LUND UNIVERSITY

Punktkonstruktioners verkningssätt vid upprepade lastcykler

Plem, Erik

1971

Link to publication

Citation for published version (APA):
Plem, E. (1971). *Punktkonstruktioners verkningssätt vid upprepade lastcykler.* (Bulletin of Division of Structural Mechanics and Concrete Construction, Bulletin 17; Vol. Bulletin 17). Lund Institute of Technology.

Total number of authors:
1

General rights
Unless other specific re-use rights are stated the following general rights apply:
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.
• Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
• You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
• You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Read more about Creative commons licenses: https://creativecommons.org/licenses/

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

LUND UNIVERSITY

PO Box 117
221 00 Lund
+46 46-222 00 00

LUND INSTITUTE OF TECHNOLOGY · LUND · SWEDEN · 1971
DIVISION OF STRUCTURAL MECHANICS AND CONCRETE CONSTRUCTION · BULLETIN 17

BYGGNADSSTATIK
REFERENS

ERIK PLEM

PUNKTKONSTRUKTIONERS VERKNINGSSÄTT VID UPPREPADE LASTCYKLER

PUNKTKONSTRUKTIONERS VERKNINGSSÄTT VID UPPREPADE LASTCYKLER

av tekn.lic. Erik Plem
Ingenjörsbyrån Centerlöf & Holmberg AB, Lund

FÖRORD .

Härmed framför jag ett varmt tack till tekn. dr Åke Holmberg, Ingenjörsbyrån Centerlöf & Holmberg AB och till professor Ove Pettersson, Institutionen för byggnadsstatik vid Lunds tekniska högskola, dels för många stimulerande samtal under föreliggande arbetes tillblivelse, vilka tillfört detta värdefulla impulser, och dels för den tid de har offrat på att genomläsa det färdiga manuskriptet.

Dessutom vill jag tacka fru Lena Svensson, som svarat för utskrift av manuskriptet samt fru Karin Lööw, som renritat samtliga figurer.

Arbetet har utförts med ekonomiskt stöd från Statens råd för byggnadsforskning.

Lund i december 1970

Erik Plem

INNEHÅLL

	BETECKNINGAR OCH DEFINITIONER	5
1	PROBLEMPRESENTATION	10
1.1	Första pålastning till ett elasto-plastiskt tillstånd	10
1.2	Tillståndsändring efter första pålastning	15
2	INLEDANDE ANALYS AV EN PUNKTKONSTRUKTIONS TILLSTÅNDSVARIATION	19
2.1	Helt elastisk återgång efter flytning	19
2.1.1	Punkter i den elastiska zonen	20
2.1.2	Punkter i den plastiska zonen	22
2.1.3	Specialfallet $\theta_2 = 0$	25
2.2	Icke helt elastisk återgång efter flytning	26
2.2.1	Avlastningsfasens jämviktsekvationer	26
2.2.2	Fenomenologisk diskussion	30
2.3	Datamaskinberäknade illustrationsexempel	34
3	TILLSTÅNDSFÖRÄNDRINGAR UNDER EN LASTCYKEL	37
3.1	Inre arbetets gradient	37
3.2	Symmetrisk lastcykel	46
3.3	Datamaskinberäknade illustrationsexempel	49
4	PUNKTKONSTRUKTION AV PUNKTER MED FLERA FLYTNIVÅER	54
4.1	Arbetslinjens approximation	54
4.2	Första pålastning	55
4.3	Tillståndsändring	60
4.4	Tillämpningsexempel	63
4.5	Konsekvenser för en lastcykel	69
4.6	Datamaskinberäknade illustrationsexempel	71
5	PUNKTKONSTRUKTION MED UPPREPAD LASTVARIATION	74
5.1	Val av strain hardening funktion	74
5.2	Modifikation av flytvillkoret	77
5.3	Beräkningsgång vid upprepade lastcykler	78
5.4	Övergång från ett elasto-plastiskt till ett elastiskt tillstånd	80
5.5	Datamaskinberäknade illustrationsexempel	83

6	DATAMASKINPROGRAMMET "POINT SET STRUCTURE"	89
6.1	Programbeskrivning	89
6.1.1	Till huvudprogrammet hörande procedure-deklarationer	91
6.1.2	Huvudprogrammet	102
6.2	Programlista	108
6.3	Exempel på resultatredovisning	118
6.3.1	Beräkning enligt alternativ 1	118
6.3.2	Beräkning enligt alternativ 2	124
6.3.3	Beräkning enligt alternativ 3	128
7	SLUTORD	135
REFERENSER		138
FIGURFÖRTECKNING		139
FIGURER		145

BETECKNINGAR OCH DEFINITIONER

A	Variabel som är proportionell med u-komposanten av det inre arbetets gradient. Även exponent som är 0 eller 1 för en punkt i den plastiska respektive den elastiska zonen.
a	Horisontell projektion av radien R.
B	Variabel som är proportionell med v-komposanten av det inre arbetets gradient.
b	Vertikal projektion av radien R.
C	Variabel som är proportionell mot τ-komposanten av det inre arbetets gradient.
c	$R^2 - a \cdot p - b \cdot q$
D	Formmatris med a, b och c som element.
d	Avståndet mellan vridmedelpunkten och verkningslinjen för den yttre kraften.
G	Viktmatris med g som element.
g	En punkts vikt.
I	Punktgruppens polära tröghetsmoment med avseende på vridmedelpunkten vid renodlad elastisk deformation.
I_o	Punktgruppens polära tröghetsmoment med avseende på gruppens viktade tyngdpunkt.
k	En punkts elasticitetskoefficient.
k_1, k_2	Parameterset som bestämmer strain hardening kurvans förlopp.

M	Yttre moment.
M_φ	Yttre moment efter första pålastning till påkänningstillståndet φ.
N	Yttre kraft.
N_{max}	Övre gräns för den yttre kraften i en lastcykel.
N_{min}	Undre gräns för den yttre kraften i en lastcykel.
N_φ	Yttre kraft efter första pålastning till påkänningstillståndet φ.
n	Antalet punkter i konstruktionen.
P	Punktkraft.
P_o	Flytkraft vid en punkt med $g = 1$ då strain hardening ej beaktas.
P_σ	Flytkraft vid en punkt med $g = 1$ efter σ flyttillfällen vid punkten.
p	Horisontell projektion av sträckan mellan en punkts momentancentrum och vridmedelpunkten för tillskottsdeformationen.
Q	Lastmatris.
q	Vertikal projektion av sträckan mellan en punkts momentancentrum och vridmedelpunkten för tillskottsdeformationen.
R	En punkts radie räknad från dess momentancentrum.
R_o	Gränsradien mellan elastisk och plastisk zon.
R_M	Max R vid första pålastning.

R_i'	Gränsradien mellan elastisk och plastisk zon i band nr i.
R_i''	Yttre gränsradien för band nr i.
r	En punkts radie räknad från annan punkt än dess momentancentrum. I allmänhet räknas r från tillskottsdeformationens vridmedelpunkt.
S	Σg
u, v	Koordinater till tillskottsdeformationens vridmedelpunkt.
V	Rotationsmatris. Diagonalmatris med ν som element i huvuddiagonalen.
x, y	En punkts koordinater.
x_1, y_1	Koordinater till en punkts momentancentrum vid inledningen av en tillståndsändring.
x_2, y_2	Koordinater till en punkts momentancentrum vid avslutningen av en tillståndsändring.
x_g	Abscissa till punktgruppens viktade tyngdpunkt.
α	Parameter som beskriver storleken av en tillståndsändring.
β	Koefficienten θ_1/θ_2.
β_i	Δ_i i dimensionslös form.
γ	Vinkeln mellan abscissaaxeln och R.
Δ_i	Flytdeformation vid den relativa flytnivån η_i.
δ	En punkts förskjutning.

ε	Dimensionslös elasticitetskoefficient.
ζ_o	Initiallutning hos strain hardening kurvan.
η_i	Relativ flytnivå i band nr i.
Θ'	Verklig vinkeländring.
Θ	Θ'/λ
Θ_1'	Verklig total vinkeländring fram till aktuell tillståndsändring.
Θ_1	Θ_1'/λ
Θ_2'	Verklig storlek på resulterande vinkeländring.
Θ_2	Θ_2'/λ
ϑ	$(1-\alpha) \cdot \lvert N_\varphi \rvert$
κ	Relativ flytkraft P_σ/P_o vid en punkt då strain hardening effekten beaktas.
λ	Materialkoefficienten P_o/k.
μ	Koefficient mellan 0 och κ beroende av plasticeringsgraden vid en punkt.
ν	Reell eller fiktiv rotation som bestämmer en punktkrafts storlek.
π	P i dimensionslös form.
ς	R i dimensionslös form
ς_i'	R_i' i dimensionslös form.
ς_i''	R_i'' i dimensionslös form.

σ	Antalet flyttillfällen vid en punkt.
τ'	Verklig storlek på tillskottsdeformationens rotation.
τ	τ'/λ
Φ	Yttre arbetet
φ	Påkänningstillståndet
χ	Koefficient som kan tilldelas värdet +1 eller -1.
ψ	Inre arbetet
ω	Formfaktor
ω_o	$1 + \Sigma \beta_i$. Summation över samtliga band.
ω_i	$\Sigma \beta_i$. Summation över samtliga band innanför band nr i.
flytkraft	Den punktkraft, vid vilken flytning börjar vid en punkt med vikten g = 1.
flytgräns	Den yttre last, vid vilken flytning börjar inom en punktkonstruktion vid dess mest ansträngda punkt.
brottgräns	Den yttre last, som ej stegras vid fortsatt plasticering av en punktkonstruktion.

1. PROBLEMPRESENTATION

Föreliggande publikation utgör en fortsättning på det arbete som författaren redovisar i "Design of Point Set Structures" (Byggforskningens rapport 21/68), i det följande betecknad PSS.

Arbetet omfattar studier beträffande punktkonstruktioners beteende under inverkan av lastcykler med cykelgränser i det elasto-plastiska området.

1.1 Första pålastning till ett elasto-plastiskt tillstånd

En punktkonstruktion definieras i PSS som ett ändligt antal diskreta punkter belägna i ett plan, varvid de är förbundna på ett sådant sätt, att en förflyttning i planet av en punkt alstrar en förflyttningen motriktad kraft P, angripande vid punkten. För växande storlek på förflyttningen antas att kraften följer Hooke's lag upp till ett gränsvärde P_o, varefter den förblir konstant oberoende av förflyttningen. Vidare antas att förflyttningen är en kongruensflyttning, vilket innebär att det ömsesidiga avståndet mellan två godtyckliga punkter inom konstruktionen är invariant i avseende på förflyttningen.

Denna definition läggs till grund även för föreliggande arbete. Den kommer dock längre fram att modifieras vad beträffar den enskilda punktens elasto-plastiska egenskaper.

Den beskrivna beräkningsmodellen kan i sinnesvärlden tänkas motsvara konstruktioner av typen nit- eller skruvförband. Dessutom kan vridna pålgrupper med enbart vertikalpålar anses svara mot den valda modellen.

Den vanliga beräkningsgången vid dimensionering av ett nitförband inleds med att den yttre kraften parallellförflyttas till förbandets tyngdpunkt under samtidigt införande av mot förflyttningen svarande moment. Kraften fördelas lika på konstruktionens punkter (nitar) med kraftkomposanter i den yttre kraftens riktning och flyttningsmomentet balanseras av andra kraftkomposanter vars storlek är proportionell med respektive punkts avstånd från

tyngdpunkten och vars riktning är vinkelrät mot punktens radie med avseende på tyngdpunkten. Den resulterande kraften vid varje punkt ges sedan genom vektoriell addition av de två således bestämda kraftkomposanterna.

Betraktelsesättet innebär att mot krafterna svarande förflyttning av förbandet uppfattas som sammansatt av translation och samtidig rotation kring tyngdpunkten.

Det beskrivna beräkningsförfarandet förenklas om man som Gullander (1907) inser att en translation och en samtidig rotation alltid kan sammansättas till en rotation kring ett momentancentrum (vridmedelpunkten). Läget av den resulterande rörelsens momentancentrum bestäms därvid entydigt av den betraktade situationens geometri och är således oberoende av den yttre kraftens storlek.

Sedan vridmedelpunktens läge bestämts erhålles storleken på kraften vid konstruktionens enskilda punkter genom att multiplicera punktens avstånd från vridmedelpunkten med en proportionalitetsfaktor. Kraftens riktning är vinkelrät mot punktens radie med avseende på vridmedelpunkten, varför man vid detta förfarande slipper gå omvägen över en vektoriell komposantaddition.

Gemensamt för de två skisserade beräkningssätten är att de äger giltighet endast då elastiska förhållanden är för handen d.v.s. den yttre kraften måste alltid vara mindre än eller lika med konstruktionens flytgräns. Den senare definieras som den kraft, vilken nätt och jämnt medför flytning vid konstruktionens mest ansträngda punkt. Konsekvensen härav är att de relaterade metoderna på sin höjd kan ge upplysning om konstruktionens säkerhet gentemot begynnande flytning. Om konstruktionens brottlast får man inget besked.

I PSS studeras en punktkonstruktion under pålastning in i och genom det elasto-plastiska området fram till dess slutlig kollaps. Detta inträffar då den yttre kraften uppnår brottgränsen, definierad som den kraft som ej stegras vid fortsatt plasticering inom konstruktionen. Som beskrivande parameter för

konstruktionens aktuella tillstånd används påkänningstillståndet φ bestämt som förhållandet mellan radien R_o - se FIG. 1 - i den gränscirkel vilken, reellt eller fiktivt, delar punktgruppen i en elastisk och en plastisk zon och den största radien R_M till någon punkt inom gruppen. Nämnda radier tas härvid med avseende på konstruktionens momentana vridmedelpunkt. Inom den renodlade elastiska fasen av pålastningsförloppet är $\varphi \geq 1$ där likhetstecknet avser flytgränsen. Under den resterande elasto-plastiska fasen är $1 > \varphi \geq 0$ där likhetstecknet avser brottgränsen.

Styrning av påkänningstillståndet genom parametern φ innebär reellt styrning genom påtvingad deformation. Att deformationen valts som primär åverkan och icke den yttre kraften sammanhänger med det förhållandet att utsträckningen av det elasto-plastiska området ur deformationssynpunkt är stor under det att den ur kraftsynpunkt ibland är mycket begränsad. Val av deformation som primär åverkan medger således en exaktare styrning mot ett eftersträvat tillstånd.

Vid ansträngning av en given punktkonstruktion, med ett i relation till denna fixerat läge för den yttre kraften, inträffar följande. Under hela förloppet kan deformationen beskrivas som en rotation kring ett momentancentrum gemensamt för alla konstruktionens punkter. Under förloppets inledande elastiska fas ligger, som tidigare påpekats, denna punkt stilla i förhållande till konstruktionen. Denna fixering upphävs emellertid då flytgränsen passeras. Under den följande delen av pålastningen, karakteriserad av elasto-plastiskt beteende hos konstruktionen, förflyttar sig således vridmedelpunkten i konstruktionens plan längs en bana bestämd av den förhandenvarande situationens geometri.

Medan vridmedelpunktens fasta läge under den elastiska fasen enkelt kan beräknas utifrån aktuella konstruktionsdata, kan dess varierande läge under det elasto-plastiska skedet icke bestämmas explicit.

I PSS anges ett sätt att bestämma vridmedelpunktens momentana läge baserat på studier av systemets inre arbete och under för-

utsättning om idealelasto-plastiskt beteende för den enskilda konstruktionspunkten. Den härvid härledda beräkningsmetoden har omsatts i ett datamaskinsprogram med vilket pålastning till en nivå över flytgränsen kan studeras.

Sedan vridmedelpunktens läge bestämts kan de enskilda punktkrafterna beräknas ur sambandet

$$P = g \cdot P_o \cdot \left(\frac{R}{R_o}\right)^A \qquad (1)$$

där g är den enskilda punktens vikt, R dess radie med avseende på vridmedelpunkten och, enligt FIG. 1

$$A = \begin{cases} 0 & \text{för } R \geq R_o \\ 1 & \text{för } R < R_o \end{cases}$$

Mot krafttillståndet svarande rotationsdeformation karakteriseras av vinkeländringen θ' bestämd ur

$$\theta' = \frac{P_o}{k} \cdot \frac{1}{R_o} \qquad (2)$$

där k är punktens "elasticitetsmodul".
Införs den sammansatta materialkonstanten

$$\lambda = \frac{P_o}{k} \qquad (3)$$

kan (2) alternativt tecknas

$$\theta' = \lambda \cdot \frac{1}{R_o} \qquad (4)$$

I ett etablerat jämviktstillstånd skall systemets samtliga krafter, yttre och inre, satisfiera planets två projektionsekvationer, vilka med beteckningar enligt FIG. 2 antar formen

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{R_o}\sum_e ga - \sum_p g\frac{a}{R} + \frac{N}{P_o} &= 0 \\ -\frac{1}{R_o}\sum_e gb - \sum_p g\frac{b}{R} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

då verkningslinjen för N väljs parallell med det använda koordinatsystemets y-axel och N räknas positiv motriktad y.

Summaindex e anger att summationen skall omsluta samtliga konstruktionspunkter inom den elastiska zonen och på motsvarande

sätt anger p summation över alla punkter tillhörande den plastiska zonen. Mot vald deformation, uttryckt i φ, svarande yttre kraft beräknas slutligen ur momentekvationen, vilket ger sambandet

$$N = \frac{P_o}{d} \cdot \left(\frac{1}{R_o} \sum_e g R^2 + \sum_p g R \right) \qquad (6)$$

Det klassiska sättet att beräkna punktkonstruktioner, jämte Gullanders variant, liksom det i PSS angivna bygger enligt den inledande definitionen på förutsättningen om att punktgruppen under deformation förflyttar sig som ett stelt system. Detta innebär, att eventuellt uppträdande deformationer i det punktbärande mediet negligeras. Denna förutsättning är i allmänhet icke strängt uppfylld. Den kan anses ge god överensstämmelse mellan beräkningsmodell och verklig konstruktion i fallet grupp av vertikalpålar belastad med vridmoment, där det uppburna fundamentets vekhet oftast kan anses vara försumbar jämfört med de enskilda pålarnas vekhet.

För nit- och skruvförband kan å andra sidan förväntas att beräknad kraftfördelning avviker från verklig på grund av plåtarnas egendeformationer. Approximationens noggrannhet är här beroende av relationerna mellan plåttjocklek, plåtutbredning, nitdiameter och nitavstånd.

Ett försök att teoretiskt beakta dessa faktorers inverkan på kraftfördelningen gör bl.a. Bufler (1968), då han studerar det till synes okomplicerade fallet då två olika breda och tjocka plåtar hopnitas med en enkel nitrad och lasten utgörs av dragkraft i plåtarnas plan i nitradens riktning. På grundval av jämviktsekvationer, kompatibilitetsvillkor och en antagen påkänningsfördelning vid nitarnas anliggning mot hålranden beräknas kraftfördelningen inom förbandet.

Den framräknade kraftfördelningen karakteriseras av påkänningstoppar vid förbandets början och slut under förutsättning av att renodlade elastiska förhållanden är rådande. Men Bufler visar även att en stegring av den yttre kraften resulterar i en successiv utjämning av kraftfördelningen i takt med att flytzonerna växer inåt mot förbandets mitt innebärande att det fel

som begås genom att bortse från plåtarnas egendeformationer minskas i samma mån som utbredningen av den plasticerade zonen ökar inom förbandet.

Den uppvisade komplexiteten vid behandling av denna endimensionella nitgrupp indikerar att en analog analys av en tvådimensionell grupp icke är möjlig med rimlig arbetsinsats. Som en konsekvens härav accepteras principen om kongruensflyttning även i det följande samtidigt som det framhålles att de här uppnådda resultaten måste tolkas med denna approximation i minnet.

1.2 Tillståndsändring efter första pålastning

I PSS var intresset inriktat på beteendet hos en punktkonstruktion vid dess första pålastning. Vi skall här ägna oss åt de problem som sammanhänger med tillståndsförändringar inom konstruktionen vid en eller flera efterföljande omkastningar av den yttre lasten.

Har belastningen första gång drivits så långt att slutvärdet på den yttre kraften överstiger flytgränsen är det icke självklart hur kraftfördelningen inom gruppen förändras då den yttre lasten reverteras. Någon beräkningsmetod med vilken ett sådant förlopp kan följas har veterligen icke redovisats förut.

Litteraturen om punktkonstruktioner - i huvudsak nit- och friktionsförband - finns förtecknad på ett föredömligt sätt hos de Jonge (1945) vars bibliografi täcker tiden fram till 1944. Dess fortsättning finner man i den av ASCE (1967) sammanställda bibliografien, vilken upptar litteratur i ämnet framkommen under tidsperioden 1944-1966.

En genomgång av dessa båda, i andra avseenden givande arbeten, gör det sannolikt att generella metoder saknas för beräkning av tillståndsförändringar inom en punktgrupp vid lastvariationer i det elasto-plastiska området. Syftet med föreliggande arbete är därför att fylla denna lucka genom att uppställa en sådan beräkningsmetod.

För andra konstruktionstyper föreliggande metoder för plasticitetsteoretisk analys har växt fram ur respektive konstruktionstyps egenart och kan därför icke utan vidare överföras till tillämpning på punktkonstruktioner. I det följande skall vi därför uppställa en plasticitetsteoretisk beräkningsmetod speciellt anpassad till punktkonstruktioner, realisera denna i ett datamaskinprogram och sedan med detta studera den betraktade konstruktionstypen under inverkan av växlande last. Studiet begränsas därvid till att omfatta den typ av lastväxlingar som karakteriseras av fixerat kraftläge. Variationen läggs således helt och hållet på lastens storlek.

Det skall dessutom nämnas att endast renodlade byggnadsstatiska aspekter kommer att anläggas på problemet. Frågor som kan hänföras till materialläran faller således utanför denna avhandlings ram. Det ovan uttalade syftet har förverkligats enligt följande utvecklingslinje.

Avlastning. - Vid belastning av en punktkonstruktion till en sådan nivå, att ett inre elasto-plastiskt tillstånd etableras, erhåller alla punkter belägna i den plastiska zonen permanenta förflyttningar. Förflyttningarnas storlek är bestämda av dels punkternas lägen i relation till det momentana vridcentrat gällande vid sluttillståndet och dels den kvarstående elastiska zonens utbredning. Då den yttre kraften avlägsnas återgår punktkrafterna följaktligen icke till noll utan ett system av inre residualkrafter i jämvikt kvarstår efter avlastningen. I 2.1 studeras problem i samband härmed och en beräkningsmetod uppställs för bestämning av detta residualtillstånd.

En lastcykel. - Om den yttre kraften efter avlastning reverteras med oförändrad verkningslinje och därvid tillåts växa till en sådan storlek, att ett nytt elasto-plastiskt tillstånd etableras, har konstruktionen utsatts för en halv elasto-plastisk belastningscykel. Efter upprepad avlastning och revertering förs den yttre kraften till sitt ursprungsvärde och en hel belastningscykel har genomlöpts.

En vidareutveckling av beräkningsmetoden för avlastning ger i 2.2 den generella teorien för beräkning av övergång från ett inre kraft-

tillstånd till ett annat. Teorien kompletteras i avsnitt 3 med ett studium av variationen hos det inre arbetets gradient under genomgång av en belastningscykel.

Generaliserad arbetslinje. - Deformation-kraftsambandet vid konstruktionens enskilda punkt har ovan förutsatts vara ideal-elasto-plastiskt i enlighet med den inledande definitionen på en punktkonstruktion. I avsnitt 4 framläggs ett approximativt sätt att behandla punktkonstruktioner, vars punkter har egenskaper som kan uttryckas med en godtyckligt vald, uppåt icke-konkav arbetslinje. Den angivna metoden karakteriseras av en uppdelning av töjningsområdet i delområden, vilka vart för sig delas i ett rent elastiskt och ett rent plastiskt område. Betraktelsesättet leder till en approximerande arbetslinje med flera flytnivåer, se FIG. 23. Det visas hur denna kan tillämpas dels i samband med i PSS uppställd beräkningsmetod för första pålastning och dels vid detaljstudiet av en följande belastningscykel. Metoden medger speciellt analys av en konstruktion omfattande punkter med arbetslinje karakteriserad av två flytnivåer vilket ger möjlighet till ett mera nyanserat studium av t.ex. friktionsförband.

Upprepad last. - Upprepas den ovan beskrivna lastcykeln ett antal gånger mellan fasta cykelgränser på en punktkonstruktion i metalliskt material vill detaljförloppet hos den inre kraftvariationen ändras från cykel till cykel. Detta sammanhänger med dels det kända fenomenet att en från början krökt arbetslinje raknar under inverkan av upprepade på- och avlastningar och dels en ändring i materialstrukturen till följd av plastisk kallbearbetning vid de av konstruktionens punkter, vilka ansträngs till flytning vid cykelgränserna, resulterande i en successiv höjning av flytkraften vid berörda punkter. Nämnda två fenomen har i avsnitt 5 approximativt beaktats på följande sätt. Dels räknas genomgående med idealelasto-plastiska egenskaper hos konstruktionens punkter under hela cykelserien, d.v.s. en eventuell krökning hos punkternas arbetslinje i de inledande laststegen beaktas ej. Dels introduceras ett funktionellt samband mellan en punkts aktuella flytkraft och antalet upprepade flytningar. Sambandet har getts en analytisk form, som medger

studium av situationer svarande mot såväl linjärt beroende som icke-linjärt beroende, anpassningsbart till experimentellt bestämda samband. Med de angivna förutsättningarna studeras den successiva förändringen av det inre krafttillståndet vid slutet av en serie cykelperioder, där varje period innehåller ett föreskrivet antal cykler. Samtidigt undersöks de tillhörande förändringarna i konstruktionens flytgräns och brottgräns.

Datamaskinprogram. - För den praktiska tillämpningen erforderligt datamaskinprogram redovisas och kommenteras i avsnitt 6. Här återfinns utförlig programbeskrivning med detaljdiskussion av speciella problem i anslutning till den numeriska behandlingen i 6.1, komplett programlista i Algol avpassad för datorsystemet UNIVAC 1108 i 6.2 och exemplifierande resultatutskrifter i 6.3.

2. INLEDANDE ANALYS AV EN PUNKTKONSTRUKTIONS TILLSTÅNDSVARIATION

2.1 Helt elastisk återgång efter flytning

En icke tidigare belastad punktgrupp belastas till påkänningstillståndet $\varphi < 1$, varvid en rotation inträffar kring den mot φ svarande vridmedelpunkten A enligt FIG. 3. Punktens läge (x_1, y_1) kan beräknas enligt i PSS angivna principer och förutsättes därför känt i det följande. Det inre, elasto-plastiska påkänningstillståndet balanseras av en yttre kraft N_φ eller som specialfall av ett yttre moment M_φ. Rotationen räknas positiv medurs, dess storlek anges med vridningsvinkeln θ_1'. Då punktkraft och punktförflyttning är motriktade räknas en punktkraft positiv då den har en moturs omloppsriktning i förhållande till sitt momentancentrum.

Eftersom, enligt förutsättningen, $\varphi < 1$ delar sig punktmängden i två delmängder, en elastisk och en plastisk, åtskilda av gränscirkeln med centrum i A och med radien $R_o = \varphi \cdot R_M$.

Vid hel eller delvis avlastning av konstruktionen till N eller M kan det inre krafttillståndet, som vi senare skall se, ej längre beskrivas med talet φ. Som beskrivande parameter väljs i stället

$$\alpha = \frac{N}{N_\varphi} \quad \text{eller} \quad \frac{M}{M_\varphi} \tag{7}$$

alltså förhållandet mellan slutvärdet på den yttre kraften respektive det yttre momentet efter avlastning och initialvärdet efter första pålastning av den yttre kraften respektive det yttre momentet. I det följande antas $\alpha < 1$.

Avlastningen kan åstadkommas genom att påföra konstruktionen en ny yttre kraft

$$\Delta N = -(1 - \alpha) \cdot N_\varphi \tag{8}$$

angripande i samma linje som N_φ, respektive genom att påföra den ett nytt yttre moment

$$\Delta M = -(1 - \alpha) \cdot M_\varphi \tag{9}$$

Det resulterande krafttillståndet inom punktgruppen efter förändring av den yttre belastningen fås som den vektoriella summan av krafttillståndet hörande till pålastningsfasen, fas 1, och krafttillståndet hörande till avlastningsfasen, fas 2.

Vi förutsätter ytterligare att α väljs på en sådan nivå, att det resulterande krafttillståndet karakteriseras av full elasticitet. Härav följer att förloppet under fas 2 blir helt elastiskt och således kan beskrivas som en rotation kring den mot $\psi \geq 1$ svarande vridmedelpunkten B, vars läge (u, v) explicit kan beräknas enligt anvisning i PSS. Återgångens vridningsvinkel betecknas τ'. Vi behandlar i det följande punkter inom de under fas 1 etablerade elastiska och plastiska zonerna var för sig.

2.1.1 Punkter i den elastiska zonen

Punkter tillhörande denna zon karakteriseras av elastiskt beteende i båda belastningsfaserna, varför superpositionsprincipen direkt är tillämpbar. Vi är därför berättigade att tänka oss båda belastningarna påförda konstruktionen samtidigt, varvid en resulterande rotation erhålles kring ett momentancentrum C i FIG. 3, med koordinaterna (x_2, y_2) och med vridningsvinkeln θ_2'.

Allmänt antas att vid elastiska förhållanden mellan punktkraften P och häremot svarande förskjutning δ gäller sambandet

$$P = g \cdot k \cdot \delta \qquad (10)$$

där g är punktens vikt och k den tidigare introducerade "elasticitetsmodulen". Detta samband ger, tillämpat på fas 1 vid en fiktiv punkt med $g = 1$ belägen på cirkeln med radien R_o och med centrum i A uttrycket

$$P_o = k \cdot \delta = k \cdot R_o \cdot \theta_1'$$

eller med beaktande av (3)

$$\theta_1' = \frac{P_o}{k} \cdot \frac{1}{R_o} = \lambda \cdot \theta_1 \qquad (11)$$

där

$$\theta_1 = \frac{1}{R_o} \qquad (12)$$

Den till rotationen i fas 2 hörande vinkeländringen τ' kan bestämmas med hjälp av uttrycket (82) i PSS, vilket ger

$$\tau' = \frac{\delta}{r} = \frac{P_o}{k} \cdot \frac{M_g}{I_o} = \lambda \cdot \tau \qquad (13)$$

där

$$\tau = \frac{M_g}{I_o} \qquad (14)$$

Härvid betecknar M_g antingen momentet ΔM enligt (9) eller momentet av ΔN enligt (8) med avseende på gruppens viktade tyngdpunkt, i båda fallen dividerat med P_o. Med I_o avses gruppens polära tröghetsmoment med avseende på tyngdpunkten. Även punktradien r räknas i relation till denna punkt.

Storleken av den resulterande rotationen kring punkt C fås som summan av (11) och (13)

$$\theta_2' = \lambda \cdot \theta_2 = \lambda \cdot (\theta_1 + \tau) \qquad (15)$$

vilket ger sambandet

$$\theta_2 = \theta_1 + \tau \qquad (16)$$

Den resulterande punktkraften får värdet

$$P = g \cdot k \cdot R \cdot \theta_2' \qquad (17)$$

som med (15) insatt övergår i yttrycket

$$P = g \cdot k \cdot R \cdot \lambda \cdot \theta_2 = g \cdot R \cdot P_o \cdot \theta_2 \qquad (18)$$

eller i dimensionslös form

$$\frac{P}{P_o} = g \cdot R \cdot \theta_2 \qquad (19)$$

R räknas här från den resulterande vridmedelpunkten C, vars läge det nu återstår att bestämma.

Punkten C karakteriseras av att den ligger stilla under den resulterande rörelsen. Den måste därför sökas på den räta linjen genom punkterna A och B. Dess läge på denna linje skall vara sådant, att summan av dess förflyttningar härrörande från fas 1 och fas 2 är noll. Villkoret ger med beteckningar enligt FIG. 3

$$\theta_1 \cdot (\ell_1 - \ell_2) - \tau \cdot \ell_2 = 0$$

varur erhålles

$$\ell_2 = \frac{\Theta_1}{\Theta_1+\tau} \cdot \ell_1 = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \cdot \ell_1 = \beta \cdot \ell_1 \qquad (20)$$

med

$$\beta = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \frac{\ell_2}{\ell_1} \qquad (21)$$

Koordinaterna (x_2, y_2) för punkten C kan härefter beräknas ur sambanden

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= u - \beta \cdot (u-x_1) \\ y_2 &= v - \beta \cdot (v-y_1) \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

2.1.2 Punkter i den plastiska zonen

En punkt i denna zon har genom rotation kring punkt A under fas 1 erhållit en förskjutning

$$\delta = \delta_e + \delta_p$$

sammansatt av två delar, en elastisk δ_e och en plastisk δ_p. Den senare innebär reellt en permanent förflyttning av punkten i relation till punktmängden inom den elastiska zonen; punktgruppens geometri har således förändrats. Vi antar emellertid att δ_p är liten i förhållande till konstruktionens utsträckning, varför den uppkomna distorsionen kan anses försumbar. Kraften vid punkten, $g \cdot P_o$, kan därför antas ha framkommit genom ett enbart elastiskt pålastningsförlopp, vilket emellertid är ett annat än det, som gäller för punktmängden inom den elastiska zonen. De två förloppen har dock den gemensamma vridmedelpunkten A.

Vinkeländringen för den fiktiva elastiska rotationen beräknas ur sambandet

$$\Theta_1' = \frac{\delta_e}{R}$$

där R under fas 1 räknas från punkt A, vilket med kraftsambandet

$$g \cdot P_o = g \cdot k \cdot \delta_e$$

insatt ger

$$\Theta_1' = \frac{P_o}{k} \cdot \frac{1}{R} = \lambda \cdot \Theta_1 \qquad (23)$$

med

$$\theta_1 = \frac{1}{R} \qquad (24)$$

Pålastningstillståndet har härigenom återförts till ett fiktivt elastiskt tillstånd, varför superpositionsprincipen kan tillämpas även vid den plastiska punkten och den fortsatta beräkningsgången blir densamma som för punktmängden inom den elastiska zonen. Det skall dock observeras att momentancentrum C för den resulterande rotationen blir individuell för varje punkt inom det plastiska området beroende av ett för varje punkt individuellt värde på θ_1 enligt (24). Detta förhållande är orsaken till att påkänningstillståndet φ ej längre är definierat och därför måste ersättas med den beskrivande koefficienten α.

Exempel 1. - En punktkonstruktion 1, 2, 3 enligt FIG. 4 belastas med en yttre kraft genom punkt 3 till påkänningstillståndet $\varphi = 0{,}8$. Pålastningstillståndet har studerats i exempel 8 i PSS. Från denna behandling vet vi att den yttre kraften är $N_\varphi = 1.884\ P_o$ och att vridmedelpunktens läge i det här nyttjade koordinatsystemet har koordinaterna (- 7.73249, 1.16170) svarande mot punkt A i figuren. Streckade kraftvektorer anger kraftbilden efter pålastningen.

Sök kvarstående punktkrafter efter total avlastning, d.v.s. för $\alpha = 0$.

För punkter inom den elastiska zonen, punkterna 1 och 2, beräknas det gemensamma värdet på θ_1 enligt följande

$$R_M = R_3 = 15.02553$$
$$R_o = \varphi \cdot R_M = 0.8 \cdot 15.02553 = 12.02043$$
$$\theta_1 = \frac{1}{R_o} = 0.0831917$$

Under avlastningsfasen är tillskottskraften enligt (8)

$$\Delta N = -(1-\alpha) \cdot N_\varphi = -1.884 \cdot P_o$$

med det tillhörande momentet, dividerat med P_o, kring tyngdpunkten C.G.

$$M_g = \Delta N \cdot e = -1.884 \cdot (5.65684 - 0.70711) = -9.32529$$

Gruppens polära tröghetsmoment beräknas till

$$I_o = 2^2 + 2 \cdot (8^2 + 1^2) = 134$$

vilket ger

$$\tau = \frac{M_g}{I_o} = -\frac{9.32529}{134} = -0.0695917$$

Vinkeländringen för den elastiska zonens sammansatta rotation är nu

$$\theta_2 = \theta_1 + \tau = 0.0831917 - 0.0695917 = 0.0136000$$

varför

$$\beta = \frac{\theta_1}{\theta_2} = 6.117$$

Koordinaterna till vridmedelpunkten under fas 2, punkt B, fås enligt följande beräkning (jfr PSS)

$$e \cdot f = \frac{I_o}{S} = \frac{134}{3} = 44.66667$$

$$f = \frac{44.66667}{4.94973} = 9.02406$$

$$u = 0.70711 - 9.02406 = -8.31695$$

$$v = 0.70711$$

Läget för vridmedelpunkten vid den sammansatta rotationen, punkt $C_{1,2}$, ges av (22)

$$x_2 = -8.31695 - 6.117\ (-8.31695 + 7.73249) = -4.74181$$

$$y_2 = 0.70711 - 6.117\ (0.70711 - 1.16170) = 3.48784$$

Det således beräknade läget ger radierna med avseende på $C_{1,2}$

$$R_1 = 2.35411 \qquad R_2 = 6.99783$$

varför slutligen ur (19) erhålles

$$P_1 : P_o = 2.35411 \cdot 0.0136 = 0.032$$

$$P_2 : P_o = 6.99783 \cdot 0.0136 = 0.095$$

För punkten i den plastiska zonen, punkt 3, beräknas analogt

$$\theta_1 = \frac{1}{R_M} = \frac{1}{15.02553} = 0.0665534$$

$$\theta_2 = -0.0695917 + 0.0665534 = -0.0030383$$

$$\beta = \frac{\theta_1}{\theta_2} = -21.905$$

varefter momentancentrum, punkt C_3, hörande till den resulterande rörelsen för punkt 3, bestämmes till

$x_2 = -8.31695 + 21.905 \cdot (-8.31695 + 7.73249) = -21.11955$

$y_2 = 0.70711 + 21.905 \cdot (0.70711 - 1.16170) = -9.25068$

vilket ger radien med avseende på C_3

$R_3 = 27.01671$

och

$P_3 : P_o = -27.01671 \cdot 0.0030383 = -0.082$

De således beräknade kvarstående krafterna efter avlastning visas heldragna i FIG. 4 i en 10 gånger större skala än den, som använts för de ursprungliga krafterna efter pålastning. Som framgår av figuren går residualkrafternas verkningslinjer genom samma punkt samtidigt som den av krafterna bildade kraftpolygonen sluter sig, vilket anger att ett jämviktsläge råder.

Som framgår av det ovan genomräknade exemplet är det under förutsättning av helt elastisk återgång möjligt att bestämma det kvarstående krafttillståndet vid hel eller delvis avlastning med elementära beräkningar, för vilka i princip datamaskin ej behöver tillgripas.

Med den valda nivån på α har avlastningsfasen haft ett renodlat elastiskt förlopp, vilket innebär, att det är reversibelt och att således en förnyad pålastning till ursprungsnivån $N = N_\varphi$ återför det inre krafttillståndet till det, som rådde omedelbart före avlastning. Varje skede av en således applicerad andra pålastning uppvisar därför proportionalitet mellan yttre last och inre krafter i motsats till förhållandena vid den första pålastningen, där proportionaliteten upphävdes, då φ passerade värdet 1.0. Den inträffade flytningen under första pålastningen har således höjt konstruktionens proportionalitetsgräns.

2.1.3 Specialfallet $\Theta_2 = 0$

Vi skall avslutningsvis specialstudera den beräkningsmässiga behandlingen av en punkt, för vilken det inträffar, att $\Theta_2 = 0$. Enligt (16) uppkommer denna situation då $\Theta_1 = -\tau$. Detta har som konsekvens att β enligt (21) blir oändligt stor och att

enligt (22) momentancentrum C för den sammansatta rörelsen flyttas till oändligheten. Geometriskt innebär detta, att den resulterande punktkraften P är vinkelrät mot linjen genom punkterna A och B, -jfr FIG 5. Punkten kan därför behandlas som om den deltager i en fiktiv rotation kring en godtyckligt vald punkt C på en linje genom punkten, parallell med linjen genom A och B.

Av figuren framgår att krafttriangeln vid punkten D är likformig med triangeln ADB, vilket ger relationen

$$\frac{P'}{P} = \frac{r}{\ell}$$

Väljer vi nu läget för punkten C så att detta motsvarar den arbiträra vridningsvinkeln θ_1', erhålles med utnyttjande av den ovan angivna relationen jämte sambandet

$$P' = g \cdot k \cdot r \cdot \theta_1'$$

den resulterande punktkraften

$$P = \frac{\ell}{r} \cdot P' = g \cdot k \cdot \ell \cdot \theta_1'$$

Med $R = \ell$ och (11) erhålles sedan

$$P = g \cdot k \cdot R \cdot \frac{P_o}{k} \cdot \theta_1$$

och slutligen den dimensionslösa kraften

$$\frac{P}{P_o} = g \cdot R \cdot \theta_1 \qquad (25)$$

En jämförelse med (19) visar att punkt D kan hanteras som övriga punkter inom gruppen, om i (16) insätts det fiktiva värdet $\tau = 0$ och om samtidigt momentancentrum C läggs på avståndet ℓ från punkten D. Koordinaterna för C beräknas ur

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x - (u - x_1) \\ y_2 &= y - (v - y_1) \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

vilka samband här ersätter de allmänna uttrycken (22).

2.2 Icke helt elastisk återgång efter flytning

2.2.1 Avlastningsfasens jämviktsekvationer

En icke tidigare belastad punktkonstruktion pålastas genom en

yttre last, N_φ eller M_φ, till ett påkänningstillstånd $\varphi < 1$, varvid flytning inträffar vid en eller flera punkter. Den häremot svarande, enligt PSS bestämda vridmedelpunkten betecknas som förut med A.

Vid den påföljande avlastningen väljes ett så lågt värde på α, att flytning med säkerhet inträffar vid åtminstone en punkt vid avlastningens slut. Ordet "avlastning" ges här en vidare betydelse än vanligt genom att vi låter det omfatta även en minskning av den yttre lasten förbi noll, d.v.s. lasten kan efter total avlastning åter få öka numeriskt, men nu med ombytt tecken.

Med i princip samma betraktelsesätt som i 2.1 kan följande konstateras. Rotationen under pålastningsfasen, fas 1, kan under hela sitt förlopp uppfattas ske kring den kända punkten A. Den ger upphov till en kraft P_A enligt FIG. 6, i vilken den visade punkten får representera en punkt, vid vilken flytning inträffat vid avslutad avlastning.

Vid avlastningsfasens början är förloppet helt elastiskt, varför den mot denna fas svarande vridmedelpunkten B kan bestämmas enligt föregående avsnitt. Just då flytning inträffar vid den betraktade punkten är kraftkomposanten hörande till fas 2 lika med P_B och den resulterande punktkraften $g \cdot P_o$. Vid fortsatt avlastning kan den resulterande kraften ej växa ytterligare, varför en vinkeländring av kraften inleds. P_B ändras härvid till P_B', vilket innebär att vridcentrum B nu icke längre ligger fast utan förskjuts i punktgruppens plan. Då avlastningen är helt avslutad har vridmedelpunkten intagit ett läge B' med koordinaterna (u, v), vilka tillsammans med vridningsvinkeln τ nu närmast återstår att beräkna.

Problemets tre obekanta u, v och τ kan implicit bestämmas genom tillämpning av planets tre jämviktsekvationer, varför vi börjar med att teckna dessa. Inledningsvis antas därvid den yttre lasten vara en kraft. Det härigenom funna resultatet kan sedan enkelt anpassas till att gälla, då den yttre lasten utgörs av ett moment.

Den efter avslutad fas 2 kvarstående yttre kraften är enligt (7)

$N = \alpha \cdot N_\varphi$. Med beteckningar enligt FIG. 7 kan projektionsekvationerna skrivas

$$\left.\begin{aligned} -\Sigma P \cdot \cos\gamma + N &= 0 \\ -\Sigma P \cdot \sin\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Med beteckningarna

$$a = x - x_2 \qquad b = y - y_2 \qquad (28)$$

och med beaktande av att

$$\cos\gamma = \frac{a}{R} \qquad \sin\gamma = \frac{b}{R} \qquad (29)$$

erhålles genom insättning i (27)

$$\left.\begin{aligned} -\Sigma P \cdot \frac{a}{R} + N &= 0 \\ -\Sigma P \cdot \frac{b}{R} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Så länge elastiska förhållanden råder vid en punkt är enligt (19)

$$\frac{P}{P_o} = g \cdot R \cdot \Theta_2 = g \cdot R \cdot \nu \qquad (31)$$

Flytning inträffar då absolutvärdet av kraften blir $g \cdot P_o$, alltså då

$$g \cdot R \cdot \text{abs}\ \Theta_2 \cdot P_o = g \cdot P_o$$

varur gränsvärdet av Θ_2 bestämmes till

$$\text{abs}\ \Theta_2 = \frac{1}{R} \qquad (32)$$

Då plasticering vid en punkt har inletts är kraften vid punkten bestämd av

$$\frac{P}{P_o} = g \cdot \text{sign}\ \Theta_2 = g \cdot R \cdot \frac{\text{sign}\ \Theta_2}{R} = g \cdot R \cdot \nu \qquad (33)$$

Generellt gäller därför enligt (31), (32) och (33) sambandet

$$\frac{P}{P_o} = g \cdot R \cdot \nu \qquad (34)$$

där

$$\left.\begin{aligned} \nu &= \Theta_2 && \text{för abs}\ \Theta_2 < \frac{1}{R} \\ \nu &= \frac{1}{R} \cdot \text{sign}\ \Theta_2 && \text{för abs}\ \Theta_2 \geq \frac{1}{R} \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

(34) insatt i (30) ger slutligen projektionsekvationerna under

formen

$$\left.\begin{aligned} -\Sigma g \cdot \nu \cdot a + \frac{N}{P_o} &= 0 \\ -\Sigma g \cdot \nu \cdot b &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Momentekvationen skrivs med avseende på punkt B, varvid med beteckningar enligt FIG. 7 erhålles

$$\Sigma\,(p-a)\cdot P\cdot\cos\gamma + \Sigma(q-b)\cdot P\cdot\sin\gamma + d\cdot N = 0 \qquad (37)$$

Efter division med P_o och insättning av (29) övergår (37) i

$$-\Sigma \frac{P}{P_o} \cdot (a^2 + b^2 - ap - bq) \cdot \frac{1}{R} + d \cdot \frac{N}{P_o} = 0 \qquad (38)$$

Införs beteckningen

$$c = R^2 - ap - bq \qquad (39)$$

och punktkraften P enligt (34) får slutligen momentekvationen formen

$$-\Sigma g \cdot \nu \cdot c + d \cdot \frac{N}{P_o} = 0 \qquad (40)$$

Det nu uppställda ekvationssystemet (36), (40) bestämmer problemets tre obekanta u, v och τ. Systemet är emellertid föga lämpat för algebraiska lösningsmetoder, varför vi i avsnitt 3 kommer att angripa problemet enligt ett annat betraktelsesätt.

