda 0-ledsramen, om samtliga ramdelar har konstant och lika sektion. Med god approximation bortses därvid från de för föreliggande konstruktion och lastfall praktiskt betydelselösa inre arbetena av normal- och tvärkrafter.

Som statiskt obestämda kvantiteter införs i den vänstra fasta inspänningen horisontalreaktion  $X_1$ , vertikalreaktion  $X_2$  samt inspänningsmoment  $X_3$  enligt fig :27d.

Deformationssambanden enligt ekv :262 (4) kan skrivas

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 &= -\delta_{10} \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 &= -\delta_{20} \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 &= -\delta_{30} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Eftersom endast momentarbete medtas gäller därvid

$$\delta_{ij} = \int \frac{M_i M_j dx}{EI} \quad \text{och} \quad \delta_{i0} = \int \frac{M_i M_0 dx}{EI}$$

För den valda statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen erhålls (fig :27d och e)

$$\left. \begin{aligned} M_0 = 0; M_1 = -x_1; M_2 = 0; M_3 = 1 & \quad \text{för } 0 \leq x_1 \leq L/2 \\ M_0 = -(1/8)qx_2^2; M_1 = -\frac{1}{2}(L + \sqrt{3}x_2); M_2 = \frac{1}{2}x_2; M_3 = 1 & \quad \text{för } 0 \leq x_2 \leq L/2 \\ M_0 = -(1/32)q(L + 2\sqrt{3}x_3)^2; M_1 = -(1/4)(2L + \sqrt{3}L - 2x_3); & \\ M_2 = (1/4)(L + 2\sqrt{3}x_3); M_3 = 1 & \quad \text{för } 0 \leq x_3 \leq L\sqrt{3}/2 \\ M_0 = -\frac{1}{2}qL^2; M_1 = -\frac{1}{2}(L - 2x_4); M_2 = L; M_3 = 1 & \quad \text{för } 0 \leq x_4 \leq L/2 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

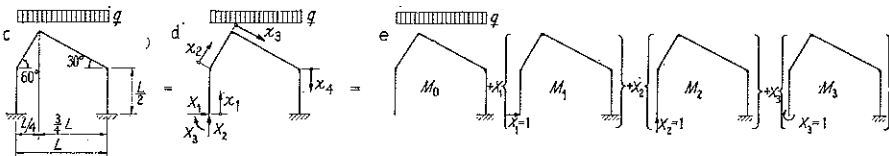


Fig :27c-e

varvid sådana böjmoment, som framkallar dragspänningar i rambärverkets innersida, betecknats positiva. För de i ekv (a) ingående koefficienterna erhålls

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx = 0,8060 L^3 / EI \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx = -0,5387 L^3 / EI \\ \delta_{13} = \delta_{31} &= \int \frac{M_1 M_3}{EI} dx = -1,2288 L^3 / EI \\ \delta_{10} &= \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx = 0,1879 qL^4 / EI \\ \delta_{22} &= \int \frac{M_2 M_2}{EI} dx = 0,8893 L^3 / EI \\ \delta_{20} &= \int \frac{M_2 M_0}{EI} dx = -0,3948 qL^4 / EI \\ \delta_{23} = \delta_{32} &= \int \frac{M_2 M_3}{EI} dx = 1,1038 L^3 / EI \\ \delta_{33} &= \int \frac{M_3 M_3}{EI} dx = 2,3660 L^3 / EI \\ \delta_{30} &= \int \frac{M_3 M_0}{EI} dx = -0,4447 qL^3 / EI \end{aligned} \right\}$$

Insätts dessa värden i ekvationssystem (a) och löses detta erhålls

$$X_1 = 0,1564qL \quad X_2 = 0,4859qL \quad X_3 = 0,0425qL^2 \quad (d)$$

För de resulterande böjmomenten  $M_P$  erhålls enligt ekv :262 (5) uttrycket

$$M_P = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + X_3 M_3 \quad (e)$$

ur vilket genom insättning av ekv (b) och (d) erhålls

$$\left. \begin{aligned} M_P &= (0,0425 - 0,1564x_1/L) qL^2 && \text{för } 0 \leq x_1 \leq L/2 \\ M_P &= [-0,0357 + 0,1075x_2/L - 0,1250(x_2/L)^2] qL^2 && \text{för } 0 \leq x_2 \leq L/2 \\ M_P &= [-0,0132 + 0,2825x_3/L - 0,3750(x_3/L)^2] qL^2 && \text{för } 0 \leq x_3 \leq L\sqrt{3}/2 \\ M_P &= (-0,0499 + 0,1564x_4/L) qL^2 && \text{för } 0 \leq x_4 \leq L/2 \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Det tillhörande momentdiagrammet återfinns i fig :27f

**Exempel 3.** Statiskt obestämd, kombinerad stång- och ramkonstruktion. Beräkna momentdiagrammet för balken 0-3 vid den i fig :27g visade spännbockskonstruktionen, om normal- och tvärkrafternas inre arbeten i balken försummas. Balken förutsätts ha efter sin längd konstant  $E_b I_b$  och samtliga stänger konstant och lika  $EA$ .

Konstruktionen är 2-falt statiskt obestämd och överförs till en statiskt bestämd jämförelsekonstruktion genom att stängerna 0-1 och 2-3 frigörs från sina infästningar vid 0 respektive 3. Som statiskt obestämda kvantiteter införs stångkrafterna  $X_1$  respektive  $X_2$  (fig :27h).

Deformations sambanden enligt ekv :262 (4) kan i detta fall skrivas

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 &= -\delta_{10} \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 &= -\delta_{20} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ij} &= \sum \frac{S_i S_j L}{EA} + \int \frac{M_i M_j}{EI} dx \\ \delta_{i0} &= \sum \frac{S_i S_0 L}{EA} + \int \frac{M_i M_0}{EI} dx \end{aligned} \right\}$$

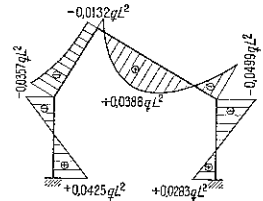


Fig :27f

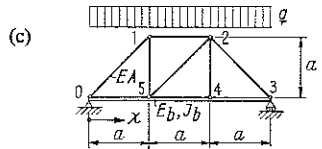


Fig :27g

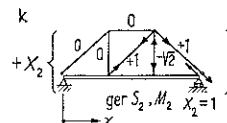
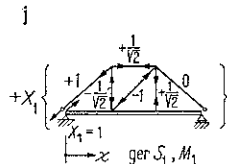
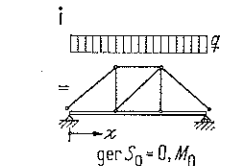
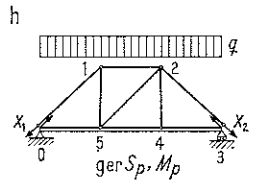


Fig :27h-k

I den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen är stångkrafterna  $p$  g a yttre last  $S_0 = 0$  (se fig :271). Böjmomenten av detta lastfall framgår av ekv (c). Stångkrafterna av lastfallen  $X_1 = 1$  respektive  $X_2 = 1$  framgår av fig :27j och  $k$  och böjmomenten i balken av ekv (d)

$$M_0 = \frac{1}{2}qx(3a-x) \tag{c}$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= x/\sqrt{2} \text{ för } 0 \leq x \leq a; \quad M_1 = (1/\sqrt{2})(2a-x) \text{ för } a \leq x \leq 2a; \\ M_2 &= 0 \text{ för } 2a \leq x \leq 3a \\ M_3 &= 0 \text{ för } 0 \leq x \leq a; \quad M_3 = (1/\sqrt{2})(x-a) \text{ för } a \leq x \leq 2a; \\ M_4 &= (1/\sqrt{2})(3a-x) \text{ för } 2a \leq x \leq 3a \end{aligned} \right\} \tag{d}$$

De i  $\delta$ -uttrycken enligt ekv (b) ingående summa- och integraltermerna beräknas enligt nedan (e) och (f)

Stång	$L$	$S_1$	$S_2$	$S_1^2 L$	$S_2^2 L$	$S_1 S_2 L$	$S_P = S_0 + X_1 S_1 + X_2 S_2 + X_3 S_3$
0-1	$a\sqrt{2}$	+1	0	$a\sqrt{2}$	0	0	-1,397 qa
1-2	$a$	+1/ $\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}a$	0	0	-0,988 qa
2-3	$a\sqrt{2}$	0	+1	0	$a\sqrt{2}$	0	-1,357 qa
1-5	$a$	-1/ $\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}a$	0	0	+0,988 qa
2-4	$a$	+1/ $\sqrt{2}$	- $\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}a$	$2a$	- $a$	+0,931 qa
2-5	$a\sqrt{2}$	-1	+1	$a\sqrt{2}$	$a\sqrt{2}$	- $a\sqrt{2}$	+0,040 qa
$\Sigma(2\sqrt{2} + \frac{3}{2})a \quad 2(\sqrt{2} + 1)a \quad -(1 + \sqrt{2})a$							

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{M_1 M_0 dx}{E_b I_b} &= \int \frac{M_2 M_0 dx}{E_b I_b} = 11\sqrt{2} qa^4 / 24 E_b I_b \\ \int \frac{M_3^2 dx}{E_b I_b} &= \int \frac{M_4^2 dx}{E_b I_b} = a^3 / 3 E_b I_b \\ \int \frac{M_1 M_2 dx}{E_b I_b} &= a^3 / 12 E_b I_b \end{aligned} \right\} \tag{f}$$

Koefficienterna i ekvationssystemet (a) beräknas enligt (b) varefter  $X_1$  och  $X_2$  erhålls. De resulterande stångkrafterna  $S_P$  och böjmomenten  $M_P$  kan därefter bestämmas enligt ekv (g)

$$\left. \begin{aligned} S_P &= S_0 + X_1 S_1 + X_2 S_2 \\ M_P &= M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 \end{aligned} \right\} \tag{g}$$

För de speciella siffervärdena:  $a = 4$  m,  $A = 10$  cm<sup>2</sup>,

$I_b = 40\,000$  cm<sup>4</sup>;  $E_b = E$  beräknas

$$X_1 = -1,397qa; \quad X_2 = -1,357qa$$

$S_P$  enligt sista kolumnen i (e)

$$\left. \begin{aligned} M_P &= (0,512x/a - 0,500x^2/a^2)qa^2 \text{ för } 0 \leq x \leq a \\ M_P &= (-1,016 + 1,528x/a - 0,500x^2/a^2)qa^2 \text{ för } a \leq x \leq 2a \\ M_P &= (-2,880 + 2,460x/a - 0,500x^2/a^2)qa^2 \text{ för } 2a \leq x \leq 3a \end{aligned} \right\} \tag{h}$$

Det tillhörande momentdiagrammet återfinns i fig :271

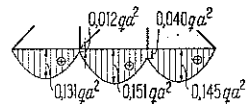


Fig :271

**Exempel 4.** Beräkna böj- och vridmoment för konstruktionen enligt fig :27m. Elementen har konstanta  $EI$  och  $GK_v$  och konstruktionen är centriskt belastad med punktlasten  $P$ . Konstruktionen är 3-falt statiskt obestämd men med utnyttjande av symmetrin kan den behandlas som 1-falt statiskt obestämd (se fig :27n).

Böj- och vridmoment av yttre last för den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen framgår av fig :27o och inverkan av  $X=1$  av fig :27p.

Deformationsambandet som anger att rotationen i symmetrisnittet är 0 kan skrivas (jfr ekv :262 (4))

$$X \left( \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx + \int \frac{M_{v1} M_{v1}}{GK_v} dx \right) = - \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx - \int \frac{M_{v1} M_{v0}}{GK_v} dx \quad (a)$$

De i ekv (a) ingående integralsambanden beräknas enligt (b)

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx &= L/2EI \\ \int \frac{M_{v1} M_{v1}}{GK_v} dx &= a/GK_v \\ \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx &= -PL^2/16EI \\ \int \frac{M_{v1} M_{v0}}{GK_v} dx &= -PaL/4GK_v \end{aligned} \right\}$$

Insätts dessa värden i ekv (a) kan  $X$  beräknas

$$X = \frac{PL^2/16EI + PaL/4GK_v}{L/2EI + a/GK_v} \quad (c)$$

För speciellt  $GK_v/EI=0,8$  och  $L/a=2$  erhålls  $X=0,1944 PL$

Resultande böjmoment och vridmoment framgår av fig :27q resp r.

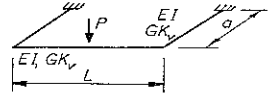
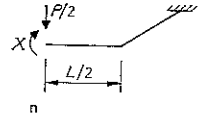
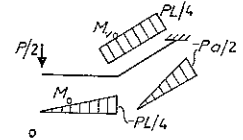


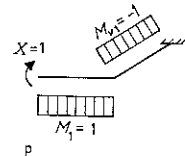
Fig :27m



n



(b)



p

Fig :27n-p

### :3 Elasticitetsekvationer

#### :31 Beräkningsprincip

Principen för en behandling av en statiskt obestämd ramkonstruktion med elasticitetsekvationer är följande. Under införande av från början obekanta snittmoment skärs konstruktionen upp i ramhörnerna till enkla raka ramdelar som deformationsstuderas var för sig. Uttryck tecknas för de olika ramdelarnas stödvinkeländringar, varpå för de obekanta snittmomentens bestämning erforderliga samband erhålls dels ur *jämviktsekvationer*, dels ur de *deformationsvillkor*, som kan härledas ur förhållandet, att samtliga i ett ramhörn böjstyvt anslutna ramdelar där måste följäs åt i deformation, dvs få samma stödvinkeländring  $\theta$ . Förfarandet illustreras något mera detaljerat av fig :31a för rambärverk med *fixa knutpunkter*, varmed förstås, att samtliga knutpunkter endast rotationsdeformeras, och av fig :31b för rambärverk med *förskjutbara knutpunkter*, dvs knutpunkter som vid deformationen utsätts för såväl rotations- som translationsrörelse.

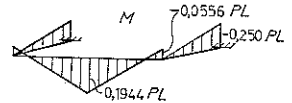


Fig :27q

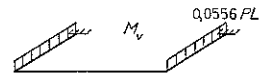
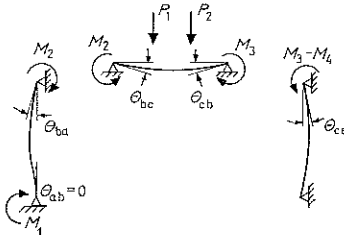
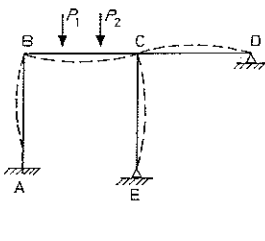


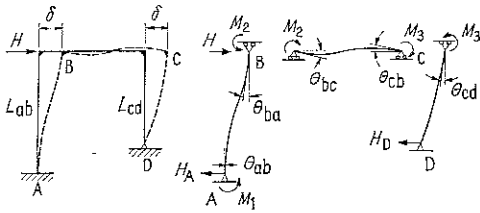
Fig :27r



Deformationsvillkor:

$$\theta_{ab} = 0; \theta_{ba} = \theta_{bc}; \theta_{cb} = \theta_{cd} = \theta_{ce}$$

Fig :31a. Ram med fixa knutpunkter



Deformationsvillkor:  
 $\theta_{ba} = \theta_{bc}$ ;  $\theta_{cb} = \theta_{cd}$ ;  $\theta_{ab} = 0$

Kompletterande jämviktsvillkor:

$$H_A + H_D = -\frac{M_1 + M_2}{L_{ab}} + \frac{M_3}{L_{cd}} = H$$

Fig :31b. Ram med förskjutbara knutpunkter

För att en ramberäkning med elasticitetsekvationer snabbt skall kunna genomföras, fordras från början kännedom om de stödvinkeländringar, som uppkommer vid tvåsidigt fritt upplagd ramdel dels av ett stödmoment  $M=1$  (balkkonstanter) och dels av den aktuella yttre lasten (lastkonstanter). Dessa stödvinkeländringar beskrivs närmare i :32.

Beräkningsmetoden innebär att inverkan av normal- och tvärkraftsarbete liksom effekten av krökningar och excentriciteter hos tyngdpunktslinjen försummas. Dessa approximationer är normalt godtagbara med tillfredsställande noggrannhet.

**:32 Balkkonstanter och lastkonstanter**

A Balkkonstanter  $\alpha_a^0$ ,  $\alpha_b^0$  och  $\beta_{ab}^0$

Med en ramdels balkkonstanter förstås de stödvinkeländringar som uppkommer, om ramdelen som tvåsidigt fritt upplagd balk över det ena eller andra stödet angrips av ett böjmoment  $M=1$  (fig :32a). Följande beteckningar införs

$\alpha_a^0$  = stödvinkeländringen i A vid  $M=1$  i A

$\alpha_b^0$  = stödvinkeländringen i B vid  $M=1$  i B

$\beta_{ab}^0$  = stödvinkeländringen i B vid  $M=1$  i A

$\beta_{ba}^0$  = stödvinkeländringen i A vid  $M=1$  i B

Enligt Maxwells sats gäller därvid  $\beta_{ba}^0 = \beta_{ab}^0$

Balkkonstanterna kan genomgående redovisas under formen

$$\alpha_a^0 = C_a L / 3EI_0; \alpha_b^0 = C_b L / 3EI_0; \beta_{ab}^0 = \beta_{ba}^0 = C_{ab} L / 6EI_0 \quad (1)$$

där  $I_0$  betecknar tröghetsmomentet i ett valt snitt av balken samt  $C_a$ ,  $C_b$  och  $C_{ab}$  = dimensionslösa koefficienter, som entydigt bestäms av voututformningen.

**1 C-tal för balk med konstant tröghetsmoment**

$$C_a = C_b = C_{ab} = 1$$

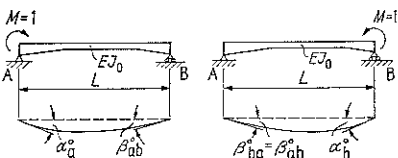


Fig :32a

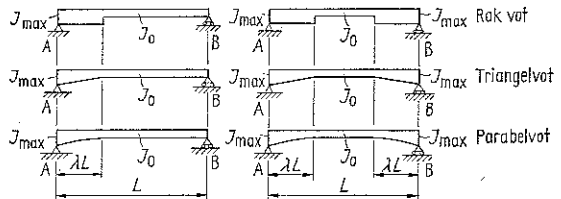


Fig :32b

**2 C-tal för balk med raka, triangulära eller paraboliska voter**

*a* Ensidig vot eller tvåsidiga, symmetriska voter. För vottyper enligt fig :32 b är  $C_a$ ,  $C_b$  och  $C_{ab}$  redovisade i diagramform i tabell 1:44, varvid som parametrar använts relativa votlängden  $\lambda$  och förhållandet  $J_0/J_{max}$  mellan minsta och största tröghetsmoment.

Diagrammen gäller oinskränkt endast för balk av elastiskt, homogent material och med rektangulär sektion, men kan med tillfredsställande noggrannhet användas även vid extrem sektionsutformning. Exempelvis blir skillnaden mellan C-talen för rektangulär sektion och I-sektion normalt  $< 1,5\%$ .

J-värdet för armerade betongkonstruktioner beräknas i allmänhet under förutsättning av elastiskt, homogent material utan hänsyn tagen till sprickbildningen i böjdragzonen eller till krypningen, vilket medför att man får endast en grov bild av bruksstadiets momentfördelning. Ofta kan man erhålla en bättre uppfattning om verkligheten genom en enkel överslagsberäkning baserad på förväntad uppsprickningsfigur (jfr exempel 2 i :34). Hänsyn till krypningen kan tas genom införande av en skenbar  $E$ -modul (jfr 333: 342).

*b* Speciella vottyper. Vid komplicerade utformningar av balkar med raka, triangulära eller paraboliska voter kan genom tillämpning av satserna i 162: 412 uppställas enkla samband för C-talen, i vilka som enda storheter ingår de enligt *a* ovan angivna C-talen för de renodlade votutförandena. I fig :32c-e anges några sådana samband, vilka är *generellt giltiga för varje vottyp*.

$$C_a = C_a^A + C_b^B - 1$$

$$C_b = C_b^A + C_a^B - 1$$

$$C_{ab} = C_{ab}^A + C_{ab}^B - 1$$

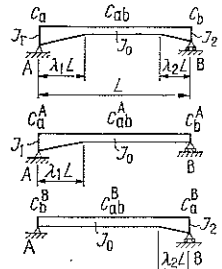


Fig :32c. C-tal för balk med tvåsidiga, osymmetriska voter

$$C_a = C_b = \frac{1}{4} [2(C_a^A + C_b^C) + C_b^A + C_a^C + C_{ab}^A + C_{ab}^C] - 1$$

$$C_{ab} = \frac{1}{2} [C_b^A + C_a^C + C_{ab}^A + C_{ab}^C] - 1$$

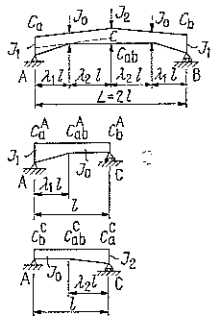


Fig :32d. C-tal för balk med tvåsidiga, symmetriska mitt- och sidovoter

$$C_a = (C_a^I - n_1) \left(\frac{\lambda_1}{L}\right)^3 + n_1 C_a^I$$

$$C_b = (\lambda_2^2 C_a^I + \lambda_2 C_{ab}^I + C_b^I) \frac{\lambda_1}{L} + n_1 (C_b^I + \lambda_2^3 - 1)$$

$$C_{ab} = (2\lambda_2 C_a^I + C_{ab}^I) \left(\frac{\lambda_1}{L}\right)^2 + n_1 (C_{ab}^I - 2\lambda_2^2 + 3\lambda_2 - 1)$$

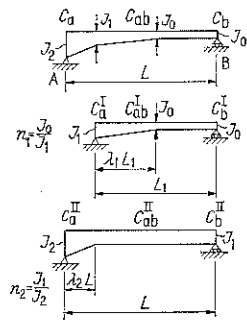


Fig :32e. C-tal för balk med dubbel, ensidig vot

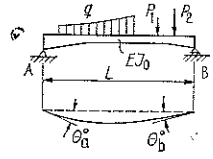


Fig :32f

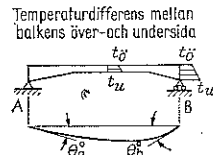


Fig :32g

**3 C-tal för godtyckligt utformad balk**

$\alpha_a^0$ ,  $\alpha_b^0$  och  $\beta_{ab}^0$  är enligt ovan stödvinkeländringarna på grund av  $M=1$  vid det ena eller andra upplaget. Dessa stödvinkeländringar bestäms t ex på sätt som anges i 162: 412.

**B Lastkonstanter  $\Theta_a^0$  och  $\Theta_b^0$**

En ramdels *lastkonstanter* definieras som de stödvinkeländringar  $\Theta_a^0$  och  $\Theta_b^0$  som ramdelen under förutsättning av tvåsidig fri uppläggning erhåller från den aktuella yttre lasten (fig :32f) eller annan inverkan (fig :32g och h).

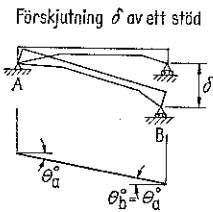


Fig :32h

1  $\Theta_a^0$  och  $\Theta_b^0$  för balk med konstant tröghetsmoment

$$\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = w_a; \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = w_b$$

$w_a$  resp  $w_b$  erhålls ur tabell 1:38

2  $\Theta_a^0$  och  $\Theta_b^0$  för balk med raka, triangulära eller paraboliska vöter

a Ensidig vö eller tvåsidiga, symmetriska vöter. För punktlast  $P$  och jämnt resp triangulärt fördelad last  $q$  anges  $\Theta_a^0$  och  $\Theta_b^0$  i tabell 1:45 med användning av följande redovisningsteknik

$$\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = K_a PL; \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = K_b PL \text{ resp } \Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = \text{konst} \cdot K_a qL^2; \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = \text{konst} \cdot K_b qL^2$$

För diagrammens och formlernas giltighet hänvisas till vad som ovan anförts i avsnitt A 2a.

Speciellt för jämnt fördelad last och tvåsidiga, symmetriska vöter blir

$$\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = qL^2/4$$

Vid stödförskjutning enligt fig :32h blir  $\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = 6\delta EI_0/L^2 C_{ab}$  och  $\Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = -6\delta EI_0/L^2 C_{ab}$

Vid temperaturskillnad ( $t_u - t_b$ ) mellan en balks under- och översida enligt fig :32g beräknas  $\Theta_a^0$  och  $\Theta_b^0$  enligt 162:412.

b Tvåsidiga, osymmetriska vöter. I fig :32i och j anges för tvåsidiga, osymmetriska vöter de tillhörande  $K$ -talen, i vilka som enda storheter ingår de i a ovan angivna  $K$ -talen och de i A 2a ovan angivna  $C$ -talen för de renodlade vötyperna. Sambanden gäller generellt för varje vötyp.

3  $\Theta_a^0$  och  $\Theta_b^0$  för godtyckligt utformad balk

$\Theta_a^0$  och  $\Theta_b^0$  beräknas enligt 162:412.

Speciellt vid jämnt fördelad last och tvåsidiga, symmetriska vöter blir

$$\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = qL^2/4$$

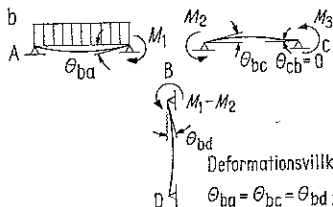
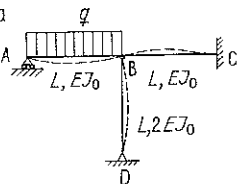
Vertikal stödförskjutning  $\delta$  enligt fig :32h ger  $\Theta_a^0 = \delta/L$  och  $\Theta_b^0 = -\delta/L$

:33 Beräkningsexempel

Exempel 1. Ram med fixa knutpunkter

Beräkna momentdiagrammet för den i fig :33a visade trefalt statiskt obestämda ramkonstruktionen, om samtliga ramdelar har konstant sektion.

Under införande av snittmoment  $M_1$ ,  $M_2$  och  $M_3$  skärs konstruktionen upp enligt fig :33 b i enkla, tvåsidigt fritt upplagda ramdelar, vars stödvinkeländringar beräknas, lämpligen med användning av formelsammansättningen i tabell 1:38 ( $\Theta_a^0 = w_a L/6EI$ ;  $\Theta_b^0 = w_b L/6EI$ ).



$$K_a = \frac{1}{C_{ab}} [C_{ab} K_a^A + C_{ab} K_b^B - \frac{b}{L} (1 - \frac{b^2}{L^2})]$$

$$K_b = \frac{1}{C_{ab}} [C_{ab} K_a^A + C_{ab} K_b^B - \frac{a}{L} (1 - \frac{a^2}{L^2})]$$

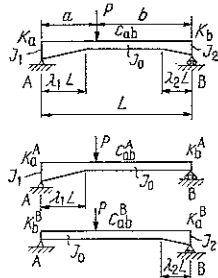


Fig :32i.  $K$ -tal för balk med tvåsidiga, osymmetriska vöter och belastad med punktlast

$$K_a = \frac{1}{C_{ab}} [C_{ab} K_a^A + C_{ab} K_b^B - 1]$$

$$K_b = \frac{1}{C_{ab}} [C_{ab} K_a^A + C_{ab} K_b^B - 1]$$

För specialfallet symmetrisk utformning gäller:  $K_a = K_b = 1$

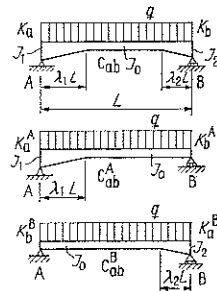


Fig :32j.  $K$ -tal för balk med tvåsidiga, osymmetriska vöter och belastad med jämnt fördelad last

Fig :33a och b



För de obekanta snittmomentens bestämning erforderliga samband erhålls ur deformationsvillkoren (se fig :33 b). Ur dessa beräknas för delen BC  $\Theta_{cb} = 0 = M_2 L / 6EI_0 - M_3 L / 3EI_0$ , varav  $M_3 = \frac{1}{2}M_2$  (a)

För övriga stödvinkeländringar erhålls uttrycken

$$\Theta_{ba} = qL^3 / 24EI_0 - M_1 L / 3EI_0, \quad \Theta_{bc} = M_2 L / 3EI_0 - M_3 L / 6EI_0 = M_2 L / 4EI_0 \text{ och}$$

$$\Theta_{bd} = (M_1 - M_2) L / 3 \cdot 2EI_0 = (M_1 - M_2) L / 6EI_0$$

vilka insatta i deformationsvillkoren  $\Theta_{bc} = \Theta_{bd}$  resp  $\Theta_{ba} = \Theta_{bc}$  ger

$$M_2 = (2/5)M_1 \quad (b) \quad 8M_1 + 6M_2 = qL^2 \quad (c)$$

Ur ekv (a), (b) och (c) beräknas

$$M_1 = (5/52)qL^2; \quad M_2 = (1/26)qL^2; \quad M_3 = (1/52)qL^2.$$

Momentdiagrammet visas i fig :33 c, varvid böjmomentet genomgående avsatts på den ramdeissida, i vilken det framkallar dragspänning.

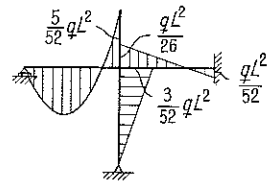


Fig :33 c

### Exempel 2. Ram med förskjutbara knutpunkter

Beräkna momentdiagrammet för lastfallet enligt fig :33 d. Den osymmetriskt placerade lasten medför, att knutpunkterna B, C och D vid ramens deformation kommer att få en horisontell förskjutning  $\delta$ , vilken måste inkluderas vid bestämningen av stödvinkeländringarna  $\Theta$  för de i B, C och D anslutande ramdelarna. I övrigt innebär en direkt momentberäkning för ramkonstruktionen enligt fig :33 d på sätt som framgår av fig :31 b inga principiella skillnader i förhållande till den behandling, som redovisats ovan i exempel 1 för ram med fixa knutpunkter.

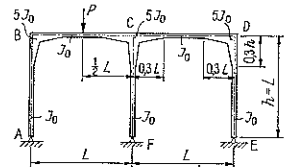


Fig :33 d

I stället för en direkt momentberäkning genomförs nedan momentbestämningen för det i fig :33 d visade lastfallet i etapper. I ett första beräkningssteg studeras därvid det momenttillstånd, som uppkommer, om förskjutningen av knutpunkterna B, C och D genom något yttre tvång förhindras (beräkning under förutsättning av fixa knutpunkter). I ett andra beräkningssteg studeras därefter renodlat effekten av den knutpunktsförskjutning, som konstruktionen får då detta yttre tvång avlägsnas, varpå konstruktionens verkliga moment erhålls genom överlagring, med hänsyn tagen till tecken, av de båda beräkningsstegens delmoment. Fördelen med en sådan, i etapper uppdelad momentberäkning framför en direkt momentbestämning är i här aktuellt fall obetydlig, men blir väsentlig i sådana fall då en och samma konstruktion måste undersökas för ett flertal dellaster.

#### A Beräkning under förutsättning av fixa knutpunkter

Den horisontella förskjutningen av knutpunkterna B, C och D kan förhindras exempelvis genom att konstruktionen i D kompletteras med en fasthållningsstång (jfr fig :33 e). För den på detta sätt kompletterade ramen erhålls efter uppskärrning i enkla ramdelar enligt fig :33 f följande momentberäkning.

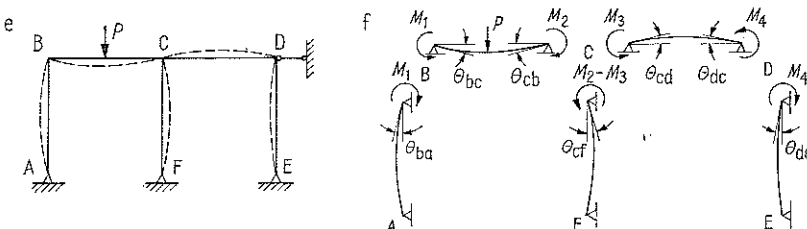


Fig :33 e och f

Balkkonstanter  $\alpha^0$  och  $\beta^0$ , lastkonstanter  $\Theta^0$  samt stödvinkeländringar  $\Theta$

AB:  $\lambda = 0,3$ ;  $n = I_0/I_{\max} = 0,2$ ;  $C_b = 0,617$ ;

$$\alpha_b^0 = C_b L/3EI_0 = 0,206L/EI_0 \text{ (jfr tabell 1:44)}; \Theta_{ba} = M_1 \alpha_b^0 = 0,206M_1 L/EI_0 \quad (a)$$

BC:  $\lambda = 0,3$ ;  $n = 0,2$ ;  $C_b = C_c = 0,609$ ;  $C_{bc} = 0,815$ ;

$$\alpha_b^0 = \alpha_c^0 = C_b L/3EI_0 = 0,203L/EI_0; \beta_{bc}^0 = C_{bc} L/6EI_0 = 0,136L/EI_0 \text{ (jfr tabell 1:44)}$$

$$\Theta_b^0 = \Theta_c^0 = 0,3925PL\beta_{bc}^0 = 0,0534PL^2/EI_0 \text{ (jfr tabell 1:45)}$$

$$\Theta_{bc} = \Theta_b^0 - M_1 \alpha_b^0 - M_2 \beta_{bc}^0 = 0,0534PL^2/EI_0 - 0,203M_1 L/EI_0 - 0,136M_2 L/EI_0 \quad (b)$$

$$\Theta_{cb} = \Theta_c^0 - M_1 \beta_{bc}^0 - M_2 \alpha_c^0 = 0,0534PL^2/EI_0 - 0,136M_1 L/EI_0 - 0,203M_2 L/EI_0 \quad (c)$$

$$\text{CD (jfr ramdel BC): } \Theta_{cd} = 0,203M_3 L/EI_0 - 0,136M_4 L/EI_0 \quad (d)$$

$$\Theta_{dc} = 0,136M_3 L/EI_0 - 0,203M_4 L/EI_0 \quad (e)$$

$$\text{DE (jfr ramdel AB): } \Theta_{de} = 0,206M_4 L/EI_0 \quad (f)$$

$$\text{CF (jfr ramdel AB): } \Theta_{cf} = 0,206(M_2 - M_3) L/EI_0 \quad (g)$$

Deformationsvillkor

B:  $\Theta_{ba} = \Theta_{bc}$ , som tillsammans med ekv (a) och (b) ger

$$0,409M_1 + 0,136M_2 = 0,0534PL \quad (h)$$

C:  $\Theta_{cb} = \Theta_{cf}$  och  $\Theta_{cd} = \Theta_{cf}$ , vilka tillsammans med ekv (c), (d) och (g) ger

$$0,136M_1 + 0,409M_2 - 0,206M_3 = 0,0534PL \quad (i)$$

$$0,206M_2 - 0,409M_3 + 0,136M_4 = 0 \quad (j)$$

D:  $\Theta_{dc} = \Theta_{de}$ , som tillsammans med ekv (e) och (f) ger

$$0,136M_3 - 0,409M_4 = 0 \quad (k)$$

Ur ekv (h)–(k) beräknas

$$M_1 = 0,0825PL; M_2 = 0,1445PL; M_3 = 0,0818PL; M_4 = 0,0272PL \quad (l)$$

Det tillhörande momentdiagrammet, i vilket momenten genomgående avsatts på den ramdelssida, som har dragspänning, framgår av fig :33 g. De mot denna momentfördelning svarande horisontalreaktionerna i upp-lagen  $H_A$ ,  $H_F$  och  $H_E$ , också angivna i fig :33 g, har en högerriktad resul-tant  $H = 0,0470P$ , vilken för ramens jämvikt fordrar en lika stor, vänster-riktad fasthållningskraft  $Z$  från den i knutpunkten D applicerade stängen.

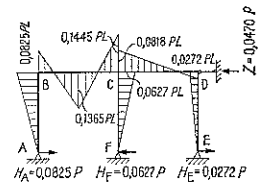


Fig :33 g

B Korrektion för knutpunktsförskjutning

Den verkliga konstruktionen (fig :33 d) erhålls ur den under A behandlade genom att fasthållningsstängen i punkten D borttas. Effekten härav är identisk med effekten av en i D verkande, högerriktad, horisontell knut-punktslast  $H = 0,0470P$  (fig :33 h), vilken är lika stor men motriktad fast-hållningskraften  $Z$ .

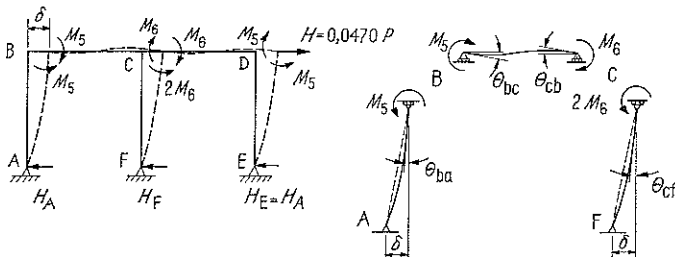


Fig :33 h

Denna renodlade knutpunktslast  $H$  ger ramen en med avseende på  $C$  antisymmetrisk deformationsfigur och därmed också ett antisymmetriskt momenttillstånd. Det antal obekanta snittmoment, som måste införas vid ramkonstruktionens uppskärande i enkla ramdelar, begränsas därigenom till två, i fig :33h betecknade  $M_5$  och  $M_6$ . För dessas bestämning gäller deformationsvillkoren

$$\Theta_{ba} = \Theta_{bc}; \quad \Theta_{cb} = \Theta_{cf} \quad (m)$$

Då emellertid uttrycken för de i ekv (m) ingående stödvinkeländringarna  $\Theta$  kommer att innehålla den ännu så länge obestämda horisontalförskjutningen  $\delta$  av knutpunkterna  $B$ ,  $C$  och  $D$ , blir ekv (m) inte ensamma tillräckliga för problemets lösning. Återstående kompletterande samband kan erhållas ur jämviktskravet för verkande horisontalkrafter

$$H = Z = H_A + H_E + H_F = 2H_A + H_F = (2/L)(M_5 + M_6) \text{ eller} \\ M_5 + M_6 = \frac{1}{2}ZL \quad (n)$$

Ur fig :33h beräknas för stödvinkeländringarna uttrycken

$$\Theta_{ba} = \delta/L - M_5 \alpha_b^0 = \delta/L - 0,206 M_5 L / EI_0 \quad (o)$$

$$\Theta_{bc} = M_5 \alpha_b^0 - M_6 \beta_{bc}^0 = 0,203 M_5 L / EI_0 - 0,136 M_6 L / EI_0 \quad (p)$$

$$\Theta_{cb} = -M_5 \beta_{bc}^0 + M_6 \alpha_c^0 = -0,136 M_5 L / EI_0 + 0,203 M_6 L / EI_0 \quad (q)$$

$$\Theta_{cf} = \delta/L - 2M_6 \alpha_b^0 = \delta/L - 0,412 M_6 L / EI_0 \quad (r)$$

vilka insatta i deformationsvillkoren (m) ger

$$0,409 M_5 - 0,136 M_6 = \delta EI_0 / L^2 \text{ och } -0,136 M_5 + 0,615 M_6 = \delta EI_0 / L^2 \quad (s)$$

Ur ekv (n) och (s) beräknas slutligen med beaktande av att enligt beräkningsstapp A  $Z = 0,0470P$

$$M_5 = 0,290ZL = 0,0136PL; \quad M_6 = 0,211ZL = 0,0099PL; \quad \delta = 0,00421PL^3 / EI_0 \quad (t)$$

varpå den verkliga konstruktionens moment erhålls genom överlagring av de under  $A$  beräknade, för fixa knutpunkter gällande momenten och av de ovan bestämda korrektionsmomenten från knutpunktsförskjutningen (exempelvis erhålls för momentet i ramhörnet  $B$ ,  $M_B = M_1 - M_5 = 0,0825PL - 0,0136PL = 0,0689PL$ ). Det slutgiltiga momentdiagrammet framgår av fig :33i.

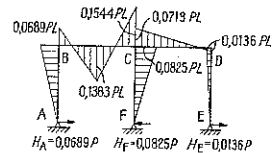


Fig :33i

### :34 Clapeyrons ekvation för beräkning av kontinuerlig balk

Genom direkt tillämpning av elasticitetsekvationer på en kontinuerlig balk enligt fig :34a kan för de böjmoment  $M_K$ ,  $M_L$  och  $M_M$ , som uppträder över tre på varandra följande upplag  $K$ ,  $L$  resp  $M$ , följande samband härledas (för specialfallet votlös balk uppställt av Clapeyron 1857)

$$M_K \beta_{kl}^0 + M_L (\alpha_1^0 + \alpha_m^0) + M_M \beta_{mn}^0 = -(\Theta_1^0 + \Theta_m^0) + y(1/L' + 1/L'') \quad (1)$$

där  $\alpha^0$ ,  $\beta^0$  och  $\Theta^0$  erhålls enligt :32 (jfr fig :34 b). Speciellt för *votlös balk* ger ekv (1)

$$M_K L' / E'I' + 2M_L (L' / E'I' + L'' / E''I'') + M_M L'' / E''I'' = -(w_1 L' / E'I' + w_m L'' / E''I'') + 6y(1/L' + 1/L'') = -6(\Theta_1^0 + \Theta_m^0) + 6y(1/L' + 1/L'') \quad (1a)$$

där  $w_1$  och  $w_m$  erhålls ur tabell 1: 38.

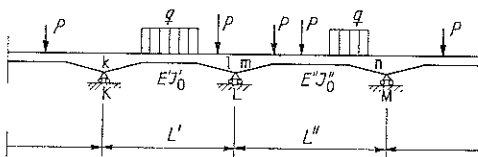


Fig :34a

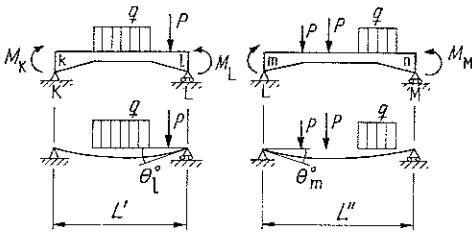


Fig :34b

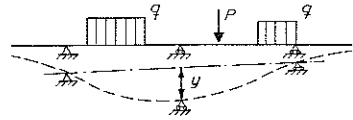


Fig :34c

Ekv (1) och (1a) förutsätter att stödmoment  $M$  och stödvinkeländringar  $\Theta^0$  räknas positiva, då de har de i fig :34b visade riktningarna. Den sista termen i ekv (1) och (1a) beaktar inverkan av vertikala stödförskjutningar, varvid  $y$  enligt fig :34c betecknar vertikal förskjutning av stödet  $L$ , räknad positiv nedåt och refererad till förbindningslinjen mellan de eventuellt vertikalförskjutna stöden  $K$  och  $M$ .

**Exempel 1.** Beräkna momentdiagrammet för den i fig :34d visade kontinuerliga balken, om denna har efter hela sin längd konstant styvhet  $EI$ .

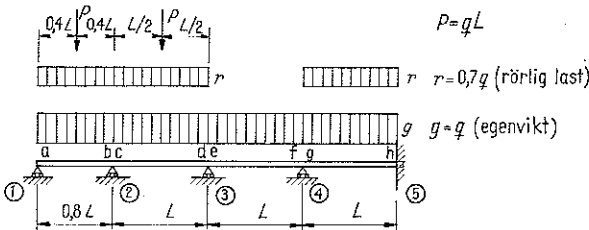


Fig :34d

Facken ①-②-③

För lastkonstanterna  $\Theta_b^0$  och  $\Theta_c^0$  beräknas med hjälp av  $w_a$ - och  $w_b$ -talen i tabell 1: 38 (jfr :32 B 1)

$$\Theta_b^0 = (g+r)(0,8L)^3/24EI + P(0,8L)^2/16EI = 0,0763qL^3/EI;$$

$$\Theta_c^0 = (g+r)L^3/24EI + PL^2/16EI = 0,1333qL^3/EI$$

varpå ekv (1a) för momenten  $M_2$  och  $M_3$  över stöd ② resp ③ ger sambandet ( $M_1 = 0$ )

$$2M_2(0,8L/EI + L/EI) + M_3L/EI = -6 \cdot (0,0763 + 0,1333)qL^3/EI;$$

$$3,6M_2 + M_3 = -1,258qL^2 \tag{a}$$

Analogt erhålls för facken ②-③-④ resp facken ③-④-⑤

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = -1,050qL^2 \tag{b}$$

$$M_3 + 4M_4 + M_5 = -0,675qL^2 \tag{c}$$

Fack ④-⑤ + fast inspänning i ⑤

För tillämpning av Clapeyrons ekvation ersätts enligt fig :34e den fasta inspänningen i ⑤ med en oändligt böjstyv balkdel ⑤-⑥. Ett sådant arrangemang förändrar inte den ursprungliga konstruktionens statiska verkningssätt. Ekv (1a) ger

$$\Theta_h^0 = (g+r)L^3/24EI = 0,0708qL^3/EI; \Theta_i^0 = 0$$

$$M_4L/EI + 2M_5(L/EI + L/\infty) = -6 \cdot 0,0708qL^3/EI; M_4 + 2M_5 = -0,425qL^2(d)$$

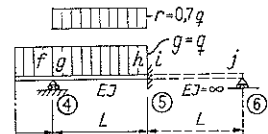


Fig :34e

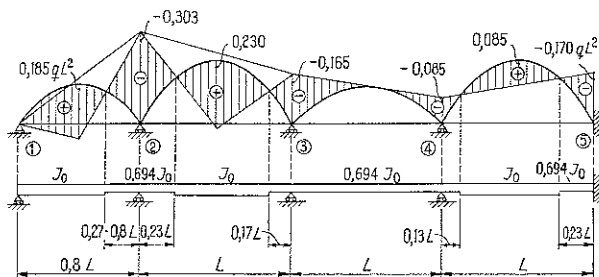


Fig :34f

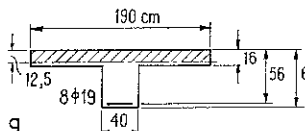
Lösning av ekv (a), (b), (c) och (d) ger

$$M_2 = -0,303qL^2; M_3 = -0,165qL^2; M_4 = -0,085qL^2; M_5 = -0,170qL^2$$

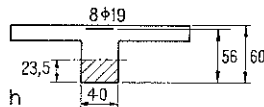
varpå för det sökta momentdiagrammet erhålls det i fig :34f visade utseendet. Som positiva har därvid räknats sådana moment, som ger dragspänning i den kontinuerliga balkens underkant.

**Exempel 2.** Bestäm motsvarande momentdiagram för den kontinuerliga balken i exempel 1 utförd som T-balk i armerad betong med hänsyn tagen till den uppsprickning av betongens böjdragzon, som karakteriserar en ordinär brukstadiieberäkning. För kalkylen förutsätts verksamma sektioner enligt fig :34g och h med en schematiserad armering, som i varje snitt med positivt moment består av 8  $\phi$  19 i balkunderkant och i varje snitt med negativt moment av 8  $\phi$  19 i balköverkant.

Ifr kap 333



För positivt moment  
verksam sektion  
 $J = 7,68 \cdot 10^5 \text{ cm}^4 = J_0$   
( $n = 15$ )



För negativt moment  
verksam sektion  
 $J = 5,33 \cdot 10^5 \text{ cm}^4 = 0,694 J_0$   
( $n = 15$ )

Fig :34g och h

Problemet består approximativt i en beräkning av det momenttillstånd, som uppträder i en kontinuerlig balk med en tröghetsmomentvariation enligt den undre delen av fig :34f. Approximationen ligger däri, att som momentnollpunkter valts de punkter, som i exempel 1 framräknats under förutsättning av längs hela balken konstant styvhet.

Sedan  $\alpha^0$ ,  $\beta^0$  och  $\Theta^0$  bestämts enligt :32, beräknas momenten enligt ekv (1). Härvid erhålls det i fig :34i redovisade momentdiagrammet. Detta har momentnollpunkter, vars lägen något avviker från de, som antogs vid kalkylens början. Avvikelsen är dock så pass obetydlig, att den inte motiverar en ytterligare upprepad kalkyl. Av en jämförelse mellan diagrammen i fig :34f och i framgår, att betongens uppsprickning i böjdragzonen medför en inte oväsentlig momentomlagring, vilken speciellt för maximimomentet  $M_2$  innebär en reduktion med ca 11 %.

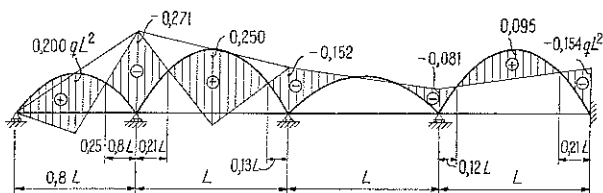


Fig :34i

**Exempel 3.** Beräkna böjmomentet  $M_2$  över mellanstödet ② för en enligt fig :34j utformad och belastad kontinuerlig balk, om vid lastens påförande a) stödet ②, b) stödet ③ vertikalt förskjuts en distans  $\delta$ .

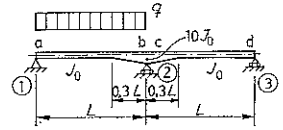


Fig :34j

Balkkonstanter  $\alpha^0$  och  $\beta^0$  samt lastkonstanter  $\theta^0$

$$\lambda = 0,3; n = I_0 / I_{\max} = 0,1 \text{ för såväl del ①-② som del ②-③}$$

$$C_b = C_c = 0,535; C_{ab} = C_{cd} = 0,870 \text{ (jfr tabell 1:44)}$$

$$\alpha_b^0 = C_b L / 3EI_0 = 0,535L / 3EI_0 = \alpha_c^0$$

$$\beta_{ab}^0 = C_{ab} L / 6EI_0 = 0,870L / 6EI_0 = \beta_{cd}^0$$

$$\theta_b^0 / \beta_{ab}^0 = 0,910qL^2 / 4 \text{ (jfr tabell 1:45)}$$

$$\theta_b^0 = (0,910qL^2 / 4)(0,870L / 6EI_0) = 0,792qL^3 / 24EI_0$$

$$\theta_c^0 = 0$$

Fall a Vertikal förskjutning  $\delta$  av stöd ②

Stödförskjutningen ger enligt fig :34k  $y = \delta$  varpå genom insättning i ekv (1) av storheter enligt ovan erhålls

$$2M_2 \cdot 0,535L / 3EI_0 = -0,792qL^3 / 24EI_0 + 2\delta / L$$

Härur beräknas för sökt stödmoment  $M_2$  värdet

$$M_2 = -0,0923qL^2 + 5,61\delta EI_0 / L^2$$

Fall b Vertikal förskjutning  $\delta$  av stöd ③

Analogt beräknas  $y = -\delta / 2$  (jfr fig :34 l)

$$M_2 = -0,0923qL^2 - 2,81\delta EI_0 / L^2$$

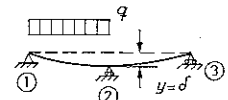


Fig :34k

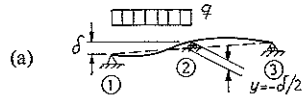


Fig :34l

## :4 Primärmomentmetoden

### :41 Beräkningsprincip

Primärmomentmetoden eller Efsens metod, vilken framlades första gången år 1931 i en doktorsavhandling av dansken Axel Efsen [15b], är en systematiserad bruksstadiemetod.

Vid rambärverk med fixa knutpunkter är den principiella beräkningsgången följande; jfr fig :41a-c. Aktuellt lastfall (fig :41a) uppdelas i ett antal dellastfall, vardera karakteriserat av yttre last på endast en av konstruktionens balk- eller ramdelar (fig :41b och c). För varje sådant dellastfall beräknas de inspänningsmoment, primärmoment  $M'$ , som, under förutsättning av elastisk inspänning i anslutande rampartier, uppkommer i den belastade ramdelens ändpunkter. Mot dessa primärmoment svarar för de anslutande rampartierna angrepp av numeriskt lika stora, motriktade moment, vilka inom dessa rampartier ger upphov till fördelade och överförda moment. Sedan för de olika dellastfallen primärmoment och samtliga tillhörande fördelade och överförda moment bestämts, erhålls det verkliga lastfallets momenttillstånd genom en direkt överlagring av momenttillstånden för de olika dellastfallen.

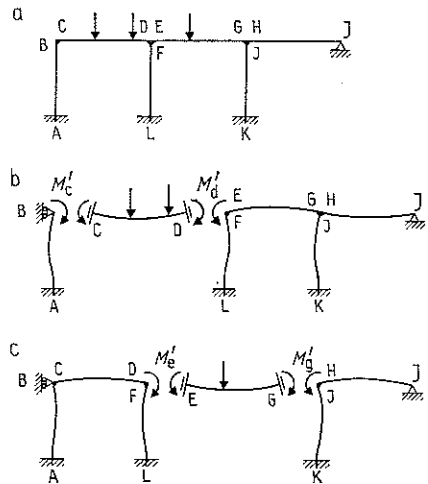


Fig :41a-c

Vid rambärverk med *förskjutbara knutpunkter* uppdelas lämpligen beräkningen enligt :33 exempel 2, :47 och :57 i de båda etapperna:

- a Momentberäkning under förutsättning av fixa knutpunkter
- b Korrektion för renodlad knutpunktsförskjutning

### Beräkningsgång

A *Fixa knutpunkter* (utan knutpunktsförskjutning =  $uk$ )

- 1 Bestämning av balkkonstanter  $\alpha^0$  och  $\beta^0$  samt lastkonstanter  $\Theta^0$  (se :32)
- 2 Bestämning av momentöverföringstal ( $m$ -tal) (se :43)
- 3 Bestämning av fördelningstal ( $\mu$ -tal) (se :44)
- 4 Beräkning av primärmoment  $M'$  (se :45)
- 5 Beräkning av fördelade moment  $M^f$  och överförda moment  $M^{\delta}$  (se :46)
- 6 Beräkning av resulterande moment i balkändarna  $M = M^{uk} = M' + \Sigma(M^f + M^{\delta})$

Sedan de resulterande momenten i en ramdels båda ändar bestäms enligt ovan, kan övriga snittkrafter i ramdelen och ramdelens deformationer beräknas för ramdelen betraktad som enkel tvåstödsbalk, belastad av resulterande momenten  $M^{uk}$  och yttre lasten.