Vi skall avsluta denna härledning med att överföra de tre jämviktsekvationerna i matrisform. Först sammanfattas de ovan funna resultaten i vektoriell form och tecknas

$$-\begin{Bmatrix} \Sigma g \cdot \nu \cdot a \\ \Sigma g \cdot \nu \cdot b \\ \Sigma g \cdot \nu \cdot c \end{Bmatrix} + \frac{N}{P_o} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (41)$$

vilket uttryck är tillämpbart då den yttre lasten är en kraft N. Sambandet modifieras till

$$-\begin{Bmatrix} \Sigma g \cdot \nu \cdot a \\ \Sigma g \cdot \nu \cdot b \\ \Sigma g \cdot \nu \cdot c \end{Bmatrix} + \frac{M}{P_o} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (42)$$

då den yttre lasten är ett moment M.

Låter vi nu n beteckna antalet punkter i konstruktionen, kan vi definiera följande matriser.

G = viktmatrisen av typ (n x 1) med matriselementen lika med punktkonstruktionens enskilda vikter.

V = rotationsmatrisen - en diagonalmatris av typ (n x n) med elementen i huvuddiagonalen lika med till varje punkt hörande ν beräknat enligt (35) och med övriga element lika med noll.

D = formmatrisen av typ (n x 3) innehållande till varje punkt hörande geometriska storheter a, b och c.

Q = lastmatrisen av typ (3 x 1). Matrisen är uppbyggd av sista termen i vänstersidan av ekvationen (41) eller (42) med N utbytt mot N_φ respektive M utbytt mot M_φ.

Med de så definierade matriserna insatta i (41) respektive (42) får dessa den sammanfattande formen

$$- G^* \cdot V \cdot D + \alpha \cdot Q^* = 0 \qquad (43)$$

där asterisk anger transponering.

Lösningen till ekvation (43) ger med α som parameter den inre kraftbildens variation under avlastningsfasen.

2.2.2 Fenomenologisk diskussion

En punktgrupps beteende under avlastning kan - utan lösning av ekvationen (43) - kvalitativt beskrivas på följande sätt.

Låt enligt FIG. 8 N_φ vara den yttre kraften omedelbart efter första pålastningen till ett givet påkänningstillstånd $\varphi < 1$. Låt vidare den i figuren visade punkten S vara den punkt i konstruktionen, för vilken flytning först inträffar under den efterföljande avlastningsfasen. Den mot N_φ svarande punktkraften är F.

Med j betecknar vi nu en enhetsvektor i den yttre kraftens verkningslinje, motriktad kraftvektorn N_φ. Alltså är

$$j = - \frac{N_\varphi}{|N_\varphi|}$$

Vektorn i representerar den kraft som uppkommer vid den betraktade punkten om konstruktionen angrips av den yttre kraften j vid helt elastiska förhållanden. Vid superposition av de två yttre krafterna N_φ och en skalär ϑ gånger j kan den yttre kraften under ett godtyckligt skede av avlastningen tecknas som

$$N = \alpha \cdot N_\varphi = N_\varphi + \vartheta \cdot j$$

Härur erhålls mellan ϑ och den tidigare använda parametern sambandet

$$\vartheta = (1-\alpha) \cdot |N_\varphi|$$

Den samtidigt med N uppträdande inre punktkraften P fås som den vektoriella summan av F hörande till fas 1 och kraften $K = \vartheta \cdot i$ hörande till fas 2. Härav framgår att den geometriska orten för ändpunkten till den resulterande kraftvektorn P blir den linje, som börjar vid vektorn F's ändpunkt och vars riktning är parallell med i. Då värdet av ϑ ökar, uppnås så småningom den situation att $P = g \cdot P_o$, d.v.s. plasticering av punkten inleds. Därefter kan punktkraften icke växa ytterligare, varför den, vid fortsatt ökning av ϑ, börjar rotera kring punkten S.

För en annan punkt T i punktgruppen, för vilken flytning inträffar senare än vid punkt S blir förloppet följande. Omedelbart vid avlastningens början förflyttar sig den resulterande punktkraftens ändpunkt efter en rät linje vars riktning är bestämd av tillskottskraftens riktning vid punkt T. Då kraften vid punkt S har uppnått sitt maximala värde $g \cdot P_o$, övergår emellertid denna linje från att vara rät till att vara krökt. Då plasticering inleds även vid punkt T blir kraftens rörelse även här en rotation.

Det summariskt beskrivna förloppet kommer att illustreras detaljerat av i 3.3 genomräknade exempel.

Avslutningsvis skall påpekas, att en förnyad pålastning till lastnivån $N = N_\varphi$ här ordinärt icke återför konstruktionen till det ursprungliga påkänningstillståndet σ, utan ett nytt elastoplastiskt tillstånd etableras med för varje punkt individuellt momentancentrum.

Exempel 2. - En dubbelsymmetrisk punktkonstruktion med utformning enligt FIG. 9 belastas med moment M, varvid konstruktionens vridmedelpunkt sammanfaller med dess tyngdpunkt för alla grader av plasticering. Antalet obekanta reduceras härigenom från tre till en, nämligen vridningsvinkeln τ, vilket gör det aktuella problemet åtkomligt för en detaljstudie över enbart handräkning.

Vi förutsätter att konstruktionens alla punkter har vikten $g = 1$ och flytkraften $P_o = 1$.

Vi antar, att konstruktionen pålastas till påkänningstillståndet $\varphi = 0.4$ med tillhörande yttre moment M_φ. Sedan låter vi momentet växla mellan yttergränserna M_φ och $-M_\varphi$ och beräknar häremot svarande variationer i punktkrafter.

Vi betraktar först initialuppspänningen genom pålastning. Med det polära tröghetsmomentet

$$I_o = 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 10^2 = 216$$

fås inom det elastiska skedet av pålastningen sambanden

$$P_1 = \frac{M}{216} \cdot 10 \qquad P_2 = \frac{M}{216} \cdot 2$$

Plasticeringen inleds då $P_1 = 1$, alltså då det yttre momentet har vuxit till $M = 21.6$, varvid samtidigt $P_2 = 0.2$. Tillståndet anges genom punkterna a_1 och a_2 i det i figuren visade M-P-diagrammet.

Pålastningens sluttillstånd erhålles enligt följande. Med $R_M = 10$ och $\varphi = 0.4$ fås $R_o = \varphi \cdot R_M = 4$, vilket ger punktkrafterna $P_1 = 1.0$ och $P_2 = 0.5$ och det tillhörande momentet

$$M_\varphi = 4 \cdot 0.5 \cdot 2 + 2 \cdot 1.0 \cdot 10 = 24$$

Tillståndet markeras med punkterna b_1 och b_2 i diagrammet. Det fullständiga pålastningsförloppet beskrivs därför av kurvgrenarna $0 - a_1 - b_1$ och $0 - a_2 - b_2$ för punkterna 1 respektive 2.

Vi övergår härefter till ett studium av momentväxlingen från M_φ till $-M_\varphi$. Vid avlastningens början är förloppet helt elastiskt.

Plasticering inträffar enligt (32) först då

$$\text{abs } \theta_2 = \frac{1}{R}$$

vid någon punkt. Med θ_2 negativ fås för punkt 1, vilken är den mest ansträngda, villkoret

$$\text{abs } \theta_2 = -\theta_2 = -(\theta_1 + \tau) = \frac{1}{10}$$

Med enligt (24) $\theta_1 = \frac{1}{10}$ fås härur

$$\frac{1}{10} + \tau = -\frac{1}{10}$$

eller

$$\tau = -\frac{1}{5}$$

Kraften vid punkt 1 är nu $P_1 = R \cdot \nu = R \cdot \theta_2 = -1.0$.

Den samtidigt uppträdande kraften vid punkt 2 fås ur följande beräkning. Enligt (12) är $\theta_1 = \frac{1}{R_o} = \frac{1}{4}$ och således

$$\nu = \theta_2 = \theta_1 + \tau = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

och därmed

$$P_2 = R \cdot \nu = 2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$$

Det mot de beräknade punktkrafterna svarande värdet av det yttre momentet blir därför

$$M = 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 10 = -19.2$$

Det beräknade tillståndet har markerats i diagrammet med punkterna c_1 och c_2.

För bestämning av punktkrafterna vid $M = -M_\varphi = -24$ tillämpas momentekvationen enligt (42)

$$-\left[2 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot 10^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{4} + \tau\right) \cdot 2^2\right] - 24 = 0$$

vilket ger

$$\tau = -\frac{1}{2}$$

Kraften vid punkt 1 är fortfarande $P_1 = 1$. För punkt 2 gäller att

$$\theta_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

varför kraften vid denna punkt blir

$$P_2 = -2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

Tillståndet efter avslutad momentväxling har markerats med d_1 och d_2 i diagrammet. Den studerade momentväxlingen följer således kurvgrenarna $b_1 - c_1 - d_1$, gällande för punkt 1, och $b_2 - c_2 - d_2$, gällande för punkt 2.

En analog behandling av momentväxlingen från $-M_\varphi$ till M_φ ger sambandet mellan M och P enligt kurvgrenarna $d_1 - f_1 - b_1$ respektive $d_2 - f_2 - b_2$, vilka leder fram till det tillstånd, som rådde omedelbart efter den första pålastningen. Fortsatt lastväxling vill därför i det aktuella fallet medföra punktkraftvariationer efter de framräknade hysteresiskurvorna till dess utmattningsbrott inträffar.

Det skall observeras att till givet värde på M hör två skilda jämviktstillstånd, ett svarande mot att M uppnåtts genom avlastning och ett annat svarande mot att M uppnåtts genom förnyad pålastning.

Av speciellt intresse är situationen vid total avlastning. Här fås residualkrafterna $P_1 = -\frac{1}{9}$ och $P_2 = \frac{5}{18}$, om tillståndet har nåtts ovanifrån, och $P_1 = \frac{1}{9}$, $P_2 = -\frac{5}{18}$ om det i stället nåtts underifrån.

2.3 Datamaskinberäknade illustrationsexempel

Den ovan framlagda beräkningsmetoden skall i det följande belysas med några exempel, beräknade på datamaskin via det i avsnitt 6 beskrivna programmet. Kunskap om programmets utformning och verkningssätt krävs icke för förståelsen av de exempel som följer nedan och de som i illustrerande syfte analogt avslutar avsnitten 3, 4, 5 och 6.

Exempel 3. - Den i FIG. 10 visade punktkonstruktionen har åtta punkter, alla med vikten $g = 1$. Den belastas excentriskt enligt figuren med en kraft, vars maximala storlek är $N{:}P_o = 5.958$, vilket svarar mot $\varphi = 0$. Konstruktionens samtliga punkter har

härvid uppnått flytning med riktningar enligt vänstra delfiguren. Efter total avlastning till N = 0 kvarstår det residualsystem av krafter i inre jämvikt, som visas i den högra delfiguren. Det observeras att punkterna i slutstadiet har individuella momentancentra i överensstämmelse med teorin. Det framgår vidare, att restkrafternas storlek kan uppgå till icke obetydliga värden.

Exempel 4. - I detta exempel studeras samma trepunktskonstruktioner, som vi tidigare mött i exempel 1 - jfr FIG. 11. Med det här valda läget på konstruktionen karakteriseras den av koordinaterna (- 8,0) för punkt 1, (0,3) för punkt 2 och (8,0) för punkt 3. Alla punkter antas ha vikten g=1. Den yttre kraften antas gå genom punkten 3 och bilda en vinkel om 135° med x-axeln.

I exempel 1 studerade vi kvarstående krafter i konstruktionen efter avlastning svarande mot $\alpha = 0$ då initialtillståndet bestämdes av $\varphi = 0.8$. Vi skall i detta exempel generalisera behandlingen till att omfatta en pålastning till en godtyckligt vald pålastningsnivå med därpå följande total avlastning.

De beräknade resultaten redovisas i de tre diagrammen till vänster i figuren. I dessa anger de övre kurvorna sambandet mellan påkänningstillståndet φ och punktkrafternas storlek inom det elasto-plastiska området. Diagrammens undre kurvor anger storleken av kvarstående krafter vid avlastning efter pålastning till den nivå som abscissan anger. Som exempel visas till höger i den övre delfiguren krafttillståndet efter belastning till $\varphi = 0.2$, vilket uppnås då den yttre kraften antar värdet $N = 2.123\ P_o$, med den för alla punkter gemensamma vridmedelpunkten, gällande vid förloppets slut. Den undre högra delfiguren visar motsvarande residualkrafttillstånd efter avlastning med för varje punkt individuellt momentancentrum. Ett jämviktsvillkor har med streckade linjer antytts i figuren.

Exempel 5. - I PSS har effekten av en temperaturexpansion för en punktgrupp studerats på ett sådant sätt, att det förutsatta kongruensvillkoret tolkats som att punkterna ingår i en ur

elastisk synpunkt icke deformabel plåt parallell med ett stelt underlag. Vid en likformig uppvärmning av denna plåt vill punktgruppen expandera, varvid kongruensvillkoret upphör att gälla och ersätts av ett affinitetsvillkor. Som huvudresultat av detta studium fann vi i PSS att vid expansion, som resulterade i plasticering inom gruppen, kunde jämviktstillståndet beräknas som vid belastning med renodlat moment med efterföljande vridning av punktkrafterna 90° moturs. Vad som vid momentbelastning är momentancentrum omtolkas därvid till att vara expansionens affinitetspol. Beräkningsmetoden illustreras i PSS av ett exempel, varur ett delresultat återges i FIG. 12. De i denna visade tre punktkrafterna, markerade med övre index w, representerar därvid det inre krafttillstånd, som uppnås vid en temperaturökning, svarande mot momentlast vid $\nu = 2/3$. Flytning inträffar vid punkterna 1 och 3 men ej vid punkt 2 där kraften är $P_2^w : P_o =$ $= 0.736$. Punktkrafterna går alla genom affinitetspolen (- 0.18, 1.52).

Tillståndet efter avsvalning till ursprungstemperaturen erhålles analogt genom att residualkrafterna efter en ekvivalent momentavlastning vrids 90° moturs. Härigenom erhålles de med c indicerade krafterna, vilka för ökad tydlighet ritats i en fem gånger större skala än krafterna hörande till det uppvärmda initialtillståndet. Efter avsvalning hör till varje punkt i punktgruppen en individuell pol, vilket fastlägger punktkraftens riktning. Som framgår av figuren uppfyller det erhållna residualkraftsystemet jämviktsvillkoren.

3. TILLSTÅNDSFÖRÄNDRINGAR UNDER EN LASTCYKEL

3.1 Inre arbetets gradient

I detta avsnitt skall dels anvisas en metod för lösning av den i 2.2 uppställda jämviktsekvationen (43) och dels, som ett förstudium till den senare behandlade beräkningsgången för upprepade lastväxlingar, ges ett klarläggande av mekanismen för en punktgrupp vid en enstaka, enkelt uppbyggd lastcykel.

Den lastcykel, som kommer att studeras, illustreras av FIG. 13, i vilken tiden t har avsatts som abscissa och den yttre kraften N som ordinata. Figuren är helt schematisk och anger icke något reellt tidsberoende för den yttre kraften.

Cykeln föregås av en pålastningsfas 0-1 som leder till initialtillståndet 1, karakteriserat av den valda påkänningsnivån φ och en till denna hörande yttre kraft $N_\varphi = N_{max}$. Härefter följer den egentliga lastcykeln, i vilken den nedåtgående grenen i sin första del återspeglar en minskning av den yttre kraftens storlek fram till total avlastning, vilket uppnås vid punkt 2, för att sedan svara mot en ny stegring av N med omkastad riktning, tills ett andra extremvärde N_{min}, bestämt av valt värde α_{min}, uppnås vid punkt 3. Cykelns därpå följande, uppåtgående gren återges analogt med först en avlastning fram till punkt 4 och sedan återigen en pålastning tills initialkraften uppnås i punkt 5.

Första pålastningen, d.v.s. grenen 0-1, har utförligt behandlats i PSS. Vi fann där - ekvation (67), sidan 22, i kombination med ekvation (21), sidan 12 - att derivatorna till det i systemet lagrade inre arbetet ψ med avseende på den obekanta vridmedelpunktens koordinater u och v kunde tecknas

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u} &= \frac{\omega}{1+\omega} \cdot \frac{P_o^{\,2}}{k \cdot R_o} \cdot \left(-\frac{1}{R_o} \sum_e g a - \sum_p g \frac{a}{R} + \frac{N}{P_o} \right) \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= \frac{\omega}{1+\omega} \cdot \frac{P_o^{\,2}}{k \cdot R_o} \cdot \left(-\frac{1}{R_o} \sum_e g b - \sum_p g \frac{b}{R} \right) \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

där ω är en faktor beroende av belastningssituationens geometri.

Vi skall här komplettera dessa samband med att härleda ett uttryck för det inre arbetets derivata med avseende på rotationen Θ. För att uppnå enhetlighet i behandlingen av första pålastningen återgår vi här tillfälligt till beteckningarna i PSS, vilket bl a innebär att Θ avser konstruktionens verkliga rotation. Med hänvisning till PSS, sidan 20, ekvationerna (54) och (56), fås bidraget till det inre arbetet från en punkt tillhörande den elastiska zonen ur sambandet

$$\Delta \psi_e = \frac{1}{2} \cdot \Theta \cdot R \cdot P \qquad (45)$$

och från en punkt inom den plastiska zonen ur sambandet

$$\Delta \psi_p = \frac{1}{2} \cdot \Theta \cdot R_o \cdot g \cdot P_o + (R-R_o) \cdot \Theta \cdot g \cdot P_o \qquad (46)$$

Insätts värdet på punktkraften beräknat ur (1) i (45) och summeras därefter över hela punktgruppen erhålles det totala inre arbetet

$$\psi = \frac{1}{2} \cdot P_o \cdot \Theta \cdot \left(\frac{1}{R_o} \sum_e g R^2 + 2 \sum_p g R - R_o \sum_p g \right) \qquad (47)$$

där e och p, som förut, anger summation över den elastiska respektive den plastiska zonen.
Sambandet (4) insatt i (47) ger nu

$$\psi = \frac{1}{2} P_o \left(\frac{1}{\lambda} \Theta^2 \sum_e g R^2 + 2 \Theta \sum_p g R - \lambda \sum_p g \right)$$

vilket deriverat med avseende på Θ ger

$$\frac{\partial \psi}{\partial \Theta} = P_o \left(\frac{\Theta}{\lambda} \cdot \sum_e g R^2 + \sum_p g R \right) \qquad (48)$$

Nu är emellertid enligt (4)

$$\frac{\Theta}{\lambda} = \frac{1}{R_o}$$

varför (48) alternativt kan skrivas under formen

$$\frac{\partial \psi}{\partial \Theta} = P_o \left(\frac{1}{R_o} \cdot \sum_e g R^2 + \sum_p g R \right) \qquad (49)$$

Enligt PSS, sidan 18, ekvation (42), är det av den yttre kraften N samtidigt utförda arbetet

$$\phi = - \omega \cdot d \cdot \Theta \cdot N \qquad (50)$$

vilket deriverat med avseende på Θ ger

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \Theta} = - P_o \cdot d \cdot \frac{N}{P_o} \qquad (51)$$

Addition av (49) och (51) ger därefter

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\omega}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = P_o\left(\frac{1}{R_o} \cdot \sum_e g R^2 + \sum_p g R - d \cdot \frac{N}{P_o}\right)$$

eller med beaktande av att $\psi - \phi = 0$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\omega}{1+\omega} \cdot P_o \cdot \left(\frac{1}{R_o} \cdot \sum_e g R^2 + \sum_p g R - d \cdot \frac{N}{P_o}\right) \qquad (52)$$

I detta uttryck (52) är innehållet inom parentesen residuum till momentekvationen på samma sätt som innehållet inom parenteserna i (44) är residua till projektionsekvationerna.

Tillämpning för den egentliga lastcykeln av samma metod, som vi i PSS och ovan använt för bestämning av de obekanta u och v för pålastningsfasen, leder till följande.

Problemets tre obekanta u, v och τ kan bestämmas som det värdeset, som ger minimum eller maximum av inre tillskottsarbete vid övergång från ett lasttillstånd till ett annat, då detta set entydigt beskriver den tillhörande tillskottsdeformationen.

I analogi med vad vi har funnit för första pålastningen, beräknas komposanterna till det inre tillskottsarbetets gradientvektor som residua till planets tre jämviktsekvationer. Härigenom överförs problemet att lösa ekvationen (43) från ett algebraiskt till ett analytiskt problem, nämligen att bestämma extremum för en funktion av de tre variablerna u, v och τ. Detta problem kan relativt enkelt lösas med hjälp av en datamaskin. En detaljerad anvisning på hur en sådan lösning kan genomföras, lämnas i 6.1.

Med utelämnande av en för varje jämviktsekvation karakteristisk faktor kan vi för lastfallet yttre kraft N enligt (41) teckna gradientkomposanterna

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u} &= -\sum g\, \nu\, a + \frac{N}{P_o} = A \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= -\sum g\, \nu\, b = B \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &= -\sum g\, \nu\, c + d \cdot \frac{N}{P_o} = C \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

Det enligt (42) alternativa fallet med yttre belastning av ett moment M kan behandlas helt analogt.

Att de mot i sambanden (44) och (52) svarande faktorerna har utelämnats i sambanden (53) innebär reellt en skalning av gradientkomposanternas absolutvärden. Detta saknar emellertid betydelse i detta sammanhang där den primära uppgiften är att bestämma de förskjutningsparametrar som gör gradienten till en nollvektor.

Vid uppställande av jämviktsekvationerna har tillämpats godtyckligt valda teckenregler, varför vi icke kan vara säkra på, att de i (53) givna sambanden äger giltighet överallt inom cykeln. Vid annat val av teckenregler hade vi funnit de alternativa sambanden

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u} &= -A \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= -B \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &= -C \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

och det blir därför vår närmaste uppgift att fastlägga gradientkomposanternas eventuella teckenväxling inom lastcykeln.

Uppgiften kan lösas genom ett studium av det inre arbetets andra derivator, vilka framräknas i det följande med utgångspunkt från teckenvalet svarande mot (53).

Deriveras de två första av ekvationerna (53) med avseende på u respektive v erhålles

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} &= -\Sigma\, g\, \nu \frac{\partial a}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} &= -\Sigma\, g\, \nu \frac{\partial b}{\partial v} \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

Med (22) insatt i (28) fås för a och b uttrycken

$$\left.\begin{aligned} a &= x - u + \beta\,(u - x_1) \\ b &= y - v + \beta\,(v - y_1) \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

vilka deriverade med avseende på u och v respektive och med insättning av (21) och (16) ger

$$\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v} = -1 + \beta = -\frac{\tau}{\theta_2} \qquad (57)$$

För en punkt med elastiskt beteende gäller enligt (35)

$$\nu = \theta_2$$

vilket med (57) ger

$$\nu \frac{\partial a}{\partial u} = \nu \frac{\partial b}{\partial v} = - \tau \tag{58}$$

För en punkt med plastiskt beteende gäller enligt (35) och (32) det motsvarande uttrycket

$$\nu = \frac{1}{R} \cdot \text{sign } \theta_2$$

vilket med (57) ger

$$\nu \frac{\partial a}{\partial u} = \nu \frac{\partial b}{\partial v} = - \tau \cdot \frac{1}{R \cdot \text{abs } \theta_2} \tag{59}$$

Införs den ständigt positiva faktorn

$$\mu = \frac{1}{R \cdot \text{abs } \theta_2} \tag{60}$$

kan (59) skrivas under den alternativa formen

$$\nu \frac{\partial a}{\partial u} = \nu \frac{\partial b}{\partial v} = - \tau \cdot \mu \tag{61}$$

Genom insättning av (58) och (61) i (55) erhålles sambanden

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = \tau \left(\sum_e g + \sum_p \mu g \right) \tag{62}$$

För en punkt tillhörande den plastiska zonen är μ definierad av uttrycket (60), vilket i kombination med (35) ger $0 < \mu \leq 1$. Definierar vi nu motsvarande enligt (58) $\mu = 1$ för en punkt inom den elastiska zonen, kan (62) slutligen skrivas på den sammanfattande formen

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = \tau \cdot \Sigma \mu g \tag{63}$$

Summationen skall här utsträckas över konstruktionens samtliga punkter. Summan är alltid positiv, varför derivatornas tecken är beroende enbart av τ.

Vi övergår härefter till ett studium av det sista av sambanden (53). Deriveras detta med avseende på τ, erhålles

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = - \Sigma g \left(\nu \frac{\partial c}{\partial \tau} + c \frac{\partial \nu}{\partial \tau} \right) \tag{64}$$

Med c beräknat enligt definitionen (39), erhålles

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = 2 R \frac{\partial R}{\partial \tau} - \left(a \frac{\partial p}{\partial \tau} + p \frac{\partial a}{\partial \tau} + b \frac{\partial q}{\partial \tau} + q \frac{\partial b}{\partial \tau} \right)$$

Nu är emellertid enligt FIG. 7

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \frac{\partial p}{\partial \tau} \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial b}{\partial \tau} = \frac{\partial q}{\partial \tau}$$

varigenom uttrycket för $\frac{\partial c}{\partial \tau}$ förenklas till

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = 2R \frac{\partial R}{\partial \tau} - (a + p) \frac{\partial a}{\partial \tau} - (b + q) \frac{\partial b}{\partial \tau} \tag{65}$$

Ur det geometriska sambandet (56) erhålles

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = (u - x_1) \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \tag{66}$$

(22) ger därefter uttrycket

$$\beta(u - x_1) = u - x_2 = p \tag{67}$$

vilket insatt i (66) ger

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \frac{p}{\beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \tag{68}$$

Nu är emellertid enligt definitionen - jfr (21) och (16) -

$$\beta = \Theta_1 \cdot (\Theta_1 + \tau)^{-1} \tag{69}$$

vilket deriverat med avseende på τ ger

$$\frac{\partial \beta}{\partial \tau} = - \frac{\Theta_1}{(\Theta_1 + \tau)^2} = - \frac{\beta}{\Theta_2}$$

eller efter insättning i (68)

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = - p \cdot \frac{1}{\Theta_2} \tag{70}$$

Analogt beräknas

$$\frac{\partial b}{\partial \tau} = - q \cdot \frac{1}{\Theta_2} \tag{71}$$

Enligt FIG. 7 är

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Deriverat med avseende på a respektive b ger detta samband

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial a} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{R} \\ \frac{\partial R}{\partial b} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{R} \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

I identiteten

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = \frac{\partial R}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial \tau} + \frac{\partial R}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial \tau}$$

insättes nu (70), (71) och (72), varvid erhålles

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = - \frac{1}{\theta_2} \cdot \frac{pa + qb}{R} \tag{73}$$

vilket tillsammans med uttrycken (70) och (71) insatta i (65) ger

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{1}{\theta_2} \cdot (p^2 + q^2 - ap - bq) \tag{74}$$

För en punkt med elastiskt beteende gäller enligt ovan

$$\nu = \theta_2 = \theta_1 + \tau$$

vilket ger

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = 1 \tag{75}$$

Ur (74), (75) och (39) kan därefter beräknas

$$\nu \frac{\partial c}{\partial \tau} + c \frac{\partial \nu}{\partial \tau} =$$

$$= p^2 + q^2 - ap - bq + a^2 + b^2 - ap - bq =$$

$$= (p - a)^2 + (q - b)^2 = r^2 \tag{76}$$

där r enligt FIG. 7 betecknar en punkts radie med avseende på tillskottsdeformationens vridmedelpunkt B.

För en punkt med plastiskt beteende gäller motsvarande uttryck

$$\nu = \frac{1}{R} \cdot \operatorname{sign} \theta_2 \tag{77}$$

vilket skall deriveras med avseende på τ. Punktens förflyttning vid rotation kring punkt C kan skrivas under de alternativa formerna

$$\delta = R_o \cdot \theta_2 = R \cdot \nu \tag{78}$$

där R_o betecknar den radie med avseende på C, som punkten skulle ha haft, om flytning nätt och jämnt skulle ha inträffat vid punkten.

Sambandet (78) ger

$$\nu = \frac{R_o}{R} \cdot \Theta_2 = \frac{R_o}{R} \cdot (\Theta_1 + \tau)$$

varur efter derivation med avseende på τ erhålls

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = \frac{R_o}{R}$$

Med (78), (77) och (60) erhålles sedan

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = \frac{\nu}{\Theta_2} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\text{sign } \Theta_2}{\Theta_2} = \frac{1}{R \cdot \text{abs } \Theta_2} = \mu \qquad (79)$$

Ur (74), (77), (39) och (79) kan därefter beräknas

$$\nu \frac{\partial c}{\partial \tau} + c \frac{\partial \nu}{\partial \tau} =$$

$$= \mu (p^2 + q^2 - ap - bq + a^2 + b^2 - ap - bq) = \mu \cdot r^2 \qquad (80)$$

Insätts slutligen (76) och (80) i (64) erhålles

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = - \sum_e g r^2 - \sum_p \mu g r^2$$

eller - med den ovan givna definitionen med $\mu = 1$ för en elastisk punkt i minnet - sambandet

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = - \Sigma \mu g r^2 \qquad (81)$$

Denna derivata är således alltid negativ.

Som sammanfattning av den genomförda undersökningen kan följande konstateras. Med teckenval för gradientvektorns komposanter enligt (53) fås de nedan uppställda samhörande värden på inre arbetets första och andra derivator

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u} &= + A & \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} &= \tau \cdot \Sigma \mu g \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= + B & \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} &= \tau \cdot \Sigma \mu g \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &= + C & \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} &= - \Sigma \mu g r^2 \end{aligned}\right\} \qquad (82\ a)$$

Med teckenval enligt (54) erhålles alternativt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u} &= -A & \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} &= -\tau \cdot \Sigma \mu g \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= -B & \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} &= -\tau \cdot \Sigma \mu g \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &= -C & \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} &= \Sigma \mu g r^2 \end{aligned}\right\} \qquad (82\ b)$$

Vi kan nu enkelt följa teckenväxlingen för gradientkomposanterna till det inre tillskottsarbetet inom hela den betraktade lastcykeln.

Vid övergång från ett tillstånd till ett annat menar vi i det följande alltid en tillståndsförändring i pilspetsarnas riktning enligt FIG. 13.

Under en tillståndsförändring på grendelen 1-2 förlorar konstruktionen energi. Enligt principen om att det totala inre arbetet skall vara minimum i ett stabilt jämviktsläge skall energiförlusten vara maximal. I en maximumsituation gäller att

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} < 0 \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} < 0 \qquad (83)$$

Då $\tau < 0$ på den betraktade grenen, är dessa villkor uppfyllda om vi väljer gradientkomposanternas tecken enligt (82 a), varvid erhålles

$$\text{grad } \psi = \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} \qquad \text{(grendel 1-2)}$$

Under övergång från ett tillstånd till ett annat på grendelen 2-3 tillförs konstruktionen på nytt energi. Då tillskottsenergin måste vara minimal för att det totala inre arbetet skall bli minimum måste gälla att

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} > 0 \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} > 0 \qquad (84)$$

Här är fortfarande $\tau < 0$, varför villkoren uppfylls, om tecken väljs enligt (82 b). Detta ger

$$\text{grad } \psi = \begin{Bmatrix} -A \\ -B \\ -C \end{Bmatrix} \qquad \text{(grendel 2-3)}$$

Grendelen 3-4 karakteriseras av energiförlust, d.v.s. jämviktsläget svarar mot ett maximum av förlust, varför villkoren (83) skall uppfyllas. Då $\tau > 0$ på denna gren fås tecken för första och andra gradientkomposanten enligt alternativet (82 b) och tecken för tredje komposanten enligt alternativet (82 a). Alltså blir

$$\text{grad } \psi = \begin{Bmatrix} -A \\ -B \\ C \end{Bmatrix} \qquad \text{(grendel 3-4)}$$

Slutligen karakteriseras grendelen 4-5 av ny energitillförsel. Här skall således en minimipunkt bestämmas svarande mot att villkoren (84) måste uppfyllas. Fortfarande är $\tau > 0$, varför tecken för gradientkomposanterna måste väljas enligt följande. Första och andra komposanten väljs enligt (82 a) och den tredje enligt (82 b), vilket ger

$$\text{grad } \psi = \begin{Bmatrix} A \\ B \\ -C \end{Bmatrix} \qquad \text{(grendel 4-5)}$$

Resultatet av den genomförda undersökningen sammanfattas i FIG. 13.

3.2 Symmetrisk lastcykel

I det allmänna fallet inträffar plasticering vid cykelns båda yttergränser. Systemet blir härigenom dissipativt, varför en tillståndsändring mot en cykelgräns är irreversibel. Detta innebär att man generellt icke återvänder till initialtillståndet efter genomgång av en cykel, trots att den yttre belastningen gör detta.

Ett undantag från denna regel utgör den symmetriska cykeln, d.v.s. den cykel, som karakteriseras av samma absolutvärde på den yttre lasten vid cykelns övre och undre gräns ($N_{max} = |N_{min}|$). Att så är fallet beror på, att den "skevhet" på grund av irreversibilitet, som uppkommer vid den ena cykelgränsen, tas ut av en lika stor men motsatt riktad "skevhet" vid den andra gränsen. En illustration till detta har vi redan fått i exempel 2.

Vi skall belysa förhållandet närmare i det följande genom ett studium av tillståndsförändringen för en punktgrupp vid dess

övergång från tillstånd 1 till tillstånd 3 i FIG. 13 under förutsättning av att dessa tillstånd bildar yttergränser i en symmetrisk cykel.

Vi påför en icke tidigare belastad punktkonstruktion last med en vald påkänningsnivå φ och antar, att minst en av punktgruppens punkter i sluttillståndet uppför sig elastiskt, d.v.s. har en radie $R < R_o$ med avseende på momentancentrum hörande till sluttillståndet. R_o betecknar därvid som i PSS radien i gränscirkeln mellan plastiskt och elastiskt område.

Låt den mot det uppnådda tillståndet 1 svarande, för alla punkter gemensamma vridmedelpunkten ha koordinaterna (u_1, v_1). Dessa koordinater satisfierar planets två projektionsekvationer (5), då den mot tillståndet φ svarande yttre kraften beräknas ur sambandet (6).

Det skall nu visas, att lösningen till jämviktsekvationerna (41) vid symmetrisk cykel i tillståndet 3 antar formen

$$(u_3, v_3, \tau_3) = (u_1, v_1, -\frac{2}{R_o}) \tag{85}$$

vilket bl.a. innebär att momentancentrum för tillskottsdeformationen sammanfaller med vridmedelpunkten för första pålastning. Att (85) satisfierar jämviktsekvationerna (41) påvisas genom insättning i dessa.

För en punkt hörande till den elastiska zonen fås ur (12) och (16)

$$\theta_2 = \theta_1 + \tau = \frac{1}{R_o} - \frac{2}{R_o} = -\frac{1}{R_o}$$

varefter (35) ger

$$\nu = \theta_2 = -\frac{1}{R_o} \tag{86}$$

För en punkt hörande till den plastiska zonen ger (16) och (24) det motsvarande sambandet

$$\theta_2 = \theta_1 + \tau = \frac{1}{R} - \frac{2}{R_o} \tag{87}$$

Med utgångspunkt från relationen

$$\frac{2}{R_o} > \frac{2}{R}$$

fås efter subtraktion av $\frac{1}{R}$ i relationens båda sidor och med utnyttjande av (87)

$$\frac{2}{R_o} - \frac{1}{R} = \text{abs } \theta_2 > \frac{1}{R}$$

varför enligt (35)

$$\nu = \frac{1}{R} \cdot \text{sign } \theta_2 = -\frac{1}{R} \qquad (88)$$

Med $x_1 = u_3$ och $y_1 = v_3$ ger det geometriska sambandet (22) för konstruktionens alla punkter

$$x_2 = x_1 = u_3$$

$$y_2 = y_1 = v_3$$

varför enligt (39) för alla punkter gäller

$$c = R^2 \qquad (89)$$

Genom insättning av (86), (88) och (89) i (41) och med beaktande av att den yttre kraften är - N i tillståndet 3 erhålles slutligen

$$-\Sigma\, g\, \nu\, a + \frac{N}{P_o} = \frac{1}{R_o} \sum_e g\, a + \sum_p g\, \frac{a}{R} - \frac{N}{P_o}$$

$$-\Sigma\, g\, \nu\, b = \frac{1}{R_o} \sum_e g\, b + \sum_p g\, \frac{b}{R}$$

$$-\Sigma\, g\, \nu\, c + d \cdot \frac{N}{P_o} = \frac{1}{R_o} \sum_e g\, R^2 + \sum_p g\, R - d \cdot \frac{N}{P_o}$$

men enligt (5) och (6) är högersidorna i dessa tre samband alla lika med noll, vilket visar att den antagna lösningen (85) satisfierar jämviktsekvationerna (41).

Genom att låta den yttre kraften genomlöpa en halv cykel, symmetriskt från N till - N, ändras således den inre kraftbilden från ett initialtillstånd till ett tillstånd, som fås ur initialtillståndet genom omkastning av riktningen för alla inre krafter. Det vunna resultatet implicerar att inom symmetriska gränsvärden för den yttre belastningen vill upprepning av cykeln ge en period-

isk variation av det inre krafttillståndet vid stabila materialegenskaper.

Slutligen skall nämnas, att vid punktgruppens totala plasticering bestäms lösningen till jämviktsekvationerna i tillstånd 3 som

$$(u_3, v_3, \tau_3) = \left(u_1, v_1, -\frac{2}{R_{min}} \right)$$

Bevisföringen härför följer samma mönster, som tillämpats ovan, för en punkt hörande till den plastiska zonen.

Härmed har vi belyst några väsentliga förhållanden för en enkel belastningscykel. I det följande avsnittet kommer problemet att ytterligare fenomenologiskt belysas genom några datamaskinberäknade exempel.

3.3 Datamaskinberäknade illustrationsexempel

Det i 6.1 beskrivna programmets möjligheter för en detaljanalys av en lastcykel skall nedan demonstreras genom nio beräkningsexempel, av vilka de åtta första behandlar den enkla trepunktskonstruktion, som vi tidigare mött i exempel 4. Att i huvudsak denna konstruktion har studerats beror på flera omständigheter. Dels har en punktgrupp med endast tre punkter i vilken en vinkel mellan punkternas sammanbindningslinjer är större än 120° ett extremt beteende (jfr vad som sägs härom i avsnittet om Toricellis punkt i PSS), varför den lämpar sig väl för programtestning. Dels ger en punktgrupp med ett ringa antal punkter fördelar i form av hanterligt redovisningsarbete och renodling av karakteristiska fenomen, vad avser variationer i det inre kraftmönstret under en lastcykel.

Slutligen har det bedömts vara mera givande att studera en och samma konstruktion vid ett stort antal belastningssituationer i stället för att splittra en analys på ett stort antal konstruktionstyper med var och en beräknad för endast ett lastfall.

I exemplen 6-13 redovisas grafiskt variationen i det inre kraftmönstret under en lastcykel vid olika yttergränser för denna och vid olika lastlägen. Cykeln har genomlöpts i 24 beräkningssteg,

av vilka i allmänhet endast vart annat har redovisats i kraftmönstret. Bara vid cykelgränserna där kraftvariationen har ett snabbare och mera oregelbundet förlopp har mellanliggande beräkningssteg medtagits i redovisningen. I exemplens huvudfigurer, visande kraftvariationen vid punktgruppens enskilda punkter, har i förtydligande syfte i allmänhet endast visats kraftvektorn vid cykelgränserna. I exemplen med symmetrisk cykel har dessutom medtagits kraftvektorn hörande till första totala avlastningen. I övrigt har visats envelloppen till kraftvektorernas banor.

En separat delfigur i halv skala orienterar i varje exempel om beräkningsförutsättningarna. Punktnumreringen är i de åtta exemplen densamma, som tillämpats i exempel 4.

Till höger i varje figur återfinns slutligen tre diagram utvisande punktkrafternas absoluta storlek som funktion av den yttre lasten.

Beräkningsstegen nr 6 och 18 motsvarar total avlastning i de fall, som lastcykeln är symmetrisk. Å figur hörande till exempel med symmetrisk cykel har ett jämviktsvillkor antytts vid dessa beräkningssteg.

Exempel 6. - I detta exempel studeras en symmetrisk lastcykel enligt FIG. 14. Påkänningstillståndet $\varphi = 0.4$ har valts så, att plasticering inträffar vid två av konstruktionens punkter men ej vid den tredje i belastningssteg nr 0.

Vi observerar att kraftvariationen vid den mest ansträngda punkten - punkt 3 - principiellt överensstämmer med den i 2.2 kvalitativt beskrivna med en bana för kraftvektorns ändpunkt, som sammansättes av räta linjer och cirkelbågar. Vid punkt 2 iakttas ett förlopp, som i stort överensstämmer med förloppet vid punkt 3, men där störningar inträffar omedelbart efter beräkningsstegen 10 och 22 samtidigt med att flytning initieras vid punkt 3. För punkt 1 slutligen är tillståndet elastiskt under hela belastningscykeln, vilket innebär en principiellt annan typ av kraftvariation vid denna punkt.

Beräkningsstegen 0 och 24 ger identiskt samma resultat, i överensstämmelse med vad som visats i 3.2 om symmetriska cykler.

Studeras diagrammen över kraftstorleken som funktion av den yttre lasten iakttas här en snabbare krafttillväxt vid en punkt omedelbart efter det att flytning inträffar vid en mer ansträngd punkt. Med det valda antalet beräkningssteg inom en cykel kan denna hastighetsökning i krafttillväxten icke redovisas i detalj.

Exempel 7. - Låter vi vid i övrigt oförändrade förutsättningar, cykelgränserna för den i exempel 6 studerade punktgruppen växa till $N = \pm 2.154\ P_o$, inträffar flytning vid konstruktionens samtliga punkter vid gränslasterna. Den angivna kraften svarar således mot en initallast med påkänningsnivån $\varphi = 0$.

Den till en lastcykel hörande situationen återges i FIG. 15, av vilken framgår, att envelloppen till kraftvektorns ändpunkt har breddats vid punkterna 2 och 3, jämfört med situationen i det föregående exemplet. Att kurvan hörande till punkt 1 i princip är av samma typ som i exempel 6 sammanhänger med, att den yttre kraften här har stegrats så långt att flytning nätt och jämnt uppnås vid den betraktade punkten vilket innebär, att den principiellt mycket nära kan betraktas som en punkt i ett helt elastiskt tillstånd.

I övrigt är punktgruppens beteende vid denna högsta möjliga lastnivå av samma natur som vid den lägre lastnivå, som studerats i exempel 6.

Exempel 8. - I detta exempel, vilket illustreras av FIG. 16, gäller samma förutsättningar som för exempel 6 med som enda skillnad, att vikten för punkt 2 ökats till $g = 2$. Effekten härav framgår direkt av figuren, vilken i övrigt framvisar samma principiella kraftförlopp som de två föregående exemplens.

Exempel 9. - Som framgår av FIG. 17 har i detta exempel den yttre kraftens verkningslinje, med bibehållen riktning, flyttats närmare punktgruppens tyngdpunkt. Initialtillståndet, svarande mot $\varphi = 0.3$, har även här valts så, att flytning inträffar vid två av gruppens punkter men ej vid den tredje. Cykeln är symmetrisk och den inre kraftvariationen följer i princip mönstret från det ovan studerade exemplet 6.

Exempel 10. - I detta exempel har enligt FIG. 18 riktningen för den yttre kraften ändrats, vilket har medfört en radikal - men dock icke principiell - förändring av punktgruppens inre kraftmönster. Även här är cykeln symmetrisk med flytning vid endast två punkter vid cykelgränserna. Som framgår av figuren, fås här en i det närmaste rätlinjig variation av punktkrafterna, bortsett från förhållanden vid cykelgränserna.

Exempel 11. - Som sista exempel med symmetrisk cykel har enligt FIG. 19 valts en belastning av punktgruppen med ett renodlat moment. En symmetrisk last på en symmetrisk konstruktion ger, som framgår av figuren, ett symmetriskt kraftmönster. Vid punkt 2 varierar kraften utan rotation. Anmärkningsvärd är den snabba ändringen i kraftens storlek vid punkt 2 efter det att flytning har inletts vid punkterna 1 och 3.

Exempel 12. - Exemplet illustrerar kraftmönstrets variation vid en osymmetrisk lastcykel. Som framgår av FIG. 20 har initialuppspänningen valts så, att flytning inträffar vid samtliga konstruktionspunkter, d.v.s. $\varphi = 0$. Den häremot svarande yttre kraften är $N_\varphi = N_{max} = 2.154\ P_o$. Avlastning sker därefter till den undre cykelgränsen $N_{min} = -\ 0.9\ N_{max}$, där flytning inträffar vid punkterna 2 och 3 men ej vid punkt 1. Cykeln avslutas sedan med förnyad ökning av den yttre kraften till initialvärdet N_{max}, där flytning återigen inträffar vid samtliga punkter, men där de inre krafterna nu har andra riktningar än vid första pålastningen. Betraktas glappen 0-24 vid punktkrafterna som kraftvektorer, skall dessa bilda en sluten kraftpolygon, eftersom den yttre kraften är densamma vid dessa två beräkningssteg, såväl till storlek som till riktning. Osymmetrin i händelseförloppet illustreras även av de tre P-N-diagrammen.

Exempel 13. - Även detta exempel belyser kraftmönstrets variation vid en osymmetrisk lastcykel. Som framgår av FIG. 21, går emellertid cykelns skevhet här åt motsatt håll jämfört med skevheten för den cykel som studerades i det föregående exemplet. Den valda påkänningsnivån vid första pålastning är $\varphi = 0.8$, vilket svarar mot ett värde av den yttre kraften av $N_{max} = 1.884\ P_o$. Detta beräkningssteg, steg 0 i figuren, ger flytning endast vid

punkt 3. Som undre cykelgräns beställdes vid den datamaskinmässiga behandlingen $N_{min} = -1.25\ N_{max}$. Denna gräns visade sig emellertid ligga utanför den möjliga undre gräns, vid vilken punktgruppen totalplasticeras. Som följd härav ändrade programmet den undre cykelgränsen till $N_{min} = -1.144\ N_{max}$, vilken ger utbredd flytning vid punkterna 2 och 3 och nätt och jämnt flytning vid punkt 1. Förnyad pålastning till initialkraften N_{max} ger nu flytning vid såväl punkt 2 och 3, men ej vid punkt 1. Även här måste glappen 0-24 betraktade som kraftvektorer bilda en sluten kraftpolygon. Exemplet uppvisar en anmärkningsvärt stor avvikelse mellan de inre kraftmönstren vid cykelns början och dess slut.

Exempel 14. - I detta exempel studeras samma punktgrupp, som vi tidigare mött i exempel 3, FIG. 22 visar punktgruppen två gånger och båda gångerna belastad med den excentriskt angripande yttre kraften $N = 4.941\ P_o$. Trots identitet beträffande geometrisk utformning och yttre belastning är som framgår av figuren det inre krafttillståndet olika i de två fallen. Detta beror på att de två grupperna har olika förhistoria. Gruppen a har i ett icke tidigare belastat tillstånd påförts kraften N svarande mot påkänningstillståndet $\varphi = 0.95$. Gruppen b följer grupp a fram till initialtillståndet $\varphi = 0.95$. Den yttre kraften reverteras därefter med bibehållen verkningslinje till värdet $-5.958\ P_o$, vid vilket konstruktionen totalplasticeras. Slutligen återförs den yttre kraften till initialvärdet $N = 4.941\ P_o$. Det vid detta tillstånd etablerade inre kraftmönstret är det, som visas i delfigur b. Konstruktionen har således utsatts för en osymmetrisk lastcykel. Sluttillståndet för denna, grupp b, kan jämföras med cykelns initialtillstånd, grupp a. Det ses härvid att flytning inträffar vid fyra punkter i grupp b, däremot bara vid två punkter i grupp a. Punktkrafterna är i varje delfigur parvis lika stora, varför deras storlek noterats vid endast hälften av punkterna.

4. PUNKTKONSTRUKTION AV PUNKTER MED FLERA FLYTNIVÅER

4.1 Arbetslinjens approximation

Vi har hittills förutsatt en beräkningsmodell karakteriserad av ett bilineärt samband mellan deformation och kraft svarande mot ett idealelastoplastiskt beteende hos den betraktade punkten.

Denna modell kan appliceras för ett flertal i praktiken förekommande punktkonstruktioner och därvid speciellt för en principiell analys av konstruktivt verkningssätt.

En grupp av konstruktioner, vars punkter uppvisar ett elastoplastiskt beteende, som markant avviker från de nämnda förutsättningarna, är friktionsförbanden. Sådana har för den enskilda punkten ett kraft-deformationssamband med två flytnivåer.

Den ena nivån svarar därvid mot den kraft, för vilken förbandets friktion övervinnes och glidning inom förbandet uppträder. Den andra nivån bestäms av materialets flytgräns.

För att bättre anpassa beräkningsmodellen till denna betydelsefulla punktkonstruktionstyp kommer i det följande den ovan deducerade beräkningsmetoden att modifieras till giltighet för punktgrupp med ett godtyckligt valt antal flytnivåer för den enskilda punkten. Härigenom uppnås, att punktgrupper med mera generella kraft-deformationssamband kan studeras. Som exempel visar därvid FIG. 23, hur en krökt arbetslinje för en enskild punkt kan approximeras, med varierande noggrannhet, av en idealiserad sådan stegformad linje innehållande flera flytnivåer.

I FIG. 24 a åskådliggörs det för den följande deduktionen antagna sambandet mellan deformation och kraft för en punkt med vikten $g = 1$. Sambandet indelas enligt figuren i ett antal områden, numrerade från 1 till $k + 1$. För de k första områdena gäller följande. Varje område består av en elastisk zon och en flytzon. Om samma elasticitetskoefficient antas gälla för alla elastiska zoner, är område nr i helt karakteriserat genom flytnivån $\eta_i P_o$ och flytdeformationen Δ_i. Deformationer svarande mot

flytzonens gränser i område nr i betecknas enligt figuren med respektive δ_i' och δ_i'', varav följer sambandet

$$\delta_i'' - \delta_i' = \Delta_i \qquad (90)$$

För området k + 1 gäller speciellt att dess flytnivå är punktens ultimativa, svarande mot gränsdeformationen δ_o, och att dess flytzon ej är begränsad till storlek, varför vi för denna nivå inför beteckningen plastisk zon.

4.2 Första pålastning

Vi övergår nu till att studera en punktkonstruktion, vars enskilda punkter har elasto-plastiska egenskaper enligt de ovan beskrivna. Vi antar, att konstruktionen aldrig tidigare har varit belastad och att den nu påförs deformation genom en yttre kraft (eller ett yttre moment) i sitt eget plan. Deformationen blir generellt en rotation kring en tills vidare okänd punkt i planet, konstruktionens momentana vridmedelpunkt med koordinaterna (u, v). Planet uppdelas vid deformationen i två zoner genom cirkeln med centrum i vridmedelpunkten och radien $R_o = \frac{\delta_o}{\theta'}$, där θ' är storleken av den påtvungna deformationen. Utanför denna cirkel ligger den plastiska zonen, inom vilken alla punktkrafter antar sitt maximala värde gP_o.

Ytan innanför cirkeln uppvisar såväl områden med flytning som områden med elastiskt tillstånd, varför vi betecknar den som den blandade zonen.

Inom den blandade zonen fördelar sig tillståndet på cirkulära koncentriska band med vridmedelpunkten som centrum. Mönstret omfattar i huvudsak k stycken dubbelband med vart och ett uppdelat i ett elastiskt innerband och ett yttre flytband. Bandens läge och utbredning bestäms av deformationen θ' samt av höjden på flytnivåerna.

Tillståndet framgår närmare av FIG. 24 b, där R_M liksom tidigare betecknar avståndet från vridmedelpunkten till gruppens yttersta punkt. I figuren sammanfaller således vridmedelpunkten och origo.

Bredden av ett flytband bestäms enligt (90) ur

$$R_i'' \cdot \Theta' - R_i' \cdot \Theta' = \Delta_i$$

d.v.s.

$$\text{bandbredden} = R_i'' - R_i' = \frac{\Delta_i}{\Theta'} \qquad (91)$$

Av (91) följer, att bandbredden avtar med växande deformation Θ'.

Övergår vi sedan till samma dimensionslösa framställning som tillämpats i PSS kan det inom gruppen rådande krafttillståndet återges enligt FIG. 24 c. Härvid har införts de dimensionslösa storheterna

$$\pi = \frac{P}{P_o} \qquad\qquad \varrho = \frac{R}{R_M}$$

samt den dimensionslösa koefficienten β_i, definierad genom sambandet

$$\Delta_i = \frac{P_o}{k} \cdot \beta_i = \lambda \cdot \beta_i \qquad (92)$$

I analogi med tidigare använd terminologi talar vi även här om "påkänningstillståndet" φ, varmed avses den dimensionslösa formen av radien i gränscirkeln mot den plastiska zonen. Det skall emellertid observeras att φ nu icke entydigt bestämmer det inom konstruktionen uppträdande påkänningstillståndet. Bredden av ett flytband i den blandade zonen ges i dimensionslös form av (91) och (92) till

$$\text{bandbredden} = \varrho_i'' - \varrho_i' = \frac{\lambda \cdot \beta_i}{\Theta' \cdot R_M} = \frac{\beta_i}{\Theta \cdot R_M} \qquad (93)$$

där Θ som förut är definierat genom sambandet $\Theta' = \lambda \cdot \Theta$

Rotationsdeformationen Θ beräknas i det följande. Vi tänker oss alla flytnivåer i den blandade zonen förflyttade efter arbetslinjen till flytnivån $\eta_o = 0$. Flytdeformationerna bildar då en sammanhängande sträcka på deformationsaxeln med början i origo och med längden $\sum_o^k \Delta_i$. Vi kan på detta sätt uppdela en deformation i två delar: en första del som är plastisk och ej medför någon kraft, och en andra del som är helt elastisk.

Tillämpas detta betraktelsesätt på en fiktiv punkt belägen på gränscirkeln med radien R_o beräknas punktens elastiska förskjutning till följd av den verkliga vinkelvridningen θ' ur sambandet

$$\delta_o^e = R_o \cdot \theta' - \sum_o^k \Delta_i$$

Motsvarande punktkraft fås sedan ur

$$P = g \cdot k \cdot \delta_o^e = gk \left(R_o \cdot \theta' - \sum_o^k \Delta_i\right) \tag{94}$$

Men på grund av punktens speciella läge på gränscirkeln är även

$$P = g \cdot P_o \tag{95}$$

Ur (94) och (95) fås sambandet

$$P_o = k \left(R_o \cdot \theta' - \sum_o^k \Delta_i\right)$$

vilket med (92) kan skrivas

$$P_o = k \left(R_o \cdot \frac{P_o}{k} \cdot \theta - \frac{P_o}{k} \cdot \sum_o^k \beta_i\right) \tag{96}$$

(96) ger

$$\theta = \frac{1}{R_o} \left(1 + \sum_o^k \beta_i\right)$$

vilket med beteckningen

$$\omega_o = 1 + \sum_o^k \beta_i \tag{97}$$

blir

$$\theta = \frac{\omega_o}{R_o} \tag{98}$$

Insätts nu (98) i (93), fås för flytbandets bredd i band nr i uttrycket

$$\varrho_i'' - \varrho_i' = \frac{R_o}{R_M} \cdot \frac{\beta_i}{\omega_o} = \frac{\varphi}{\omega_o} \cdot \beta_i \tag{99}$$

Som tidigare angivits, antages samma elasticitetskoefficient inom alla band. Detta kan motiveras med, att i allmänhet de plastiska deformationerna dominerar, varför någon mindre divergens i elasticitetskoefficienterna ej är av avgörande betydelse. Skulle det emellertid i någon tillämpning vara av stor vikt att arbeta med olika elasticitetskoefficienter inom banden, kan detta åstadkommas genom att en eller flera diagramdelar i

FIG. 24 c approximeras på ett sådant sätt, som visas i FIG. 23 för en krökt arbetslinje.

Den gemensamma elasticitetskoefficienten ε gällande för samtliga elastiska band kan beräknas ur villkoret

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varphi}{\omega_o} \cdot \sum_{0}^{k} \beta_i$$

varur med utnyttjande av (97) erhålles

$$\frac{1}{\varepsilon} = \varphi \left(1 - \frac{\omega_o - 1}{\omega_o}\right) = \frac{\varphi}{\omega_o}$$

och därmed

$$\varepsilon = \frac{\omega_o}{\varphi} \tag{100}$$

I systematiserande syfte har här och i det följande summationerna påbörjats vid index 0, vilket förutsätter ett fiktivt $\beta_o = 0$.

Den yttre begränsande radien ϱ_i'' för band nr i kan nu beräknas ur sambandet

$$\varrho_i'' = \frac{\eta_i}{\varepsilon} + \sum_{0}^{i} \frac{\varphi}{\omega_o} \cdot \beta_j$$

vilket med beteckningen

$$\omega_{i+1} = \sum_{0}^{i} \beta_j \tag{101}$$

och (100) ger

$$\varrho_i'' = \frac{\varphi}{\omega_o} (\eta_i + \omega_{i+1}) \tag{102}$$

Inom band nr i beräknas sedan radien ϱ_i' till gränsen mellan det elastiska bandet och flytbandet enligt (99) ur

$$\varrho_i' = \varrho_i'' - \frac{\varphi}{\omega_o} \cdot \beta_i = \frac{\varphi}{\omega_o} (\eta_i + \omega_i) \tag{103}$$

För en konstruktionspunkt liggande inom band nr i kan punktkraften härefter beräknas enligt följande.

Om $\varrho < \varrho_i'$ erhålles

$$\varepsilon = \frac{\omega_o}{\varphi} = \frac{\eta_i - \frac{\pi}{g}}{\varrho_i' - \varrho}$$

varur löses

$$\frac{\pi}{g} = \eta_i - \frac{\omega_o}{\varphi}(\varrho_i' - \varrho)$$

Insättes häri värdet på ϱ_i' beräknat enligt (103) fås

$$\frac{\pi}{g} = \frac{\omega_o}{\varphi} \cdot \varrho - \omega_i \qquad (104)$$

Om $\varrho \geq \varrho_i'$ erhålles motsvarande

$$\frac{\pi}{g} = \eta_i \qquad (105)$$

Lämnar vi nu den dimensionslösa framställningen och övergår till en behandling med verkliga krafter och längder, fås som motsvarighet till (104)

$$P = g \cdot P_o \cdot (\omega_o \cdot \frac{R_M}{R_o} \cdot \frac{R}{R_M} - \omega_i) =$$

$$= g \cdot P_o \cdot \frac{R}{R_o} \cdot (\omega_o - \frac{R_o}{R} \cdot \omega_i) \qquad (106)$$

och som motsvarighet till (105)

$$P = \eta_i \cdot g \cdot P_o \qquad (107)$$

Det skall observeras att de här framtagna uttrycken för beräkning av punktkraften är tillämpbara inom hela konstruktionen, alltså såväl i den blandade som i den plastiska zonen.

Med nu kända värden på punktkrafterna kan planets tre jämviktsekvationer uppställas i analogi med i PSS genomförd behandling (jfr FIG. 2).

Den vertikala projektionsekvationen får formen

$$-\Sigma P \cdot \cos\gamma + N = 0$$

Insätts häri P med värden enligt (106) respektive (107) observeras att $\cos\gamma = a/R$ och divideras med P_o erhålles

$$-\frac{1}{R_o} \cdot \sum_e g\, a\, (\omega_o - \frac{R_o}{R} \cdot \omega_i) - \eta_i \cdot \sum_p g \frac{a}{R} + \frac{N}{P_o} = 0 \qquad (108)$$

där index e betecknar, att summationen skall omfatta samtliga punkter i elastiska band, och index p summation över samtliga punkter i flytband jämte den plastiska zonen.

Motsvarande ger den horisontella projektionsekvationen

$$-\frac{1}{R_o} \cdot \sum_e g\, b\, (\omega_o - \frac{R_o}{R} \cdot \omega_i) - \eta_i \cdot \sum_p g\, \frac{b}{R} = 0 \qquad (109)$$

Momentekvationen ger med beteckningar enligt FIG. 2

$$\Sigma P \cdot R - d \cdot N = 0$$

Insättning häri av punktkrafterna P enligt (106) och (107) respektive samt division med P_o ger

$$\frac{1}{R_o} \cdot \sum_e g\, R^2\, (\omega_o - \frac{R_o}{R} \cdot \omega_i) + \eta_i \sum_p g\, R - d \cdot \frac{N}{P_o} = 0 \qquad (110)$$

Då konstruktionen första gången belastas till det givna påkänningstillståndet φ, blir beräkningsgången följande. Först bestäms läget av vridmedelpunkten (u, v) ur villkoret att de inre krafternas arbete skall vara minimum. Det inre arbetets gradientkomposanter (exklusive en konstant faktor) beräknas därvid i analogi med tidigare behandling (se (105) i PSS pg 32) ur sambanden

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u} &= -\frac{1}{R_o} \sum_e g\, a\, (\omega_o - \frac{R_o}{R}\, \omega_i) - \eta_i \sum_p g\, \frac{a}{R} + \\ &+ \frac{1}{d} \left(\frac{1}{R_o} \sum_e g\, R^2\, (\omega_o - \frac{R_o}{R}\, \omega_i) + \eta_i \sum_p g\, R \right) \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= -\frac{1}{R_o} \sum_e g\, b\, (\omega_o - \frac{R_o}{R}\, \omega_i) - \eta_i \sum_p g\, \frac{b}{R} \end{aligned}\right\} \qquad (111)$$

Därefter beräknas storleken på den yttre kraften N ur (110) och sedan de inre punktkrafterna P ur (106) alternativt (107).

4.3 Tillståndsändring

I det följande skall studeras vad som inträffar då den yttre kraften (momentet) efter pålastning reverteras.

Vi har i kapitel 2 sett att konstruktionens punkter därvid i det generella fallet roterar kring individuella vridmedelpunkter.

Läget av dessa kan oförändrat beräknas med hjälp av sambanden (22) och den resulterande vridningens storlek Θ_2 ur (16), om alla ingående rotationer svarar mot gruppens faktiska elastoplastiska egenskaper.

Det kvarstående problemet blir således att undersöka hur faktorn ν, vilken ingår i uttrycken (53) för beräkning av gradienten till de inre krafternas arbete, skall beräknas under de nu rådande förutsättningarna. Detta problem kan behandlas på följande sätt.

Vi betraktar en av konstruktionens punkter jämte dess på avståndet R från punkten liggande momentana vridmedelpunkt. Antar vi att en rotation med storleken Θ_2' sker kring denna vridmedelpunkt, resulterar detta i uppkomsten av samhöriga koncentriska "virtuella" tillståndsband i konstruktionens plan och med centrum i den betraktade punktens momentana vridmedelpunkt. Detta är helt i analogi med de "reella" tillståndsband som bildades vid den första pålastningen. Bandmönstrets utbredning är direkt beroende av Θ_2' på ett sådant sätt, att en ökning av Θ_2' medför en sammandragning av cirklarna kring momentancentrum och en minskning av Θ_2' en förskjutning av cirklarna utåt från centrum. Uppgiften blir därför att fastlägga konstruktionspunktens läge i relation till bandmönstret vid en given storlek på rotationen. Med detta delproblem löst, kan punktkraften och därmed ν beräknas.

Antag att den aktuella punkten ligger i band nr i. Antag vidare att den tillhör detta bands elastiska zon.

Enligt samma betraktelsesätt som vid behandling av första pålastningen kan punktens elastiska förskjutning δ_e beräknas ur sambandet

$$\delta_e = R \cdot \Theta_2' - \sum_{0}^{i-1} \Delta_j$$

vilket med (15), (92) och (101) ger

$$\delta_e = R \cdot \lambda \cdot \Theta_2 - \lambda \cdot \sum_{0}^{i-1} \beta_j = \lambda \cdot (R \cdot \Theta_2 - \omega_i) \qquad (112)$$

varefter genom insättning av (112) i (10) med beaktande av (92) erhålles

$$P = g \cdot P_o \cdot (R \cdot \Theta_2 - \omega_i) \tag{113}$$

Eftersom flytdeformationerna på de olika flytnivåerna räknas som absolutvärden måste (113) justeras med avseende på aktuell rotationsriktning. Härvid fås

$$\frac{P}{P_o} = g \cdot R \cdot (\Theta_2 - \frac{\omega_i}{R} \cdot \text{sign } \Theta_2) = g \cdot R \cdot \nu$$

vilket i sin tur ger

$$\nu = \Theta_2 - \frac{\omega_i}{R} \cdot \text{sign } \Theta_2 \tag{114}$$

Antar vi i stället att punkten tillhör band nr i's flytzon beräknas punktkraften med hänsyn tagen till rotationsriktningen ur sambandet

$$P = g \cdot \eta_i \cdot P_o \cdot \text{sign } \Theta_2$$

eller

$$\frac{P}{P_o} = g \cdot R \cdot \frac{\eta_i}{R} \cdot \text{sign } \Theta_2 = g \cdot R \cdot \nu$$

vilket ger

$$\nu = \frac{\eta_i}{R} \cdot \text{sign } \Theta_2 \tag{115}$$

Gränsen mellan giltighetsområdena för sambanden (114) och (115) erhålles genom att sätta de båda uttrycken lika. Detta ger

$$\Theta_2 = \frac{\eta_i + \omega_i}{R} \cdot \text{sign } \Theta_2$$

eller

$$\text{abs } \Theta_2 = \frac{\eta_i + \omega_i}{R} \tag{116}$$

Genom (116) är det sökta sambandet mellan en punkts läge och det av Θ_2 styrda tillståndsmönstret kring punktens momentancentrum känt. Vi kan därför nu formulera följande generella beräkningsregel, vilken gäller för punktgrupper vars individuella punkter karakteriseras av ett godtyckligt valt antal flytnivåer, nämligen att

$$\left.\begin{aligned} \nu &= \theta_2 - \frac{\omega_i}{R} \cdot \operatorname{sign}\theta_2 \quad \text{för} \quad \operatorname{abs}\theta_2 < \frac{\eta_i + \omega_i}{R} \\ \nu &= \frac{\eta_i}{R} \cdot \operatorname{sign}\theta_2 \quad \text{för} \quad \operatorname{abs}\theta_2 \geq \frac{\eta_i + \omega_i}{R} \end{aligned}\right\} \qquad (117)$$

Den analoga beräkningsregel som tidigare härletts och angivits i (35) är ett specialfall av (117), gällande för en punkt med endast en flytnivå.

Ur (117) kan punktkraftens storlek beräknas, då man vet inom vilket band punkten ligger. Det återstår därför att bestämma punktläget i relation till det totala bandspektrat vilket innebär att (117) måste kompletteras med ytterligare en beräkningsregel. Denna fås genom att bestämma läget av gränsen mellan två konsekutiva band. Sätts uttrycket för ν i flytzonen hos band nr i lika med uttrycket för ν i den elastiska zonen hos band nr i+1, erhålls

$$\operatorname{abs}\theta_2 = \frac{\eta_i + \omega_{i+1}}{R}$$

varför den sökta kompletterande beräkningsregeln kan formuleras så att

$$\left.\begin{aligned} &\text{punkten tillhör band nr i} \quad \text{, om abs } \theta_2 < \frac{\eta_i + \omega_{i+1}}{R} \\ &\text{punkten tillhör band nr i+1, om abs } \theta_2 \geq \frac{\eta_i + \omega_{i+1}}{R} \end{aligned}\right\} \qquad (118)$$

Genom successiv tillämpning av denna regel över bandspektrat från dess centrum och utåt, kan det band finnas, till vilket den aktuella punkten hör.

4.4 Tillämpningsexempel

Exempel 15. - Vi betraktar samma konstruktion som i exempel 2, belastad av renodlat moment M. Den geometriska utformningen av punktgruppen framgår av FIG. 9 och detalj av FIG. 25. Vid aktuell belastning sammanfaller vridcentrum med gruppens symmetricentrum och är därmed känt för alla belastningssteg, varför endast en obekant - rotationens storlek - återstår att bestämma. Detta medför som beräkningsteknisk fördel, att en serie belastningsvariationer kan följas genom enbart handräkning.

Vi låter nu punktgruppen representera ett friktionsförband med två flytnivåer för den enskilda punkten. Kraft-deformationssambandet för varje punkt förutsätter vi därvid vara karakteriserat av höjden på första flytnivån $\eta_1 = 0.6$ och motsvarande flytdeformation $\beta_1 = 0.5$.

Vid första pålastningen deformerar vi konstruktionen till "påkänningstillståndet" $\varphi = 0.4$, d.v.s. till samma φ som tidigare tillämpats i exempel 2. Därefter genomförs en hel belastningscykel med det mot $\varphi = 0.4$ svarande värdet på det yttre momentet som cykelgränser.

Den nedan genomgångna beräkningen kan i detalj följas i FIG. 25. Av figurens vänstra del framgår därvid punktkrafterna P_1 och P_2 som funktion av det yttre momentet M och av dess högra del sambandet mellan rotationen Θ och det yttre momentet M. För enkelhetens skull har i figuren, liksom i beräkningarna, P_o tilldelats värdet 1 och därför utelämnats i behandling och redovisning.

1. Första pålastningen

$\sum_o^k \beta_i = 0.5$ $\qquad$ $\omega_o = 1 + 0.5 = 1.5$ (jfr (97))

$\eta_1 = 0.6$ $\qquad$ $\eta_2 = 1.0$

$\omega_1 = 0$ $\qquad$ $\omega_2 = 0.5$

1 a. Första flytning börjar vid punkt 1:

$$\varrho_1' = \frac{10}{10} = 1 = \frac{\varphi}{\omega_o}(\eta_1 + \omega_1) = \frac{\varphi}{1.5}(0.6 + 0) = 0.4 \cdot \varphi \quad \text{(jfr (103))}$$

$\varphi = 2.5$ $\qquad$ $R_o = \varphi \cdot R_M = 2.5 \cdot 10 = 25$

$$\Theta = \frac{\omega_o}{R_o} = \frac{1.5}{25} = 0.06 \quad \text{(jfr (98))}$$

$P_1 = \eta_1 = 0.6$ $\qquad$ (jfr (107))

$$P_2 = \frac{2}{25}(1.5 - 0) = 0.12 \quad \text{(jfr (106))}$$

$M = 4.2 \cdot 0.12 + 2 \cdot 10 \cdot 0.6 = 0.96 + 12.00 = 12.96$

1 b. Första flytning avslutas vid punkt 1:

$$\varrho_1'' = \frac{10}{10} = 1 = \frac{\varphi}{\omega_o}(\eta_1 + \omega_2) = \frac{\varphi}{1.5}(0.6 + 0.5) = \frac{1.1}{1.5} \cdot \varphi \quad \text{(jfr (102))}$$

$\varphi = 1.364$ $\qquad R_o = 1.364 \cdot 10 = 13.64$

$$\Theta = \frac{1.5}{13.64} = 0.11 \quad \text{(jfr (98))}$$

$$P_1 = \eta_1 = 0.6 \quad \text{(jfr (107))}$$

$$P_2 = \frac{2}{13.64}(1.5 - 0) = 0.22 \quad \text{(jfr (106))}$$

$M = 4 \cdot 2 \cdot 0.22 + 2 \cdot 10 \cdot 0.6 = 1.76 + 12.00 = 13.76$

1 c. Andra flytning börjar vid punkt 1:

$$\varrho_2' = \frac{10}{10} = 1 = \frac{\varphi}{\omega_o}(\eta_2 + \omega_2) = \frac{\varphi}{1.5}(1.0 + 0.5) = \varphi$$

$R_o = 10$

$$\Theta = \frac{1.5}{10} = 0.15$$

$$\varrho_1'' = \frac{\varphi}{\omega_o}(\eta_1 + \omega_2) = \frac{1}{1.5}(0.6 + 0.5) = 0.73$$

För punkt 2 är $\varrho = 0.2 < 0.73$. Punkten ligger således i band 1.

$$\varrho_1' = \frac{\varphi}{\omega_o}(\eta_1 + \omega_1) = \frac{1}{1.5}(0.6 + 0) = 0.40$$

$\varrho = 0.2 < 0.40$ varför punkten fortfarande är elastisk.

$P_1 = 1.0$

$$P_2 = \frac{2}{10}(1.5 - 0) = 0.30$$

$M = 4 \cdot 2 \cdot 0.30 + 2 \cdot 10 \cdot 1.0 = 2.4 + 20.0 = 22.40$

1 d. Första flytning börjar vid punkt 2:

$$\varrho_1' = \frac{2}{10} = 0.2 = \frac{\varphi}{1.5}(0.6 + 0) = 0.40 \cdot \varphi$$

$\varphi = 0.5$ $\qquad R_o = 0.5 \cdot 10 = 5$

$\Theta = \frac{1.5}{5} = 0.30$

$P_1 = \eta_2 = 1.0$ $\qquad P_2 = \eta_1 = 0.6$

$M = 4 \cdot 2 \cdot 0.6 + 2 \cdot 10 \cdot 1.0 = 4.80 + 20.0 = 24.80$

Vid påkänningstillståndet $\varphi = 0.5$ har vi således flytning vid konstruktionens alla punkter, vid punkterna 1 å nivån $\eta_2 = 1.0$ och vid punkterna 2 å nivån $\eta_1 = 0.6$. Enligt förutsättningarna fortsätter deformationen utöver denna gräns, nämligen till dess tillståndet $\varphi = 0.4$ inträffar.

För $\varphi = 0.4$ finner vi följande

$R_o = 0.4 \cdot 10 = 4$

$\Theta = \frac{1.5}{4} = 0.375$

Punkt 1 tillhör band nr 2. Kraften är $P_1 = \eta_2 = 1.0$

$\varphi_1'' = \frac{0.4}{1.5} (0.6 + 0.5) = 0.29$

För punkt 2 är således $\varphi = 0.2 < \varphi_1''$. Flytningen fortsätter alltså här med kraften oförändrad $P_2 = \eta_1 = 0.6$. Varken inre krafter eller yttre moment har därför påverkats av en ytterligare deformation från $\varphi = 0.5$ till $\varphi = 0.4$.

2. Momentändring från $M = + 24.8$ till $M = - 24.8$

Utgångsläget är följande. Vid punkt 1 gäller relationen

$$\text{abs } \Theta_2 = 0.375 > \frac{\eta_2 + \omega_2}{R} = \frac{1 + 0.5}{10} = 0.15 \quad \text{(jfr (117))}$$

varför

$\Theta_1 = \nu = \frac{1}{10} = 0.10$

Vid punkt 2 gäller relationen

$$\text{abs } \Theta_2 = 0.375 > \frac{\eta_1 + \omega_1}{R} = \frac{0.6 + 0}{2} = 0.30 \quad \text{(jfr (117))}$$

varför.

$$\theta_1 = \nu = \frac{0.6}{2} = 0.30$$

För den studerade momentvariationen gäller således

$\theta_2 = 0.10 + \tau$ vid punkt 1 (jfr (16))

$\theta_2 = 0.30 + \tau$ vid punkt 2

där τ som förut är tillskottsdeformationen.

2 a. Första flytning börjar vid punkt 1:

För punkt 1 gäller vid gränsen likheten

$$\text{abs } \theta_2 = -0.10 - \tau = \frac{\eta_1 + \omega_1}{R} = \frac{0.6 + 0}{10} = 0.06$$

vilket ger $\tau = -0.16$; $\theta_2 = 0.10 - 0.16 = -0.06$;

$$\nu = -\frac{0.6}{10} = -0.06 \quad \text{och} \quad P_1 = -10 \cdot 0.06 = -0.6$$

För punkt 2 erhålles $\theta_2 = 0.30 - 0.16 = 0.14$, vilket ger relationen

$$\text{abs } \theta_2 = 0.14 < \frac{\eta_1 + \omega_1}{R} = \frac{0.6 + 0}{2} = 0.30$$

varför $\nu = \theta_2 = 0.14$ och $P_2 = 2 \cdot 0.14 = 0.28$

$$M = 4 \cdot 2 \cdot 0.28 - 2 \cdot 10 \cdot 0.6 = 2.24 - 12.00 = -9.76$$

2 b. Första flytning avslutas vid punkt 1:

För punkt 1 gäller vid gränsen likheten

$$\text{abs } \theta_2 = -0.10 - \tau = \frac{\eta_1 + \omega_2}{R} = \frac{0.6 + 0.5}{10} = 0.11$$

vilket ger $\tau = -0.21$; $\theta_2 = 0.10 - 0.21 = -0.11$; $P_1 = -0.6$

För punkt 2 erhålles $\theta_2 = 0.30 - 0.21 = 0.09$, vilket ger relationen

$$\text{abs } \theta_2 = 0.09 < \frac{\eta_1 + \omega_1}{R} = \frac{0.6 + 0}{2} = 0.30$$

varför $\nu = \theta_2 = 0.09$ och $P_2 = 2 \cdot 0.09 = 0.18$

$M = 4 \cdot 2 \cdot 0.18 - 2 \cdot 10 \cdot 0.6 = 1.44 - 12.00 = - 10.56$

2 c. Andra flytning börjar vid punkt 1:

För punkt 1 gäller vid gränsen likheten

$$\text{abs } \theta_2 = - 0.10 - \tau = \frac{\eta_2 + \omega_2}{R} = \frac{1.0 + 0.5}{10} = 0.15$$

vilket ger $\tau = - 0.25$; $\theta_2 = 0.10 - 0.25 = - 0.15$; $P_1 = - 1.0$

För punkt 2 erhålles $\theta_2 = 0.30 - 0.25 = 0.05$, vilket ger relationen

$$\text{abs } \theta_2 = 0.05 < \frac{\eta_1 + \omega_1}{R} = \frac{0.6 + 0}{2} = 0.30$$

varför $\nu = \theta_2 = 0.05$ och $P_2 = 2 \cdot 0.05 = 0.10$

$M = 4 \cdot 2 \cdot 0.10 - 2 \cdot 10 \cdot 1.0 = 0.80 - 20.00 = - 19.20$

2 d. Första flytning börjar vid punkt 2:

För punkt 2 gäller vid gränsen likheten

$$\text{abs } \theta_2 = - 0.30 - \tau = \frac{\eta_1 + \omega_1}{R} = \frac{0.6 + 0}{2} = 0.30$$

vilket ger $\tau = - 0.60$; $\theta_2 = 0.30 - 0.60 = - 0.30$; $P_2 = - 0.6$

Samtidigt är vid punkt 1: $\theta_2 = 0.10 - 0.60 = - 0.50$;

$$\text{abs } \theta_2 = 0.50 > \frac{\eta_2 + \omega_2}{R} = \frac{1.0 + 0.5}{10} = 0.15 \; ; \quad \nu = - \frac{1}{10} = - 0.10$$

$P_1 = - 10 \cdot 0.10 = - 1.0$

$M = - 4 \cdot 2 \cdot 0.6 - 2 \cdot 10 \cdot 1.0 = - 4.8 - 20.0 = - 24.80$

3. Momentförändring från $M = - 24.80$ till $M = + 24.80$

Utgångsläget är nu karakteriserat av följande

punkt 1 : $\theta_1 = - 0.10$
punkt 2 : $\theta_1 = - 0.30$

varför förloppet, vid denna momentvariation blir detsamma som det i föregående avsnitt studerade, men med omkastat tecken.

Θ-M-diagrammet i FIG. 25 visar, att första flytningen inom konstruktionen under första pålastningsfasen inträffar vid momentet M = 12.96 medan samma situation vid momentrevertering inträffar redan vid M = - 9.76. För andra flytningen är motsvarande värden M = 22.40 respektive M = - 19.20. Orsaken härtill är den kända Bauschingereffekten.

4.5 Konsekvenser för en lastcykel

Då man tillämpar den generaliserade arbetslinjen enligt ovan, ställs man inför frågan om avlastningskurvans utseende. Problem i samband härmed belyses genom ett studium av FIG. 8, vilken åskådliggör en punktkrafts principiella variation i början av en lastcykel omedelbart efter första pålastning. Av figuren framgår att punktkraftens absolutvärde först avtar, tills ett minsta värde uppnåtts, varefter den återigen börjar växa samtidigt som kraften successivt ändrar riktning. Det senare förhållandet medför en obestämdhet vid definition av punktens deformationsegenskaper, som gör en exakt behandling av problemet svårhanterlig. Av denna anledning väljs här för den fortsatta behandlingen en approximation, som bygger på följande förenklande antaganden.

Inledningsvis konstateras att kraftriktningarna vid återgången, vilken är helt elastisk, i stort är de samma som kraftriktningarna vid första pålastningen. Det kan därför vara motiverat att räkna med återgång svarande mot en rak gren på arbetslinjen parallell med dennas initialtangent. Sedan kraftens absolutvärde har passerat sitt minimum kommer den därpå successivt växande punktkraften i stort att vara motriktad kraften i cykelns inledande skede, varvid - t.ex. för ett nitförband - icke tidigare ansträngt material deformeras. Det må därför för detta stadium vara rimligt att antaga förlopp, som följer den generaliserade arbetslinjen för pålastning.

Då den yttre lasten reverteras och därmed andra halvcykeln inleds, är förhållandena analoga med de, som råder vid cykelns början. Punktkraftens variation bör således här räknas efter en rak avlastningskurva, vilken får gälla fram till cykelns andra kraftminimum.

Då punktkraften slutligen på nytt växer, får den riktningar, som i stort sammanfaller med kraftriktningarna under första pålastningen. För att undvika ytterligare, ej befogad komplikation av problemet, införs vidare approximationen, att förloppet vid slutet av första och andra halvcykeln är det samma. Sammanfattat leder de gjorda antagandena alltså till att under de delar av cykeln, vid vilka punktkraften är avtagande, skall en rak återgångskurva tillämpas, medan under resterande delar av cykeln den generaliserade pålastningskurvan skall gälla.

Detta introducerar ett nytt problem i samband med beräkning av gradienten till systemets inre arbete. I en viss situation kan nämligen vissa av gruppens punkter vara under avlastning samtidigt som andra punkter är under pålastning. Punktkrafternas bidrag till det inre arbetet beror av detta förhållande, varför det blir nödvändigt att uppställa ett kriterium för om en punktkraft i ett givet ögonblick är växande eller avtagande. Detta delproblem behandlas i det följande.

Deriveras punktkraften, skriven i sin generella form

$$P = g \cdot P_o \cdot R \cdot \nu \tag{119}$$

med avseende på τ erhålles

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = g \cdot P_o \cdot \left(R \frac{\partial \nu}{\partial \tau} + \nu \frac{\partial R}{\partial \tau} \right) \tag{120}$$

I de perioder av cykeln, under vilka abs P avtar, är tillståndet vid den betraktade punkten helt elastiskt. Härav följer att

$$\nu = \theta_2 = \theta_1 + \tau \tag{121}$$

och därmed

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = 1 \tag{122}$$

Insätts nu (73), (121) och (122) i (120) erhålles

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = g \cdot P_o \cdot \frac{1}{R} \cdot (R^2 - pa - qb)$$

vilket med (39) förenklas till

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = g \cdot P_o \cdot \frac{c}{R} \tag{123}$$

Vi studerar nu fallet då abs P avtar i första halvcykeln, för vilken gäller att $\partial\tau < 0$. Om P härvid är positiv är enligt förutsättningen $\partial P < 0$. Sambandet (123) ger således $c > 0$. Är å andra sidan P negativ, är $\partial P > 0$ och därför $c < 0$.

Med beaktande av att enligt (119) och (121) P och θ_2 har samma tecken kan det funna sammanföras i följande relation

$$c \cdot \operatorname{sign} \theta_2 > 0 \qquad (124)$$

För andra halvcykeln är $\partial\tau > 0$, vilket leder till en relation analog med (124) men med omkastat relationstecken.

För en helcykel kan resultatet således formuleras

$$\chi \cdot c \cdot \operatorname{sign} \theta_2 > 0 \qquad (125)$$

där $\chi = +1$ i den första och $\chi = -1$ i den andra halvcykeln. Är relationen (125) uppfylld, är punktkraften avtagande, och i annat fall växande.

4.6 Datamaskinberäknade illustrationsexempel

Exempel 16. - Exemplet utgör en motsvarighet till exempel 4, i vilket en trepunktskonstruktion med utformning och belastning enligt FIG. 11 studerats med avseende på punktkraftvariation under en första pålastning.

Skillnaden mellan den i exempel 4 studerade gruppen och den här behandlade ligger i en nu införd förutsättning av elasto-plastiska egenskaper för gruppens enskilda punkter. Vid den första behandlingen i exempel 4 antogs ett idealelasto-plastiskt beteende, medan det nu förutsätts en arbetslinje med två flytnivåer, karakteriserad av $\eta_1 = 0.6$ och $\Delta_1 = 0.5 \cdot \delta_o$ för den lägre flytnivån.

De tre diagrammen i FIG. 26 belyser verkningssättet för gruppens punktkrafter P_1, P_2 och P_3. Den övre kurvan i varje diagram anger därvid sambandet mellan påkänningstillståndet φ och punktkraftens storlek i intervallet $0 \leq \varphi \leq 2$ vid en första pålastning. Det är därvid att observera, att, då arbetslinje med flera flytnivåer tillämpas, är belastningssituationer svarande mot $\varphi \geq 1$ ej längre triviala. Diagrammens undre kurvor anger storleken

av kvarstående krafter vid avlastning efter pålastning till den nivå, som abscissan anger.

Exempel 17. - I detta exempel, som illustreras av FIG. 27 kommer den tidigare i exemplen 4 och 16 studerade trepunktkonstruktionen att bli föremål för ytterligare en modifierad behandling. Nu antages en krökt arbetslinje enligt FIG. 23 för beskrivning av de enskilda punkternas elasto-plastiska egenskaper. Vid den numeriska behandlingen har tillämpats den i FIG. 23 visade approximationen med en arbetslinje med åtta flytnivåer. Som i det föregående exemplet anger de tre diagrammen i FIG. 27 genom sina övre kurvor punktkrafterna P_1, P_2 och P_3 som funktion av påkänningstillståndet φ efter pålastning och genom sina undre kurvor residualkrafterna vid avlastning efter pålastning till påkänningstillståndet φ.

I figuren har därjämte inritats banan för vridmedelpunktens vandring vid successiv plasticering av gruppen. Punkten $\varphi = \infty$ anger vridmedelpunktens läge vid renodlad elastisk rotation och punkten $\varphi = 0$ motsvarande läge vid renodlad plastisk deformation.

Exempel 18. - I exemplen 6-13 har studerats en punktgrupps verkningssätt under en hel belastningscykel vid olika förutsättningar beträffande konstruktionens utformning och belastning. Gemensamt för exemplen var en förutsättning om idealelasto-plastiska egenskaper för punkterna. I föreliggande och följande exempel skall den nämnda studien kompletteras med en analog analys av inverkan av lastcykler för punktgruppen, då denna har punkter med egenskaper, som karakteriseras av flera flytnivåer.

I FIG. 28 visas beräknad punktkraftvariation under förhållanden, som är jämförbara med de i FIG. 15 studerade med skillnaden att punkternas arbetslinje nu förutsatts ha två flytnivåer, av vilka den lägre bestäms av värdena $\eta_1 = 0.6$ och $\Delta_1 = 0.5 \cdot \delta_o$.

Punktkraften P_3 uppvisar i början av sin variation samma förlopp som i FIG. 15. Då kraften uppnår värdet $0.6 \cdot P_o$ kan den emellertid icke växa ytterligare förrän en viss flytdeformation har in-

träffat vid punkten, varför kraften med oförändrad storlek roterar kring punkten. När sedan flytdeformationen på den lägre flytnivån har utnyttjats, fortsätter krafttillväxten fram till slutgiltig flytkraft, varefter rotation kring punkten återigen vidtar under det att övriga krafter växer till värdet på maximal flytkraft.

I diagrammen till höger i FIG. 28 kan för punktkrafterna P_2 och P_3 iakttas de olika flytnivåernas inverkan på kraftvariationen.

Exempel 19. - FIG. 29 visar kraftvariationen under en lastcykel med cykelgränser bestående av $\varphi = 0$, då de elasto-plastiska egenskaperna vid en punkt beskrivs av den i FIG. 23 angivna kontinuerligt krökta arbetslinjen. Vid den numeriska behandlingen har tillämpats den i FIG. 23 visade approximerande arbetslinjen med åtta flytnivåer. De härav följande beräkningsresultaten har i FIG. 29 redovisats med små cirklar. För att få anknytning till den ursprungligt antagna krökta arbetslinjen har kraftenvelloperna ritats med ett uppskattat jämnt förlopp.

5. PUNKTKONSTRUKTION MED UPPREPAD LASTVARIATION

5.1 Val av strain hardening funktion

I kapitel 3 följde vi tillståndsvariationen inom en punktgrupp under en lastcykel vars övre och undre gräns låg i det ideal-elasto-plastiska området och fann att sluttillståndet avvek från starttillståndet vid osymmetrisk lastcykel. Detta väcker frågan om på vilket sätt förloppet av en lastcykel förändras från cykel till cykel då gruppen utsätts för en serie osymmetriska last-cykler mellan fixerade cykelgränser liggande i det elasto-plastiska området och då gruppens enskilda punkter utmärks av ideal-elasto-plastiskt beteende i initialskedet. Problem av denna typ kommer att belysas i det följande.

Inledningsvis konstateras att en stor del av de punktgrupper, vilka förekommer i praktiken, har sådana egenskaper, att flytning vid en punkt medför förändring av materialstrukturen i punkten eller i dess närmaste omgivning. Av primärt intresse i föreliggande sammanhang är därvid den kallbearbetning som inträffar vid metalliskt material och som resulterar i en successiv höjning av punktens flytkraft, strain hardening effekten. Beaktas denna effekt, blir förhållandena vid upprepad symmetrisk belastning ej triviala och någon funktionellt dikterad gräns mellan symmetriskt och osymmetriskt lastcykels inverkan på en punktgrupps verkningssätt existerar ej längre.