Se 162:41

B *Förskjutbara knutpunkter* (med knutpunktsförskjutning =  $mk$ ) (jfr :33 exempel 2, :47 och :57)

1 Beräkning enligt 1-6 ovan av resulterande moment utan knutpunktsförskjutning  $M^{uk}$

2 Beräkning av fasthållningskrafterna  $Z_1, Z_2, Z_3$  osv vid momenttillståndet  $M^{uk}$  enligt 1 (se :47)

3 Beräkning enligt 1 och 2 av momenten  $M^{\delta_1=1}$  och horisontalkrafterna  $H_1^{\delta_1=1}, H_2^{\delta_1=1}, H_3^{\delta_1=1}$  osv vid knutpunktsförskjutningen  $\delta_1=1$  i motsatt riktning mot  $Z_1$  (jfr :47) samt beräkning av motsvarande moment och horisontalkrafter vid knutpunktsförskjutningarna  $\delta_2=1, \delta_3=1$  osv i motsatt riktning mot  $Z_2$  resp  $Z_3$  osv (jfr :47)

4 Beräkning av de verkliga förskjutningarna  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  osv ur sambanden

$$Z_1 = \delta_1 H_1^{\delta_1=1} + \delta_2 H_1^{\delta_2=1} + \delta_3 H_1^{\delta_3=1} + \dots$$

$$Z_2 = \delta_1 H_2^{\delta_1=1} + \delta_2 H_2^{\delta_2=1} + \delta_3 H_2^{\delta_3=1} + \dots$$

(Jfr :47)

5 Beräkning av momenten  $M^{\delta}$  vid de verkliga förskjutningarna  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  osv ur sambandet

$$M^{\delta} = \delta_1 M^{\delta_1=1} + \delta_2 M^{\delta_2=1} + \delta_3 M^{\delta_3=1} + \dots$$

(Jfr :47)

6 Beräkning av resulterande moment vid knutpunktsförskjutning  $M^{mk} = M^{uk} + M^{\delta}$  (jfr :47)

### Teckenregler

För att hålla nere risken för teckenfel väljs som genomgående teckenregel för den ovan redovisade beräkningen av i balkändarna angripande moment (*primärmoment* samt *fördelade* och *överförda moment*), att dessa räknas *positiva*, då de är *riktade medsols* (+). Detta innebär att

1 *Tecknet bibehålls vid momentöverföring* ( $M_b = m_b M_a$ )

2 *Tecknet växlas vid momentfördelning* ( $M_c = -\mu_{bc} M_b$ )

Vid den slutgiltiga redovisningen av en ramkonstruktions momentdiagram övergår man lämpligen till därvid konventionella teckenregler.

För krafter och förskjutningar vid rambärverk med förskjutbara knutpunkter införs vidare följande teckenregler:

- 3 Fasthållningskrafterna ( $Z$ ) räknas positiva, om de är riktade åt vänster ( $\leftarrow$ )
- 4 Horisontalkrafterna ( $H$ ) räknas positiva, om de är riktade åt höger ( $\rightarrow$ )
- 5 Förskjutningarna ( $\delta$ ) räknas positiva, om knutpunkterna förskjuts åt höger ( $\rightarrow$ )

**:42 Balkkonstanter och lastkonstanter**

Dessa beräknas enligt :32.

**:43 Momentöverföringstal ( $m$ -tal)**

**A Allmänt**

En balks (ramdels) momentöverföringstal beskriver hur ett i den ena balkändan angripande moment överförs till den motsatta balkändan. För en ur en ramkonstruktion godtyckligt utvald balk AB (fig :43 a) definieras det till momentöverföring från A till B hörande momentöverföringstalet  $m_b$  som det moment, som uppkommer i ändpunkten B vid belastning av  $M=1$  i den som fritt upplagd räknade ändpunkten A (fig :43 b).

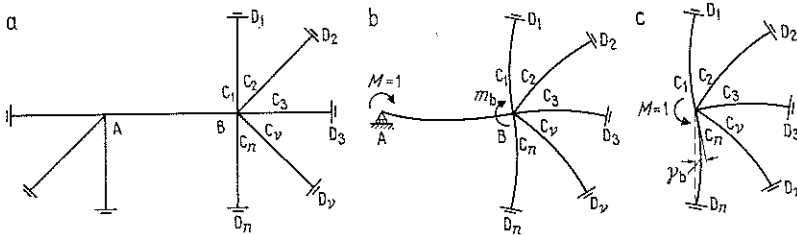


Fig :43 a-c

För momentöverföringstalet  $m_b$  gäller *generellt* uttrycket

$$m_b = \beta_{ab}^0 / (\alpha_b^0 + \gamma_b) \tag{1}$$

i vilket  $\alpha_b^0$  och  $\beta_{ab}^0$  är de genom ekv :32(1) definierade balkkonstanterna och  $\gamma_b$  betecknar den vinkeländring, som erhålls i knutpunkten B för det där anslutande rampartiet, då detta enligt fig :43 c belastas med ett moment  $M=1$ . För denna vinkeländring kan följande samband härledas

$$\gamma_b = 1 / \sum_1^n \frac{1}{\alpha_{c_v}'} \tag{2}$$

i vilket  $\alpha_{c_v}$  betecknar den stödvinkeländring som för ramdelen  $C_v D_v$  uppkommer i den som fritt upplagd räknade ändpunkten  $C_v$ , då denna angrips av ett moment  $M=1$  (se fig :43 d).

Generellt gäller för  $\alpha_{c_v}$  uttrycket

$$\alpha_{c_v} = \alpha_{c_v}^0 - m_{d_v} \beta_{c_v d_v}^0 \tag{3}$$

i vilket  $\alpha_{c_v}^0$  och  $\beta_{c_v d_v}^0$  betecknar balkkonstanter för balken  $C_v D_v$  samt  $m_{d_v}$  momentöverföringstalet för balkänden  $D_v$ .

För bestämning av  $m_b$  fordras alltså kännedom om  $m_{d_v}$  ( $m_{d_1}$ ,  $m_{d_2}$  osv).

Vid beräkning av  $m$ -tal utgår man allmänt från balkändar med kända  $m$ -tal eller från snitt med på försök valda  $m$ -tal som successivt förbättras. Beräkningsprincipen beskrivs utförligare nedan i D.

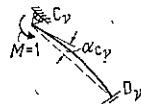


Fig :43 d



**B  $\alpha_{c_v}$  i specialfall** (jfr fig :43 d)

$D_v$  fritt upplagd:  $\gamma_{d_v} = \infty$ ;  $m_{d_v} = 0$ ;  $\alpha_{c_v} = \alpha_{c_v}^0$

$D_v$  fast inspänd:  $\gamma_{d_v} = 0$ ;  $m_{d_v} = \beta_{c_v}^0 d_v / \alpha_{d_v}^0$ ;  $\alpha_{c_v} = \alpha_{c_v}^0 - (\beta_{c_v}^0 d_v)^2 / \alpha_{d_v}^0$

$D_v$  inspänd i grundplatta på elastiskt underlag:  $\gamma_{d_v} =$  vinkeländringen  $\Theta$  för  $M=1$  enligt tabell 1:61 D;  $m_{d_v}$  enligt ekv (1);  $\alpha_{c_v}$  enligt ekv (3)

$D_v$  inspänd i vridningsbelastad balk:  $\gamma_{d_v} =$  vridningsvinkeln  $\varphi$  för  $M_p=1$ ;  $m_{d_v}$  enligt ekv (1);  $\alpha_{c_v}$  enligt ekv (3)

**$C_{i,m_b}^0$  i specialfall** (jfr fig :43 b)

B fritt upplagd:  $m_b = 0$

B fast inspänd:  $m_b = \beta_{ab}^0 / \alpha_b^0 = C_{ab} / 2C_b$ . Speciellt för votlös ramdel AB:  $m_b = \frac{1}{2}$

B elastiskt inspänd i endast en anslutande ramdel CD (fig :43 e och f):

$$\gamma_b = \alpha_c = \alpha_c^0 - m_d \beta_{cd}^0; \quad m_b = \beta_{ab}^0 / (\alpha_b^0 + \alpha_c)$$

$m$ -tal vid betongplattor: Se kap 336.

**D  $m$ -talsberäkning vid några vanligare konstruktionstyper**

*Kontinuerlig balk* (fig :43 e), *enkel öppen ram* (fig :43 f):  $m$ -tal för momentöverföring från vänster till höger (medsols) bestäms genom en successiv beräkning från höger till vänster (motsols) och vice versa. Exempelvis erhålls för den kontinuerliga balken enligt fig :43 e

$$m_a = 0; \quad m_c = \beta_{cd}^0 / (\alpha_c^0 + \alpha_b^0); \quad m_e = \beta_{ef}^0 / [\alpha_e^0 + (\alpha_d^0 - m_c \beta_{cd}^0)];$$

$$m_g = \beta_{gh}^0 / [\alpha_g^0 + (\alpha_f^0 - m_e \beta_{ef}^0)]; \quad m_h = \beta_{hn}^0 / \alpha_h^0; \quad m_f = \beta_{ef}^0 / [\alpha_f^0 + (\alpha_g^0 - m_h \beta_{gh}^0)];$$

$$m_d = \beta_{cd}^0 / [\alpha_d^0 + (\alpha_e^0 - m_f \beta_{ef}^0)]; \quad m_b = \beta_{ab}^0 / [\alpha_b^0 + (\alpha_c^0 - m_d \beta_{cd}^0)]$$

*Kontinuerlig öppen ram* (fig :43 g):  $m$ -talen bestäms i huvudsak enligt samma teknik som vid enkel öppen ram med beaktande av de speciella problem, som inkommer i de knutpunkter, i vilka fler än två ramdelar ansluter. Exempelvis beräknas för momentöverföringstalet  $m_e$  vid den i fig :43 g visade ramen, jfr ekv (1)–(3)

$$m_e = \beta_{eg}^0 / \left[ \alpha_e^0 + \frac{1}{1 / (\alpha_f^0 - m_n \beta_{fn}^0) + 1 / (\alpha_d^0 - m_c \beta_{cd}^0)} \right]$$

där  $m_c = \beta_{cd}^0 / (\alpha_c^0 + \alpha_b^0)$ ;  $m_n = \beta_{fn}^0 / \alpha_n^0$

(speciellt för votlös balk  $m_n = \frac{1}{2}$ )

*Sluten ram* (fig :43 h): För varje sluten ramcell väljs från början på försök två momentöverföringstal, t ex  $m_d$  och  $m_l$  samt  $m_e$  och  $m_k$  för ramen enligt fig :43 h. Med dessa som utgångspunkt beräknas enligt ovan ramens övriga  $m$ -tal, och ur dessa därpå förbättrade värden på de på försök valda momentöverföringstalen. Erhålls därvid otillfredsställande överensstämmelse mellan beräknade och från början ansatta  $m$ -värden får beräkningstekniken genomlöpa konstruktionen ytterligare ett varv etc. Jfr vidare exempel i :47.

**:44 Fördelningstal ( $\mu$ -tal)**

Fördelningstal  $\mu$ , vilka har aktualitet för knutpunkter med fler än två inkommande ramdelar, beskriver — jfr fig :44 a — hur ett i en ramdelsände B uppträdande moment  $M_b$  (primärmoment eller överfört moment) fördelas på de övriga i ramdelsändan anslutande ramdelarna  $C_1 D_1, C_2 D_2 \dots C_p D_p, \dots C_n D_n$ . För en härur godtyckligt utvald ramdel  $C_i D_i$  (se fig :44 a b och c)

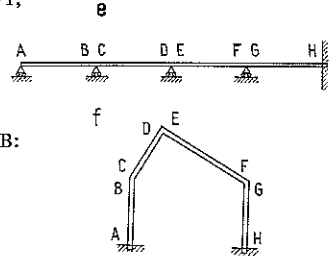


Fig :43 e och f

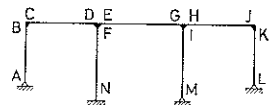


Fig :43 g

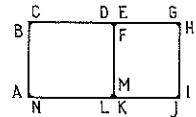


Fig :43 h

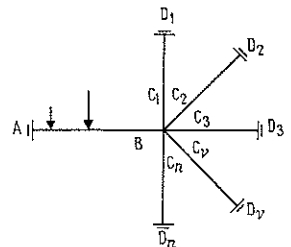


Fig :44 a

definieras fördelningstalet  $\mu_{bc_p}$  som det moment, som erhålls i  $C_p$ , då hela det anslutande rampartiet  $C_1 D_1, C_2 D_2 \dots C_p D_p \dots C_n D_n$  i knutpunkten B belastas med ett moment  $M_b = 1$  (fig :44b).

För fördelningstalet  $\mu_{bc_p}$  gäller följande samband

$$\mu_{bc_p} = \frac{1/\alpha_{c_p}}{\sum_1^n 1/\alpha_{c_p}} \quad (1)$$

där  $\alpha_{c_p}$  erhålls ur :43.

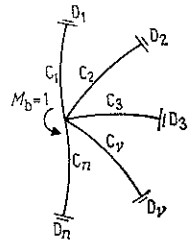


Fig :44 b

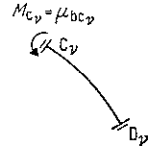


Fig :44 c

**:45 Primärmoment**

Med en ramdels AB primärmoment  $M'_a$  och  $M'_b$  förstås de inspänningsmoment, som av en direkt på balken verkande last erhålls i ändpunkterna A resp B, om dessa därvid har en elastisk inspänning, som bestäms av de verkliga förhållandena i konstruktionen.

Med moment- och lastriktningar enligt fig :45 a gäller för primärmomenten  $M'_a$  och  $M'_b$  de generella uttrycken

$$\left. \begin{aligned} M'_a &= -[m_a/(1 - m_a m_b)] (\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 - m_b \Theta_b^0/\beta_{ab}^0) \\ M'_b &= [m_b/(1 - m_a m_b)] (\Theta_b^0/\beta_{ab}^0 - m_a \Theta_a^0/\beta_{ab}^0) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

i vilka  $\beta_{ab}^0$  betecknar genom ekv :32(1) definierad balkkonstant,  $\Theta_a^0$  och  $\Theta_b^0$  de i avsnitt :32 B beskrivna lastkonstanterna samt  $m_a$  och  $m_b$  de i avsnitt :43 behandlade momentöverföringstalen.

För balkar med symmetrisk inspänning och symmetrisk last ( $m_a = m_b = m$ ,  $\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = \Theta^0/\beta_{ab}^0$ ) blir

$$M'_a = -M'_b = -[m/(1 + m)] (\Theta^0/\beta_{ab}^0) \quad (1a)$$

Vid ändfack (änden A fritt upplagd,  $m_a = 0$ ) blir

$$M'_b = m_b \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 \quad (1b)$$

Speciellt för balk med konstant sektion gäller

$$\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = w_a; \quad \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = w_b$$

$$M'_a = -[m_a/(1 - m_a m_b)] (w_a - m_b w_b); \quad M'_b = [m_b/(1 - m_a m_b)] (w_b - m_a w_a) \quad (1c)$$

där  $w_a$  och  $w_b$  erhålls ur tabeili 1: 38.

För balk- eller ramdelar med konstant sektion erhålls vid jämnt fördelad last och vid triangulär last konstanter för beräkning av primärmoment ur diagrammen i fig :45b upp gjorda av Bjuggren [15a] ( $m$ -talen förutsätts kända).

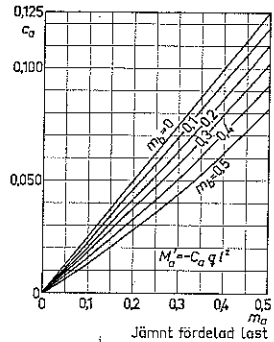
Vid jämnt fördelad last är för en balk a-b med konstant tröghetsmoment eller med symmetriska voter

$$M'_a = -c_a q l^2$$

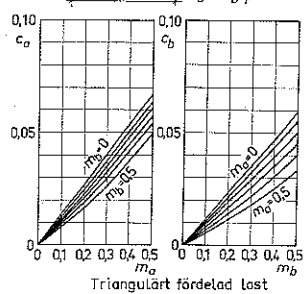
där  $c_a$  fås ur det övre diagrammets kurvschara.

$M'_b$  fås analogt, om  $m_a$  utbyts mot  $m_b$  och  $m_b$  mot  $m_a$ , när  $c$ -värdet uppsöks i diagrammet.

Vid triangulärt fördelad last gäller för balk med konstant tröghetsmoment de nedre diagrammen.



Jämnt fördelad last



Triangulärt fördelad last

Fig :45b

För de till en ren parallellförskjutning  $\delta$  av en ramdeis båda upplag hörande primärmomenten (fig :45c), vilka har aktualitet vid momentberäkning av rambärverk med *förskjutbara knutpunkter*, övergår ekv (1) i sambanden

$$M'_a = (\delta/L\beta_{ab}^0) [m_a(1+m_b)/(1-m_a m_b)]$$

$$M'_b = (\delta/L\beta_{ab}^0) [m_b(1+m_a)/(1-m_a m_b)]$$
(2)

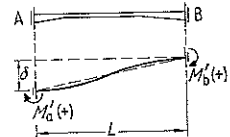


Fig :45c

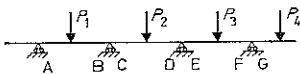
**:46 Överförda och fördelade moment**

I en balkände uppträdande primärmoment  $M'$  fördelas och överförs till övriga ramdelsändar med hjälp av fördelningstalen  $\mu$  och momentöverföringstalen  $m$ . I balkar och ramar, där *endast två ramdelar inkommer i varje knutpunkt* (fig :43e och f), fördelas hela primärmomentet  $M'_b$  i en ramdelsände (B i fig :43e och f) till angränsande ände (C) i intilliggande ramdel (CD). Det fördelade momentet  $M'_c = -M'_b$  överförs till intilliggande ramdels (CD) andra ände (D). Det härvid överförda momentet  $M'_d$  blir  $M'_d = -m_d M'_c$ .

Det överförda momentet  $M'_d$  fördelas och överförs på motsvarande sätt vidare till övriga ramdelsändar.

Om *fler än två ramdelar inkommer i en knutpunkt* fördelas primärmomentet ( $M'_d$ ) i en ramdels ände (D i fig :43 g) till övriga i samma knutpunkt anslutande ramdelars ändar medelst  $\mu$ -talen ( $M'_e = -\mu_{de} M'_d$ ;  $M'_f = -\mu_{df} M'_d$ ). De fördelade momenten överförs på sätt enligt ovan, varpå dessa överförda moment i sin tur fördelas och överförs till övriga ramdelsändar (jfr :47).

För ökad överskådlighet kan det ofta vara lämpligt, att beräkningen av överförda och fördelade moment samt resulterande stödmoment genomförs i tabell, vilket exemplifierande belyses i fig :46 för kontinuerlig balk.



Last på	$M_a$	$M_b$	$M_c$	$M_d$	$M_e$	$M_f$	..
AB	$M'_a$	$M'_b$	$-M'_b$	$-m_d M'_b$	$m_d M'_b$	$m_d m_f M'_b$	..
CD	$-m_a M'_c$	$-M'_c$	$M'_c$	$M'_d$	$-M'_d$	$-m_f M'_d$	..
EF	$m_a m_c M'_e$	$m_c M'_e$	$-m_c M'_e$	$-M'_e$	$M'_e$	$M'_f$	..
.	.	.	.	.	.	.	..
$\Sigma M$	...	...	...	...	...	...	...

Fig :46

Last på fack AB ger de i tabellen inramade primärmomenten  $M'_a$  och  $M'_b$ , last på fack CD analogt de inramade primärmomenten  $M'_c$  och  $M'_d$  etc. Momentöverföring sker med bibehållet tecken och momentfördelning med teckenväxling (jfr :41). De resulterande stödmomenten,  $\Sigma M$ , erhålls för varje stöd genom addition — med beaktande av tecken — av primära, fördelade och överförda moment. Vid kända stödmoment kan sedan tillhörande momentdiagram beräknas ur jämviktsekvationer.

Jfr 162:52

**:47 Beräkningsexempel****Exempel 1. Kontinuerlig balk**

Beräkna för den i fig :47a visade kontinuerliga balken stödreaktionen i H för olika lägen av punktkraft  $P$  på fack AB. Balken antas ha inom varje fack konstant sektion med tröghetsmoment  $I_0$  för facken AB, CD och GH samt tröghetsmoment  $2I_0$  för fack EF.

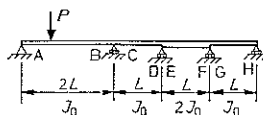


Fig :47a

**1 Balkkonstanter (jfr :32 A)**

$$\text{Fack AB: } \alpha_a^0 = \alpha_b^0 = 2L/3EI_0 = 0,667L/EI_0; \beta_{ab}^0 = 2L/6EI_0 = 0,333L/EI_0$$

$$\text{Fack CD: } \alpha_c^0 = \alpha_d^0 = L/3EI_0 = 0,333L/EI_0; \beta_{cd}^0 = L/6EI_0 = 0,1667L/EI_0$$

$$\text{Fack EF: } \alpha_e^0 = \alpha_f^0 = L/3E \cdot 2I_0 = 0,1667L/EI_0; \beta_{ef}^0 = L/6E \cdot 2I_0 = 0,0833L/EI_0$$

$$\text{Fack GH: } \alpha_g^0 = \alpha_h^0 = \alpha_c^0 = 0,333L/EI_0; \beta_{gh}^0 = \beta_{cd}^0 = 0,1667L/EI_0$$

**2 Momentöverföringstal  $m$  (jfr :43 D)**

I det valda exemplet har endast överföring av moment från vänster till höger aktualitet. De härtill hörande  $m$ -talen beräknas från höger till vänster.

$$m_h = 0, \text{ då upplaget H är utformat som led.}$$

$$m_f = \beta_{ef}^0 / (\alpha_f^0 + \gamma_f); \gamma_f = \alpha_g = \alpha_g^0; m_f = 0,1667$$

$$m_d = \beta_{cd}^0 / (\alpha_d^0 + \gamma_d); \gamma_d = \alpha_e = \alpha_e^0 - m_f \beta_{ef}^0 = 0,1528L/EI_0;$$

$$m_d = 0,343$$

$$m_b = \beta_{ab}^0 / (\alpha_b^0 + \gamma_b); \gamma_b = \alpha_c = \alpha_c^0 - m_d \beta_{cd}^0 = 0,276L/EI_0;$$

$$m_b = 0,353$$

$$m_a = 0, \text{ då upplaget A är utformat som led.}$$

**3 Lastkonstanter (jfr :32 B)**

De för primärmomentens beräkning erforderliga kvoterna  $\Theta_a^0/\beta_{ab}^0$  och  $\Theta_b^0/\beta_{ab}^0$  erhålls direkt ur tabell 1:38.

a  $P$  i vänstra 1/4-punkten av fack AB

$$\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = (21/32)PL = 0,656PL \quad \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = (15/32)PL = 0,469PL$$

b  $P$  i mittpunkten av fack AB

$$\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = (3/4)PL = 0,750PL$$

c  $P$  i högra 1/4-punkten av fack AB

$$\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = 0,469PL; \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = 0,656PL$$

**4 Primärmoment  $M'$  (jfr :45)**

Med  $m$ -tal och lastkonstanter enligt ovan ger ekv :45(1) följande primärmoment  $M'$ .

a  $P$  i vänstra 1/4-punkten av fack AB

$$M'_a = 0, \text{ då } m_a = 0 \quad M'_b = m_b \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = 0,353 \cdot 0,469PL = 0,1656PL$$

b  $P$  i mittpunkten av fack AB

$$M'_a = 0; M'_b = 0,353 \cdot 0,750PL = 0,265PL$$

c  $P$  i högra 1/4-punkten av fack AB

$$M'_a = 0; M'_b = 0,353 \cdot 0,656PL = 0,232PL$$

5 Momentöverföring och momentfördelning (jfr :46)

Lastfall	$M_b$	$M_c$	$M_d$	$M_e$	$M_f$	$M_g$	Mult
a	0,1656	-0,1656	-0,0568	0,0568	0,00947	-0,00947	PL
b	0,265	-0,265	-0,0909	0,0909	0,01515	-0,01515	PL
c	0,232	-0,232	-0,0796	0,0796	0,01327	-0,01327	PL

6 Stödreaktion i H

Vid känt momenttillstånd beräknas stödreaktionen i H ( $R_h$ ) enligt fig :47b ur sambandet

$$R_h = (1/L) M_g$$

a P i vänstra 1/4-punkten av fack AB  $R_h = -0,00947P$  (↓)

b P i mittpunkten av fack AB  $R_h = -0,01515P$  (↓)

c P i högra 1/4-punkten av fack AB  $R_h = -0,01327P$  (↓)

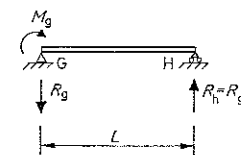


Fig :47b

Exempel 2. Ram i en våning och ett fack med knutpunktsförskjutning

Beräkna böjmomentdiagrammet för ett enligt fig :47c utformat och belastat rambärverk med för varje ramdel konstant sektion, svarande mot tröghetsmoment  $2I_0$ ,  $I_0$  och  $3I_0$  för ramdel AB, CD resp EF.

A Beräkning under förutsättning av fixa knutpunkter (jfr :41)

1 Balkkonstanter (jfr :32A)

Del AB:  $\alpha_a^0 = \alpha_b^0 = (4/7) L / 3E \cdot 2I_0 = 0,0952L / EI_0$ ;

$$\beta_{ab}^0 = (4/7) L / 6E \cdot 2I_0 = 0,0476L / EI_0$$

Del CD:  $\alpha_c^0 = \alpha_d^0 = L / 3EI_0 = 0,3333L / EI_0$ ;

$$\beta_{cd}^0 = L / 6EI_0 = 0,1667L / EI_0$$

Del EF:  $\alpha_e^0 = \alpha_f^0 = L / 3E \cdot 3I_0 = 0,1111L / EI_0$ ;

$$\beta_{ef}^0 = L / 6E \cdot 3I_0 = 0,0556L / EI_0$$

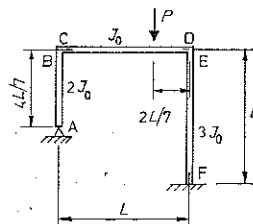


Fig :47c

2 Momentöverföringstal m (jfr :43 D)

a m-talen för överföring av moment medsols beräknas i ordning motsols.

$$m_f = \beta_{ef}^0 / (\alpha_f^0 + \gamma_f); \quad \gamma_f = 0 \text{ (fast inspänd ramdelsände);}$$

$$m_f = 0,500$$

$$m_d = \beta_{cd}^0 / (\alpha_d^0 + \gamma_d); \quad \gamma_d = \alpha_e = \alpha_e^0 - m_c \beta_{ef}^0 = 0,0833L / EI_0,$$

$$m_d = 0,400$$

$$m_b = \beta_{ab}^0 / (\alpha_b^0 + \gamma_b); \quad \gamma_b = \alpha_c = \alpha_c^0 - m_d \beta_{cd}^0 = 0,2666L / EI_0;$$

$$m_b = 0,132$$

b m-talen för överföring av moment motsols beräknas analogt i ordning medsols.

$$m_a = 0, \text{ då upplaget A är utformat som led}$$

$$m_c = \beta_{cd}^0 / (\alpha_c^0 + \gamma_c); \quad \gamma_c = \alpha_b = \alpha_b^0; \quad m_c = 0,389$$

$$m_e = \beta_{ef}^0 / (\alpha_e^0 + \gamma_e); \quad \gamma_e = \alpha_d = \alpha_d^0 - m_c \beta_{cd}^0 = 0,2685L / EI_0; \quad m_e = 0,146$$

3 Lastkonstanter (jfr :32B)

Ur tabell 1: 38 beräknas

$$\Theta_c^0/\beta_{cd}^0 = (90/343) PL = 0,262 PL; \quad \Theta_d^0/\beta_{cd}^0 = (120/343) PL = 0,350 PL$$

4 Primärmoment  $M'$  (jfr :45)

Ur ekv :45 (1) erhålls för primärmomenten  $M'_c$  och  $M'_d$  uttrycken

$$M'_c = -[0,389/(1-0,389 \cdot 0,400)](0,262 - 0,400 \cdot 0,350) PL = -0,0562 PL$$

$$M'_d = [0,400/(1-0,389 \cdot 0,400)](0,350 - 0,389 \cdot 0,262) PL = 0,1175 PL$$

5 Momentöverföring och momentfördelning (jfr :46)

$$M_b^f = -M'_c = 0,0562 PL; \quad M_e^f = -M'_d = -0,1175 PL$$

$$M_f^f = m_f M_e^f = -0,500 \cdot 0,1175 PL = -0,0588 PL$$

B Korrektion för knutpunktsförskjutning (jfr :41 samt :33 exempel 2B)

1 Fasthållningskraft  $Z$

Mot det under förutsättning av fixa knutpunkter enligt ovan beräknade momenttillståndet svarar i upplagspunkterna A och F de horisontella upplagsreaktionskomponenterna  $H_a$  och  $H_f$ , för vilka enligt fig :47d beräknas värdena

$$H_a = M_b^f / (4/7) L = 0,0984 P (\rightarrow)$$

$$H_f = (1/L) (M_e^f + M_f^f) = -0,1763 P (\leftarrow)$$

I en för förhindrande av knutpunktsförskjutning erforderlig, på nivån CD applicerad fasthållningsstång ger dessa upplagsreaktioner en tillhörande fasthållningskraft  $Z$ , för vilken en horisontell projektionsekvation ger (fig :47d)

$$Z = -H_a - H_f = 0,0779 P (\rightarrow)$$

För att det under A beräknade rambärverket med fixa knutpunkter skall kunna överföras till reellt rambärverk enligt fig :47c, måste fasthållningsstången avlägsnas. Effekten härav blir en horisontell förskjutning åt vänster av rammivån CD, svarande mot en last av en åt vänster riktad horisontalkraft  $H = Z = 0,0779 P$  enligt fig :47e.

2 Primärmoment  $M'$  från horisontalförskjutning  $\delta = 1$  (jfr :45)

För till  $\delta = 1$  enligt fig :47e hörande primärmoment beräknas ur ekv :45 (2) värdena

$$M'_{b\delta=1} = m_b \delta / (4L \beta_{ab}^0 / 7) = 0,132 \cdot 7 \cdot EI_0 / 4L \cdot 0,0476 L = 4,85 EI_0 / L^3$$

$$M'_{e\delta=1} = m_e (1 + m_f) \delta / L \beta_{ef}^0 (1 - m_e m_f) = 0,146 \cdot 1,500 \cdot EI_0 / L \cdot 0,0556 L$$

$$(1 - 0,146 \cdot 0,500) = 4,25 EI_0 / L^3$$

$$M'_{f\delta=1} = m_f (1 + m_e) \delta / L \beta_{ef}^0 (1 - m_e m_f) = 0,500 \cdot 1,146 \cdot EI_0 / L \cdot 0,0556 L$$

$$(1 - 0,146 \cdot 0,500) = 11,13 EI_0 / L^3$$

3 Momentöverföring och momentfördelning (jfr :46)

	$M_b$	$M_c$	$M_d$	$M_e$	$M_f$	Mult
Av $M'_{b\delta=1}$	4,85	-4,85	-1,94	1,94	0,97	$EI_0/L^3$
Av $M'_{e\delta=1}$	1,65	-1,65	-4,25	4,25	—	$EI_0/L^3$
Av $M'_{f\delta=1}$	—	—	—	—	11,13	$EI_0/L^3$
Res $M\delta_{=1}$	6,50	-6,50	-6,19	6,19	12,10	$EI_0/L^3$

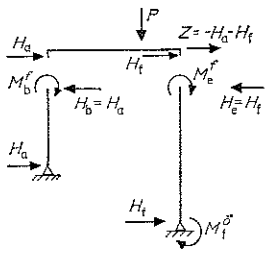
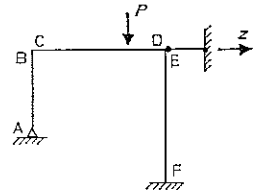


Fig :47d

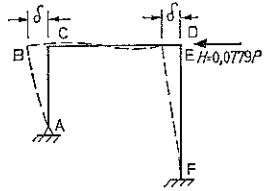


Fig :47e

4 Korrektionsmoment från knutpunktsförskjutning  $M$

Genom summation av primärmoment samt överförda och fördelade moment erhålls de mot horisontalförskjutningen  $\delta=1$  svarande, resulterande böjmomenten, redovisade i den nedersta raden i tabellen på föregående sida. För de härtill hörande horisontella upplagsreaktionerna  $H_{a\delta=1}$  och  $H_{f\delta=1}$  i upplagen A och F beräknas, jfr fig :47 d och e

$$H_{a\delta=1} = M_{b\delta=1}/(4L/7) = 11,38EI_0/L^3 (\rightarrow)$$

$$H_{f\delta=1} = (1/L)(M_{e\delta=1} + M_{f\delta=1}) = 18,29EI_0/L^3 (\rightarrow)$$

med den resulterande horisontalkraften

$$\Sigma H_{\delta=1} = 29,7EI_0/L^3$$

Den verkliga horisontalförskjutningen av rambärverksnivån CD erhålls ur villkoret

$$\Sigma H_{\delta=1} = H = 0,0779P$$

vilket ger

$$\delta = 2,62 \cdot 10^{-3} PL^3 / EI_0$$

Korrektionsmomenten  $M^\delta$  från den verkliga knutpunktsförskjutningen  $\delta$  beräknas därpå genom proportionering  $-M^\delta = \delta M_{\delta=1}$  - till

$$M_b^\delta = 0,0170PL; M_c^\delta = -0,0170PL; M_d^\delta = -0,0162PL;$$

$$M_e^\delta = 0,0162PL; M_f^\delta = 0,0317PL$$

5 Slutgiltiga moment  $M^{mk}$

De verkliga momenten  $M^{mk}$  för rambärverket enligt fig :47c med fria knutpunktsförskjutningsmöjligheter erhålls genom direkt överlagring av momenten  $M^{wk}$ , beräknade i avsnitten A4 och A5 under förutsättning av oförskjutbara knutpunkter, och korrektionsmomenten  $M^\delta$  från knutpunktsförskjutning, dvs  $M^{mk} = M^{wk} + M^\delta$ . En sådan summation ger

$$M_b^{mk} = 0,0562PL + 0,0170PL = 0,0732PL = -M_c^{mk}$$

$$M_d^{mk} = 0,1175PL - 0,0162PL = 0,1013PL = -M_e^{mk}$$

$$M_f^{mk} = -0,0588PL + 0,0317PL = -0,0271PL$$

Det tillhörande momentdiagrammet redovisas i fig :47f, uppritat enligt principen, att momenten avsatts på den ramdelssida, som är utsatt för böjdragspänning.

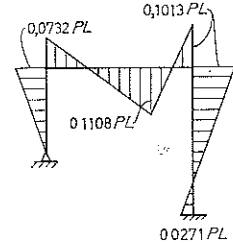


Fig :47f

Exempel 3. Ram i en våning och två fack med knutpunktsförskjutning

Beräkna böjmomentdiagrammet för ett enligt fig :47 g utformat och belastat rambärverk med fixlager i upplagspunkterna A och H och horisontellt rulllager i upplagspunkten F. Ramdelarna CD och EF är utformade med parabelvoter.

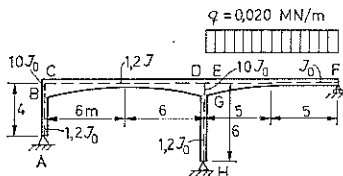


Fig :47g

A Beräkning under förutsättning av fixa knutpunkter (jfr :41)

Förutsättningen kan realiseras genom utbyte av rullagret i F mot fixlager.

1 Balkkonstanter (jfr :32 A)

$$\text{Del AB: } \alpha_a^0 = \alpha_b^0 = 4/3E \cdot 1,2I_0 = 1,111/EI_0; \quad \beta_{ab}^0 = 4/6E \cdot 1,2I_0 = 0,556/EI_0$$

$$\text{Del CD: } \lambda = 0,50; \quad n = 1,2I_0/10I_0 = 0,12; \quad \alpha_c^0 = \alpha_d^0 = 0,476 \cdot 12/3E \cdot 1,2I_0 = 1,587/EI_0;$$

$$\beta_{cd}^0 = 0,665 \cdot 12/6E \cdot 1,2I_0 = 1,108/EI_0$$

$$\text{Del EF: } \lambda = 0,50; \quad n = I_0/10I_0 = 0,10; \quad \alpha_e^0 = 0,475 \cdot 10/3EI_0 = 1,583/EI_0;$$

$$\alpha_f^0 = 0,975 \cdot 10/3EI_0 = 3,25/EI_0; \quad \beta_{ef}^0 = 0,820 \cdot 10/6EI_0 = 1,367/EI_0$$

$$\text{Del GH: } \alpha_g^0 = \alpha_h^0 = 6/3E \cdot 1,2I_0 = 1,667/EI_0; \quad \beta_{gh}^0 = 6/6E \cdot 1,2I_0 = 0,833/EI_0$$

2 Momentöverföringstal  $m$  (jfr :43 D)

a  $m$ -talen för överföring av moment medsols beräknas i ordning motsols.

$m_t = m_n = 0$ , då upplagen F och H är utformade som leder

$$m_d = \beta_{cd}^0 / (\alpha_d^0 + \gamma_d); \quad \gamma_d = 1 / (1/\alpha_e + 1/\alpha_g) = 1 / (1/\alpha_e^0 + 1/\alpha_g^0)$$

$$= 0,812/EI_0; \quad m_d = 0,462$$

$$m_b = \beta_{ab}^0 / (\alpha_b^0 + \gamma_b); \quad \gamma_b = \alpha_c = \alpha_c^0 - m_d \beta_{cd}^0 = 1,075/EI_0; \quad m_b = 0,254$$

b  $m$ -talen för överföring av moment motsols beräknas i ordning medsols.

$m_a = 0$ , då upplaget A är utformat som led

$$m_c = \beta_{cd}^0 / (\alpha_c^0 + \gamma_c); \quad \gamma_c = \alpha_b = \alpha_b^0 = 1,111/EI_0; \quad m_c = 0,410$$

$$m_e = \beta_{ef}^0 / (\alpha_e^0 + \gamma_e); \quad \gamma_e = 1 / (1/\alpha_d + 1/\alpha_g) = 1 / [1/(\alpha_d^0 - m_c \beta_{cd}^0) + 1/\alpha_g^0] = 0,674/EI_0; \quad m_e = 0,607$$

$$m_g = \beta_{gh}^0 / (\alpha_g^0 + \gamma_g); \quad \gamma_g = 1 / (1/\alpha_d + 1/\alpha_e) = 1 / [1/(\alpha_d^0 - m_c \beta_{cd}^0) + 1/\alpha_e^0] = 0,660/EI_0; \quad m_g = 0,358$$

3 Fördelningstal  $\mu$  (jfr :44)

a Ett moment = 1, som angriper i D, fördelas till E och G enligt

$$\mu_{de} = (1/\alpha_e) / (1/\alpha_e + 1/\alpha_g) = \alpha_g / (\alpha_e + \alpha_g) = \alpha_g^0 / (\alpha_e^0 + \alpha_g^0) = 0,513; \quad \mu_{dg} = 1 - \mu_{de} = 0,487$$

b Ett moment = 1, som angriper i E, fördelas till D och G enligt

$$\mu_{ed} = (1/\alpha_d) / (1/\alpha_d + 1/\alpha_g) = \alpha_g / (\alpha_d + \alpha_g) = \alpha_g^0 / (\alpha_d^0 - m_c \beta_{cd}^0 + \alpha_g^0) = 0,596; \quad \mu_{eg} = 1 - \mu_{ed} = 0,404$$

c Ett moment = 1, som angriper i G, fördelas till D och E enligt

$$\mu_{gd} = (1/\alpha_d) / (1/\alpha_d + 1/\alpha_e) = \alpha_e / (\alpha_d + \alpha_e) = \alpha_e^0 / (\alpha_d^0 - m_c \beta_{cd}^0 + \alpha_e^0) = 0,583; \quad \mu_{ge} = 1 - \mu_{gd} = 0,417$$

4 Lastkonstanter (jfr :32 B)

Med koefficientvärden enligt tabell 1:45 beräknas för belastat fack EF ( $\lambda = 0,50; n = 0,10$ )

$$\Theta_e^0 / \beta_{ef}^0 = 0,878 \cdot 0,020 \cdot 10^2 / 4 = 0,439 \text{ MNm}$$

$$\Theta_f^0 / \beta_{ef}^0 = 1,122 \cdot 0,020 \cdot 10^2 / 4 = 0,561 \text{ MNm}$$

5 Primärmoment samt överförda och fördelade moment

För primärmomenten  $M'_e$  och  $M'_f$  beräknas (jfr :45)

$$M'_e = -m_e \Theta_e^0 / \beta_{ef}^0 = -0,607 \cdot 0,439 = -0,267 \text{ MNm}$$

$$M'_f = 0$$



$M'_e$  ger upphov till de överförda och fördelade momenten

$$M'_d = -\mu_{ed} M'_e = +0,596 \cdot 0,267 = 0,159 \text{ MNm}$$

$$M'_g = -\mu_{eg} M'_e = +0,404 \cdot 0,267 = 0,108 \text{ MNm}$$

$$M'_c = m_c M'_d = 0,410 \cdot 0,159 = 0,0652 \text{ MNm}$$

$$M'_b = -M'_c = -0,0652 \text{ MNm}$$

Ovan beräknade primärmoment  $M'$ , fördelade moment  $M^f$  och överförda moment  $M^b$  utgör också rambärverkets slutgiltiga moment  $M^{uk}$  vid fixa knutpunkter, dvs vid rullagret i upplagspunkten F ersatt med ett fixlager.

*B Korrektion för knutpunktsförskjutning (jfr :41 samt :33 exempel 2B)*

1 *Fasthållningskraft Z i upplagspunkt F*

Mot de ovan under förutsättning av fixa knutpunkter beräknade böjmomenten svarar i upplagspunkterna A och H de horisontella reaktionskomponenterna

$$H_a = M'_b / 4 = -0,0652 / 4 = -0,0163 \text{ MN } (\leftarrow)$$

$$H_h = M'_g / 6 = 0,108 / 6 = 0,0180 \text{ MN } (\rightarrow)$$

med den tillhörande fasthållningskraften Z i det för beräkningen under A förutsatta fixlagret i upplagspunkten F

$$Z = H_a + H_h = -0,0163 + 0,0180 = 0,0017 \text{ MN } (\leftarrow)$$

En övergång till reellt rambärverk enligt fig :47g innebär ett utbyte av förutsatt fixlager i F mot horisontellt rullager. Effekten härav blir en horisontell förskjutning  $\delta$  åt höger av ramnivån CDEF, svarande mot en last i punkt F av en åt höger riktad horisontalkraft  $H = Z = 0,0017 \text{ MN}$ .

2 *Primärmoment  $M'$  från horisontalförskjutning  $\delta = 1$  (jfr :45)*

För till  $\delta = 1$  m hörande primärmoment beräknas ur ekv :45(2) värdena

$$M'_{a\delta=1} = 0$$

$$M'_{b\delta=1} = -m_b \delta / L\beta_{ab}^0 = -0,254EI_0 / 4 \cdot 0,556 = -0,1142EI_0 \text{ MNm}$$

$$M'_{g\delta=1} = -m_g \delta / L\beta_{gh}^0 = -0,358EI_0 / 6 \cdot 0,833 = -0,0716EI_0 \text{ MNm}$$

$$M'_{h\delta=1} = 0$$

3 *Momentöverföring och momentfördelning (jfr :46)*

	$M_b$	$M_c$	$M_d$	$M_e$	$M_g$	Mult
Av $M'_{b\delta=1}$	-0,1142	0,1142	0,0527	-0,0271	-0,0256	$EI_0$
Av $M'_{g\delta=1}$	-0,0171	0,0171	0,0418	0,0298	-0,0716	$EI_0$
Res $M_{\delta=1}$	-0,1313	0,1313	0,0945	0,0027	-0,0972	$EI_0$

4 *Korrektionsmoment från knutpunktsförskjutning  $M^\delta$*

Summation av primärmoment samt överförda och fördelade moment ger de mot  $\delta = 1$  m svarande, resulterande böjmomenten  $M_{\delta=1}$ , redovisade i den nedersta raden i tabellen ovan. För tillhörande horisontella upplagsreak-

tioner  $H_{a\delta=1}$  och  $H_{b\delta=1}$  i upplagen A och H beräknas

$$H_{a\delta=1} = M_{b\delta=1} / L = -0,1313EI_0 / 4 = -0,0328EI_0 \text{ MN } (\leftarrow)$$

$$H_{b\delta=1} = M_{g\delta=1} / L = -0,0972EI_0 / 6 = -0,0162EI_0 \text{ MN } (\leftarrow)$$

med den resulterande horisontalkraften

$$\Sigma H_{\delta=1} = -0,0490EI_0 \text{ MN } (\leftarrow)$$

Den verkliga horisontalförskjutningen  $\delta$  av ramnivån CDEF erhålls ur villkoret

$$\delta \Sigma H_{\delta=1} = -H = -0,0017 \quad \text{vilket ger}$$

$$\delta = 0,0017 / 0,0490EI_0 = 0,0347 / EI_0 \text{ m}$$

Korrektionsmomenten  $M^\delta$  från den verkliga knutpunktsförskjutningen  $\delta$  beräknas därpå genom proportionering  $-M^\delta = \delta M_{\delta=1}$  - till

$$M_b^\delta = -0,0046 \text{ MNm}; M_c^\delta = 0,0046 \text{ MNm}; M_d^\delta = 0,0033 \text{ MNm};$$

$$M_e^\delta = 0,0001 \text{ MNm}; M_g^\delta = -0,0034 \text{ MNm}$$

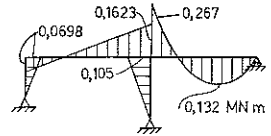


Fig :47h

5 Slutgiltiga moment  $M^{mk}$

Direkt överlagring av momenten  $M^{uk}$  enligt avsnitt A5 och korrektionsmomenten  $M^\delta$  enligt avsnitt B4 ovan ger de verkliga momenten  $M^{mk}$  för reellt ramfackverk med horisontellt rullager i upplagspunkten F, dvs

$$M^{mk} = M^{uk} + M^\delta$$

Härur erhålls

$$M_b^{mk} = -0,0652 - 0,0046 = -0,0698 \text{ MNm} = -M_c^{mk}$$

$$M_d^{mk} = 0,1590 + 0,0033 = 0,1623 \text{ MNm}$$

$$M_e^{mk} = -0,267 + 0 = -0,267 \text{ MNm}$$

$$M_g^{mk} = 0,1080 - 0,0034 = 0,1046 \text{ MNm}$$

Det tillhörande momentdiagrammet redovisas i fig :47h, uppritat med momenten avsatta på den ramdelssida, som är utsatt för böjdragspänning.

Exempel 4. Flervåningsram med knutpunktsförskjutningar

Beräkna momentdiagrammet för den i fig :47i visade, vindbelastade 3-våningsramen med genomgående votlösa ramdelar.

A Beräkning under förutsättning av fixa knutpunkter (jfr :41)

För att en osymmetrisk last utan uppkomst av knutpunktsförskjutning skall kunna upptas av den i fig :47i visade ramen fordras, att denna i horisontalernas nivåer kompletteras med horisontella fasthållningsstänger eller vertikala glidlager enligt fig :47j. I dessa uppträder härvid fasthållningskrafter  $Z_1$ ,  $Z_2$  och  $Z_3$ , vilka låter sig beräknas med hjälp av jämviktsekvationer sedan ramens momenttillstånd bestämts.

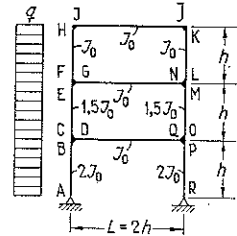


Fig :47i

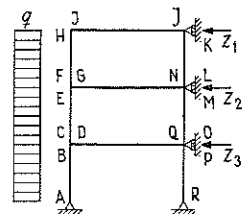


Fig :47j

1 Balkkonstanter  $\alpha^0$  och  $\beta^0$  (jfr :32A)

$$\alpha_a^0 = \alpha_b^0 = \alpha_p^0 = \alpha_r^0 = h / (3E2I_0) = 0,1667k; \beta_{ab}^0 = \beta_{pr}^0 = h / (6E2I_0) = 0,0833k$$

$$\alpha_c^0 = \alpha_e^0 = \alpha_m^0 = \alpha_o^0 = 0,2222k; \beta_{ce}^0 = \beta_{mo}^0 = 0,1111k$$

$$\alpha_f^0 = \alpha_h^0 = \alpha_k^0 = \alpha_l^0 = 0,3333k; \beta_{fh}^0 = \beta_{kl}^0 = 0,1667k$$

$$\alpha_d^0 = \alpha_a^0 = \alpha_g^0 = \alpha_n^0 = \alpha_i^0 = \alpha_j^0 = 0,6667k; \beta_{dq}^0 = \beta_{gn}^0 = \beta_{ij}^0 = 0,3333k$$

varvid  $k = h / EI_0$

2 *m*-tal (jfr :43 D)

Aktuell ramkonstruktion innehåller 2 slutna ramceller och borde därför rätteligen fordra 4 på förhand valda *m*-värden, vilka emellertid i föreliggande fall genom utnyttjande av konstruktionens symmetriegenskaper kan begränsas till 2.

Som utgångsvärden väljs på försök  $m_e = m_f = 0,3$ . Häremot svarar i övriga ramdelsändar *m*-tal, för vilka enligt :43 beräknas

a via  $m_e$ :

$$m_d = \beta_{dq}^0 / (\alpha_d^0 + \gamma_d); \gamma_d = 1 / (1/\alpha_b + 1/\alpha_c); \alpha_b = \alpha_b^0 = 0,1667k;$$

$$\alpha_c = \alpha_c^0 - m_e \beta_{ce}^0 = 0,1889k; \gamma_d = 0,0885k; m_d = 0,441 = m_q$$

$$m_o = \beta_{mo}^0 / (\alpha_o^0 + \gamma_o); \gamma_o = 1 / (1/\alpha_p + 1/\alpha_q); \alpha_p = \alpha_p^0 = 0,1667k;$$

$$\alpha_q = \alpha_q^0 - m_d \beta_{dq}^0 = 0,5197k; \gamma_o = 0,1262k; m_o = 0,319 = m_c$$

b via  $m_f$ :

$$m_i = \beta_{ij}^0 / (\alpha_i^0 + \gamma_i); \gamma_i = \alpha_h = \alpha_h^0 - m_f \beta_{fh}^0 = 0,2833k; m_i = 0,351 = m_j$$

$$m_k = \beta_{kl}^0 / (\alpha_k^0 + \gamma_k); \gamma_k = \alpha_j = \alpha_j^0 - m_i \beta_{ij}^0 = 0,5497k; m_k = 0,189 = m_n$$

c via  $m_k$  och  $m_o$ :

$$m_n = \beta_{gn}^0 / (\alpha_n^0 + \gamma_n); \gamma_n = 1 / (1/\alpha_1 + 1/\alpha_m); \alpha_1 = \alpha_1^0 - m_k \beta_{kl}^0 = 0,3018k;$$

$$\alpha_m = \alpha_m^0 - m_o \beta_{mo}^0 = 1868k; \gamma_n = 0,1154k; m_n = 0,426 = m_g$$

$$m_e = \beta_{ce}^0 / (\alpha_e^0 + \gamma_e); \gamma_e = 1 / (1/\alpha_i + 1/\alpha_g); \alpha_i = \alpha_i^0 - m_n \beta_{in}^0 =$$

$$= 0,3018k; \alpha_g = \alpha_g^0 - m_n \beta_{gn}^0 = 0,5247k; \gamma_e = 0,1916k;$$

$$m_e = 0,268 = m_m$$

$$m_f = \beta_{fh}^0 / (\alpha_f^0 + \gamma_f); \gamma_f = 1 / (1/\alpha_o + 1/\alpha_g); \alpha_o = \alpha_o^0 - m_e \beta_{ce}^0 = 0,1868k;$$

$$\alpha_g = 0,5247k; \gamma_f = 0,1378k; m_f = 0,354 = m_l$$

Efter en beräkningscykel har följaktligen i ramdelsändarna E och F framkommit i förhållande till startvärdena  $m_e = m_f = 0,3$  förbättrade värden  $m_e = 0,268$  och  $m_f = 0,354$ . Förnyad beräkning med utgångspunkt från dessa förbättrade  $m_e$ - och  $m_f$ -tal ger praktiskt betydelselösa korrekationer av de övriga ovan bestämda *m*-talen, vilka därför direkt kan accepteras som korrekta.

För de i ovanstående kalkyl obehandlade *m*-talen  $m_b$  och  $m_p$  erhålls därpå  $m_b = m_p = 0,271$ .