Vanligtvis tar man hänsyn till kallbearbetningens inverkan via ett experimentellt bestämt samband mellan flytgränsnivå och deformation, varvid förutsätts, att den senare alltid inträffar i en fixerad riktning. Detta förfarande är emellertid ej tillämpbart på en punktgrupp, då kraften och därmed deformationen vid en punkt ändrar riktning under en cykel. För ett principiellt beaktande av strain hardening effektens inverkan på en punktgrupps beteende vid upprepade lastväxlingar räknas i det följande med den approximerande hypotesen, att flytkraften vid en punkt är en funktion av endast antalet flyttillfällen vid punkten. Det beräkningsmässiga resultatet av ett sådant förfarande torde ge en icke alltför grov, kvalitativ bild av vad

som i realiteten inträffar med gruppen. För den numeriska behandlingen erfordras således ett analytiskt samband för beräkning av aktuell flytkraft P_σ som funktion av antalet flyttillfällen σ vid en punkt. Med den dimensionslösa momentana flytkraften

$$\kappa = \frac{P_\sigma}{P_o} \tag{126}$$

kan ett sådant samband generellt tecknas

$$\kappa = f(\sigma) \tag{127}$$

Litteraturen ger inga anvisningar på strukturen av ett sådant samband. Med ledning av de experimentella resultat som uppnåtts i andra sammanhang avseende relationen mellan flytspänning och deformation väljs här för den fortsatta behandlingen för κ uttrycket

$$\kappa = (1 + k_1 \cdot \sigma)^{k_2} \tag{128}$$

där k_1 och k_2 är dimensionslösa koefficienter, som förutsätts ≥ 0.

Sambandet (128) illustreras i FIG. 30. Med $k_1 = 0$ erhålles konstant flytkraft oberoende av antalet flyttillfällen. Med $k_2 = 1$ fås ett linjärt samband mellan κ och σ. Med $k_1 \neq 0$ och $k_2 \neq 0$ och 1 erhålls krökta tillväxtkurvor med form enligt figuren. För $\sigma = 0$ d.v.s. före första flyttillfälle fås alltid $\kappa = 1$ oberoende av värdet på k_1 och k_2. Sambandet ger vidare $\kappa \to \infty$ för $\sigma \to \infty$. I realiteten kan emellertid denna situation aldrig inträffa beroende på att brott uppkommer vid en till upprepad flytning ansträngd punkt efter ett ändligt antal flyttillfällen. Exemplifierat framgår förhållandet av följande diskussion.

Antag att den yttre lasten pulserar mellan fixa gränser vid vilka punktgruppen antar elasto-plastiska tillstånd. Antag vidare, för enkelhets skull, att förloppet är symmetriskt. Detta medför kraftväxling vid gruppens mest ansträngda punkt mellan två plastiska tillstånd. Genom strain hardening sker därvid en ökning av flytkraften enligt den kurva, som avbildar sambandet (128) - jfr FIG. 31. Samtidigt uppkommer emellertid en minskning av punktens hållfasthet enligt den till punkten hörande Wöhler-kurvan svarande

mot ett P_{min}/P_{max}, som approximativt är lika med -1. Efter ett ändligt antal lastväxlingar σ_1 skär dessa två kurvor varandra och brott inträffar vid den betraktade punkten.

Diskussionen har här förts på basis av Wöhler-kurvan, vilket ej är fullt korrekt, eftersom denna förutsätter konstant kraftamplitud. Den införda approximationen, som leder till en viss underskattning av till brott hörande lastväxlingsantal, torde emellertid vid en måttlig hastighet på flytkrafttillväxten vara praktiskt försumbar.

Med hänsyn till det ovan anförda om tillväxtfunktionens egenskaper och med hänsyn till den goda styrning av tillväxttakten, som det i (128) presenterade funktionella sambandet medger, accepteras detta samband som grundval för den fortsatta behandlingen av punktgrupper åverkade av upprepade lastvariationer.

Vid den praktiska tillämpningen av (128) möter man emellertid svårigheten att välja adekvata värden för koefficienterna k_1 och k_2. Denna svårighet kan undvikas genom att låta koefficienterna bestämmas av andra, mera åskådliga parametrar. Väljs således som första parameter två samhörande värden σ_o och κ_o, kan genom den häremot svarande punkten och den obligatoriska punkten (0,1) läggas en enkel oändlighet av kurvor, bland vilka en kurva kan utväljas genom att som andra parameter införa initialtangentlutningen ζ_o. Sambandet mellan de således definierade parametrarna och de ursprungliga koefficienterna k_1 och k_2 bestäms enligt följande.

Insättning i (128) av den valda punktens koordinater ger

$$\kappa_o = (1 + k_1 \cdot \sigma_o)^{k_2} \tag{129}$$

Deriveras (128) med avseende på σ erhålles

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \sigma} = k_1 k_2 (1 + k_1 \cdot \sigma)^{k_2 - 1} \tag{130}$$

vilket med $\sigma = 0$ ger

$$\zeta_o = k_1 \cdot k_2 \tag{131}$$

Elimineras nu k_1 mellan (129) och (131), erhålles ekvationen

$$\kappa_o = \left(1 + \frac{\zeta_o \cdot \sigma_o}{k_2}\right)^{k_2} \qquad (132)$$

varur k_2 kan lösas. Insättning av k_2 i (131) ger sedan k_1.

5.2 Modifikation av flytvillkoret

Vi skall nu analysera, vilka korrektioner av tidigare uppställda samband, som måste införas som konsekvens av en övergång från konstant till växande flytkraft.

Generellt gäller för en punktkraft under elastiska förhållanden sambandet

$$P = g \cdot k \cdot \delta$$

vilket tillämpat på punkten i FIG. 3 ger den resulterande kraften

$$P = g \cdot k \cdot R \cdot \theta_2'$$

Insätts i detta uttryck (15) och (3), erhålles

$$P = g \cdot k \cdot R \cdot \lambda \cdot \theta_2 = g \cdot R \cdot P_o \cdot \theta_2$$

eller med kraften i dimensionslös form

$$\frac{P}{P_o} = g \cdot R \cdot \theta_2 = g \cdot R \cdot \nu \qquad (133)$$

Flytning inträffar, då absolutvärdet av punktkraften uppgår till $g \cdot \kappa \cdot P_o$, alltså då

$$g \cdot R \cdot \text{abs}\ \theta_2 \cdot P_o = g \cdot \kappa \cdot P_o$$

vilket bestämmer gränsvärdet för θ_2 till

$$\text{abs}\ \theta_2 = \frac{\kappa}{R} \qquad (134)$$

För en punkt, vid vilken plasticering har inletts, är kraften

$$P = g \cdot \kappa \cdot P_o \cdot \text{sign}\ \theta_2$$

eller dimensionslöst

$$\frac{P}{P_o} = g \cdot \kappa \cdot \text{sign}\ \theta_2 = g \cdot R \cdot \frac{\kappa}{R} \cdot \text{sign}\ \theta_2 = g \cdot R \cdot \nu \qquad (135)$$

Allmänt gäller därför enligt (133), (134) och (135) sambandet

$$\frac{P}{P_o} = g \cdot R \cdot \nu \qquad (136)$$

där

$$\nu = \theta_2 \qquad \text{för abs } \theta_2 < \frac{\kappa}{R}$$

$$\nu = \frac{\kappa}{R} \cdot \text{sign } \theta_2 \qquad \text{för abs } \theta_2 \geq \frac{\kappa}{R} \tag{137}$$

De tidigare uppställda jämviktsekvationerna (43) liksom de härpå baserade uttrycken för det inre arbetets gradient (53) är fortfarande giltiga under förutsättning av att punktkrafterna beräknas enligt sambanden (136) och (137) i stället för enligt de under förutsättning av konstant flytkraft härledda uttrycken (34) och (35).

Beträffande det inre arbetets andra derivator medför övergången till växande flytkraft endast den förändringen att koefficienten μ, vilken ingår i uttrycken (63) och (81) nu skall beräknas ur sambandet

$$\mu = \frac{\kappa}{R \cdot \text{abs } \theta_2} \tag{138}$$

Eftersom $\kappa > 0$ innebär detta att tidigare uppställda regler för teckenvariation för det inre arbetets gradient under en lastcykel kvarstår oförändrade.

5.3 Beräkningsgång vid upprepade lastcykler

Vi skall i det följande beskriva beräkningsgången för tillståndsvariationen inom en punktgrupp utsatt för upprepade lastcykler under de ovan preciserade förutsättningarna. Till beskrivningen hör ett för den numeriska utvärderingen, erforderligt datamaskinprogram, vilket utförligt presenteras i avsnitt 6.

En beräkning omfattar genomgång av ett föreskrivet totalt antal lastcykler. Dessa är uppdelade på lika långa cykelperioder, vilka vardera omfattar ett föreskrivet antal cykler. Sista cykelperioden tilläts dock ha en från de andra avvikande längd. Under genomgången av lastcyklerna studeras parallellt två förlopp, vilka närmare beskrivs i det följande.

Under det ena förloppet beräknas i huvudsak tillstånden vid cykelgränserna. Det inleds med att en obelastad, icke tidigare till

flytning belastad punktgrupp, påtvingas en deformation, vars storlek bestäms av ett givet påkänningstillstånd φ. Den häremot svarande yttre lasten N_φ (eller momentet M_φ) i ett givet lastläge beräknas enligt metoden, som anges i PSS. Påkänningstillståndet väljs därvid så, att det inre tillståndet blir elasto-plastiskt. Det beräknade tillståndet redovisas. Den således bestämda lasten är övre gräns i de följande lastcyklerna. Motsvarande undre gräns bestäms som $\alpha \cdot N_\varphi$ (eller $\alpha \cdot M_\varphi$), där $\alpha < 0$ är ett givet tal. Om den undre gränsen härvid hamnar under gruppens undre brottgräns, justeras den till att sammanfalla med denna brottgräns i det etablerade initialtillståndet. Nästa fas i beräkningen är en upprepad variation av den yttre lasten mellan cykelgränserna föreskrivet antal gånger med avbrott efter varje cykelperiod för redovisning av det aktuella inre krafttillståndet vid övre cykelgräns. Sedan det totala antalet cykler genomlöpts, avlastas konstruktionen svarande mot en nedgång av den yttre lasten från dess övre cykelgräns till noll, varefter kvarvarande inre krafter redovisas.

Under det andra förloppet undersöks i huvudsak förändringarna av konstruktionens flyt- och brottgräns. Inledningsvis bestäms för den icke tidigare belastade konstruktionen det intervall, inom vilket den yttre lasten måste ligga för att tillståndet skall vara elasto-plastiskt. Detta intervalls undre gräns betecknas som punktgruppens flytgräns, då det motsvarar den last, som precis ger flytning vid gruppens mest ansträngda punkt. Intervallets övre gräns betecknas som punktgruppens brottgräns, då vid motsvarande last plasticeringen är total och därvid gruppens hela bärförmåga tagen i anspråk. De beräknade gränserna redovisas tillsammans med till dessa hörande inre krafttillstånd jämte förhållandet Γ mellan brott- och flytgränsen, vilket kan anses vara ett mått på konstruktionens seghet i den aktuella situationen. Efter varje genomgången cykelperiod beräknas och redovisas aktuella flytgräns- och brottgränstillstånd som i initialskedet.

En koppling äger rum mellan de två skisserade förloppen, därigenom, att motstående flytgräns beräknas och jämförs med närliggande cykelgräns omedelbart före varje riktningsändring av

den yttre lasten. Om därvid den successivt växande flytgränsen har passerat cykelgränsen med som följd, att den förestående halvcykeln leder till ett renodlat elastiskt och trivialt tillstånd, justeras den tillhörande cykelgränsen till ett sådant värde, att det inbördes förhållandet mellan flytgräns, cykelgräns och brottgräns blir det samma som i initialskedet.

Om ingen tillväxt i punkternas flytkraft har föreskrivits, d.v.s. om $k_1 = 0$, utgår det andra förloppet ur beräkningarna.

5.4 Övergång från ett elasto-plastiskt till ett elastiskt tillstånd

Som framgår av 5.3 är det i vissa situationer aktuellt med en övergång från ett elasto-plastiskt tillstånd till ett tillstånd, som kan betraktas som renodlat elastiskt. En sådan tillståndsändring kan beräknas på samma sätt som en variation mellan två elasto-plastiska tillstånd, men beräkningstid kan sparas genom ett mera direkt angrepp av problemet.

Låt i FIG. 32 N_a vara en yttre kraft svarande mot ett inre elasto-plastiskt tillstånd. Vi vill nu gå från tillståndet A till det helt elastiska tillståndet B i figuren. Tillskottsdeformationen har under denna övergång sin vridmedelpunkt (u, v) i den till elastisk deformation hörande vridmedelpunkten, vilken är känd. Av obekanta storheter återstår därför endast rotationsvinkeln τ, vilken i figuren har avsatts som abscissa.

En vertikal projektionsekvation ger enligt (36) för godtyckligt valt värde på den yttre vertialkraften N

$$\frac{N}{P_o} = \Sigma\, g\, \nu\, a$$

Då enligt förutsättningen övergången är elastisk, gäller för alla punkter $\nu = \theta_2$, vilket insatt i jämviktsekvationen ovan ger

$$\frac{N}{P_o} = \Sigma\, g\, \theta_2\, a \qquad (139)$$

Då sambandet mellan deformation och kraft är linjärt kan (139)

alternativt skrivas under formen

$$\frac{N}{P_o} = c_1 \cdot \tau + c_2 \tag{140}$$

där c_1 och c_2 är konstanter, vilka kan bestämmas på följande sätt.

Deriveras uttrycket (139) med avseende på τ, erhålles

$$\frac{1}{P_o} \cdot \frac{\partial N}{\partial \tau} = \Sigma\, g \left(\theta_2 \frac{\partial a}{\partial \tau} + a \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} \right) \tag{141}$$

Insättning av $\frac{\partial a}{\partial \tau}$ enligt (70) och $\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = 1$ i (141) ger sedan

$$\frac{1}{P_o} \cdot \frac{\partial N}{\partial \tau} = \Sigma\, g \left(- \theta_2 \cdot \frac{p}{\theta_2} + a \cdot 1 \right)$$

eller med (140) deriverad

$$c_1 = \Sigma\, g\, (a-p) \tag{142}$$

Detta samband, som är beroende enbart av punktgruppens geometri, kan vidareutvecklas med hjälp av de geometriska relationer, som framgår av FIG. 7, till

$$c_1 = \Sigma\, g\, (x - x_2 - u + x_2) = \Sigma\, g\, x - \Sigma\, g\, u =$$

$$= S \cdot \frac{\Sigma\, g\, x}{S} - u \cdot \Sigma\, g = (x_g - u) \cdot S \tag{143}$$

där $S = \Sigma\, g$ och x_g är abscissan till gruppens viktade tyngdpunkt.

För $\tau = 0$ fås ur (140)

$$c_2 = \frac{N_a}{P_o} \tag{144}$$

Insättning av (143) och (144) i (140) ger slutligen den mot vertikal projektion svarande jämviktsekvationen under formen

$$\frac{N}{P_o} = (x_g - u) \cdot S \cdot \tau + \frac{N_a}{P_o} \tag{145}$$

För fallet yttre belastning av moment M ger momentekvationen (40) det analoga sambandet

$$\frac{M}{P_o} = \Sigma\, g\, \nu\, c = \Sigma\, g\, \theta_2\, c \tag{146}$$

vilket kan skrivas under den alternativa formen

$$\frac{M}{P_o} = c_3 \cdot \tau + c_4 \tag{147}$$

där c_3 och c_4 är konstanter, som kan bestämmas på följande sätt.

Deriveras uttrycket (146) med avseende på τ, erhålles

$$\frac{1}{P_o} \cdot \frac{\partial M}{\partial \tau} = \Sigma\, g\left(\theta_2 \frac{\partial c}{\partial \tau} + c \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau}\right) \tag{148}$$

Insättning av (74) och $\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = 1$ i (148) ger

$$\frac{1}{P_o} \cdot \frac{\partial M}{\partial \tau} = \Sigma\, g\,(p^2 + q^2 - ap - bp + c)$$

vilket vid jämförelse med derivatan av sambandet (147) och efter insättning av (39) ger

$$c_3 = \Sigma\, g\,(p^2 + q^2 + a^2 + b^2 - 2ap - 2bq) =$$

$$= \Sigma\, g\,\left((p - a)^2 + (q - b)^2\right) =$$

$$= \Sigma\, g\, r^2$$

eller

$$c_3 = I \tag{149}$$

där I betecknar punktgruppens polära tröghetsmoment med avseende på den elastiska vridmedelpunkten (u, v), jfr FIG. 7.

För $\tau = 0$ erhålles ur (147)

$$c_4 = \frac{M_a}{P_o} \tag{150}$$

Insätts slutligen (149) och (150) i (147) fås

$$\frac{M}{P_o} = I \cdot \tau + \frac{M_a}{P_o} \tag{151}$$

Rotationsvinkeln τ vid övergång från det elasto-plastiska tillståndet A till det elastiska tillståndet B enligt FIG. 32 kan således, då den yttre lasten är en kraft N, enligt (145) beräknas ur sambandet

$$\tau = \frac{N_b - N_a}{P_o \cdot (x_g - u) \cdot S} \qquad (152)$$

och, då den yttre lasten är ett moment M enligt (151), ur sambandet

$$\tau = \frac{M_b - M_a}{I \cdot P_o} \qquad (153)$$

Speciellt då en punktgrupp relaxeras, är $N_b = 0$ eller $M_b = 0$, varför den till relaxation hörande tillskottsdeformationen bestäms ur respektive

$$\tau = - \frac{N_a}{P_o \cdot (x_g - u) \cdot S} \qquad (154)$$

eller

$$\tau = - \frac{M_a}{I \cdot P_o} \qquad (155)$$

Ett annat specialfall, som karakteriseras av en övergång från ett elasto-plastiskt till ett elastiskt tillstånd, utgör en bestämning av punktgruppens aktuella flytgräns. I detta fall är emellertid från början såväl deformationskomposanten τ som slutkraften N_b respektive M_b okända, varför en av dessa måste bestämmas på annat sätt.

Kriteriet för att flytgränsen uppnås ger primärt τ enligt följande. Vi bildar först hjälpfunktionen

$$F(\tau) = \min \left(\frac{\kappa}{R} - \text{abs}\ \theta_2 \right) \qquad (156)$$

För ett givet värde på τ kan argumentet till denna funktion beräknas för samtliga punkter i gruppen. Det minsta av dessa är funktionsvärdet F. Genom iteration kan ett sådant $\tau = \tau_1$ bestämmas, som ger $F(\tau_1) = 0$. Enligt villkoret (137) är det så bestämda τ-värdet identiskt med det, som svarar mot gruppens flytgräns, vilken sedan kan beräknas genom insättning av τ_1 i (145) respektive (151).

5.5 Datamaskinberäknade illustrationsexempel

Exempel 20. - I detta exempel studeras den punktgrupp, vars geometri visas i FIG. 9. Den yttre lasten är ett växlande moment,

vilket efter första pålastning genomgår 20 lastcykler, varefter konstruktionen avlastas. För beräkning av strain hardening effekten κ har antagits att aktuell flytkraft växer linjärt med antalet flytningar σ enligt sambandet $\kappa = 1 + 0.008 \cdot \sigma$. Initialskedet bestäms av påkänningstillståndet $\gamma = 0.4$ och symmetriskt belägna cykelgränser.

Beräkningsresultaten redovisas i FIG. 33. I den övre delfiguren visas hur gruppens brottgräns växer och dess flytgräns varierar till följd av momentväxlingarna. Cykelgränserna har markerats med streckprickade linjer. Som framgår av dessa, var växlingarna från början symmetriska. Mellan cyklerna 7 och 8 inträffar emellertid den situationen, att den successivt minskande undre flytgränsen (ej visad i figuren) passerar undre cykelgränsen, varför denna har flyttats neråt för de följande lastväxlingarna. Detta upprepas mellan cyklerna 15 och 16. För den övre cykelgränsen har liknande justeringar vidtagits första gången under cykel 11 och andra gången under cykel 19. Här kan direkt i figuren ses, hur den växande övre flytgränsen vill passera cykelgränsen.

Den undre delfiguren visar variationen i de individuella punktkrafterna vid övre cykelgränserna under belastningsförloppet. Kraften vid den mest ansträngda punkten växer linjärt i överensstämmelse med den antagna strain hardening kurvan. Kraften vid de fyra centralt belägna punkterna visar en tillhörande successiv minskning omväxlande med plötsliga stegringar varje gång den övre cykelgränsen justeras uppåt. I diagrammet kan också storleken av residualkrafterna efter avlastning avläsas.

Betraktar man kurvan för övre flytgränsen, kan en sänkning av denna iakttas efter första lastrevertering, svarande mot Bauschingereffekten. Fenomenet återkommer varje gång undre cykelgränsen flyttas neråt.

Exempel 21. - Den i FIG. 34 visade dubbelsymmetriska punktgruppen belastas med växlande last med läge enligt figuren. Punkternas strain hardening egenskaper karakteriseras av att 100 flytningar medför en ökning av den relativa flytkraften till $\kappa = 1.2$ och av att $\zeta_o = 0.01$. Detta motsvarar värdena $k_1 = 0.15314$ och

k_2 = 0.06530 i sambandet (128). Konstruktionen belastas först till sin ursprungliga brottgräns, d.v.s. till påkänningstillståndet $\psi = 0$. Därefter utsätts den för tio symmetriska lastcykler, varefter den avlastas.

I det övre diagrammet visas, vilken effekt detta belastningsförlopp har på den övre brottgränsen och på den övre flytgränsen. I det undre diagrammet redovisas motsvarande punktkraftvariation vid den övre cykelgränsen. I detta diagram har dessutom markerats de residualkrafter, som uppkommer vid avlastning efter genomgång av det antal cykler, som abscissan anger. Det framgår, att residualkrafterna successivt minskar i takt med att övre flytgränsen växer, vilket innebär, att konstruktionen är på väg mot ett renodlat elastiskt beteende, vid vilket residualkrafterna blir noll.

I FIG. 35 detaljbelyses det inre krafttillståndet för varje gång den övre flytgränsen passeras. Efter cykel nr 0, d.v.s. under första pålastningen, karakteriseras konstruktionens deformation av rotation kring en för alla punkter gemensam vridmedelpunkt. Under de följande cyklerna beskriver momentancentrum för krafterna P_3 och P_4 en mindre förskjutning, medan momentancentrum för krafterna P_1 och P_2 däremot uppvisar en betydande förflyttning. Denna sker först åt vänster med växande "hastighet" för att vid ungefär cykel 4 försvinna långt ut till vänster, varefter momentancentrum med avtagande "hastighet" kommer in från höger. Efter cykel 10 karakteriseras förskjutningen av en återgång mot en gemensam vridmedelpunkt för alla fyra punktkrafterna.

I samband med den första lastväxlingen, under vilken Bauschingereffekten inträffar, sker en riktningsomkastning och en minskning av krafterna P_1 och P_2. Kraftminskningen fortsätter under de följande cyklerna och leder till att krafterna helt försvinner samtidigt med att momentancentrum försvinner ut till vänster. Då det återigen kommer in från höger, är kraftriktningen ånyo omkastad och punktkrafterna växer nu under de följande cyklerna.

Exempel 22. - I detta exempel studeras samma punktgrupp med identiskt lastläge som i exempel 21 (jfr FIG. 34). Punkternas strain

hardening egenskaper karakteriseras nu av att 100 flytningar medför en höjning av den relativa flytkraften till $\kappa = 1.5$ och av att $\zeta_o = 0.02$. Motsvarande parametrar i sambandet (128) blir därvid $k_1 = 0.13027$ och $k_2 = 0.15353$. Konstruktionen belastas först till sin brottgräns varefter den utsätts för 20, till en början symmetriska, lastcykler för att sedan avlastas.

Förloppet illustreras av det övre diagrammet i FIG. 36, vilket även visar den gradvisa förändringen av konstruktionens övre brott- och flytgräns. Det undre diagrammet i FIG. 36 återger motsvarande punktkraftvariation.

Den beskrivna proceduren har upprepats, men denna gång med 100 lastcykler före avlastningen, och med redovisning av tillstånden efter var femte cykel. Resultatet av denna beräkning återges i FIG. 37, vilken i sin uppläggning är analog med FIG. 36. Någon detaljskärpa beträffande förhållandena vid den upprepade Baushingereffekten fås givetvis icke med denna glesa redovisning. Däremot framträder nu andra fenomen tydligt. För det första kan konstateras, att för en punktkonstruktion med strain hardening egenskaper, vilken utsätts för växlande last med gränser i det elasto-plastiska området, vill den zon, som plasticeras, dra åt sig en ständigt större andel av lasten från den elastiska zonen. För det andra framgår, att vid fasthållna cykelgränser uppnås ett renodlat elastiskt beteende för gruppen efter ett visst antal upprepningar av lastcykeln. Slutligen visar figurerna, att en upprepning av lastcykeln successivt minskar konstruktionens seghet på grund av en snabbare tillväxtstakt för flytgränsen än för brottgränsen.

Exempel 23. - Vi studerar i detta exempel en punktgrupp med utformning och belastning enligt FIG. 38. Exemplet vill belysa betydelsen av punktvikternas fördelning inom gruppen. I figurens tabell anges viktfördelningen i tre undersökta fall. Totalsumman av gruppens punktvikter är den samma i de tre fallen.

Fall a karakteriseras av lika vikt för alla punkter. Genomgång av 20 symmetriska lastcykler med cykelgränser bestämda av den initiella brottgränsen ger den i FIG. 39 visade variationen av gruppens brott- och flytgräns. Härvid har förutsatts en strain harde-

ning effekt, vilken beskrivs genom det linjära sambandet $\kappa = 1 + 0.008 \cdot \sigma$. Diagrammet uppvisar en kraftig inverkan av Bauschingereffekten efter första lastväxling. Kraftbilden till vänster i figuren är den, som fås vid relaxation omedelbart efter första pålastning och den till höger motsvarande kraftbild vid relaxation efter 20 lastcykler. Krafterna har därvid, för tydlighets skull, i den senare kraftbilden ritats i en tio gånger större skala. Som framgår, har relaxationskrafterna minskat till små värden genom lastväxlingarna, vilket stämmer med att flytgränsen efter 20 lastcykler nu ligger mycket nära cykelgränsen.

De två följande fallen förutsätter samma strain hardening egenskaper för konstruktionen som i fall a.

Viktfördelningen i fall b karakteriseras av proportionalitet mellan en punkts vikt och dess avstånd från x-axeln. Förändringar i konstruktionens egenskaper under 20 lastväxlingar visas i FIG. 40. Lastcyklerna är från början symmetriska, men på grund av att Bauschingereffekten här är mindre utpräglad än vad, som var fallet vid likformigt fördelade punktvikter, och kurvan för flytgränsvariationen därför ligger närmare cykelgränsen, hinner tre cykelgränsjusteringar inträffa under belastningsförloppet. Diagrammet visar motsvarande tre karakteristiska Bauschingersprång med för varje upprepning minskad storlek. Kraftbilden till vänster i figuren återger residualkrafttillståndet vid avlastning omedelbart efter första pålastning och kraftbilden till höger motsvarande residualkrafttillstånd vid avlastning efter genomgång av 20 cykler. De senare krafterna återges därvid i en tio gånger större skala än de i kraftbilden till vänster.

Det tredje studerade alternativet, fall c, gäller en punktgrupp med en viktfördelning, som karakteriseras av omvänd proportionalitet mellan en punkts vikt och dess avstånd från x-axeln. Här sker lastväxlingen mellan symmetriskt belägna cykelgränser under samtliga 20 lastcykler enligt FIG. 41. Mest iögonfallande i diagrammet är det stora Bauschingersprånget efter första lastväxling. Det medför en sänkning av flytgränsen till nära noll, vilket resulterar i en extrem seghet hos konstruktionen under det efterföljande belastningsförloppet. Relaxationskrafttillståndet

vid avlastning omedelbart efter första pålastning, vilket framgår av den vänstra kraftbilden, uppvisar i förhållande till fallen a och b mycket stora punktkrafter. Dessa reduceras genom de 20 lastväxlingarna till vad som visas i den högra kraftbilden. Här har de två kraftbilderna ritats i samma skala. Även dessa residualkrafter är betydande jämförda med motsvarande krafter i fallen a och b, vilket är en effekt av den lågt liggande flytgränsen.

Av de tre studerade fallen framgår, att ett nära samband råder mellan Bauschingersprångets storlek och residualkrafternas storlek omedelbart före språnget. Ett stort Bauschingersprång ger stora residualkrafter och vice versa. Detta är naturligt, eftersom det inbyggda krafttillståndet betingar Bauschingereffekten. Den genomförda studien visar vidare, att stor seghet för en punktkonstruktion kan uppnås genom koncentration av punktvikterna kring dess tyngdpunkt. Den ökade segheten vinns emellertid på bekostnad av en reduktion av bärförmågan, jämfört med bärförmågan för en konstruktion med centrifugal viktfördelning, vilken å andra sidan har liten seghet.

Av beräkningarna till detta exempel - vilket behandlar en konstruktion med ett så stort antal punkter att fenomenet framträder - framgår slutligen att flytzonernas utbredning inom en punktkonstruktion med strain hardening egenskaper successivt minskas under inverkan av upprepade lastcykler med fasta cykelgränser i det elasto-plastiska området.

6. DATAMASKINPROGRAMMET "POINT SET STRUCTURE"

6.1 Programbeskrivning

Jämviktsläget för en punktkonstruktion efter övergång från ett tillstånd till ett annat är entydigt bestämt av en extremvärdespunkt till systemets inre arbete, då detta betraktas som en funktion av de tre parametrarna u, v och τ. Hjälpstorheter vid bestämning av ett sådant extremvärde utgör funktionens första och andra derivator.

Att ur dessa villkor analysera tillståndsvariationen via handräkning är praktiskt omöjligt utom i mycket speciella fall, varför det är naturligt att upprätta ett datamaskinprogram med vilket det omfattande beräkningsarbetet kan styras. Ett sådant program ges i 6.2 med beteckningen "POINT SET STRUCTURE GENERAL PROGRAM". Programmet har skrivits i det problemorienterade språket ALGOL 60 med notation i enlighet med de konventioner, som tillämpas vid maskinsystemet UNIVAC 1108. Programmets struktur illustreras i FIG. 42 och skall genomgås i det följande.

Inledningsvis belyses översiktligt programmets beräkningsmöjligheter. Tre alternativa beräkningsvägar är förutsedda.

Av dessa ger alternativ 1 i stort samma möjligheter, som det program, som publicerats i PSS. Uppläggningen är emellertid här mera förfinad därigenom, att en beräkning nu kan genomföras med den i kapitel 4 introducerade approximationen av en godtyckligt vald arbetslinje för konstruktionens enskilda punkter. I den tidigare versionen kunde endast idealelasto-plastiska punktegenskaper beaktas. Konstruktionens första pålastning fram till brott kan följas i maximalt 20 steg. Denna gräns är godtyckligt vald och kan vid behov enkelt justeras uppåt. Efter varje steg ges som resultat beskrivning av jämviktstillståndet samt av det residualtillstånd, som svarar mot avlastning från den aktuella lastnivån.

Med beräkningsalternativ 2 kan en lastcykel detaljstuderas. Som resultat ges här tillståndet efter första pålastning till föreskrivet påkänningstillstånd φ samt den inre kraftbildens variation

under en eller flera därpå följande lastcykler. Cykelgränserna bestäms därvid av N_{max} svarande mot φ och $N_{min} = \alpha \cdot N_{max}$ där α är en vald koefficient. Väljs α - avsiktligt eller oavsiktligt - så att N_{min} blir mindre än konstruktionens negativa brottgräns, läggs undre cykelgränsen i stället vid denna. Under en cykel varieras den yttre lasten med ekvidistanta steg mellan cykelgränserna och systemets tillstånd redovisas efter varje laständring. Antalet steg kan härvid väljas godtyckligt (antalet har dock i föreliggande programversion maximerats till 20). Den generaliserade arbetslinjen kan tillämpas även i detta beräkningsalternativ.

Programmet möjliggör en variant, betecknad alternativ 20. Detta innebär samma beräkningsgång som alternativ 2 men förutsätter, att konstruktionens beskrivande data redan finns tillgängliga i maskinens minne. Det tillämpas, då en alternativ 2-beräkning skall utföras i direkt följd till en alternativ 1-beräkning av samma konstruktion.

Beräkningsalternativ 3 har tillkommit för studium av inverkan av upprepad last med hänsyn tagen till strain hardening effekt. Även här inleds behandlingen med pålastning till ett givet påkänningstillstånd φ, varefter övre och undre cykelgräns bestäms som vid alternativ 2. Den yttre lasten reverteras därefter mellan cykelgränserna ett föreskrivet antal gånger. Antalet indelas i perioder med ett valt antal cykler i varje period. Efter varje avslutad period utskrivs dels det rådande krafttillståndet inom konstruktionen och dels aktuella värden för dennas övre flytgräns och brottgräns jämte tillhörande interna kraftbilder.

Med hänsyn till de enskilda punkternas kraftdeformationsegenskaper är beräkningsalternativet begränsat till idealelasto-plastisk arbetslinje, dikterat av att en från början krökt arbetslinje raknar vid lastupprepning. I stället kan effekten av strain hardening beaktas genom att flytkraften vid en punkt har gjorts beroende av antalet flyttillfällen vid punkten enligt ett funktionellt samband, som närmare diskuterats i kapitel 5. Detta kan resultera i att konstruktionens flytgräns successivt höjs. Skulle det därvid inträffa, att flytgränsen kommer över cykelgränsen blir det fortsatta verkningssättet renodlat elastiskt och därmed trivialt

för de återstående cyklerna. Programmet justerar därför cykelgränsen i en sådan situation så, att omedelbart efter justeringen samma relationer råder mellan flytgräns, cykelgräns och brottgräns som vid den första lastreverteringen.

Programmet möjliggör en variant, benämnd alternativ 30. Denna innehåller samma beräkningsgång som alternativ 3, men förutsätter att konstruktionens beskrivande data redan finns lagrade i minnet. Den tillämpas då en alternativ 3-beräkning skall utföras i omedelbar följd efter en beräkning av samma konstruktion enligt något av beräkningsalternativen 1, 2 eller 20.

I FIG. 42 anges med svarta punkter, vilka av nedan beskrivna procedurer, som anropas vid de olika beräkningsalternativen.

6.1.1 Till huvudprogrammet hörande procedure-deklarationer

Före huvudprogrammet ligger ett antal procedure-deklarationer, vilka kommenteras i det följande. Sifferhänvisningen avser därvid radnummer i den i 6.2 återgivna programlistan, jfr även den generella programstrukturen i FIG. 42.

DATAIN (16-49)

Denna procedure omfattar inläsning av datakort. Följande indatakort kan därvid förekomma.

IDENT-kort. Innehåller i allmänhet ett heltal mellan 0 och 9999 för identifiering av beräkningen. Ett negativt tal i detta kort medför uthopp från programmet.

ALT-kort. Innehåller ett heltal, som anger önskat beräkningsalternativ. Heltalet får vara 1, 2, 3, 20 eller 30.

NOP-kort. Innehåller ett positivt heltal, som maximalt är 20. Talet anger antalet punkter i konstruktionen.

POINT-kort. Ett eller flera kort, som i löpande följd innehåller för varje punkt gällande punktnummer, abscissa, ordinata och vikt.

Punktnumren är härvid heltal, de övriga reella tal. Talen åtskiljs av en eller flera blanka.

PSI-kort. Detta innehåller antingen vinkeln ψ mellan x-axelns positiva riktning och verkningslinjen för den yttre kraften ($0^\circ \leq \psi < 180^\circ$) eller, då den yttre lasten är ett moment, värdet $\psi = -1$.

XNEYNE-kort. Innehåller koordinaterna till en godtyckligt vald punkt på den yttre kraftens verkningslinje. Detta kort utgår, då $\psi = -1$.

NYLEV-kort. Innehåller ett heltal mellan 0 och 20, vilket anger antalet flytnivåer, exklusive den högsta.

STST-kort. Ett eller flera kort, som innehåller en beskrivning av den generaliserade arbetslinjen. För varje flytnivå, exklusive den högsta anges nivåns relativa höjd och längd. Höjden ges därvid i relation till den högsta flytnivån och längden i relation till gränsen mot den plastiska zonen. Nivåerna måste vara sorterade efter växande höjd. Talen stansas i löpande följd, åtskilda av en eller flera blanka. Dessa kort utgår, då NYLEV = 0.

NPHI-kort. Innehåller ett heltal mellan 1 och 20, vilket anger antalet påkänningstillstånd φ, som önskas studerade vid beräkningsalternativ 1.

NFI-kort. Ett eller flera kort innehållande de φ-värden, som önskas undersökta vid beräkningsalternativ 1. Talen stansas i löpande följd, åtskilda av en eller flera blanka.

ALT 2-kort. Detta kort omfattar påkänningstillståndet φ, faktorn α för beräkning av undre cykelgränsen, antalet steg i en halvcykel NOSTIC och antalet cykler NOCY.

STRAINHARDENING-kort. Innehåller tre parametrar, vilka bestämmer den successiva tillväxten av flytkraft vid en punkt. Det reella talet SLOPE anger initialvärdet för tangentlutningen hos tillväxtfunktionen och svarar således mot ζ_0 enligt (131). Sätts

SLOPE = .0, erhålles ingen strain hardening effekt. NY och CAPPA är ett set kopplade värden, hörande till tillväxtfunktionen κ. De har sin motsvarighet i σ_o och κ_o i uttrycket (132). Heltalet NY är således ett antal flyttillfällen och det reella talet CAPPA är mot NY svarande relativa flytkraft.

ALT 3-kort. Kortet omfattar påkänningstillståndet φ för bestämning av övre cykelgränsen, faktorn α för bestämning av undre cykelgränsen, antalet cykler i en period CNIPER och totala antalet cykler NOCY.

Korten används i följande kombinationer

Alt. 1 :	IDENT	
	ALT	
	NOP	
	POINT	ett eller flera
	PSI	
	XNEYNE	utelämnas då $\psi = -1$
	NYLEV	
	STST	ett eller flera, utelämnas då NYLEV = 0
	NPHI	
	NFI	ett eller flera
Alt. 2 :	IDENT	
	ALT	
	NOP	
	POINT	ett eller flera
	PSI	
	XNEYNE	utelämnas då $\psi = -1$
	NYLEV	
	STST	ett eller flera, utelämnas då NYLEV = 0
	ALT 2	
Alt. 20:	IDENT	
	ALT	
	ALT 2	
Alt. 3 :	IDENT	
	ALT	

NOP
POINT ett eller flera
PSI
XNEYNE utelämnas då $\psi = -1$
STRAINHARDENING
ALT 3

Alt. 30: IDENT
ALT
STRAINHARDENING
ALT 3

Ett run kan omfatta en serie beräkningar med som första beräkning den till beräkningsalternativ 1, 2 eller 3 hörande. Det sista datakortet inom ett run måste vara ett IDENT-kort, innehållande ett negativt heltal.

RUBRIC (51-58)

Anrop av denna procedure medför framflyttning av radskrivarens papper till ny sida, utskrift av rubrik samt paginering. Den betjänar samtliga PRINTprocedurer.

TEXT (60-66)

Proceduren betjänar flera PRINTprocedurer, jfr FIG. 42. Den ger utskrift av text, som är gemensam för flera resultatuppställningar.

TABLE (68-76)

Proceduren betjänar flera PRINTprocedurer, jfr FIG. 42. Den ger utskrift av tabell, som är likartad i flera resultatuppställningar.

PRINT 1 (78-130)

Anrop av denna procedure ger utskrift av ingångsdata (datakvitto) i en form, som är anpassad till aktuellt beräkningsalternativ. Exempel på effekten av denna procedure och flertalet av de efterföljande PRINTprocedurerna visas i 6.3, vilket avsnitt återger kompletta beräkningsresultat från tre beräkningar enligt alternativen 1, 20 och 30.

PRINT 2. (132-150)

Denna procedure ger utskrift av tillståndet efter pålastning för varje φ-värde i en beräkning enligt alternativ 1 och efter första pålastning vid en beräkning enligt alternativ 2.

PRINT 3 (152-164)

Proceduren ger utskrift av tillståndet efter ett laststeg i en cykelberäkning enligt alternativ 2.

PRINT 4 (166-172)

Denna procedure anropas efter relaxation för redovisning av det inre residualkrafttillståndet. Den används i beräkningsalternativen 1 och 3.

PRINT 5 (174-179)

Proceduren utskriver vid anrop meddelande om att beräkning av återstående halvcykel slopats på grund av symmetri. Den används i beräkningsalternativ 2.

PRINT 6 (181-185)

Då den yttre kraften går genom konstruktionens tyngdpunkt, blir deformationen en ren translation. Situationen är ointressant, varför aktuell beräkning annulleras. Anrop av PRINT 6 meddelar ett sådant förhållande.

PRINT 7 (187-204)

Proceduren anropas av YIELDFUNC och är således aktuell endast vid beräkningsalternativ 3. Den förmedlar utskrift av det funktionella sambandet mellan antalet flytningar vid en punkt och punktens häremot svarande relativa flytkraft. Sambandet belyses ytterligare genom tryckning av en tabell. Då strainhardening effekten icke beaktas meddelas detta i stället.

PRINT 8 (206-222)

Anrop av denna procedure ger utskrift av konstruktionens tillstånd vid såväl dess övre flytgräns som dess övre brottgräns. Utskriften ges efter varje avslutad cykelperiod i beräkningsalternativ 3.

PRINT 9. (224-240)

Anrop av denna procedure ger utskrift av det inre krafttillståndet vid övre cykelgränsen efter en fullbordad cykelperiod i beräkningsalternativ 3. Med NOY (= number of yield) anges antalet flyttillfällen vid en punkt och med KAPPA värdet på punktens aktuella relativa flytkraft.

TRANSFORM (242-250)

Proceduren betjänar vissa PRINT-procedurer genom förberedande arbete i form av koordinattransformation från internt till externt system jämte beräkning av punktkrafternas storlek.

YIELDPATTERN (252-270)

Denna procedure har två funktioner. Den ena är att komplettera inlästa flytnivåer med en lägsta sådan $\eta = 0$ och en högsta $\eta = 1$, samt att på basis av till flytnivåerna hörande relativa tjöningar först beräkna de motsvarande β_i-värdena och sedan ω_i-värdena enligt uttryck (101). Procedurens andra funktion är att beräkna de dimensionslösa radierna ς' och ς'' i gränscirklarna mellan de uppkomna elastiska banden och flytbanden, svarande mot det aktuella påkänningstillståndet φ enligt sambanden (102) och (103). Den förstnämnda funktionen behöver aktiveras endast en gång vid varje beräkningstillfälle, den andra måste aktiveras för varje nytt värde på φ.

YIELDFUNC (272-292)

Det antagna sambandet mellan antalet flyttillfällen vid en punkt och punktens aktuella flytkraft med beaktande av strain hardening effekten ges av (128). För beräkning av i detta samband ingående koefficienter k_1 och k_2 ur de valda parametrarna ζ_o, σ_o och κ_o har tidigare uppställts ekvationssystemet (131) och (132). Ekvation (132) löses med avseende på k_2 enligt Newton-Raphsons metod av proceduren YIELDFUNC. Logaritmeras sambandet (132) erhålles

$$\ln \kappa_o = k_2 \cdot \ln \left(1 + \frac{\zeta_o \cdot \sigma_o}{k_2}\right) \qquad (157)$$

Med beteckningen

$$K = \frac{\zeta_o \cdot \sigma_o}{k_2}$$

introduceras den på (157) baserade funktionen

$$F = k_2 \cdot \ln (1 + K) - \ln \kappa_o$$

Deriveras F med avseende på k_2, erhålles

$$\frac{\partial F}{\partial k_2} = \ln (1 + K) - \frac{K}{1+K}$$

Det värde på k_2, vilket ger F = 0, kan sedan beräknas iterativt ur rekurssionsformeln

$$k_{2,i+1} = \frac{\ln \kappa_o - k_{2,i} \cdot \frac{K}{1+K}}{\ln (1+K) - \frac{K}{1+K}} \qquad (158)$$

varefter k_1 ges ur (131).

STRAINHARD (294-306)

Vid anrop av denna procedure genomgås konstruktionen punkt för punkt. Om därvid enhetskraften vid en punkt är lika med för tillfället gällande flytkraft vid punkten, ökas räkneverket NOY för antalet flyttillfällen med 1 och mot det uppräknade värdet svarande ny flytkraft KAPPA beräknas ur (128).

REX (P, Q) (308-321)

REX antar vid anrop ett värde, som är lika med det största avståndet från punkten (P, Q) till någon punkt inom punktgruppen. Som biresultat erhålles med referens till punkten (P, Q) samtliga radier, samtliga radiers kvadrat och samtliga radiers projektioner på koordinataxlarna.

MAXANG (323-328)

MAXANG antar vid anrop ett värde, som är lika med den största vinkelrotation, som uppträder inom punktgruppen i det aktuella ögonblicket.

FIRSTSTEP (E) (330-408)

Denna procedure bestämmer jämviktstillståndet för en icke tidigare belastad punktkonstruktion efter deformation, svarande mot påkänningstillståndet φ (= E).

Proceduren inleds med följande fyra interna procedurer.
MAXGRAD. Denna procedure utväljer av två gradientkomposanter den, som har det största absolutvärdet. Vid anrop antar MAXGRAD värdet av index till denna komposant.
STRIP (A). Proceduren ger, för punkt med index A, numret på det band i flytmönstret, inom vilket punkten ligger.
REALSTRIP. Denna procedure omräknar det genom proceduren YIELD-PATTERN fastlagda dimensionslösa flytmönstret till absolutvärden, svarande mot aktuellt värde på den största radien R_M inom gruppen.
GRADIENT. Proceduren beräknar värdet av det inre arbetets två gradientkomposanter enligt uttrycken (111).

Procedurekroppen i FIRSTSTEP har i huvuddrag följande struktur.

Med start i en av huvudprogrammet bestämd punkt (u, v) beräknas gradientvektorn till det inre arbetet. Är denna vektors euklidiska norm mindre än ett givet litet tal ε, anses jämviktsläget uppnått. Om så icke är fallet, ges u eller v ett tillskott H i den riktning, vars gradientkomposant har det största absolutvärdet. Gradientkomposantens tecken avgör, om tillskottet skall vara positivt eller negativt. Koordinaten för den för tillfället aktuella operationsriktningen ges index K.

Efter ett steg i K-riktningen beräknas gradientvektorn i stegets andra ändpunkt och den nya K-komposanten jämförs med den först beräknade. Har dessa samma tecken, upprepas det beskrivna förloppet med den nya punkten som startpunkt. Har komposanterna däremot motsatta tecken interpoleras rätlinjigt till det läge u eller v, som ger K-komposanten värdet noll, och den således bestämda punkten väljs som utgångspunkt för omstart med den till hälften reducerade steglängden.

Efter varje tio steg multipliceras steglängden med en störfaktor 0.95 för att motverka den olägenhet, som kan uppkomma, om med oförändrad steglängd K's variation blir periodisk.

Sedan jämviktsläget fastställts, beräknas varje punkts rotationsdeformation med hänsyn tagen till den generaliserade arbetslinje,

som gäller för aktuell konstruktion. Slutligen beräknas mot jämviktsläget svarande storlek på den yttre kraften eller det yttre momentet.

STORE (410-418)

Proceduren mellanlagrar, efter en ändring av den yttre lasten, av ändringen orsakade rotationsdeformationer θ_2 samt momentancentra C, hörande till konstruktionen enskilda punkter. Dessutom lagras den vid iterationen funna deformationsparametern (u, v, τ).

UNSTORE (420-428)

Proceduren flyttar, före en ändring av den yttre lasten, de av STORE lagrade matriserna θ_2 och C till initialmatriserna θ_1 respektive A. Koordinaterna till startpunkten för den förestående iterationen tilldelas därjämte värdena (u, v, τ).

MOVE (430-500)

Denna procedure bestämmer jämviktstillståndet efter en variation av den yttre lastens storlek.

Proceduren inleds med två interna procedurer, vilka behandlas i det följande.

MAXGRAD. Denna procedure utväljer av tre gradientkomposanter den, som har det största absolutvärdet. Vid anrop antar MAXGRAD värdet av index till denna komposant.

GRADIENT. Proceduren beräknar för givna värden av deformationsparametrarna (u, v, τ) det inre arbetets tre gradientkomposanter enligt uttrycken (53) med beaktande av dels den teckenvariation för gradientkomposanterna, som belyses i kapitel 3, dels de villkor, som alternativt uttrycks genom relationerna (118) vid tillämpning av generaliserad arbetslinje, eller genom relationerna (137), då strain hardening effekten beaktas, samt slutligen av om kraftvariationen vid en punkt följer en av- eller pålastningskurva, vilket avgörs av kriteriet (125). Proceduren MOVE är så konstruerad, att den alltid uppsöker en minimipunkt. Som framgår av kapitel 3 måste man emellertid i vissa perioder av en cykel alternativt kunna fastlägga en maximipunkt, varför gradientkomposanternas tecken måste kunna omkastas. Denna möjlighet till-

godoses av styrvariabeln χ, vilken efter gällande situation tilldelas värdet +1 eller -1. χ har således en dubbel funktion, eftersom den är identisk med det χ, som introducerats vid uppställandet av relationen (125).

Procedurekroppen i MOVE genomlöper följande beräkningsschema. Deformationsparametrarna (u, v, τ) har redan före proceduranropet tilldelats initialvärden av huvudprogrammet. Med dessa som startvärden inleds iterationen genom anrop av GRADIENT, varvid gradientvektorn bildas. Är dennas euklidiska norm mindre än ε, anses jämvikt råda. Är så icke fallet, ges u, v eller τ ett tillskott H i den riktning, vars gradientkomposant har det största absolutvärdet. Om steget därvid skall vara positivt eller negativt, avgörs av komposantens tecken. Komposanten för aktuell operationsriktning har index K.

Efter steget i K-riktningen, beräknas gradienten i stegets andra ändpunkt och komposanten i K-riktningen jämförs med motsvarande i stegets början. Har dessa samma tecken upprepas det beskrivna förfarandet med den nya punkten som startpunkt. Har komposanterna däremot motsatta tecken, interpoleras rätlinjigt fram till det läge u, v eller τ, som ger K-komposanten värdet noll, och den således bestämda punkten tas som utgångspunkt för omstart med den till hälften reducerade steglängden.

Av deformationsparametrarna är u och v längder, medan τ är en vinkeländring, innebärande att storleksordningen är olika för de tre koordinatriktningarna. Med anledning härav tillämpas två olika värden på H, ett, som är gemensamt för variation i u eller v, och ett annat för variation av τ.

Ett överlappande förlopp har inlagts i den beskrivna iterationen för att övervaka K-riktningens variation. Efter varje tio steg kontrolleras således, om K har ändrats inom denna period. Är så ej fallet, d.v.s. om alla tio stegen har tagits i samma riktning, ökas steglängden med faktorn 1.25.

Om den yttre lastens storlek skulle överstiga det för tillfället gällande värdet på konstruktionens brottgräns, kan ett jämvikts-

läge ej etableras. Iterationen i MOVE blir då divergent med oändlig beräkningstid till följd. För att bemästra en sådan situation, bevakas ständigt storleken på vinkeländringen τ. Om därvid denna har ökat till ett värde, som överstiger gränsvinkeländringen LIMANG, avbryts iterationen och kontrollen återlämnas till det anropande programmet, vilket får vidtaga erforderliga åtgärder.

YIELDLIM (502-546)

Med denna procedure beräknas konstruktionens aktuella flytgräns. Den föregås av den internt deklarerade proceduren MIN, vilken vid anrop antar värdet $F(\tau)$ enligt uttrycket (156).

Proceduren bestämmer iterativt det mot flytgränsen svarande värdet på τ, d.v.s. det värde, som ger $F(\tau) = 0$. Genom stegning från ett beräknat utgångsvärde, ändras τ successivt tills ett tillstånd inträffar, som karakteriseras av att $F(\tau)$ har motsatt tecken vid stegets två ändpunkter. Avser de två F-värdena härvid en och samma konstruktionspunkt, väljs det τ, som vid rätlinjig interpolation ger $F(\tau) = 0$, som startvärde för fortsatt iteration med till en fjärdedel reducerad steglängd.

Avser F-värdena å andra sidan olika punkter, halveras steglängden och iterationsprocessen fortlöper.

Sedan τ bestämts, ges sökt flytgräns ur (145) respektive (151).

FAILURE (548-598)

Denna procedure beräknar konstruktionens brottgräns enligt följande.
Problemet har fyra obekanta, nämligen de tre deformationsparametrarna u, v och τ jämte brottgränsen N_o. Problemet löses genom att efter ett visst system tilldela N (eller M) provvärden och sedan för vart och ett av dessa utvärdera jämviktstillståndet med hjälp av proceduren MOVE. Kriterium för att det provade värdet för N (eller M) sammanfaller med brottgränsen är att ett jämviktsläge kan etableras och att i detta summan av punktkrafternas absolutvärde är lika med det maximala värdet, som denna summa kan anta, $\Sigma g \kappa$. Proceduren inleds med följande två internt deklarerade procedurer.

ABSUM antar vid anrop värdet av i aktuell situation rådande absolutkraftsumma.
EXHAU antar värdet "sann", då ABSUM (med viss tolerans) är lika med maximalsumman $\Sigma\, g\, \kappa$. I motsatt fall antar EXHAU värdet "falsk".

Procedurekroppen arbetar enligt följande strategi, vilket illustreras i FIG. 43. Med utelämnande av divisorn P_o, visar denna figurs streckade kurva sambandet mellan den yttre kraften och summan av punktkrafternas absolutvärden. Två punkter på denna kurva, markerade 1 och 2, antas bestämda. SF är $\Sigma\, g\, \kappa$, varför kurvans skärning med denna linje bestämmer brottgränsen N_o.

En ny punkt på kurvan fixeras enligt följande. Genom punkterna 1 och 2 läggs en andragradsparabel med linjen ΣP = SF som axel. Avståndet t, mätt i N-axelns riktning mellan punkt 2 och parabelns vertex beräknas. Därefter ökas N2 med t/3 till värdet N, MOVE anropas och mot N svarande ordinata beräknas. Förfarandet upprepas tills EXHAU blir "sann", vilket medför uthopp.

Vid övertramp av N_o, blir MOVE divergent resulterande i uthopp från denna procedure, då τ har växt till ett orimligt värde. I en sådan situation prövas omräkning med ett nytt värde på den yttre kraften, svarande mot undre tredjedelspunkten i intervallet N2 - N. Misslyckas även denna ansats, fortsätts tredelningen, tills N blir mindre än N_o, varefter övergås till det först skisserade förloppet.

6.1.2 Huvudprogrammet

Huvudprogrammet, vilket börjar vid läget BEGINPROGRAM, är disponerat i fyra avsnitt. Det första av dessa omfattar en serie förberedande åtgärder, gemensamma för samtliga beräkningsalternativ. Det andra, tredje och fjärde avsnitten behandlar därpå var sitt beräkningsalternativ.

Förberedande åtgärder

Efter inläsning av data, trycks datakvitton som kontroll av att beräkningarna genomförs med rätta ingångsvärden.

För att undvika olägenheter i samband med den extrema deformation, som uppkommer, då en av gruppens punkter ligger alldeles intill vridcentrum samtidigt som $\varphi = 0$, utesluts detta fall ur beräkningarna genom ersättning av $\varphi = 0$ med det mindre känsliga värdet φ = ZERO = 0.001. I normala fall saknar denna approximation betydelse.

Sedan punktgruppens viktade tyngdpunkt beräknats, vrids gruppen i förhållande till det använda koordinatsystemet så att den yttre kraftens verkningslinje blir parallell med y-axeln. Detta görs dels för att nedbringa beräkningstiden och dels för att direkt kunna tillämpa de tidigare uppställda sambanden. Vid yttre belastning av moment utgår denna transformation.

Härpå beräknas några hjälpstorheter för de iterativa procedurerna FIRSTSTEP och MOVE. Uthoppskriteriet för dessa är, att gradientens euklidiska norm är mindre än eller lika med toleransen EPSILON, bestämd ur sambandet

$$\varepsilon = 0.00001 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Här är S = Σg och n = NOP = antalet punkter i konstruktionen. Uttrycket för ε har därvid baserats på överväganden, analoga med de i PSS gjorda i samband med kontroll av jämviktsekvationerna. ε växer linjärt med S/n, d.v.s. ungefärligen linjärt med den maximala punktkraftens medelvärde, samt linjärt med $\sqrt{n}$. I förhållande till i PSS har toleranskravet här skärpts med en 10-potens för att motverka den ogynnsamma effekten av felanhopning, då som i beräkningsalternativ 3, nya krafttillstånd bygger på tidigare bestämda.

Initialvärdet för steglängden vid den iterativa bestämningen av läget av vridmedelpunkten sätts till 0.1 av R_M, där R_M räknas med avseende på punktgruppens viktade tyngdpunkt. Initialvärdet för steglängden av den i samma iteration beräknade rotationsdeformationen sätts för en halvcykel till 0.1 av LIMANG. Den senare definieras som den absolut största vinkeländringen (ökad med 5%), som för den aktuella konstruktionen kan komma i fråga vid övergång från ett tillstånd till ett annat.

Nästa förberedande åtgärd är beräkning av vridmedelpunktens läge

under renodlade elastiska förhållanden. I samband härmed kontrolleras, om den yttre kraften går genom gruppens tyngdpunkt. Om så är fallet, är beräkningssituationen trivial, förhållandet meddelas och vidare beräkning inställs.

Slutligen bestäms konstruktionens flyt- och brottgräns vid första pålastning. Brottgränsen erhålles därvid genom anropet FIRSTSTEP (ZERO). Flytgränsen N_1 (eller M_1) beräknas enligt följande.

Flytgränsen karakteriseras av att $R_o = R_M$ varför det övre sambandet (5) direkt ger

$$\frac{N_1}{P_o} = \frac{\Sigma\, g\, a}{R_M}$$

då den yttre lasten är en kraft.
Då lasten är ett moment, erhålles ur det mot (6) svarande uttrycket

$$\frac{M_1}{P_o} = \frac{\Sigma\, g\, R^2}{R_M}$$

De nu genomgångna förberedande åtgärderna överhoppas av beräkningsalternativen 20 och 30, då dessa alltid uppträder som följdberäkningar till tidigare utförd beräkning enligt alternativ 1 eller 2.

Beräkningsalternativ 1

Programmets följande avsnitt (654-677), vilket avser alternativ 1, har följande funktion.

För vart och ett av de föreskrivna φ-värdena bestäms först det mot aktuellt φ svarande flytmönstret, varefter jämviktstillståndet bestäms och redovisas. Slutligen beräknas residualtillståndet efter avlastning och detta utskrivs.

Beräkningsalternativ 2 eller 20

Programmets nästa avsnitt (678-740), vilket behandlar en punktkonstruktion enligt beräkningsalternativ 2 eller 20, inleds med några förberedande åtgärder före den egentliga cykelberäkningen. Först bestäms jämviktstillståndet svarande mot föreskrivet φ och

detta redovisas. Härmed är övre cykelgränsen definierad. Sedan beräknas undre cykelgränsen svarande mot givet värde på α och denna justeras vid behov uppåt till den negativa brottgränsen.

Då en cykelgräns sammanfaller med motsvarande brottgräns, kan ett jämviktsläge praktiskt icke etableras, eftersom konstruktionens rotationsdeformation blir oändligt stor. Iterationen i proceduren MOVE blir i en sådan situation divergent och beräkningstiden oändlig. För att utesluta denna olägenhet flyttas en sådan cykelgräns inåt sträckan ε, då den yttre lasten är en kraft, och sträckan $R_M \cdot \varepsilon$, då den yttre lasten är ett moment. R_M räknas i detta sammanhang med avseende på vridmedelpunkten hörande till total plasticering. Det skall i samband härmed påpekas att vid övertramp av brottgränsen konstruktionspunkternas tillhörande individuella momentancentra konvergerar mot en gemensam vridmedelpunkt. Att så är fallet framgår av följande. Då $\tau \to \infty$ vill enligt (21) $\beta \to 0$, vilket i sin tur, enligt (22) medför att $x_2 \to u$ och $y_2 \to v$.

Sedan cykelns yttergränser är fastlagda, kan storleken på kraftförändringen hörande till ett beräkningssteg beräknas som differensen mellan cykelgränserna dividerad med det föreskrivna antalet steg i en halvcykel.

Vid läget START börjar första halvcykeln. Efter varje förändring av den yttre lastens storlek förfares enligt följande. De tre variablerna, vars storlek skall beräknas, tilldelas lämpliga initialvärden. Anrop av MOVE medför därefter att variablerna antar mot jämvikt svarande värden och hela jämviktstillståndet skrivs ut. En extra säkerhetsåtgard har inbyggts, innebärande en minskning av den yttre lastens absolutvärde med 0.1 ‰ för varje gång MOVE ej leder till jämvikt. Detta får betydelse endast vid cykelgränserna.

Efter avslutad genomgång av den första halvcykeln kontrolleras om cykeln är symmetrisk. Är så fallet, avbryts ytterligare beräkning och orsaken härtill meddelas. Är så icke fallet, fortsätts med andra halvcykeln, där den yttre lasten stegvis ökas till sitt initialvärde. Även här redovisas tillståndet efter

varje steg. Eventuellt kan det nu genomgångna förloppet upprepas en eller flera gånger.

Beräkningsalternativ 3 eller 30

Även programmets sista avsnitt (741-849), vilket behandlar beräkningar enligt alternativen 3 eller 30, inleds med ett antal förberedande åtgärder, av vilka några skall kommenteras i det följande. Inledningsvis bestäms det funktionella sambandet mellan antalet flyttillfällen vid en punkt och dennas flytkraft utifrån de tre givna parametrarna ζ_o, σ_o och κ_o. Därnäst bestäms övre cykelgränsen, svarande mot givet φ-värde samt till första pålastningen hörande flyt- och brottgräns. Ytterligare beräknas förhållandet mellan brott- och flytgräns, vilket är ett mått på den hållfasthetsreserv, som står till förfogande, sedan flytgränsen har uppnåtts. Slutligen beräknas undre cykelgränsen på analogt sätt som för alternativ 2 och alla uppnådda resultat skrivs ut.

Så bestäms lämpliga startvärden för iterativ beräkning av rotationsdeformationerna i olika situationer samt de koefficienter, som används för omräkning av cykelgränserna vid inträffad risk för övergång till elastiskt beteende hos konstruktionen. Om strain hardening effekten icke beaktas i den aktuella beräkningen, justeras övre och undre cykelgräns med ε eller $R_M \cdot \varepsilon$, då respektive cykelgräns sammanfaller med brottgränsen i analogi med för alternativ 2.

Härmed är de förberedande åtgärderna avslutade och den egentliga cykelberäkningen startar vid läget BEGINCYCLE.

Först beräknas konstruktionens undre flytgräns och det kontrolleras, att denna är högre än undre cykelgränsen. Skulle så ej vara fallet, måste även undre brottgränsen bestämmas och cykelgränsen sänkas enligt tidigare angiven regel för att hindra övergång till elastiskt beteende.

Härefter kan jämviktstillståndet vid undre cykelgränsen etableras och vid lastväxlingen uppkomna ändringar i punkternas materialegenskaper noteras.

Andra halvcykeln inleds med beräkning av övre flytgränsen och en motsvarande kontroll av att denna är lägre än övre cykelgränsen. Skulle så ej vara fallet, måste även övre brottgränsen bestämmas och cykelgränsen justeras uppåt före fortsatt lastvariation.

Sist etableras jämviktstillståndet vid övre cykelgränsen och uppträdande ändringar i punkternas flytkraft antecknas.

Det beskrivna förloppet, vilket täcker en helcykel, upprepas så, tills en cykelperiod har avslutats, varefter nu rådande tillstånd jämte aktuella gränstillstånd meddelas genom utskrift. Därefter fortsättes med periodvis redovisning, tills det föreskrivna antalet cykler genomlöpts, varpå som sista åtgärd konstruktionen relaxeras och residualtillståndet beräknas och meddelas.

6.2 Programlista

```
BEGIN COMMENT POINT SET STRUCTURE  GENERAL PROGRAM;
   INTEGER ALT,CNIPER,CYN,CYP,I,IDENT,K,NOCY,NOP,NOSTIC,
           NPHI,NY,NYLEV,POC,STEN;
   REAL ALPHA,CAPPA,CO,D,DTAU,E,EPSILON,F,FI,HV,P0,IB,IG,TAU1,TAU2,TAU3,
        TAU4,RO,S,SFS,SI,SLOPE,STEM,SX,SY,T,TAU,UP,U0,UOE,VP,V0,VOE,X,
        XE,XG,XGE,XN,XNE,Y,YE,YG,YGE,YNE,ZERO,COEF1,COEF2,K1,K2,UL,VL,
        LIMANG,M,MULN,MYLN,M0,N,NMAX,NMIN,N0,OMZE,PK,PSI,Q1,Q2,RMAX,DN,
        HS;
   BOOLEAN BOTTOM,DOWN,PAGE,PRENT,EXTREME;
   LOCAL LABEL FIN,ALT1,ALT3;
   INTEGER ARRAY NOY,PN(1:20);
   ARRAY B,LOAD(1:3),SOL(1:6),BETA,ROPRIM,ROBISS(0:20),
         G,PHI,R,RA,RANG,RB,R2,TAUX,T1,V,KAPPA(1:20),OMEGA(0:21),
         ETA,RPRIM,RBISS(0:21),EXIT(1:20,1:9),A,C,CAUX,Z,ZE(1:20,1:2);

   PROCEDURE DATAIN;
   BEGIN INTEGER K;
      LIST POINT(FOR K=(1,1,NOP) DO (PN(K),ZE(K,1),ZE(K,2),G(K))),
           STST(FOR K=(1,1,NYLEV) DO (ETA(K),RANG(K))),
           NFI(FOR K=(1,1,NPHI) DO PHI(K));
      READ(IDENT);
      IF IDENT LSS 0 THEN GO TO FIN;
      READ(ALT);
      IF ALT EQL 20 THEN GO TO L2;
      IF ALT EQL 30 THEN GO TO L3;
      READ(NOP);
      READ(POINT);
      READ(PSI);
      IF PSI GEQ 0 THEN READ(XNE,YNE);
      IF ALT EQL 1 THEN
      BEGIN READ(NYLEV);
          READ(STST);
          READ(NPHI);
          READ(NFI);
          GO TO OUT
      END ALT 1;
      IF ALT EQL 2 THEN
      BEGIN READ(NYLEV);
          READ(STST);
L2:       READ(F1,ALPHA,NOSTIC,NOCY);
          GO TO OUT
      END ALT 2;
      IF ALT EQL 3 THEN
L3:   BEGIN READ(SLOPE,NY,CAPPA);
          READ(F1,ALPHA,CNIPER,NOCY);
          NYLEV=0
      END ALT 3;
OUT:
   END DATAIN;

   PROCEDURE ROBRIC;
   BEGIN DAN INTEGER K;
      FORMAT TEXT(E2,A8,'POINT SET STRUCTURE',X43,'PAGE',I4,A1,X8,
                  'GENERAL PROGRAM',A1,X6,'CALCULATION NO',I5,A1.3);
      IF PAGE THEN BEGIN K=0; PAGE=FALSE END;
      K=1+K;
      WRITE(TEXT,K,IDENT)
   END ROBRIC;

  PROCEDURE TEXT(K);
  VALUE K; INTEGER K;
  BEGIN FORMAT XT(X8,'CENTRE OF ADDITIONAL TWIST',X10,'U=',D7.2,X5,
                  'V=',D7.2,A1,X8,'ANGLE OF ADDITIONAL TWIST',X9,
                  'TAU=',D8.5,A1.1);
     WRITE(XT,SOL(K),SOL(K+1),SOL(K+2))
  END TEXT;

  PROCEDURE TABLE(K);
  VALUE K; INTEGER K;
  BEGIN INTEGER A;
     FORMAT F(A9,'NO',X8,'XC',X8,'YC',X6,'FORCE',A1.1),
            S(A8,I3,X2,2D10.2,D9.3,A1);
     WRITE(F);
     FOR A=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
     WRITE(S,PN(A),EXIT(A,K),EXIT(A,K+1),EXIT(A,K+2))
  END TABLE;

   PROCEDURE PRINT1;
   BEGIN INTEGER A,B,I,K,M;
      LIST LISP(FOR I=(A,1,B) DO PHI (I));
      FORMAT DATA(X8,I3,X2,3D10.2,A1),
         F1(X8,'POINT SET DATA',A1.1,X9,'NO',X9,'X',X9,'Y',X9,'G',A1.1),
          FORCE(X8,'POSITION OF EXTERNAL FORCE N  XN=',D7.2,X4,'YN=',
              D7.2,X4,'PSI=',D6.2,A2);
```

```
 85              MOMT(X8,'EXTERNAL MOMENT M',A2),
 86              CALT(X6,'CALCULATION ALTERNATIVE NO',I3,A2.1),
 87              F2(X6,'YIELDLEVEL   YIELDRANGE',A1.1),
 88             ETAK(A3,2D13.4,A1),
 89              VOP(A8,'VALUES OF PHI',A2),
 90              DOP(A7,:M:(D6.3),A1),
 91              UL(X6,'UPPER LIMIT',X6,'CORRESPONDS TO PHI  =',D6.3,A2),
 92              LL(X6,'LOWER LIMIT',X6,'CORRESPONDS TO ALPHA=',D6.3,A1),
 93              MA(X20,'MMAX',A), MI(X20,'MMIN',A),
 94              NA(X20,'NMAX',A), NI(X20,'NMIN',A),
 95              CYC(X8,'NUMBER OF CYCLES=',I5,A2),
 96              SIH(X6,'STEPS IN A HALFCYCLE=',I5,A1),
 97              PER(X8,'PERIOD OF CYCLES=',I5,A1),
 98              STRAIN(X6,'KAPPA=',D6.3,' AT NY CYCLES',A2,X8,'NY   =',I8,A1,
 99                     X8,'BETA =',D8.5,A1);
100          RUBRIC;
101          WRITE(F1);
102              FOR K=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
103          WRITE(DATA,PN(K),ZE(K,1),ZE(K,2),G(K));
104          IF PSI LSS 0 THEN WRITE(MOMT) ELSE WRITE(FORCE,XNE,YNE,PSI);
105          WRITE(CALT,ALT);
106          IF ALT EQL 1 OR ALT EQL 2 OR ALT EQL 20 THEN
107          BEGIN IF NYLEV NEQ 0 THEN WRITE (F2);
108              FOR K=1 STEP 1 UNTIL NYLEV DO WRITE(ETAK,ETA(K),RANG(K))
109          END;
110          IF ALT EQL 1 THEN
111          BEGIN WRITE(VOP);
112              A=1;
113              B:=IF NPHI GTR 10 THEN 10 ELSE NPHI;
114              WRITE(DOP,LISP);
115              IF NPHI GTR 10 THEN
116              BEGIN A=11; B=NPHI; M=NPHI-10; WRITE(DOP,LISP) END
117          END;
118          IF ALT NEQ 1 THEN
119          BEGIN WRITE(UL,I);
120              IF PSI LSS 0 THEN WRITE(MA) ELSE WRITE(NA);
121              WRITE(LL,ALPHA);
122              IF PSI LSS 0 THEN WRITE(MI) ELSE WRITE(NI)
123          END;
124          IF ALT EQL 2 OR ALT EQL 20 THEN
125          BEGIN WRITE(CYC,NOCY); WRITE(SIH,NOSTIC) END;
126          IF ALT EQL 3 OR ALT EQL 30 THEN
127          BEGIN WRITE(CYC,NOCY); WRITE(PER,CNIPER);
128              WRITE(STRAIN,CAPPA,NY,SLOPE)
129          END
130      END PRINT1;
131
132      PROCEDURE PRINT2;
133      BEGIN INTEGER K;
134          FORMAT SOS(X8,'STATE OF STRESS PHI=',D6.3,A1.1),
135              FORCE(X8,'EXTERNAL FORCE NE',D6.3,A1.1),
136              MOMT(X6,'EXTERNAL MOMENT ME',D9.3,A1.1),
137              REST(X6,'CENTRE OF GRAVITY',X30,'XG=',D7.2,X3,'YG=',D7.2,A1,
138                   X8,'CENTRE OF TWIST UNDER ELASTIC CONDITIONS',X7,'UE=',
139                   D7.2,X3,'VE=',D7.2,A1,X8,'CENTRE OF TWIST UNDER ',
140                   'ELASTOPLASTIC CONDITIONS UP=',D7.2,X3,'VP=',D7.2,A1,
141                   X8,'RADIUS OF THE BOUNDARY CIRCLE RU=',D7.3,A2.2,
142                   X9,'NO',X6,'RADIUS',X6,'FORCE',A1.1),
143              VAL(X8,I3,D12.2,D11.3,A1);
144          RUBRIC;
145          WRITE(SOS,PK);
146          IF PSI GEQ 0 THEN WRITE(FORCE,NMAX) ELSE WRITE(MOMT,NMAX);
147          WRITE(REST,XGE,YGE,UE,VE,SOL(1),SOL(2),SOL(3));
148          FOR K=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
149          WRITE(VAL,PN(K),EXIT(K,1),EXIT(K,2))
150      END PRINT2;
151
152      PROCEDURE PRINT3;
153      BEGIN FORMAT F(X6,'STATE AFTER STEP NO',I3,' IN CYCLE NO',I2,A1.1),
154                    FORCE(X6,'EXTERNAL FORCE NE',D8.3,A1),
155                    MONT(X8,'EXTERNAL MOMENT ME',D9.3,A1),
156                    EMPTY(X6,A1.1),
157                    DOWN(X8,'ACCORDING TO ALPHA=',D6.3,A1.1);
158          RUBRIC;
159          WRITE(F,STEP,CYN);
160          IF PSI GEQ 0 THEN WRITE(FORCE,LOAD(1)) ELSE WRITE(MONT,LOAD(1));
161          IF BOTTOM THEN WRITE(DOWN,ALPHA) ELSE WRITE(EMPTY);
162          TEXT(1);
163          TABLE(4)
164      END PRINT3;
165
166      PROCEDURE PRINT4;
167      BEGIN FORMAT F(X6,'AFTER RELAXATION',A1.1);
168          RUBRIC;
169          WRITE(F);
170          TEXT(4);
171          TABLE(1)
172      END PRINT4;
```

```
173
174       PROCEDURE PRINT5;
175       BEGIN FORMAT TEXT(X8,'THE REMAINDER OF THIS CALCULATION HAS BEEN',
176                         ' OMITTED BECAUSE OF SYMMETRY',A1);
177          RUBRIC;
178          WRITE(TEXT)
179       END PRINT5;
180
181       PROCEDURE PRINT6;
182       BEGIN FORMAT TEXT(X8,'NO EXECUTION BECAUSE OF PURE TRANSLATION',A1);
183          RUBRIC;
184          WRITE(TEXT)
185       END PRINT6;
186
187       PROCEDURE PRINT7;
188       BEGIN INTEGER Z;
189          REAL A;
190          FORMAT YES(X60,D7.5,A1,X8,'STRAIN HARDENING ACCORDING TO',X3,
191                  'KAPPA=(',D7.5,'*NY+1)',A1.1,X40,'NY',X6,'KAPPA',A2.1),
192                 NO(X8,'STRAIN HARDENING DOES NOT OCCUR',A1),
193                 TAL(X38,I4,D13.3,A1);
194          RUBRIC;
195          IF K1 EQL 0 AND K2 ENL 0 THEN WRITE(NO) ELSE
196          BEGIN WRITE(YES,K2,K1);
197              FOR Z=0 STEP 1 UNTIL 9,10 STEP 10 UNTIL 90,
198              100 STEP 100 UNTIL 1000 DO
199              BEGIN A=K1*Z+1;
200                  A=IF K2 EQL 1 THEN A ELSE A**K2;
201                  WRITE(TAL,Z,A)
202              END
203          END IF
204       END PRINT7;
205
206       PROCEDURE PRINT8;
207       BEGIN FORMAT LIM(X6,'LIMIT STATES AFTER CYCLE NO',I5,A1.1),
208              YF(X6,'YIELD VALUE OF EXTERNAL FORCE',X5,'NL1=',D8.3,A1),
209              YM(X6,'YIELD VALUE OF EXTERNAL MOMENT',X4,'ML1=',D9.3,A1),
210              UF(X6,'ULTIMATE VALUE OF EXTERNAL FORCE  NL0=',D8.3,A2),
211              UM(X6,'ULTIMATE VALUE OF EXTERNAL MOMENT ML0=',D9.3,A2),
212              GAMMA(A8,'GAMMA=',D5.2,A2);
213          RUBRIC;
214          WRITE(LIM,CYN);
215          IF PSI LSS 0 THEN WRITE(YM,LOAD(1)) ELSE WRITE(YF,LOAD(1));
216          TEXT(1);
217          TABLE(4);
218          IF PSI LSS 0 THEN WRITE(UM,LOAD(2)) ELSE WRITE(UF,LOAD(2));
219          TEXT(4);
220          TABLE(7);
221          WRITE(GAMMA,LOAD(3))
222       END PRINT8;
223
224       PROCEDURE PRINT9;
225       BEGIN INTEGER H;
226          FORMAT STA(X8,'STATE AFTER CYCLE NO',I5,A1.1),
227                 FORCE(X8,'NMAX=',D8.3,A1,X8,'NMIN=',D8.3,A1.1),
228                 MOMT(X8,'MMAX=',D9.3,A1,X8,'MMIN=',D9.3,A1.1),
229                 RAD(X9,'NO',X7,'NOY',X5,'KAPPA',X6,'XC',X8,'YC',X6,
230                     'FORCE',A1.1),
231                 TAL(X8,I3,I10,D10.3,2D10.2,D9.3,A1);
232          RUBRIC;
233          WRITE(STA,CYN);
234          IF PSI LSS 0 THEN WRITE(MOMT,LOAD(1),LOAD(2))
235          ELSE WRITE(FORCE,LOAD(1),LOAD(2));
236          TEXT(1);
237          WRITE(RAD);
238          FOR H=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
239          WRITE(TAL,PN(H),NOY(H),KAPPA(H),EXIT(H,1),EXIT(H,2),EXIT(H,3))
240       END PRINT9;
241
242       PROCEDURE TRANSFORM(K);
243       VALUE K; INTEGER K;
244       BEGIN INTEGER A;
245          FOR A=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
246          BEGIN EXIT(A,K)=SI*C(A,1)+CO*C(A,2);
247             EXIT(A,K+1)=SI*C(A,2)-CO*C(A,1);
248             EXIT(A,K+2)=G(A)*R(A)*V(A)
249          END
250       END TRANSFORM;
251
252       PROCEDURE YIELDPATTERN(FI,A);
253       VALUE FI,A;
254       INTEGER A; REAL FI;
255       BEGIN INTEGER N; REAL F,S;
256          IF A NEQ 1 THEN GO TO M;
257          ETA(0)=BETA(0)=OMEGA(0)=0;
258          ETA(1+NYLEV)=1;
259          S=0;
```

```
260             FOR N=1 STEP 1 UNTIL NYLEV DO S=S+RANG(N);
261             OMZE=1/(1-S);
262             FOR N=1 STEP 1 UNTIL NYLEV DO BETA(N)=OMZE*RANG(N);
263             S=0;
264             FOR N=0 STEP 1 UNTIL NYLEV DO OMEGA(1+N)=S=S+BETA(N);
265         M:  F=FI/OMZE;
266             FOR N=0 STEP 1 UNTIL NYLEV DO
267             BEGIN RQPRIM(N)=F**(ETA(N)+OMEGA(N));
268                 RQBISS(N)=F*(ETA(N)+OMEGA(N+1))
269             END
270         END YIELDPATTERN;
271
272         PROCEDURE YIELDFUNC;
273         BEGIN REAL A,B,D,E,F,INC,K,L,OLDB;
274             IF SLOPE EQL 0 THEN BEGIN K1=K2=0; GO TO PRINT END;
275             INC=(CAPPA-1)/NT;
276             IF ABS(SLOPE-INC) LSS INC/1000 THEN
277             BEGIN K1=SLOPE; K2=1; GO TO PRINT END;
278             A=LN(CAPPA);
279             L=SLOPE*NY;
280             F=0.5; OLDB=0;
281             FOR D=F WHILE ABS(B-OLDB) GTR 0.00001 DO
282             BEGIN K=L/B;
283                 B=K/(1+K); L=LN(1+K);
284                 IF ABS(L-D) LSS 0.00001 THEN
285                 BEGIN F=IF B LSS 0.5 THEN B/2 ELSE (1+B)/2; GO TO CONT END;
286                 F=(A-B*D)/(L-D);
287                 IF F LEQ 0 THEN BEGIN F=B/2; GO TO CONT END;
288                 OLDB=B;
289     CONT: END WHILE;
290             K1=SLOPE/F; K2=F;
291     PRINT:PRINT7
292         END YIELDFUNC;
293
294         PROCEDURE STRAINHARD;
295         BEGIN INTEGER A,K;
296             REAL B,F;
297             FOR K=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
298             BEGIN F=ABS(R(K)*V(K));
299                 IF ABS(KAPPA(K)-F) LSS 0.0001 THEN
300                 BEGIN NOY(K)=A=1+NOY(K);
301                     IF K2 EQL 0 THEN GO TO NEXT;
302                     B=K1*A+1;
303                     KAPPA(K)=IF K2 EQL 1 THEN B ELSE B**K2
304                 END IF;
305     NEXT: END K
306         END STRAINHARD;
307
308         REAL PROCEDURE REX(P,Q);
309         VALUE P,Q; REAL P,Q;
310         BEGIN INTEGER K;
311             REAL RR,RS,U;
312             U=0;
313             FOR K=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
314             BEGIN RA(K)=Z(K,1)-P;
315                 RB(K)=Z(K,2)-Q;
316                 R2(K)=RR=RA(K)**2+RB(K)**2;
317                 R(K)=RB=SQRT(RR);
318                 IF RB GTR U THEN U=RB
319             END K;
320             REX=U
321         END REX;
322
323         REAL PROCEDURE MAXANG;
324         BEGIN INTEGER I; REAL S;
325             S=T1(1);
326             FOR I=2 STEP 1 UNTIL NOP DO IF S LSS T1(I) THEN S=T1(I);
327             MAXANG=S
328         END MAXANG;
329
330         PROCEDURE FIRSTSTEP(E);
331         VALUE E; REAL E;
332         BEGIN INTEGER I,K,TE1,TE2,ZEN;
333             REAL D1,D2,H,M;
334             ARRAY GRAD(1:2);
335
336             INTEGER PROCEDURE MAXGRAD;
337             MAXGRAD=IF ABS(GRAD(1)) GTR ABS(GRAD(2)) THEN 1 ELSE 2;
338
339             INTEGER PROCEDURE STRIP(A);
340             VALUE A; INTEGER A;
341             BEGIN INTEGER K,N;
342                 N=0;
343                 FOR K=N WHILE R(A) GTR RBISS(K) DO N=1+N;
344                 STRIP=N
345             END STRIP;
346
```

```
347             PROCEDURE REALSTRIP;
348             BEGIN INTEGER K;
349                 RMAX=REX(B(1),B(2));
350                 RPRIM(1+NYLEV)=R0=E*RMAX;
351                 ROBISS(1+NYLEV)=RMAX;
352                 FOR K=0 STEP 1 UNTIL NYLEV DO
353                BEGIN RPRIM(K)=RMAX*ROPRIM(K);
354                     ROBISS(K)=RMAX*ROBISS(K)
355                 END
356             END REALSTRIP;
357
358             PROCEDURE GRADIENT;
359             BEGIN INTEGER I,K;
360                 REAL D,F,SA1,SA2,SB1,SB2,SC1,SC2;
361                 REALSTRIP;
362                 SA1=SA2=SB1=SB2=SC1=SC2=0;
363                 FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
364                 BEGIN K=STRIP(I);
365                     IF R(I) LSS RPRIM(K) THEN
366                 BEGIN F=IF R(I) EQL 0 THEN 0 ELSE
367                       G(I)*(OMZE-OMEGA(K)*R0/R(I));
368                     SA1=SA1+F*RA(I); SB1=SB1+F*RB(I);
369                     IF PSI GTR 0 THEN SC1=SC1+F*R2(I)
370                 END ELSE
371                 BEGIN F=G(I)*ETA(K);
372                     SA2=SA2+F*RA(I)/R(I); SB2=SB2+F*RB(I)/R(I);
373                     IF PSI GTR 0 THEN SC2=SC2+F*R(I)
374                 END
375                 END I;
376                 D=IF PSI GTR 0 THEN XN-B(1) ELSE 1;
377                 GRAD(1)=-SA1/R0-SA2+(SC1/R0+SC2)/D;
378                 GRAD(2)=-SB1/R0-SB2
379             END GRADIENT;
380
381             H=H0;
382     L1:     GRADIENT;
383             IF SQRT(GRAD(1)**2+GRAD(2)**2) LSS EPSILON THEN GO TO L3;
384             ZEN=0;
385     L2:     ZEN=1+ZEN;
386             K=MAXGRAD; D1=GRAD(K); TE1=SIGN(D1);
387             H=-TE1*ABS(H);
388             B(K)=B(K)+H;
389             IF ZEN EQL 10 THEN BEGIN H=0.95*H; GO TO L1 END;
390             GRADIENT; D2=GRAD(K); TE2=SIGN(D2);
391             IF TE1 EQL TE2 THEN GO TO L2;
392             B(K)=B(K)+H*D2/(D1-D2);
393             H=H/2;
394             GO TO L1;
395     L3:     X=B(1); Y=B(2);
396             XE=X+SI*L0;
397             YE=Y+SI-X*C0;
398             M=0;
399             FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
400             BEGIN FOR K=1,2 DO A(I,K)=C(I,K)=CAUX(I,K)=B(K);
401                 K=STRIP(I);
402                 T1(I)=V(I)=TAUX(1)=D1=IF R(I) LSS RPRIM(K) THEN
403                 OMZE/R0-OMEGA(K)/R(I) ELSE ETA(K)/R(I);
404                 M=M+D1*G(I)*R2(I)
405             END;
406             IF PSI LSS 0 THEN BEGIN M0=M; N0=0 END ELSE
407             BEGIN M0=0; N0=M/(XN-X) END
408         END FIRSTSTEP;
409
410         PROCEDURE STORE;
411         BEGIN INTEGER I,K;
412             FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
413             BEGIN TAUX(I)=V(I);
414                 FOR K=1,2 DO CAUX(I,K)=C(I,K)
415             END;
416             UL=B(1); VL=B(2);
417             IF DOWN THEN TAU1=B(3) ELSE TAU2=B(3)
418         END STORE;
419
420         PROCEDURE UNSTORE;
421         BEGIN INTEGER I,K;
422             FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
423             BEGIN T1(I)=TAUX(I);
424                 FOR K=1,2 DO A(I,K)=CAUX(I,K)
425             END;
426             B(1)=UL; B(2)=VL;
427             B(3)=IF DOWN THEN TAU1 ELSE TAU2
428         END UNSTORE;
429
430       PROCEDURE MOVE;
431       BEGIN INTEGER DIR,K,KI,KK,TE1,TE2,ZEN;
432           REAL D1,D2,NORM;
433           BOOLEAN STRAIGHT;
434           ARRAY H,GRAD(1:3);
435
```

```
436           INTEGER PROCEDURE MAXGRAD;
437           BEGIN INTEGER T;
438              IF ABS(GRAD(1)) GTR ABS(GRAD(2)) THEN T=1 ELSE T=2;
439              IF ABS(GRAD(3)) GTR ABS(GRAD(T)) THEN T=3;
440              MAXGRAD=T
441           END MAXGRAD;
442
443           PROCEDURE GRADIENT;
444           BEGIN INTEGER I,K,T;
445               REAL F,H,P,Q,R2,S,T2;
446              ARRAY B(1:3);
447              FOR K=1,2,3 DO GRAD(K)=0;
448              FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
449               BEGIN R2=S=0;
450                  T2=T1(I)+B(3);
451                  IF ABS(T2) LSS 1&-30 THEN T2=T1(I);
452                  F=T1(I)/T2;
453                 FOR K=1,2 DO
454                  BEGIN H=IF F EQL 1 THEN Z(I,K) ELSE B(K);
455                    C(I,K)=P=H-F*(B(K)-A(I,K));
456                    Q=G=Z(I,K)-P;
457                    R2=R2+Q*Q;
458                    S=S-G*(B(K)-P)
459                 END K;
460                 B(3)=R2+S;
461                 R(I)=F=SQRT(R2);
462                  IF P LSS 1&-30 THEN P=0 ELSE P=KAPPA(I)/P;
463                  IF KI*B(3)*SIGN(T2) GEQ 0 THEN V(I)=G=T2 ELSE
464                  BEGIN K=1+NYLEV;
465                 FOR T=K-1 WHILE ABS(T2) LSS P*(ETA(T)+OMEGA(T+1)) DO K=K-1;
466                 V(I)=G=IF ABS(T2) LSS P*(ETA(K)+OMEGA(K)) THEN
467                     T2=P*OMEGA(K)*SIGN(T2) ELSE P*ETA(K)*SIGN(T2) END;
468                    S=G*G(I);
469                    FOR K=1,2,3 DO GRAD(K)=GRAD(K)+S*B(K)
470              END I;
471              IF PSI LSS 0 THEN GRAD(3)=GRAD(3)-M ELSE
472              BEGIN GRAD(1)=GRAD(1)-N; GRAD(3)=GRAD(3)-(XN-R(1))*N END;
473              FOR K=1,2 DO GRAD(K)=KI*GRAD(K)
474           END GRADIENT;
475
476           EXTREME=FALSE;
477           KI=IF DOWN THEN 1 ELSE -1;
478           H(1)=H(2)=HU; H(3)=HV;
479     L1:    GRADIENT;
480           NORM=SQRT(GRAD(1)**2+GRAD(2)**2+GRAD(3)**2);
481           IF NORM LSS EPSILON THEN GO TO L3;
482           ZEN=KK=0;
483           DIR=1;
484     L2:   K=MAXGRAD; D1=GRAD(K); TE1=SIGN(D1);
485           ZEN=1+ZEN;
486           IF K EQL KK THEN DIR=1+DIR;
487           STRAIGHT=ZEN EQL DIR;
488           KK=K;
489           IF ZEN EQL 10 THEN
490           BEGIN ZEN=DIR=0; IF STRAIGHT THEN H(K)=1.25*H(K) END;
491           H(K)=-TE1*ABS(H(K));
492           B(K)=B(K)+H(K);
493           GRADIENT; D2=GRAD(K); TE2=SIGN(D2);
494           IF TE1 EQL TE2 THEN GO TO L2;
495           B(K)=B(K)+H(K)*D2/(D1-D2);
496           IF ABS(B(K)) GTR LIMANG THEN BEGIN EXTREME=TRUE; GO TO L3 END;
497           IF K EQL 3 THEN H(3)=H(K)/2 ELSE H(1)=H(2)=H(K)/2;
498           GO TO L1;
499     L3:
500        END MOVE;
501
502          REAL PROCEDURE YIELDLIM;
503          BEGIN INTEGER D1,D2,TE1,TE2,X;
504             REAL D,DIAW,F,F1,F2,SMALL,TAW;
505             ARRAY W(1:2);
506
507             REAL PROCEDURE MIN;
508             BEGIN INTEGER I,K;
509                 REAL F,H,P,Q,R2,S,T2;
510                 S=10&0;
511                 FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
512                 BEGIN R2=0;
513                     T2=V(I)=T1(I)+TAW;
514                     IF ABS (T2) LSS 1&-30 THEN T2=T1(I);
515                     F=T1(I)/T2;
516                     FOR K=1,2 DO
517                    BEGIN H=IF F EQL 1 THEN Z(I,K) ELSE W(K);
518                         C(I,K)=P=H-F*(W(K)-A(I,K));
519                         Q=Z(I,K)-P;
520                         R2=R2+Q*Q
521                    END K;
522                    R(I)=P=SQRT(R2);
```

```
523                 Q=KAPPA(I)/P-ABS(T2);
524                 IF Q LSS S THEN BEGIN S=Q; X=I END
525              END I;
526              MIN=S
527           END MIN;
528
529           SMALL=0.00001*LIMANG;
530           W(1)=U0; W(2)=V0;
531           D=IF DOWN THEN NMAX ELSE NMIN;
532           TAW=TAU=-2*D/T;
533           DTAW=TAW/10;
534     L1:   F=MIN;
535     L2:   D1=X; F1=F; TE1=SIGN(F1);
536           IF ABS(F) LSS SMALL THEN GO TO L3;
537           TAW=TAU=TAW+TE1*DTAW;
538           F=MIN;
539           D2=X; F2=F; TE2=SIGN(F2);
540           IF TE1 EQL TE2 THEN GO TO L2;
541           IF D1 NEQ D2 THEN BEGIN DTAW=DTAW/2; GO TO L2 END;
542           TAW=TAU=TAW+DTAW*F1/(F1-F2);
543           DTAW=SIGN(TAW)*ABS(DTAW)/4;
544           GO TO L1;
545     L3:   YIELDLIM=T*TAW+D
546        END YIELDLIM;
547
548        REAL PROCEDURE FAILURE;
549        BEGIN INTEGER I;
550           REAL N1,N2,SF,S1,S2,X,Y;
551
552           REAL PROCEDURE ABSUM;
553           BEGIN INTEGER K; REAL W;
554              W=0;
555              FOR K=1 STEP 1 UNTIL NOP DO W=W+ABS(G(K)*R(K)*V(K));
556              ABSUM=W
557           END ABSUM;
558
559           BOOLEAN PROCEDURE EXHAU;
560              EXHAU=ABS(ABSUM-SF) LSS 0.0001*S;
561
562           B(1)=UP; B(2)=VP;
563           B(3)=IF DOWN THEN TAU3 ELSE TAU4;
564           SF=0;
565           FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO SF=SF+KAPPA(I)*G(I);
566           N=M=N1=IF DOWN THEN -Q2 ELSE Q1;
567           MOVE;
568           S1=ABSUM;
569           N=M=N2=SF*N1/SFS;
570           X=B(1); Y=B(2);
571     TRY:  MOVE;
572           IF EXTREME THEN
573           BEGIN N=M=N2=(N1+N2)/2;
574              B(1)=X; B(2)=Y; B(3)=0.8*B(3);
575              GO TO TRY
576           END;
577           IF EXHAU THEN GO TO OK;
578           S2=ABSUM;
579     CONT: X=SF-S1; Y=SF-S2;
580           IF ABS(X-Y) LSS 1E-30 THEN GO TO OK;
581           N=M=((X*X*N2-Y*Y*N1)/(X+Y)/(X-Y)+2*N2)/3;
582           X=B(1); Y=B(2);
583     AGAIN:MOVE;
584           IF EXTREME THEN
585           BEGIN N=M=(2*N2+N)/3;
586              B(1)=X; B(2)=Y; B(3)=0.8*B(3);
587              GO TO AGAIN
588           END;
589           IF EXHAU THEN GO TO OK;
590           N1=N2; N2=N;
591           S1=S2;  S2=ABSUM;
592           GO TO CONT;
593     OK:   UP=B(1); VP=B(2);
594           IF DOWN THEN
595           BEGIN TAU3=B(3); Q2=-N END ELSE BEGIN TAU4=B(3); Q1=N END;
596           SFS=SF;
597           FAILURE=N
598        END FAILURE;
599
600     BEGINPROGRAM:
601       CYN=CYP=0;
602        PAGE=TRUE;
603        DATAIN;
604        PRINT1;
605        IF ALT EQL 20 THEN GO TO ALT2;
606        IF ALT EQL 30 THEN GO TO ALT30;
607        ZERO=0.001;
608        SX=SY=S=IG=IB=0;
609        FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
```

```
      BEGIN T:=G(I);
        S:=S+T;
        SX:=SX+T*ZE(I,1);
        SY:=SY+T*ZE(I,2)
      END;
      UOE:=XGE:=XE:=DX/S;
      VOE:=YGE:=YE:=DY/S;
      D:=IF PSI LSS 0 THEN 1.5707963 ELSE PSI/57.295780;
      SI:=SIN(D); CO:=COS(D);
      XG:=UO:=XE*SI-YE*CO;
      YG:=VO:=XE*CO+YE*SI;
      XN:=XNE*SI-YNE*CO;
      FOR I:=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
      BEGIN Z(I,1):=ZE(I,1)*SI-ZE(I,2)*CO;
            Z(I,2):=ZE(I,1)*CO+ZE(I,2)*SI
      END;
      EPSILON:=0.00001*S/SQRT(NOP);
      RO:=REX(XG,YG)/10;
      FOR I:=1 STEP 1 UNTIL NOP DO IG:=IG+G(I)*R2(I);
      IF PSI GEQ 0 THEN
      BEGIN E:=XN-XG;
        IF ABS(E) LSS RO/20 THEN BEGIN PRINT6; GO TO BEGINPROGRAM END;
        F:=IG/S/E;
        UO:=XG-F;
        UOE:=UO*SI+VO*CO;
        VOE:=VO*SI-UO*CO
      END;
      RMAX:=REX(UO,VO);
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
    BEGIN KAPPA(I):=1;
          NU(I):=0;
          IG:=IG+G(I)*(IF PSI LSS 0 THEN R2(I) ELSE RA(I))
    END;
     MYEN:=IG/RMAX;
     T:=IF PSI LSS 0 THEN IG ELSE S*(XG-UO);
  ALT30:
     B(1):=UO; B(2):=VO;
    YIELDPATTERN(ZERO,1);
     FIRSTSTEP(ZERO);
     LIMANG:=2.1*MAXANG;
     RS:=LIMANG/10;
     MULN:=N1+N2=NU+MU;
     DN:=IF PSI LSS 0 THEN RMAX*EPSILON ELSE EPSILON;
     UP:=X; VP:=Y;
  ALT1:
     IF ALT EQL 1 THEN
     BEGIN
        FOR I:=1 STEP 1 UNTIL NPHI DO
        BEGIN PK:=PHI(I);
          B(1):=(UO+UP)/2; B(2):=(VO+VP)/2;
            IF PK EQL 0 THEN PK:=ZERO;
            YIELDPATTERN(PK,1);
            FIRSTSTEP(PK);
            NMAX:=NU+MU;
            SOL(1):=XE; SOL(2):=YE; SOL(3):=RO;
            FOR K:=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
           BEGIN EXIT(K,1):=R(K); EXIT(K,2):=G(K)*R(K)*T1(K) END;
            PRINT2;
          DOWN:=TRUE;
          N:=M:=0;
          B(1):=UO; B(2):=VO; B(3):=-NMAX/T;
          HV:=HS/10;
          MOVE;
          SOL(4):=UOE; SOL(5):=VOE; SOL(6):=B(3);
          TRANSFORM(1);
          PRINT4
        END 1
     END ALT 1 ;
  ALT2:
    IF ALT EQL 2 OR ALT EQL 20 THEN
    BEGIN B(1):=(UO+UP)/2; B(2):=(VO+VP)/2;
        IF FI EQL 0 THEN FI:=ZERO;
        YIELDPATTERN(FI,2);
        FIRSTSTEP(FI);
        NMAX:=NU+MU;
         PK:=FI;
        SOL(1):=XE; SOL(2):=YE; SOL(3):=RO;
        FOR K:=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
        BEGIN EXIT(K,1):=R(K); EXIT(K,2):=G(K)*R(K)*T1(K) END;
        PRINT2;
        NMIN:=ALPHA*NMAX;
         IF NMAX GEQ MULN THEN NMAX:=MULN-DN;
         IF NMIN LEQ -MULN THEN BEGIN NMIN:=-MULN+DN; ALPHA:=NMIN/NMAX END;
         HV:=HS/NOSTIC;
        STEM:=(NMAX-NMIN)/NOSTIC;
        TAU:=2*MAXANG;
        DTAU:=-STEM/T;
```

```
START:
     CYN=1+CYN;
     IF CYN GTR NOCY THEN GO TO BEGINPROGRAM;
     FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
     BEGIN T1(I)=V(I); FOR K=1,2 DO A(I,K)=C(I,K) END;
     B(1)=U0; B(2)=V0;
     DOWN=TRUE;
     FOR STEN=1 STEP 1 UNTIL NOSTIC DO
     BEGIN N=M=LOAD(1)=NMAX-STEN*STEM;
        BOTTOM=STEN EQL NOSTIC;
LAB1:   IF STEN LEQ ENTIER(0.5*NOSTIC+0.5) THEN B(3)=STEN*DTAU;
        IF BOTTOM THEN B(3)=IF ALPHA LSS -1 THEN -2*TAU ELSE -TAU;
        MOVE;
        IF EXTREME THEN
        BEGIN N=M=LOAD(1)=0.9999*N;
           TAU=0.99*TAU;
           GO TO LAB1
        END;
         SOL(1)=B(1)*SI+B(2)*CO; SOL(2)=B(2)*SI-B(1)*CO; SOL(3)=B(3);
        TRANSFORM(4);
        PRINT3
     END STEN;
     IF ABS(1+ALPHA) LSS 0.0001 THEN
     BEGIN PRINT5; GO TO BEGINPROGRAM END;
     FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
     BEGIN T1(I)=V(I); FOR K=1,2 DO A(I,K)=C(I,K) END;
     B(1)=U0; B(2)=V0;
     DOWN=BOTTOM=FALSE;
     FOR STEN=1+NOSTIC STEP 1 UNTIL 2*NOSTIC DO
     BEGIN N=M=LOAD(1)=NMIN+(STEN-NOSTIC)*STEM;
LAB2:   IF STEN LEQ ENTIER(1.5*NOSTIC+0.5) THEN B(3)=(NOSTIC-STEN)*DTAU;
        IF STEN EQL 2*NOSTIC THEN B(3)=TAU;
        MOVE;
        IF EXTREME THEN
        BEGIN N=M=LOAD(1)=0.9999*N;
           TAU=0.99*TAU;
           GO TO LAB2
        END;
         SOL(1)=B(1)*SI+B(2)*CO; SOL(2)=B(2)*SI-B(1)*CO; SOL(3)=B(3);
        TRANSFORM(4);
        PRINT3
     END STEN;
     GO TO START
  END ALT2;
ALT3:
   IF ALT EQL 0 OR ALT EQL 30 THEN
   BEGIN SOL(4)=XE; SOL(5)=YE; SOL(6)=MAXANG;
      FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
      BEGIN EXIT(I,7)=XE; EXIT(I,8)=YE; EXIT(I,9)=G(I)*R(I)*T1(I) END;
      YIELDFUNC;
      IF FI EQL 0 THEN FI=ZERO;
      IF FI NEQ ZERO THEN
      BEGIN B(1)=UP+(U0-UP)*FI;
             B(2)=VP+(V0-VP)*FI;
             FIRSTSTEP(FI)
      END;
      UL=X; VL=Y;
      SOL(1)=XL; SOL(2)=YL; SOL(3)=TAU=MAXANG;
      NMAX=LOAD(1)=N0*M0;
      FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
      BEGIN EXIT(I,1)=XL;
             EXIT(I,2)=YL;
             EXIT(I,3)=B(1)*R(I)*T1(I);
             V(I)=T1(I)
      END;
      STRAIGHARD;
      NMIN=LOAD(2)=ALPHA*NMAX;
      IF NMIN LSS -MULN THEN NMIN=LOAD(2)=-MULN;
      PRINT9;
      LOAD(1)=MYLN; LOAD(2)=MULN; LOAD(3)=MULN/MYLN;
      RMAX=REX(U0,V0);
      SOL(1)=U0E; SOL(2)=V0E; SOL(3)=1/RMAX;
      FOR I=1 STEP 1 UNTIL NOP DO
      BEGIN EXIT(I,4)=U0E; EXIT(I,5)=V0E; EXIT(I,6)=G(I)*R(I)/RMAX END;
      PRINT8;
      HV=HS;
      IF NMAX NEQ MULN AND NMIN NEQ -MULN THEN
      BEGIN TAU1=-2*TAU; TAU2=2*TAU; TAU3=-4*TAU; TAU4=4*TAU END;
      IF NMAX NEQ MULN AND NMIN EQL -MULN THEN
      BEGIN TAU1=TAU3=-4*TAU; TAU2=2*TAU; TAU4=4*TAU END;
      IF NMAX EQL MULN AND NMIN NEQ -MULN THEN
      BEGIN TAU1=-TAU; TAU3=-2*TAU; TAU2=TAU4=TAU END;
      IF NMAX EQL MULN AND NMIN EQL -MULN THEN
      BEGIN TAU1=TAU3=-2*TAU; TAU2=TAU4=2*TAU END;
      COEF1=(NMAX-MYLN)/(MULN-MYLN);
      COEF2=(NMIN+MYLN)/(MYLN-MULN);
      SFS=S;
```

```
784             IF SLOPE EQL 0 THEN
785             BEGIN IF NMAX GEQ MULN THEN NMAX=MULN-DN;
786                IF NMIN LEQ -MULN THEN NMIN=-MULN+DN
787             END;
788      BEGINCYCLE:
789             CYN=1+CYN;
790             CYP=1+CYP;
791             PRENT=CYN EQL NOCY OR CYP EQL CNIPER;
792             DOWN=TRUE;
793             IF SLOPE EQL 0 THEN GO TO DESCEND;
794             UNSTORE;
795             MYLN=YIELDLIM;
796             IF NMIN LSS MYLN THEN GO TO DESCEND;
797             MULN=FAILURE;
798             NMIN=MYLN-COEF2*(MYLN-MULN);
799      DESCEND:
800             N=M=NMIN;
801      TRY1:  UNSTORE;
802             MOVE;
803             IF EXTREME THEN BEGIN N=M=NMIN=0.9999*NMIN; GO TO TRY1 END;
804             STORE;
805             STRAINHARD;
806             DOWN=FALSE;
807             IF SLOPE EQL 0 THEN GO TO ASCEND;
808             UNSTORE;
809             MYLN=YIELDLIM;
810             IF PRENT THEN
811             BEGIN TRANSFORM(4); MULN=FAILURE; TRANSFORM(7) END;
812             IF NMAX GTR MYLN THEN GO TO ASCEND;
813             IF NOT PRENT THEN MULN=FAILURE;
814             NMAX=MYLN+COEF1*(MULN-MYLN);
815      ASCEND:
816             N=M=NMAX;
817      TRY2:  UNSTORE;
818             MOVE;
819             IF EXTREME THEN BEGIN N=M=NMAX=0.9999*NMAX; GO TO TRY2 END;
820             STORE;
821             STRAINHARD;
822             IF PRENT THEN
823             BEGIN LOAD(1)=NMAX; LOAD(2)=NMIN;
824                 SOL(1)=UL*SI+VL*CO;
825                 SOL(2)=VL*SI-UL*CO;
826                 SOL(3)=TAU2;
827                 TRANSFORM(1);
828                 PRINT9;
829                 CYP=0;
830                 IF SLOPE NEQ 0 THEN
831                 BEGIN LOAD(1)=MYLN; LOAD(2)=MULN; LOAD(3)=MULN/MYLN;
832                     SOL(1)=U0E; SOL(2)=V0E;SOL(3)=TAU;
833                     SOL(4)=UP*SI+VP*CO;
834                     SOL(5)=VP*SI-UP*CO;
835                     SOL(6)=TAU4;
836                     PRINT8
837                 END IF SLOPE
838             END PRENT;
839             IF CYN NEQ NOCY THEN GO TO BEGINCYCLE;
840             DOWN=TRUE;
841             N=M=0;
842             UNSTORE;
843             B(1)=U0; B(2)=V0;
844             B(3)=-NMAX/T;
845             MOVE;
846             SOL(4)=U0E; SOL(5)=V0E; SOL(6)=B(3);
847             TRANSFORM(1);
848             PRINT4
849          END ALT 3;
850          GO TO BEGINPROGRAM;
851      FIN:
852      END
```