3  $\mu$ -tal

Enligt :44 beräknas för knutpunkt BCD och OPQ (se fig :47k):

$$\alpha_b = \alpha_b^0 = 0,1667k; \alpha_c = \alpha_c^0 - m_e \beta_{ce}^0 = 0,1924k; \alpha_d = \alpha_d^0 - m_q \beta_{dq}^0 = 0,5197k$$

$$\mu_{bc} = (1/\alpha_c) / (1/\alpha_c + 1/\alpha_d) = 0,730 (= \mu_{pq}); \mu_{bd} = 1 - \mu_{bc} = 0,270 (= \mu_{pq}); \text{ svarar mot } M = 1 \text{ i B (resp P)}$$

$$\mu_{cb} = (1/\alpha_b) / (1/\alpha_b + 1/\alpha_d) = 0,757 (= \mu_{op}); \mu_{cd} = 1 - \mu_{cb} = 0,243 (= \mu_{oq}); \text{ svarar mot } M = 1 \text{ i C (resp O)}$$

$$\mu_{ab} = (1/\alpha_b) / (1/\alpha_b + 1/\alpha_c) = 0,536 (= \mu_{qp}); \mu_{dc} = 1 - \mu_{db} = 0,464 (= \mu_{qo}); \text{ svarar mot } M = 1 \text{ i D (resp Q)}$$

knutpunkt EFG och LMN:

$$\mu_{ef} = 0,635 (= \mu_{ml}); \mu_{eg} = 0,365 (= \mu_{mn}); \text{ svarar mot } M = 1 \text{ i E (resp M)}$$

$$\mu_{fe} = 0,737 (= \mu_{lm}); \mu_{fg} = 0,263 (= \mu_{ln}); \text{ svarar mot } M = 1 \text{ i F (resp L)}$$

$$\mu_{ge} = 0,618 (= \mu_{nm}); \mu_{gf} = 0,382 (= \mu_{nl}); \text{ svarar mot } M = 1 \text{ i G (resp N)}$$

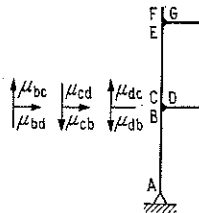


Fig :47k

4 Lastkonstanter  $\Theta^0$

Lastkonstanterna  $\Theta^0$  beräknas enligt :32 B1 vid balkar med konstant tröghetsmoment ur sambandet  $\Theta^0/\beta^0 = w$ , där  $w(w_a$  och  $w_b)$  erhålles ur tabell 1:38

$$\Theta_a^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_b^0/\beta_{ab}^0 = \Theta_c^0/\beta_{ce}^0 = \Theta_e^0/\beta_{ce}^0 = \Theta_f^0/\beta_{fh}^0 = \Theta_h^0/\beta_{fh}^0 = (1/4)qh^2$$

5 Primärmoment  $M'$

För dessa beräknas ur ekv :45 (1 c) genom insättning av  $m$ -talen och av storheterna  $\Theta^0/\beta^0 = w$

$$M'_a = 0; M'_b = 0,271 \cdot (1/4)qh^2 = 0,0678qh^2$$

$$M'_c = - [0,319/(1 - 0,319 \cdot 0,268)] [(1/4)qh^2 - 0,268 \cdot (1/4)qh^2] = - 0,0638qh^2;$$

$$M'_e = 0,0499qh^2; M'_f = - 0,0769qh^2; M'_h = 0,0327qh^2$$

6 Momentöverföring och momentfördelning

Överföringen och fördelningen av primärmomenten sker, om ramen har många knutpunkter, lämpligen i tabellform. I tabellen i fig :471 anges beräknade värden för  $M'$ ,  $M^f$  och  $M^{\bar{f}}$  samt  $M^{uk} = M' + \Sigma(M^f + M^{\bar{f}})$ . Beräkningsgången åskådliggörs av i fig :47m visade exempel på överföring och fördelning av primärmomentet  $M'_b$ .

	Av $M'_b$	Av $M'_c$	Av $M'_e$	Av $M'_f$	Av $M'_h$	$M^{uk}$
B	+0,0678	+0,0483	+0,0001	-0,0137 - 0,0001	-0,0001	+0,1022qh <sup>2</sup>
C	-0,0495	-0,0638	+0,0001	+0,0181 - 0,0001	+0,0001	-0,0951qh <sup>2</sup>
D	-0,0183	+0,0155	-0,0002	-0,0044 + 0,0002	+0,0001	-0,0071qh <sup>2</sup>
E	-0,0133 + 0,0001	-0,0001	+0,0499 - 0,0001	+0,0567 + 0,0001	+0,0003	+0,0935qh <sup>2</sup>
F	+0,0084 + 0,0001		-0,0001	-0,0769 - 0,0001	+0,0002	-0,0999qh <sup>2</sup>
G	+0,0049 - 0,0002	+0,0001	-0,0317 + 0,0001	+0,0202	-0,0005	+0,0064qh <sup>2</sup>
H	+0,0016 - 0,0001		-0,0060 + 0,0002	-0,0002	+0,0327	+0,0282qh <sup>2</sup>
I	-0,0016 + 0,0001		+0,0060 - 0,0002	+0,0002	-0,0327	-0,0282qh <sup>2</sup>
J	-0,0006 + 0,0002	-0,0001	+0,0021 - 0,0006	+0,0006	-0,0116	-0,0099qh <sup>2</sup>
K	+0,0006 - 0,0002	+0,0001	-0,0021 + 0,0006	-0,0006	+0,0116	+0,0099qh <sup>2</sup>
L	+0,0002 - 0,0008	+0,0006	-0,0007 + 0,0030	-0,0001 - 0,0033	+0,0041	+0,0024qh <sup>2</sup>
M	-0,0006					
N	+0,0010 - 0,0013	-0,0009	+0,0048 + 0,0005	+0,0002 - 0,0053	-0,0030	-0,0041qh <sup>2</sup>
O	-0,0001					
P	+0,0021 - 0,0004	+0,0003	-0,0078 + 0,0002	+0,0086 - 0,0001	-0,0011	+0,0017qh <sup>2</sup>
Q	+0,0038 - 0,0004	-0,0032	+0,0015 + 0,0002	+0,0009 - 0,0017	-0,0010	+0,0001qh <sup>2</sup>
R	+0,0043 + 0,0003	-0,0036	-0,0011 - 0,0002	+0,0010 + 0,0013	+0,0008	+0,0028qh <sup>2</sup>
S	-0,0081 + 0,0001	+0,0068	-0,0004	-0,0019 + 0,0004	+0,0002	-0,0029qh <sup>2</sup>

Fig :47 l. Primärmoment, överförda och fördelade moment samt resulterande moment  $M^{uk}$

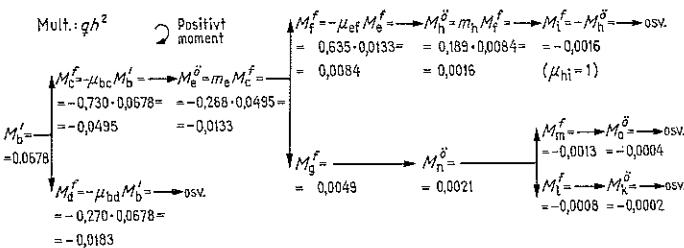


Fig :47 m. Överföring och fördelning av primärmoment  $M'_b$ . Beräkningen fortsätts, till dess att  $M^f$  och  $M^{\bar{f}}$  blir så små, att de kan försummas

Sedan enligt tabellen i fig :471 den fullständiga effekten av varje primärmoment  $M'$  beräknats, erhålls de resulterande, mot ram utan knutpunktsförskjutning svarande momenten  $M^{uk}$  genom en direkt summation för varje ramdelsände av primärmoment och samtliga fördelade och transporterade moment. Dessa resulterande moment finns sammanställda i sista kolumnen i fig :471.

*B Korrektion för knutpunktsförskjutning (jfr även :41 och :33 exempel 2B)*

*1 Fasthållningskrafter*

Vid känt momenttillstånd för fixa knutpunkter ( $M^{uk}$ ) kan de för förhindrande av knutpunktsförskjutning erforderliga fasthållningskrafterna  $Z_1$ ,  $Z_2$  och  $Z_3$  beräknas genom uppskäring av ramen i enkla delar och uppställande av jämviktsekvationer för dessa. Den detaljerade beräkningsgången härvid framgår av fig :47n. Som slutresultat erhålls

$$Z_1 = 0,440qh; Z_2 = 1,054qh; Z_3 = 1,111qh \quad (a)$$

*2 Allmän beräkningsgång*

För att ramen med fixa knutpunkter skall övergå till den ursprungliga i fig :47i visade, måste de i knutpunkterna JK, LMN och OPQ införda vertikala glidlagren avlägsnas. Detta medför enligt fig :47o för horisontalerna IJ, GN och DQ förskjutningar  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  och  $\delta_3$ , svarande mot belastning av horisontalkrafterna  $H_1$ ,  $H_2$  och  $H_3$ , vilka är lika stora som  $Z_1$ ,  $Z_2$  resp  $Z_3$  men motriktade dessa. Effekten av dessa knutpunktsförskjutningar behandlas i följande etapper.

a Beräkning av de böjmoment  $M^{\delta_1=1}$  och horisontella knutpunktsbelastningar  $H^{\delta_1=1}$ , som svarar mot en elementarförskjutning  $\delta_1=1$  enligt fig :47p av enbart horisontalen IJ.

b Beräkning av de böjmoment  $M^{\delta_2=1}$  och horisontella knutpunktsbelastningar  $H^{\delta_2=1}$ , som svarar mot elementarförskjutningar  $\delta_2=1$  enligt fig :47q av horisontalerna IJ och GN.

c Beräkning av de böjmoment  $M^{\delta_3=1}$  och horisontella knutpunktsbelastningar  $H^{\delta_3=1}$ , som svarar mot elementarförskjutningar  $\delta_3=1$  enligt fig :47r av samtliga horisontaler IJ, GN och DQ.

d Beräkning av de verkliga förskjutningarna  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  och  $\delta_3$  ur jämviktsvillkoren

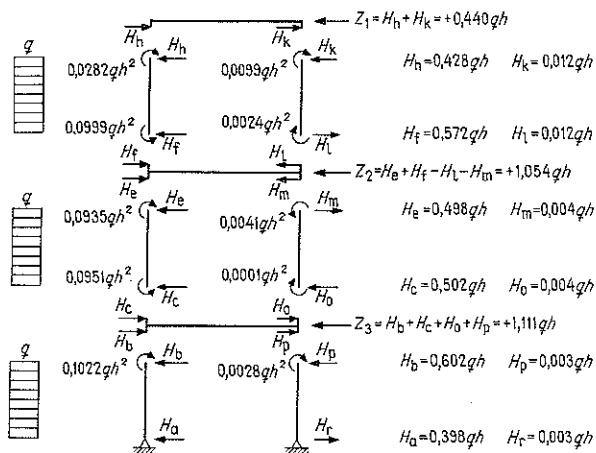


Fig :47n

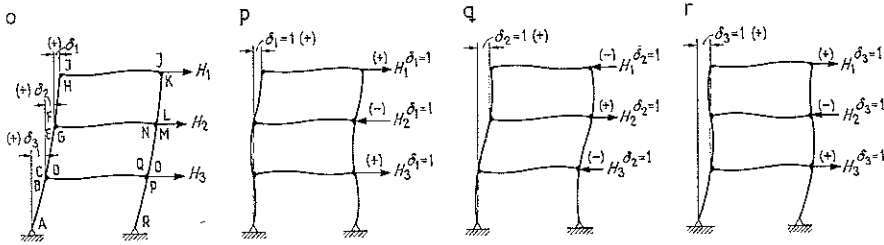


Fig :47 o-r

$$Z_1 = \delta_1 H_1^{\delta_1=1} + \delta_2 H_1^{\delta_2=1} + \delta_3 H_1^{\delta_3=1}$$

$$Z_2 = \delta_1 H_2^{\delta_1=1} + \delta_2 H_2^{\delta_2=1} + \delta_3 H_2^{\delta_3=1} \quad (b)$$

$$Z_3 = \delta_1 H_3^{\delta_1=1} + \delta_2 H_3^{\delta_2=1} + \delta_3 H_3^{\delta_3=1}$$

varvid följande teckenregler tillämpats:

Fasthållningskrafterna  $Z$  (fig :47j) och  $n$ ) är positiva, om de är riktade åt vänster ( $\pm$ )

$H$  och  $\delta$  (fig :47o-r) är positiva, om de är riktade åt höger ( $\pm$ )

e Beräkning av de till de verkliga knutpunktsförskjutningarna enligt fig :47o hörande böjmomenten  $M^\delta$  ur uttrycket

$$M^\delta = \delta_1 M^{\delta_1=1} + \delta_2 M^{\delta_2=1} + \delta_3 M^{\delta_3=1} \quad (c)$$

### 3 Numerisk utvärdering

a Inverkan av elementarförskjutningar  $\delta_1=1$ ,  $\delta_2=1$  och  $\delta_3=1$ . För  $\delta_1=1$  uppkommer i F, H, K och L primärmoment  $M'$ , för vilka enligt ekv :45(2) beräknas

$$M'_f = - (6EI_0/h^2) [0,354(1 + 0,189)/(1 - 0,354 \cdot 0,189)]$$

$$= - 2,707EI_0/h^2 = M'_1$$

$$M'_h = - 1,646EI_0/h^2 = M'_k$$

Effekten av dessa i form av fördelade och överförda moment bestäms på analogt sätt som under A. För föreliggande lastfall kan därvid en viss förenkling uppnås genom utnyttjande av antisymmetriegenskaperna. Resultterande knutpunktsförskjutningsmoment  $M^{\delta_{i=1}}$  redovisas i tabell :47, vilken också innehåller de på analogt sätt bestämda, mot  $\delta_2=1$  och  $\delta_3=1$  svarande knutpunktsförskjutningsmomenten  $M^{\delta_2=1}$  resp  $M^{\delta_3=1}$ .

De tillhörande horisontella knutpunktsbelastningarna  $H^{\delta_{i=1}}$ ,  $H^{\delta_2=1}$  och  $H^{\delta_3=1}$  beräknas ur jämviktsekvationer enligt den i fig :47n demonstrerade tekniken. Slutresultatet anges nederst i tabellen.

### b Beräkning av $\delta_1$ , $\delta_2$ och $\delta_3$

Genom insättning i ekv (b) av uttrycken för  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$ ,  $H^{\delta_1=1}$ ,  $H^{\delta_2=1}$  och  $H^{\delta_3=1}$  enligt ekv (a) resp tabell :47 erhålls för bestämning av ramens verkliga knutpunktsförskjutningar  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  och  $\delta_3$  följande ekvationssystem

$$10,62\delta_1 - 5,21\delta_2 + 0,87\delta_3 = 0,440qh^4/EI_0;$$

$$- 15,84\delta_1 + 21,62\delta_2 - 6,59\delta_3 = 1,054qh^4/EI_0$$

$$6,09\delta_1 - 22,16\delta_2 + 12,67\delta_3 = 1,111qh^4/EI_0$$

$$\text{varur beräknas } \delta_1 = 0,173qh^4/EI_0; \delta_2 = 0,378qh^4/EI_0; \delta_3 = 0,666qh^4/EI_0 \quad (d)$$

Tabell :47

Moment och horisontalkraft	Moment ( $M^{\delta=1}$ ) och horisontalkraft ( $H^{\delta=1}$ ) av			Multiplikator
	$\delta_1=1$	$\delta_2=1$	$\delta_3=1$	
$M_b$	-0,435	2,870	-3,472	$EI_0/h^2$
$M_c$	0,652	-4,304	2,214	»
$M_d$	-0,217	1,434	1,258	»
$M_e$	1,958	-3,904	0,648	»
$M_f$	-3,047	2,084	-0,347	»
$M_g$	1,089	1,820	-0,301	»
$M_h$	-2,263	0,520	-0,087	»
$M_i$	2,263	-0,520	0,087	»
$M_j$	-2,263	-0,520	0,087	»
$M_k$	-2,263	0,520	-0,087	»
$M_l$	-3,047	2,084	-0,347	»
$M_m$	1,958	-3,904	0,648	»
$M_n$	1,089	1,820	-0,301	»
$M_o$	0,652	-4,304	2,214	»
$M_p$	-0,435	2,870	-3,472	»
$M_q$	-0,217	1,434	1,258	»
$H_1$	10,62	-5,21	0,87	$EI_0/h^2$
$H_2$	-15,84	21,62	-6,59	»
$H_3$	6,09	-22,16	12,67	»

c Mot den verkliga knutpunktsförskjutningen svarande moment  $M^\delta$

För dessa ger ekv (c) i kombination med  $M^{\delta=1}$  enligt tabellen ovan och  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  och  $\delta_3$  enligt ekv (d) värdena

$$M_b^\delta = (-0,173 \cdot 0,435 + 0,378 \cdot 2,870 - 0,666 \cdot 3,472)qh^2 = -1,303qh^2 = M_p^\delta;$$

$$M_c^\delta = M_o^\delta = -0,040qh^2; M_d^\delta = M_q^\delta = 1,343qh^2;$$

$$M_e^\delta = M_m^\delta = -0,707qh^2; M_f^\delta = M_l^\delta = 0,031qh^2; M_g^\delta = M_n^\delta = 0,676qh^2;$$

$$M_h^\delta = M_k^\delta = -0,252qh^2; M_i^\delta = M_j^\delta = 0,252qh^2$$

d Slutgiltiga moment  $M^{mk}$

De verkliga momenten  $M^{mk}$  för den i fig :47i visade ramen med fria knutpunktsförskjutningsmöjligheter blir  $M^{mk} = M^{uk} + M^\delta$ , där  $M^{uk}$  är de i fig :47 l angivna momenten vid fixa knutpunkter.

$$M_b^{mk} = -1,201qh^2; M_c^{mk} = -0,135qh^2; M_d^{mk} = -1,336qh^2;$$

$$M_e^{mk} = -0,613qh^2; M_f^{mk} = -0,069qh^2; M_g^{mk} = 0,682qh^2;$$

$$M_h^{mk} = -0,224qh^2; M_i^{mk} = 0,224qh^2; M_j^{mk} = 0,242qh^2;$$

$$M_k^{mk} = -0,242qh^2; M_l^{mk} = 0,033qh^2; M_m^{mk} = -0,711qh^2;$$

$$M_n^{mk} = 0,678qh^2; M_o^{mk} = -0,040qh^2; M_p^{mk} = -1,300qh^2;$$

$$M_q^{mk} = 1,340qh^2$$

Ramens momentdiagram visas i fig :47s, uppritat enligt principen, att momenten genomgående avsatts på den ramdelssida, som är utsatt för böjdragspänning.

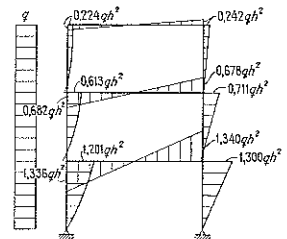


Fig :47s

## :5 Cross' metod

### :51 Allmän beräkningsgång

*Cross' metod*, vilken första gången framlades i litteraturen år 1932 av den amerikanske professorn Hardy Cross, är en systematiserad bruksstadiemetod, karaktäriserad av att momenttillståndet bestäms genom ett successivt approximationsförfarande.

Vid rambärverk med *fixa knutpunkter* är den principiella gången av en momentberäkning enligt Cross' metod följande (jfr fig :51).

Till en början antas rambärverkets samtliga icke-ledade knutpunkter genom något yttre tvång vara *fastlåsta mot rotation*, dvs inte kunna vinkeländras. Genom fastlåsningsen blir balkarna i rambärverket ensidigt eller tvåsidigt fast inspända. Av den yttre belastningen uppkommer härvid inspänningsmoment i balkändarna, vilka kallas *ingångs- eller startmoment*  $M^s$ .

För att rambärverket skall övergå i den verkliga ramkonstruktionen enligt fig :51, måste de antagna fastlåsningsarna mot rotation av knutpunkterna lösgöras. Detta sker successivt i ett antal beräkningsomgångar, varvid varje omgång omfattar beräkning av effekten av *en* knutpunkts lösgörande från fastlåsningsen. För att därvid beräkningsförfarandets konvergens skall bli så snabb som möjligt, väljs för lösgörande i varje beräkningsomgång den knutpunkt, som har störst sammanlagt moment från i knutpunkten inkommande ramdelar.

I rambärverket enligt fig :51 har knutpunkten EFG störst sammanlagt startmoment  $\Sigma M^s = M_o^s$ , varför i denna införd fastlåsnings först avlägsnas. Härvid måste för att knutpunkten skall befinna sig i jämvikt ett *kompensationsmoment*  $M_{\text{ölg}}^k = -\Sigma M^s = -M_o^s$  införas i knutpunkten. Detta kompensationsmoment ger den lösgjorda knutpunkten en rotation, varvid *fördelade moment*  $M_o^f$ ,  $M_f^f$  respektive  $M_g^f$  uppkommer i de anslutande ramdelsändarna. Dessa fördelade moment ger i sin tur upphov till *transporterade moment*  $M_o^t$ ,  $M_h^t = 0$  resp  $M_i^t$  i ramdelarnas motsatta ändpunkter C, H och I.

Därmed är den fullständiga effekten av knutpunktens EFG lösgörande beaktad. I vinkeländrat läge låses så knutpunkten EFG åter fast för ytterligare rotation, varpå fastlåsningsen avlägsnas i knutpunkt BCD, som nu fordrar största kompensationsmomentet  $M_{\text{ölg}}^k = -\Sigma(M^s + M^t) = -(M_o^s + M_o^t + M_h^t)$ . Detta moment fördelas och transporteras enligt ovan, varpå knutpunkt BCD åter fastlåses och knutpunkt EFG lösgörs från sin fastlåsningsen. Så upprepas det successiva beräkningsförfarandet till dess att kompensationsmomenten blir så små, att de med god approximation kan försummas. De slutgiltiga momenten  $M^{uk}$  erhålls därpå genom summation för varje ramdelsände av startmoment  $M^s$  och samtliga fördelade moment  $M^f$  och transporterade moment  $M^t$ , dvs  $M^{uk} = \Sigma(M^s + M^f + M^t)$ .

Vid *rambärverk med förskjutbara knutpunkter* kan momentberäkningen i princip enligt :33 exempel 2 B, :41, :47 och :57 ofta med fördel uppdelas i de båda etapperna

- Momentberäkning under förutsättning av fixa knutpunkter
- Korrektion för renodlad knutpunktsförskjutning

### Beräkningsgång

A *Fixa knutpunkter* (utan knutpunktsförskjutning = uk, jfr :57)

- Bestämning av transporttall  $r$  (se :52)
- Bestämning av styvhetstal  $S$  (se :53)
- Bestämning av fördelningstal  $s$  (se :53)
- Bestämning av startmoment  $M^s$  (se :54)

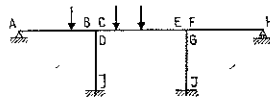


Fig :51



- 5 Successiv utjämning av momenten med början vid knutpunkt med största kompensationsmoment  $M^k$  (se ovan samt :55, :56 och :57)
  - a Beräkning av kompensationsmoment  $M^k$  (se ovan och :55)
  - b Beräkning av fördelade moment  $M^f$  (se :56)
  - c Beräkning av transporterade moment  $M^t$  (se :56)
- 6 Beräkning av resulterande moment  $M^{wk} = \Sigma(M^s + M^f + M^t)$

Sedan de resulterande momenten i en ramdels båda ändar beräknats enligt ovan, kan övriga snittkrafter i ramdelen och ramdelens deformation beräknas för ramdelen betraktad som enkel tvåstödsbalk, belastad av de resulterande momenten  $M^{wk}$  och den yttre lasten.

*B Förskjutbara knutpunkter (med knutpunktsförskjutning = mk)*

Beräkningen genomförs i princip på samma sätt som vid primärmomentmetoden (se :41).

I vissa fall, speciellt vid rambärverk, som skall momentberäknas endast för ett enstaka belastningsfall, kan ibland en behandling enligt en av Hultin modifierad metod [24], karakteriserad av en *parallell successiv utjämning för knutpunktsrotation och knutpunktsförskjutning*, snabbare leda till målet än en renodlad Cross-beräkning.

**Teckenregler**

I avsikt att hålla nere risken för teckenfel väljs som genomgående teckenregel vid själva momentutjämningsprocessen, att *moment, som verkar i medsols riktning i en balkände, räknas som positiva (+ ↷)*.

Detta innebär, att

- 1 Tecknet bibehålls vid momenttransport ( $M_b = r_b M_a$ )
- 2 Tecknet växlas vid momentfördelning ( $M_c = -s_c M_b$ )

Vid den slutgiltiga redovisningen av en ramkonstruktions momentdiagram övergår man lämpligen till därvid konventionella teckenregler.

Beträffande teckenregler för fasthållningskrafter, horisontalkrafter och förskjutningar vid rambärverk med förskjutbara knutpunkter se :41.

**:52 Transporttal**

En ramdels AB *transporttal*  $r_b$  definieras som det moment, som uppkommer i ramdelsändan B, om ramdelsändan A som fritt upplagd belastas med ett moment  $M_a = 1$ .

*Fri uppläggning i B (fig :52 a):*

$$r_b = 0 \tag{1}$$

*Fast inspänning i B (fig :52 b):*

$$\text{Generellt: } r_b = \beta_{ab}^0 / \alpha_b^0 = C_{ab} / 2C_b \tag{2 a}$$

där  $\alpha_b^0$  och  $\beta_{ab}^0$  samt  $C_b$  och  $C_{ab}$  erhålls ur :32 A.

$$\text{Votlös balk: } r_b = 1/2 \tag{2 b}$$

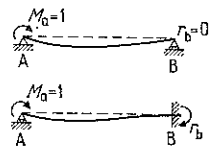


Fig :52 a och b

För vottyper enligt fig :32 b redovisas  $r_b$  i diagramform i tabell i:47 med som ingångsparametrar relativa votlängden  $\lambda$  och förhållandet  $n = I_0 / I_{max}$  mellan minsta och största tröghetsmoment.

### :53 Styvhetstal och fördelningstal

En ramdels AB *styvhetstal*  $S_a$  definieras som det moment, som måste appliceras i ramdelsändan A för att i denna ge ramdelen en vinkeländring  $\Theta_a = 1$ .

*Fri uppläggning* i B (fig :53 a):

$$\text{Generellt: } S'_a = 1 / \alpha'_a = 3EI_0 / C_a L \quad (1 a)$$

$$\text{Votlös balk: } S'_a = 3EI / L \quad (1 b)$$

*Fast inspänning* i B (fig :53 b):

$$\text{Generellt: } S''_a = 1 / \alpha''_a (1 - (\beta''_{ab})^2 / (\alpha''_a \alpha''_b)) = 3EI_0 / C_a L (1 - C_{ab}^2 / 4C_a C_b) \quad (2 a)$$

där  $\alpha''_a$ ,  $\alpha''_b$  och  $\beta''_{ab}$  samt  $C_a$ ,  $C_b$  och  $C_{ab}$  erhålls ur :32 A.

$$\text{Votlös balk: } S''_a = 4EI / L \quad (2 b)$$

För vottyper enligt fig :32 b redovisas  $S'_a$  och  $S''_a$  i diagramform i tabell 1:46 med som ingångsparametrar relativa votlängden  $\lambda$  och förhållandet  $n = I_0 / I_{\max}$  mellan minsta och största tröghetsmoment.

En i en knutpunkt enligt fig :53 c inkommande ramdels AB *fördelningstal*  $s_a$  definieras som det moment, som uppkommer i ramdelsändan A, då hela knutpunkten belastas med ett moment  $M = 1$ . Fördelningstalet  $s_a$  bestäms enbart av de anslutande ramdelarnas styvhetstal enligt sambandet

$$s_a = S_a / \sum S \quad (3)$$

i vilket summationen skall omfatta knutpunktens *samtliga* ramdelar.

Det förtjänar att understrykas den väsentliga skillnad, som finns mellan primärmomentmetodens och Cross-metodens fördelningstal  $\mu$  respektive  $s$ , och som ligger däri, att, medan primärmomentmetodens fördelningstal beskriver, hur ett i en ramdel verkande moment fördelas på de *övriga* i knutpunkten anslutande ramdelarna, så anger Cross-metodens fördelningstal i stället fördelningen av ett knutpunkten angripande moment på knutpunktens *samtliga* ramdelar. Härtill kommer ytterligare en skillnad därigenom att primärmomentmetodens  $\mu$ -värden är för den *verkliga* konstruktionen gällande fördelningstal, under det att Cross-metodens  $s$ -värden hänför sig till en *modifierad* konstruktion, uppkommen ur den verkliga genom att samtliga icke-ledade — från knutpunkten räknat — yttre ramdelsändar fastlästs mot rotation.

### :54 Startmoment

Startmomenten är identiska med inspänningsmomenten vid ensidigt och tväsidigt fast inspända balkar.

*Generellt* gäller vid godtyckligt vald last och tröghetsmomentvariation för ensidigt fast inspänd balk (fig :54 a):

$$M_b^s = \Theta_b^0 / \alpha_b^0; \quad (1)$$

för tväsidigt fast inspänd balk (fig :54 b):

$$M_a^s = (\Theta_a^0 \alpha_b^0 - \Theta_b^0 \beta_{ab}^0) / [\alpha_a^0 \alpha_b^0 - (\beta_{ab}^0)^2];$$

$$M_b^s = (\Theta_b^0 \alpha_a^0 - \Theta_a^0 \beta_{ab}^0) / [\alpha_a^0 \alpha_b^0 - (\beta_{ab}^0)^2] \quad (2)$$

varvid  $\alpha_a^0$ ,  $\alpha_b^0$  och  $\beta_{ab}^0$  samt  $\Theta_a^0$  och  $\Theta_b^0$  betecknar de i :32 beskrivna balk-resp lastkonstanterna. Med speciell tillämpbarhet på balkar med *raka*, *triangulära* eller *paraboliska voter* anges för några vanliga lastfall i fig:54 c-h

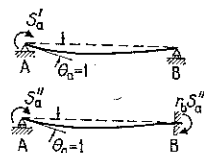


Fig :53 a och b

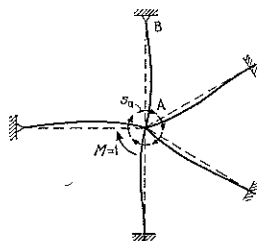


Fig :53 c

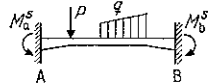
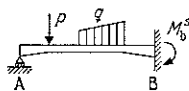


Fig :54 och b

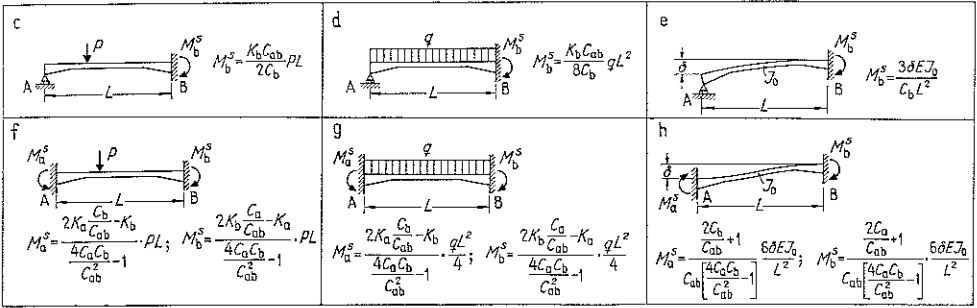


Fig :54 c-h

ur ekv (1) och (2) vidareutvecklade  $M^s$ -samband, baserade på de i :32 samt i tabellerna 1:44 och 1:45 redovisade  $C$ - och  $K$ -talen. En kompletterande direkt redovisning av  $M^s$  för votförsedd balk ges för jämnt fördelad och triangulärt fördelad last i tabell 1:48 med som ingångsparametrar relativa votlängden  $l$  och förhållandet  $n = I_0 / I_{max}$  mellan minsta och största tröghetsmoment.

För  $M^s$  vid *votlös balk* hänvisas till tabellerna 1:39 och 1:40.

**:55 Kompensationsmoment**

Med en knutpunkts kompensationsmoment  $M^{kc}$  förstås det moment, som måste tillföras knutpunkten för att den, då antagen fastlåsning mot rotation lösgörs, skall komma i jämvikt. Jfr fig :57 d.

**:56 Fördelade och transporterade moment**

Kompensationsmomentet  $M^{kc}$  i en knutpunkt fördelas till anslutande balkar med hjälp av fördelningstalen  $s$ . Speciellt för knutpunkten DEF i fig :57 a ger detta i balkändarna D, E respektive F de *fördelade* momenten:

$$M_d^f = s_d M^{kc}_{def}; M_e^f = s_e M^{kc}_{def} \text{ resp } M_f^f = s_f M^{kc}_{def}$$

De fördelade momenten överförs till motsatt balkände, varvid transport-talen anger förhållandet mellan transporterat och fördelat moment. I ovan-nämnda fall (fig :57 a) blir de till balkändarna C, G respektive J *transporterade* momenten:

$$M_c^t = r_c M_d^f, M_g^t = r_g M_e^f \text{ resp } M_j^t = r_j M_f^f$$

**:57 Beräkningsexempel**

Beräkna momentdiagrammet för det i fig :57 a visade lastfallet.

**A Beräkning under förutsättning av fixa knutpunkter**

För att vid aktuellt lastfall enligt fig :57 a en ramdeformation utan någon sidoförskjutning av knutpunkterna BC, DEF och GH skall uppkomma, fordras, att ramen kompletteras med någon sidostagande anordning, exempelvis enligt fig :57 b med ett vertikalt glidlager i knutpunkten GH.

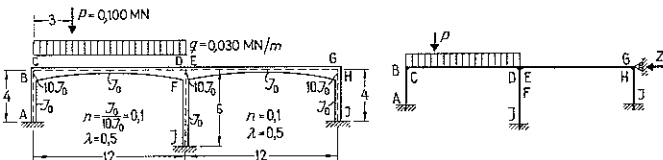


Fig :57 a och b

I detta uppträdande horisontalkraft, *fasthållningskraft*  $Z$ , kan beräknas direkt ur jämviktsekvationer, sedan det till fixa knutpunkter hörande momenttillståndet bestämts.

1 *Transporttal*  $r$  (se :52)

För de votlösa rambenen gäller

$$r_a = r_i = r_j = 1/2$$

och för de med parabelvoter försedda horisontalerna

$$C_{od} = C_{do} = C_{og} = C_{ge} = 0,642; C_o = C_d = C_e = C_g = 0,450 \text{ (se tabell 1:44).}$$

$$r_c = r_d = r_e = r_g = 0,642/2 \cdot 0,450 = 0,713 \text{ (jfr också tabell 1:47)}$$

2 *Styvhetstal*  $S$  (se :53)

$$S_b = S_h = 4EI_0/4 = EI_0; S_i = 4EI_0/6 = 0,667EI_0 \text{ [ekv :53 (2b)]}$$

$$S_c = S_d = S_e = S_g = 13,55EI_0/12 = 1,129EI_0 \text{ [ekv :53 (2a) med } C\text{-tal enligt ovan eller tabell 1:46]}$$

3 *Fördelningstal*  $s$  [ekv :53 (3)]

Knutpunkt BC och GH:

$$\Sigma S = S_b + S_c = 2,129EI_0; \quad s_b = S_b/\Sigma S = 0,470 = s_h;$$

$$s_c = 1 - s_b = 0,530 = s_g$$

Knutpunkt DEF:

$$\Sigma S = S_d + S_e + S_f = 2,925EI_0; \quad s_d = S_d/\Sigma S = 0,386 = s_e;$$

$$s_f = 1 - s_d - s_e = 0,228$$

4 *Ingångs- eller startmoment*  $M^s$  (se :54)

Av  $q$ -lasten enbart enligt fig :54 g med  $K_c = K_d = 1$  (se tabell 1:45) och  $C$ -tal enligt ovan:

$$M_c^s = -M_d^s = -0,416qL^2/4 = -0,416 \cdot 0,03 \cdot 12^2/4 = -0,449 \text{ MNm} \text{ (jfr också tabell 1:48)}$$

Av  $P$ -lasten enbart enligt fig :54 f med  $K_c = 0,303$ ,  $K_d = 0,244$  (se tabell 1:45) och  $C$ -tal enligt ovan

$$M_c^s = -0,187PL = -0,187 \cdot 0,100 \cdot 12 = -0,224 \text{ MNm}$$

$$M_d^s = 0,041PL = 0,041 \cdot 0,100 \cdot 12 = 0,049 \text{ MNm}$$

$$\text{Totalt av } q+P \quad M_c^s = -0,673 \text{ MNm}; \quad M_d^s = 0,498 \text{ MNm}$$

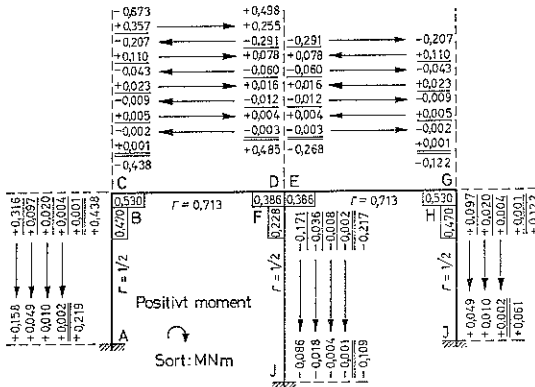


Fig :57c

5 Successiv momentutjämning

Den successiva utjämningen av de under förutsättning av mot rotation fastlästa knutpunkter BC, DEF och GH gällande startmomenten  $M^s$  finns genomförd i den i fig :57c redovisade beräkningstablan. I denna har för den successiva utjämningens underlättande från början införts de olika ramdelarnas transporttall  $r$  samt för de inre knutpunkterna fördelningstalen  $s$  för i dessa inkommande ramdelar.

Före utjämningens början verkar i ramen som enda moment de båda startmomenten i C och D  $M_C^s = -0,673$  MNm resp  $M_D^s = +0,498$  MNm.

Det numeriskt största startmomentet uppträder följaktligen i knutpunkten BC. Ur konvergenssynpunkt är det därför lämpligt att starta det successiva lösgörandet av de från början antagna fastläsningarna mot rotation just i denna punkt. I fig :57d anges beräkningsgången vid de tre första beräkningsetapperna (jfr :51).

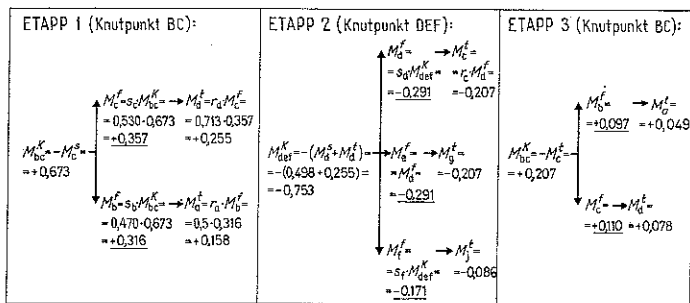


Fig :57d. De tre första beräkningsetapperna vid utjämning av momenten i ramen enligt fig :57c

Sedan kompensationsmomentet  $M^k$  i en knutpunkt fördelats och transporterats, är knutpunkten i jämvikt och fastläses i detta tillstånd. Jämviktstillståndet markeras med enkelt streck (t ex  $-0,291$ ) under de i knutpunkten fördelade momenten.

När kompensationsmomenten blivit så små, att deras inverkan kan försummas, avbryts beräkningen.

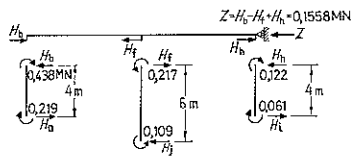
Slutmomenten  $M^{sl}$  erhålls som summan av samtliga  $M^s$ ,  $M^k$  och  $M^l$  i varje balkände och markeras med dubbla streck (t ex  $+0,485$ )

B Korrektion för knutpunktsförskjutning (jfr :33 exempel 2 B och :47)

Sedan ramens momenttillstånd vid fixa knutpunkter ( $M^{sl}$ ) bestäms enligt A, erhålls fasthållningskraften  $Z$  (fig :57b) genom jämviktsekvationer enligt fig :57e för det i enkla delar uppskurna rambärverket.

Avläsnas det i knutpunkten GH införda vertikala glidlagret, kommer knutpunktsnivån BC-DEF-GH att horisontalförskjutas åt höger en distans  $\delta$ , svarande mot en i GH angripande, åt höger riktad horisontalkraft  $H = Z = 0,1558$  MN (jfr fig :57f).

Det häremot svarande momenttillståndet beräknas nedan i etapper.



$$Z = H_b = H_c = H_d = H_e = H_f = H_g = H_h = 0,1558 \text{ MN}$$

$$H_b = H_c = \frac{1}{4}(0,438 + 0,219) = 0,1643 \text{ MN}; \quad H_d = H_e = \frac{1}{6}(0,217 + 0,109) = 0,0543 \text{ MN};$$

$$H_g = H_h = \frac{1}{4}(0,122 + 0,061) = 0,0458 \text{ MN}$$

Fig :57e

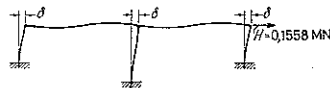


Fig :57f

1 Inverkan av elementarförskjutning  $\delta = 1$

Under förutsättning av mot rotation fastlåsta knutpunkter BC, DEF och GH ger en elementarförskjutning (fig :57g) i rambens ändpunkter startmoment  $M^s$ , för vilka enligt tabell 1:40 beräknas

$$M_a^{c=1} = M_b^{s\delta=1} = M_h^{s\delta=1} = M_i^{s\delta=1} = -6EI_0/L^2 = -6EI_0/4^2 = -0,375EI_0$$

$$M_i^{s\delta=1} = M_j^{s\delta=1} = -6EI_0/6^2 = -0,167EI_0$$

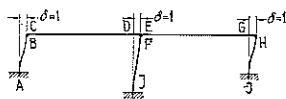


Fig :57g

Övergång från den i fig :57g visade deformationsfiguren till verklig deformationsfigur enligt fig :57f kan ske genom ett successivt frigörande av de antagna fastlåsningarna mot rotation, helt i överensstämmelse med den i A redovisade tekniken för ram med fixa knutpunkter. Den häremot svarande successiva momentutjämnningen visas i fig :57h och till därvid erhållna slutgiltiga moment  $M^{\delta=1}$  hörande horisontella upplagsreaktioner i fig :57i. Av denna senare framgår, att för en elementarförskjutning  $\delta = 1$  enligt fig :57f fordras i knutpunkten GH angrepp av en högerriktad horisontalkraft  $H^{\delta=1} = 0,293EI_0$ .

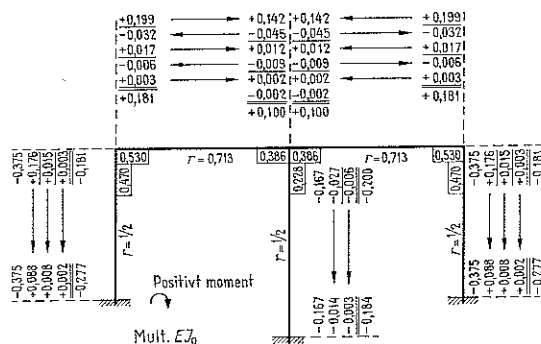


Fig :57h

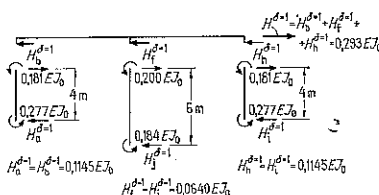


Fig :57i

2 Beräkning av verklig knutpunktsförskjutning  $\delta$

$\delta$  erhålls ur jämviktsvillkoret  $Z = \delta H^{\delta=1}$

Insättning av aktuella värden ger:

$$0,1558 = \delta \cdot 0,293EI_0; \delta = 0,532/EI_0$$

3 Mot verklig knutpunktsförskjutning  $\delta$  svarande moment  $M\delta$  i MNm

Direkt proportionering ger

$$M^\delta = \delta M^{\delta=1}$$

varur beräknas

$$M_a^\delta = \delta M_a^{\delta=1} = -0,147 = M_i^\delta; M_b^\delta = -0,096 = -M_c^\delta = -M_g^\delta = M_h^\delta;$$

$$M_d^\delta = M_e^\delta = 0,053; M_f^\delta = -0,106; M_j^\delta = -0,098$$

4 Slutliga moment  $M^{mk}$  i MNm

$$M_a^{mk} = M_a^{uk} + M_a^\delta = 0,219 - 0,147 = 0,072; M_b^{mk} = 0,342 = -M_c^{mk};$$

$$M_d^{mk} = 0,538; M_e^{mk} = -0,215; M_f^{mk} = -0,323;$$

$$M_g^{mk} = -0,026 = -M_h^{mk}; M_i^{mk} = -0,086; M_j^{mk} = -0,207.$$

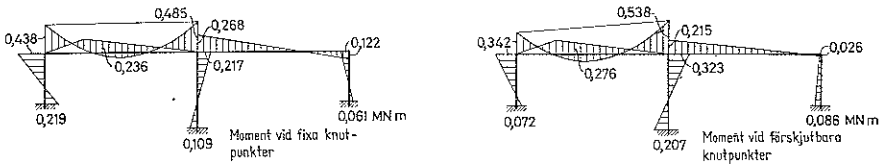


Fig :57j

Det tillhörande momentdiagrammet redovisas t h i fig :57j, i vilken som jämförelse också anges det mot fixa knutpunkter svarande momentdiagrammet. Diagrammen har ritats enligt tekniken, att momenten genomgående avsatts på den ramdelssida, som är utsatt för böjdragspänning.

## :6 Matrismetoder och systematiserad analys

### :61 Allmänt

Formuleringen av de grundläggande statiska sambanden i matrisform gjordes tidigt. Den fick dock inte någon praktisk användning och blev därför inte helt genomarbetad förrän datorerna i större utsträckning började användas som beräkningshjälpmedel. Liksom alla datoranpassade beräkningsmetoder kännetecknas dessa matrismetoder av en långt driven formalism. Detta har bl a medfört större möjlighet att överblicka beräkningarna även för mycket stora system. Den ökade användningen av dessa metoder har även inneburit att studiet av numeriska beräkningsmetoder har fått ökad betydelse inom byggnadsstatiken.

I det följande skall matrismetoderna för deformations- och kraftmetoderna behandlas. De ingångsmatriser som därvid erfordras kan uppställas manuellt och sedan kan matrisoperationerna utföras med hjälp av dator. I dag finns dock datorprogram, som bygger på någon av dessa metoder och som gör det möjligt att genomföra beräkningen med väsentligt mindre manuellt arbete. Exempel på sådana beräkningssystem är FRAM, STRESS, STRIP, STRUDL m fl. Vid användandet av dessa program är dock en god kännedom om den använda beräkningsmetoden en förutsättning för en riktig bedömning av beräkningsmodeller och resultatet.

### :62 Deformationsmetod

#### :621 Jämviktsekvationer

Jämviktsekvationer kan formuleras dels som interna samband över de enskilda elementen mellan snittkrafter och yttre laster, dels som jämviktssamband i systemets knutpunkter mellan de anslutande elementens randsnittkrafter och i knutpunkterna inkommande yttre laster.

Sambanden över de enskilda elementen kan användas för en reduktion av totala antalet randsnittkrafter så att endast *oberoende* sådana förekommer i de fortsatta beräkningarna. För dessa snittkrafter skall vektorsvärden (se nedan) bestämmas. Detta sker ofta med hjälp av tabellverk. Med hänsyn här till är det lämpligt att välja normalkraft och moment som *oberoende* randsnittkrafter enl fig :621 a–d. De eliminerade tvärkrafterna kan uttryckas med hjälp av dessa snittkrafter.

Antalet jämviktsekvationer som kan formuleras i en knutpunkt är lika med antalet frihetsgrader i punkten och detta är bl a beroende av konstruktionstypen (se tabell :621). Förekomsten av styva reaktioner eller styva (t ex normalkraftstyva) element innebär en reduktion av antalet frihetsgrader. Finns en led mellan en knutpunkt och ett anslutande element innebär detta en motsvarande ökning av antalet frihetsgrader.

Styva reaktioner i en knutpunkt medför således att några ekvationer inte

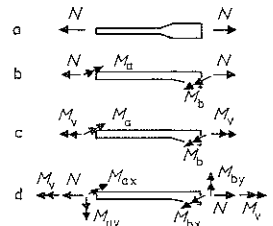


Fig :621 a–d. Exempel på oberoende randsnittkrafter för olika elementtyper a stav, b balk i plant rambärverk, c balk i balkrost, d balk i tredimensionellt rambärverk. Båge och krökt balk kan betraktas som specialfall av b, c eller d

Tabell :621. Sammanställning av antalet frihetsgrader för olika konstruktionstyper.

Konstruktionstyp	Maximalt antal frihetsgrader i knutpunkt
Plant fackverk	2 translationer
Plan ram	2 translationer + 1 rotation
Balkrost	1 translation + 2 rotationer
3-dim fackverk	3 translationer
3-dim ram	3 translationer + 3 rotationer

formuleras i de styva riktningarna. Ett normalkraftsstyvt element innebär bortfall av en ekvation i vilken normalkraften skulle ingått samtidigt som denna elimineras från de obekanta oberoende snittkrafterna. Bildar de normalkraftsstyva elementen mer komplexa system kan valet av vilka ekvationer som kan formuleras innebära vissa svårigheter. Speciellt gäller att om de normalkraftsstyva elementen bildar en statiskt obestämd fackverkskonstruktion så kan beräkningen inte genomföras. Trots att styva element i allmänhet innebär en minskning av ekvationssystemets storlek och därmed beräkningsvolymen bör de därför användas med försiktighet.

Förekomsten av en led innebär en extra ekvation, som sätter aktuella snittkrafter till 0.

I matrisform kan jämviktsekvationerna skrivas

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{Bq} \quad (1)$$

**A-matrisen** ( $j \cdot n$ ) är jämviktsekvationernas koefficientmatris. Antalet rader ( $j$ ) är lika med konstruktionens totala antal frihetsgrader och antalet kolumner ( $n$ ) är lika med antalet obekanta randsnittkrafter.

**P-matrisen** ( $n \cdot l$ ) innehåller de obekanta randsnittkrafterna. Antalet kolumner ( $l$ ) är lika med antalet lastfall.

Som högerled i ekvationssystemet förekommer yttre laster, som uttrycks som knutpunktslaster i de av jämviktsekvationerna definierade riktningarna. Laster från anslutande element överförs till ekvivalenta knutpunktslaster genom att elementen först betraktas som fast inspända i knutpunkterna. De därvid på knutpunkten angripande inspänningsmomenten och fasthållningskrafterna utgör den aktuella knutpunktslasten (se fig :621 e-g samt jämför med startmomenten vid beräkning enligt Cross' metod, :54).

**Bq-matrisen** ( $j \cdot l$ ) innehåller mot respektive jämviktsekvation svarande knutpunktslast.

Är antalet jämviktsekvationer ( $j$ ) > antalet obekanta snittkrafter ( $n$ ) är konstruktionen labil. Är  $j = n$  är den statiskt bestämd såvida den inte är lokalt labil. I detta fall kan snittkraftsfördelningen direkt bestämmas genom lösning av ekv (1). Är  $j < n$  är konstruktionen statiskt obestämd och antalet statiskt obestämda är  $n - j$ . De jämviktsekvationer som inte medtagits i A-matrisen kan användas till att bestämma styva reaktionskrafter och andra styva snittkrafter sedan de obekanta randsnittkrafterna beräknats.

## :622 Lokala elementdeformationer

Elementens lokala elastiska deformationer kan beräknas ur vektorsvärdena och randsnittkrafterna. I matrisform kan detta skrivas

$$\Delta_e = \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} \quad (1)$$

Här anger

$\Delta_e$ -matrisen ( $n \cdot l$ ) de mot de obekanta randsnittkrafterna svarande elastiska deformationerna för de olika lastfallen.

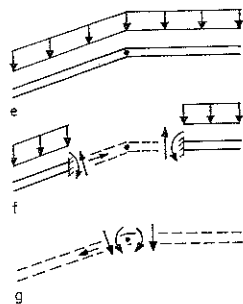


Fig :621 e-g. e Knutpunkt med anslutande belastade element. f På elementen angripande inspänningsmoment och fasthållningskrafter vid fasthållna knutpunkter. g På knutpunkten angripande moment och krafter som ger med yttre lasten ekvivalenta knutpunktslaster



V-matrisen ( $n \cdot n$ ), vekhets- eller flexibilitetsmatrisen, är uppbyggd av diagonalt ordnade undermatriser, en för varje element. Undermatriserna anger de lokala deformationerna i de obekanta randlasternas riktningar till följd av var och en av dessa = 1.

Att vekhetsmoment  $V_{ij}$  anger den lokala deformationen i snittkraften  $i$  i riktning  $p$  g a randsnittkraften  $j=1$ . Som en följd av Maxwells sats är  $V_{ij} = V_{ji}$ . Vekhetsmatriserna för några vanliga elementtyper visas i fig :622 a-c.

Värdena i vekhetsmatrisen för ett godtyckligt valt plant balkelement kan beräknas enligt ekv (2) (jämför :25)

$$V_{ij} = \int_L \frac{N_i N_j}{EA} dx + \int_L \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int_L \frac{\kappa T_i T_j}{GA} dx \quad (2)$$

$N_i$ ,  $M_i$  och  $T_i$  är snittkrafterna för  $P_i=1$  och  $N_j$ ,  $M_j$  och  $T_j$  för  $P_j=1$ . Tags inte hänsyn till normal- eller tvärkraftarbete, bortfaller motsvarande termer ur ekv (2).

**:623 Kontinuitetsvillkor**

Kontinuitetsvillkoret formulerar sambandet mellan de lokala elementdeformationerna och de angränsande knutpunkternas deformationer. Detta innebär att summan av elastiska och icke elastiska (orsakade av  $t$  ex temperatur och krympning) elementdeformationer är lika med (skillnaden mellan) de angränsande knutpunkternas deformationer transformerade i elementens riktningar. I matrisform kan detta skrivas

$$-V \cdot P + T \cdot U = \Delta_0 \quad (1)$$

Här är

U-matrisen ( $j \cdot l$ ) en matris, som innehåller de obekanta knutpunktsdeformationerna, till antal och riktning definierade genom i A-matrisen tecknade jämviktssamband. ( $j$ ) är antalet frihetsgrader och ( $l$ ) är antalet lastfall.

T-matrisen ( $n \cdot j$ ) en transformationsmatris, som överför de obekanta knutpunktsdeformationerna  $u$  till lokala elementdeformationer. Antalet rader ( $n$ ) är lika med antalet oberoende randlaster och antalet kolumner ( $j$ ) är lika med antalet frihetsgrader.

$\Delta_0$ -matrisen ( $n \cdot l$ ) en matris som innehåller icke elastiska elementdeformationer såsom temperaturdeformationer, krymp- och krypdeformationer etc.