6.3 Exempel på resultatredovisning

En punktgrupp med utformning och belastning enligt FIG. 44 väljs som exempel för att belysa utskrift av beräkningsresultatet för de tre beräkningsalternativen 1, 2 och 3. Gruppens samtliga punkter har vikten g = 1 och för alternativen 1 och 2 en arbetslinje enligt figuren. I alternativet 3 beaktas strain hardening effekten, vilken förutsätts karakteriserad av parametervärdena ζ_o = = 0.04, σ_o = 100 och κ_o = 1.2.

För de tre visade exemplen väljs en gemensam pålastningsfas, svarande mot påkänningstillståndet φ = 0.5. I det första exemplet undersöks ytterligare två tillstånd på vägen mot φ = 0.5, nämligen φ = 2.0 respektive φ = 1.0. I det andra exemplet redovisas resultat från genomgång av en lastcykel där undre gränsen bestäms av α = - 1, d.v.s. en symmetrisk cykel. En halvcykel är här uppdelad i fyra steg. I det tredje exemplet genomförs två kompletta lastcykler före avlastning. Även här är förloppet symmetriskt.

6.3.1 Beräkning enligt alternativ 1

Utskrift av page 1 fås genom anrop av proceduren PRINT 1, vilken återger de givna ingångsvärdena. Först ges i tabellform en beskrivning av den aktuella punktgruppen, omfattande för varje punkt: punktnummer (NO), punktens koordinater (X,Y) samt punktens vikt (G). Sedan beskrivs läget av verkningslinjen för den yttre kraften genom koordinaterna (XN, YN) till en punkt på linjen samt genom vinkeln PSI (i grader) mellan x-axelns positiva riktning och verkningslinjen.

Följande rad upplyser om önskat beräkningsalternativ. I tabellform ges sedan en beskrivning av den tillämpade generaliserade arbetslinjen, då denna avviker från den idealelasto-plastiska. Tabellen omfattar två kolumner, av vilka den första YIELDLEVEL innehåller flytnivåerna utöver den högsta och den andra YIELDRANGE anger motsvarande relativa flyttöjningar. Utskriften avslutas med en uppräkning av de φ-värden, för vilka beräkningen skall genomföras.

Utskrift av page 2 (samt 4 och 6) erhålles genom anrop av PRINT 2. I denna anges först till vilket påkänningstillstånd (PHI) pålastning har skett samt motsvarande värde för den yttre lasten (N alternativt M). Sedan ges koordinaterna för tre för konstruktionen karakteristiska punkter, nämligen den viktade tyngdpunkten (XG, YG), vridmedelpunkten hörande till renodlat elastiskt beteende (UE, VE) samt den mot påkänningstillståndet PHI svarande vridmedelpunkten (UP, VP). I den följande raden ges storleken av radien (RO) i den gränscirkel, som har centrum i (UP, VP) och som delar punktgruppen i en elastisk (eventuellt blandad) och en plastisk zon. Slutligen fås i tabellform för varje punkt punktnummer (NO), punktens radie (RADIUS) med avseende på (UP, VP) samt punktkraftens storlek, dividerad med P_o (FORCE).

Utskrift av page 3 (samt 5 och 7) fås, då PRINT 4 aktiveras. Här beskrivs residualkrafttillståndet, sedan den yttre kraften avlastats till noll. Först ges de tre deformationsparametrar, som bestämmer tillskottsdeformationen, nämligen vridmedelpunkten (U, V) för rotationen jämte rotationens storlek (TAU). Den inre kraftbilden beskrivs slutligen i tabell, omfattande för varje punkt: punktnummer (NO), punktens momentana vridcentrum (XC, YC) samt punktkraftens storlek, dividerad med P_o (FORCE).

POINT SET STRUCTURE
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 1053

POINT SET DATA

NO	X	Y	G
11	-2.00	-4.00	1.00
13	2.00	-4.00	1.00
22	0.00	-2.00	1.00
31	-2.00	0.00	1.00
33	2.00	0.00	1.00
42	0.00	2.00	1.00
51	-2.00	4.00	1.00
53	2.00	4.00	1.00
62	0.00	6.00	1.00

POSITION OF EXTERNAL FORCE XN= 5.00 YN= 0.00 PSI= 75.00

CALCULATION ALTERNATIVE NO 1

YIELDLEVEL	YIELDRANGE
.5000	.3333
.5833	.0606
.6667	.0606
.7500	.0606
.8333	.0606
.9167	.0606

VALUES OF PHI
2.000 1.000 .500

POINT SET STRUCTURE
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 1053

STATE OF STRESS PHI= 2.000

EXTERNAL FORCE N= 2.467

CENTRE OF GRAVITY XG= 0.00 YG= .67
CENTRE OF TWIST UNDER ELASTIC CONDITIONS UE= -2.75 VE= 1.40
CENTRE OF TWIST UNDER ELASTOPLASTIC CONDITIONS UP= -2.40 VP= 1.68

RADIUS OF THE BOUNDARY CIRCLE R0= 14.377

NO	RADIUS	FORCE
11	5.70	.500
13	7.19	.500
22	4.40	.500
31	1.73	.331
33	4.71	.500
42	2.43	.464
51	2.35	.450
53	4.98	.500
62	4.94	.500

POINT SET STRUCTURE PAGE 3
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 1053

AFTER RELAXATION

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST U= -2.75 V= 1.40
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST TAU= -.09639

NO	XC	YC	FORCE
11	-6.23	-1.44	-.043
13	-3.63	.68	-.197
22	-.50	3.23	.091
31	-2.06	1.97	.186
33	1.01	4.46	.044
42	-2.06	1.97	.195
51	-2.06	1.97	.193
53	5.71	8.30	.023
62	4.51	7.32	.022

POINT SET STRUCTURE PAGE 4
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 1053

STATE OF STRESS PHI= 1.000

EXTERNAL FORCE N= 3.664

CENTRE OF GRAVITY XG= 0.00 YG= .67
CENTRE OF TWIST UNDER ELASTIC CONDITIONS UE= -2.75 VE= 1.40
CENTRE OF TWIST UNDER ELASTOPLASTIC CONDITIONS UP= -2.59 VP= 1.31

RADIUS OF THE BOUNDARY CIRCLE R0= 7.017

NO	RADIUS	FORCE
11	5.34	.750
13	7.02	1.000
22	4.20	.583
31	1.44	.500
33	4.77	.667
42	2.68	.500
51	2.75	.500
53	5.32	.750
62	5.36	.750

POINT SET STRUCTURE
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 1053

AFTER RELAXATION

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST U= -2.75 V= 1.40
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST TAU= -.14318

NO	XC	YC	FORCE
11	-10.72	5.97	-.037
13	-36.55	20.78	-.031
22	-7.86	4.33	-.044
31	-2.47	1.25	.273
33	-9.29	5.16	-.042
42	-2.06	1.01	.100
51	-1.99	.97	.117
53	-13.41	7.52	-.033
62	-9.90	5.50	-.031

POINT SET STRUCTURE
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 1053

STATE OF STRESS PHI= .500

EXTERNAL FORCE N= 4.758

CENTRE OF GRAVITY XG= 0.00 YG= .67
CENTRE OF TWIST UNDER ELASTIC CONDITIONS UE= -2.75 VE= 1.40
CENTRE OF TWIST UNDER ELASTOPLASTIC CONDITIONS UP= -2.50 VP= 1.54

RADIUS OF THE BOUNDARY CIRCLE R0= 3.567

NO	RADIUS	FORCE
11	5.56	1.000
13	7.13	1.000
22	4.33	1.000
31	1.62	.500
33	4.75	1.000
42	2.54	.709
51	2.51	.688
53	5.13	1.000
62	5.11	1.000

POINT SET STRUCTURE
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 1053

AFTER RELAXATION

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST U= -2.75 V= 1.40
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST TAU= -.18596

NO	XC	YC	FORCE
11	-10.10	-2.57	-.050
13	-3.51	.99	-.340
22	-1.47	2.09	.196
31	-2.12	1.74	.215
33	-.61	2.56	.089
42	-2.00	1.80	.187
51	-1.97	1.82	.191
53	2.61	4.30	.006
62	2.34	4.15	.028

6.3.2 Beräkning enligt alternativ 2

Utskriften av page 1, vilken innehåller datakvitto och ombesörjs av PRINT 1, följer till och med tabellen för beskrivning den generaliserade arbetslinjen uppläggningen enligt beräkningsalternativ 1.

Därpå följer först de båda talen (PHI) och (ALPHA), vilka bestämmer lastcykelns övre och undre gräns, sedan antalet cykler (i detta beräkningsalternativ i allmänhet lika med 1) och slutligen antalet ekvidistanta laststeg i en halvcykel.

Page 2 är till sin uppläggning identisk med motsvarande sida i beräkningsalternativ 1. Här ges tillståndet omedelbart före lastcykelns inledning.

Utskrift av page 3 (samt 4, 5 och 6) fås genom aktivering av PRINT 3. Här ges krafttillståndet inom konstruktionen efter avslutning av ett laststeg. Utskriften omfattar information om aktuellt steg och cykel, gällande värde för den yttre kraften (N), värden för deformationsparametrarna U, V och TAU jämte en beskrivning av den inre kraftbilden i tabell med för varje punkt punktnummer (NO), punktens momentana vridcentrum (XC, YC) samt punktkraftens storlek, dividerad med P_o (FORCE).

Efter sista steget i en halvcykel kompletteras de ovan angivna upplysningarna med information om vilket värde på ALPHA, som har tillämpats vid beräkning av undre cykelgränsen, se page 6. Detta kan vara ett annat värde än det, som anges på page 1, beroende på den justering av undre cykelgränsen, som äger rum vid övertramp av den undre brottgränsen.

Utskrift av page 7 erhålles vid anrop av PRINT 5. Denna utskrift är aktuell endast för symmetriska cykler.

POINT SET STRUCTURE
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 2054

POINT SET DATA

NO	X	Y	G
11	-2.00	-4.00	1.00
13	2.00	-4.00	1.00
22	0.00	-2.00	1.00
31	-2.00	0.00	1.00
33	2.00	0.00	1.00
42	0.00	2.00	1.00
51	-2.00	4.00	1.00
53	2.00	4.00	1.00
o2	0.00	6.00	1.00

POSITION OF EXTERNAL FORCE N XN= 5.00 YN= 0.00 PSI= 75.00

CALCULATION ALTERNATIVE NO 20

YIELDLEVEL	YIELDRANGE
.5000	.3333
.5833	.0606
.6667	.0606
.7500	.0606
.8333	.0606
.9167	.0606

UPPER LIMIT NMAX CORRESPONDS TO PHI = .500
LOWER LIMIT NMIN CORRESPONDS TO ALPHA=-1.000

NUMBER OF CYCLES= 1
STEPS IN A HALFCYCLE= 4

POINT SET STRUCTURE
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 2054

STATE OF STRESS PHI= .500

EXTERNAL FORCE N= 4.758

CENTRE OF GRAVITY XG= 0.00 YG= .67
CENTRE OF TWIST UNDER ELASTIC CONDITIONS UE= -2.75 VE= 1.40
CENTRE OF TWIST UNDER ELASTOPLASTIC CONDITIONS UP= -2.50 VP= 1.54

RADIUS OF THE BOUNDARY CIRCLE R0= 3.567

NO	RADIUS	FORCE
11	5.56	1.000
13	7.13	1.000
22	4.33	1.000
31	1.62	.500
33	4.75	1.000
42	2.54	.709
51	2.51	.688
53	5.13	1.000
62	5.11	1.000

POINT SET STRUCTURE PAGE 3
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 2054

STATE AFTER STEP NO 1 IN CYCLE NO 1

EXTERNAL FORCE N= 2.379

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST U= -2.75 V= 1.40
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST TAU= -.09298

NO	XC	YC	FORCE
11	-2.23	1.68	.494
13	-2.01	1.80	.333
22	-2.33	1.63	.595
31	-2.39	1.59	.355
33	-2.30	1.64	.541
42	-2.37	1.60	.448
51	-2.37	1.61	.438
53	-2.27	1.66	.497
62	-2.27	1.66	.502

POINT SET STRUCTURE PAGE 4
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 2054

STATE AFTER STEP NO 2 IN CYCLE NO 1

EXTERNAL FORCE N= 0.000

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST U= -2.75 V= 1.40
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST TAU= -.18596

NO	XC	YC	FORCE
11	-10.10	-2.57	-.050
13	-3.51	.99	-.340
22	-1.47	2.09	.196
31	-2.12	1.74	.215
33	-.61	2.56	.089
42	-2.00	1.80	.187
51	-1.97	1.82	.191
53	2.61	4.30	.006
62	2.34	4.15	.028

POINT SET STRUCTURE PAGE 5
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 2054

STATE AFTER STEP NO 3 IN CYCLE NO 1

EXTERNAL FORCE N= -2.379

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST U= -2.56 V= 1.52
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST TAU= -.37390

NO	XC	YC	FORCE
11	-2.62	1.50	-.500
13	-2.60	1.50	-.593
22	-2.66	1.48	-.500
31	-2.87	1.41	-.107
33	-2.64	1.49	-.500
42	-2.75	1.45	-.266
51	-2.73	1.46	-.265
53	-2.63	1.49	-.500
62	-2.63	1.49	-.500

POINT SET STRUCTURE PAGE 6
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 2054

STATE AFTER STEP NO 4 IN CYCLE NO 1

EXTERNAL FORCE N= -4.758
ACCORDING TO ALPHA=-1.000

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST U= -2.50 V= 1.54
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST TAU=-1.04746

NO	XC	YC	FORCE
11	-2.50	1.54	-1.000
13	-2.50	1.54	-1.000
22	-2.50	1.54	-1.000
31	-2.50	1.54	-.500
33	-2.50	1.54	-1.000
42	-2.50	1.54	-.705
51	-2.50	1.54	-.692
53	-2.50	1.54	-1.000
62	-2.50	1.54	-1.000

POINT SET STRUCTURE PAGE 7
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 2054

THE REMAINDER OF THIS CALCULATION HAS BEEN OMITTED BECAUSE OF SYMMETRY

6.3.3 Beräkning enligt alternativ 3

Utskriften av page 1, vilken innehåller datakvitto och ombesörjs av PRINT 1, följer till och med upplysningen om värdena för PHI och ALPHA uppläggningen enligt beräkningsalternativen 1 och 2. Här utelämnas dock alltid den tabell vilken beskriver den generaliserade arbetslinjen, eftersom denna ej är aktuell för alternativ 3.

I de följande två raderna anges dels hur många lastcykler beräkningen skall omfatta och dels antalet cykler i en redovisningsperiod. Slutligen anges de tre parametrar, som bestämmer strain hardening förloppet

κ_o (= KAPPA)
σ_o (= NY)
ζ_o (= BETA)

Page 2, vilken utskrivs vid anrop av PRINT 7, ger det funktionella sambandet mellan antalet flyttillfällen (NY) vid en punkt och aktuell relativ flytkraft (KAPPA) vid samma punkt. Sambandet redovisas även i tabellform.

Utskriften av page 3 (samt 5 och 7) erhålles vid anrop av PRINT 9. Denna inleds med ett angivande av avsett cykelnummer. Cykelnummer 0 svarar därvid mot tillståndet omedelbart efter första pålastning. Aktuella cykelgränser dividerade med P_o anges å de följande två raderna samt därefter aktuella deformationsparametrar (U, V och TAU).

Utskriften avslutas med en redovisning av det inre tillståndet vid övre cykelgränsen. Redovisningen ges i form av en tabell omfattande för varje punkt: punktnummer (NO), antalet flyttillfällen vid punkten (NOY), aktuellt värde för den relativa flytkraftens storlek (KAPPA), beräknat enligt sambandet å page 2, punktens momentana vridcentrum (XC, YC) och slutligen punktkraftens storlek, dividerad med P_o (FORCE).

Utskriften av page 4 (samt 6 och 8) erhålles genom aktivering av PRINT 8. Här anges först avsett cykelnummer (med nr 2 avses

därvid förhållandena omedelbart efter cykel 2). Därefter redovisas först det aktuella tillståndet vid konstruktionens övre flytgräns (NL1) och sedan det aktuella tillståndet vid dess övre brottgräns (NLO). För varje sådant tillstånd anges utöver storleken av den yttre kraften dividerad med P_o de aktuella deformationsparametrarna (U, V och TAU) samt i tabellform den inre kraftbilden. Tabellerna omfattar därvid för varje punkt: punktnummer (NO), punktens momentana vridcentrum (XC, YC) och punktkraftens storlek, dividerad med P_o (FORCE).

Utskriften avslutas med förhållandet (GAMMA) mellan storleken på den övre brottgränsen och den övre flytgränsen.

För utskriften i page 9, vilken avser tillståndet efter relaxation, hänvisas till beskrivning av motsvarande utskrift under beräkningsalternativ 1.

POINT SET STRUCTURE
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 3055

PAGE 1

POINT SET DATA

NO	X	Y	G
11	-2.00	-4.00	1.00
13	2.00	-4.00	1.00
22	0.00	-2.00	1.00
31	-2.00	0.00	1.00
33	2.00	0.00	1.00
42	0.00	2.00	1.00
51	-2.00	4.00	1.00
53	2.00	4.00	1.00
62	0.00	6.00	1.00

POSITION OF EXTERNAL FORCE N XN= 5.00 YN= 0.00 PSI= 75.00

CALCULATION ALTERNATIVE NO 30

UPPER LIMIT NMAX CORRESPONDS TO PHI = .500
LOWER LIMIT NMIN CORRESPONDS TO ALPHA=-1.000

NUMBER OF CYCLES= 2
PERIOD OF CYCLES= 1

KAPPA= 1.200 AT NY CYCLES
NY = 100
BETA = .04000

POINT SET STRUCTURE
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 3055

PAGE 2

STRAIN HARDENING ACCORDING TO KAPPA=(1.01596*NY+1)$^{.03937}$

NY	KAPPA
0	1.000
1	1.028
2	1.045
3	1.057
4	1.066
5	1.074
6	1.080
7	1.086
8	1.091
9	1.096
10	1.100
20	1.128
30	1.145
40	1.158
50	1.168
60	1.176
70	1.183
80	1.190
90	1.195
100	1.200
200	1.233
300	1.253
400	1.267
500	1.278
600	1.287
700	1.295
800	1.302
900	1.308
1000	1.313

POINT SET STRUCTURE PAGE 3
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 3055

STATE AFTER CYCLE NO 0

NMAX= 4.751
NMIN= -4.751

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST U= -2.50 V= 1.58
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST TAU= .27869

NO	NOY	KAPPA	XC	YC	FORCE
11	1	1.028	-2.50	1.58	1.000
13	1	1.028	-2.50	1.58	1.000
22	1	1.028	-2.50	1.58	1.000
31	0	1.000	-2.50	1.58	.463
33	1	1.028	-2.50	1.58	1.000
42	0	1.000	-2.50	1.58	.708
51	0	1.000	-2.50	1.58	.669
53	1	1.028	-2.50	1.58	1.000
62	1	1.028	-2.50	1.58	1.000

POINT SET STRUCTURE PAGE 4
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 3055

LIMIT STATES AFTER CYCLE NO 0

YIELD VALUE OF EXTERNAL FORCE NL1= 3.558
CENTRE OF ADDITIONAL TWIST U= -2.75 V= 1.40
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST TAU= .13906

NO	XC	YC	FORCE
11	-2.75	1.40	.758
13	-2.75	1.40	1.000
22	-2.75	1.40	.608
31	-2.75	1.40	.221
33	-2.75	1.40	.688
42	-2.75	1.40	.391
51	-2.75	1.40	.376
53	-2.75	1.40	.752
62	-2.75	1.40	.745

ULTIMATE VALUE OF EXTERNAL FORCE NL0= 5.062
CENTRE OF ADDITIONAL TWIST U= -2.37 V= 1.48
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST TAU= .65524

NO	XC	YC	FORCE
11	-2.37	1.48	1.000
13	-2.37	1.48	1.000
22	-2.37	1.48	1.000
31	-2.37	1.48	1.000
33	-2.37	1.48	1.000
42	-2.37	1.48	1.000
51	-2.37	1.48	1.000
53	-2.37	1.48	1.000
62	-2.37	1.48	1.000

GAMMA= 1.42

POINT SET STRUCTURE PAGE 5
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 3055

STATE AFTER CYCLE NO 1

NMAX= 4.751
NMIN= -4.751

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST U= -2.60 V= 1.53
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST TAU= .43834

NO	NOY	KAPPA	XC	YC	FORCE
11	3	1.057	-2.61	1.55	1.045
13	3	1.057	-2.61	1.54	1.045
22	2	1.045	-2.60	1.58	.892
31	0	1.000	-2.58	1.59	.361
33	3	1.057	-2.60	1.56	1.045
42	0	1.000	-2.58	1.59	.568
51	0	1.000	-2.58	1.59	.559
53	3	1.057	-2.61	1.55	1.045
62	3	1.057	-2.61	1.55	1.045

POINT SET STRUCTURE PAGE 6
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 3055

LIMIT STATES AFTER CYCLE NO 1

YIELD VALUE OF EXTERNAL FORCE NL1= 2.621
CENTRE OF ADDITIONAL TWIST U= -2.75 V= 1.40
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST TAU= .28810

NO	XC	YC	FORCE
11	-3.05	1.22	.545
13	-2.92	1.30	1.045
22	-3.44	1.02	.236
31	-3.12	1.25	.125
33	-3.20	1.15	.399
42	-3.12	1.25	.241
51	-3.12	1.25	.224
53	-3.10	1.20	.531
62	-3.10	1.20	.515

ULTIMATE VALUE OF EXTERNAL FORCE NL0= 5.249
CENTRE OF ADDITIONAL TWIST U= -2.43 V= 1.47
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST TAU= .87274

NO	XC	YC	FORCE
11	-2.39	1.46	1.045
13	-2.40	1.46	1.045
22	-2.37	1.46	1.045
31	-2.37	1.47	.999
33	-2.38	1.46	1.045
42	-2.37	1.47	1.000
51	-2.37	1.47	1.000
53	-2.39	1.46	1.045
62	-2.39	1.46	1.045

GAMMA= 2.00

POINT SET STRUCTURE PAGE 7
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 3055

STATE AFTER CYCLE NO 4

NMAX= 4.751
NMIN= -4.751

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST U= -2.65 V= 1.55
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST TAU= .41014

NO	NOY	KAPPA	XC	YC	FORCE
11	5	1.074	-2.66	1.56	1.066
13	5	1.074	-2.65	1.55	1.066
22	2	1.045	-2.65	1.60	.856
31	0	1.000	-2.62	1.61	.371
33	3	1.057	-2.65	1.58	1.005
42	0	1.000	-2.62	1.61	.569
51	0	1.000	-2.62	1.61	.531
53	5	1.074	-2.65	1.57	1.066
62	5	1.074	-2.65	1.57	1.066

POINT SET STRUCTURE PAGE 8
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 3055

LIMIT STATES AFTER CYCLE NO 2

YIELD VALUE OF EXTERNAL FORCE NL1= 2.800
CENTRE OF ADDITIONAL TWIST U= -2.75 V= 1.40
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST TAU= .29507

NO	XC	YC	FORCE
11	-2.94	1.17	.553
13	-2.86	1.27	1.066
22	-3.03	1.11	.332
31	-2.88	1.24	.152
33	-2.96	1.14	.457
42	-2.88	1.24	.298
51	-2.88	1.24	.289
53	-2.97	1.14	.540
62	-2.98	1.15	.524

ULTIMATE VALUE OF EXTERNAL FORCE NL0= 5.321
CENTRE OF ADDITIONAL TWIST U= -2.45 V= 1.48
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST TAU= .84959

NO	XC	YC	FORCE
11	-2.40	1.46	1.066
13	-2.41	1.47	1.066
22	-2.38	1.47	1.045
31	-2.38	1.46	.999
33	-2.39	1.47	1.057
42	-2.38	1.48	1.000
51	-2.38	1.48	1.000
53	-2.39	1.46	1.066
62	-2.39	1.46	1.066

GAMMA= 1.90

POINT SET STRUCTURE
GENERAL PROGRAM
CALCULATION NO 3055

AFTER RELAXATION

CENTRE OF ADDITIONAL TWIST U= -2.75 V= 1.40
ANGLE OF ADDITIONAL TWIST TAU= -.18566

NO	XC	YC	FORCE
11	1.02	8.06	.057
13	-3.10	.82	-.271
22	.54	7.85	.058
31	-1.81	2.92	.086
33	-1.68	3.35	.094
42	-1.81	2.92	.060
51	-1.81	2.92	.032
53	-1.65	3.37	.065
62	-1.81	3.09	.072

7. SLUTORD

I PSS och dess fortsättning i föreliggande skrift presenteras en metod för beräkning av elasto-plastiska tillståndsförändringar inom en punktgrupp till följd av intensitetsväxlingar för den yttre lasten. Denna kan därvid vara en kraft i ett fixerat läge eller ett moment med sin vektor vinkelrät mot gruppens plan. Den framlagda metoden har kompletterats med ett datamaskinprogram, med vilket olika typer av punktkonstruktioner funktionellt studerats - dels med avseende på residualkrafttillståndet efter avlastning dels för en detaljerad analys av kraftspelet under en genomgång av en enkel lastcykel och slutligen dels med hänsyn till de förändringar i konstruktionens egenskaper, som en serie konsekutiva lastcykler åstadkommer, då effekten av strain hardening beaktas.

För residualkrafttillståndet efter avlastning kan därvid observeras att detta, som kan vara betydande vid relaxation från den första pålastningen, kan avsevärt reduceras eller helt avlägsnas genom en serie lastcykler med upprepad flytning vid cykelgränserna.

Genom redovisat studium av enkel lastcykel belyses klart kraftvariationen för punktgruppens enskilda punkter under cykelgenomgången, såväl då den enskilda punkten har idealelasto-plastiska egenskaper som då dess egenskaper beskrivs av mera generaliserade arbetslinjer.

Studiet av punktgruppens beteende under upprepade lastväxlingar med hänsyn tagen till strain hardening visar bl a Bauschingereffekten efter varje stegring av cykelgränsen samt en för denna effekt avklingande tendens vid upprepning. Samtidigt noteras att avståndet mellan konstruktionens flyt- och brottgräns successivt minskas, innebärande en ökad sprödhet för konstruktionen, vid upprepade lastväxlingar. Detta resulterar i - vid lastväxlingar mellan fixerade cykelgränser i det elasto-plastiska området - att konstruktionens beteende så småningom antar en helt elastisk karaktär. Vidare belyser studiet förändringen av fördelningen av den kraftupptagande förmågan mellan punktgruppens plastiska och elastiska zoner under en serie lastväxlingar vid fixerade cykelgränser, in-

nebärande en successiv överflyttning av lasten från den elastiska till den plastiska zonen. Samtidigt härmed ökar utbredningen av den elastiska zonen på den plastiska zonens bekostnad.

Det presenterade datamaskinprogrammet torde primärt tjäna som hjälpmedel vid fortsatt teoretisk eller teoretisk-experimentell forskning inom området för punktkonstruktioner, utsatta för växlande last. I andra hand bör programmet kunna utnyttjas vid en praktisk dimensionering av punktkonstruktioner. För att öka den framlagda metodens - och därmed programmets - allmänna användbarhet har nämligen genomgående eftersträvats en obundenhet vid absoluta materialdata. Hållfasthetsläran och materiallläran får sedan i varje enskilt fall ge de materialdata, som erfordras, då metoden skall tillämpas vid konkret dimensionering. Då metoden skall utnyttjas i samband med fenomenologiska studier av punktkonstruktioner är sådana uppgifter däremot ordinärt ej nödvändiga.

Några exempel på beräkningsmetodens användning ges i det följande.

1. Dimensionering av nit- och skruvförband påverkade av periodiskt varierande last med aktualitet då dessa uppträder som konstruktionselement i t ex maskiner, varvid förbanden utsätts för inverkan av tröghetskrafter från svängande eller roterande massor. Ett studium av kraftspelets variation inom förbandet under en svängningsperiod torde här ge värdefulla upplysningar om förbandets utmattningskänslighet.

2. Val av geometri för samt dimensionering av nit- eller skruvförband i byggnader i jordbävningsområden. Förbanden måste därvid primärt utformas på ett sådant sätt, att de medger största möjliga energiupptagning före brott.

3. Gränslastteoretisk dimensionering av statiskt obestämda balkar och ramar med punktkonstruktioner i flytsnitt. Då gränslastmetoder tillämpas vid bärverksdimensionering, måste, vid bestämning av elementarmekanismernas gränslastmoment, hänsyn tagas till läget av enskild mekanisms verkliga rotationscentrum. Då en flytled därvid utbildas i t ex en infästning, utformad som en punktkonstruktion, sammanfaller rotationscentrum i allmänhet icke med den

teoretiska knutpunkten. Förhållandet kan ytterligare kompliceras av att rotationscentrum ändrar läge vid lastupprepning. För en noggrann analys av sådana problem bör framlagd beräkningsmetod kunna ge värdefull information.

4. Funktionsanalys av friktionsförbands verkningssätt. Använd som komplement till experimentella undersökningar kan den framlagda metoden medge fördjupade studier av friktionsförbands verkningssätt. En sådan förbandstyp karakteriseras av att det kraftöverförande mediet utgörs av ett antal till sin utbredning okända ytor och icke, som beräkningstekniskt ordinärt förutsätts, av en samling diskreta punkter, sammanfallande med de tillhörande punktidealiserade skruvar, som åstadkommer förbandets klämkraft. Troligen är en sådan beräkningsteknisk förutsättning realistisk för de punkter inom förbandet, för vilka flytning äger rum vid den högsta flytnivån. Däremot torde förutsättningen ej vara tillfredsställande uppfylld för förbandets övriga punkter.