För linjär teori gäller att T-matrisen är identisk med den transformerade A-matrisen.

$$T = A^T \quad (2)$$

Insätts ekv (2) i ekv (1) erhålls

$$-V \cdot P + A^T \cdot U = \Delta_0 \quad (3)$$

Enligt förutsättningarna har eventuella styva randlaster redan eliminerats, varför V-matrisen kan inverteras. Ur ekv (3) kan därför erhållas

$$P = S (A^T \cdot U - \Delta_0) \quad (4)$$

$$\text{där } S = V^{-1} \quad (5)$$

S-matrisen ( $n \cdot n$ ), styvhetsmatrisen, är den inverterade V-matrisen och är liksom denna uppbyggd av diagonalt ordnade undermatriser. Dessa beskriver de randsnittkrafter som måste appliceras för att en lokal enhetsdeformation skall erhållas.

Vid beräkning enligt deformationsmetod är det i allmänhet lämpligt att direkt ställa upp S-matrisen och inte gå vägen över V-matrisen. Styvhetsmatriserna för några olika elementtyper framgår av fig :623 a-c.

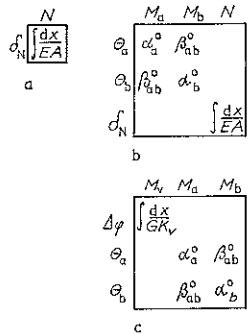
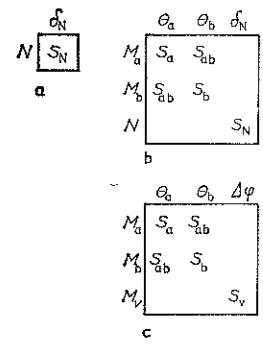


Fig :622 a-c. Vekhetsmatriser för några vanliga elementtyper. a Stavelement, b balkelement med rak tyngdpunktsaxel och med försombar inverkan av tvärkraftsarbete ( $\alpha^0$  och  $\beta^0$  balkkonstanter enligt :32 A), c balkrostelement vid hänsyn tagen till endast inverkan av böjning och Saint-Venant-torsion



$$S_N = 1 / \int_L \frac{dx}{EA}$$

$$S_a = \alpha_b^0 / [\alpha_a^0 \alpha_b^0 - (\beta_{ab}^0)^2]$$

$$S_{ab} = -\beta_{ab}^0 / [\alpha_a^0 \alpha_b^0 - (\beta_{ab}^0)^2]$$

$$S_v = 1 / \int_L \frac{dx}{GK_v}$$

$$S_b = \alpha_a^0 / [\alpha_a^0 \alpha_b^0 - (\beta_{ab}^0)^2]$$

Fig :623 a-c. Styvhetsmatriser för a stavelement, b balkelement, c balkrostelement ( $\alpha^0$  och  $\beta^0$  enligt :32 A)

**:624 Bestämning av resulterande deformationer och snittkrafter**

Insätts ekv :623 (4) i ekv :621 (1) erhålls

$$(A \cdot S \cdot A^T) \cdot U = Bq + A \cdot S \cdot \Delta_0 \tag{1}$$

Knutpunktsdeformationer  $U$  erhålls genom lösande av (1) och snittkraftsfördelningen  $P$  erhålls därefter genom insättning i ekv :623 (4). De resulterande snittkrafterna  $P_1$  erhålls slutligen som

$$P_1 = P + Q_0 \tag{2}$$

$Q_0$ -matrisen ( $n \cdot l$ ) innehåller de snittkrafter som erhålls som inspänningsmoment och fasthållningskrafter om elementen antas helt inspända i ändarna.

**:625 Beräkningsgång**

- 1 Givet: Systemets geometri och styvheter samt lastfall.
- 2 Numrera de obekanta randsnittkrafterna.
- 3 Ställ upp jämviktsekvationernas koefficientmatris,  $A$ -matrisen (se :621).
- 4 Ställ upp styvhetsmatrisen,  $S$ -matrisen (se :623).
- 5 Beräkna inspänningsmoment och fasthållningskrafter för yttre last samt längdändringar och vinkeländringar för de fritt upplagda elementen vid temperaturlast. Ställ upp  $Q_0$ -,  $Bq$ - och  $\Delta_0$ -matriserna (se :624, :621 och :623).
- 6 Beräkna knutpunktsdeformationerna  $U$  samt snittkrafterna  $P_1$  enl ekv :624 (1), (2) och :623 (4).

**:626 Beräkningsexempel**

**Exempel 1**

Beräkna momentfördelningen för ramkonstruktionen enl fig :626a. De ingående elementen har konstanta tröghetsmoment. Hänsyn tas endast till momentarbetet.

De oberoende snittkrafterna numreras enl fig :626b. Eftersom elementen är normalkraftsstyva medtas därvid inte normalkrafterna.

Konstruktionen har tre frihetsgrader, nämligen rotationerna i knutpunkterna ② och ③ samt horisontaltranslationen, som är lika för ② och ③.  $A$ -matrisen har alltså 3 rader och 4 kolumner (fig :626c) och  $S$ -matrisen är av ordningen 4 gånger 4 (fig :626d).

Momentfördelningen vid fasthållna knutpunkter framgår av fig :626e och  $Q_0$ - och  $Bq$ -matriserna av fig :626f resp g.

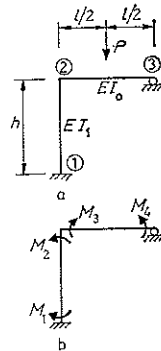


Fig :626a och b

Knutpunkt och ekriktning	Snittkrafter			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
② →	$-\frac{1}{h}$	$\frac{1}{h}$		
② ↻		1	-1	
③ ↻				1

Fig :626c.  $A$ -matris

Snittkraft	Vinkeländring			
	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$
$M_1$	$\frac{4EI_1}{h}$	$-\frac{2EI_1}{h}$		
$M_2$	$-\frac{2EI_1}{h}$	$\frac{4EI_1}{h}$		
$M_3$			$\frac{4EI_0}{l}$	$-\frac{2EI_0}{l}$
$M_4$			$-\frac{2EI_0}{l}$	$\frac{4EI_0}{l}$

Fig :626d.  $S$ -matris

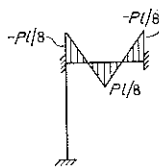


Fig :626e

Snittkraft	Lastfall 1
$M_1$	0
$M_2$	0
$M_3$	$-\frac{Pl}{8}$
$M_4$	$-\frac{Pl}{8}$

Fig :626f och g.  $Q_0$ - resp  $Bq$ -matris

Knutpunkt och ekriktning	Lastfall 1
② →	0
② ↻	$-\frac{Pl}{8}$
③ ↻	$\frac{Pl}{8}$

$$\frac{EI_0}{l} \begin{bmatrix} 12/l & 6/l \\ 6/l & 8 & 2 \\ & 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{Pl}{8} \\ \frac{Pl}{8} \end{bmatrix}$$

Fig :626h. Ekvationssystem  $ASA^T U = Bq$

Knutpunkt och def-riktning	Lastfall 1
② →	+3l
② ↺	-6
③ ↻	7

Fig :626i. U-matrix

Snittkraft	Lastfall 1
$M_1$	-3
$M_2$	-3
$M_3$	-3
$M_4$	0

Fig :626j.  $P_1$ -matrix

Genomförs beräkningarna för  $h=l$  och  $EI_1 = EI_0$  erhålls ekvationsystemet enligt fig :626h, fr ekv :624(1) med  $\Delta_0 = 0$ . Ur detta kan deformationsmatrisen  $U$  bestämmas (fig :626i) varefter  $P_1 = S \cdot A^T \cdot U + Q_0$  kan beräknas (fig :626j), fr ekv :623(4) och :624(2) med  $\Delta_0 = 0$ . Den resulterande momentfördelningen framgår av fig :626k.

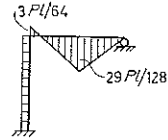


Fig :626k

Exempe. 2

Beräkna momentfördelningen för ramkonstruktionen enligt fig :626 l för följande astfall:

- 1 Vindlast  $q$
  - 2-4 Bjälklagslast  $p$  för respektive bjälklag
  - 5 Linjär temperaturgradient med differensen  $\Delta t$  mellan  $u_k$  och  $u_n$  för nedre bjälklaget. Tjockleken =  $d$ .
- Jfr för lastfall 1 i :47 exempel 4.

Vid beräkningarna tas inte hänsyn till normal- eller tvärkraftsarbete.

Eftersom samtliga element är normalkraftsstyva, utgörs de obekanta snittkrafterna endast av momenten i elementändarna, numererade enligt fig :626 m. Beträffande teckenregler för vertikala och horisontella element se fig :626 n. Jämviktsekvationerna formuleras i den ordning som framgår av fig :626 o. Jämviktsekvationernas koefficientmatrix  $A$ -matrisen (ordning 11·18) framgår av fig :626 p.  $S$ -matrisen (18·18) framgår av fig :626 r. Lastmatriserna  $Bq$ (11·5),  $\Delta_0$ (18·5) och  $Q_0$ (18·5) framgår av fig :626 q, s resp t.

Sedan beräkningarna genomförts över matrisekvationerna :624 (1), (2) och :623 (4) för  $h = 5,00$  m erhålls de resulterande deformations- och snittkraftsmatriserna  $U$  resp  $P_1$  enligt fig :626 u resp v.

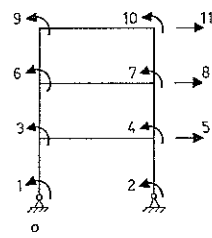
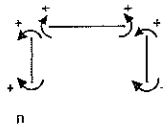
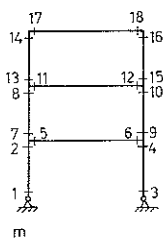
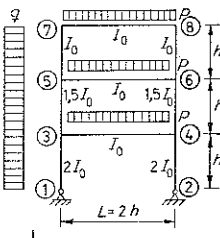


Fig :626 l-o

Jämvikts ekv. nr	Snittkrafter																	
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$	$M_6$	$M_7$	$M_8$	$M_9$	$M_{10}$	$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$M_{16}$	$M_{17}$	$M_{18}$
1	-1																	
2		-1																
3			1		-1	-1												
4				1		1		-1										
5	$-1/h$	$+1/h$	$-1/h$	$+1/h$			$+1/h$	$-1/h$	$+1/h$	$-1/h$								
6								1		-1		-1						
7									1		1			-1				
8							$-1/h$	$+1/h$	$-1/h$	$+1/h$			$+1/h$	$-1/h$	$+1/h$	$-1/h$		
9														1				-1
10																1		1
11												$-1/h$	$+1/h$	$-1/h$	$+1/h$			

Fig :626 p. A-matris (11-18)

Knutpunkt last nr	Lastfall nr				
	1	2	3	4	5
1	$qh^2/12$				
2					
3		$-PL^2/12$			
4			$PL^2/12$		
5	$qh$				
6			$-PL^2/12$		
7				$PL^2/12$	
8	$qh$				
9	$qh^2/12$				$-PL^2/12$
10					$PL^2/12$
11	$qh/2$				

Fig :626 q. Bq-matris (11-5)

Snittkraft	Vinkeländring													
	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$	$\theta_8$	$\theta_{15}$	$\theta_{16}$	$\theta_{17}$	$\theta_{18}$		
$M_1$	$8EJ_0/h$	$4EJ_0/h$												
$M_2$	$4EJ_0/h$	$8EJ_0/h$												
$M_3$			$8EJ_0/h$	$4EJ_0/h$										
$M_4$				$4EJ_0/h$	$8EJ_0/h$									
$M_5$						$4EJ_0/L$	$2EJ_0/L$							
$M_6$						$2EJ_0/L$	$4EJ_0/L$							
$M_7$								$6EJ_0/h$	$3EJ_0/h$					
$M_8$								$3EJ_0/h$	$6EJ_0/h$					
$M_{15}$										$4EJ_0/h$	$2EJ_0/h$			
$M_{16}$										$2EJ_0/h$	$4EJ_0/h$			
$M_{17}$												$4EJ_0/L$	$2EJ_0/L$	
$M_{18}$												$2EJ_0/L$	$4EJ_0/L$	

Fig :626 r. S-matris (18-18)

Vinkeländring	Lastfall nr				
	1	2	3	4	5
$\theta_5^0$					$Load/2d$
$\theta_6^0$					$Load/2d$

Fig :626 s.  $\Delta_0$ -matris (18-5)

Snittkraft	Lastfall nr				
	1	2	3	4	5
$M_1$	$qh^2/12$				
$M_2$	$qh^2/12$				
$M_5$			$-PL^2/12$		
$M_6$			$-PL^2/12$		
$M_7$	$qh^2/12$				
$M_8$	$qh^2/12$				
$M_{11}$				$-PL^2/12$	
$M_{12}$				$-PL^2/12$	
$M_{13}$	$qh^2/12$				
$M_{14}$	$qh^2/12$				
$M_{17}$					$-PL^2/12$
$M_{18}$					$-PL^2/12$

Fig :626 t.  $Q_0$ -matris (18-5)

Knutpunkt och def- riktning	Lastfall				
	1	2	3	4	5
1 ↷	-98,3	17,2	-5,1	2,0	-2,06
2 ↷	-96,7	-17,2	5,1	-2,0	2,06
3 ↷	-55,5	-34,4	10,1	-4,0	4,13
4 ↷	-56,1	34,4	-10,1	4,0	-4,13
4 →	415,4	0,0	0,0	0,0	0,00
5 ↷	-28,6	10,1	-43,9	17,5	-1,21
6 ↷	-28,0	-10,1	43,9	-17,5	1,21
6 →	651,6	0,0	0,0	0,0	0,00
7 ↷	-8,5	-4,0	17,6	-90,5	0,48
8 ↷	-10,7	4,0	-17,6	90,5	-0,48
8 →	759,7	0,0	0,0	0,0	0,0
Multipli- kator	$\frac{q}{EJ_0}$	$\frac{p}{EJ_0}$	$\frac{P}{EJ_0}$	$\frac{P}{EJ_0}$	$\frac{\alpha \Delta t}{h}$

Fig :626 u. U-matris (11·5)

Snitt- krafter	Lastfall				
	1	2	3	4	5
$M_1$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$M_2$	30,00	-4,13	1,21	-0,49	0,494
$M_3$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$M_4$	32,49	-4,13	-1,21	0,49	-0,494
$M_5$	33,39	-7,65	-0,20	0,08	0,916
$M_6$	-33,50	-7,65	-0,20	0,08	0,916
$M_7$	-3,38	3,52	1,42	-0,57	-0,422
$M_8$	15,34	-0,85	-4,65	1,86	0,102
$M_9$	-1,00	-3,52	-1,42	0,57	0,422
$M_{10}$	17,77	0,85	4,65	-1,86	-0,102
$M_{11}$	15,05	-0,20	-7,46	-0,35	0,024
$M_{12}$	-16,94	-0,20	-7,46	-0,35	0,024
$M_{13}$	-1,72	-0,64	2,81	2,21	0,008
$M_{14}$	5,58	0,08	-0,35	-6,53	-0,010
$M_{15}$	0,84	0,64	-2,81	-2,21	-0,077
$M_{16}$	6,04	-0,08	0,35	6,53	+0,010
$M_{17}$	5,58	0,08	-0,35	-6,53	-0,010
$M_{18}$	-6,04	0,08	-0,35	-6,53	-0,010
Multipli- kator	$q$	$p$	$P$	$P$	$\frac{\alpha \Delta t EJ_0}{h}$

Fig :626 v. P<sub>1</sub>-matris (18·5)

**:63 Kraftmetod**

**:631 Matriser och matrisekvationer**

Kraftmetoden i matrisform utgör en systematisering av de beräkningsmetoder för arbetskvationer, som beskrivits i :2. De där visade integralsambanden kan genom lämpligt val av utgångsmatriserna ersättas med matrismultiplikationer. Således kan ekv :262 (4) ersättas med matrisekvationen

$$C^T \cdot V \cdot D + C^T \cdot \Delta + C^T \cdot V \cdot C \cdot X = 0 \tag{1}$$

Här beskriver en kolumn hos

**C-matrisen** ( $n \cdot s$ ) snittkrafterna i den uppsnittade statistiskt bestämda jämförelsekonstruktionen p g a en statistiskt obestämd  $X_i = 1$ . Antalet rader ( $n$ ) är totala antalet oberoende randsnittkrafter inklusive reaktionskrafterna. Antalet kolumner ( $s$ ) är antalet statistiskt obestämda.

Vidare gäller:

**V-matrisen** ( $n \cdot n$ ) är vehkets-(flexibilitets-)matrisen enligt :622.

**D-matrisen** ( $n \cdot l$ ) beskriver snittkrafterna hos den statistiskt bestämda jämförelsekonstruktionen orsakade av yttre last, med en kolumn för varje lastfall.

**Δ-matrisen** ( $n \cdot l$ ) anger lastkonstanterna ( $\theta_a^0, \theta_b^0, \delta_N^0$  etc se :32B) för de olika lastfallen.

Det bör observeras, att integraltermen  $\int_L (M_1 M_0 / EI) dx$  etc i ekv (1) i :262 motsvaras av 2 termer i matrisekvationen (1).  $C^T \cdot V \cdot D$  innebär en integration under förutsättning av lineärt varierande momentvariation över elementen. Den icke-lineära variationen över belastade element införs genom termen  $C^T \cdot \Delta$  genom att lastkonstanterna förekommer i  $\Delta$ -matrisen.

Ur ekv (1) kan de statistiskt obestämda,  $X$  lösas. Systemmatrisen  $C^T \cdot V \cdot C$  är symmetrisk, vilket är en följd av Maxwells sats

$$X = -(C^T \cdot V \cdot C)^{-1} \cdot (C^T \cdot V \cdot D + C^T \cdot \Delta) \tag{2}$$

Sedan de statiskt obestämda beräknats, erhålls de resulterande snittkrafterna  $P$  enligt sambandet

$$P = C \cdot X + D \tag{3}$$

$P$ -matrisen ( $n \cdot l$ ) innehåller resulterande snittkrafter för de olika lastfallen. Deformationerna beräknas därefter ur ekvationen

$$Z = F^T \cdot V \cdot P + F^T \cdot \Delta \tag{4}$$

$F$ -matrisen ( $n \cdot d$ ) innehåller snittkrafter i den uppsnittade, statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen, orsakade av enhetskrafter respektive enhetsmoment i den önskade deformationens punkt och riktning. Antalet kolonner ( $d$ ) är lika med antalet deformationer som beräknas.

$Z$ -matrisen ( $d \cdot l$ ) innehåller de resulterande deformationerna i de av  $F$ -matrisen definierade riktningarna och för de olika lastfallen.

**:632 Beräkninggång**

- 1 Givet: Konstruktionens geometri och de enskilda elementens vektorer samt lastfall
- 2 Numrera de obekanta randsnittkrafterna
- 3 Bestäm antalet statiskt obestämda. Välj dessa och därmed den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen
- 4 Ställ upp  $C$ - och  $V$ -matriserna
- 5 Bestäm kraftfördelningen i den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen
- 6 Ställ upp  $D$ - och  $\Delta$ -matriserna
- 7 Beräkna de statiskt obekanta  $X$  och de resulterande snittkrafterna  $P$  med hjälp av ekv :631 (2) och (3)
- 8 Ställ upp  $F$ -matrisen om deformationer skall bestämmas
- 9 Beräkna deformationsmatrisen  $Z$  enligt ekv :631 (4).

**:633 Beräkningsexempel**

Spännbockskonstruktion enligt fig :633 a, som även behandlats i :27, beräknas här för jämnt utbredd last (lastfall 1), längdskrympning av balken  $\epsilon$  (lastfall 2) och linear temperaturgradient med temperaturdifferensen  $\Delta t$  mellan balkens över- och undersida. Längdutvidningskoefficienten är  $\alpha$ .

Snittkrafterna numreras enligt fig :633 b och de statiskt obestämda  $X_1$  och  $X_2$  väljs som redovisats på fig :27 h eller fig :27 j och k.

Snittkraftsfördelningen i den statiskt bestämda jämförelsekonstruktionen p g a  $X_1 = 1$  och  $X_2 = 1$  beskrivs i  $C$ -matrisen (fig :633 c) och inverkan av yttre last i  $D$ -matrisen (fig :633 d).  $\Delta$ -matrisen (fig :633 e) innehåller lastkonstanter  $\theta^0$  och  $\delta$ . Slutligen beskrivs elementens elastiska egenskaper i  $V$ -matrisen (fig :633 f).

Beräkningarna genomförs för  $a = 4$  m,  $A = 10$  cm<sup>2</sup>,  $I_b = 40\ 000$  cm<sup>4</sup>,  $E = 2,1 \cdot 10^6$  MN/m<sup>2</sup>,  $E_b = 3,5 \cdot 10^4$  MN/m<sup>2</sup>,  $q = 0,01$  MN/m,  $\epsilon = 10 \cdot 10^{-5}$ ,  $\Delta t = 10^\circ\text{C}$  och  $\alpha = 1,0 \cdot 10^{-5}$  enligt matrisekvationer :631 (2) och (3). Den resulterande snittkraftsfördelningen erhålls därvid i  $P$ -matrisen (fig :633 g).

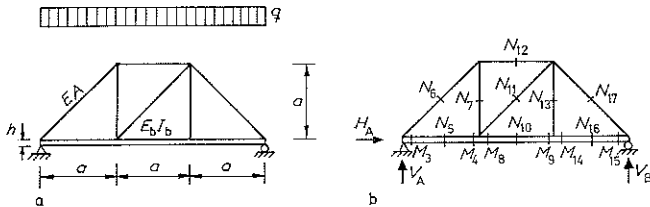


Fig :633 a och b

Snitt- krafter	Stat obest	
	$X_1$	$X_2$
$H_A$		
$V_A$		
$M_3$		
$M_4$	$\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$	
$N_5$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$N_6$	1	
$N_7$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$M_8$	$\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$	
$M_9$		$\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$
$N_{10}$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$N_{11}$	-1	1
$N_{12}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$N_{13}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{2}$
$M_{14}$		$\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$
$M_{15}$		
$N_{16}$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$N_{17}$		1
$V_B$		

Fig :633c. C-matris (18-2)

Snitt- krafter	Lastfall		
	1	2	3
$H_A$			
$V_A$	$1,5q_0$		
$M_3$			
$M_4$	$q_0 a^2$		
$N_5$			
$N_6$			
$N_7$			
$M_8$	$q_0 a^2$		
$M_9$	$q_0 a^2$		
$N_{10}$			
$N_{11}$			
$N_{12}$			
$N_{13}$			
$M_{14}$	$q_0 a^2$		
$M_{15}$			
$N_{16}$			
$N_{17}$			
$V_B$	$1,5q_0$		

Fig :633d. D-matris (18-3)

Last- kon- stanter	Lastfall		
	1	2	3
$u_{AH}$			
$u_{AV}$			
$\theta_3$	$\frac{\sigma^3}{24 E_b J_b}$	$-\frac{\alpha \sigma \Delta t}{2h}$	
$\theta_4$	$\frac{\sigma^3}{24 E_b J_b}$	$-\frac{\alpha \sigma \Delta t}{2h}$	
$\delta_5$		$-\sigma \varepsilon$	
$\delta_6$			
$\delta_7$			
$\theta_8$	$\frac{\sigma^3}{24 E_b J_b}$	$-\frac{\alpha \sigma \Delta t}{2h}$	
$\theta_9$	$\frac{\sigma^3}{24 E_b J_b}$	$-\frac{\alpha \sigma \Delta t}{2h}$	
$\delta_{10}$		$-\sigma \varepsilon$	
$\delta_{11}$			
$\delta_{12}$			
$\delta_{13}$			
$\theta_{14}$	$\frac{\sigma^3}{24 E_b J_b}$	$-\frac{\alpha \sigma \Delta t}{2h}$	
$\theta_{15}$	$\frac{\sigma^3}{24 E_b J_b}$	$-\frac{\alpha \sigma \Delta t}{2h}$	
$\delta_{16}$		$-\sigma \varepsilon$	
$\delta_{17}$			
$u_{VB}$			

Fig :633e. A-matris (18-3)

	$H_A$	$V_A$	$M_3$	$M_4$	$N_5$	$N_6$	$N_7$	$M_8$	$M_9$	$N_{10}$	$N_{11}$	$N_{12}$	$N_{13}$	$M_{14}$	$M_{15}$	$N_{16}$	$N_{17}$	$V_B$
$\theta_3$			$\alpha^0 \beta^0$															
$\theta_4$			$\beta^0 \alpha^0$															
$\delta_5$					$\frac{\sigma \sqrt{2}}{EA}$													
$\delta_7$						$\frac{\sigma}{EA}$												
$\theta_8$							$\alpha^0 \beta^0$											
$\theta_9$							$\beta^0 \alpha^0$											
$\delta_{11}$								$\frac{\sigma \sqrt{2}}{EA}$										
$\delta_{12}$									$\frac{\sigma}{EA}$									
$\delta_{13}$										$\frac{\sigma}{EA}$								
$\theta_{14}$											$\alpha^0 \beta^0$							
$\theta_{15}$											$\beta^0 \alpha^0$							
$\delta_{17}$																	$\frac{\sigma \sqrt{2}}{EA}$	

Fig :633f. V-matris (18-18).  $\alpha^0 = a/3E_b J_b$ ;  $\beta^0 = a/6E_b J_b$

Reaktions- a snitt- krafter	Lastfall		
	1	2	3
$H_A$	0,000	0,0000	0,000
$V_A$	6,000	0,0000	0,000
$M_3$	0,000	0,0000	0,000
$M_4$	-1,292	-0,0305	-0,165
$N_5$	4,323	0,0076	0,041
$N_6$	-6,114	-0,0108	-0,058
$N_7$	4,323	0,0076	0,041
$M_8$	-1,292	-0,0305	-0,165
$M_9$	-1,163	-0,0927	-0,164
$N_{10}$	4,291	0,0232	0,041
$N_{11}$	0,045	-0,0220	0,000
$N_{12}$	-4,323	-0,0076	-0,041
$N_{13}$	4,259	0,0387	0,041
$M_{14}$	-1,163	-0,0927	-0,164
$M_{15}$	0,000	0,0000	0,000
$N_{16}$	4,291	0,0232	0,041
$N_{17}$	-6,068	-0,0328	-0,058
$V_B$	6,000	0,00	0,00
Multipli- kator	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$

Fig :633g. P-matris (18-3). Reak-  
tioner och normalkrafter i MN  
och moment i MNm

**:64 Andra ordningens teori****:641 Allmänt**

Under :62 och :63 behandlas deformations- och kraftmetoderna enligt s k linjär teori. Därvid förutsätts små deformationer, idealelastiskt material och giltighet av superpositionslagen. Är något av dessa villkor inte uppfyllt måste även termer av högre ordning medtas i jämvikts- och kontinuitets-samband. Detta leder i allmänhet till att beräkningarna måste utföras efter något iterativt förfarande.

Linkonstruktioner är ett exempel på konstruktioner där direkt proportionalitet inte gäller mellan deformationer och laster. Andra exempel är slanka tryckta konstruktioner, bärverk med krökt  $\sigma$ - $\epsilon$ -kurva liksom böjda och dragna betongkonstruktioner, vilkas tvärsnittsvärden varierar med lasten.

Såväl deformations- som kraftmetoden kan generaliseras till s k 2:dra ordningens teori. Den förstnämnda metoden är därvid i allmänhet att föredra, varför endast denna kommer att behandlas här.

**:642 Jämviktsekvationer**

Då konstruktionen deformeras ändrar sig de enskilda elementens absoluta riktningar vilket innebär att A-matrissens termer i ekv :621 (1) blir en funktion av knutpunktsdeformationerna ( $u$ ). Jämviktsekvationerna kan då skrivas under formen

$$A(u) \cdot P = Bq \quad (1)$$

Utvecklas ekv (1) enligt Taylors formel erhålls

$$A(u_1) \cdot \Delta P + D(p_1) \cdot \Delta U = Bq - A(u_1) \cdot P_1 = \Delta Bq_1 \quad (2)$$

$\Delta U$  och  $\Delta P$  är här tillskottsvärdena för knutpunktsdeformationer och snittkrafter. Vidare är

$$D(p_1) \cdot \Delta U = \frac{\delta}{\delta u} (A(u) \cdot \Delta P)_1 \cdot \Delta U \quad (3)$$

**D-matrisen** ( $j \cdot j$ ) beskriver därvid förändringen i knutpunktsjämvikten, då konstruktionen under kända snittkrafter  $p_1$  påtvings enhetsdeformationer i var och en av de riktningar, som definierats av jämviktsekvationerna. Matriselementet  $d_{kj}$  anger således kraften (momentet) i av ekv k definierad riktning  $p$  g a påtvingad enhetsdeformation i den riktning, som definierats av ekv 1. **D**-matrisen är kvadratisk och symmetrisk.

$\Delta Bq$ -matrisen ( $j \cdot 1$ ) beskriver de tillskottslaster som erhålls i knutpunkterna som skillnaden mellan yttre laster och de deformerade elementens reaktioner på knutpunkten. I  $\Delta Bq$ -matrisen ingår även eventuella korrekationer av de fasta inspänningsmomenten hos det deformerade och initialbelastade elementet.

Se 157:4

**:643 Kontinuitetssamband**

Enligt linjär teori formuleras kontinuitetssambanden av ekv :623 (1). Tas hänsyn till de enskilda elementens deformation och till knutpunktsrörelserna kan ekvationen skrivas under den allmänna formen

$$-V(p) \cdot P + T(u) \cdot U = \Delta_0 \quad (1)$$

Ekv (1) innebär att **V**-matrisens vektorsvärden  $\theta_a^0$ ,  $\theta_b^0$  och  $\delta_N$  (fig :643 a) är en funktion av snittkrafterna  $M_a$ ,  $M_b$  och  $N$  och vidare att transforma-

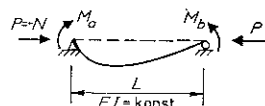


Fig :643 a



tionsmatrisens **T** termer varierar med knutpunktsdeformationen **U**. Utvecklas ekv (1) enligt Taylors formel erhålls

$$-\bar{V}(p_1) \cdot \Delta P + \frac{\delta}{\delta u} (\mathbf{T}(u)) \cdot \Delta U = \Delta_0 + \mathbf{V}(p_1) \cdot \mathbf{P}_1 - \mathbf{T}(u_1) \cdot \mathbf{U}_1 \quad (2)$$

Här är

$$\bar{V}(p_1) = \frac{\delta}{\delta p} [\mathbf{V}(p)]_1$$

Matrisen  $\mathbf{V}(p_1)$  ger tillskottsdeformationerna i lastläget  $M_{a1}$ ,  $M_{b1}$  och  $N_1$  på grund av  $\Delta M_a = 1$ ,  $\Delta M_b = 1$  och  $\Delta N = 1$ . Matrisens utseende för den fritt upplagda balken med konstant  $EI$  enligt fig :643 a framgår av fig :643 b och de ingående termernas storlek av ekv (3) och (4). Matrisprodukten  $\bar{V}(p_1) \cdot \Delta P$  ger således som resultat de elastiska tillskottsdeformationerna  $p$  g a  $\Delta P$ . Produkten  $\mathbf{V}(p_1) \cdot \mathbf{P}_1$  ger däremot de totala deformationerna fram till lastläge  $\mathbf{P}_1$  (fig :643 c).

I de fall normalkraftens variation med deformationen kan försummas (dvs  $\Delta N \sim 0$ ) kan  $\gamma$ -termerna enligt fig :643 b och c sättas till 0 och  $\bar{V}(p_1) = \mathbf{V}(p_1)$

$$\alpha_a = \alpha_b = \psi L / 3EI \quad (3a)$$

$$\beta_{ab} = \varphi L / 6EI \quad (3b)$$

$$\gamma_{aN} = -\varrho [L^3 / 2(EI)^2] M_a - \lambda [L^3 / 2(EI)^2] M_b \quad (3c)$$

$$\gamma_{bN} = -\lambda [L^3 / 2(EI)^2] M_a - \varrho [L^3 / 2(EI)^2] M_b \quad (3d)$$

$$\delta = L / EA \quad (3e)$$

med

$$\psi = (3/kL)(1/kL - 1/\tan kL) \quad (4a)$$

$$\varphi = (6/kL)(1/\sin kL - 1/kL) \quad (4b)$$

$$\varrho = [1/(kL)^2] [-2/(kL)^2 + 1/kL \tan kL + 1/\sin^2 kL] \quad (4c)$$

$$\lambda = [1/(kL)^2] [2/(kL)^2 - 1/kL \sin kL - 1/\tan kL \sin kL] \quad (4d)$$

$$kL = L\sqrt{P/EI} \quad (4e)$$

$\psi$ - och  $\varphi$ -funktionerna, de s k Berryfunktionerna, finns redovisade i diagramform i kap 157: 422. De antar oändligt stora värden då  $kL = \pi$  dvs då  $P$  når det enskilda elementets knäcklast. För den här beskrivna iterativa beräkningsmetoden kan man i det allmänna fallet inte tillåta att denna last uppnås. Om risk härför förefinns måste elementen uppdelas i smärre element genom att extra knutpunkter införs. Vid beräkningar med hjälp av datorer är det t o m lämpligt att välja elementen så små att vekhetsvärdenas variation kan försummas. Detta kan med tillfredsställande noggrannhet ske om  $kL < \pi/6$  varvid med god approximation  $\varphi = \psi = 1$  och  $\varrho = \lambda = 0$ . Härigenom vinnns även den fördelen att också element med varierande tröghetsmoment kan behandlas utan svårighet.

Sambandet mellan transformationsmatrisen  $\mathbf{T}(u)$  och jämviktsekvationernas koefficientmatris  $\mathbf{A}(u)$  kan i det generaliserade fallet skrivas

$$\frac{\delta}{\delta u} [\mathbf{T}(u) \cdot \mathbf{U}] = \mathbf{A}(u) \quad (5)$$

Försummas i ekv (5) termer av högre ordning än 2:dra grads termer i  $u$  erhålls

$$\mathbf{T}(u_1) \simeq 0,5[\mathbf{A}^T(0) + \mathbf{A}^T(u_1)] \quad (6)$$

	$\Delta M_a$	$\Delta M_b$	$\Delta N$
$\Delta \theta_a$	$\alpha_a$	$\beta_{ab}$	$\gamma_{aN}$
$\Delta \theta_b$	$\beta_{ba}$	$\alpha_b$	$\gamma_{bN}$
$\Delta \delta_N$	$\gamma_{aN}$	$\gamma_{bN}$	$\delta$

Fig :643 b

	$M_a$	$M_b$	$N$
$\theta_a$	$\alpha_a$	$\beta_{ab}$	
$\theta_b$	$\beta_{ba}$	$\alpha_b$	
$\delta_N$	$\gamma_{aN}/2$	$\gamma_{bN}/2$	$\delta$

Fig :643 c

**:644** Bestämning av tillskott i deformationer och snittkrafter

Sammanställs ekv :643 (2) med utnyttjande av ekv :643 (5), (6) med ekv :642 (2) erhålls

$$-\bar{\mathbf{V}}(p_1) \cdot \Delta \mathbf{P} + \mathbf{A}^T(u_1) \cdot \Delta \mathbf{U} = \Delta \Delta_0 \quad (1a)$$

$$\mathbf{A}(u_1) \cdot \Delta \mathbf{P} + \mathbf{D}(p_1) \cdot \Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{Bq} \quad (1b)$$

Här är

$$\Delta \Delta_0 = \Delta_0 + \mathbf{V}(p_1) \cdot \mathbf{P}_1 - 0,5 \cdot [\mathbf{A}^T(0) + \mathbf{A}^T(u_1)] \cdot \mathbf{U}_1 \quad (2)$$

Ur ekv (1a) kan  $\Delta \mathbf{P}$  bestämmas uttryckt i  $\Delta \mathbf{U}$

$$\Delta \mathbf{P} = \bar{\mathbf{S}}(p_1) [\mathbf{A}^T(u_1) \cdot \Delta \mathbf{U} - \Delta \Delta_0] \quad (3)$$

och efter insättning i ekv (1b) erhålls

$$[\mathbf{A}(u_1) \cdot \bar{\mathbf{S}}(p_1) \cdot \mathbf{A}^T(u_1) + \mathbf{D}(p_1)] \Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{Bq} + \mathbf{A}(u_1) \cdot \bar{\mathbf{S}}(p_1) \Delta \Delta_0 \quad (4)$$

Ekv (4) representerar ett lineärt ekvationssystem i  $\Delta u$ . Eftersom  $\mathbf{D}(p_1)$  är en symmetrisk matris är även ekvationssystemet symmetriskt. Ur ekv (4) kan  $\Delta \mathbf{U}$  beräknas och genom insättning i ekv (3) erhålls  $\Delta \mathbf{P}$ . Totala deformationer och snittkrafter kan därefter bestämmas enligt

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1 + \Delta \mathbf{U} \quad (5a) \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 + \Delta \mathbf{P} \quad (5b)$$

Iterationerna avbryts när tillskotten är försumbart små. I normala fall är 2 till 3 steg tillräckligt för att resttermerna skall bli mindre än 1 %.

**:645** Beräkningsgång

1 Givet: Systemets geometri och styvhetsvärden samt aktuellt lastfall

Då tillämpningen av :644 varierar något för dragna och tryckta konstruktioner beskrivs den nedan separat för vardera av dessa konstruktionstyper.

**A** Förspända eller förbelastade linkonstruktioner

Dessa konstruktioner är uppbyggda av enbart normalkraftsupptagande linelement varför böjtermerna bortfaller ur vektormatrisen. Detta innebär att  $\bar{\mathbf{V}}(p_1) = \mathbf{V}(p_1) = \mathbf{V}(0)$ . Förspänningen ( $\mathbf{P}_0$ ) innebär att beräkningarna inte startar från  $\mathbf{U} = 0$  och  $\mathbf{P} = 0$  utan från  $\mathbf{U} = 0$  och  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ .

2 Ställ upp matriserna  $\mathbf{A}(0)$ ,  $\mathbf{V}(0)$ ,  $\mathbf{D}(p_0)$  och  $\mathbf{Bq}$ .

3 Beräkna  $\mathbf{U}_1 = \Delta \mathbf{U}$  och  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + \Delta \mathbf{P}$  enligt ekv :644 (4) och (3).

4 Ställ upp matriserna  $\mathbf{A}(u_1)$ ,  $\mathbf{D}(p_1)$ ,  $\Delta \Delta_0$  och  $\Delta \mathbf{Bq}$ .

5 Beräkna  $\Delta \mathbf{U}$  och  $\Delta \mathbf{P}$  enligt ekv :644 (3), (4) och (5).

6 Upprepa 4 och 5 tills tillräcklig noggrannhet erhålls.

**B** Tryckta konstruktioner

2 Multiplicera lasten med säkerheten  $s$

Jfr 157: 44

3 Beräkna knutpunktsdeformationen  $\mathbf{U}_1$  och snittkraftsfördefinigen  $\mathbf{P}_1$  enligt linjär teori (se :62).

4 Ställ upp matriserna  $\mathbf{A}(u_1)$ ,  $\mathbf{V}(p_1)$ ,  $\mathbf{D}(p_1)$  och  $\Delta \mathbf{Bq}_1$ . Är elementindelningen sådan att det enskilda elementets knäcksäkerhet ( $=\pi/kL$ ) > 6 är  $\mathbf{V}(p_1) \simeq \mathbf{V}(0)$ . Delningen måste under alla förhållanden väljas så att  $\pi/kL > 1$ .

5 Beräkna  $\Delta \Delta_0$  enligt ekv :644 (2),  $\Delta \mathbf{U}$  och  $\Delta \mathbf{P}$  enligt ekv :644 (4) och (3) samt  $\mathbf{U}_1$  och  $\mathbf{P}_1$  enligt ekv :644 (5).

6 Upprepa 4 och 5 tills dess erforderlig noggrannhet erhålls.

7 Dividera resulterande snittkrafter med  $s$ . Så erhållna snittkrafter kan därefter jämföras med tillåtna värden för  $L/i = 0$ , där  $i =$  tvärsnittets tröghetsradie.

:646 Beräkningsexempel

Exempel 1. Ramkonstruktion

Beräkna enligt andra ordningens teori momentfördelning och horisontell knutpunktsförskjutning för ramen enligt fig :646a. Samtliga element har de konstanta tvärsnittsvärdena  $EI=2,50 \text{ MNm}^2$ ,  $EA=400 \text{ MN}$ ,  $L=10 \text{ m}$ .

Snittkrafterna numreras enligt fig :646b. Momentdiagram och deformationer enligt linjär teori framgår av fig :646c och d. Horizontaldeformationen  $u_H=0,04764 \text{ m}$ .

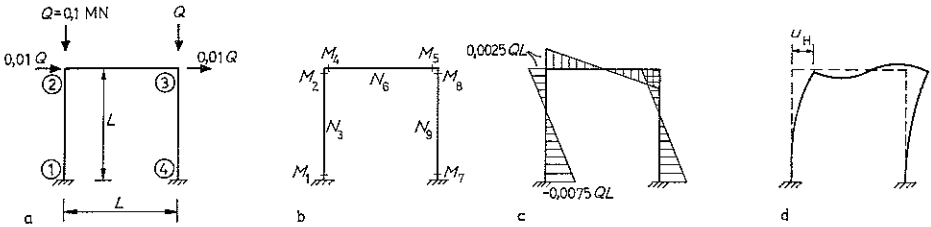


Fig :646a-d

$A(u_1)$ -matrisen för det deformerade systemet framgår av fig :646e. För element 1-2 och 3-4 är  $kL=2,00$ . Normalkrafterna i rambenen är praktiskt taget konstanta  $= -Q(\Delta N \sim 0)$ .  $\delta$ -termerna enligt fig :643 b och c kan därför sättas till 0, varav följer att  $\bar{V}(p_1) \simeq V(p_1)$ , se :643.

Knutpunkt och kraftriktning	Snittkrafter								
	$M_1$	$M_2$	$N_3$	$M_4$	$M_5$	$N_6$	$M_7$	$M_8$	$N_9$
2 →	$-1/L$	$1/L$	$u_H/L$			-1			
2 ↑	$u_H/L^2$	$-u_H/L^2$	1	$-1/L$	$1/L$				
2 ↻		1	-1						
3 →						1	$-1/L$	$1/L$	$u_H/L$
3 ↑				$1/L$	$-1/L$	$u_H/L^2$	$-u_H/L^2$	1	
3 ↻					1			-1	

Fig :646e.  $A(u_1)$ -matris (6-9)

	Snittkrafter								
	$M_1$	$M_2$	$N_3$	$M_4$	$M_5$	$N_6$	$M_7$	$M_8$	$N_9$
$\theta_1$	$1435L/3EJ$	$180L/6EJ$							
$\theta_2$	$180L/6EJ$	$1435L/3EJ$							
$\delta_3$			$L/EA$						
$\theta_4$				$L/3EJ$	$L/6EJ$				
$\theta_5$				$L/6EJ$	$L/3EJ$				
$\delta_6$						$L/EA$			
$\theta_7$							$1435L/3EJ$	$180L/6EJ$	
$\theta_8$							$180L/6EJ$	$1435L/3EJ$	
$\delta_9$									$L/EA$

Fig :646f.  $V(p_1)$ -matris (9-9)

Knutpunkt och def-riktning	
2 → 2 ↑ 2 ↻ 3 → 3 ↑ 3 ↻	
$\theta_1$	$-1/L \frac{u_H}{2L^2}$
$\theta_2$	$1/L \frac{u_H}{2L^2}$
$\delta_3$	$1$
$\theta_4$	$-1/L \quad -1 \quad 1/L$
$\theta_5$	$1/L \quad -1/L \quad 1$
$\delta_6$	$-1 \quad 1$
$\theta_7$	$-1/L \frac{u_H}{2L^2}$
$\theta_8$	$1/L \frac{u_H}{2L^2}$
$\theta_9$	$1$

Fig :646g.  $T(u_1)$ -matris (9·6)

Knutpunkt och def-riktning		2	2	2	3	3	3
		→	↑	↻	→	↑	↻
2	→	$-\frac{Q}{L}$	$-0,01\frac{Q}{L}$				
2	↑		$0,01\frac{Q}{L}$				
2	↻						
3	→				$-\frac{Q}{L}$	$-0,01\frac{Q}{L}$	
3	↑				$-0,01\frac{Q}{L}$		
3	↻						

Fig :646h.  $D(p_1)$ -matris (6·6)

Knutpunkt och last-riktning		
2	→	$Q \frac{u_H}{L}$
2	↑	$0,01 Q \frac{u_H}{L}$
2	↻	
3	→	$Q \frac{u_H}{L}$
3	↑	$0,01 Q \frac{u_H}{L}$
3	↻	

Fig :646i.  $\Delta Bq$ -matris (6·1)

Enligt ekv :643 (4a), (4b) erhålls  $\psi = 1,435$  och  $\varphi = 1,80$ . Med dessa värden insatta erhålls  $V(p_1)$ -matrisen enligt fig :646f.

Enligt ekv :643 (6) kan  $T(u_1)$ -matrisen beräknas ur  $A(u_1)$  och  $A(0)$ -matriserna.  $T(u_1)$ -matrisen framgår av fig :646g.  $\Delta\Delta_0$ -matrisen kan nu beräknas enligt sambandet

$$\Delta\Delta_0 = V(p_1) \cdot P_1 - T(u_1) \cdot U_1 \quad (a)$$

$P_1$ -matrisen är därvid resultatmatrisen enligt linjär teori.

$D(p_1)$ -matrisen som beskriver knutpunktsjämviktens variation med enhetsdeformationer framgår av fig :646h.

$\Delta Bq$ -matrisen slutligen kan beräknas ur följande matrizekvation (b) eller ställas upp direkt.

$$\Delta Bq = Bq - A(u_1) P_1 \quad (b)$$

Matrisen framgår av fig :646i.

$\Delta U$  och  $\Delta P$  kan nu beräknas enligt ekv :644 (4) och (3) varefter  $U_2$  och  $P_2$  beräknas enligt ekv :644 (5). De i de olika iterationsstegen beräknade  $u_H$ -värdena framgår av fig :646j. Redan efter 2 beräkningssteg har ca 98 % av slutlig deformation erhållits.

Resultaterande moment framgår av fig :646k.

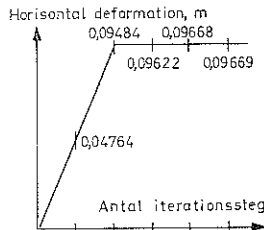


Fig :646j

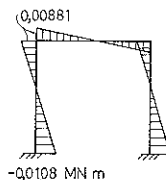


Fig :646k

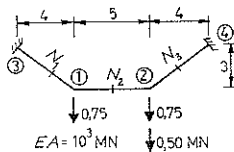


Fig :646l

**Exempel 2. Linkonstruktion**

Linkonstruktionen enligt fig :646 l har under initiallasten 2·0,75 MN intagit den i fig :646 l visade formen. Beräkna tillskottsdeformationen och linkrafterna av tillskottslasten 0,50 MN. Linkrafterna  $P_0$  av initiallasten framgår av fig :646m.

Denna konstruktion kan inte beräknas enligt linjär teori då den bildar ett labilt fackverk. Beräkningarna startar emellertid från utgångsläget  $P = P_0$  och  $U = 0$  och ekvationssystemet :644 (1) får för 1:a iterationssteget formen

$$\left. \begin{aligned} -V \cdot \Delta P + A^T(0) \cdot \Delta U &= 0 \\ A(0) \cdot \Delta P + D(P_0) \cdot \Delta U &= Bq \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

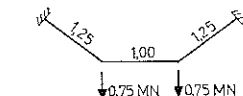


Fig :646m

V-matrisen och A(0)-matrisen framgår av fig :646n och o.

För bestämning av D(P<sub>0</sub>)-matrisens termer tänks knutpunkterna tvångs-förflyttas en liten enhetssträcka i de riktningar som definieras av jämvikts-ekvationerna. Förflyttningen tänks ske med oförändrade normalkrafter P<sub>0</sub> och termerna anger förändringen i knutpunktsjämvikten.

För bestämning av termerna på matrisens 1:a rad tänks alltså knutpunkt 1 förskjuten Δu=1 åt höger (fig :646p). För element 0-1 innebär detta en vinkeländring dα. Detta orsakar en förändring i horisontella jämvikten med P<sub>01</sub> sin α dα och i vertikal riktning av P<sub>01</sub> cos α dα (fig :646q). Eftersom det andra elementet från knutpunkten inte riktningförändras erhålls alltså för 1:a raden i D(P<sub>0</sub>)-matrisen

$$d_{11} = (P_{01}/L) \sin^2 \alpha; d_{12} = (P_{01}/L) \sin \alpha \cos \alpha$$

D(P<sub>0</sub>)-matrisen framgår av fig :646r.

Ur ekvationssystem (a) kan nu ΔP och ΔU bestämmas. U<sub>1</sub> och P<sub>1</sub> kan beräknas enligt ekvationen

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= 0 + \Delta U \\ P_1 &= P_0 + \Delta P \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Med utgångspunkt från den nya geometrin uppställs nya matriser A(u<sub>1</sub>) och D(P<sub>1</sub>). Sedan ΔΔ<sub>0</sub> och ΔBq beräknats enligt ekv :644 (2) och :642 (2)

	Snittkrafter		
	ΔN <sub>1</sub>	ΔN <sub>2</sub>	ΔN <sub>3</sub>
δ <sub>1</sub>	L/EA		
δ <sub>2</sub>	L/EA		
δ <sub>3</sub>	L/EA		

Fig :646n. V-matris

Knutpunkt och ekv-riktning	Snittkrafter		
	ΔN <sub>1</sub>	ΔN <sub>2</sub>	ΔN <sub>3</sub>
1 →	0,8	-1	
1 ↑	-0,6		
2 →		1	-0,8
2 ↑			-0,6

Fig :646o. A(0)-matris

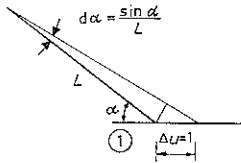


Fig :646p

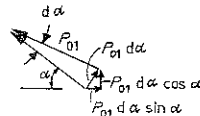


Fig :646q

kan ΔU och ΔP på nytt bestämmas ur ekv :644 (4) och (3) osv. Beräkningarna fortsätter tills tillfredsställande konvergens erhållits. Vertikaldeformationerna i punkterna ① och ② för de successiva iterationsstegen framgår av fig :646s och resulterande normalkrafter av fig :646t.

**:65 Stabilitet**

Ekv :644 (4) beskriver ett lineärt ekvationssystem. Detta är i allmänhet lös-bart men ökas lastnivån p<sub>1</sub> genom multiplikation med en skalär faktor λ kan vissa lastnivåer nås för vilka ingen lösning kan erhållas genom att den till ekvationssystemet hörande determinanten blir 0. Separeras de p<sub>1</sub>-beroende termerna från de övriga i vänsterledet och multipliceras p<sub>1</sub> med skälären λ kan ekvationssystemet skrivas

$$\{A(u_1) \cdot S(0) + A^T(u_1) \cdot \lambda [A(u_1) \cdot \Delta S(p_1) + A^T(u_1) + D(p_1)]\} \Delta U = HL \quad (1)$$

där ΔS(p<sub>1</sub>) = S(p<sub>1</sub>) - S(0)

HL=ekvationssystemets högerled.

De lastlägen (λ<sub>1</sub>, λ<sub>2</sub> ...) för vilka ekv (1) saknar lösning sägs vara system-matrisens egenvärden. Av speciellt intresse är därvid det lägsta egenvärdet λ<sub>1</sub> som representerar konstruktionens knäcksäkerhet. Tillhörande deformationsvektor ΔU ger knäckkurvans form. (Betr egenvärdesberäkning se 124: 353.)

För konstruktioner med små deformationer och för vilka normalkrafternas variation med deformationen kan försummas kan λ och ΔU direkt bestämmas ur ekv (1). I annat fall bestäms p<sub>1</sub>, u<sub>1</sub> och λ<sub>1</sub> för successivt ökande lastnivåer. Den kritiska lasten erhålls då när λ=1.

Knutpunkt och ekv-riktning	Knutpunktsdef			
	u <sub>1</sub>	u <sub>2</sub>	u <sub>3</sub>	u <sub>4</sub>
1 →	0,090	0,120		
1 ↑	0,120	0,360		-0,20
2 →			0,090	0,120
2 ↑			-0,20	0,360

Fig :646r. D(P<sub>0</sub>)-matris

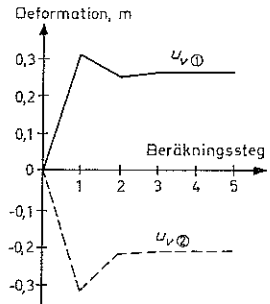


Fig :646s

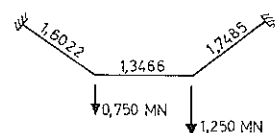


Fig :646t

## :7 Jämförelse mellan olika metoder för bruksstadiet

De i :2-:6 beskrivna beräkningsmetoderna utgör olika sätt att bestämma kraftfördelning och deformationer för statiskt obestämda konstruktioner med hänsyn till jämviktsvillkor och kontinuitetssamband. Förutsätts små deformationer, bibehållen tvärsnittsform och idealelastiskt material leder dessa samband till ett lineärt ekvationssystem. Detta kan lösas med såväl direkta som iterativa metoder vilket framgår av de beskrivna metoderna. Är någon av ovan nämnda förutsättningar inte uppfylld erhålls samband av högre ordning och beräkningarna måste utföras med hänsyn härtill (se :64).

De ovan nämnda jämviktsvillkoren och kontinuitetssambanden kan överföras till ekvationssystem med obekanta snittstorheter eller med obekanta deformationsstorheter (= knutpunktsrotationer och förskjutningar). Beröende på dessa obekanta sägs en beräkning enligt kraft- respektive deformationsmetod föreligga. Arbetskvationer och Castiglianos sats (se :2 och :63) är kraftmetoder. Beräkning med hjälp av elasticitetsekvationer (se :3) och primärmomentmetoden (se :4) är vid tillämpning på system med oförskjutbara knutpunkter rena kraftmetoder medan de vid tillämpning på system med förskjutbara knutpunkter får karakteriseras som en kombination av kraft- och deformationsmetod. Den successiva momentutjämningsmetoden eller Cross' metod (se :5) torde närmast kunna betraktas som en deformationsmetod.

Vad gäller användningen av dessa metoder kan allmänt sägas att kraftmetoder bör eftersträvas för konstruktioner med litet antal statiskt obestämda jämfört med antal frihetsgrader för knutpunktsdeformationer. Höggradigt statiskt obestämda konstruktioner med relativt få frihetsgrader (t ex pålgrupper) bör beräknas med hjälp av deformationsmetod.

Större konstruktioner beräknas numera med fördel med hjälp av datorer med hänsyn till den stora arbetsinsats som krävs för manuella beräkningar. Detta gäller särskilt system med många knutpunktsförskjutningsmöjligheter.

Vad gäller valet av beräkningsmetod vid manuellt utförda beräkningar kan följande rekommendationer ges:

*Arbetskvationer och Castiglianos sats* är lämpliga för låggradigt statiskt obestämda konstruktioner. Hänsyn kan lätt tas till ledade förbindningar, dragstag etc.

En beräkning med *elasticitetsekvationer* blir vid enkla konstruktioner med ett litet antal knutpunkter synnerligen överskådlig och snabbt genomförbar.

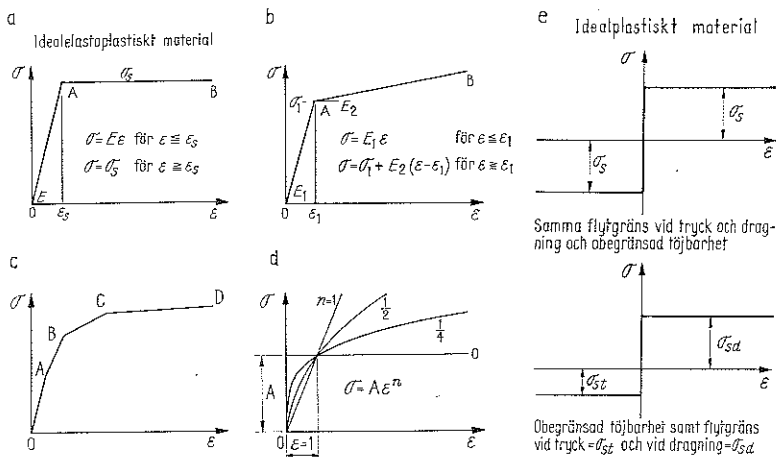
Vid större system med i huvudsak fixa knutpunkter är en ramberäkning med *primärmomentmetoden* eller enligt *Cross' metod* att föredra. Allmänt gäller därvid att vid ramverk, som skall beräknas för flera lastfall, som regel primärmomentmetoden är den snabbaste, under det att vid konstruktioner, som enbart behöver undersökas för ett litet antal lastfall, Cross' metod är överlägsen.

Vad slutligen gäller de systematiserade matrismetoderna erhålls såväl den minsta beräkningsvolymen som den högsta noggrannheten om valet av de obekanta görs så att ekvationssystemets bandbredd blir så liten som möjligt. Med hänsyn till kapaciteten och snabbheten hos dagens datorer får detta dock praktisk betydelse först vid konstruktioner med flera hundra knutpunkter.

## :8 Gränslastmetod

### :81 Allmänt

De i :2-:6 behandlade bruksstadiemetoderna kan oinskränkt tillämpas endast under förutsättning av att uppträdande spänningar  $\sigma$  ligger under proportionalitetsgränsen  $\sigma_p$ . Som en följd härav kan metoderna utnyttjas för



en bestämning av det spännings- och deformationstillstånd, som uppträder vid i praktiken ordinärt förekommande lastintensiteter, s.k. brukslast. Något svar på frågan om hur stor *brottsäkerheten* är för en konstruktion, som under antagande av elastiskt material dimensionerats för en viss tillåten spänning  $\sigma_{tIII}$ , kan däremot inte erhållas genom en beräkning enligt bruksstadiemetoder.

För en bestämning härav fordras en beräkning av den last, *gränslast*, som svarar mot konstruktionens fullständiga utnyttjande under beaktande av aktuellt konstruktionsmaterials, ända upp till brott gällande, verkliga  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram. En sträng beräkning härav blir som regel mycket mödosam att genomföra beroende på att de ordinära konstruktionsmaterialens  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram är av matematiskt starkt komplicerad natur, vilket för praktiska beräkningar tvingar till införande av förenklade  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram.

Några sådana redovisas i fig :81 a-e.

Bestämningen nedan av balkars och ramars gränslaster bygger i överensstämmelse med praxis i den hållfasthetstekniska litteraturen på förutsättning om *idealplastiskt* material (fig :81 e), vilket uppkommer ur det i fig :81 a visade idealelastoplastiska, om detta kompletteras med antagande om oändlig töjbarhet. För den praktiska tillämpbarheten härav vid olika konstruktionsmaterial hänvisas till vad som anförts i :1.

I den följande framställningen, vilken begränsas till att omfatta massiva konstruktioner med sådana laster och utformningar, att inverkan av normal- och tvärkrafter (se :85 B och C) med god approximation är försumbar, redovisas gränslasterna genomgående som gränslastmoment.

## :82 Gränslast för statiskt bestämd balk

Illustrerat på det i fig :82a visade lastfallet har en *statiskt bestämd* balk, som via idealelastoplastiskt tillstånd övergår i idealplastiskt, följande statiska verkningsätt. För små lastvärden  $q$  råder i varje snitt av balken elastiska förhållanden med lineärt  $\sigma$ -diagram enligt detalj  $\alpha$ , fig :82b. Den övre gränsen för detta tillstånd markeras av det  $q$ -värde, för vilket  $\sigma$ -spänningen i mittsektionens över- och underkant (balkens mest ansträngda punkter) just uppnår materialets sträckgräns  $\sigma_s$ . Ökas  $q$ -lasten över detta värde, börjar *flytzone*r att utbreda sig från mittsektionens över- och underkanter, vilket medför en omställning av  $\sigma$ -diagrammet till den i detalj  $\beta$ , fig :82b,

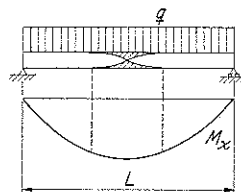


Fig :82a

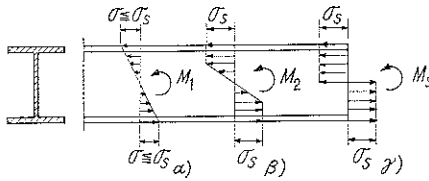


Fig :82b

återgivna typen. Med ytterligare ökad last närmar sig mittsektionens  $\sigma$ -diagram allt mer det i detalj  $\gamma$ , fig :82 b, visade, vilket svarar mot fullständigt genomplasticerad sektion (jfr fig :81 e), samtidigt som flytzonerna går mot den i fig :82a markerade utsträckningen. Sedan mittsektionen fullständigt plasticerats, kommer den att för fortsatt deformation verka som en led — en s k flytled har uppkommit. Härvid deformeras balken i flytleden utan att lasten och därmed momentet i flytleden ökas. Den från början statiskt bestämda balken övergår i en statiskt underbestämd konstruktion, som saknar förmåga till ytterligare lastupptagning. I och med den starkast ansträngda sektionens (mittsektionens) genomplasticering är därför den fritt upplagda balkens gränslast uppnådd.

**:83 Gränslast för statiskt obestämd balk**

Används den i fig :82a visade balken i stället som tvåsidigt fast inspänd, statiskt obestämd konstruktion (fig :83), blir dess statiska verkningssätt följande. Under elastiska förhållanden, dvs så länge i varje punkt av konstruktionen  $\sigma < \sigma_s$ , råder en momentfördelning enligt detalj  $\beta$  i fig :83. Konstruktionens mest ansträngda partier utgör därvid inspänningssnitten. Från dessa utbreder sig, sedan lasten  $q$  ökas över det värde, som ger  $\sigma = \sigma_s$  i inspänningssnittens mest ansträngda punkter, flytznor, vilka, sedan inspänningssnittet fullständigt plasticerats, får en utsträckning enligt detalj  $\alpha$  i fig :83.

För lastökning härutöver tjänstgör inspänningssnittet som icke-momentupptagande flytleder, vilket medför, att konstruktionen för denna lastökning upptagande kommer att verka som en statiskt bestämd, tvåsidigt fritt upplagd balk. Lasten kan för denna ökas, till dess att en flytled utbildats i mest ansträngt snitt, fackmitt. Balken blir då statiskt underbestämd och saknar förmåga till ytterligare lastupptagning. Härvid är gränslasten uppnådd. Gränslasttillståndet för den tvåsidigt fast inspända balken karaktäriseras alltså av fullständigt genomplasticerade sektioner i fackmitt samt i inspänningssnittet, vilket vid konstant tvärsnitt är identiskt med numeriskt lika stora moment  $M_s$  i samtliga dessa tre snitt. I kombination med jämviktsvillkoret att summan av ett stödmoment och momentet i fackmitt skall vara  $=(1/8)qL^2$ , ger detta  $M_s = (1/16)qL^2$  med ett tillhörande momentdiagram enligt detalj  $\gamma$  i fig :83.

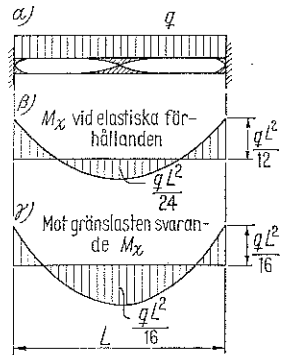


Fig :83

**:84 Synpunkter på dimensioneringen**

Vid en ordinär hållfasthetsberäkning enligt bruksstadiemetod kontrolleras att mot dimensionerande (normalt i bestämmelser föreskrivna) laster svarande spänningar inte överskrider för aktuellt konstruktionsmaterial tillåten spänning  $\sigma_{tIII}$ , bestämd i förhållande till materialets sträckgräns  $\sigma_s$  eller brottgräns  $\sigma_B$  av säkerhetsfaktorn  $n_e$  enligt sambanden

$$n_e = \sigma_s / \sigma_{tIII} \text{ resp } n_e = \sigma_B / \sigma_{tIII} \quad (1)$$

Storleken av säkerhetsfaktorn  $n_e$  väljs därvid i förhållande till förväntad exakthet i material, arbetsutförande etc, men görs däremot ordinärt inte beroende av sådana faktorer som sektionsform, spänningsfördelning över konstruktionens tvärsnitt eller i konstruktionens längsled, konstruktionstyp (statiskt bestämd eller statiskt obestämd) m m.



För förhållandet  $Q_s/Q_{till}$  mellan en av idealplastiskt material utformad konstruktions gränslast  $Q_s$  och det av  $\sigma_{till}$  bestämda tillåtna lastvärdet  $Q_{till}$  medför en ordinär bruksstadieberäkning följande.

Vid lasten  $n_e Q_{till}$  har flytspänningen  $\sigma_s$  just börjat uppträda i en konstruktions mest ansträngda sektion. Vid *statiskt bestämd* konstruktionsutformning kan lasten ytterligare ökas, till dess att flytspänningen vid gränslasten  $Q_s$  utbredd sig över hela sektionen. Storleken av denna ökning beror av sektionens form och uppgår vid rektangulär sektion till 50 %, vid cirkulär sektion till 70 % och vid parallellflänsig I-sektion till 10 a 20 %, svarande mot en brottsäkerhet  $Q_s/Q_{till} = 1,50n_e$ ,  $Q_s/Q_{till} = 1,70n_e$  resp  $Q_s/Q_{till} = 1,1$  à  $1,2n_e$ . Vid *statiskt obestämd* konstruktionsutformning tillkommer härutöver vid övergång från bruks- till brottstadium en gynnsam momentomlagringseffekt, vilken speciellt för tvåsidigt fast inspänd balk enligt :83 medför en ytterligare ökning av brottsäkerheten med  $(16/12 - 1) \cdot 100 = 33\%$  till för rektangulär sektion  $Q_s/Q_{till} = 1,33 \cdot 1,50n_e = 2n_e$ , för cirkulär sektion  $Q_s/Q_{till} = 1,33 \cdot 1,70n_e = 2,26n_e$  och för parallellflänsig I-sektion  $Q_s/Q_{till} = 1,33 (1,1 \text{ à } 1,2)n_e = 1,46 \text{ à } 1,60n_e$ . En ordinär bruksstadiedimensionering för en enligt ekv (1) fixerad, tillåten spänning  $\sigma_{till}$  resulterar följaktligen i konstruktioner, som vid ett och samma material får brottsäkerheter, som starkt varierar med sektionens form och konstruktionstyp. Detta förhållande undviks om man vid en på gränslastmetod baserad hållfasthetsberäkning utgår från en konstant säkerhets- eller lastfaktor  $n_s$  och tillser att  $n_s \times$  aktuell last blir  $\leq$  konstruktionens gränslast  $Q_s$ . Normmässig belastningsfaktor  $n_s$  för gränslastdimensionering anges i StBK-KI »Gränslasthandbok» för stålverk och i »Aluminiumkonstruktioner 1966» för bärverk i aluminiumlegeringar.

Det ovan anförda gäller endast under förutsättning av idealplastiskt material. Vid konstruktioner med *liten deformerbarhet* kan i vissa fall böjbrott inträda vid väsentligt lägre laster än de, som erhålls ur en renodlad beräkning enligt gränslastmetod. Väsentligt är givetvis vidare, att risken för *andra brottyper* — skjuvbrott, stabilitetsbrott (t ex knäckning, vippning, lokal buckling) etc — samt att risken för uppkomst av *generande nedböjning* kontrolleras. Jfr vidare de under :1 lämnade synpunkterna.

För de speciella problem, som uppkommer vid en gränslastmetodberäkning för *upprepade, varierande laster* hänvisas till :89.

### :85 Enkelsymmetriska tvärsnitts gränslastmoment vid idealplastiskt material<sup>1</sup>

#### A Enbart moment

Vid momentangrepp av ett balktvärsnitt av idealplastiskt material med *lika flytgräns  $\sigma_s$  för tryck- och draglast* ställer neutralaxeln in sig på en sådan nivå, att tryckt sektionsdel  $A_t$  blir = dragen sektionsdel  $A_d = \frac{1}{2} A$  (jfr fig :85a). För gränslastmomentet ger en momentekvation sambandet

$$M_s = \frac{1}{2} \sigma_s A \rho_s \tag{1}$$

i vilket  $\rho_s$  betecknar avståndet mellan de tryckta och dragna sektionens tyngdpunkter  $G_t$  respektive  $G_d$ . Omskriven till en redovisningsteknik, som överensstämmer med den vid elastiska förhållanden ordinärt tillämpade (Naviers ekvation) får ekv (1) formen

$$M_s = \sigma_s W_s \tag{2}$$

$$\text{där } W_s = \frac{1}{2} A \rho_s \tag{3}$$

är sektionens *s k plastiska böjmotstånd* (motståndsmoment), sammanställt i tabell :85 för några vanligen förekommande sektionensutformningar.

<sup>1</sup> För osymmetriska tvärsnitts gränslastmoment, se [49]

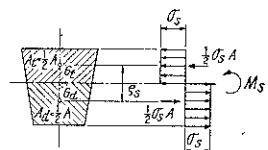

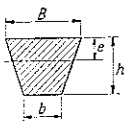

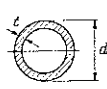
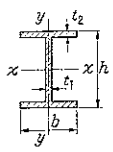


Fig :85a

Tabell :85. Plastiskt böjmotsstånd  $W_s$

	$W_s = \frac{1}{4}bh^2$
	$e = \left[ \frac{B}{B-b} - \sqrt{\left(\frac{B}{B-b}\right)^2 - \frac{B+b}{2(B-b)}} \right] h$ $W_s = \frac{1}{6}(h-e)^2 \left[ B + 2b - \frac{e}{h}(B-b) \right] + \frac{1}{3}e^2 \left[ 3B - \frac{e}{h}(B-b) \right]$
	$W_s = \frac{1}{8}d^3$
	$W_s = \frac{1}{8}d^3 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{2t}{d} \right)^3 \right]$ <p>För <math>t \ll d</math>: <math>W_s = td^2</math></p>
	<p>Vid böjning kring axel <math>x-x</math></p> $W_s = bt_2(h-t_2) + \frac{1}{4}t_1(h-2t_2)^2$ <p>Vid böjning kring axel <math>y-y</math></p> $W_s = \frac{1}{2}b^2t_2 + \frac{1}{4}(h-2t_2)t_1^2$

**B Inverkan av normalkraft  $N$**

Generellt medför en normalkraft  $N$ , som verkar i den mot renodlat angrepp av gränslastmomentet  $M_s$  svarande neutralaxeln, en minskning av tvärsnittets momentupptagande förmåga till ett värde  $M_{sN}$ . För detta reducerade gränslastmoment  $M_{sN}$  gäller enligt fig :85 b för fallet idealplastiskt material med lika sträckgräns  $\sigma_s$  för tryck och dragning sambandet

$$M_{sN} = M_s - N\xi \tag{4}$$

i vilket  $\xi$  betecknar avståndet från den ovan nämnda neutralaxeln till

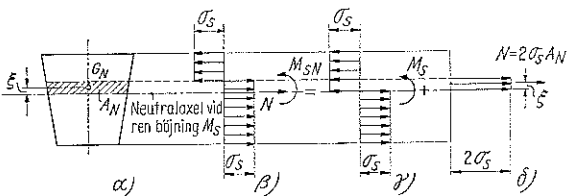


Fig :85 b

tyngdpunkten  $G_N$  av den i detalj  $\alpha$ , fig :85 b, sektionerade ytan  $A_N = N/2\sigma_s$ .  
För rektangulär sektion kan ur ekv (4) härledas sambandet

$$M_{sN} = M_s [1 - (N/N_s)^2] \tag{5}$$

där  $M_s$  = gränslastmomentet vid  $N=0$ ,  $N$  = aktuell normalkraft och  $N_s = \sigma_s A$  = gränslastnormalkraften vid  $M=0$ .

$M_{sN}$  enligt ekv (5) kan approximativt tillämpas vid överslagsberäkningar också för andra sektionstypformningar än den rektangulära (jfr fig :85c).

Vid balkar och 1-våningsramar med ordinär utformning är som regel  $N/N_s < 0,1$  och normalkraftens inverkan på den enligt gränslastmetod beräknade momentfördelningen med god approximation försumbar. Vid flervåningsramar däremot blir normalkraftsinverkan inte sällan av betydelse, vad gäller de nedre våningarnas momentupptagande förmåga, och vid bågar, i synnerhet då vid fördelade belastningar, blir som regel normalkraftsinverkan av direkt utslagsgivande karaktär vid en bestämning av tvärsnittens gränslastmoment. Vid bågkonstruktioner tillkommer härutöver inte sällan en icke försumbar effekt på gränslasten av momentomlagringar från utböjningarna — jfr bl a [49].

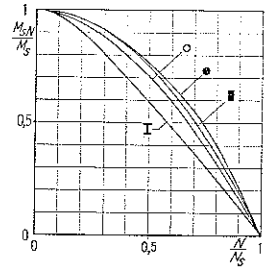


Fig :85c. Gränslastmoment  $M_{sN}$  för några olika sektionstyper vid närvaro av normalkraft  $N$  [49]

**C Inverkan av tvärkraft  $T$**

Närvaron av en tvärkraft  $T$  nedsätter generellt ett tvärsnitts momentupptagande förmåga. Vid ramkonstruktioner är denna reduktion av gränslastmomentet så gott som undantagslöst utan praktisk betydelse. Vid kontinuerliga balkar kan reduktionen i mycket extrema fall uppgå till 10 å 15 %, vad gäller stödmoment, men som regel är effekten av tvärkraften på gränslastmomentet med god approximation försumbar också för kontinuerliga balkar.

I tveksamma fall är en överslagsberäkning av det med hänsyn till tvärkraftseffekten reducerade gränslastmomentet  $M_{sT}$  tillräddig. För rektangulär sektion av idealplastiskt material med lika sträckgräns  $\sigma_s$  för tryck och dragning kan denna överslagsberäkning med tillfredsställande noggrannhet genomföras ur sambandet (se Horne [43], [48])

$$M_{sT}/M_s = 1 - 0,44(T/T_s)^2, \text{ där } T_s = \frac{1}{2}\sigma_s A \quad (6)$$

med giltighet för  $T/T_s \leq 0,79$ . För I-sektioner gäller med god precision inom hela området  $0 \leq T/T_s \leq 1$  det av Heyman, J och Dutton, W L i Welding and Metal Fabrication 1954 uppställda uttrycket

$$M_{sT}/M_s = [1 - (A - A_f)/(A + A_f)][1 - \sqrt{1 - (T/T_s)^2}], \text{ där } T_s = (1/\sqrt{3})\sigma_s A_t \quad (7)$$

i vilket  $A$ =totala tvärsnittsytan,  $A_f$ =livytan och  $A_f$ =sammanlagda ytan för båda flänsarna.

**:86 Gränslastmoment för statiskt obestämd balk i ett fack**

**A Tväsidigt fast inspänd balk**

I avsnitt :83 har i anslutning till det i fig :83 angivna lastfallet visats, att en tväsidigt fast inspänd balks gränslast är uppnådd i och med att flytleder utbildats i balkens tre mest ansträngda snitt.

**Exempel 1.** Bestäm den mot gränslasten svarande momentfördelningen vid den i fig :86a visade, tväsidigt fast inspända balken med efter sin längd konstant sektion.

Problemet består i att finna det momentdiagram, som uppfyller jämviktsvillkoren och som i balkens tre mest ansträngda snitt har numeriskt lika stora höjmoment  $M_s$ . Jämviktsvillkoren kan uttryckas genom den tillhörande statiskt bestämda, tväsidigt fritt upplagda balkens momentdiagram ABC, vilket har sitt maximivärde  $DC = \lambda(1 - \lambda)PL$  i  $P$ :s angreppsnitt. Det resterande villkoret numeriskt lika stora moment  $M_s$  i de tre mest ansträngda snitten blir uppfyllt, om i momentdiagrammet ABC en horisontell momentnollinje EF inläggs genom CD:s mittpunkt enligt fig :86a. Balkens tre mest ansträngda snitt är följaktligen de båda inspänningssnitten samt  $P$ :s angreppsnitt, vilka samtliga, då balken är maximalt utnyttjad, har ett gränslastmoment  $M_s = \frac{1}{2}\lambda(1 - \lambda)PL$ .

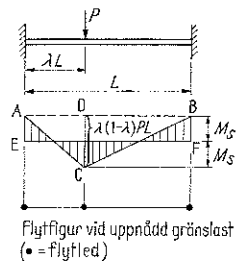


Fig :86a

**Exempel 2.** Beräkna för den i fig :86b, detalj  $\alpha$  visade, tvåsidigt fast inspända balken momentfördelningen enligt gränslastmetod. Balken förutsätts ha rektangulär sektion med konstant bredd  $b$  och med höjd  $h$ , som i balkens  $1/4$ -punkter diskontinuerligt förändras enligt figuren från  $h_0$  till  $2h_0$ .

Av tabellen i :85 över det plastiska motståndsmomentet  $W_s$  följer, att om gränslastmomentet för balksektionen med den minsta höjden  $h_0$  betecknas med  $M_s$ , så blir det mot balksektionen med den största höjden  $2h_0$  svarande gränslastmomentet  $=4M_s$ .

Problemet består i att i den tillhörande fritt upplagda balkens momentdiagram ABC inlägga en momentnollinje EF, som ger maximalt utnyttjande av de tre mest ansträngda snittens momentupptagande förmåga. Antas dessa snitt vara de båda inspänningsnitten samt mittsnittet, erhålls för momentnollinjen det i fig :86b, detalj  $\alpha$  inritade läget, karakteriserat av mittmoment  $M_s$  och inspänningsmoment  $4M_s$ . En nödvändig förutsättning för denna lösnings riktighet är, att den inte i något snitt inom området för sektionshöjden  $h_0$  ger ett moment  $> M_s$ . Av figuren framgår, att denna förutsättning är uppfylld, varför antagen flytfigur med flytleder i inspänningsnitten och i fackmitt är den rätta. Det tillhörande gränslastmomentet  $M_s$  erhålls direkt ur figuren till  $M_s = (1/40)qL^2$ .

Om votlängden minskas från  $L/4$  till  $L/6$  (detalj  $\beta$  i fig :86b) blir med momentnollinje EF enligt detalj  $\alpha$  böjmomentet i de snitt, där sektionshöjden diskontinuerligt förändras, större än gränslastmomentet  $M_s$ . Härav följer, att en flytfigur baserad på flytleder i fackmitt och i inspänningsnitten är felaktig vid votlängden  $L/6$ . En förnyad lösning med antagna flytleder i fackmitt samt i de båda snitten för den språngvisa höjdförändringen resulterar i ett momentdiagram enligt detalj  $\beta$ , vilket direkt inses vara riktigt. Ur detta beräknas för det mot votlängden  $L/6$  svarande gränslastmomentet

$$2M_s = \frac{1}{3}q(\frac{2}{3}L)^2, \text{ dvs } M_s = (1/36)qL^2$$

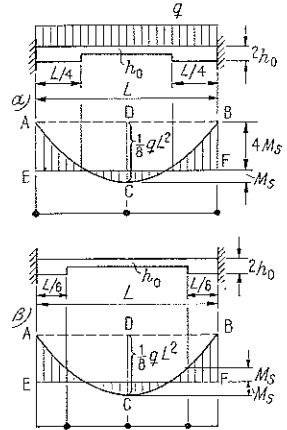


Fig :86b

**B Ensidigt fast inspänd balk**

En balk som är fast inspänd vid den ena änden, fritt upplagd vid den andra, är en 1-falt statiskt obestämd konstruktion. Sedan den genom belastning getts en flytled, kommer den för lastökning härutöver att verka som en statiskt bestämd balk. Ökas lasten, till dess att ytterligare en flytled uppträder, erhålls för fortsatt lastökning en statiskt underbestämd konstruktion, vilken saknar förmåga till ytterligare lastupptagning. I maximalt utnyttjat tillstånd karakteriseras alltså en ensidigt fast inspänd balk av två flytleder.

**Exempel 1.** Beräkna för den i fig :86c visade balken med konstant sektion momentdiagrammet enligt gränslastmetod.

Det uppställda problemet består i att i den tillhörande fritt upplagda balkens momentdiagram ABCD genom B lägga en momentnollinje BE, som i balkens två mest ansträngda snitt ger numeriskt lika stora böjmoment  $M_s$ . Lösningen finns genomförd i fig :86c, av vilken framgår, att balkens båda mest ansträngda snitt utgörs av inspänningsnittet samt av den högra P-lastens angreppssnitt.

Ur likformiga trianglar beräknas för gränslastmomentet  $M_s$

$$M_s/L = (\frac{1}{3}PL - M_s)/\frac{1}{3}L, \text{ dvs } M_s = \frac{1}{4}PL$$

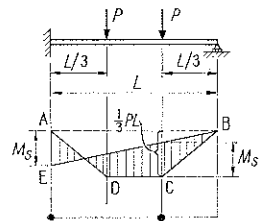


Fig :86c

**Exempel 2.** Beräkna det mot gränslasten svarande momentdiagrammet för den i fig :86d visade balken med konstant sektion.

Problemet innehåller jämfört med det ovan i exempel 1 behandlade en extra svårighet därigenom att det exakta läget av flytleden i fältet inte är från början bekant. Denna svårighet kan alltid lösas genom en *successiv prövning* med olika lutningar för moment-nollinjen BD. Den nämnda flytledens läge kan också bestämmas *analytiskt* eller genom en direkt *geomet-*

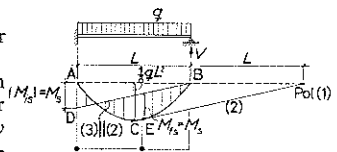


Fig :86d

risk konstruktion på det sätt, som visats i figuren genom beteckningarna (1), (2) och (3) för de olika konstruktionsetapperna [49].

I kompletterande syfte genomförs också en analytisk lösning av problemet, varvid som obekant storhet införs upplagsreaktionen  $V$  i balkens glidlager. För inspänningsmomentets absolutvärde erhålls

$$|M_{is}| = \frac{1}{2}qL^2 - VL$$

För fältmomentet i snitt  $x$  gäller uttrycket ( $x$  räknat från upplaget B)

$$M_f = Vx - \frac{1}{2}qx^2$$

vilket antar maximivärde för

$$dM_f/dx = V - qx = 0, \text{ dvs för } x = V/q$$

För maximivärdet av fältmoment  $M_f$  erhålls härigenom

$$M_{fmax} = M_{fs} = V^2/2q$$

Villkoret, att  $|M_{is}| = M_{fs} = M_s$ , ger nu sambandet

$$\frac{1}{2}qL^2 - VL = V^2/2q$$

varur för upplagsreaktionen  $V$  beräknas värdet

$$V = (\sqrt{2} - 1)qL$$

och för gränslaststadiets dimensionerande böjmoment värdet

$$M_{fs} = -M_{is} = V^2/2q = (3/2 - \sqrt{2})qL^2$$

**Exempel 3.** Beräkna det mot gränslasten svarande momentdiagrammet för den i fig :86e visade, ensidigt fast inspända balken med rektangulär sektion, som med konstant bredd  $b$  har en sektionshöjd  $h$ , som enligt fig :86e diskontinuerligt förändras från  $h_0$  till  $2h_0$ .

Vid fullt utbildad plasticering gäller för balktvärsnittet med sektionshöjden  $h_0$  gränslastböjmomentet — tabell :85

$$M_s = \frac{1}{4}bh_0^2\sigma_s$$

och för balktvärsnittet med sektionshöjden  $2h_0$  gränslastböjmomentet

$$\bar{M}_s = \frac{1}{4}b(2h_0)^2\sigma_s = bh_0^2\sigma_s = 4M_s$$

I gränslaststadiet uppträder flytleder i inspänningsnittet A samt i ett fältsnitt B, vars läge kan geometriskt konstrueras enligt fig :86e på analogt sätt som det i exempel 2 redovisade. I snittet A uppträder därvid i gränslaststadiet böjmomentet  $|M_{is}| = 4M_s$  och i snittet B böjmomentet  $M_{fs} = M_s$ . En nödvändig förutsättning för genomförd lösnings giltighet är, att det i sprängsnittet C uppträdande böjmomentet  $<$  gränslastmomentet  $M_s$ . Vid i tillämpningen valt läge för sprängsnittet är denna förutsättning uppfylld. Om genomförd konstruktion av gränslaststadiets böjmomentdiagram i snittet C givit ett böjmoment  $>$   $M_s$ , hade detta varit ett kriterium på att vald flytfigur inte varit korrekt. En annan flytfigur, innehållande flytled i snittet C, hade då fått undersökas.

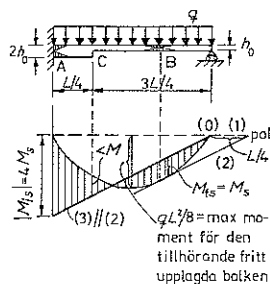


Fig :86e

### :87 Gränslastmoment för kontinuerlig balk

För en kontinuerlig balk med konstant sektion, påverkad av genomgående åt samma håll riktade, varandra lineärt beroende laster kan gränslastmomentet  $M_s$  bestämmas på följande sätt [49].

För varje delfack AB, BC, CD ... beräknas enligt fig :87a de gränslast-

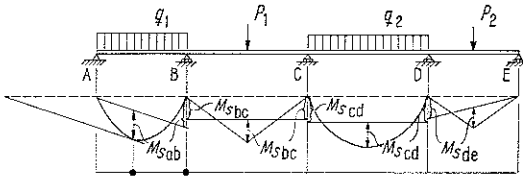


Fig :87a

moment  $M_{sab}, M_{sbc}, M_{s cd}, \dots$ , som svarar mot fullständig plasticering av respektive delfack, varpå den kontinuerliga balkens gränslastmoment  $M_s$  erhålls som det *största* av delfackens gränslastmoment. Speciellt för det i fig :87a angivna lastfallet ger detta  $M_s = M_{sab}$  och en flytfigur, som vid den kontinuerliga balkens maximala utnyttjande har flytleder endast över stödet B samt i fältet av fack AB. Vid av varandra lineärt beroende laster bestäms följaktligen den kontinuerliga konstruktionens totala bärförmåga helt av bärförmågan för det starkast ansträngda delfacket.

Vid av *varandra lineärt beroende laster*, som i den kontinuerliga balkens delfack är *omväxlande uppåt- och nedåtriktade*, fordras för en beräkning av dimensionerande gränslastmoment generellt en undersökning av ett större antal flytalternativ än vid lastfall av den typ, som visas i fig :87a.

Förhållandena illustreras av det i fig :87b angivna lastfallet. Av figuren framgår, att vid rådande  $P_1/P_2$ -förhållande en gränslastberäkning, baserad på maximalt utnyttjat fack AB med flytleder över stödet B samt i  $P_1$ 's angreppsnitt, resulterar i ett moment  $> M_s$  i  $P_2$ 's angreppsnitt (flytalternativ  $\alpha$ ). Denna flytfigur är därför inte möjlig. Analogt ger en beräkning enligt flytalternativ  $\beta$  ett moment  $> M_s$  i  $P_1$ 's angreppsnitt, varför också detta flytalternativ är omöjligt. Vid det rätta flytalternativet, redovisat i figurens detalj  $\gamma$ , uppträder en flytfigur med flytleder i  $P_1$ 's och  $P_2$ 's angreppsnitt utan plasticering över mellanstödet B.

Vid en kontinuerlig balk i 3 fack med last enligt fig :87c blir, beroende på de inbördes förhållandena mellan  $P_1, P_2$  och  $P_3$ , något av de i figuren angivna 6 flytalternativen aktuellt. Vid kontinuerlig balk i 4 fack blir vid omväxlande nedåt- och uppåtriktade laster antalet aktuella flytfigurer att undersöka 10, vid balk i 5 fack 15 etc och allmänt vid balk i  $n$  fack  $\frac{1}{2}n(n+1)$ .

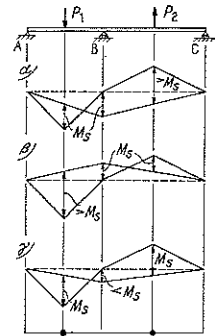


Fig :87b

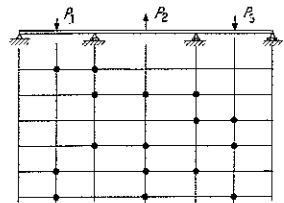


Fig :87c

**:88 Ramkonstruktioners gränslastmoment**

**A Direkt beräkningsmetod**

Vid okomplicerade ramkonstruktioner under enkla laster kan dimensionerande gränslastmoment som regel lätt bestämmas genom en direkt beräkning för olika flytalternativ. Förfarandet illustreras på det i fig :88a visade fallet, dvs en 0-ledsram med efter hela sin utsträckning konstant tvärsnitt, belastad med av varandra lineärt beroende punktlaster  $P$  och  $H$ .

Följande flytalternativ är geometriskt möjliga:

1 Det i fig :88b angivna, svarande mot maximalt utnyttjad ramdel BD, med flytleder i B, C och D. För detta flytalternativ erhålls direkt ur det i figuren redovisade momentdiagrammet

$M_s = \frac{1}{4}Pa$  (a)

2 Det i fig :88c angivna, svarande mot maximalt utnyttjade ramben och karakteriserat av flytleder i A, B, D och E. Här för beräknas ur rambenens momentdiagram

$M_s = \frac{1}{4}Ha$  (b)

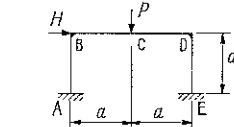


Fig :88a

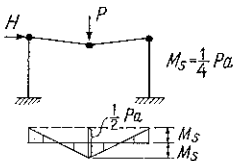


Fig :88b

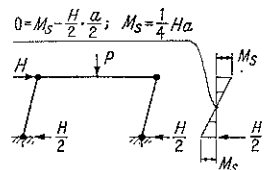


Fig :88c

3 Det i fig :88d redovisade med flytleder i A, C, D och E, vid vilket gränslasten upptas genom kombinerat utnyttjande av ramen och ramhorisontal. Det mot detta flytalternativ svarande momentdiagrammet finns angett i fig :88e, ur vilken beräknas

genom momentekvation för delen DE:  $X = 2M_s/a$   
 genom momentekvation för delen CD:  $Y = 2M_s/a$   
 genom momentekvation kring A för hela ramen:

$$-M_s + Ha + Pa - Y \cdot 2a - M_s = 0$$

varav

$$M_s = (1/6)(P + H)a$$

Vid givet förhållande  $P/H$  erhålls ur ekv (a)–(c) tre värden på gränslastmomentet  $M_s$ . Det största av dessa värden dimensionerar och bestämmer typen av flytfigur.

De till de tre flytalternativen hörande ekv (a), (b) och (c) kan i diagramform sammanfattas enligt fig :88f. Ekvationernas tre räta linjer ger därvid en dimensionerande begränsning abcd. Skärningspunkten mellan denna begränsning och en mot ett givet förhållande  $H/P$  svarande rät linje genom origo ger aktuellt gränslastvärde och aktuellt flytalternativ. Det framgår t ex ur diagrammet, att för  $H = \frac{1}{3}P$  gäller flytalternativ 1, för  $H = P$  flytalternativ 3 och för  $H = 3P$  flytalternativ 2.

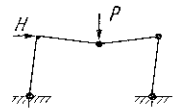


Fig :88d

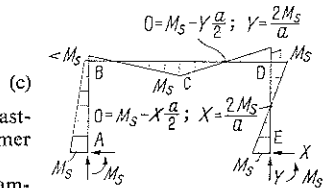


Fig :88e

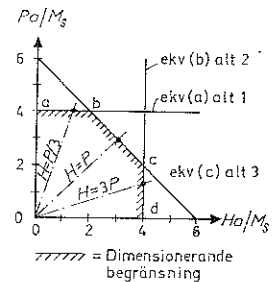


Fig :88f

**B Beräkning genom kombination av elementarmekanismer**

*a Allmänt*

Vid ramkonstruktioner av mera komplicerad uppbyggnad kan det ofta vara svårt att från början klart överblicka de olika geometriskt möjliga flytalternativen. I sådana fall kan en gränslastmomentberäkning med fördel genomföras exempelvis enligt den nedan illustrerade metodiken, vid vilken dimensionerande flytfigur framräknas genom en systematisk kombination av *s k elementarmekanismer* = av varandra oberoende flytfigurer, genom vilka begränsade ramavsnitt genom plasticering blir maximalt utnyttjade.

*b Begreppet elementarmekanism*

För en enkel, öppen ram av exempelvis den typ, som behandlats under A, kan två huvudtyper av elementarmekanismer uppträda, nämligen dels *balkmekanismer*, karakteriserade av att en enstaka balk (i fig :88g balken BCD) fullständigt plasticeras, och dels en renodlad *knutpunktsförskjutningsmekanism* enligt fig :88h. Dessa båda elementarmekanismer kan direkt över-

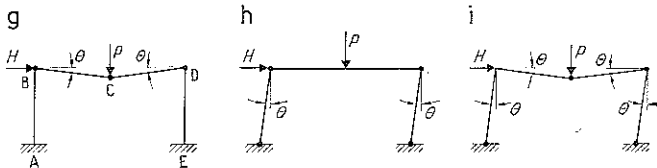


Fig :88g-i. g balkmekanism, h knutpunktsförskjutningsmekanism, i kombinerad mekanism

lagras till den i fig :88i visade *kombinerade mekanismen*. För en enkel, öppen ram med utformning och last enligt fig :88j existerar sex av varandra oberoende elementarmekanismer, nämligen fyra balkmekanismer enligt fig :88k (samtliga redovisade i en figur) och två knutpunktsförskjutningsmekanismer enligt fig :88l och m.<sup>1</sup> Genom direkt överlagring av två eller

<sup>1</sup> Beträffande elementarmekanismen enligt fig :88m förutsätts att C fasthålls i sidled. I stället för att utgå från elementarmekanismerna enligt fig :88l och m kan man utgå från den enligt fig :88o jämte dess spegelvända mekanism med flytleder i C och E

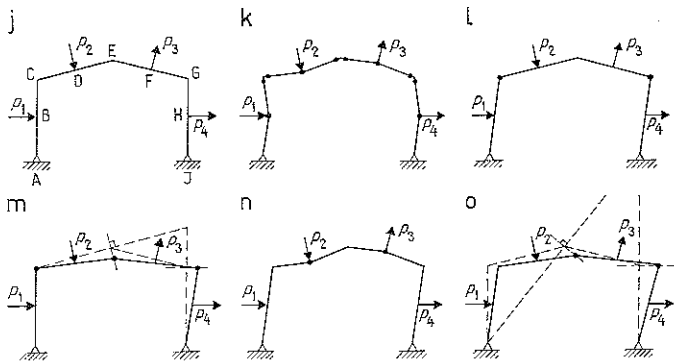


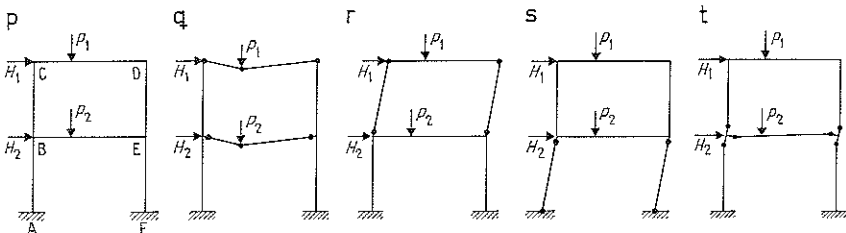
Fig :88j-o. j ram med last, k balkmekanismer, l och m knutpunktsförskjutningsmekanismer, n och o kombinerade mekanismer

flera av dessa elementarmekanismer kan olika typer av kombinerade mekanismer erhållas. Som exempel härpå visas i fig :88n en flytmekanism, erhållen som summan av de båda balkmekanismerna för CDE och EFG (fig :88k) samt knutpunktsförskjutningsmekanismen enligt fig :88l, och i fig :88o den flytmekanism, som uppkommer genom direkt överlagring av de båda knutpunktsförskjutningsmekanismerna enligt fig :88l och m.

Vid *kontinuerliga ramar* och *flervåningsramar* tillkommer utöver de båda ovan nämnda typerna av elementarmekanismer ytterligare en typ, nämligen s k *knutpunktsrotationsmekanismer*, kännetecknade av flytleder, som möjliggör en renodlad rotation av knutpunkter med fler än två anslutande ramdelar (jfr fig :88t). Sådana elementarmekanismer har — bortsett från fallet, att de aktuella knutpunkterna åverkas av yttre koncentrerade böjmoment — i sig själv ingen reell mening, men blir av betydelse, då de kombineras med andra typer av elementarmekanismer, vilket närmare illustreras av beräkningsexemplen nedan. Tillämpat på en 2-våningsram med utformning och last enligt fig :88p, erhålls sex av varandra oberoende elementarmekanismer — två balkmekanismer (fig :88q), två knutpunktsförskjutningsmekanismer (fig :88r och s) samt två knutpunktsrotationsmekanismer (fig :88t).

Generellt gäller för det till ett givet ramlastfall hörande *antalet elementarmekanismer*, att detta är lika med skillnaden mellan det antal snitt, i vilka böjmomentets storlek måste beräknas, för att momentdiagrammet skall bli entydigt bestämt, och antalet statiskt obestämda kvantiteter för ramen. Speciellt för ramen enligt fig :88g blir momentdiagrammet entydigt fixerat, sedan momentets storlek beräknats i snitten A, B, C, D och E, dvs i 5 snitt — mellan dessa snitt har nämligen momentet en från början känd, linjär variation. Då vidare ramen är 3-falt statiskt obestämd, följer, att antalet elementarmekanismer blir  $5 - 3 = 2$ . För det i fig :88j visade lastfallet blir

Fig :88p-t. p ram med last, q balkmekanismer, r och s knutpunktsförskjutningsmekanismer, t knutpunktsrotationsmekanismer





analogt momentdiagrammet entydigt bestämt vid beräknade momentvärden i B, C, D, E, F, G och H, dvs i 7 snitt, vilket kombinerat med förhållandet, att ramen är 1-falt statiskt obestämd, ger  $7 - 1 = 6$  elementarmekanismer. En övergång för någon eller några ramdelar från punktbelastning  $P$  till jämnt fördelad last  $q$  medför för dessa ramdelar en parabolisk momentvariation i stället för linjär, men förändrar inte det för entydigt bestämt momentdiagram erforderliga antalet snitt med kända momentvärden och därför inte heller antalet elementarmekanismer.

*c Allmän beräkningsgång*

Allmänt kan en gränslastmomentberäkning enligt metoden med kombination av elementarmekanismer genomföras i följande etapper:

- 1 Bestämning enligt ovan av det för lastfallet karaktäristiska antalet elementarmekanismer.
- 2 Beräkning av de olika elementarmekanisernas gränslastmoment.
- 3 Överlagring av två eller flera elementarmekanismer till kombinerade mekanismer samt bestämning av dessas gränslastmoment.

Dimensionerande och bestämmande för den i verkligheten uppträdande flytfiguren blir därvid den elementarmekanism eller den kombinerade mekanism, som ger det *största* gränslastmomentet.

För den detaljerade beräkningsmetodiken hänvisas till efterföljande tillämpningsexempel.

*d Exempel*

**Exempel 1.** Beräkna för det i fig :88u visade lastfallet dimensionerande moment enligt gränslastmetod, om de olika ramdelarnas inbördes dimensioner är sådana, att de svarar mot gränslastmoment  $M_s$  för pelarna,  $(3/2)M_s$  för horisontalen DF samt  $2M_s$  för horisontalen BD.

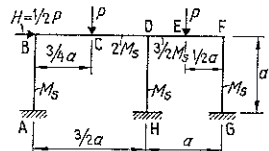


Fig :88u. Ram med last

*Antalet elementarmekanismer*

Momentdiagrammet blir entydigt bestämt vid kända momentvärden i A, B, C, D (tre snitt), E, F G och H, dvs i 10 snitt. Då vidare ramkonstruktionen är 6-falt statiskt obestämd, följer att lastfallets antal elementarmekanismer blir  $10 - 6 = 4$ . Dessa utgörs av 2 balkmekanismer enligt fig :88v, 1 knutpunktsförskjutningsmekanism enligt fig :88x samt 1 knutpunktsrotationsmekanism enligt fig :88y.

*Elementarmekanisernas gränslastmoment  $M_s$*

Dessa kan beräknas direkt ur jämviktsekvationer på det sätt, som ovan visats i exemplet under A. I kompletterande syfte används i detta sammanhang för beräkningen av  $M_s$  i stället en *kinematisk* metod, baserad på förhållandet, att en ramkonstruktion, då dess gränslast uppnås, övergår till en sk kinematisk kedja, som utan lastökning kan deformeras genom enbart vinkeländringar i flytledderna. I dessa utträttar därvid gränslastmomenten ett inre arbete  $W_i$ , som är lika med det yttre arbete  $W_y$ , som den yttre lasten ger upphov till, då den medföljer i den kinematiska kedjans deformation.

För den till delen BCD hörande, i fig :88v visade balkmekanismen ger en sådan kinematisk beräkning

$$W_i = \underbrace{M_s \Theta}_{i \text{ B}} + \underbrace{2M_s \Theta + 2M_s \Theta}_{i \text{ C}} + \underbrace{2M_s \Theta}_{i \text{ D}} = W_y = P(3/4) a \Theta$$

$$7M_s \Theta = (3/4) Pa \Theta; \quad M_s = (3/28) Pa = 0,1071 Pa \tag{a}$$

och för den till delen DEF hörande balkmekanismen

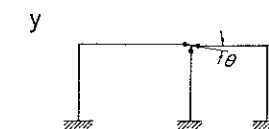
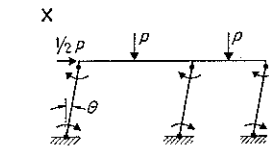
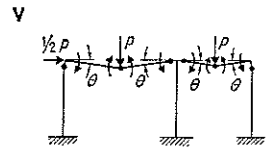


Fig :88v-y. v balkmekanismer, x knutpunktsförskjutningsmekanism, y knutpunktsrotationsmekanism

$$W_i = \underbrace{(3/2) M_s \Theta}_{i D} + \underbrace{(3/2) M_s \Theta}_{i E} + \underbrace{(3/2) M_s \Theta}_{i F} + M_s \Theta = W_y = P(a/2) \Theta$$

$$5,5M_s \Theta = (1/2) Pa\Theta; \quad M_s = (1/11) Pa = 0,0909 Pa \quad (b)$$

För knutpunktsförskjutningsmekanismen enligt fig :88x beräknas analogt

$$W_i = 6M_s \Theta = W_y = (1/2) Pa\Theta; \quad M_s = (1/12) Pa = 0,0833 Pa \quad (c)$$

*Gränslastmoment  $M_s$  för kombinerade mekanismer*

Av elementarmekanismerna ger enligt ovan den till delen BCD hörande balkmekanismen det största  $M_s$ -värdet. Det är därför naturligt att välja denna mekanism som bas vid konstruktion av sådana kombinerade mekanismer, som kan tänkas ha högre  $M_s$ -värden än det av ekv (a) givna.

En överlagring av balkmekanismen för BCD och knutpunktsförskjutningsmekanismen enligt fig :88x ger den i fig :88z angivna kombinerade mekanismen. I denna utträtt  $P$ -krafterna ett yttre arbete  $W_y$ , som erhålls som summan av de båda elementarmekanismernas yttre arbeten, dvs (jfr ekv (a) och (c))

$$W_y = (3/4) Pa\Theta + (1/2) Pa\Theta = (5/4) Pa\Theta \quad (d)$$

En direkt addition av de båda elementarmekanismernas inre arbeten ger ett  $W_i$ , som är större än den kombinerade mekanismens, beroende på att elementarmekanismernas flytleder i ramhörnnet B inte återfinns i den kombinerade mekanismen. Härigenom reduceras det inre arbetet med beloppet  $M_s \Theta + M_s \Theta = 2M_s \Theta$ , varpå för det resulterande  $W_i$  beräknas (jfr ekv (a) och (c))

$$W_i = 7M_s \Theta + 6M_s \Theta - 2M_s \Theta = 11M_s \Theta \quad (e)$$

$r_M = W_i$  ger så för den kombinerade mekanismen enligt fig :88z

$$11M_s \Theta = (5/4) Pa\Theta; \quad M_s = (5/44) Pa = 0,1136 Pa \quad (f)$$

dvs ett större  $M_s$ -värde än för någon av de övriga, hittills undersökta mekanismerna.

En överlagring av den rena knutpunktsrotationsmekanismen enligt fig :88y på mekanismen enligt fig :88z resulterar i den i fig :88aa visade, kombinerade mekanismen. Denna överlagring ger ingen förändring av det yttre arbetet  $W_y$  från ekv (d). Däremot förändras det av ekv (e) angivna inre arbetet  $W_i$  därigenom, att (jfr fig :88z och aa) i knutpunkten D för ramdelarna BCD och DEF tillkommer beloppen  $2M_s \Theta$  resp  $(3/2) M_s \Theta$ , medan samtidigt för vertikalen DH bortgår beloppet  $M_s \Theta$ . Totalt ger detta en ökning i  $W_i$  av  $2,5M_s \Theta$  och, då tillhörande  $W_y$  enligt ovan är oförändrat, en minskning av det av ekv (f) bestämda  $M_s$ -värdet. Flytmekanismen enligt fig :88aa är följaktligen inte dimensionerande. På analogt sätt inses, att den i fig :88ab visade mekanismen, uppkommen genom kombination av mekanismen enligt fig :88z och en motursriktad knutpunktsrotationsmekanism, inte kan vara dimensionerande.

Direkt inses vidare, att en addition av knutpunktsrotationsmekanismen till ramdelens BCD balkmekanism ger oförändrat  $W_y$ , ökat  $W_i$  och därför ett  $M_s$ , som är mindre än den renodlade balkmekanismens. Inte heller den så kombinerade mekanismen är således dimensionerande.

En överlagring av samtliga fyra elementarmekanismer resulterar i en kombinerad mekanism enligt fig :88ac, för vilken kinematiskt beräknas

$$W_i = \underbrace{M_s \Theta}_{i A} + \underbrace{4M_s \Theta}_{i C} + \underbrace{4M_s \Theta}_{i D} + \underbrace{3M_s \Theta}_{i E} + \underbrace{2M_s \Theta}_{i F} + \underbrace{M_s \Theta}_{i G} + \underbrace{M_s \Theta}_{i H} = 16M_s \Theta$$

$$W_y = (1/2) Pa\Theta + P(3/4) a\Theta + P(1/2) a\Theta = (7/4) Pa\Theta$$

$$W_i = W_y; \quad M_s = (7/64) Pa = 0,1094 Pa \quad (g)$$

dvs ett mindre  $M_s$  än för mekanismen enligt fig :88z.