Föreliggande arbete har begränsats till ett studium av inverkan från variationer av den yttre kraftens storlek vid fixerad verkningslinje. En närliggande generalisering utgör den framlagda metoden utbyggd till att omfatta även sådana fall, där den elastoplastiska tillståndsvariationen förorsakas av laster, som antingen utför translation eller roterar. En sådan utvidgning torde principiellt kunna genomföras enligt samma linjer, som de här presenterade, d.v.s. via ett studium av variationer i systemets inre arbete. I själva verket fordras härför endast smärre ändringar i det framlagda programmet. Genom kombination av tre kraftvariationsformer kan sedan effekten av helt godtyckligt valda förändringar för den yttre lasten studeras.

REFERENSER

Bibliography on Bolted and Riveted Joints, 1967, (ASCE.) Manuals and Reports on Engineering Practice, 48, New York.

Bufler, H, 1968, Theorie diskontinuierlicher und kontinuierlicher Verbindungen. (Springer-Verlag.) Ingenieur-Archiv, Band XXXVII häfte 3, Berlin/Heidelberg/New York.

De Jonge, A.E.R, 1945, Riveted Joints, A Critical Review of the Literature Covering Their Development. (ASME.) New York.

Gullander, P, 1907, Bidrag till teorien för nitförbindningar. Teknisk tidskrift, väg- och vattenbyggnadskonst, 21 sept., Stockholm.

Plem, E, 1968, Design of Point Set Structures. (Statens råd för byggnadsforskning.) Rapport 21, Stockholm.

FIGURFÖRTECKNING

FIG. 1 Påkänningsfördelning inom en punktgrupp i det ideal-elasto-plastiska tillståndet.

FIG. 2 Geometriska storheter för en punkt i en punktkonstruktion i samband med uppställandet av jämviktsekvationerna.

FIG. 3 Sammansättning av rotationen θ_1' under pålastningsfasen och rotationen τ' under avlastningsfasen till resulterande rotation θ_2' för en punkt i en punktkonstruktion.

FIG. 4 Beräknat residualtillstånd efter avlastning av en trepunktskonstruktion efter pålastning till påkänningstillståndet $\varphi = 0.8$.

FIG. 5 Specialbehandling av punkt för vilken $\theta_2 = 0$.

FIG. 6 Punktkraft och punktkraftkomposanter vid en punkt sedan flytning har inträffat.

FIG. 7 Fundamentala geometriska storheter för en punkt i en punktkonstruktion i samband med uppställandet av de tre jämviktsekvationerna.

FIG. 8 Den principiella variationen hos en punktkraft P till följd av avlastning av den yttre kraften N_φ.

FIG. 9 En punktgrupp med sex punkter med lika vikt åverkad av växlande moment jämte sambandet mellan punktkrafternas storlek och det yttre momentet.

FIG. 10 Punktkonstruktion belastad med excentrisk kraft $N{:}P_o$ = = 5.958 svarande mot påkänningstillståndet $\varphi = 0$. Delfiguren till vänster visar punktkrafterna hörande till maximal yttre kraft. Delfiguren till höger visar residualkrafttillståndet efter avlastning.

FIG. 11. Punktkrafterna som funktion av påkänningstillståndet φ för det i figuren visade läget för den yttre kraften efter pålastning (övre kurvor) samt tillhörande residualkrafter efter avlastning från mot φ svarande yttre last (undre kurvor). Delfigurerna till höger visar tillstånden före och efter avlastning då $\varphi = 0.2$.

FIG. 12 Punktkrafter vid uppvärmning och residualkrafter efter avsvalning. Med w markerade krafter svarar mot det varma tillståndet med c markerade mot det kalla. De senare har ritats i fem gånger större skala än de förra.

FIG. 13 Schematisk återgivning av en lastcykel jämte teckenvariation för komposanterna till det inre arbetets gradient.

FIG. 14 Punktkraftvariation vid genomgång av en symmetrisk cykel med cykelgränser bestämda av det initialtillstånd som svarar mot $\varphi = 0.4$.

FIG. 15 Punktkraftvariation vid genomgång av en symmetrisk cykel med cykelgränser svarande mot konstruktionens brottgräns.

FIG. 16 Punktkonstruktion karakteriserad av att punkterna 1 och 3 har vikten g = 1 och punkt 2 vikten g = 2. Figuren visar kraftvariationen vid konstruktionens punkter under en symmetrisk cykel med cykelgränser svarande mot initialtillståndet $\varphi = 0.4$.

FIG. 17 Punktkraftvariation vid genomgång av en symmetrisk lastcykel med cykelgränser bestämda av det initialtillstånd som svarar mot $\varphi = 0.3$.

FIG. 18 Figuren visar kraftvariationen vid en punktkonstruktions punkter under en symmetrisk lastcykel med sådana cykelgränser att beteendet i dominerande grad är elastiskt.

FIG. 19 Punktkraftvariation vid genomgång av en symmetrisk cykel då den yttre lasten är ett moment och initialtillståndet svarar mot $\varphi = 0.3$.

FIG. 20. Punktkraftvariation under osymmetrisk lastcykel karakteriserad av att övre cykelgränsen är numeriskt större än undre cykelgränsen.

FIG. 21 Punktkraftvariation under osymmetrisk lastcykel karakteriserad av att övre cykelgränsen är numeriskt mindre än undre cykelgränsen.

FIG. 22 Två lika punktgrupper med samma last. Den inre kraftbilden är olika på grund av att punktgrupperna har olika förhistoria (vänstra delfiguren: tillstånd efter första pålastning, högra delfiguren: tillstånd efter ytterligare en osymmetrisk lastcykel).

FIG. 23 Krökt arbetslinje för en punkt approximerad med idealiserad arbetslinje uppbyggd av elastiska delar med konstant elasticitetskoefficient samt av flytnivåer av varierande längd.

FIG. 24 a. Idealiserad arbetslinje för en punkt.
b. Fördelning av flytband och elastiska band inom en punktgrupp.
c. Samma som b men i dimensionslös form.

FIG. 25 Punktkraftvariation som funktion av yttre moment hos samma punktgrupp som visas i FIG. 9 men här med två flytnivåer vid de enskilda punkterna (delfigur a) samt motsvarande samband mellan yttre moment M och rotationsdeformation θ (delfigur b).

FIG. 26 Diagrammen visar punktkrafterna som funktion av påkänningstillståndet φ för den i enlighet med FIG. 27 utformade och belastade punktgruppen efter första pålastning (övre kurvor). De enskilda punkternas elasto-plastiska egenskaper karakteriseras av två flytnivåer (n_1 = = 0.6 ; n_2 = 1.0). De undre kurvorna anger residualkraften efter avlastning från mot φ svarande yttre kraft.

FIG. 27. Diagrammen visar punktkrafterna som funktion av påkänningstillståndet φ för den i figuren visade yttre lasten efter pålastning (övre kurvor). De enskilda punkternas elasto-plastiska egenskaper karakteriseras av en krökt arbetslinje approximerad med en idealiserad arbetslinje med flera flytnivåer enligt FIG. 23. De undre kurvorna anger residualkraften efter avlastning från mot φ svarande yttre kraft.

FIG. 28 Punktkraftvariation vid genomgång av en symmetrisk lastcykel med cykelgränser bestämda av det initialtillstånd som svarar mot $\varphi = 0$. De enskilda punkternas elasto-plastiska egenskaper karakteriseras av två flytnivåer ($\eta_1 = 0.6$, $\eta_2 = 1.0$).

FIG. 29 Punktkraftvariation vid genomgång av en symmetrisk lastcykel med cykelgränser bestämda av det initialtillstånd som svarar mot $\varphi = 0$. De enskilda punkternas elasto-plastiska egenskaper svarar mot den i FIG. 23 visade approximerande arbetslinjen med flera flytnivåer.

FIG. 30 Exempel på möjliga former för förloppet av det antagna funktionella sambandet mellan aktuell flytkraft κ och antalet flyttillfällen σ vid en punkt.

FIG. 31 En punkts relativa utmattningshållfasthet och dess relativa flytkraftförhöjning (strain hardening) som funktion av antalet flyttillfällen σ.

FIG. 32 Övergång från ett elasto-plastiskt tillstånd A till ett renodlat elastiskt tillstånd B. τ betecknar härvid rotation svarande mot tillskottsdeformationen.

FIG. 33 Den övre delfiguren visar momentväxlingar som belastar punktgrupp med utformning enligt FIG. 9. Resulterande brottgräns och flytgräns har markerats. Den undre delfiguren visar motsvarande punktkraftsvariation.

FIG. 34 Diagrammen visar för dubbelsymmetrisk punktgrupp med belastning enligt figuren variationen hos gruppens flytgräns och brottgräns jämte punktkraftvariationen under tio symmetriska lastcykler. Det undre diagrammet utvisar även storleken av residualkrafterna efter avlastning som funktion av antalet förutgående lastcykler.

FIG. 35 Inre krafttillståndet vid passage av övre flytgränsen under tio konsekutiva lastcykler för det i FIG. 34 visade lastfallet.

FIG. 36 Variationen för brottgräns och flytgräns jämte tillhörande punktkraftvariation under 20 lastcykler för det i FIG. 34 visade lastfallet.

FIG. 37 Variationen för brottgräns och flytgräns jämte tillhörande punktkraftvariation för det i FIG. 34 visade lastfallet under 100 lastcykler och med redovisning av tillståndet efter varje period om fem cykler.

FIG. 38 Punktgrupp med tillhörande last. I tabellen ges tre alternativa fördelningar av punktvikter inom gruppen. Totalsumman av punktvikter är den samma i de tre fallen.

FIG. 39 Variation av brottgräns och flytgräns under 20 lastväxlingar för det i FIG. 38 visade lastfallet under förutsättning av likformig fördelning av punktvikter över konstruktionen. De nedre figurerna visar residualkrafttillstånden vid avlastning efter cyklerna 0 och 20 respektive. Krafterna i den högra figuren har ritats i en 10 gånger större skala än krafterna i den vänstra.

FIG. 40 Variation av brottgräns och flytgräns under 20 lastväxlingar för det i FIG. 38 visade lastfallet vid en punktviktsfördelning enligt kolumn b. De nedre figurerna visar residualkrafttillstånden efter cyklerna 0 och 20 respektive. Krafterna i den högra figuren har ritats i en 10 gånger större skala än krafterna i den vänstra.

FIG. 41 Variation av brottgräns och flytgräns under 20 lastväxlingar för det i FIG. 38 visade lastfallet vid en punktviktsfördelning enligt kolumn c. De undre figurerna visar residualkrafttillstånden vid avlastning efter cyklerna 0 och 20 respektive.

FIG. 42 Schematisk återgivning av strukturen i datamaskinprogrammet "POINT SET STRUCTURE GENERAL PROGRAM". De svarta punkterna anger vilka procedurer som aktiveras i de olika beräkningsalternativen.

FIG. 43 Strategi vid bestämning av en punktkonstruktions brottgräns.

FIG. 44 Punktkonstruktion med tillhörande belastning jämte arbetslinjen för den enskilda punkten. Exempel använt vid redovisning av resultatuppställningar.

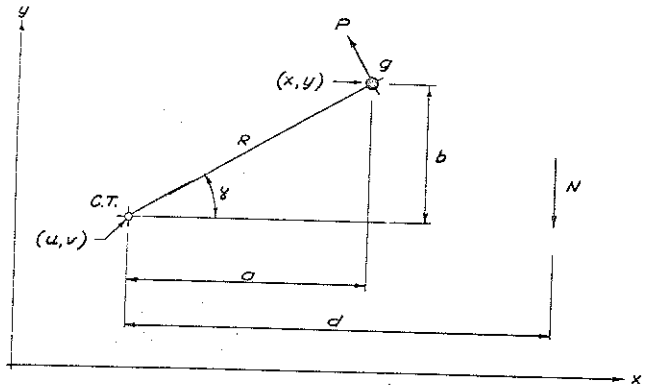


Fig. 2

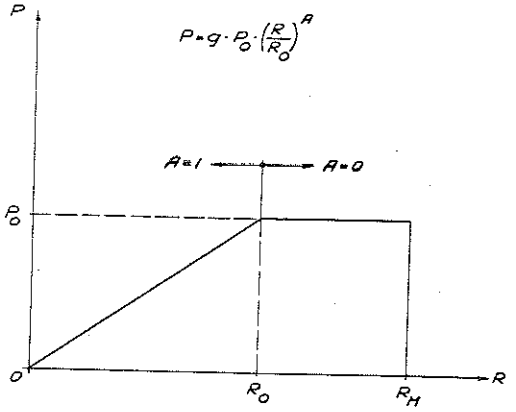
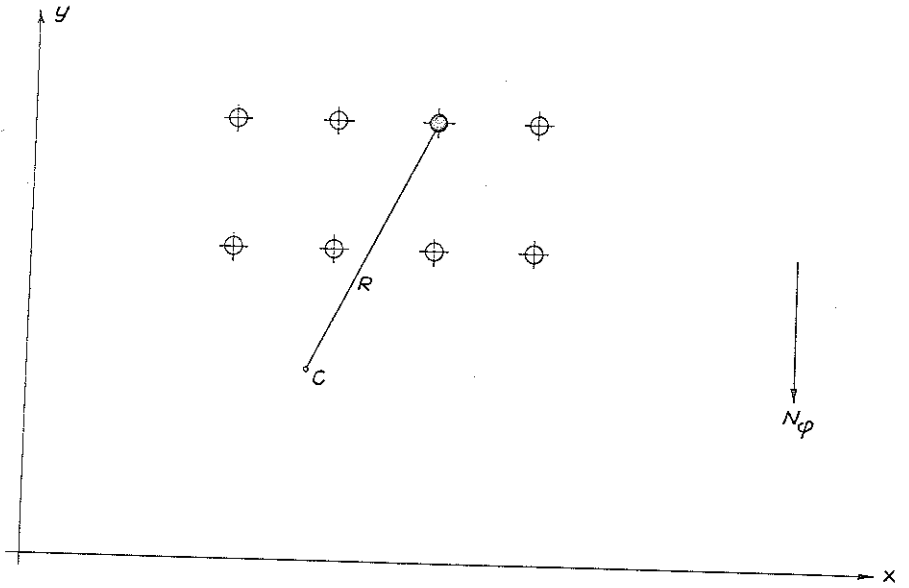


Fig. 1



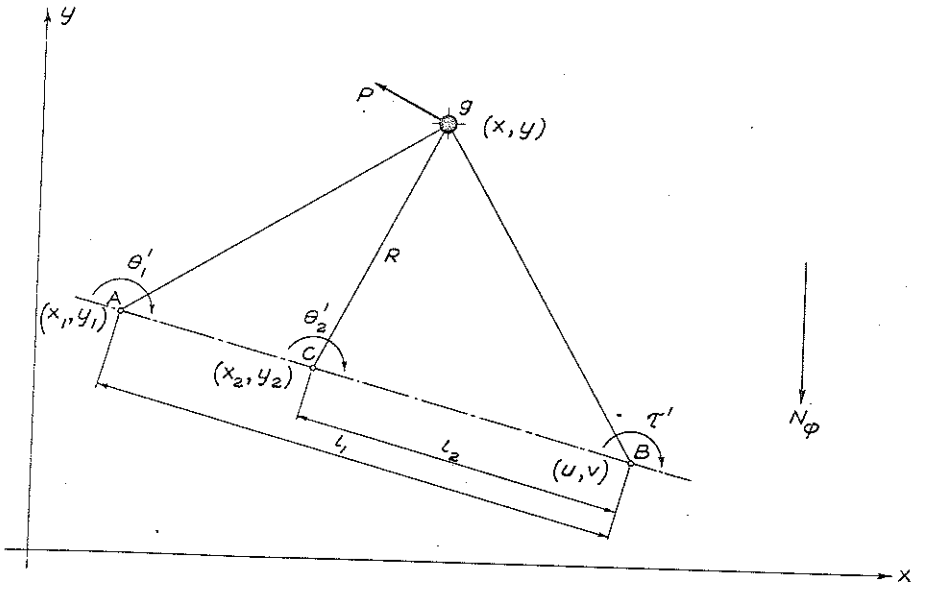


Fig. 3

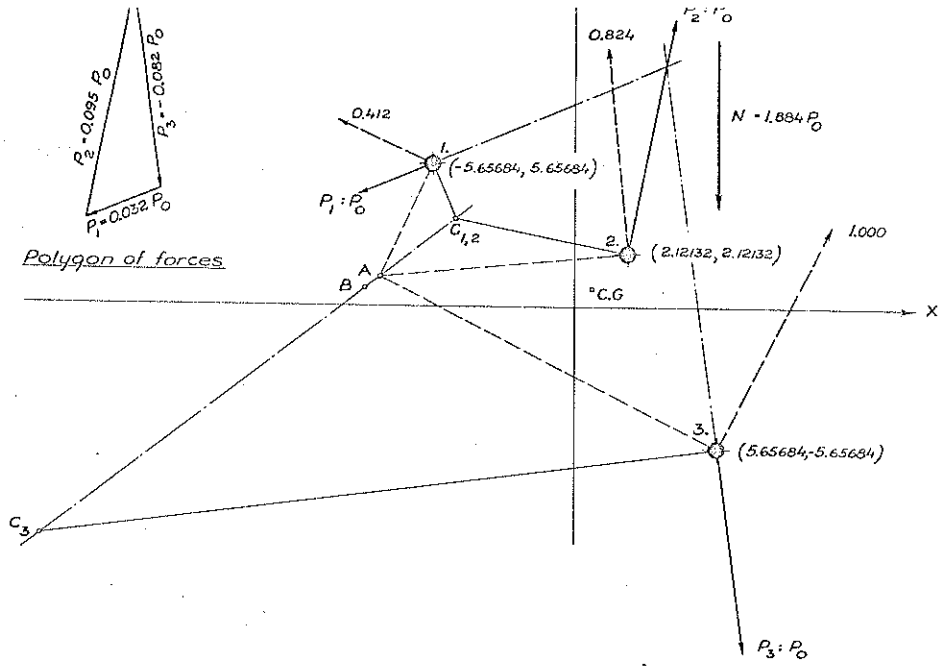


Fig. 4 (ex. 1)

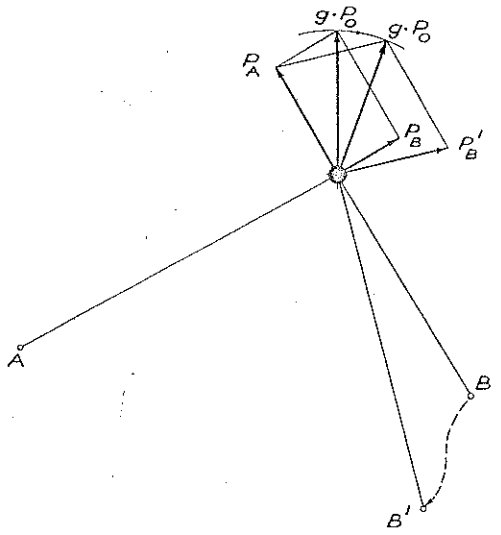


Fig. 6

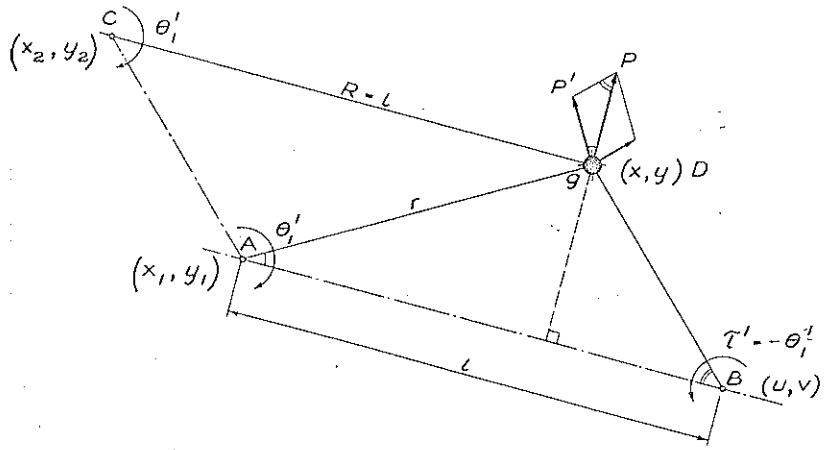


Fig. 5

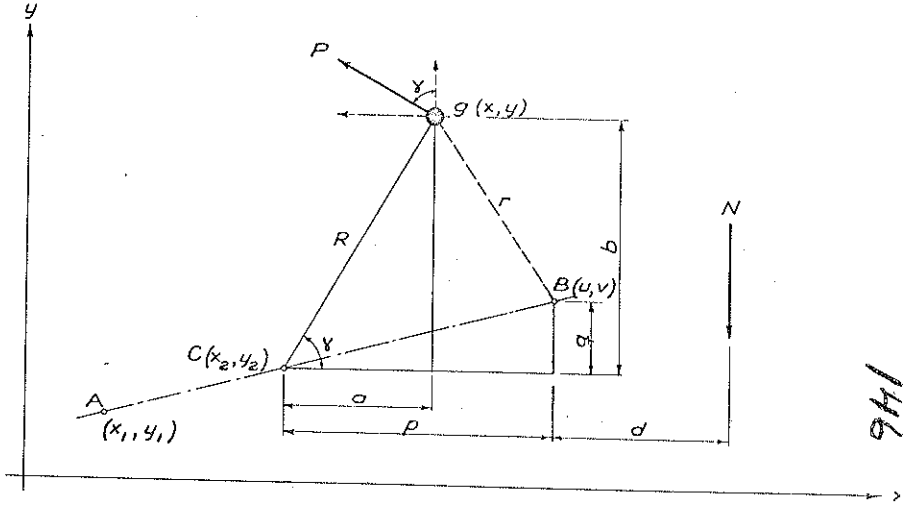


Fig. 7

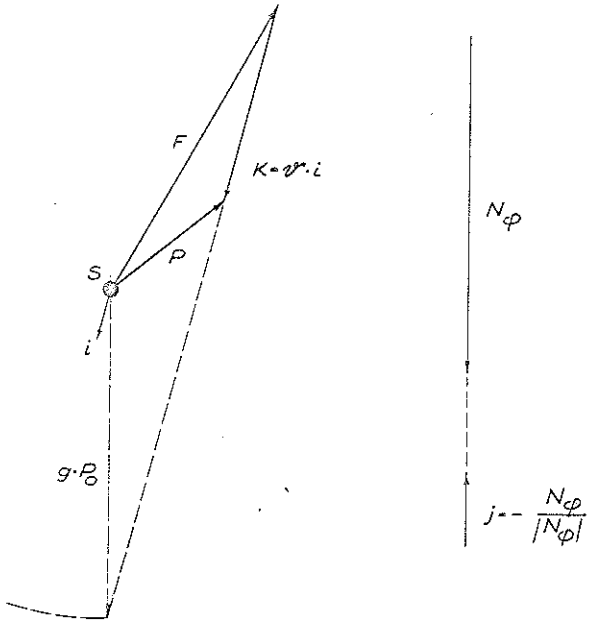


Fig. 8

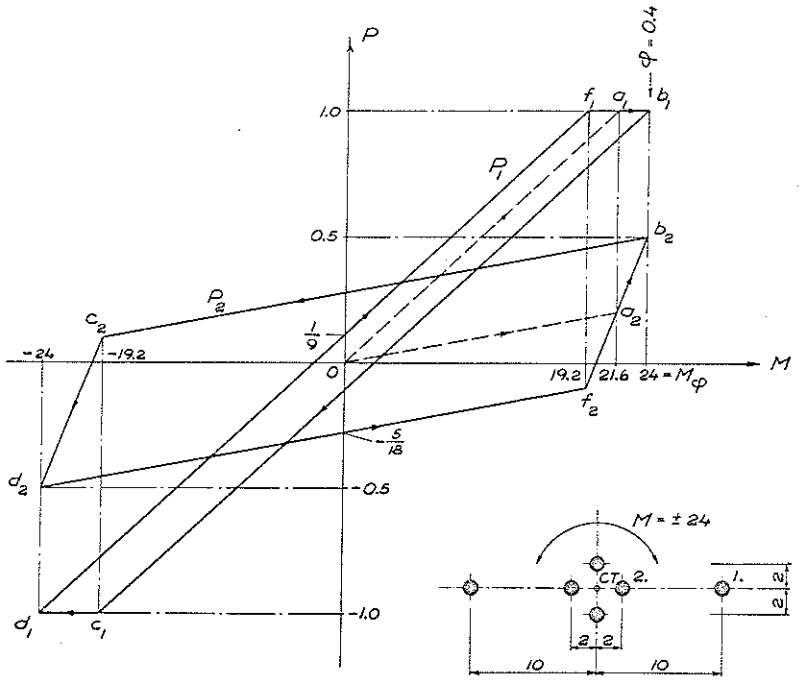


Fig. 9 (ex. 2)

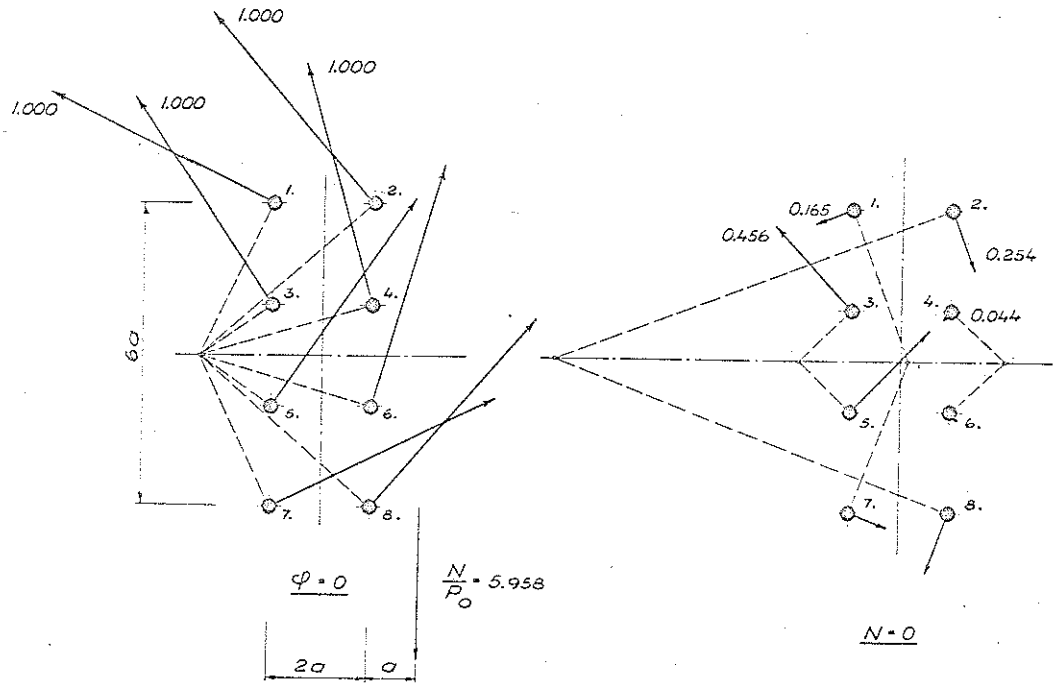


Fig. 10 (ex. 3)

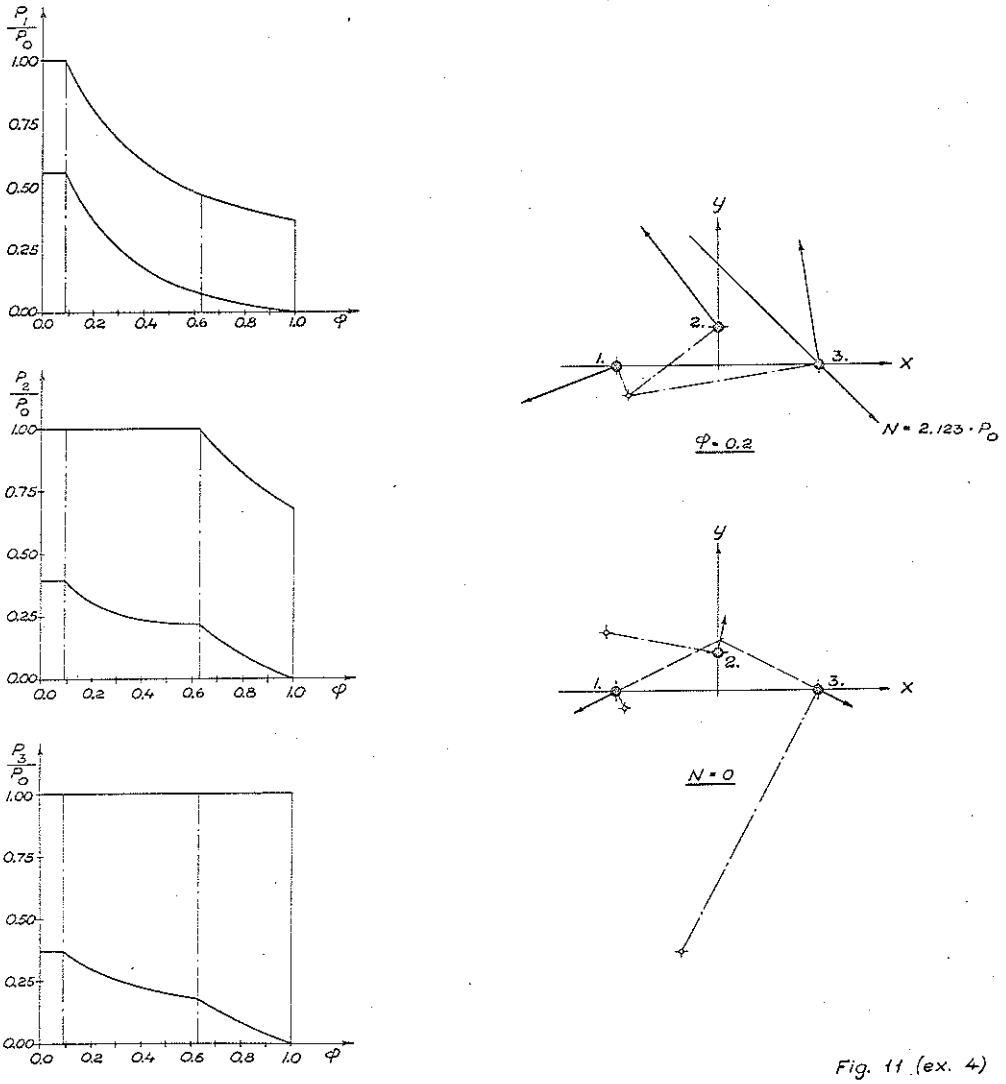


Fig. 11 (ex. 4)

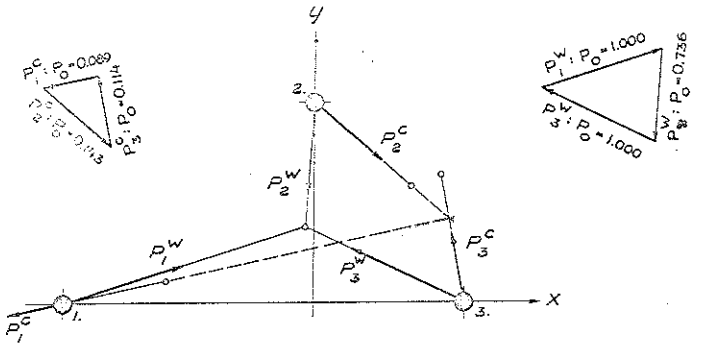


Fig. 12 (ex. 5)

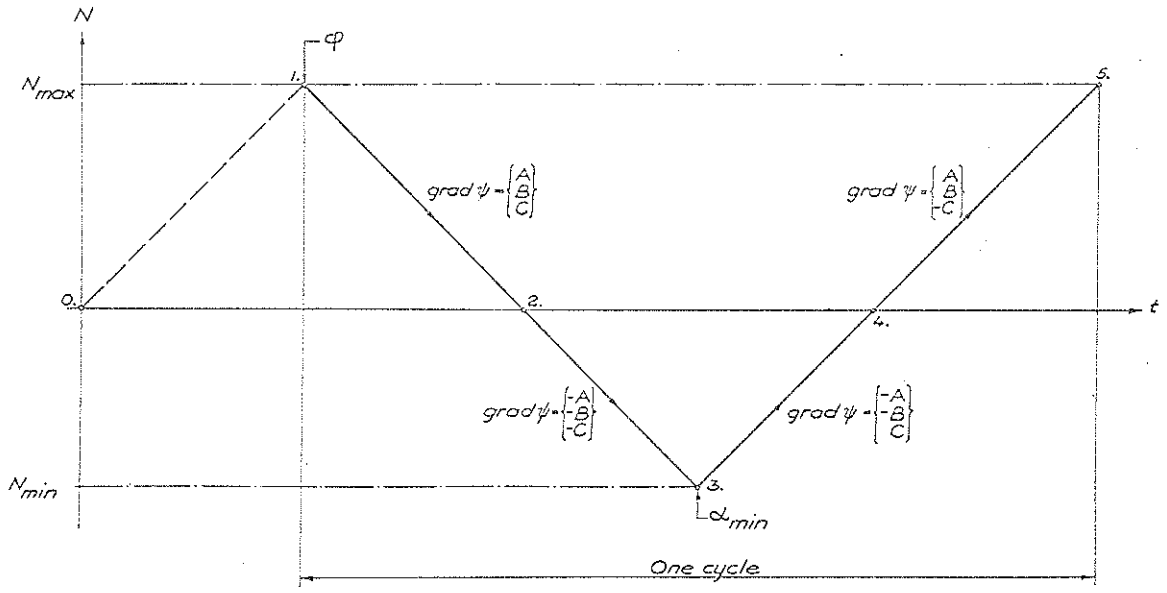
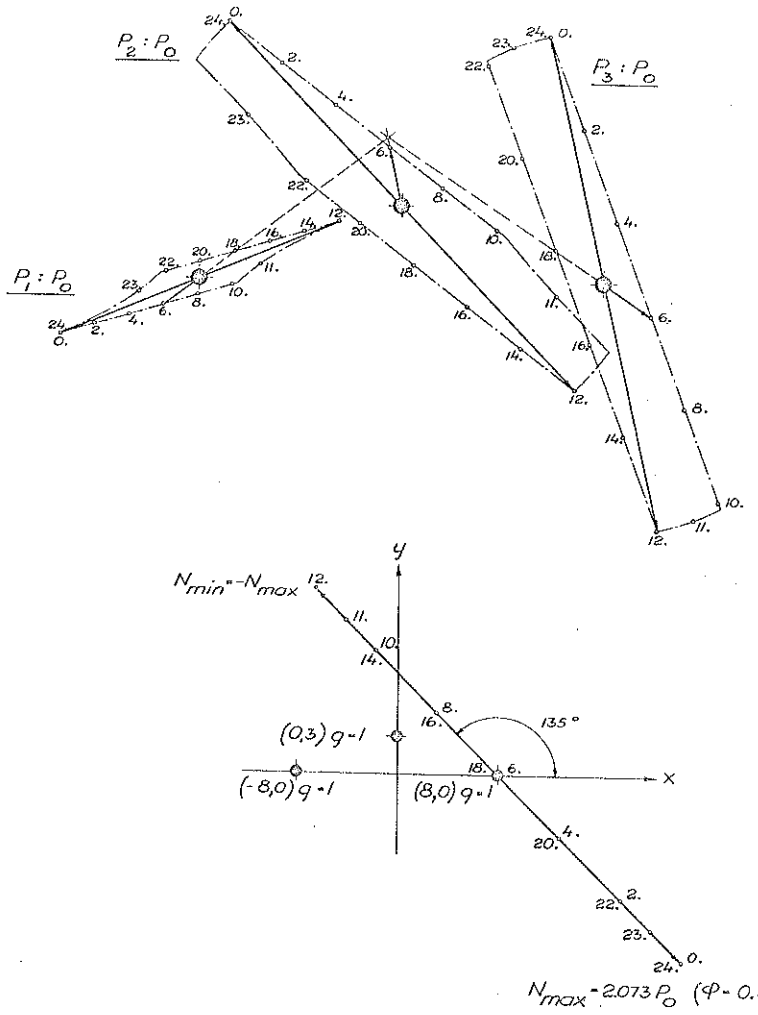
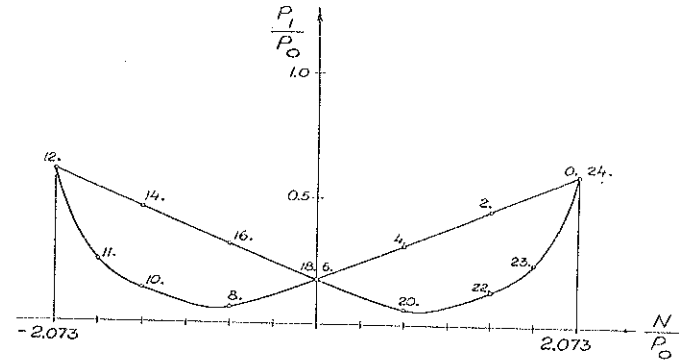
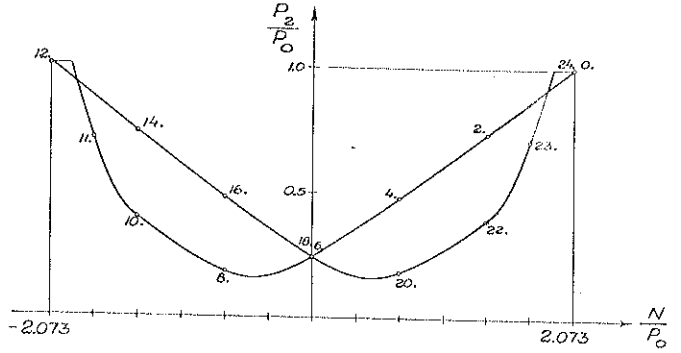


Fig. 13



$N_{max} = 2.073\,P_0 \quad (\varphi = 0.4)$





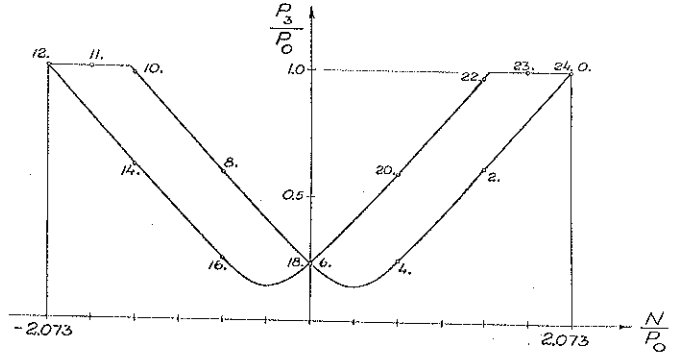
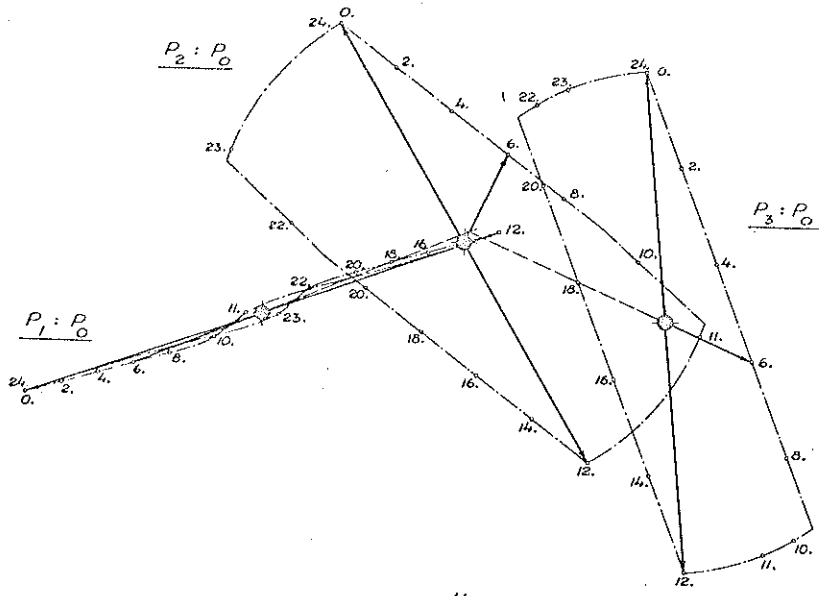
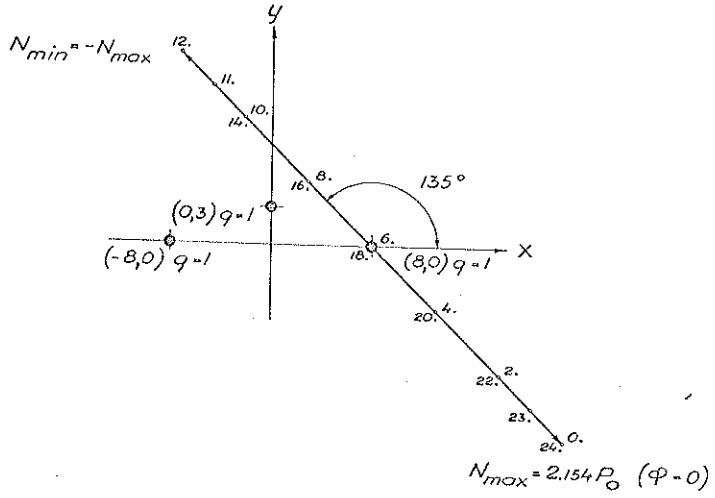
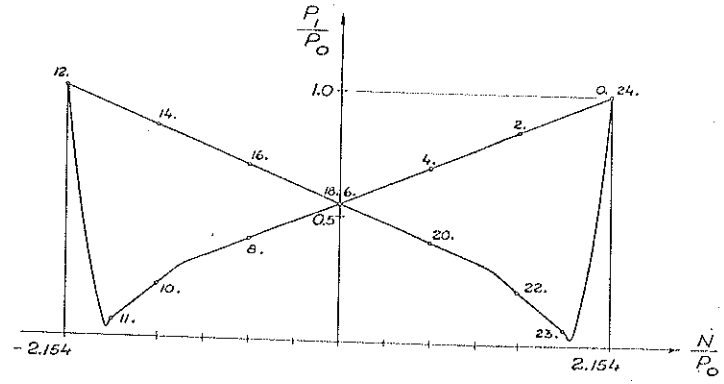
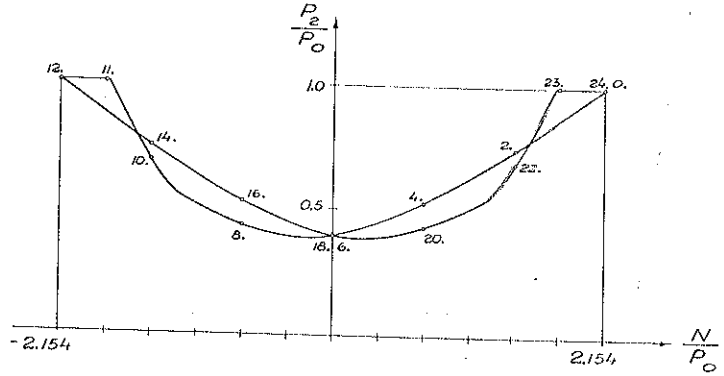


Fig. 14 (ex. 6)


P2 : P0
P1 : P0
P3 : P0


Nmin = -Nmax
y
x
135°
(0,3) q=1
(-8,0) q=1
(8,0) q=1
Nmax = 2.154 P0 (φ = 0)