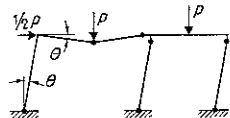


Fig :88z. Kombinerad mekanism

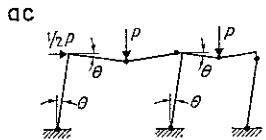
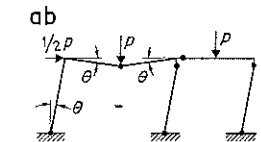
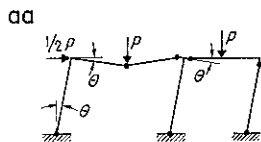


Fig :88aa-ac. Kombinerade mekanismer

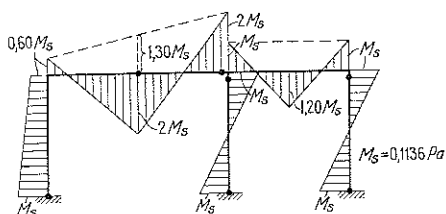


Fig :88 ad

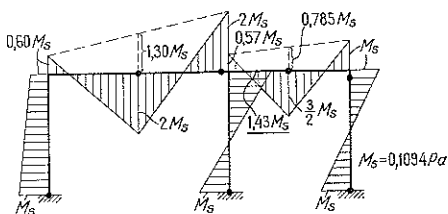


Fig :88 ae

Därmed har samtliga tänkbara, på balkmekanismen för BCD baserade, farliga flytmekanismer undersökts, varvid den i fig :88z visade mekanismen funnits vara den dimensionerande. Som kontroll kan utnyttjas förhållandet, att i den riktiga flytmekanismen inte får finnas något snitt, i vilket den momentupptagande förmågan (för vertikalerne  $M_s$ , för delen BCD  $2M_s$  och för delen DEF  $(3/2)M_s$ ) överskrids. Att så inte blir fallet för flytmekanismen enligt fig :88z, kan lätt konstateras genom konstruktion av det tillhörande momentdiagrammet (jfr fig :88ad). Däremot ger en konstruktion av motsvarande momentdiagram för den i fig :88ac visade flytmekanismen (jfr fig :88ae) i mellanpelarens övre ändpunkt ett moment  $=1,43M_s$ , dvs ett större moment än vad pelaren vid fullständig plasticering kan uppta, vilket är ett kriterium på att flytmekanismen enligt fig :88ac är felaktig.

**Resultat:** Lastfallets gränslastmoment  $M_s = 0,1136Pa$ , bestämt av den i fig :88z visade, kombinerade flytmekanismen.

**Exempel 2.** Beräkna för en enligt fig :88af utformad och belastad tvåvåningsram dimensionerande gränslastvärde för  $P$ . Rambärverket har för varje ramdel konstant sektion, svarande mot ett gränslastböjmoment  $M_s$  för ramdelarna BC, CD och DE, ett gränslastböjmoment  $2M_s$  för ramdelarna AB och EF samt ett gränslastböjmoment  $3M_s$  för ramdelen BE.

**Antalet elementarmekanismer**

För att ramlastfallets böjmomentdiagram skall vara entydigt fixerat, fordras, att böjmomentets storlek beräknas i snitten A, G, B (tre snitt), H, C, I, D, K, E (tre snitt), L, M, och F, dvs i sammanlagt 16 snitt. Rambärverket är sexfaldigt statiskt obestämt. Antalet geometriskt möjliga elementarmekanismer blir därför  $16 - 6 = 10$ .

Elementarmekaniserna utgörs av 6 balkmekanismer (fig :88ag), två knutpunktsförskjutningsmekanismer (fig :88ah och ai) samt två knutpunktsrotationsmekanismer (fig :88aj och ak). Mot de olika balkmekaniserna och knutpunktsförskjutningsmekanismerna svarar entydiga gränslastvärden, medan knutpunktsrotationsmekanismerna har betydelse endast som i kombinerade mekanismer ingående delar.

**Elementarmekanisernas gränslastmoment  $M_s$**

Som framgår av fig :88ag har ramlastfallet sex av varandra oberoende **balkmekanismer**. För dessas gränslastvärden ger en beräkning enligt kinematisk

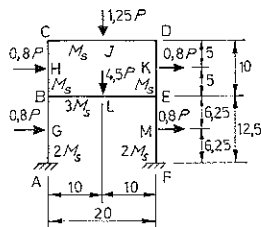


Fig :88 af

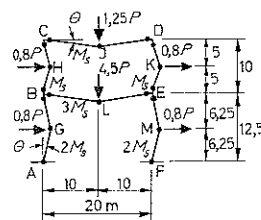


Fig :88 ag

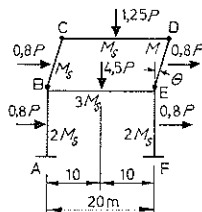


Fig :88 ah

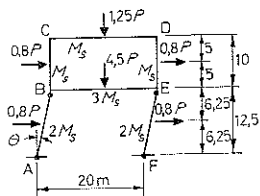


Fig :88 ai

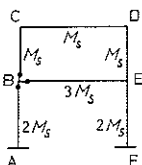


Fig :88 aj

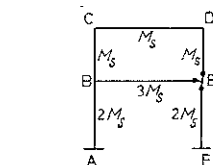


Fig :88 ak

metod följande samband med  $\Theta =$  vinkeländringen för varje enskilt, av två på varandra följande flytleder begränsat avsnitt i en ramdels kinematiska kedja.

$$\begin{aligned} \text{Ramdel } AB, EF: \quad W^y &= 0,8P \cdot 6,25\Theta = W^i = 4 \cdot 2M_s \cdot \Theta \\ 5P\Theta &= 8M_s\Theta; \quad M_s = 0,0625P \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \text{Ramdel } BC, DE: \quad W^y &= 0,8P \cdot 5\Theta = W^i = 4M_s\Theta \\ 4P\Theta &= 4M_s\Theta; \quad M_s = P \end{aligned} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} \text{Ramdel } CD: \quad W^y &= 1,25P \cdot 10\Theta = W^i = 4M_s\Theta \\ 12,5P\Theta &= 4M_s\Theta; \quad M_s = 3,125P \end{aligned} \quad (c)$$

$$\begin{aligned} \text{Ramdel } BE: \quad W^y &= 4,5P \cdot 10\Theta = W^i = 4 \cdot 3M_s\Theta \\ 45P\Theta &= 12M_s\Theta; \quad M_s = 3,75P \end{aligned} \quad (d)$$

Analogt ger en beräkning enligt kinematisk metod för gränslastvärdet för de i fig :88 ah och ai visade knutpunktsförskjutningsmekanismerna sambanden, med  $\Theta =$  rambenens vinkeländring för den övre resp undre ramvåningen.

$$\begin{aligned} \text{Förskjutningsmekanism ah:} \quad W^y &= 2 \cdot 0,8P \cdot 5\Theta = W^i = 4M_s\Theta \\ 8P\Theta &= 4M_s\Theta; \quad M_s = 2P \end{aligned} \quad (e)$$

$$\begin{aligned} \text{Förskjutningsmekanism ai:} \quad W^y &= 2 \cdot 0,8P \cdot 12,5\Theta + 2 \cdot 0,8P \cdot 6,25\Theta = W^i = \\ &= 4 \cdot 2M_s\Theta \\ 30P\Theta &= 8M_s\Theta; \quad M_s = 3,75P \end{aligned} \quad (f)$$

#### Kombinerade mekanismers gränslastmoment $M_s$

Av ovan för elementarmekanismerna beräknade gränslastsamband ger de till balkmekanism för ramdelen BE och knutpunktsförskjutningsmekanism ai hörande lägsta gränslastvärdet  $P$ . I avsikt att finna en kombinerad mekanism, som ger ännu lägre gränslastvärde, är det därför naturligt att i första hand undersöka en kombinerad mekanism, som just är sammansatt av balkmekanismen för ramdelen BE och förskjutningsmekanismen ai (fig :88a1). Vid en genom en sådan överlagring erhållen flytfigur blir emellertid de båda elementarmekanismerna inte deformationsmässigt kopplade till varandra — vinkeländringarna  $\Theta_1$  och  $\Theta_2$  är oberoende av varandra. En entydig, kombinerad mekanism uppkommer däremot, om utöver de båda nämnda elementarmekanismerna inkluderas knutpunktsrotationsmekanismen aj (fig :88am). För denna kombinerade mekanism ger en beräkning enligt kinematisk metod för det yttre arbetet  $W^y$  uttrycket

$$\begin{aligned} W^y &= 2 \cdot 0,8P \cdot 6,25\Theta + 2 \cdot 0,8P \cdot 12,5\Theta + 4,5P \cdot 10\Theta = 10P\Theta + 20P\Theta + 45P\Theta = \\ &= 75P\Theta \end{aligned}$$

och för det inre arbetet  $W^i$  uttrycket

$$W^i = 3 \cdot 2M_s\Theta + M_s\Theta + 3 \cdot 3M_s\Theta = 16M_s\Theta$$

varpå ur villkoret  $W^y = W^i$  erhålls gränslastsambandet

$$75P\Theta = 16M_s\Theta; \quad M_s = 4,69P \quad (g)$$

Den kombinerade mekanismen enligt fig :88am ger alltså ett lägre gränslastvärde  $P$  än någon av elementarmekanismerna.

Uttrycken för den kombinerade mekanismens yttre och inre arbeten  $W^y$  och  $W^i$  kan beräknas något mera direkt genom följande resonemang (jfr exempel 1).

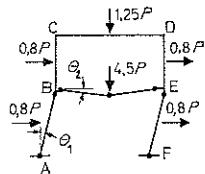


Fig :88 a1

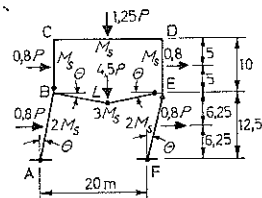


Fig :88 am

Vid en överlagring av de tre elementarmekanismerna till en kombinerad mekanism förändras inte de till elementarmekanismerna hörande yttre arbetena  $W^y$ . En direkt summation av dessa yttre arbeten ger därför den kombinerade mekanismens yttre arbete  $W^y$ , dvs — jfr ekv (d) och (f)

$$W^y = 45P\Theta + 30P\Theta = 75P\Theta$$

En jämförelse mellan den kombinerade mekanismens flytleder (fig :88am) å ena sidan och flytledererna för balkmekanismen för ramdelen BE (fig :88ag) och för knutpunktsförskjutningsmekanismen ai å andra sidan visar, att i den kombinerade mekanismen återfinns de båda elementarmekanismernas flytleder, vad gäller de till punkterna A, E, F och L hörande. I ramhörnet B återfinns för den kombinerade mekanismen inte de båda elementarmekanismernas flytleder. I gengäld innehåller den kombinerade mekanismen för ramhörnet B en i ramdelen BC utpräadande flytled, vilken saknas för de båda elementarmekanismerna. Av det anförda framgår, att den kombinerade mekanismens inre arbete  $W^i$  kan beräknas genom addition av de båda elementarmekanismernas, om samtidigt en korrektion införs för skiljaktigheterna i ramhörnet B, dvs om beloppen  $3M_s\Theta$  och  $2M_s\Theta$  subtraheras och beloppet  $M_s\Theta$  adderas. Den kombinerade mekanismens inre arbete  $W^i$  får härigenom värdet — jfr ekv (d) och (f)

$$W^i = 12M_s\Theta + 8M_s\Theta - 3M_s\Theta - 2M_s\Theta + M_s\Theta = 16M_s\Theta$$

En överlagring av knutpunktsrotationsmekanismen ak på den i fig :88am visade kombinerade mekanismen ger en ny kombinerad mekanism med utformning enligt fig :88an. För det yttre arbetet  $W^y$  gäller för de båda kombinerade mekanismerna samma uttryck — ekv (g) — dvs

$$W^y = 75P\Theta$$

För det inre arbetet  $W^i$  gäller också för de båda kombinerade mekanismerna samma värde, vad avser de till flytledererna kring punkterna A, B, F och L hörande delbeloppen. Från ramhörnet E tillkommer för den kombinerade mekanismen enligt fig :88am bidraget  $3M_s\Theta + 2M_s\Theta = 5M_s\Theta$  och för den kombinerade mekanismen enligt fig :88an bidraget  $3M_s \cdot 2\Theta + M_s\Theta = 7M_s\Theta$  till det inre arbetet  $W^i$ . För den i fig :88an visade kombinerade mekanismen erhålls därför för det inre arbetet  $W^i$  uttrycket — jfr ekv (g)

$$W^i = 16M_s\Theta + 7M_s\Theta - 5M_s\Theta = 18M_s\Theta$$

varpå villkoret  $W^i = W^y$  ger gränslastsambandet

$$75P\Theta = 18M_s\Theta; \quad M_s = 4,17P \tag{h}$$

Det mot flytfiguren enligt fig :88an svarande gränslastvärdet  $P$  är alltså större än gränslastvärdet för den kombinerade mekanismen enligt fig :88am och därför inte dimensionerande för rambärverket.

Överlagras på den kombinerade mekanismen enligt fig :88am förskjutningsmekanismen ah samt balkmekanismen för ramdelen CD, uppkommer den i fig :88ao visade, kombinerade mekanismen. Denna karakteriseras av ett yttre arbete  $W^y$ , som erhålls genom en direkt summation av de till balkmekanismen för CD, förskjutningsmekanismen ah samt mekanismen enligt fig :88am hörande yttre arbetena, dvs — jfr ekv (c), (e) respektive (g)

$$W^y = 12,5P\Theta + 8P\Theta + 75P\Theta = 95,5P\Theta$$

För det samtidigt i flytledererna uppkomna inre arbetet  $W^i$  beräknas ur fig :88ao uttrycket

$$W^i = 5M_s\Theta + 3 \cdot 2M_s \cdot \Theta + 3 \cdot 3M_s \cdot \Theta = 20M_s\Theta$$

varpå ur villkoret  $W^y = W^i$  erhålls gränslastsambandet

$$95,5P\Theta = 20M_s\Theta; \quad M_s = 4,78P \tag{i}$$

Av samtliga elementarmekanismer och ovan behandlade, kombinerade mekanismer ger följaktligen den kombinerade mekanismen enligt fig :88ao

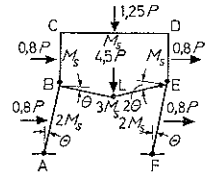


Fig :88an

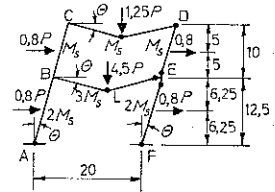


Fig :88ao

det högsta gränslastmomentet  $M_s$  eller lägsta gränslastvärdet  $P$ . En addition till denna senare mekanism av knutpunktsrotationsmekanismen ak förändrar inte det yttre och inre arbetets storlek och därigenom inte heller gränslastvärdet  $P$ .

Avslutningsvis undersöks genom konstruktion av böjmomentdiagrammet om ovan funnen dimensionerande flytmekanism enligt fig :88a0 också är rambelastningsfallets korrekta flytmekanism. Som kriterium härför gäller, att det inte i något snitt av ramverket får uppträda något böjmoment, som är större än den tillhörande ramdelens gränslastböjmoment —  $M_s$  för ramdelarna BC, CD och DE,  $2M_s$  för ramdelarna AB och EF samt  $3M_s$  för ramdelen BE.

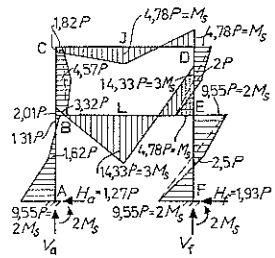


Fig :88ap

*Böjmomentdiagrammet för dimensionerande flytmekanism*

Av de ovan studerade flytmekanismerna ger den i fig :88a0 angivna det lägsta värdet för gränslasten  $P$ . I det till denna flytmekanism hörande böjmomentdiagrammet (fig :88ap) kan direkt inritas böjmomentvärdena för mekanismens flytleder. Därigenom bestäms direkt den lineära böjmomentvariationen mellan flytlederna I och D samt L och E. En överlagring på den mot inspänningsböjmomenten svarande lineära momentvariationen för ramdelarna DE och EF av böjmomentvariationen för transversalkrafterna  $0,8P$  bestämmer dessa ramdelars böjmomentdiagram. Speciellt erhålls i ramdelarnas mittsnitt böjmomentet  $0,4P \cdot 5 = 2P$  för ramdelen DE och böjmomentet  $0,4P \cdot 6,25 = 2,5P$  för ramdelen EF.

För bestämning av böjmomentvariationen för ramdelen AB beräknas först horisontalreaktionen  $H_a$  i upplaget A. Ur en horisontell projektiions-ekvation för hela ramverkets yttre krafter erhålls sambandet

$$H_a + H_f - 4 \cdot 0,8P = 0; \quad H_a + H_f = 3,2P$$

och ur en momentekvation med avseende på upplaget E för ramdelens EF yttre krafter sambandet

$$\sim H_f \cdot 12,5 - 0,8P \cdot 6,25 - 2 \cdot 9,55P = 0$$

Sambanden ger för horisontalreaktionerna  $H_a$  och  $H_f$  i upplagspunkterna A och F värdena

$$H_f = 1,93P; \quad H_a = 1,27P$$

Med inspänningsmoment och horisontalreaktion kända i upplagssnittet A blir böjmomentdiagrammet för ramdelen AB bestämt. I ramdelens mittsnitt erhålls momentvärdet

$$2M_s - H_a \cdot 6,25 = 9,55P - 1,27P \cdot 6,25 = 1,62P (\text{ } \curvearrowright)$$

och i ramdelens inspänningsnitt B momentvärdet

$$2M_s - H_a \cdot 12,5 + 0,8P \cdot 6,25 = 9,55P - 1,27P \cdot 12,5 + 5P = -1,31P (\text{ } \curvearrowleft)$$

Ur förhållandet, att böjmomentet = 0 i snittet mitt emellan flytlederna I och D, beräknas för ramdelens CD vertikalreaktion  $V_d$  i ändpunkten D uttrycket

$$M_s - V_d \cdot 5 = 0; \quad V_d = 4,78P/5 = 0,955P$$

Med  $V_d$  och inspänningsmomentet i D kända blir också böjmomentdiagrammet för ramdelen CD bestämt. I ramdelens inspänningsnitt C erhålls böjmomentvärdet

$$M_s - V_d \cdot 20 + 1,25P \cdot 10 = 4,78P - 0,955P \cdot 20 + 12,5P = -1,82P (\text{ } \curvearrowleft)$$

Analogt beräknas för ramdelens BE vertikalreaktion  $V_e$  i ändpunkten E uttrycket

$$3M_s - V_e \cdot 5 = 0; \quad V_e = 14,33P/5 = 2,87P$$

och för böjmomentet i ramdelens inspänningssnitt B värdet

$$3M_s - V_e \cdot 20 + 4,5P \cdot 10 = 14,33P - 2,87P \cdot 20 + 45P = 2,01P (\approx)$$

För ramdelen BC ger den genomförda beräkningen momentvärdet  $1,82P$  i inspänningssnittet C samt momentvärdet  $1,31P + 2,01P = 3,32P$  i inspänningssnittet B — jfr fig :88 aq. Därmed kan också böjmomentdiagrammet för ramdelen BC konstrueras.

Av det nu i sin helhet bestämda böjmomentdiagrammet för rambarverket framgår, att det inte innehåller något snitt, i vilket böjmomentet är större än tillhörande ramdels gränslastböjmoment. Den för böjmomentdiagrammet gällande flytmekanismen enligt fig :88 ao är därför korrekt och den för rambarverket dimensionerande.

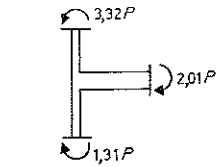


Fig :88 aq

### C Andra beräkningsmetoder

Av övriga i litteraturen redovisade, systematiserade metoder för bestämning av ramkonstruktioners gränslaster förtjänas speciellt att nämnas den av Horne angivna *plastiska successiva momentutjämningsmetoden*, vid vilken korrekt flytfigur bestäms genom ett relaxationsförfarande. För metodens detaljer hänvisas i detta sammanhang till publicerade arbeten på området (se t ex [43], [44], [48] och [51]), i vilka också beskrivs andra gränslastmetoder för ramkonstruktioner.

### :89 Inverkan av upprepad varierande last

Vid de ovan genomförda ramberäkningarna enligt gränslastmetod har genomgående förutsatts, att de verkande lasterna är av varandra lineärt beroende — samtliga multipler av ex ett lastvärde  $P$ ,  $q$  etc. Under denna förutsättning kan vid valda dimensioner beräknas den brottsäkerhet

$$n = P_s/P; \quad n = q_s/q \text{ etc} \quad (1)$$

som tillhör den som *engångslast* uppträdande farligaste kombinationen av dimensionerande laster uttryckta i  $P$ ,  $q$  etc. I ekv (1) betecknar därvid  $P_s$  och  $q_s$  de  $P$ - och  $q$ -värden, som bestäms av gränslastmomentet  $M_s$  vid dimensionerande flytfigur. Omvänt kan man vid känd farligaste lastkombination och föreskriven brottsäkerhet  $n$  i stället beräkna för konstruktionen erforderliga dimensioner. De vid byggnadskonstruktioner aktuella lasterna är normalt inte sammankopplade på detta sätt till som engångslaster uppträdande kombinationer. Det ordinära lastförloppet beskrivs i stället av en konstant, av egenvikten bestämd inverkan, kombinerad med mer eller mindre kontinuerligt varierande inverkningar från nyttig last, snölast, vindlast etc. Vid en dimensionering är därvid — bortsett från extrema undantagsfall — dessa varierande inverkningar kända endast genom vissa övre och undre gränsvärden, givna t ex genom gällande bestämmelser, men däremot okända, vad gäller det detaljerade variationsförloppet. För inverkningar av denna typ införs nedan i överensstämmelse med litteraturen på området beteckningen *upprepad, varierande last*.

Vid en upprepad varierande last kan ett flytbrott bli aktuellt vid ett övre lastvärde  $P$ ,  $q$  som är *lägre* än den mot en engångslast svarande gränslasten  $P_s$ ,  $q_s$ . Följande två huvudtyper av flytbrott kan därvid uppkomma:

- 1 *Växelflytbrott* (alternating plasticity collapse).
- 2 *Tillväxtflytbrott* (incremental collapse).

Ett *växelflytbrott* är till sin typ ett utmattningsbrott och orsakas av att den upprepad varierande lasten i något eller några snitt av en konstruktion ger flytning omväxlande genom tryck och dragning. Det slutgiltiga brottet kommer därvid som regel efter ett relativt litet antal lastväxlingar — av storleksordningen 100 å 1 000.

Ett *tillväxtflytbrott* karaktäriseras av att konstruktionen i något eller några snitt vid varje cykel av den upprepade varierande lasten får en icke-

avtagande, åt bestämt håll riktad tillväxt i kvarstående, plastiska vinkeländringar. Brott inträffar genom att summan av dessa vinkeländringstillskott blir så stor, att materialets deformationsförmåga överskrids.

En beräkning av de mot växelflytbrott och tillväxtflytbrott svarande lastvärdena förutsätter kännedom om momenttillståndet vid elastiska förhållanden och blir som en följd härav normalt tidsödande i jämförelse med en ordinär gränslastberäkning enligt de linjer, som angetts ovan i :86-:88. För det detaljerade genomförandet av sådana beräkningar för växelflytbrott och tillväxtflytbrott hänvisas i detta sammanhang till litteraturen på området. (Se t ex [43] och [51].)

För en vidare belysning av den skildrade problemställningen ges nedan en på i [43] genomförda kalkyler baserad, beskrivande analys av verknings sättet vid det i fig :88 a visade lastfallet.

Från den i :88 A genomförda behandlingen är det bekant, att den mot en engångslast svarande gränslasten  $P_s$  för specialfallet  $H = P$  har värdet

$$P_s = 3M_s/a \tag{a}$$

Utsätts konstruktionen i stället för en upprepad last, uppbyggd av följande lastcykler

$$\begin{cases} P = +P \rightarrow 0 \rightarrow 0 & \rightarrow 0 \rightarrow +P \text{ osv} \\ H = +P \rightarrow 0 \rightarrow -P \rightarrow 0 \rightarrow +P \text{ osv} \end{cases} \tag{b}$$

ger en beräkning, att för

$$P = P_s^v \geq 2,76M_s/a \tag{c}$$

kommer inspänningssnittet E att bli utsatt för omväxlande positivt och negativt flytmoment,  $+M_s$  resp  $-M_s$ , vilket efter ett bestämt antal upprepade laster för till växelflytbrott i konstruktionen.

Angrips konstruktionen i stället av en upprepad last med följande lastcykler

$$\begin{cases} P = +P \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow +P \text{ osv} \\ H = +P \rightarrow 0 \rightarrow +P \rightarrow 0 \rightarrow +P \text{ osv} \end{cases} \tag{d}$$

kan, beroende på storleken av  $P$ , något av följande alternativ inträffa:

1  $P \leq 2,74M_s/a$ . Efter den första lastcykeln med flytning i något eller några av snitten A, D och E uppför sig ramen för upprepade lastcykler helt elastiskt.

2  $2,74M_s/a < P \leq 2,86M_s/a$ . Under varje lastcykel uppkommer en kvarstående tillväxt i plastisk vinkeländring i snitten D och E, då lasten  $P = +P$  och  $H = +P$  påförs, och i snittet A, då enbart lasten  $H = +P$  påförs. Storleken av dessa vinkeländringstillskott avtar med antalet lastcykler och de totala kvarstående vinkeländringarna konvergerar mot bestämda gränsvärden.

3  $P > 2,86M_s/a = P_s^{iv}$ . De kvarstående plastiska vinkeländringstillskotten blir för varje lastcykel lika stora, vilket medför totala kvarstående vinkeländringar, som med ökat antal lastcykler obegränsat tillväxer och för till tillväxtflytbrott.

Förhållandena illustreras ytterligare av diagrammet i fig :89, vilket för olika  $P$ -värden ger den totalt kvarstående horisontalförskjutningen  $\delta$  av BCD som funktion av antalet upprepade lastcykler  $n$ .

Av det ovan anförda framgår, att, om den i fig :88 a visade ramen dimensioneras med en bestämd brottsäkerhet  $n$  för en engångslast  $P$  jämte  $H$ , där  $H = P$ , får den för en upprepad varierande last av typ enligt ekv (b) en brottsäkerhet mot växelflytbrott  $n^v = 2,76/3n = 0,920n$ , och för en upprepad varierande last av typ enligt ekv (d) en motsvarande brottsäkerhet mot tillväxtflytbrott  $n^{iv} = (2,86/3)n = 0,953n$ . Vid föreskrivet maximalvärde för

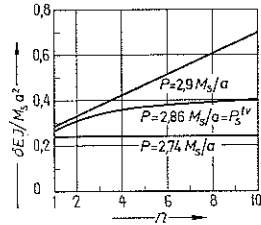


Fig :89



lasten blir följaktligen brottsäkerheten något mindre, om lasten är av typen upprepad varierande än om den inkommer som en engångslast. Av detta får inte dras den slutsatsen, att en beräkning enligt ordinär gränslastmetod (:86–88) vid byggnadskonstruktioner, för vilka normalt lasten är av typen upprepad varierande, generellt ger dimensioner på osäkra sidan. Som en gynnsam faktor för en beräkning enligt ordinär gränslastmetod i jämförelse med en mera komplicerad beräkning för växel- och tillväxtflytbrott tillkommer nämligen ordinärt förhållandet, att sannolikheten för att en föreskriven maximiast skall uppträda ett stort antal gånger som upprepad varierande, är mindre än sannolikheten för att den skall uppträda som en engångslast, vilket motiverar lägre brottsäkerheter vid brottyperna växel- och tillväxtflytbrott. Problemet har närmare analyserats i av Horne m fl publicerade arbeten, ur vilka allmänt kan dras slutsatsen, att — bortsett från typiska fall av utmattningsslaster — resulterar en ordinär gränslastberäkning enligt :86–88 vid normalt utformade byggnadskonstruktioner i sådana dimensionsförhållanden, att sannolikheten för konstruktionens sammanstörtande genom växelflytbrott eller tillväxtflytbrott blir mindre än sannolikheten för kollaps genom det till en engångslast hörande flytbrottet.

## Litteratur

### Castiglianos sats. Arbetskvationer

- [1] Asplund, S O: *Structural mechanics: classical and matrix methods*. Prentice-Hall, London–Sydney–Toronto–New Delhi–Tokyo 1966
- [2] Borg, S F och Gennaro, J J: *Advanced structural analysis*. New York–London–Toronto 1965
- [3] Broek, J A van den: *Elastic energy theory*. New York 1948
- [4] Hannemann, I G: *Teknisk statik I*. Köpenhamn 1955
- [5] Hirschfeld, K: *Baustatik*. Berlin–Heidelberg–New York 1965
- [6] Matheson, J A L: *Hyperstatic structures*. Vol 1. London 1959. — Vol 2. London 1960
- [7] Maugh, L C: *Statically indeterminate structures*. New York–London–Sydney 1964
- [8] Nylander, H och Sahlin, S: *Statiskt obestämda stängsystem, balk- och ramkonstruktioner*. KTH, Institutionen för byggnadsstatik. Meddelande 80. Stockholm 1969
- [9] Odqvist, F K G: *Hållfasthetslära*. Stockholm 1966
- [10] Stüssi, F: *Vorlesungen über Baustatik*. Bd II. Basel 1954
- [11] Timoshenko, S och Young, D H: *Theory of structures*. New York–London 1945

### Elasticitetskvationer

- [1], [2], [4]–[11] jämte
- [12] Fries, W: *Fachwerk und Rahmenwerk*. Berlin–Göttingen–Heidelberg 1953
- [13] Guldan, R: *Rahmentragwerke und Durchlaufträger*. Wien 1959
- [14] Ostenfeld, C: *Die Deformationsmethode*. Berlin 1926

### Primärmomentmetoden

- [1] jämte A
- [15a] Bjuggren, U: *Momentbestämning för den elastiskt inspända balken med konstant tröghetsmoment*. Teknisk tidskrift 1939: 11. Stockholm
- [15b] Eisen, A: *Die Methode der primären Momente*. Köpenhamn 1931. — *Primärmomentmetoden*. Köpenhamn 1950
- [16] Ludvigson, B: *Beräkning av ramar och bågar enligt primärmomentmetoden*. Byggnadsforskningen. Meddelande 7. Stockholm 1947
- [17] Rygol, J: *Structural analysis by direct moment distribution*. London 1968
- [18] Wästlund, G: *Primärmomentmetoden*. KTH, Institutionen för brobyggnad. Meddelande 1. Stockholm 1944

### Cross' metod

- [1], [2], [5]–[9], [11] jämte
- [19] Barth, R: *Grundwerte für das Cross-Verfahren*. Berlin 1964
- [20] Cross, H och Morgan, N D: *Continuous frames of reinforced concrete*. New York 1932
- [21] Cross, H: *Arches, continuous frames, columns and conduits*. Urbana 1963

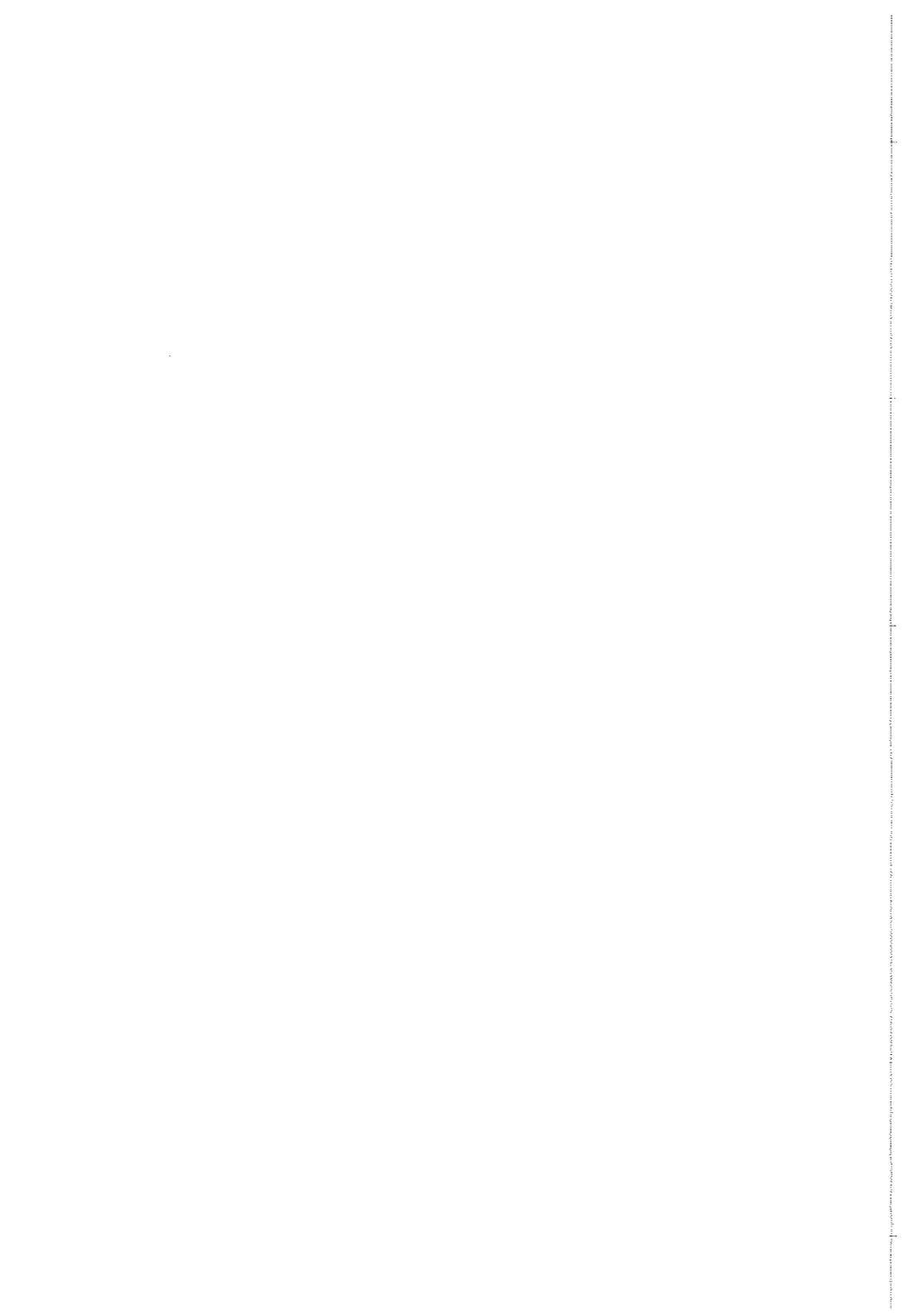
- [22] Gere, J M: *Moment distribution*. New York–London–Toronto 1963  
 [23] Guldán, R: *Die Cross-Methode und ihre praktische Anwendung*. Wien 1955  
 [24] Hultin, S: *Beräkning av rankkonstruktioner medelst utjämningsberäkning*. Chalmersisternas handelsförening. Göteborg 1945  
 [25] Johansson, J: *Das Cross-Verfahren*. Berlin 1948  
 [26] Kani, G: *Analysis of multistory frames*. New York–London 1957  
 [27] Mörsch, E: *Das Cross'sche Verfahren*. Stuttgart 1947  
 [28] Raczat, G: *Das verovollständige Cross-Verfahren in der Rahmenberechnung*. Berlin–Göttingen–Heidelberg 1962

#### Matrismetoder och systematiserad analys

- [1], [8] jämte  
 [29] Argyris, J H, Kelsey, S och Kamel, H: *Matrix methods in structural analysis*. London 1964  
 [30] Argyris, J H och Kelsey, S: *Energy theorems and structural analysis*. London 1968  
 [31] Beaufait, F W, Rowan, W H, Hoadley, P G och Hackett, R M: *Computer methods of structural analysis*. Prentice Hall, New Jersey 1970  
 [32] Bengtsson, Å och Wolf, J P: *Ein neues Berechnungshilfsmittel für Statiker*. Neuen Zürcher Zeitung, 11 maj 1970  
 [33] Gere, J M och Weaver, W: *Analysis of framed structures*. Princeton, New Jersey–Toronto–New York–London 1965  
 [34] Hall, A S och Woodhead, R W: *Frame analysis*. New York–London 1967  
 [35] Jenkins, W M: *Matrix and digital computer methods in structural analysis*. London 1969  
 [36] Livesley, R K: *Matrix methods in structural analysis*. Oxford–London–Edinburgh–Paris–Frankfurt–New York 1964  
 [37] Pipes, L A och Hovanessian, S A: *Matrix-computer methods in engineering*. New York–London–Sydney–Toronto 1969  
 [38] Robinson, J: *Structural matrix analysis for the engineer*. New York–London–Sydney 1966  
 [39] Sundstrand, A: *Beräkningssystem för strukturanalys*. Akademisk avhandling. KTH, Stockholm 1964  
 [40] Willems, N och Lucas, W M: *Matrix analysis for structural engineers*. London–Sydney–Toronto–New Delhi–Tokyo 1968

#### Gränslastmetod

- [2] jämte  
 [41] Baehre, R: *Das Tragverhalten von biegungsbeanspruchten statisch bestimmten und unbestimmten Balken aus elastoplastischem Material*. Acta polytechnica Scandinavica, Ci 51, Stockholm 1968  
 [42] Baker, A L L: *Limit state design of reinforced concrete*. London 1971  
 [43] Baker, J F, Horne, M R och Heyman, J: *The steel skeleton*. Vol II. Cambridge 1956  
 [44] Baker, J F och Heyman, J: *Plastic design of frames. 1 Fundamentals*. Cambridge 1969. — Heyman, J: *Plastic design of frames. 2 Applications*. Cambridge 1971  
 [45] Beedle, L S: *Plastic design of steel frames*. New York–London–Sidney 1964  
 [46] Broek, J A van den: *Theory of limit design*. New York 1948  
 [47] Daniels, S R: *Inelastic steel structures*. University of Tennessee 1966  
 [48] Horne, M R: *Plastic theory of structures*. London 1971  
 [49] Johansen, K W m fl: *Undersøgelser over stålkonstruktioners bæreevne*. Danmarks tekniske højskole, Laboratoriet for bygningsteknik. Meddelelse 3. Köpenhamn 1954  
 [50] Lin, T H: *Theory of inelastic structures*. New York 1968  
 [51] Neal, B G: *The plastic methods of structural analysis*. London 1963  
 [52] Dyrbye, C: *Kontinuerlige, elasto-plastiske bjælker med gentagne, overkørende belastninger*. Polyteknisk Forlag. Köpenhamn 1969  
 [53] Mikkola, M: *An analysis of physically nonlinear structures*. Statens tekniska forskningsanstalt, Publikation 112. Helsingfors 1966  
 [54] Nylander, H och Sahlin, S: *Undersökning av kontinuerliga betongbalkar vid långtgående betongstukning*. Betong 1955: 3, s 241. Stockholm  
 [55] Phillips, A: *Introduction to plasticity*. New York 1956  
 [56] Reckling, K A: *Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme*. Berlin–Heidelberg–New York 1967  
 [57] Samuelsson, A: *Flytledsteori för balkar och ramar av stål och betong*. CTH, Institutionen för byggnadsstatik. Intern skrift 15. Göteborg 1965



# Tabellgrupp

---

Enkel tvåstödsbalk	1: 38
Ensidigt fast inspänd balk med konstant tröghetsmoment	1: 39
Dubbelsidigt fast inspänd balk med konstant tröghetsmoment	1: 40
Inspänd konsolbalk	1: 41
Inspänd konsolbalk med stegvis varierande tröghetsmoment, nedböj- ningar	1: 42
Överkragande tvåstödsbalk med konstant tröghetsmoment, nedböj- ningar	1: 43
Balkkonstanter	1: 44
Lastkonstanter	1: 45
Styvhetstal	1: 46
Transporttal	1: 47
Startmoment	1: 48

Allmänna beteckningar:

A och a samt B och b = vänster respektive höger upplag eller ände

$l$  = teoretisk spännvidd

$R$  = stödreaktion

$T$  = tvärkraft

$M$  = moment

$w = \frac{\Theta^0}{\beta^0} = \frac{\Theta^0 6EI}{l}$ , där  $\Theta^0$  är stödvinkeländringen

(jfr 161:32 B)

$y$  = nedböjning

$M_1, y_1$  osv betecknar moment respektive nedböjning i punkt 1

$M^{0-1}, y^{0-1}$  osv betecknar moment respektive nedböjning på sträckan 0-1

$w_a, w_b$  hänför sig till vänster respektive höger upplag

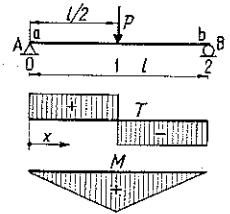
Tabell 1:38. Enkel tvåstödsbalk ( $y$  och  $w$  vid konstant  $l$ )

1

$$R_A = \frac{P}{2} \quad T_x^{0-1} = R_A \quad M_x^{0-1} = \frac{Px}{2} \quad y^{0-1} = \frac{Pl^2x}{16EI} \left( 1 - \frac{4x^3}{3l^2} \right)$$

$$R_B = \frac{P}{2} \quad T_x^{1-2} = -R_B \quad M_x^{1-2} = \frac{P(l-x)}{2} \quad y_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

$$w_a = w_b = \frac{3Pl}{8} \quad M_{\max} = M_{\text{mitt}} = \frac{Pl}{4} \quad \text{för } x = 0,5l$$



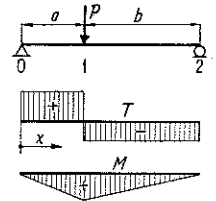
2

$$R_A = \frac{Pb}{l} \quad T_x^{0-1} = R_A \quad w_a = Pb \left( 1 - \frac{b^2}{l^2} \right) \quad M_x^{0-1} = \frac{Pbx}{l}$$

$$R_B = \frac{Pa}{l} \quad T_x^{1-2} = -R_B \quad w_b = Pa \left( 1 - \frac{a^2}{l^2} \right) \quad M_x^{1-2} = \frac{Pa(l-x)}{l}$$

$$y_{\text{mitt}} = \frac{Pa(3l^2 - 4a^2)}{48EI} \quad (a < b) \quad M_{\max} = M_1 = \frac{Pab}{l}$$

$$y^{0-1} = \frac{Plbx}{6EI} \left( 1 - \frac{b^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2} \right) \quad y^{1-2} = \frac{Pla(l-x)}{6EI} \left( \frac{2x}{l} - \frac{a^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2} \right) \quad y_1 = \frac{Pa^2b^2}{3EI}$$



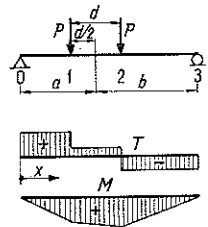
Beträffande  $R, T$  och  $M$  jfr 162:415 A. Beträffande  $y$  jfr 162:414 och tabell 1:49 A.

3

$$R_A = \frac{2Pb}{l} \quad T^{1-2} = \frac{2Pb}{l} - P \quad M_1 = \frac{2Pb}{l} \left( a - \frac{d}{2} \right)$$

$$R_B = \frac{2Pa}{l} \quad w_a = \frac{Pb}{l^2} \left[ 2a(l+b) - \frac{3}{2}d^2 \right] \quad M_2 = \frac{2Pa}{l} \left( b - \frac{d}{2} \right)$$

$$R_{\max} = P \left( 2 - \frac{d}{l} \right) \quad w_b = \frac{Pa}{l^2} \left[ 2b(l+a) - \frac{3}{2}d^2 \right] \quad M_x^{1-2} = R_A x - P \left( x - a + \frac{d}{2} \right)$$



Vid givet lastläge inträffar  $M_{\max}$  under den av krafterna som står närmast spännviddens mitt.

Är kraftparet rörligt skall det för erhållande av farligaste lastläge uppställas så att en av krafterna står symmetriskt med resultatant i förhållande till spännviddens mitt. Se 162:415 C.

Vid specialfallet  $a = b$  blir

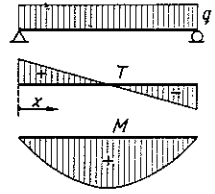
$$w_a = w_b = \frac{3Pl}{4} \left( 1 - \frac{d^2}{l^2} \right)$$

4

$$R_A = \frac{ql}{2} \quad T_x = q\left(\frac{l}{2} - x\right) \quad M_x = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad y = \frac{ql^3x}{24EI} \left(1 - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right)$$

$$R_B = \frac{ql}{2} \quad w_a = w_b = \frac{ql^2}{4} \quad M_{\max} = \frac{ql^2}{8} \quad \text{f\"or } x = 0,5l \quad y_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

$$\text{f\"or } x = 0,5l$$



$x/l$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$M_x/M_{\max}$	0	0,36	0,64	0,84	0,96	1,00	0,96	0,84	0,64	0,36	0
$y/y_{\max}$	0	0,314	0,594	0,813	0,952	1,00	0,952	0,813	0,594	0,314	0

5

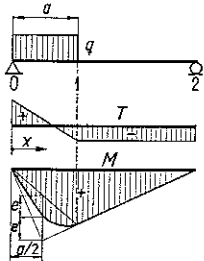
$$R_A = \frac{qa(2l-a)}{2l} \quad T_x^{0-1} = R_A - qx \quad M_x^{0-1} = R_A x - \frac{qx^2}{2} \quad w_a = \frac{qa^2}{l^2} \left(l - \frac{a}{2}\right)^2$$

$$R_B = \frac{qa^2}{2l} \quad T_x^{1-2} = -R_B \quad M_1 = \frac{qa^2(l-a)}{2l} \quad w_b = \frac{qa^2}{2l^2} \left(l^2 - \frac{a^2}{2}\right)$$

$M$  för  $a/2$  fås grafiskt genom att de båda avstånden  $e$  görs lika

$$M_{\max} = \frac{qa^2}{2} \left(1 - \frac{a}{2l}\right)^2 \quad \text{f\"or } x = a \left(1 - \frac{a}{2l}\right) < a$$

$a/l$	0,2	0,4	0,6	0,8
$x/l$	0,18	0,32	0,42	0,48
$M_{\max}/ql^2$	0,0162	0,0512	0,0882	0,1152

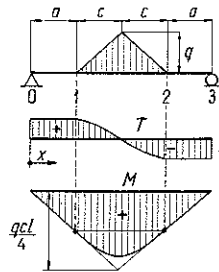


6

$$R_A = \frac{qc}{2} \quad T_x^{1-2} = R_A - q(x-a) \quad M_1 = M_2 = \frac{qac}{2}$$

$$R_B = \frac{qc}{2} \quad w_a = w_b = \frac{qc}{8l} (3l^2 - c^2) \quad M_x^{1-2} = \frac{qcx}{2} - \frac{q(x-a)^2}{2}$$

$$M_{\max} = M_{\text{mitt}} = \frac{qc}{2} \left(a + \frac{c}{4}\right)$$



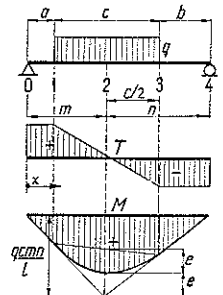
7

$$R_A = \frac{qcn}{l} \quad T_x^{1-3} = R_A - q(x-a) \quad M_1 = \frac{qcn a}{l} \quad M_3 = \frac{qcn b}{l}$$

$$R_B = \frac{qcm}{l} \quad w_a = qcn \left(1 - \frac{n^2}{l^2} - \frac{c^2}{4l^2}\right) \quad M_x^{1-3} = \frac{qcnx}{l} - \frac{q(x-a)^2}{2}$$

$$w_b = qcm \left(1 - \frac{m^2}{l^2} - \frac{c^2}{4l^2}\right) \quad M_{\max} = \frac{qcn}{2l^2} (2al + cn)$$

$$\text{f\"or } x = a + \frac{cn}{l}$$



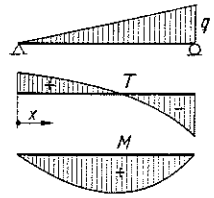
8

$$R_A = \frac{ql}{6} \quad T_x = \frac{ql}{6} - \frac{qx^2}{2l} \quad M_x = \frac{qlx}{6} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \quad y = \frac{ql^3x}{360EI} \left(7 - 10 \frac{x^2}{l^2} + 3 \frac{x^4}{l^4}\right)$$

$$R_B = \frac{ql}{3} \quad w_a = \frac{7}{60} ql^2 \quad M_{\max} = 0,064ql^2 \quad y_{\max} = 0,00652 \frac{ql^4}{EI}$$

für  $x = 0,577l$       für  $x = 0,519l$

$$w_b = \frac{8}{60} ql^2 \quad M_{\text{mitt}} = \frac{ql^2}{16} \quad y_{\text{mitt}} = \frac{5ql^4}{768EI}$$



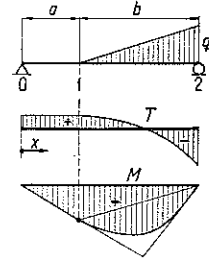
9

$$R_A = \frac{qb^2}{6l} \quad T_x^{1-2} = R_A - \frac{q(x-a)^2}{2b} \quad M_1 = \frac{qab^2}{6l}$$

$$R_B = \frac{qb}{2} \left(1 - \frac{b}{3l}\right) \quad w_a = \frac{qb^2}{60l^2} (10l^2 - 3b^2) \quad M_x^{1-2} = R_A x - \frac{q(x-a)^3}{6b}$$

$$w_b = \frac{qb^2}{60l^2} (20l^2 - 15lb + 3b^2) \quad M_{\max} = R_A \left(a + \frac{2}{3}b \sqrt{\frac{b}{3l}}\right)$$

für  $x = a + b \sqrt{\frac{b}{3l}}$



10

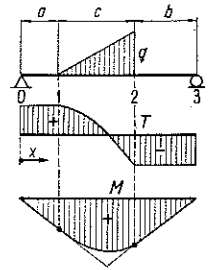
$$R_A = \frac{qc \left(b + \frac{c}{3}\right)}{2l} \quad R_B = \frac{qc \left(a + \frac{2c}{3}\right)}{2l} \quad M_1 = R_A a$$

$$T_x^{1-2} = R_A - \frac{q(x-a)^2}{2c} \quad M_x^{1-2} = R_A x - \frac{q(x-a)^3}{6c}$$

$$M_2 = R_B b$$

$$w_a = \frac{qc}{60l^2} [20b^2(3a+2c) + 10a^2(3b+c) + c^2(35b+20a+7c) + 80abc]$$

$$w_b = \frac{qc}{60l^2} [10b^2(3a+2c) + 20a^2(3b+c) + c^2(40b+25a+8c) + 100abc]$$

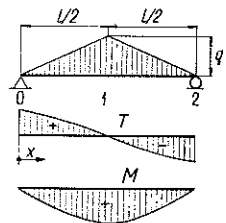


11

$$R_A = \frac{ql}{4} \quad T_x^{0-1} = R_A - \frac{qx^2}{l} \quad M_x^{0-1} = \frac{qlx}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2x^2}{3l^2}\right)$$

$$R_B = \frac{ql}{4} \quad w_a = w_b = \frac{5ql^2}{32} \quad M_{\max} = \frac{ql^2}{12} \quad \text{für } x = 0,5l$$

$$y^{0-1} = \frac{ql^4}{24EI} \left(\frac{5x}{8l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{2x^5}{5l^5}\right) \quad y_{\max} = \frac{ql^4}{120EI} \quad \text{für } x = 0,5l$$

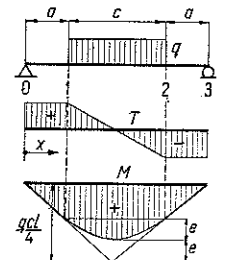


12

$$R_A = \frac{qc}{2} \quad T_x^{1-2} = R_A - \frac{q(x-a)^2}{2c} \quad M_x^{1-2} = \frac{qcx}{2} - \frac{q(x-a)^3}{6c}$$

für  $a \leq x \leq a+c$       für  $a \leq x \leq a+c$

$$R_B = \frac{qc}{2} \quad w_a = w_b = \frac{qc}{8l} (3l^2 - 2c^2) \quad M_{\max} = M_2 = \frac{qc}{2} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{3}\right)$$



13

$$R_A = \frac{qa}{2}$$

$$T_x^{0-1} = \frac{q(a-x)^2}{2a}$$

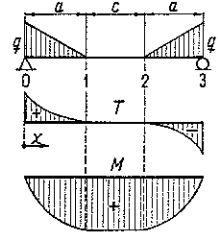
$$M_x^{0-1} = \frac{qa^2}{6} \left[ 1 - \left( \frac{a-x}{a} \right)^3 \right]$$

$$R_B = \frac{qa}{2}$$

$$T^{1-2} = 0$$

$$M^{1-2} = M_{\max} = \frac{qa^2}{6}$$

$$w_a = w_b = \frac{qa^2}{4l} (2l - a)$$



14

$$R_A = \frac{Q}{2}$$

$$T_x = \frac{Q}{2} \left( 1 - 6 \frac{x^2}{l^2} + 4 \frac{x^3}{l^3} \right)$$

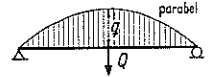
$$M_x = \frac{Ql}{2} \left( \frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$$

$$R_B = \frac{Q}{2}$$

$$w_a = w_b = \frac{3}{10} Ql$$

$$M_{\max} = \frac{5}{32} Ql \text{ för } x = 0,5l$$

$$Q = \frac{2}{3} ql$$



15

$$R_A = \frac{qa}{3}$$

$$T_x^{0-1} = \frac{q(a-x)^3}{3a^2}$$

$$M_x^{0-1} = \frac{qa^2}{12} \left[ 1 - \left( \frac{a-x}{a} \right)^4 \right]$$

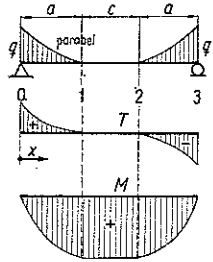
$$R_B = \frac{qa}{3}$$

$$T^{1-2} = 0$$

$$M^{1-2} = M_{\max} = \frac{qa^2}{12}$$

$$q_x^{0-1} = q \frac{(a-x)^2}{a^2}$$

$$w_a = w_b = \frac{qa^2}{4} - \frac{qa^3}{10l}$$



16

$$R_A = \frac{qb^2}{12l}$$

$$T_x^{0-1} = \frac{qb^2}{12l}$$

$$M_1 = \frac{qab^2}{12l}$$

$$R_B = \frac{qb}{3} \left( 1 - \frac{b}{4l} \right)$$

$$T_x^{1-2} = \frac{qb^2}{12l} - \frac{q(x-a)^3}{3b^2}$$

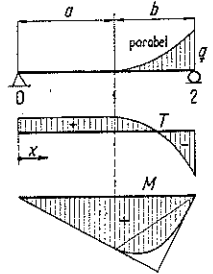
$$M_x^{1-2} = R_A x - \frac{q(x-a)^4}{12b^2}$$

$$q_x = \frac{q(x-a)^2}{b^2}$$

$$M_{\max} = R_A \left[ a + \frac{3}{4} b \sqrt{\frac{b}{4l}} \right] \text{ för } x = a + b \sqrt{\frac{b}{4l}}$$

$$w_a = \frac{qb^2}{60} \left( 5 - \frac{b^2}{l^2} \right)$$

$$w_b = \frac{qb^2}{60} \left( 10 - 6 \frac{b}{l} + \frac{b^2}{l^2} \right)$$



17

$$R_A = \frac{l}{6} (2q_1 + q_2)$$

$$R_B = \frac{l}{6} (2q_2 + q_1)$$

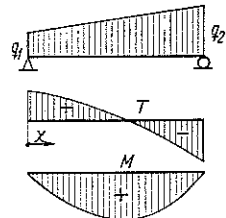
$$w_a = \frac{l^2}{60} (8q_1 + 7q_2)$$

$$T_x = R_A - q_1 x - (q_2 - q_1) \frac{x^2}{2l}$$

$$w_b = \frac{l^2}{60} (7q_1 + 8q_2)$$

$$M_x = R_A x - q_1 \frac{x^2}{2} - (q_2 - q_1) \frac{x^3}{6l}$$

Beroende på förhållandet  $q_2/q_1$  fås  $M_{\max}$  för  $x$  mellan  $0,5l$  och  $0,577l$





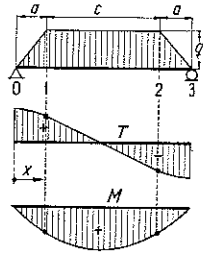
18

$$R_A = q \frac{a+c}{2} \quad T_1 = \frac{qc}{2} \quad M_1 = R_A a - \frac{qa^2}{6}$$

$$R_B = q \frac{a+c}{2} \quad T_x^{0-1} = R_A - \frac{qx^2}{2a} \quad M_x^{0-1} = R_A x - \frac{qx^3}{6a}$$

$$T_x^{1-2} = q \left( \frac{c}{2} + a - x \right) \quad M_x^{1-2} = R_A x - \frac{q}{2} \left( x^2 - ax + \frac{a^2}{3} \right)$$

$$w_a = w_b = \frac{q(l+c)}{32} \left( 5 - \frac{c^2}{l^2} \right) \quad M_{\max} = M_{\text{mitt}} = \frac{q}{24} [8a^2 + 3c(c+4a)]$$

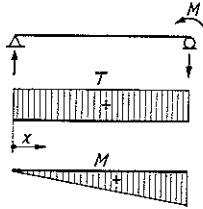


19

$$R_A = \frac{M}{l} \quad R_B = -\frac{M}{l} \quad T_x = \frac{M}{l} \quad M_x = M \frac{x}{l} \quad w_a = M \quad w_b = 2M$$

$$y = \frac{Mlx}{6EI} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \quad y_{\max} = \frac{MI^2}{9\sqrt{3}EI} \text{ för } x = 0,577l \quad y_{\text{mitt}} = \frac{MI^2}{16EI}$$

$x/l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$y/y_{\max}$	0,258	0,500	0,710	0,875	0,976	1,0	0,930	0,750	0,445



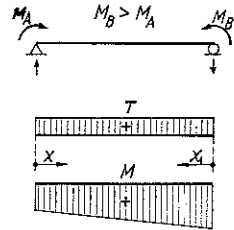
20

$$R_A = \frac{M_B - M_A}{l} \quad T = \frac{M_B - M_A}{l} \quad M_x = M_A + (M_B - M_A) \frac{x}{l}$$

$$R_B = -\frac{M_B - M_A}{l} \quad T \text{ är positiv om } M_B > M_A \quad w_a = 2M_A + M_B$$

$$w_b = 2M_B + M_A$$

$$y = \frac{l}{6EI} \left[ M_A x_1 \left( 1 - \frac{x_1^2}{l^2} \right) + M_B x \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \right]$$



Beroende på förhållandet  $M_A/M_B$  varierar läget för  $y_{\max}$  mellan 0,5l och 0,577l ( $M_B > M_A$ )

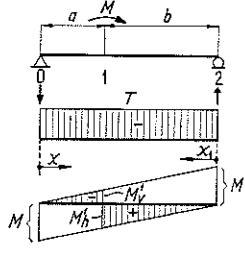
21

$$R_A = -\frac{M}{l} \quad M_x^{0-1} = -M \frac{x}{l} \quad w_a = M \left( 3 \frac{b^2}{l^2} - 1 \right)$$

$$R_B = +\frac{M}{l} \quad M_x^{1-2} = +\frac{M(l-x)}{l} \quad w_b = -M \left( 3 \frac{a^2}{l^2} - 1 \right)$$

$$T = -\frac{M}{l} \quad M'_v = -M \frac{a}{l} \quad y^{0-1} = -\frac{Mlx}{6EI} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{3b^2}{l^2} \right)$$

$$M'_h = +M \frac{b}{l} \quad y^{1-2} = \frac{Mlx_1}{6EI} \left( 1 - \frac{x_1^2}{l^2} - \frac{3a^2}{l^2} \right)$$

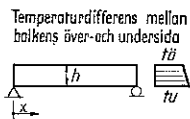


22

$$R = 0 \quad w_a = w_b = \frac{3EI\alpha\Delta t}{h} \quad y = \frac{\alpha\Delta t l^2}{2h} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) \quad y_{\max} = \frac{\alpha\Delta t l^2}{8h}$$

$$T = 0 \quad \Delta t = t_u - t_b \quad \alpha = \text{längdutvidgningskoefficient} \quad \text{för } x = 0,5l$$

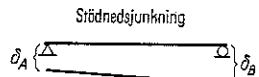
$$M = 0$$



23

$$R = 0 \quad M = 0 \quad w_a = \frac{6EI}{l^2} (\delta_B - \delta_A) \quad w_b = -\frac{6EI}{l^2} (\delta_B - \delta_A)$$

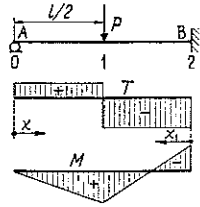
$$T = 0$$



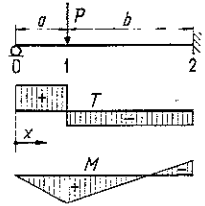
Tabell 1: 39. Ensidigt fast inspänd balk med konstant tröghetsmoment

 Generellt gäller  $M_B = -\frac{w_b}{2}$  där  $w_b$  erhålls ur tabell 1: 38

$$\begin{aligned}
 R_A &= \frac{5P}{16} & T^{0-1} &= R_A & M_B = M_{\min} &= -\frac{3Pl}{16} & y_1 &= \frac{7Pl^3}{768EI} \\
 R_B &= \frac{11P}{16} & T^{1-2} &= -R_B & M_1 &= \frac{5Pl}{32} & y_{\max} &= \frac{Pl^3}{107EI} \\
 y^{0-1} &= \frac{Pl^2x}{32EI} \left(1 - \frac{5x^2}{3l^2}\right) & y^{1-2} &= \frac{Plx_1^2}{32EI} \left(3 - \frac{11x_1}{3l}\right) & & & & \text{för } x = 0,447l
 \end{aligned}$$

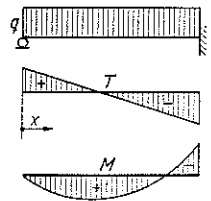


$$\begin{aligned}
 R_A &= \frac{Pb^2}{2l^2} \left(3 - \frac{b}{l}\right) & T^{0-1} &= R_A & M_1 &= \frac{Pb^2a}{2l^2} \left(2 + \frac{a}{l}\right) \\
 R_B &= \frac{Pa}{2l} \left(3 - \frac{a^2}{l^2}\right) & T^{1-2} &= -R_B & M_B &= -\frac{Pa}{2} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) \\
 y^{0-1} &= \frac{Pb^2x}{12EI} \left[3\frac{a}{l} - \left(2 + \frac{a}{l}\right)\frac{x^2}{l^2}\right] \\
 y^{1-2} &= \frac{Pa(l-x)^2}{12EI} \left[3\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) - \left(3 - \frac{a^2}{l^2}\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right] \\
 y_1 &= \frac{Pa^2b^3}{12EI l^3} \left(4 - \frac{b}{l}\right)
 \end{aligned}$$

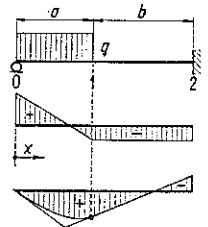

 Maximal nedböjning under  $P$ :  $y_{\max} = \frac{Pl^3}{102EI}$  för  $b = 0,59l$ 

 Beträffande  $R$  och  $M$ , jfr tabell 1: 49 B

$$\begin{aligned}
 R_A &= \frac{3ql}{8} & M_B &= -\frac{ql^2}{8} & y &= \frac{ql^3x}{48EI} \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}\right) \\
 R_B &= \frac{5ql}{8} & M_x &= \frac{qlx}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{l}\right) & y_{\text{mit}} &= \frac{ql^4}{192EI} \\
 T_x &= R_A - qx & + M_{\max} &= \frac{9}{128} ql^2 \text{ för } x = 0,375l & y_{\max} &= \frac{ql^4}{185EI} \text{ för } x = 0,42l
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 R_A &= \frac{qa}{8} \left(8 - \frac{6a}{l} + \frac{a^2}{l^2}\right) & M_B &= -\frac{qa^2}{8} \left(2 - \frac{a^2}{l^2}\right) \\
 R_B &= \frac{qa^2}{8l} \left(6 - \frac{a^2}{l^2}\right) & M_x^{0-1} &= R_A x - \frac{qx^2}{2} \\
 & & M_x^{1-2} &= R_A x - qa \left(x - \frac{a}{2}\right)
 \end{aligned}$$



5

$$R_A = \frac{ql}{10}$$

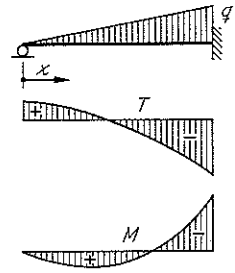
$$T_x = \frac{ql}{2} \left( \frac{1}{5} - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

$$M_x = \frac{qlx}{2} \left( \frac{1}{5} - \frac{x^2}{3l^2} \right)$$

$$R_B = \frac{2ql}{5}$$

$$M_B = -\frac{ql^2}{15}$$

$$M_{\max} = 0,0298 ql^2 \text{ för } x = 0,447 l$$



6

$$R_A = \frac{M}{2l} \left( \frac{3a^2}{l^2} - 3 \right)$$

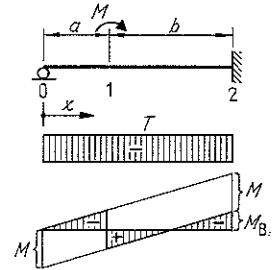
$$T_x = R_A$$

$$M_x^{0-1} = \frac{Mx}{2l} \left( \frac{3a^2}{l^2} - 3 \right)$$

$$R_B = -R_A$$

$$M_B = \frac{M}{2} \left( \frac{3a^2}{l^2} - 1 \right)$$

$$M_x^{1-2} = \frac{Mx}{2l} \left( \frac{3a^2}{l^2} - 3 \right) + M$$



7

$$R_A = \frac{M_B}{l}$$

$$T_x = R_A$$

$$M_B = -\frac{3EI\alpha\Delta t}{2h}$$

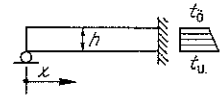
$$R_B = -R_A$$

$$\Delta t = t_u - t_{\delta}$$

$$M_x = R_A x$$

$\alpha$  = längdutvidningskoefficient

Temperaturdifferens mellan balkens över- och undersida



8

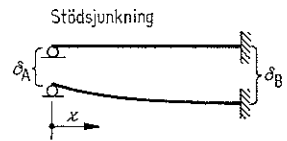
$$R_A = \frac{M_B}{l}$$

$$T_x = R_A$$

$$M_B = \frac{3EI}{l^2} (\delta_B - \delta_A)$$

$$R_B = -R_A$$

$$M_x = R_A x$$



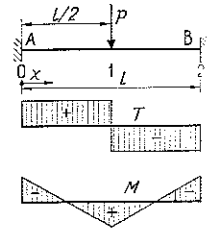
Tabell 1: 40. Dubbelsidigt fast inspänd balk med konstant tröghetsmoment

Generellt gäller  $M_A = -\frac{1}{3}(2w_a - w_b)$  respektive  $M_B = -\frac{1}{3}(2w_b - w_a)$ , där  $w_a$  och  $w_b$  erhålls ur tabell 1:38

1

$$R_A = \frac{P}{2} \quad T^{0-1} = \frac{P}{2} \quad M_A = -\frac{Pl}{8} \quad y^{0-1} = \frac{Plx^2}{16EI} \left(1 - \frac{4x}{3l}\right)$$

$$R_B = \frac{P}{2} \quad T^{1-2} = -\frac{P}{2} \quad M_B = \frac{Pl}{8} \quad y_{\max} = \frac{Pl^3}{192EI} \text{ för } x = 0,5l$$

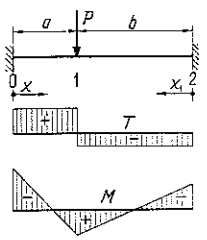


2

$$R_A = \frac{Pb^2}{l^2} \left(1 + \frac{2a}{l}\right) \quad T^{0-1} = R_A \quad M_A = -\frac{Pab^2}{l^2} \quad M_1 = +\frac{2Pa^2b^2}{l^3}$$

$$R_B = \frac{Pa^2}{l^2} \left(1 + \frac{2b}{l}\right) \quad T^{1-2} = -R_B \quad M_B = -\frac{Pba^2}{l^2}$$

$$y^{0-1} = \frac{Pax^3}{6EI} \left[3 - 6\frac{a}{l} + 3\frac{a^2}{l^2} - \frac{x}{a} \left(1 - 3\frac{a^2}{l^2} + 2\frac{a^3}{l^3}\right)\right] \quad y_1 = \frac{Pa^3b^3}{3EI^3}$$



Beträffande R och M, jfr tabell 1:49 C

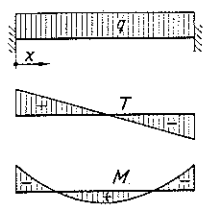
3

$$R_A = \frac{ql}{2} \quad M_A = M_B = -\frac{ql^2}{12} \quad y = \frac{ql^2x^2}{24EI} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$$

$$R_B = \frac{ql}{2} \quad M_{\text{mitt}} = +\frac{ql^2}{24} \quad y_{\max} = \frac{ql^4}{384EI} \text{ för } x = 0,5l$$

$$T_x = \frac{ql}{2} - qx \quad M_x = \frac{q}{2} \left(lx - x^2 - \frac{l^2}{6}\right)$$

$$M_x = 0 \text{ för } x = 0,21l$$

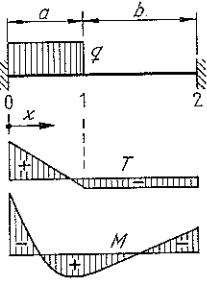


4

$$R_A = qa \left(1 - \frac{a^2}{l^2} + \frac{a^3}{2l^3}\right) \quad T_x^{0-1} = R_A - qx \quad M_A = -\frac{qa^2}{12} \left(3\frac{a^2}{l^2} - 8\frac{a}{l} + 6\right)$$

$$R_B = qa \left(\frac{a^2}{l^2} - \frac{a^3}{2l^3}\right) \quad T_x^{1-2} = R_A - qa \quad M_B = -\frac{qa^3}{12l} \left(4 - 3\frac{a}{l}\right)$$

$$M_x^{0-1} = M_A + R_A x - \frac{qx^2}{2} \quad M_x^{1-2} = M_B + R_B(l-x)$$

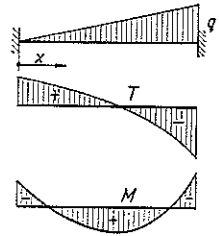


5

$$R_A = \frac{3ql}{20} \quad T_x = \frac{ql}{20} \left( 3 - 10 \frac{x^2}{l^2} \right) \quad M_A = -\frac{ql^2}{30} \quad M_B = -\frac{ql^2}{20}$$

$$R_B = \frac{7ql}{20} \quad M_x = \frac{ql^2}{60} \left( -2 + 9 \frac{x}{l} - 10 \frac{x^3}{l^3} \right)$$

$$M_x = 0 \text{ för } x = 0,237l \text{ och } x = 0,808l \quad + M_{\max} = \frac{ql^2}{46,6} \text{ för } x = 0,548l$$



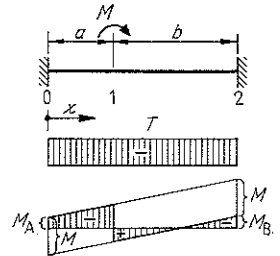
6

$$R_A = \frac{3M}{l} \left( \frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{l^2} - 1 \right) \quad M_A = -M \left( \frac{a^2}{l^2} + \frac{2b^2}{l^2} - 1 \right)$$

$$R_B = -R_A \quad M_B = M \left( \frac{2a^2}{l^2} + \frac{b^2}{l^2} - 1 \right)$$

$$T_x = R_A \quad M_x^{0-1} = R_A x + M_A$$

$$M_x^{1-2} = R_A x + M_A + M$$



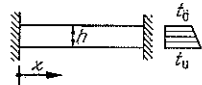
7

$$R_A = 0 \quad T_x = 0 \quad M_A = M_B = -\frac{EI\alpha\Delta t}{h} = M_x$$

$$R_B = 0 \quad \Delta t = t_u - t_b$$

$\alpha$  = längdutvidgningskoefficient

Temperaturdifferens mellan balkens över- och undersida

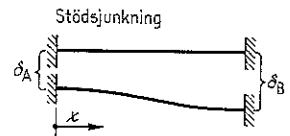


8

$$R_A = \frac{12EI}{l^3} (\delta_B - \delta_A) \quad T_x = R_A \quad M_A = -\frac{6EI}{l^2} (\delta_B - \delta_A)$$

$$R_B = -R_A \quad M_B = \frac{6EI}{l^2} (\delta_B - \delta_A)$$

$$y = \delta_A + (\delta_B - \delta_A) \frac{x^2}{l^2} \left( 3 - \frac{2x}{l} \right) \quad M_x = M_A \left( 1 - \frac{2x}{l} \right)$$

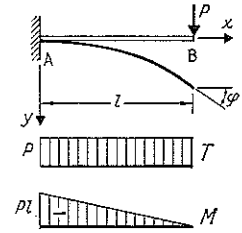


Tabell 1: 41. Inspänd konsolbalk ( $y$  och  $\varphi$  gäller vid konstant  $l$ )

1

$$R = P \quad T = P \quad M_x = -P(l-x) \quad M_A = -Pl$$

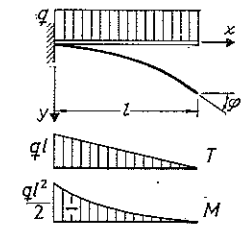
$$y = \frac{Pl^3}{3EI} \cdot \frac{x^2}{l^2} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2l}x \right) \quad y_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI} \quad \varphi = \frac{Pl^2}{2EI}$$



2

$$R = ql \quad T_x = q(l-x) \quad M_x = -\frac{q(l-x)^2}{2} \quad M_A = -\frac{ql^2}{2}$$

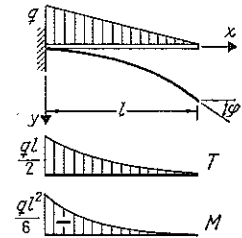
$$y = \frac{ql^4}{8EI} \cdot \frac{x^2}{l^2} \left( 2 - \frac{4}{3l}x + \frac{1}{3l^2}x^2 \right) \quad y_{\max} = \frac{ql^4}{8EI} \quad \varphi = \frac{ql^3}{6EI}$$



3

$$R = \frac{ql}{2} \quad T_x = \frac{q(l-x)^2}{2l} \quad M_x = -\frac{q(l-x)^3}{6l} \quad M_A = -\frac{ql^2}{6}$$

$$y = \frac{ql^4}{30EI} \cdot \frac{x^2}{l^2} \left( \frac{5}{2} - \frac{5}{2l}x + \frac{5}{4l^2}x^2 - \frac{1}{4l^3}x^3 \right) \quad y_{\max} = \frac{ql^4}{30EI} \quad \varphi = \frac{ql^3}{24EI}$$



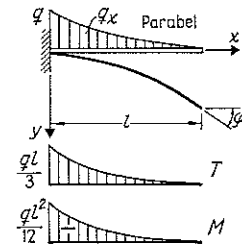
4

$$q_x = q \frac{(l-x)^2}{l^2} \quad T_x = \frac{q(l-x)^3}{3l^2} \quad M_x = -\frac{q(l-x)^4}{12l^2}$$

$$R = \frac{ql}{3} \quad M_A = -\frac{ql^2}{12}$$

$$\text{För } x = \frac{l}{2} \text{ är } \quad T = \frac{R}{8} \quad M = \frac{M_A}{16}$$

$$y = \frac{ql^4}{72EI} \cdot \frac{x^2}{l^2} \left( 3 - 4\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2} - \frac{6x^3}{5l^3} + \frac{1}{5}\frac{x^4}{l^4} \right) \quad y_{\max} = \frac{ql^4}{72EI} \quad \varphi = \frac{ql^3}{60EI}$$



Tabell 1: 42. Inspänd konsolbalk med stegvis varierande tröghetsmoment, nedböjningar

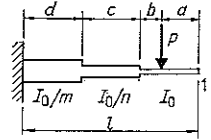
 Beträffande  $R$ ,  $T$  och  $M$ , se tabell 1:41

1

$$y_1 = (A + Bn + Cm) \frac{Pl^3}{3EI_0}$$

$$A = \frac{1}{2} \frac{b^3}{l^2} \left( 3 \frac{a}{l} + 2 \frac{b}{l} \right) \quad B = \frac{1}{2} \frac{(b+c)^3}{l^2} \left( 3 \frac{a}{l} + 2 \frac{b+c}{l} \right) - \frac{1}{2} \frac{b^3}{l^2} \left( 3 \frac{a}{l} + 2 \frac{b}{l} \right)$$

$$C = \frac{1}{2} \frac{(b+c+d)^3}{l^2} \left( 3 \frac{a}{l} + 2 \frac{b+c+d}{l} \right) - \frac{1}{2} \frac{(b+c)^3}{l^2} \left( 3 \frac{a}{l} + 2 \frac{b+c}{l} \right)$$



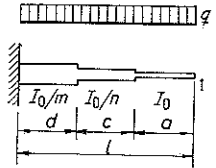
2

$$y_1 = (A + Bn + Cm) \frac{ql^4}{8EI_0}$$

$$A = \frac{a^4}{l^4}$$

$$B = \frac{(a+c)^4}{l^4} - \frac{a^4}{l^4}$$

$$C = 1 - \frac{(a+c)^4}{l^4}$$

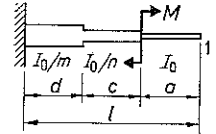


3

$$y_1 = (Bn + Cm) \frac{Ml^2}{2EI_0}$$

$$B = \frac{c}{l} \cdot \frac{2a+c}{l}$$

$$C = \frac{d}{l} \cdot \frac{2a+2c+d}{l}$$



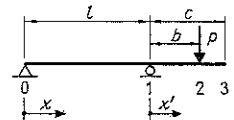
Tabell 1: 43. Överkragande tvåstödsbalk med konstant tröghetsmoment, nedböjningar

1

$$y^{0-1} = -\frac{Plbx}{6EI} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

$$y^{1-2} = \frac{Px'}{6EI} (2bl + 3bx' - x'^2)$$

$$y_3 = \frac{Pb}{6EI} (2cl + 3bc - b^2)$$

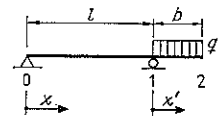


2

$$y^{0-1} = -\frac{qb^2lx}{12EI} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

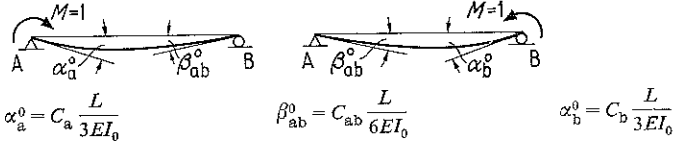
$$y^{1-2} = \frac{qx'}{24EI} (x'^3 - 4bx'^2 + 6b^2x' + 4b^2l)$$

$$y_3 = \frac{qb^3}{24EI} (3b + 4l)$$

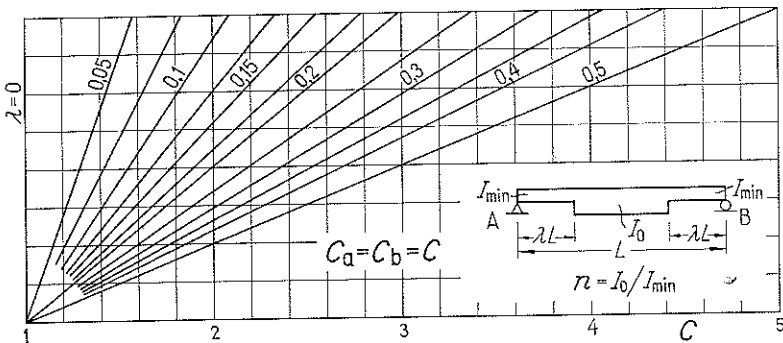
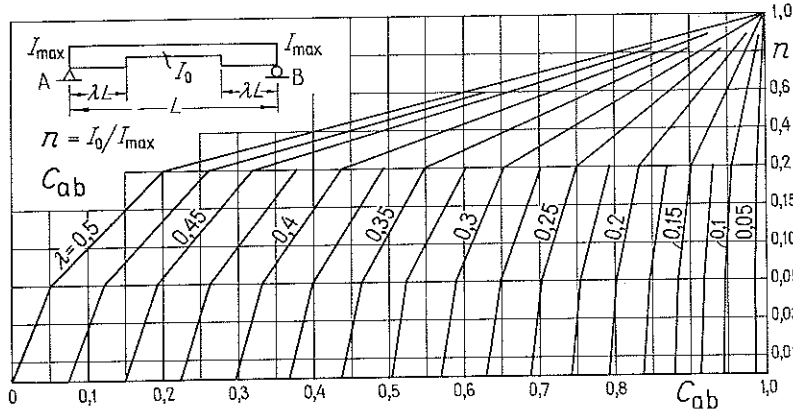
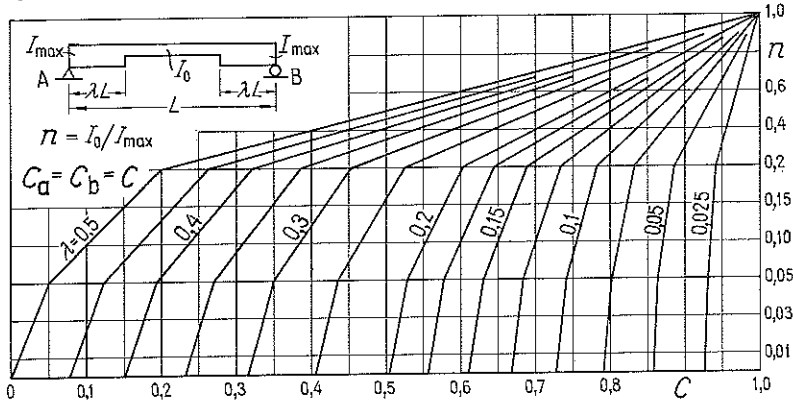


Tabell 1:44. Balkkonstanter\* (jfr 161:32 A2)

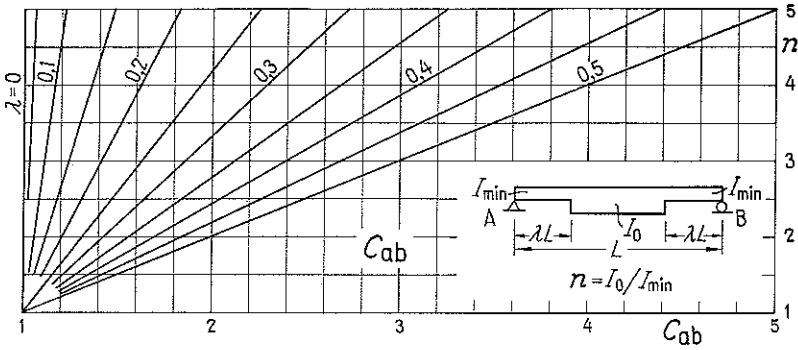
\* Kompletterat av professor  
O Pettersson



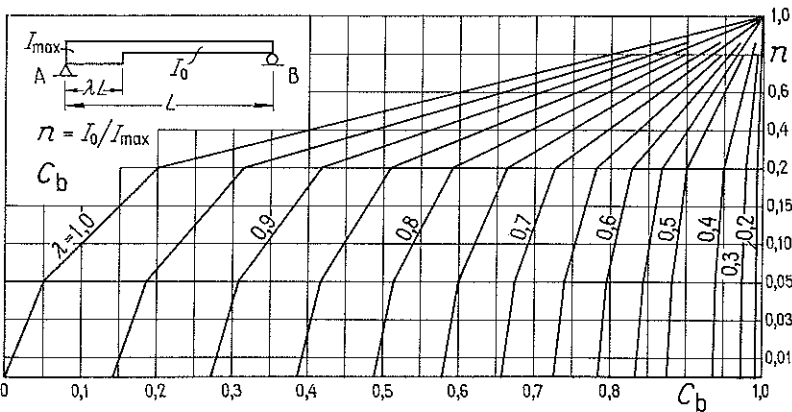
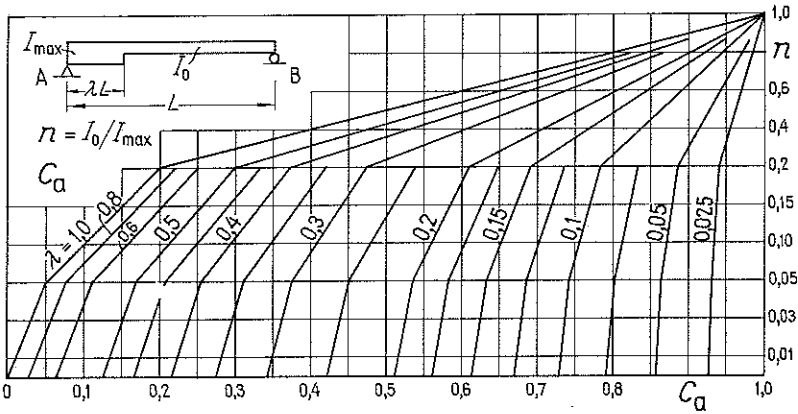
Symmetriska, raka vöter

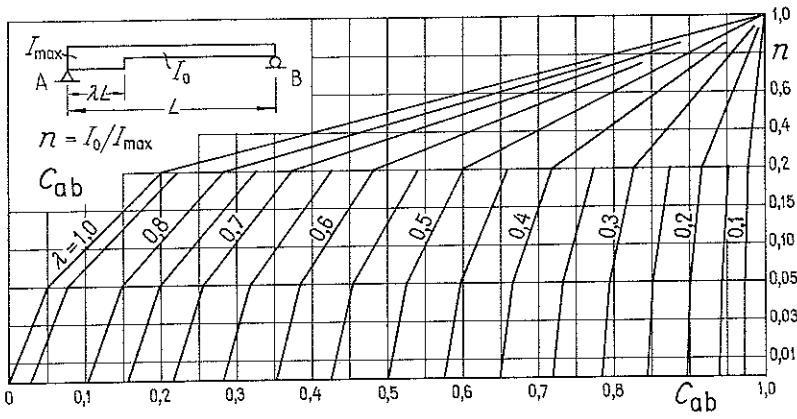




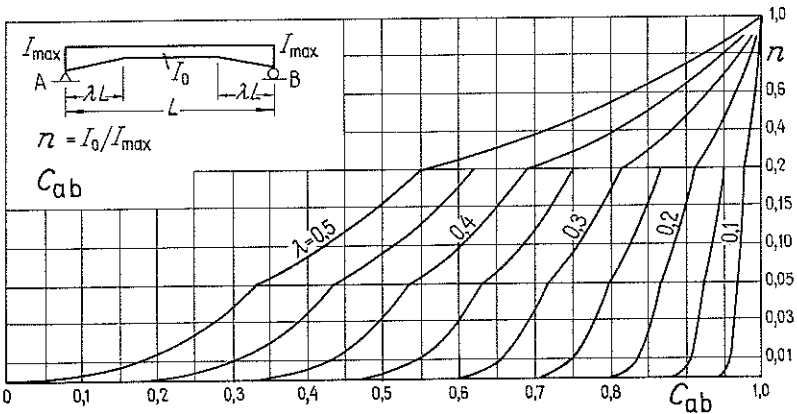
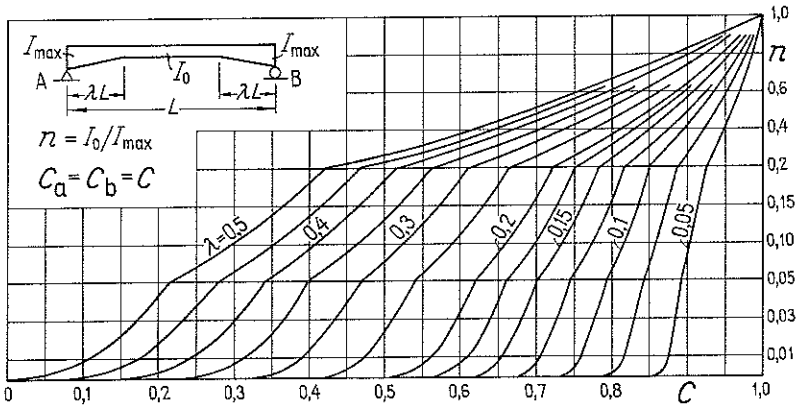


Ensidig, rak vot

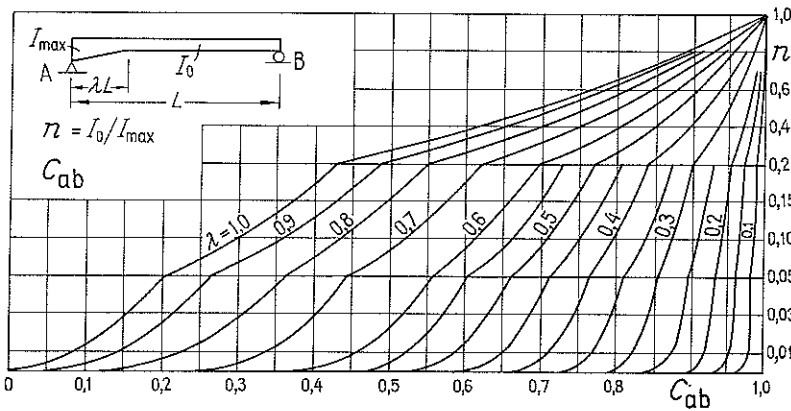
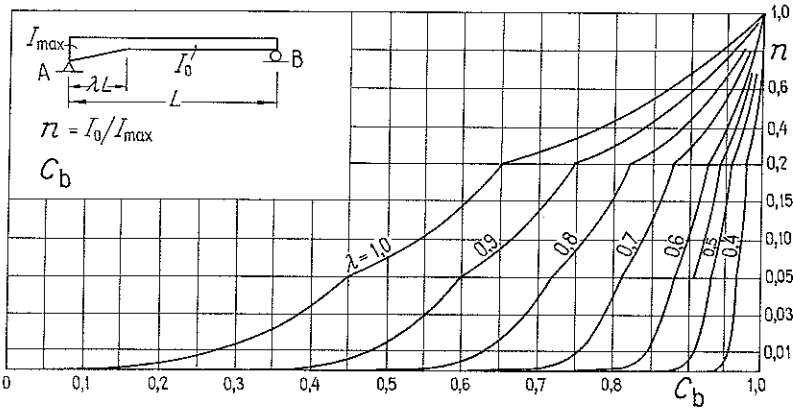
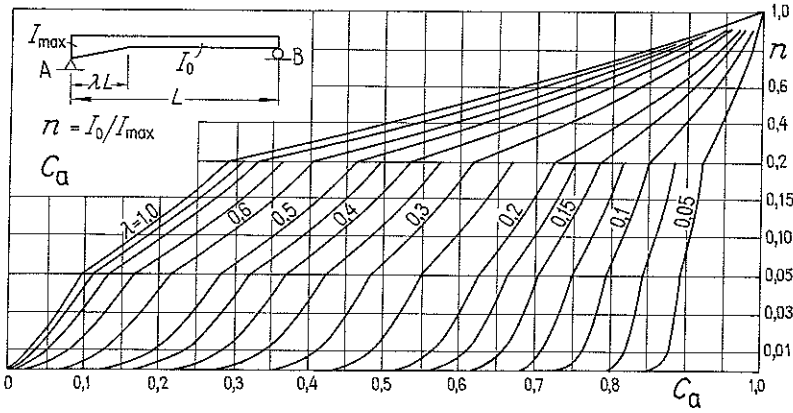




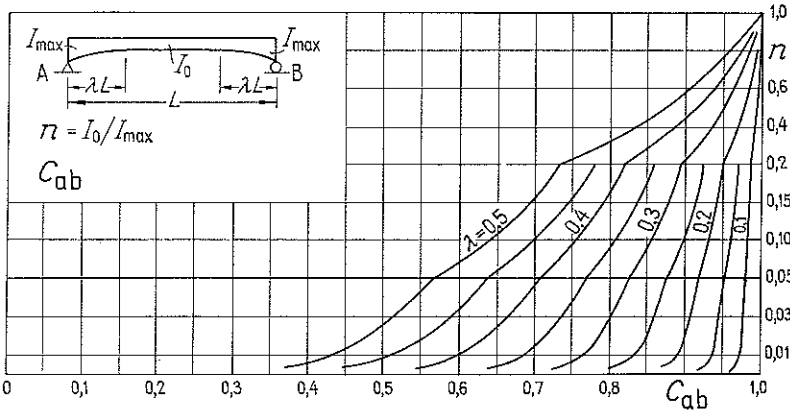
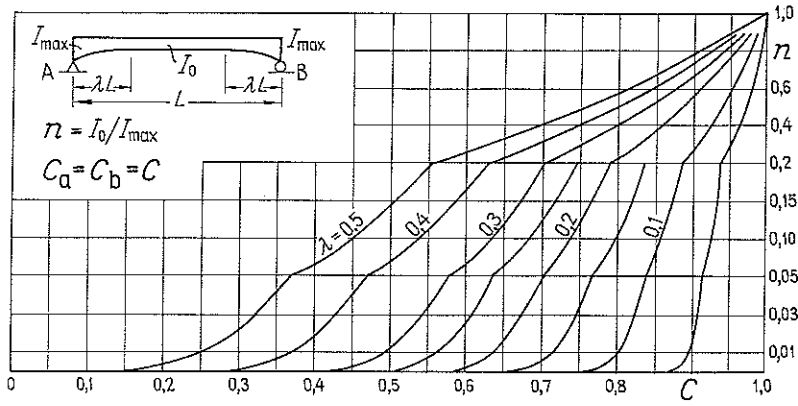
Symmetriska triangelvoter



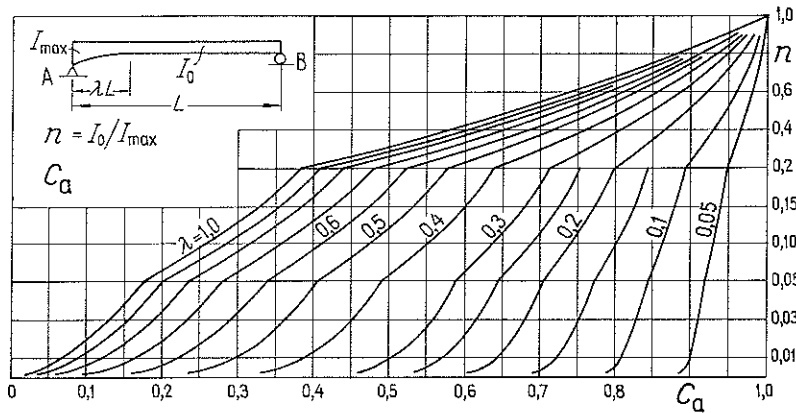
Ensidig triangelvot

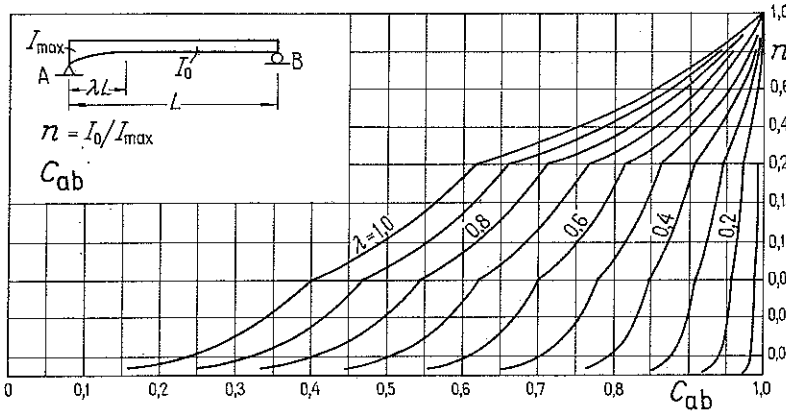
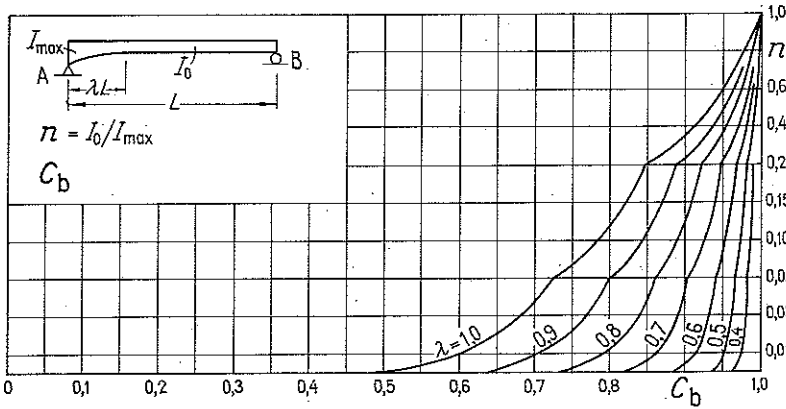


Symmetriska parabelvoter



Ensidig parabelvot





Tabell 1: 45. Lastkonstanter\* (jfr 161: 32 B2)

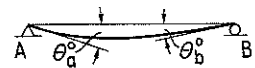
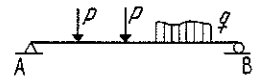
$\Theta_a^0$  och  $\Theta_b^0$  är stödvinkeländringarna vid upplag A respektive B för den fritt upplagda balken AB, påverkad av aktuell yttre last.

I stället för en direkt redovisning av  $\Theta_a^0$  och  $\Theta_b^0$  anges nedan i diagram-

form storheterna  $\frac{\Theta_a^0}{\beta_{ab}^0}$  och  $\frac{\Theta_b^0}{\beta_{ab}^0}$ , skrivna under formen dimensionslös koefficient  $K_a$  respektive  $K_b$  multiplicerad med faktor som enbart beror av last

( $q, P$ ) och balklängd ( $L$ ). Beträffande  $\beta_{ab}^0$ , se tabell 1:44.

\* Kompletterat av professor O Pettersson



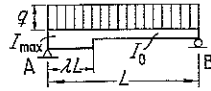
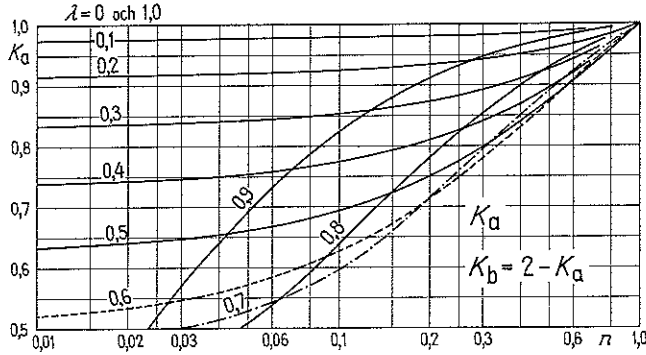
Jämnt fördelad last

Symmetriska voter

Vid symmetriska, godtyckligt utformade voter är enligt 161: 32 B2a

$$\frac{\Theta_a^0}{\beta_{ab}^0} = \frac{\Theta_b^0}{\beta_{ab}^0} = \frac{qL^2}{4} \text{ vilket innebär att } K_a = K_b = K = 1$$

Ensidig, rak vot

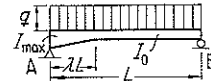
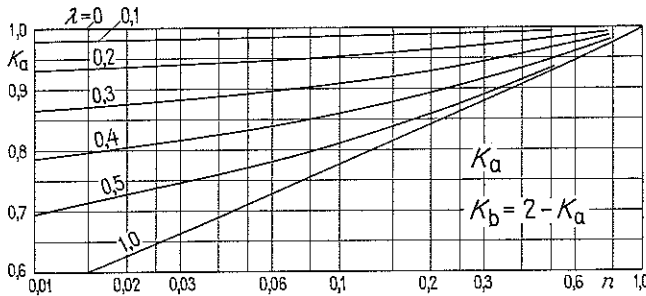


$$n = I_0 / I_{\max}$$

$$\frac{\theta_a^0}{\beta_{ab}^0} = K_a \frac{qL^2}{4}$$

$$\frac{\theta_b^0}{\beta_{ab}^0} = K_b \frac{qL^2}{4} = (2 - K_a) \frac{qL^2}{4}$$

Ensidig triangelvot

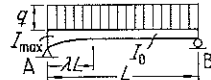
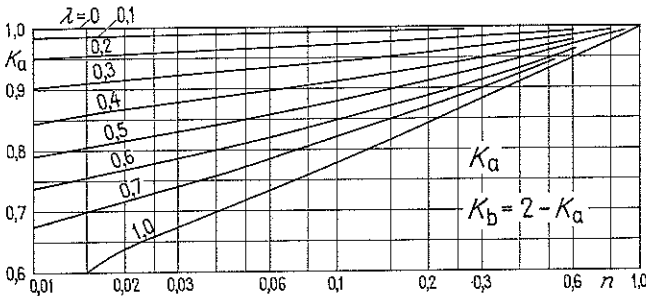


$$n = I_0 / I_{\max}$$

$$\frac{\theta_a^0}{\beta_{ab}^0} = K_a \frac{qL^2}{4}$$

$$\frac{\theta_b^0}{\beta_{ab}^0} = K_b \frac{qL^2}{4} = (2 - K_a) \frac{qL^2}{4}$$

Ensidig parabelvot



$$n = I_0 / I_{\max}$$

$$\frac{\theta_a^0}{\beta_{ab}^0} = K_a \frac{qL^2}{4}$$

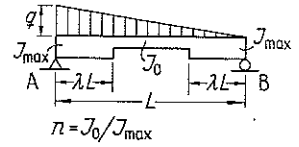
$$\frac{\theta_b^0}{\beta_{ab}^0} = K_b \frac{qL^2}{4} = (2 - K_a) \frac{qL^2}{4}$$

**Triangelärt fördelat last**

**Symmetriska, raka vöter**

$$\theta_a^0 = \frac{qL^3}{90EI_0} [2 - \lambda^2(15 - 20\lambda + 15\lambda^2 - 6\lambda^3)(1 - n)]$$

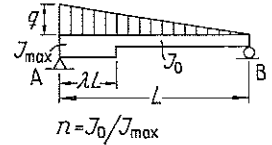
$$\theta_b^0 = \frac{qL^3}{360EI_0} [7 - 2\lambda^2(15 + 10\lambda - 30\lambda^2 + 12\lambda^3)(1 - n)]$$



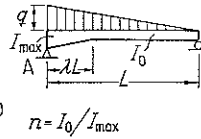
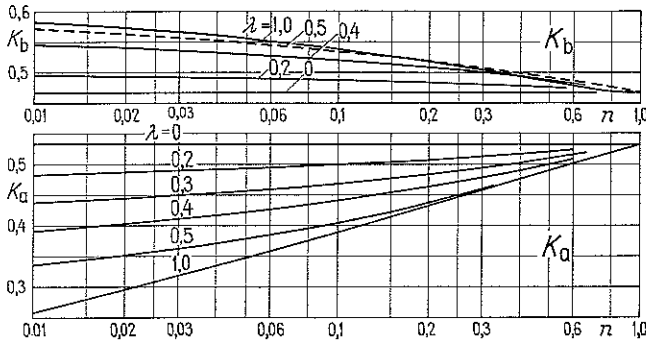
**Ensidig, rak vö**

$$\theta_a^0 = \frac{qL^3}{90EI_0} [(1 - \lambda)^2 \{5 - 3(1 - \lambda)^2\}(1 - n) + 2n]$$

$$\theta_b^0 = \frac{qL^3}{360EI_0} [(1 - \lambda)^2 \{30 - 20(1 - \lambda) - 15(1 - \lambda)^2 + 12(1 - \lambda)^3\}(1 - n) + 7n]$$



**Ensidig triangelvö (Diagrammet uppgjort av H R Kivisild och U Müllersdorf)**

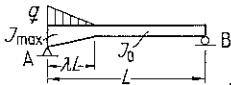


$$\theta_b^0 = K_b \frac{qL^2}{4}$$

$$\theta_a^0 = K_a \frac{qL^2}{4}$$

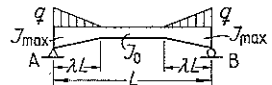
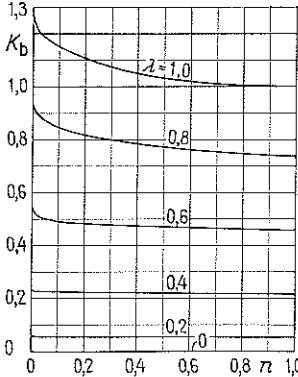
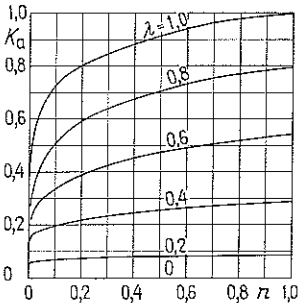
**Last av vöternas egenvikt**

Då inverkan av vöternas egenvikt normalt saknar betydelse vid dimensionering, har här endast tagits med uppgifter beträffande *triangelvöter*.

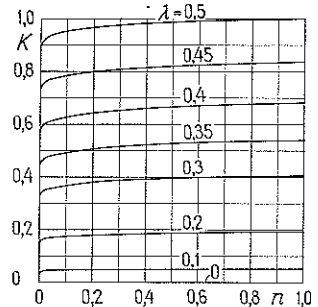


$$\frac{\theta_b^0}{\beta_{ab}^0} = K_b \frac{7qL^2}{60}$$

$$\frac{\theta_a^0}{\beta_{ab}^0} = K_a \frac{2qL^2}{15} \quad n = J_0/J_{max}$$



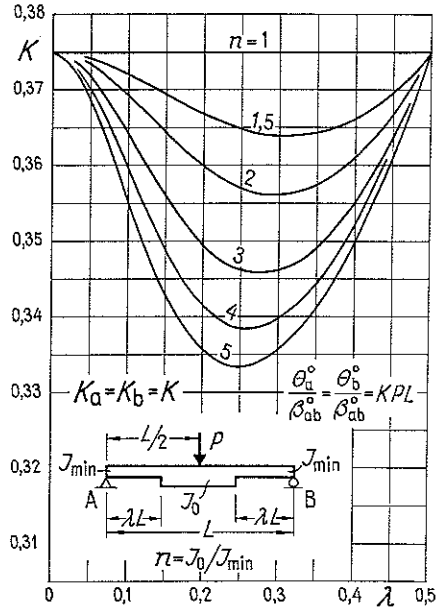
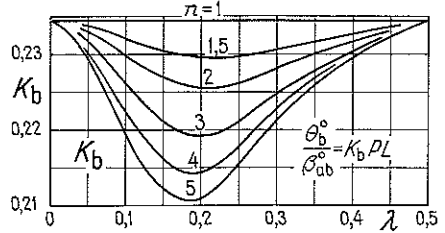
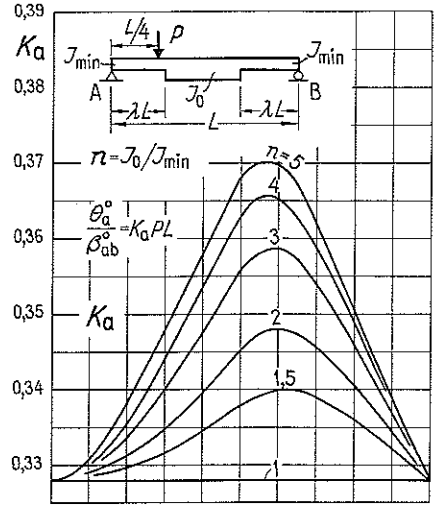
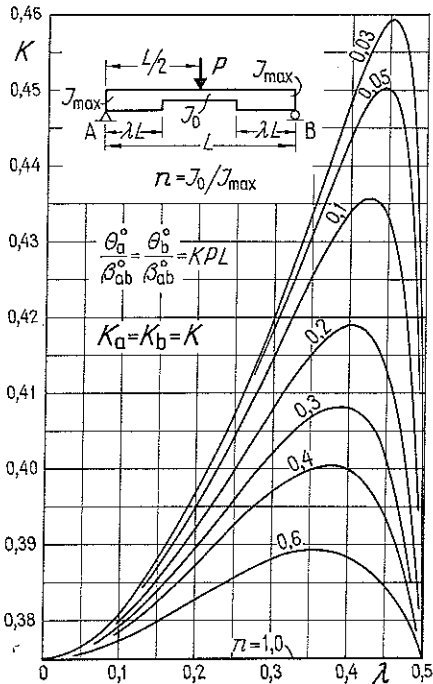
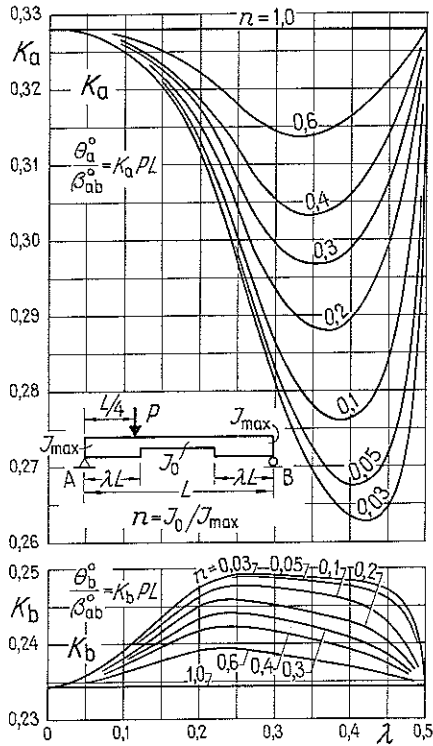
$$\frac{\theta_a^0}{\beta_{ab}^0} = \frac{\theta_b^0}{\beta_{ab}^0} = K \frac{3qL^2}{32} \quad n = J_0/J_{max}$$



**Punktlast**

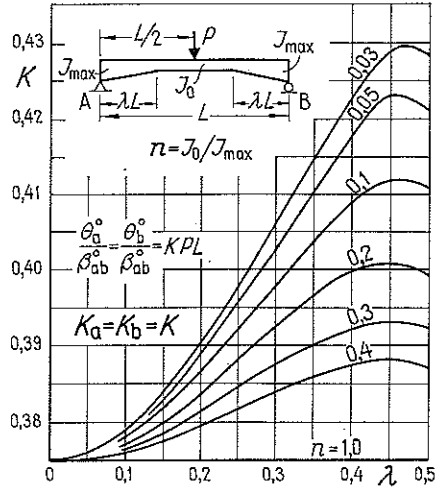
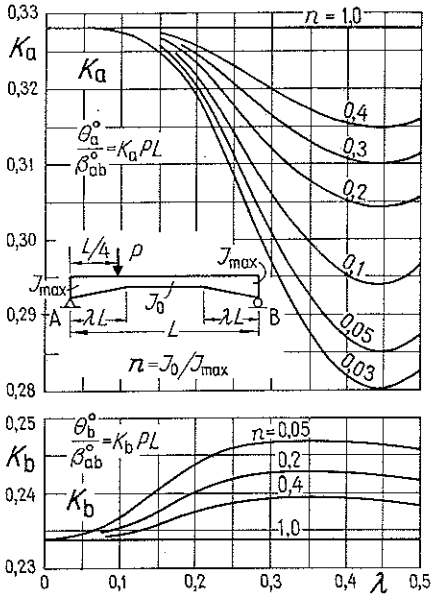
**Symmetriska, raka vöter**

Tabell 1: 45

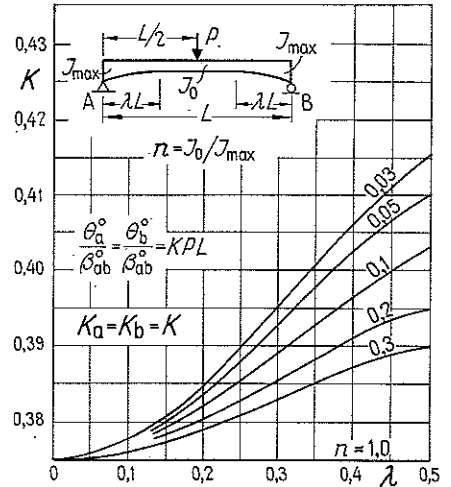
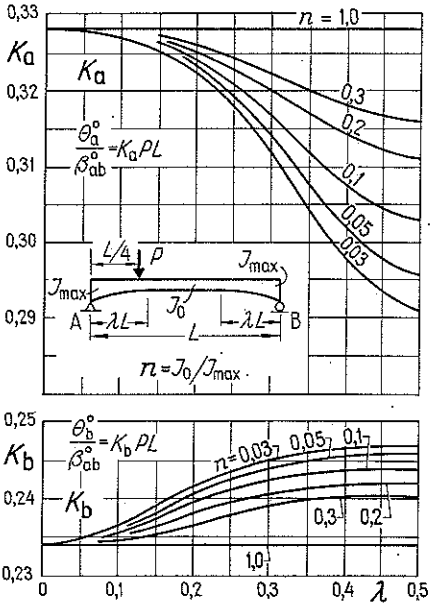




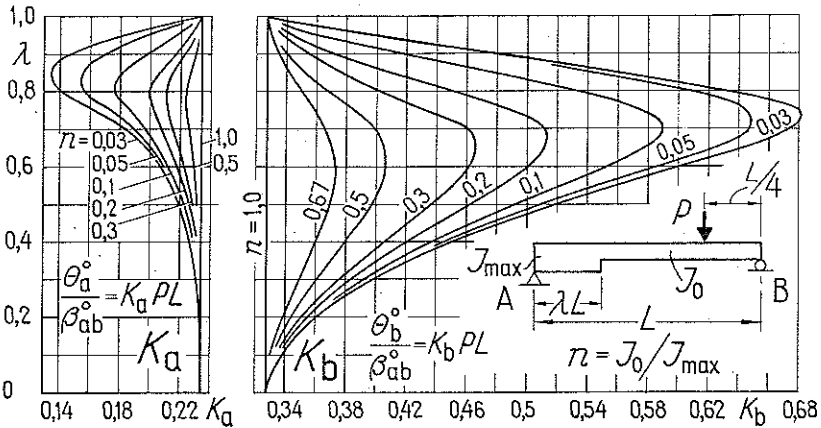
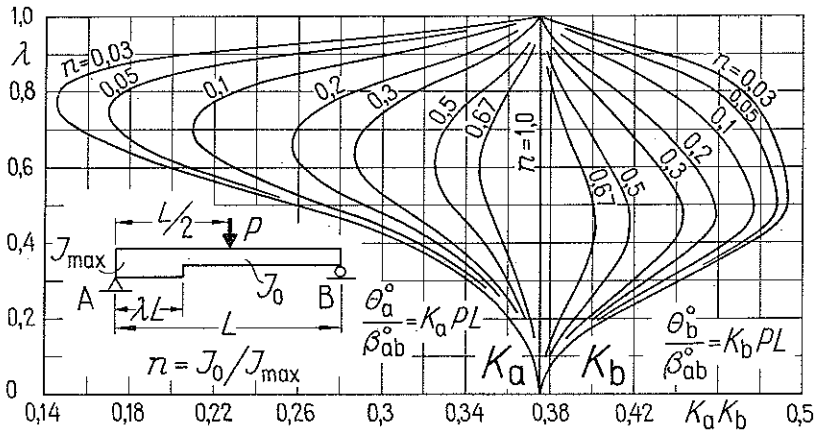
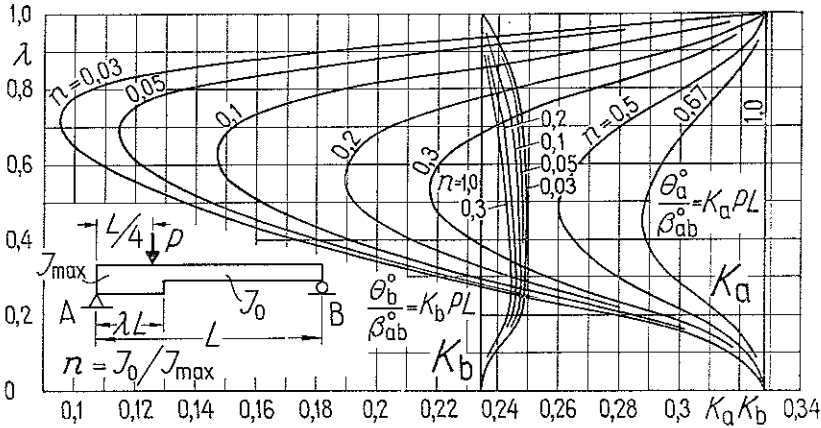
Symmetriska triangelvoter



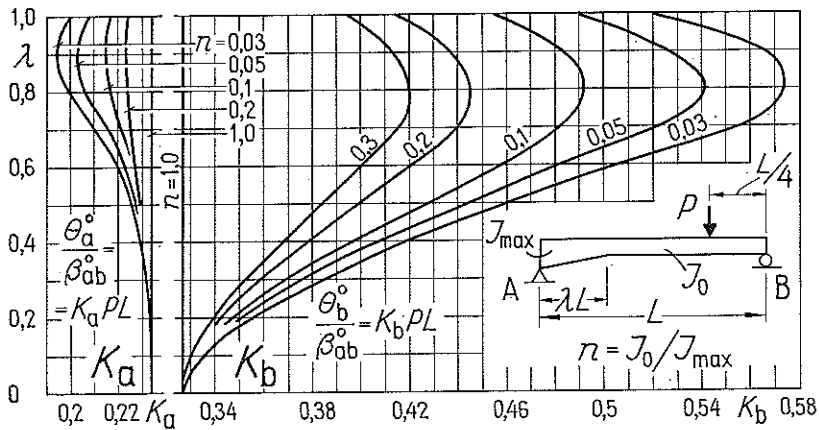
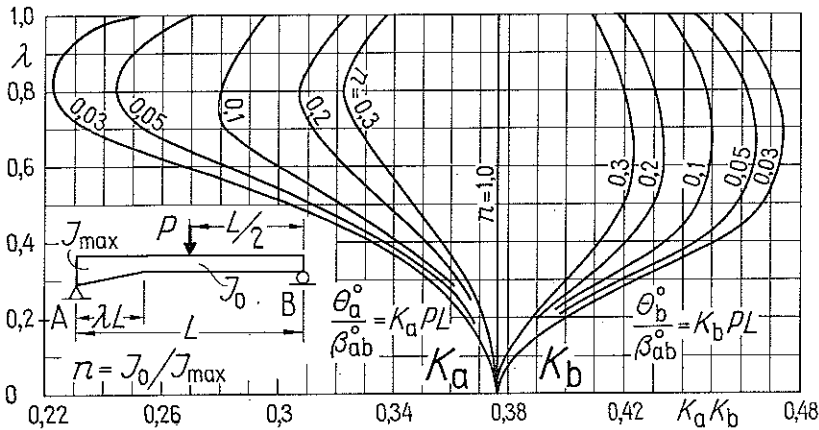
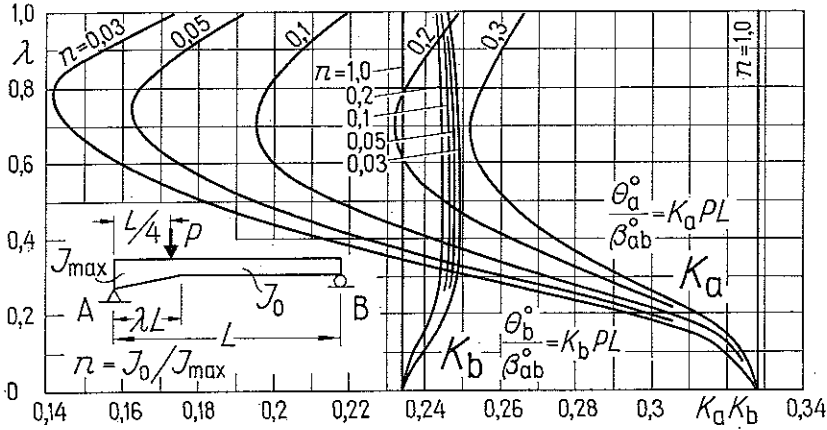
Symmetriska parabelvoter



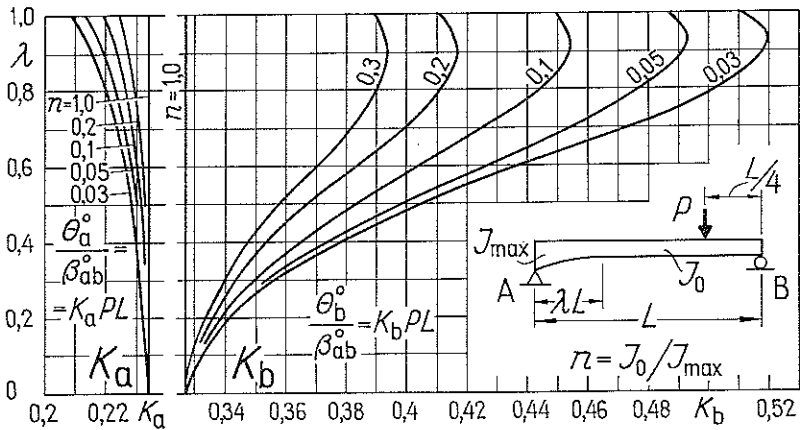
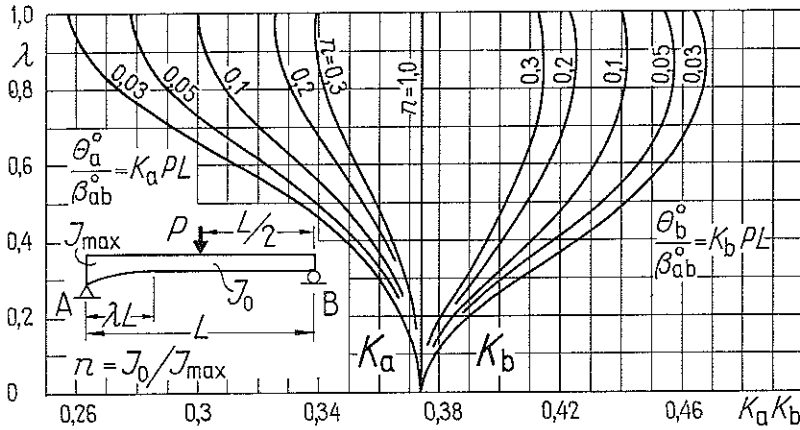
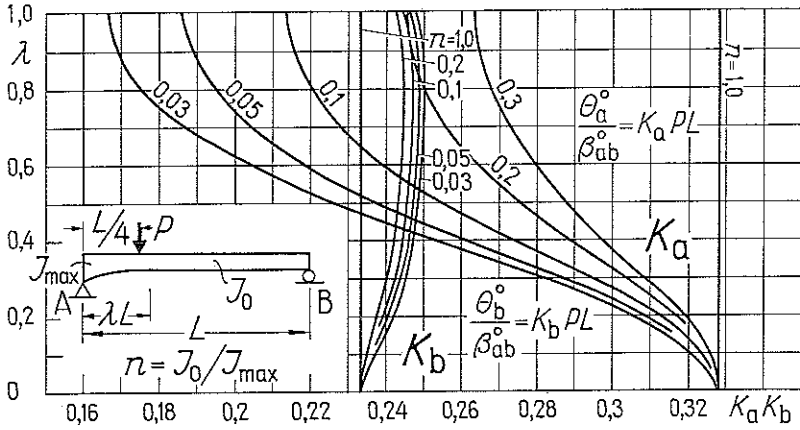
Ensidig, rak vot



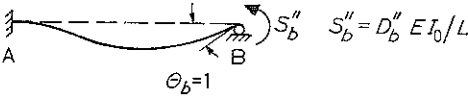
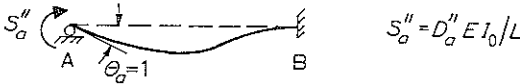
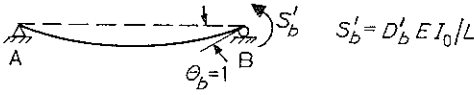
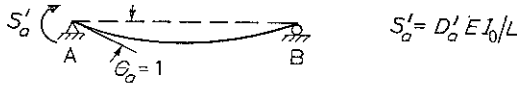
Ensidig triangelvot



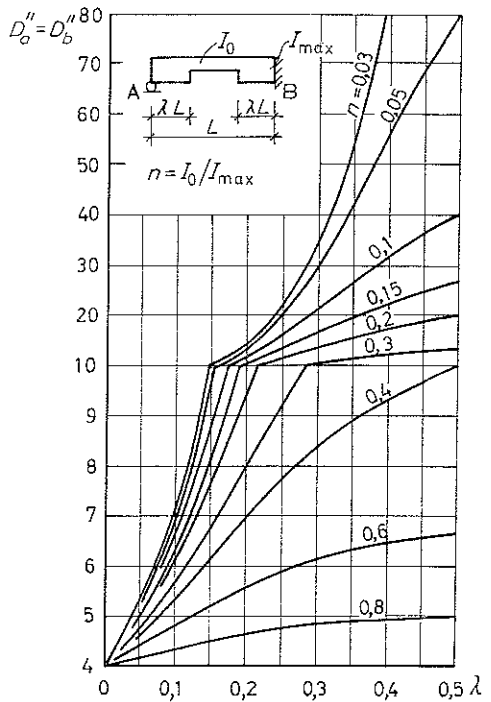
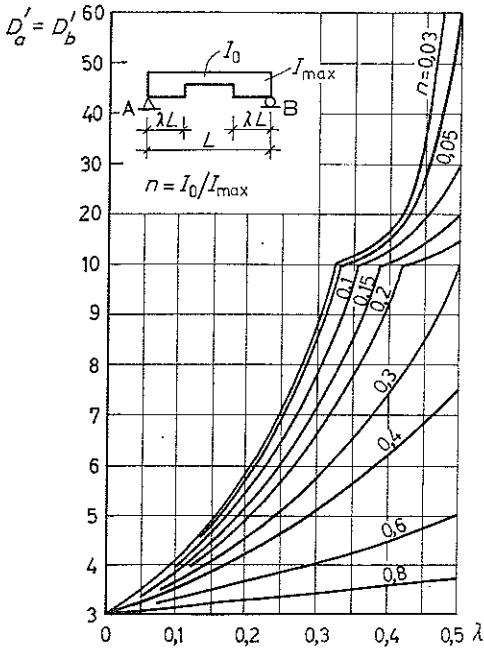
Ensidig parabelvot



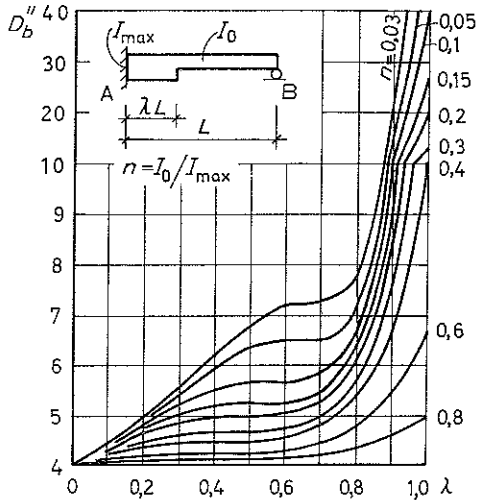
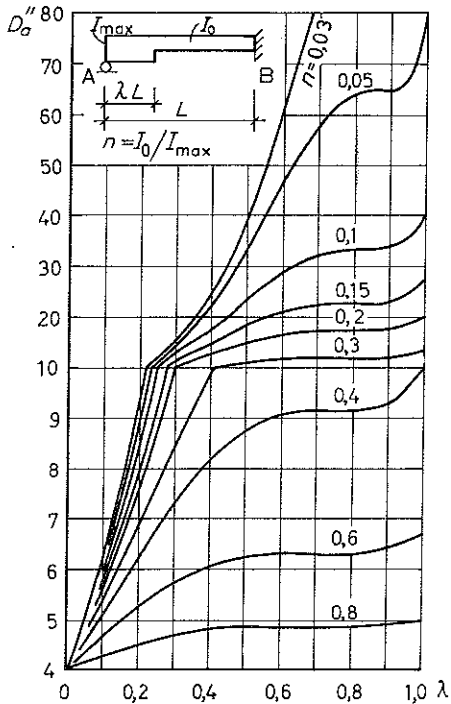
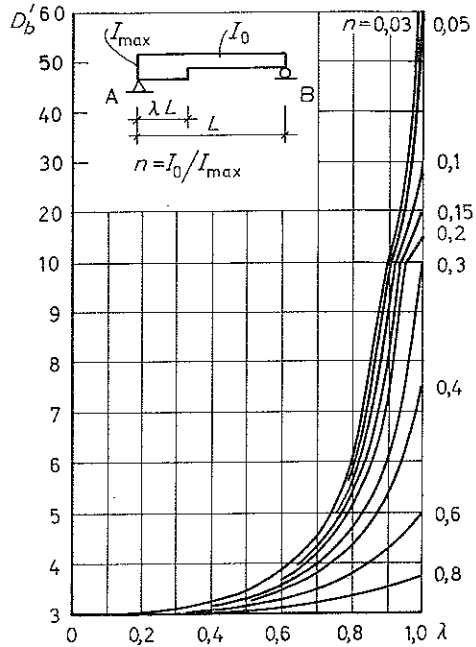
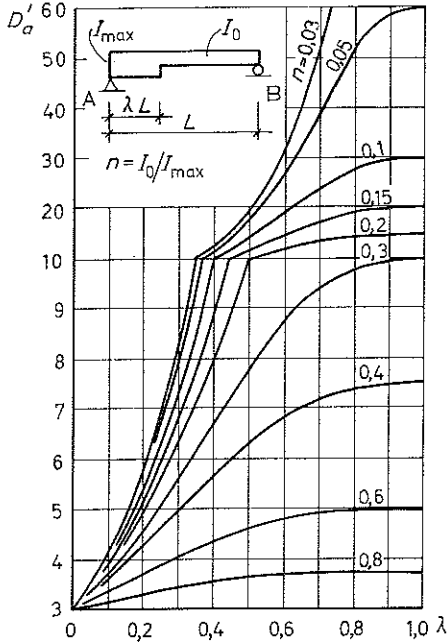
Tabell 1: 46. Styvhetstal



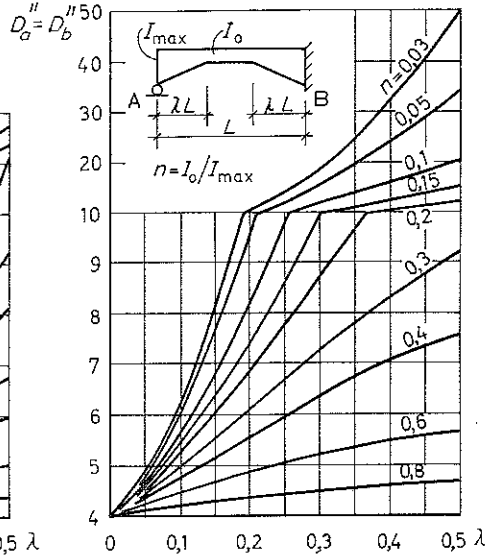
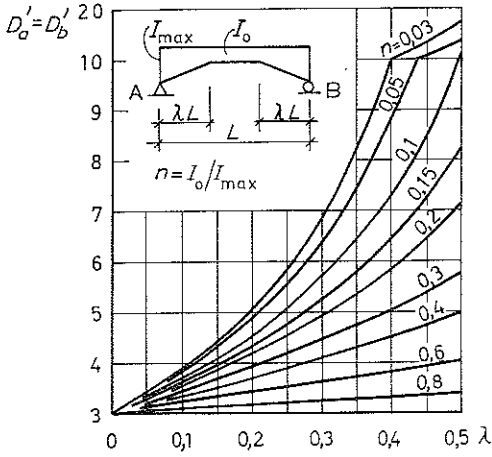
Symmetriska, raka vöter



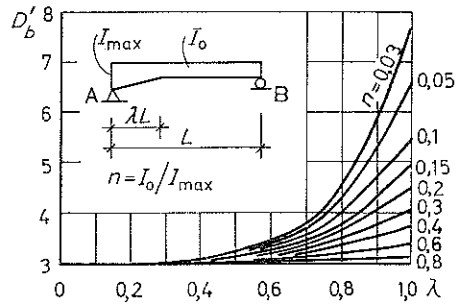
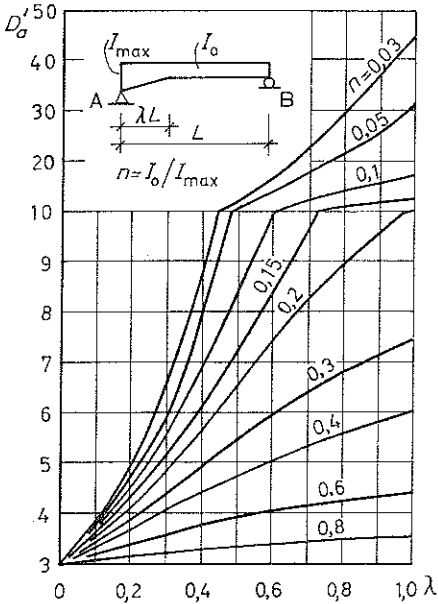
Ensidig, rak vot

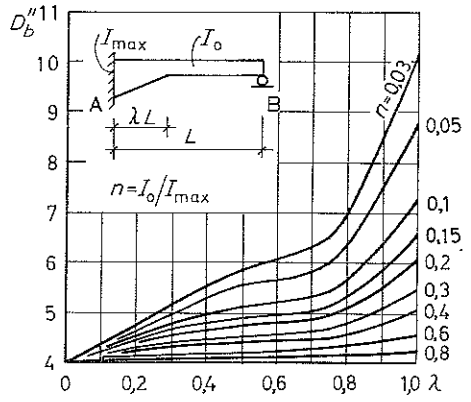
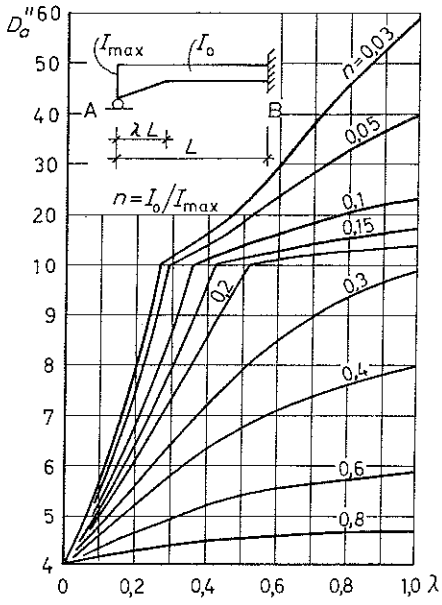


Symmetriska triangelvoter



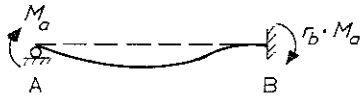
Ensidig triangelvot



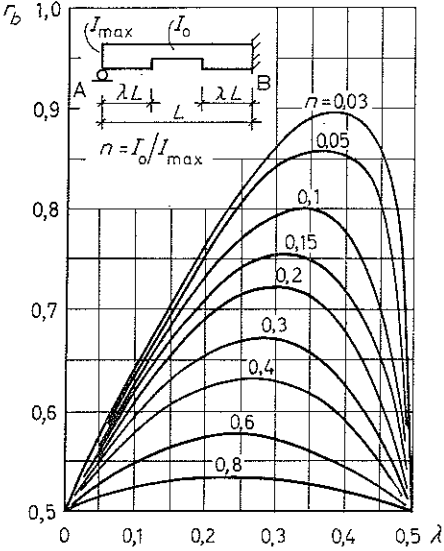




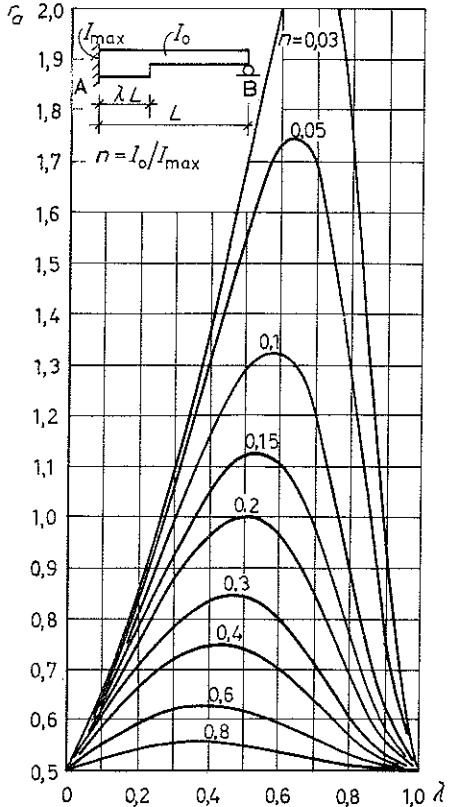
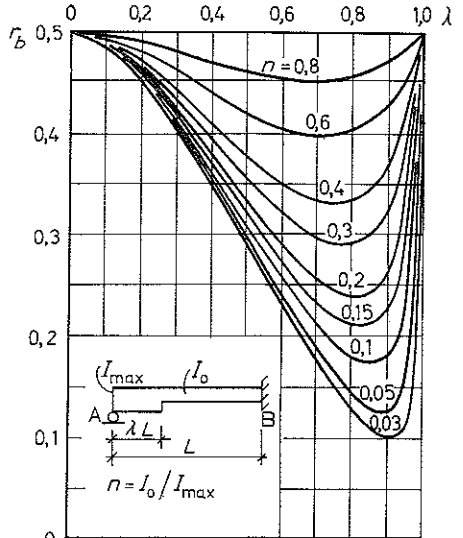
Tabell 1: 47. Transportttal



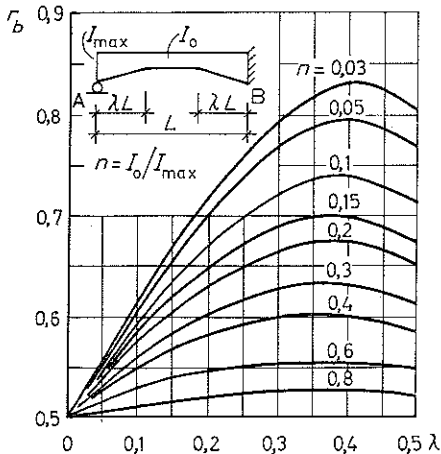
Symmetriska, raka voter



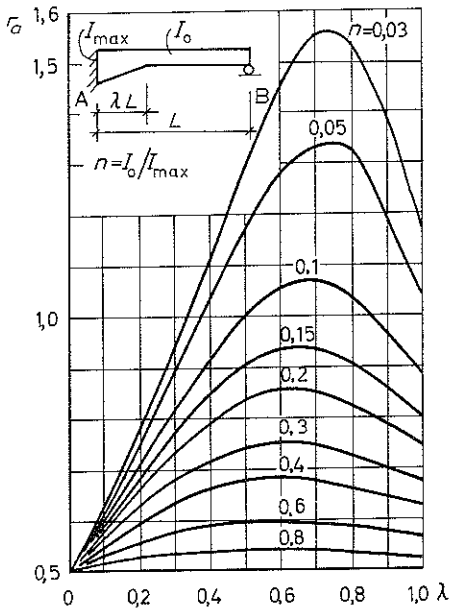
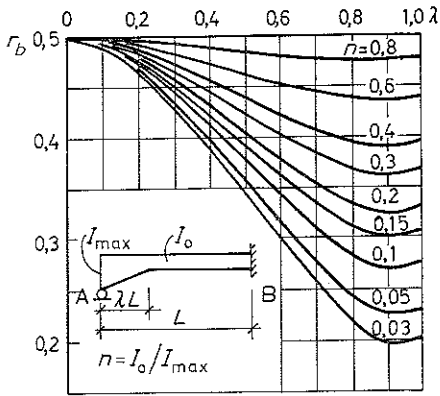
Ensidig, rak vot



Symmetriska triangelvoter

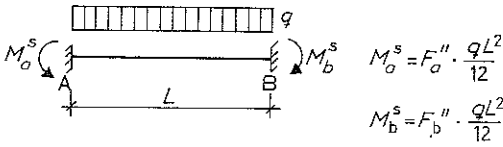


Ensidig triangelvot

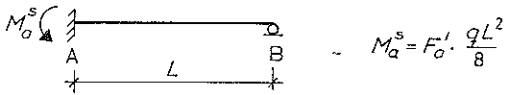


Tabell 1: 48. Startmoment

Jämnt fördelad last



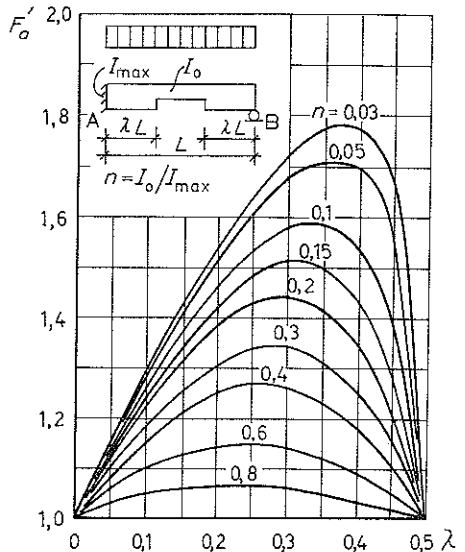
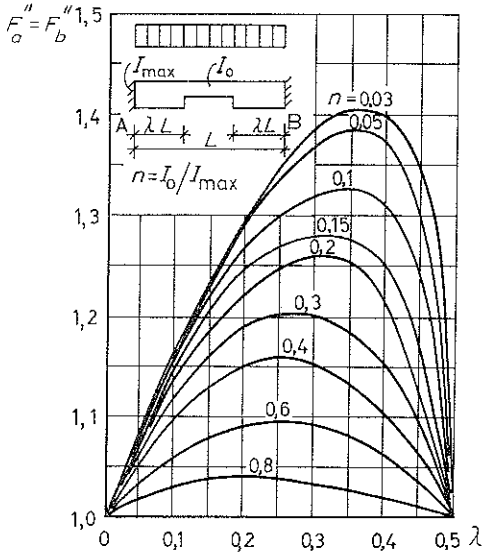
Tvåsidig inspänning



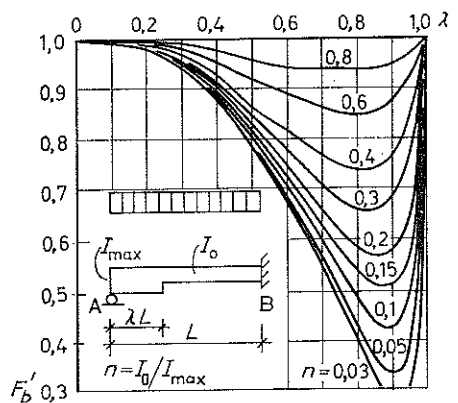
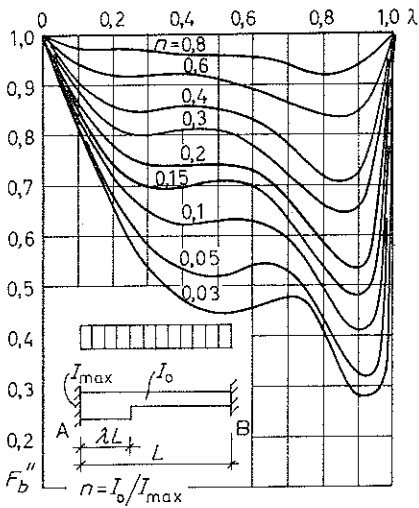
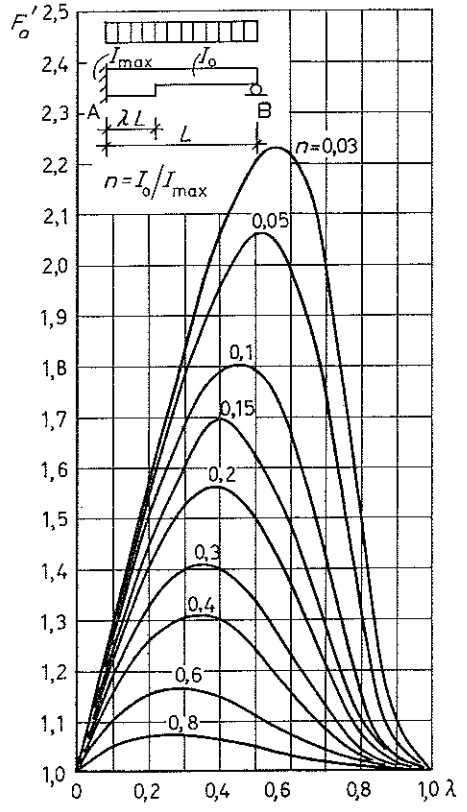
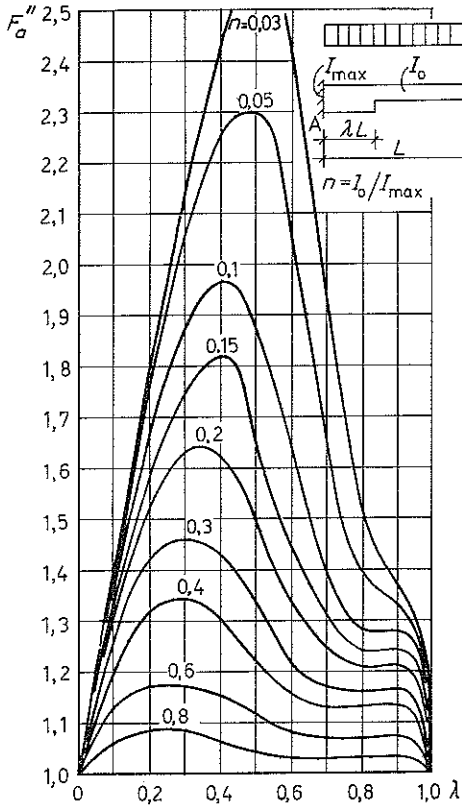
Ensidig inspänning

För diagram som ger startmomenten för vutförsedda ramdelar vid inverkan av punktlast hänvisas till [19] och [23] tillhörande kap 161.

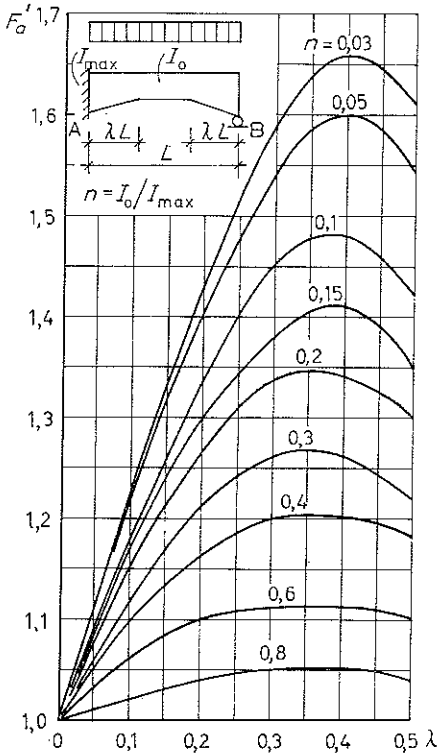
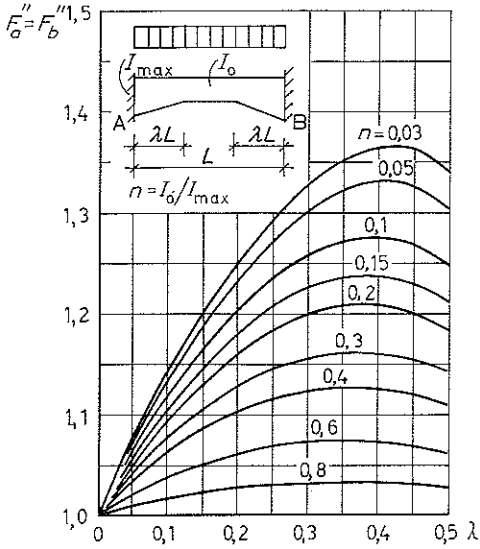
Symmetriska, raka vöter



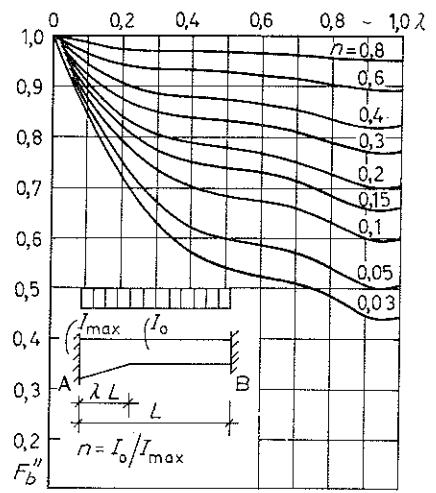
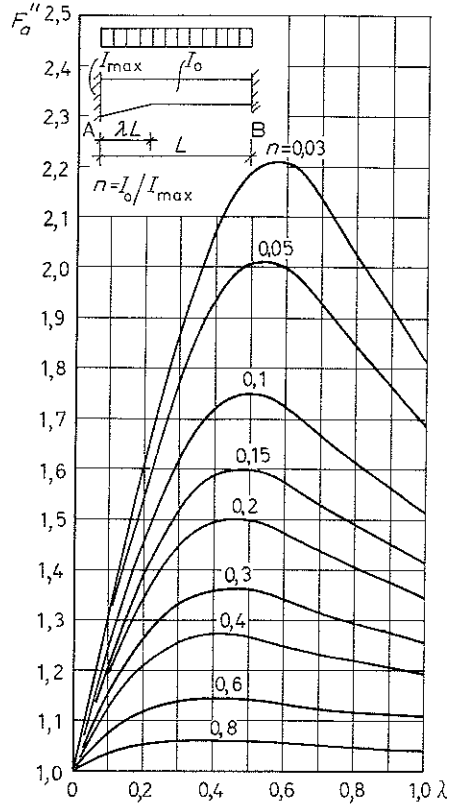
Ensidig, rak vot



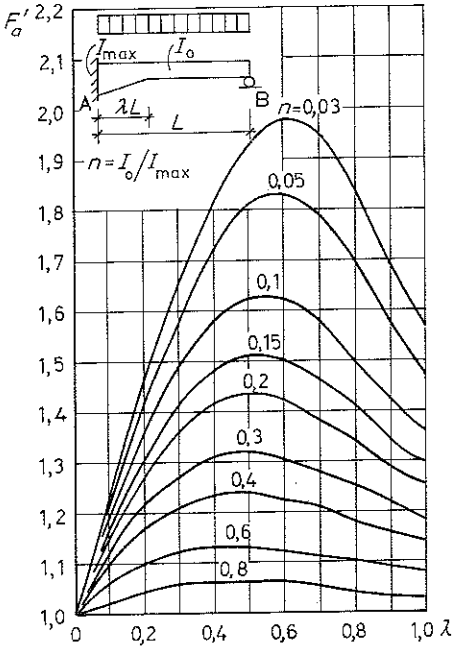
Symmetriska triangelvoter



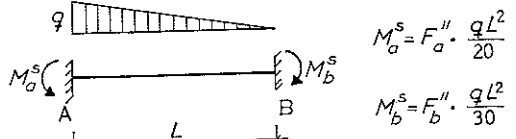
Ensidig triangelvoter



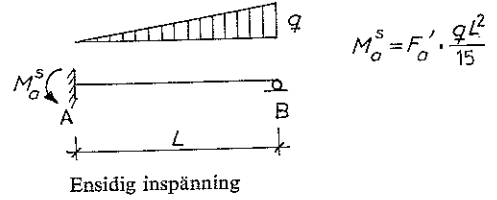
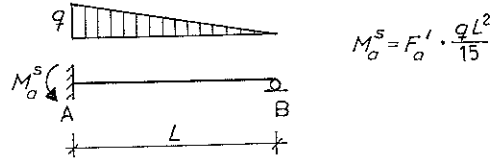
Ensidig triangelvot



Triangulärt fördelat last

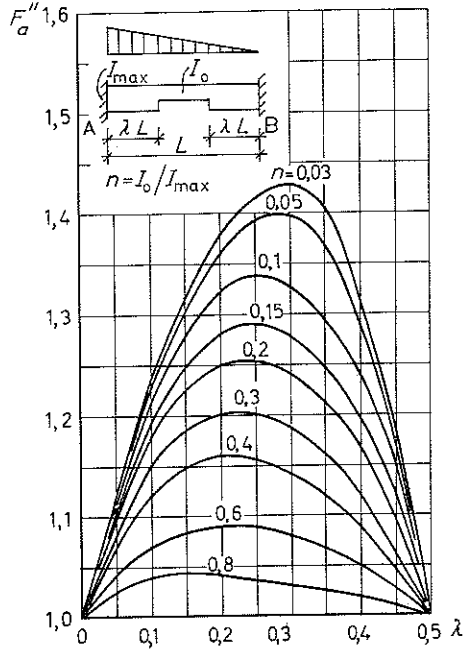
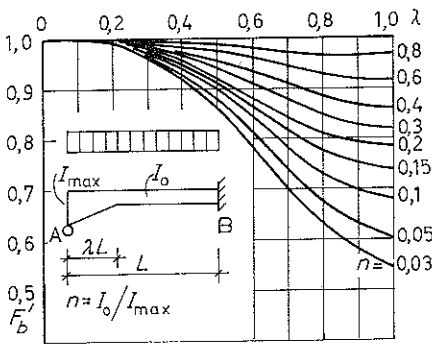


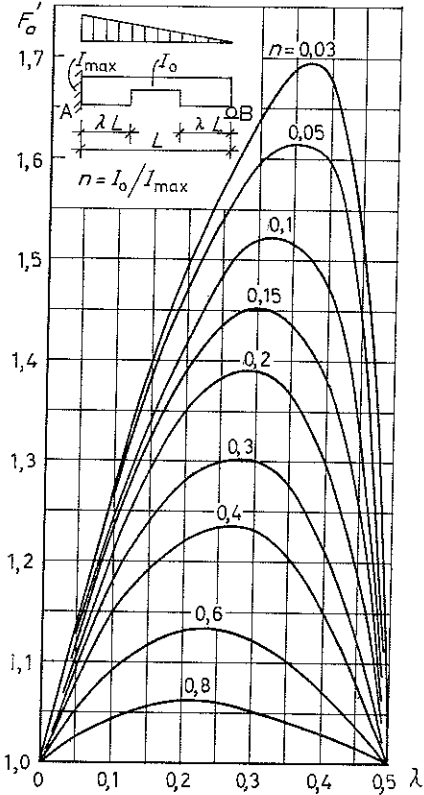
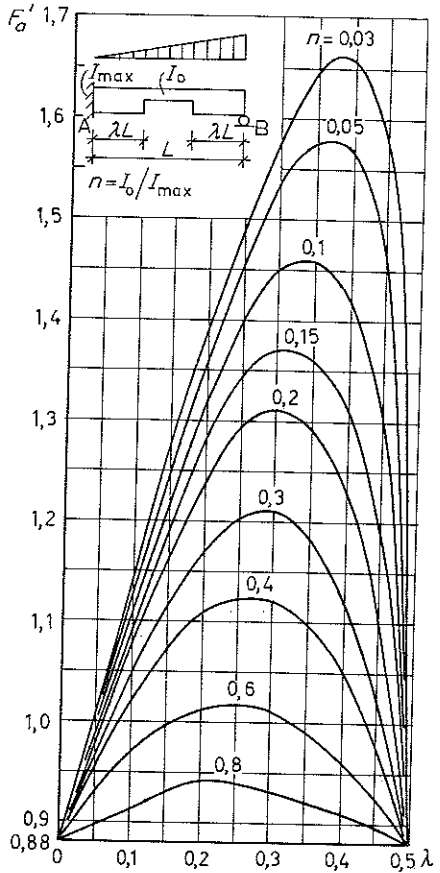
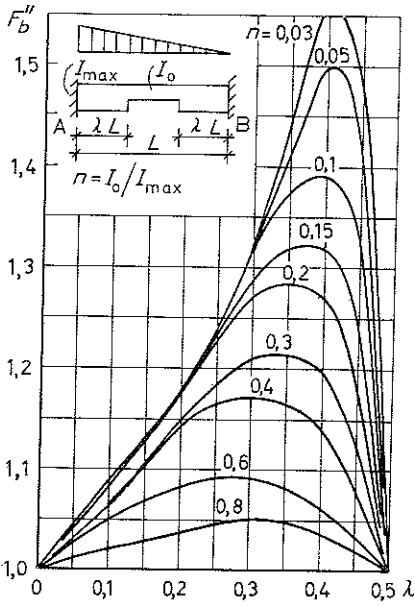
Tvåsidig inspänning



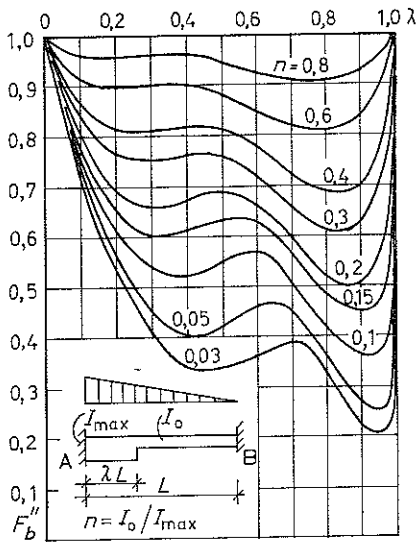
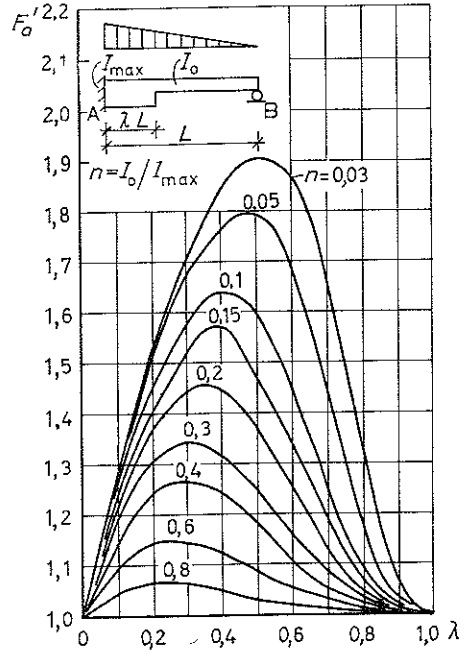
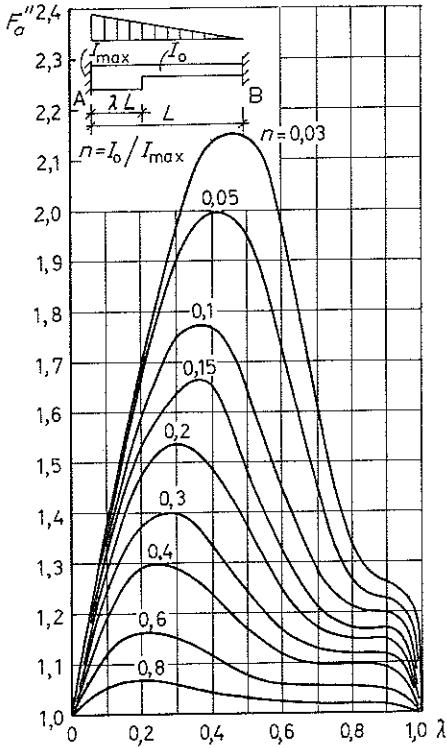
Ensidig inspänning

Symmetriska, raka vöter



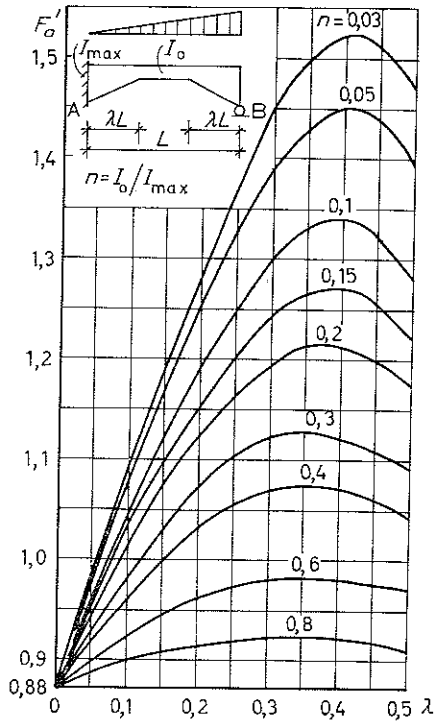
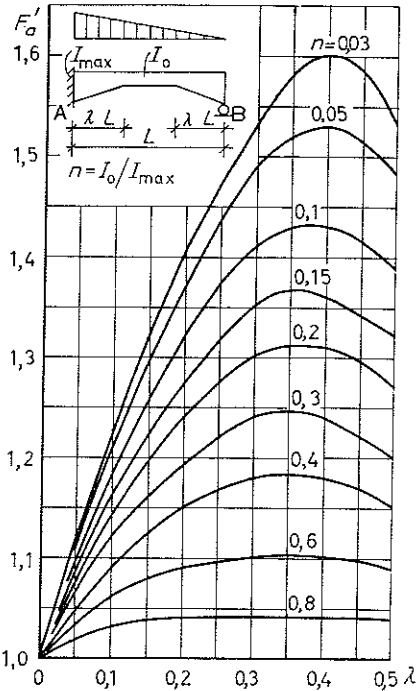
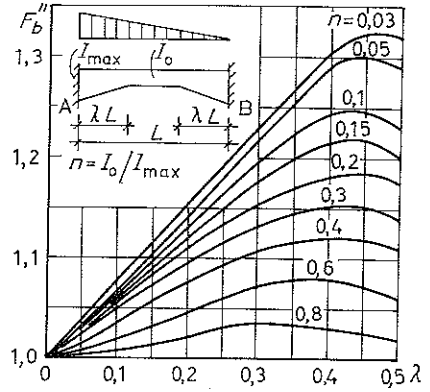
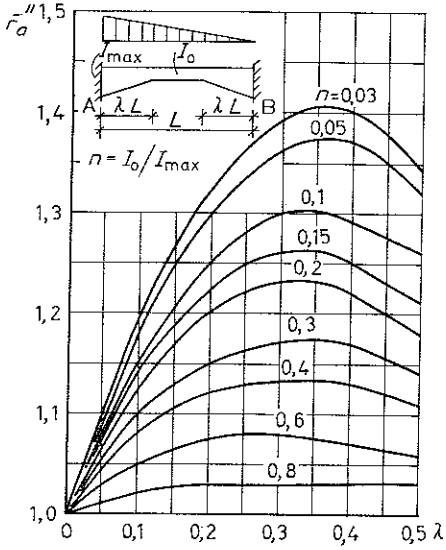


Ensidig, rak vot





Symmetriska triangelvoter



Ensidig triangelvot