P1/P0
1.0
0.5
-2.154
2.154
N/P0


P2/P0
1.0
0.5
-2.154
2.154
N/P0

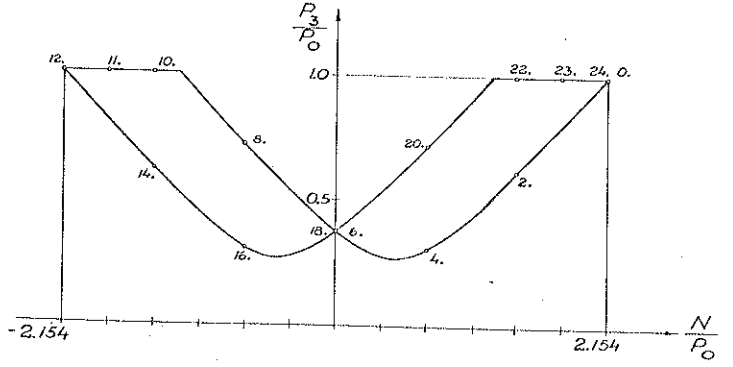
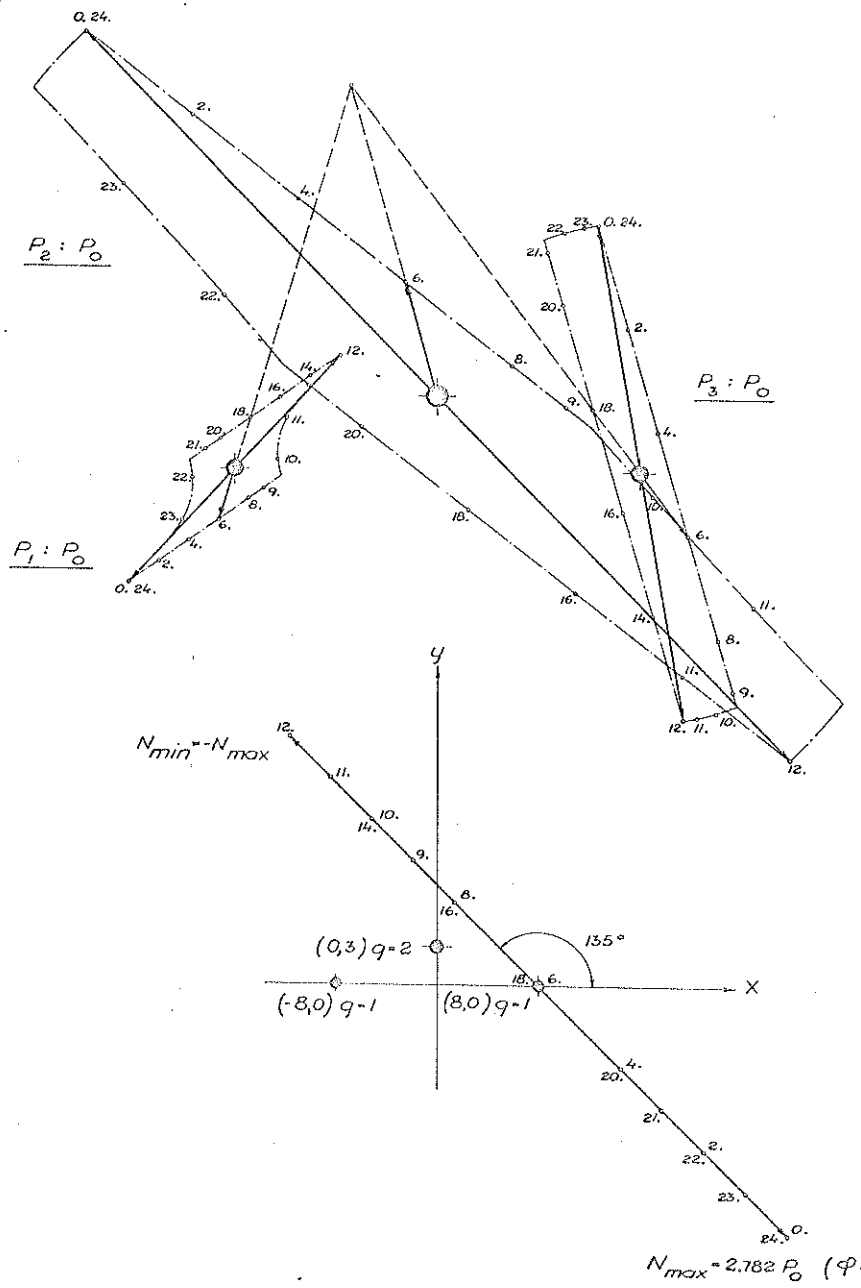
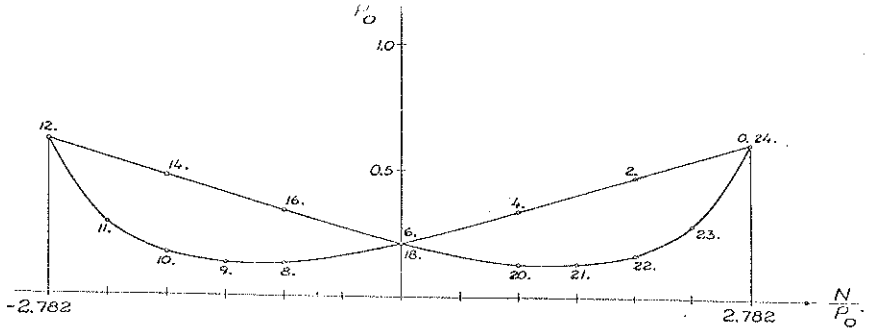
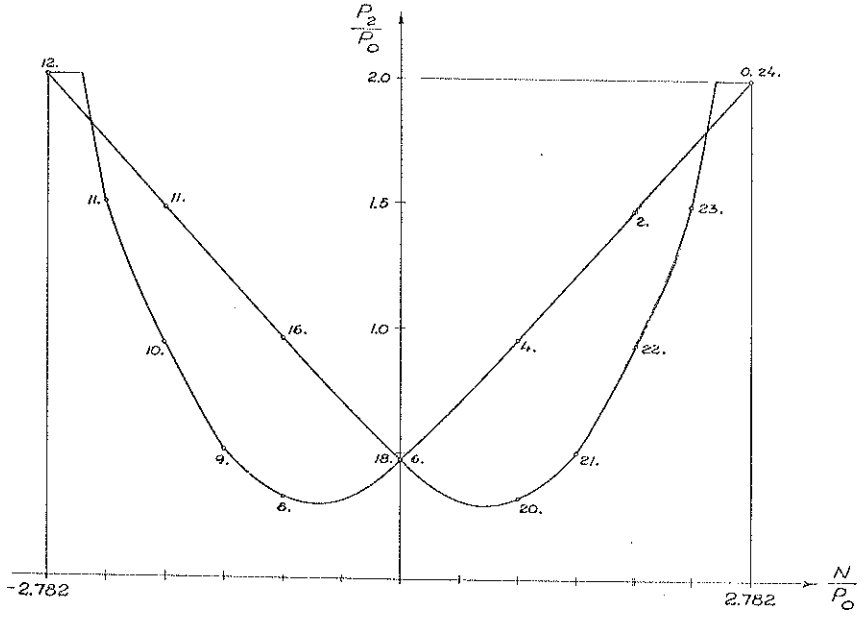

P3/P0
1.0
0.5
-2.154
2.154
N/P0

Fig. 15 (ex.7)



$N_{max} = 2.782\ P_o \quad (\varphi = 0.4)$





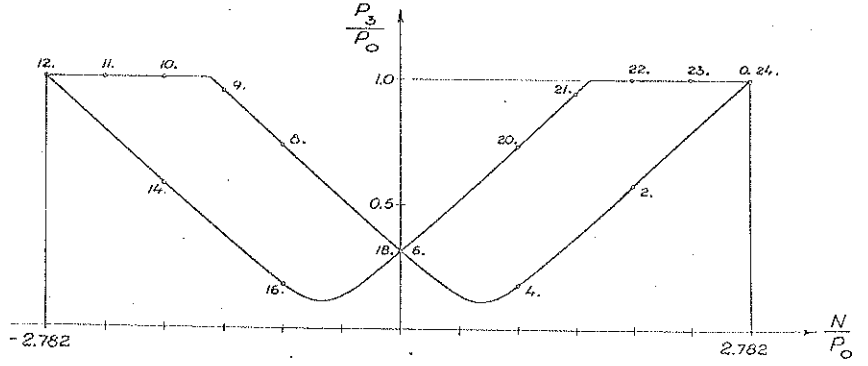
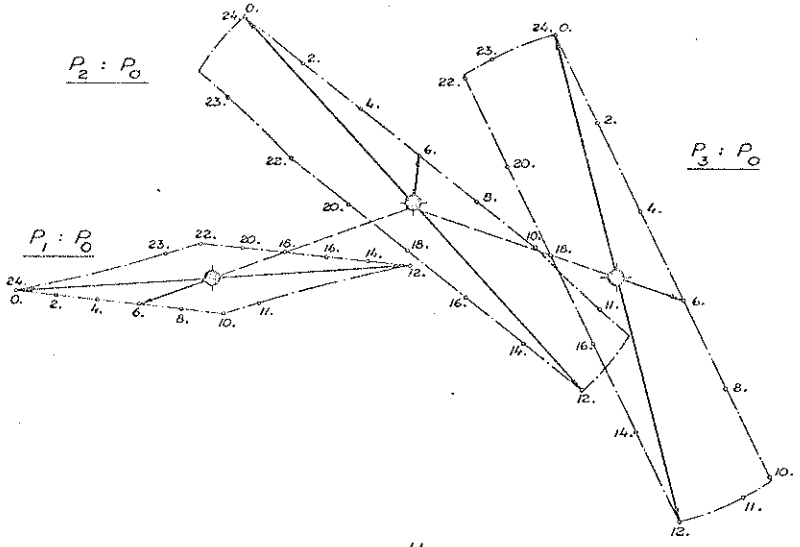
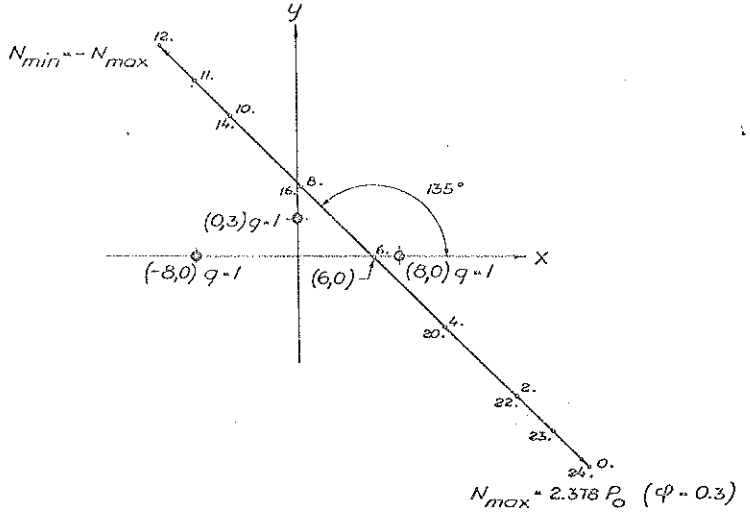
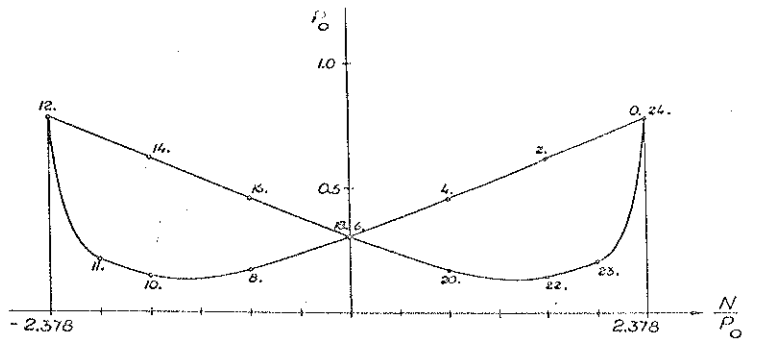


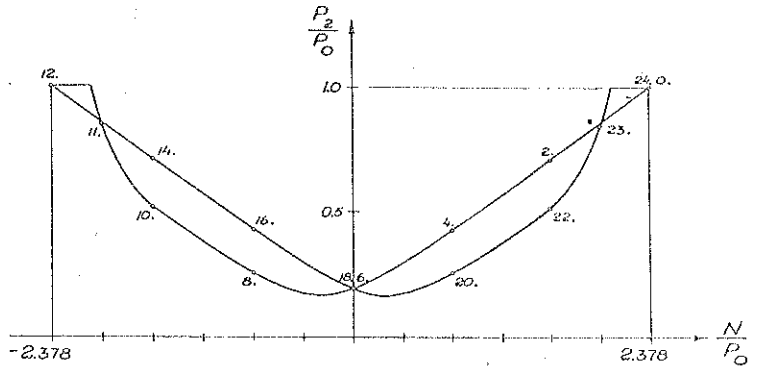
Fig. 16 (ex.8)





$N_{max} = 2.378\ P_0 \quad (\varphi = 0.3)$





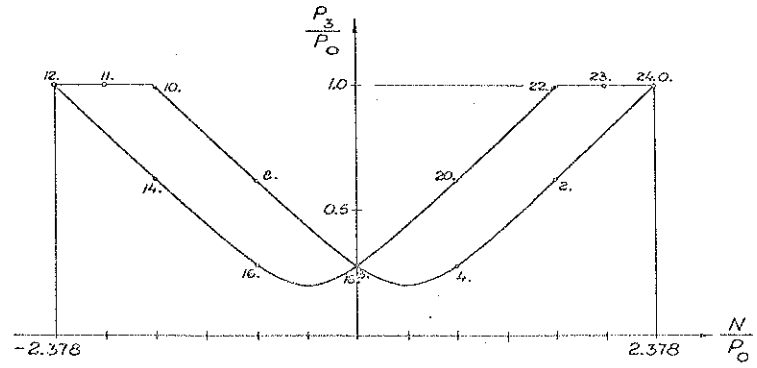
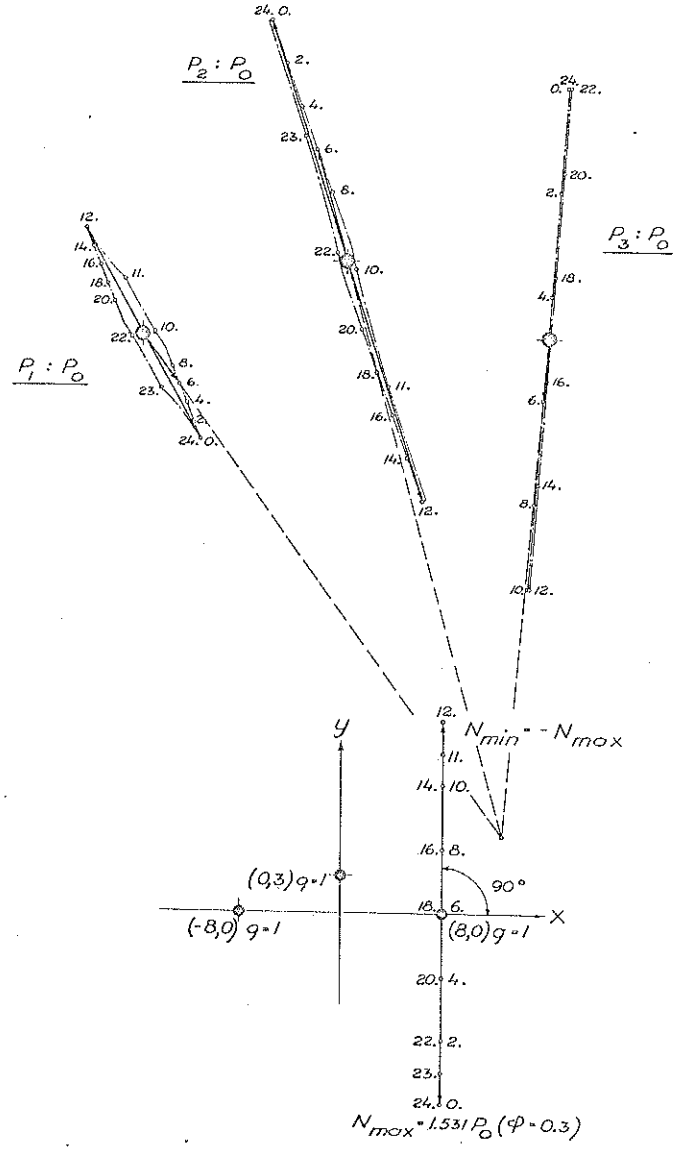


Fig. 17 (ex. 9)


$P_2 : P_0$
$P_3 : P_0$
$P_1 : P_0$
$N_{min} = -N_{max}$
y
x
(0,3) q=1
(-8,0) q=1
(8,0) q=1
90°
$N_{max} = 1.531 P_0 (\varphi = 0.3)$

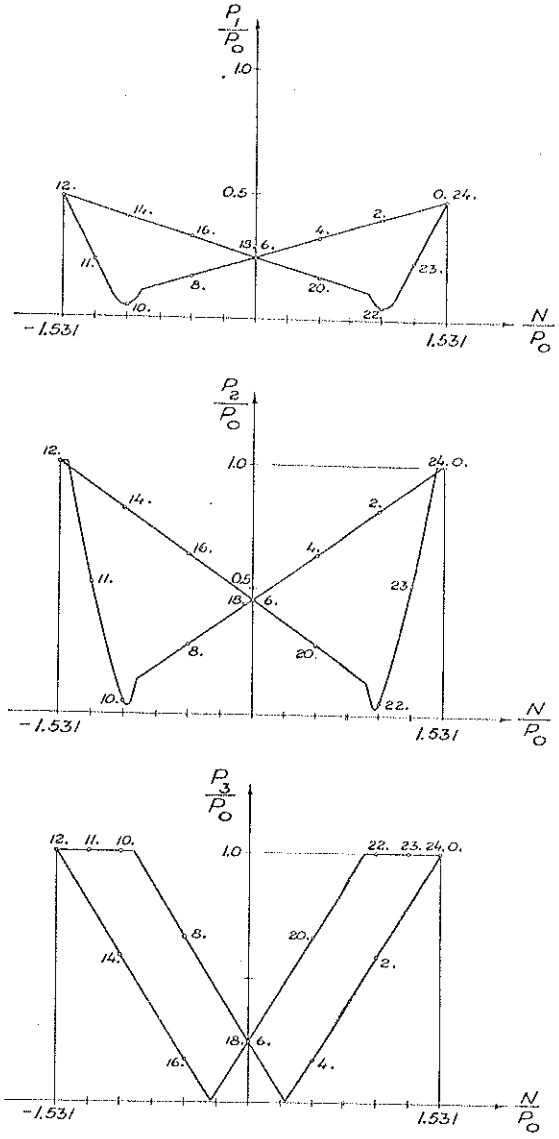

$\frac{P_1}{P_0}$
$\frac{P_2}{P_0}$
$\frac{P_3}{P_0}$
-1.531
1.531
$\frac{N}{P_0}$

Fig. 18 (ex. 10)

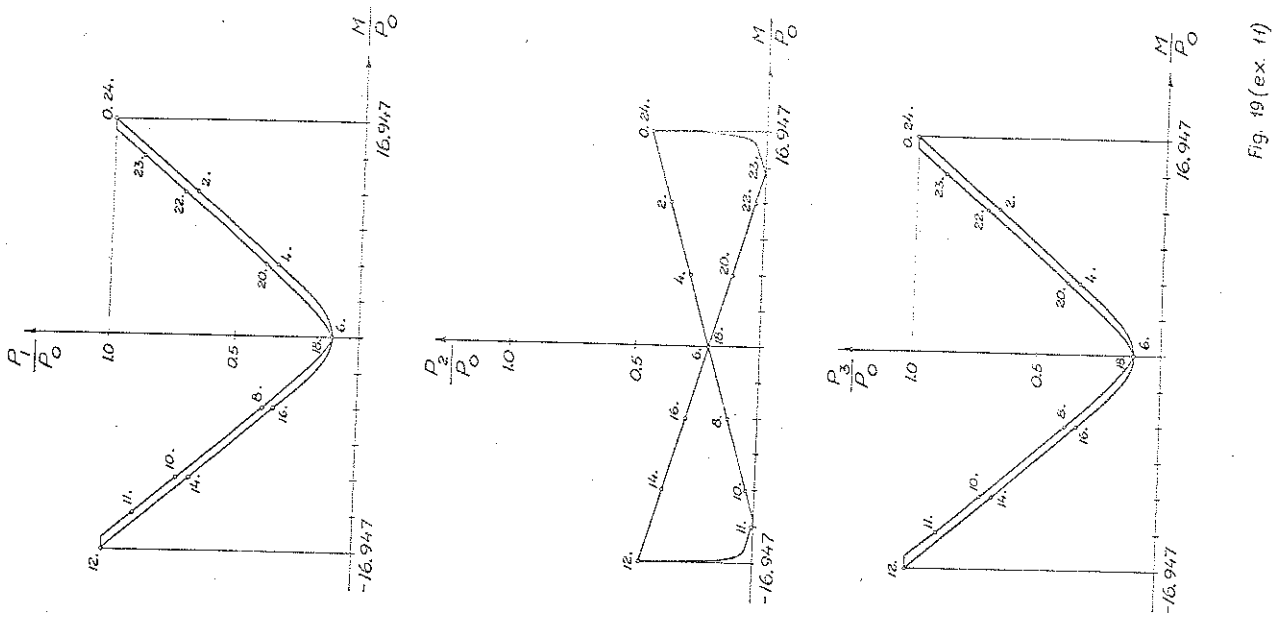
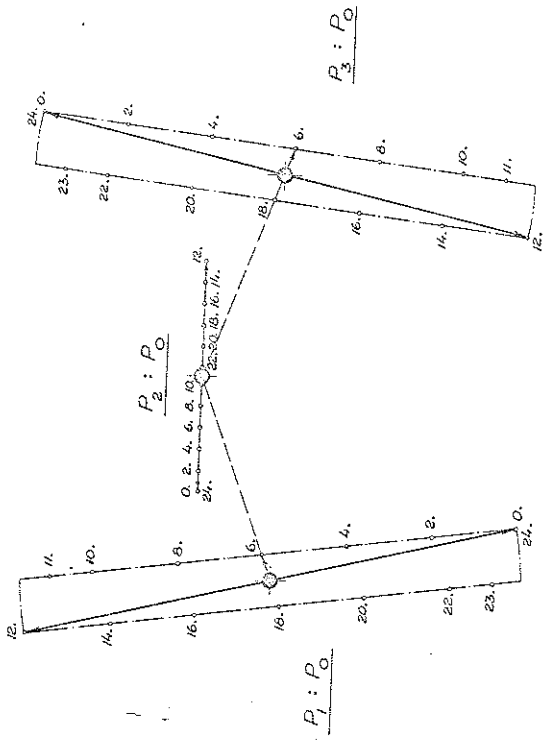
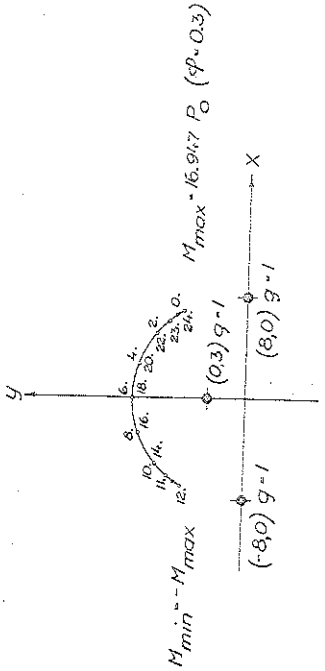
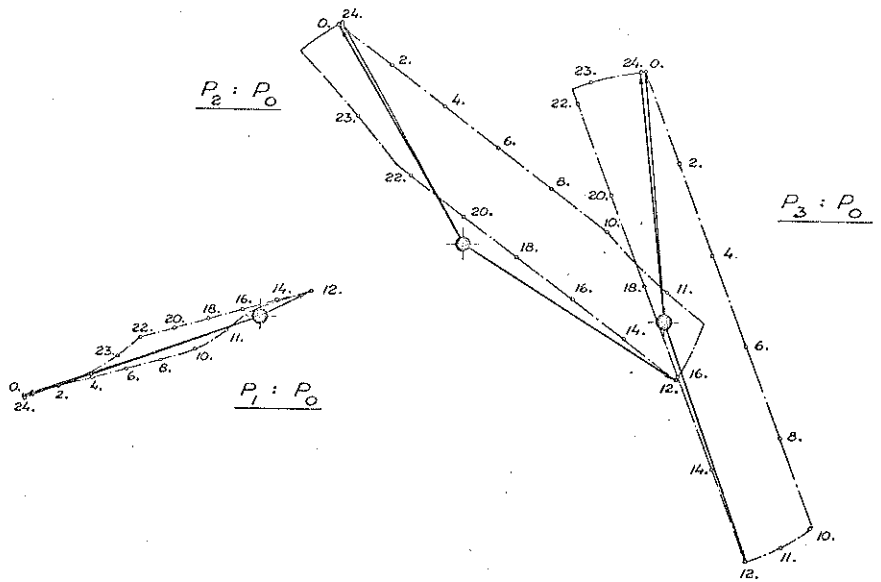
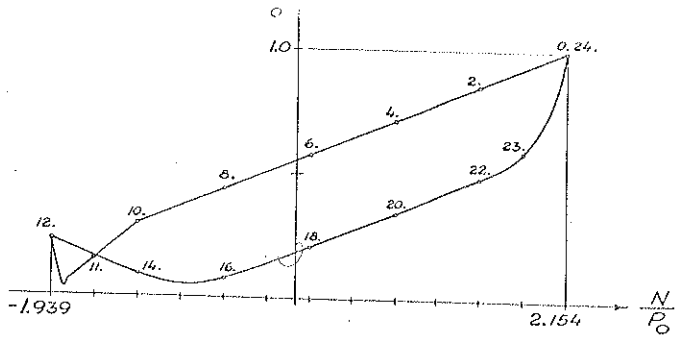

P1/P0
P2/P0
P3/P0
M/P0
1.0
0.5
16.947
-16.947

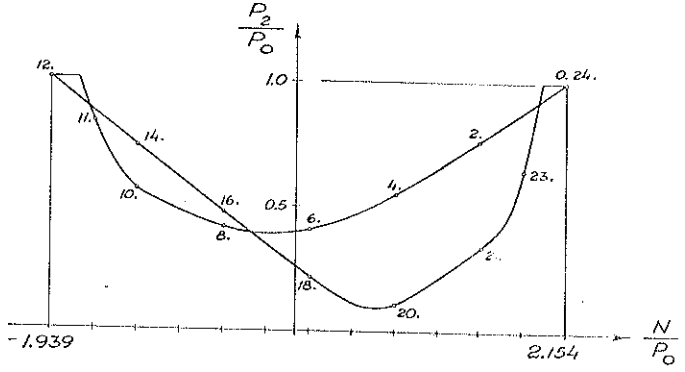
Fig. 19 (ex. 11)

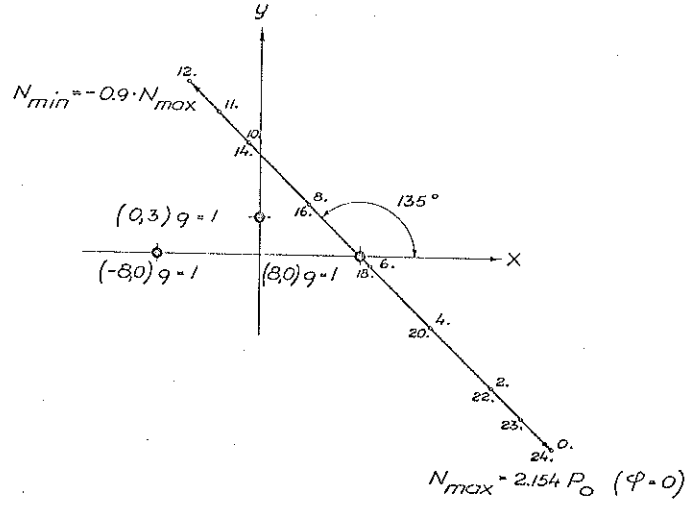

P1 : P0
P2 : P0
P3 : P0


Mmax = 16.947 P0 (ρ = 0.3)
Mmin = -Mmax
(0,3) g=1
(8,0) g=1
(-8,0) g=1
x
y


P2 : Po
P3 : Po
P1 : Po


1.0
-1.939
2.154
N/Po


P2/Po
1.0
0.5
-1.939
2.154
N/Po


y
x
135°
(0,3) q = 1
(-8,0) q = 1
(8,0) q = 1
Nmin = -0.9 · Nmax
Nmax = 2.154 Po (φ = 0)

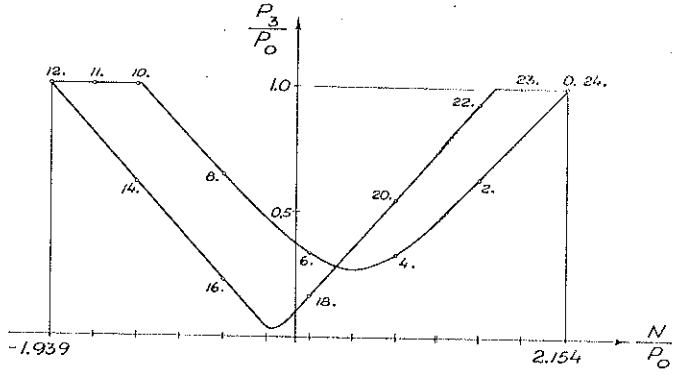
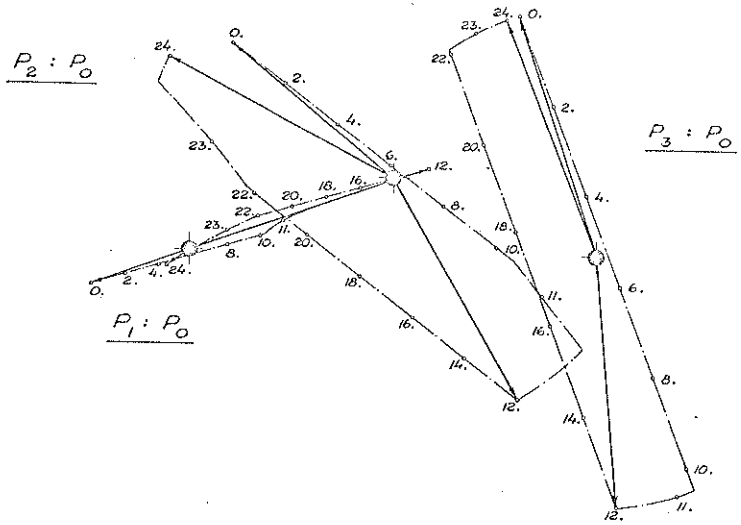
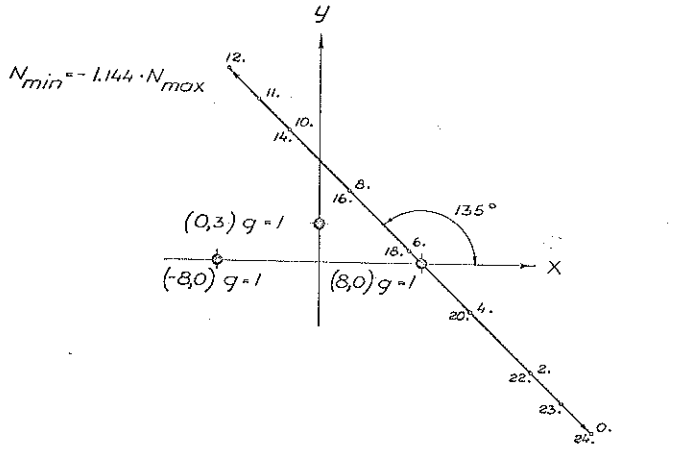

P3/Po
1.0
0.5
-1.939
2.154
N/Po

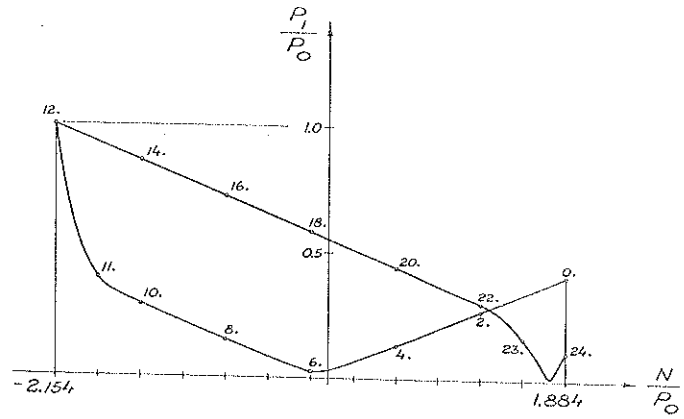
Fig. 20 (ex. 12)

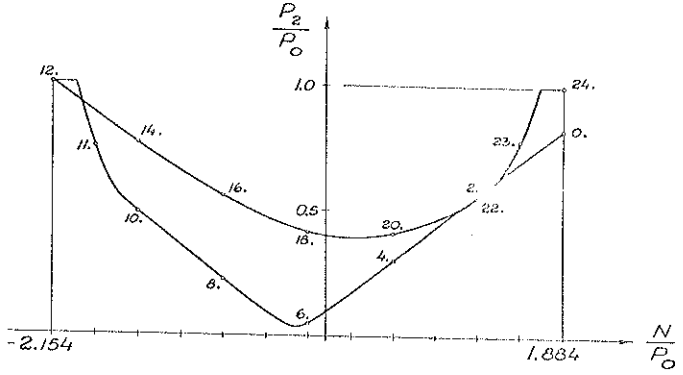




$N_{min} = -1.144 \cdot N_{max}$

$N_{max} = 1.884\, P_o \quad (\varphi = 0.8)$





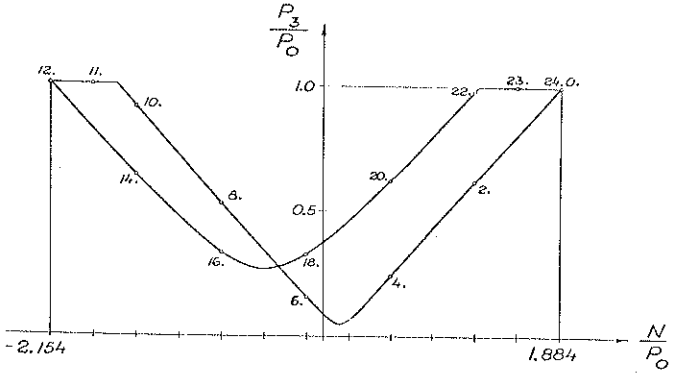


Fig. 21 (ex. 13)

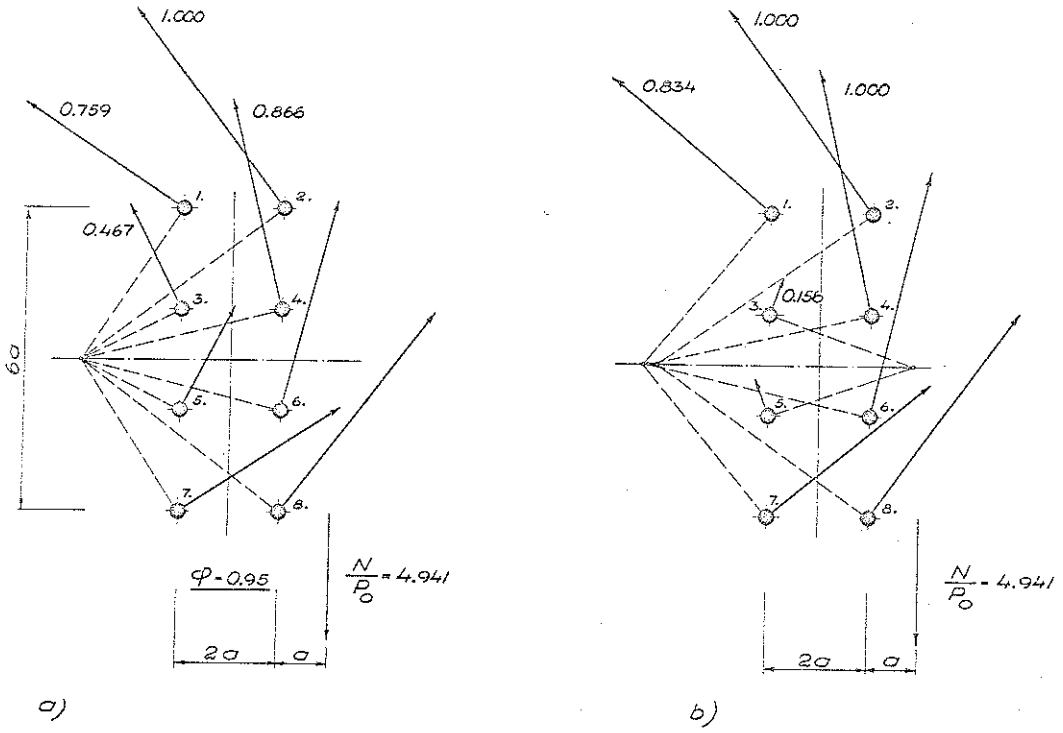


Fig. 22 (ex. 14)

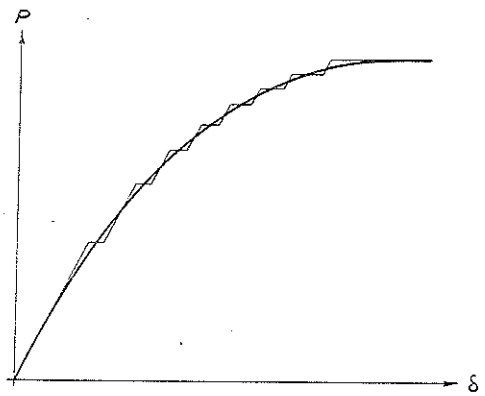
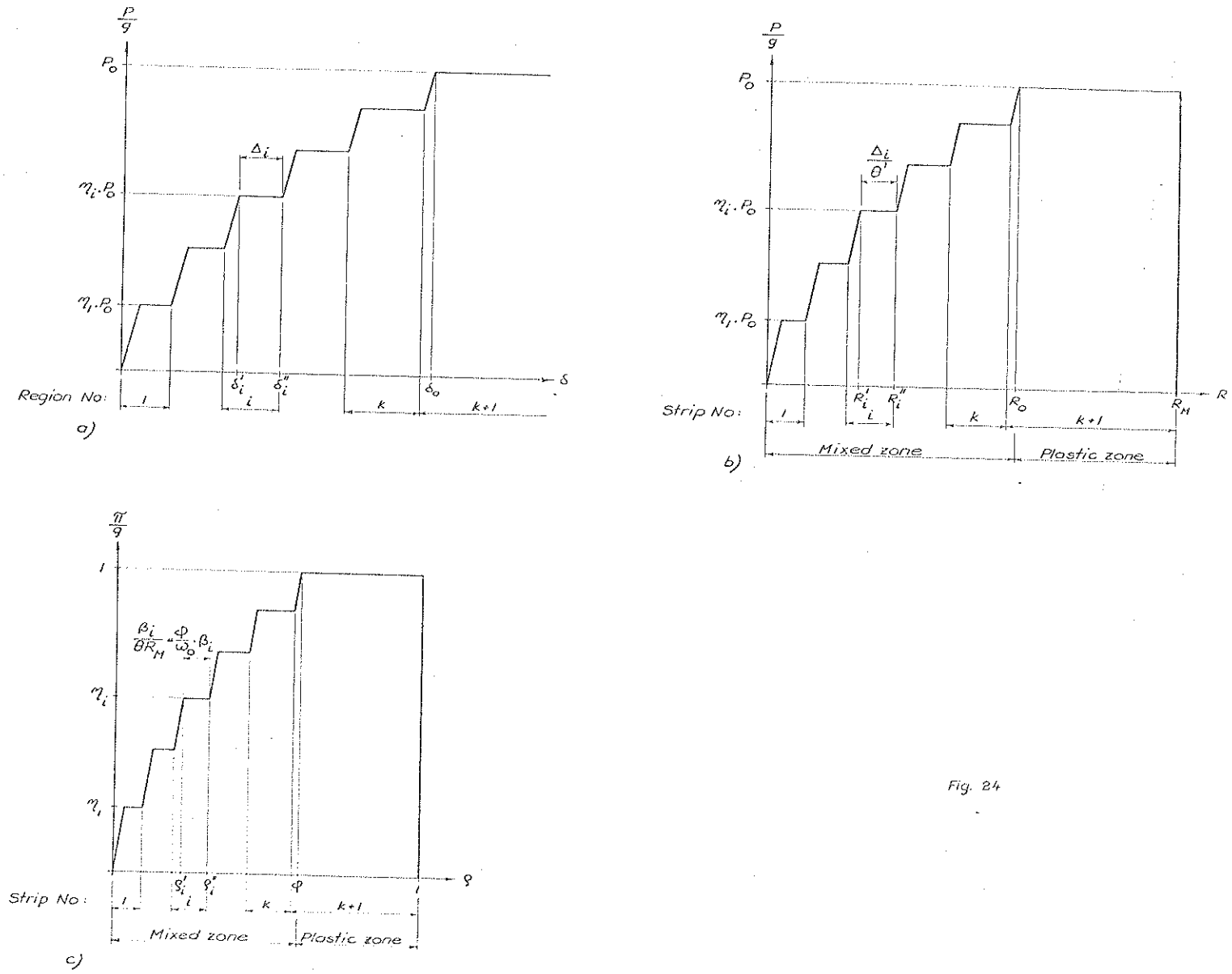


Fig. 23



P/g
P₀
η_i·P₀
η₁·P₀
Δ_i
δ'_i
δ''_i
δ₀
δ
Region No:
1
i
k
k+1
a)
P/g
P₀
η_i·P₀
η₁·P₀
Δ_i/θ'
R'_i
R''_i
R₀
R_M
R
Strip No:
1
i
k
k+1
Mixed zone
Plastic zone
b)
π/g
1
η_i
η₁
β_i/θR_M = φ/ω₀·β_i
ρ'_i
ρ''_i
φ
ρ
Strip No:
1
i
k
k+1
1
Mixed zone
Plastic zone
c)

Fig. 24

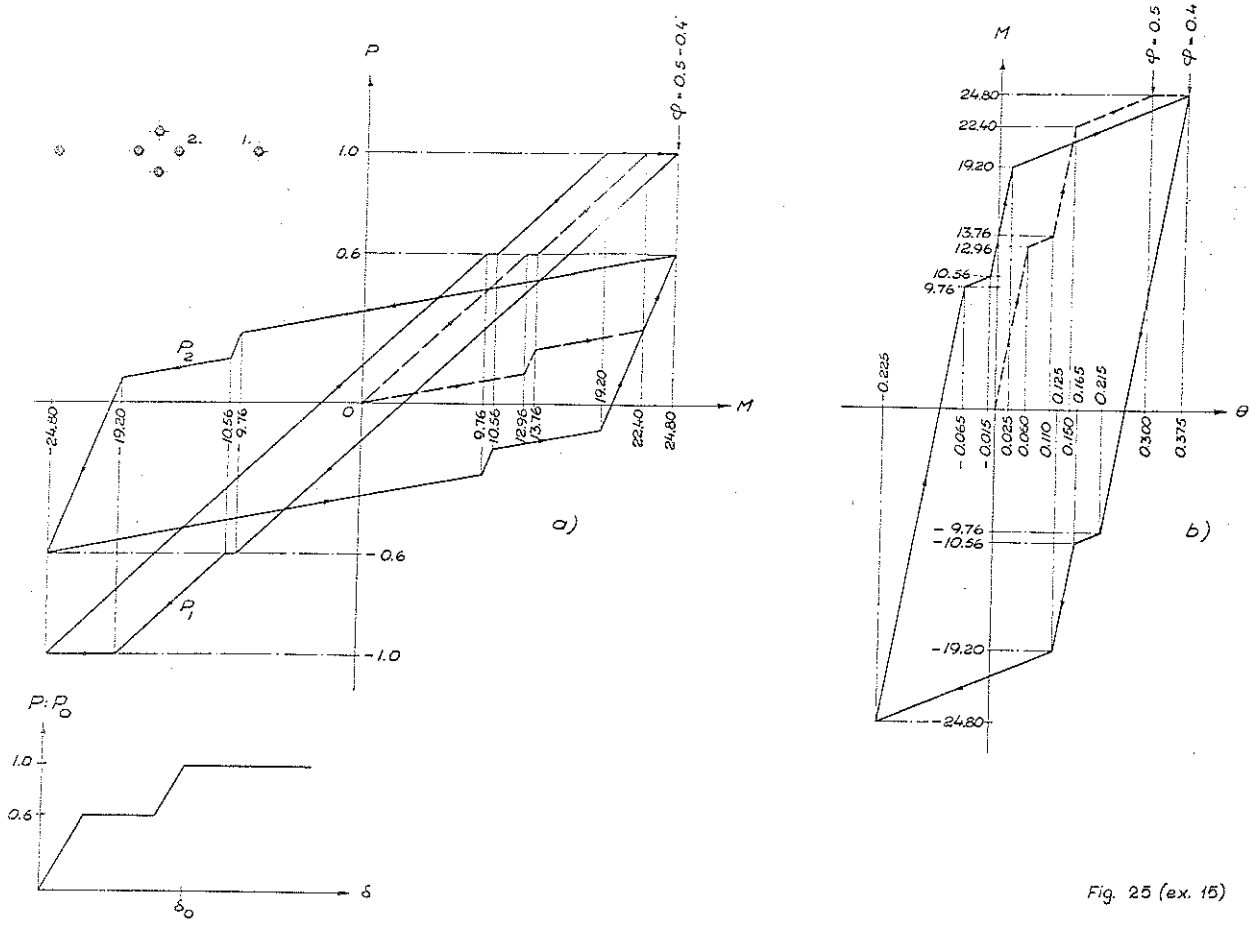
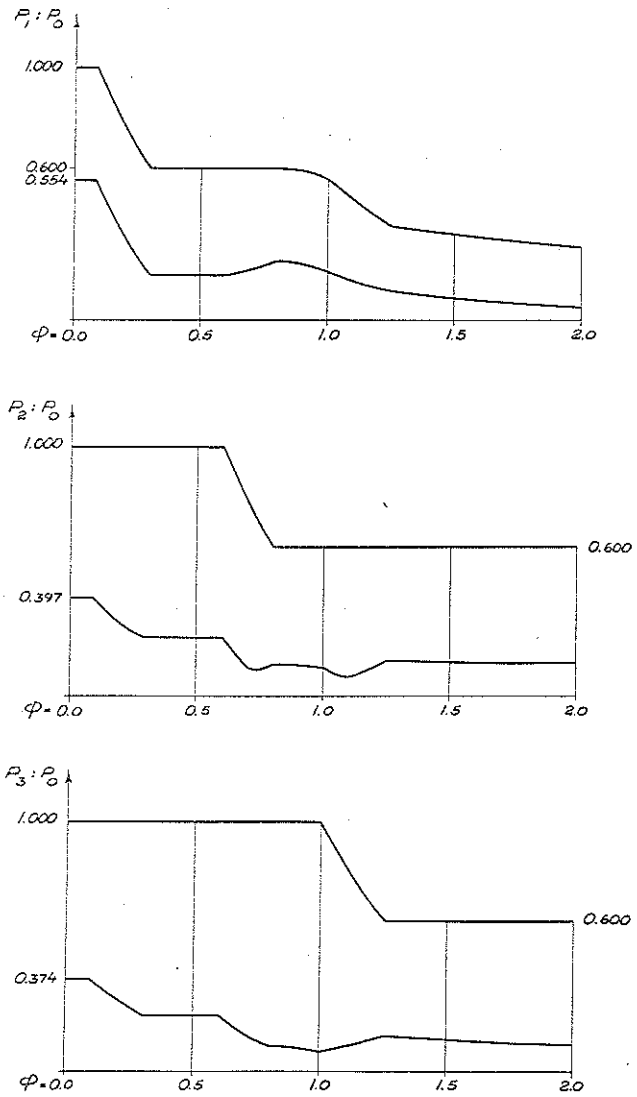
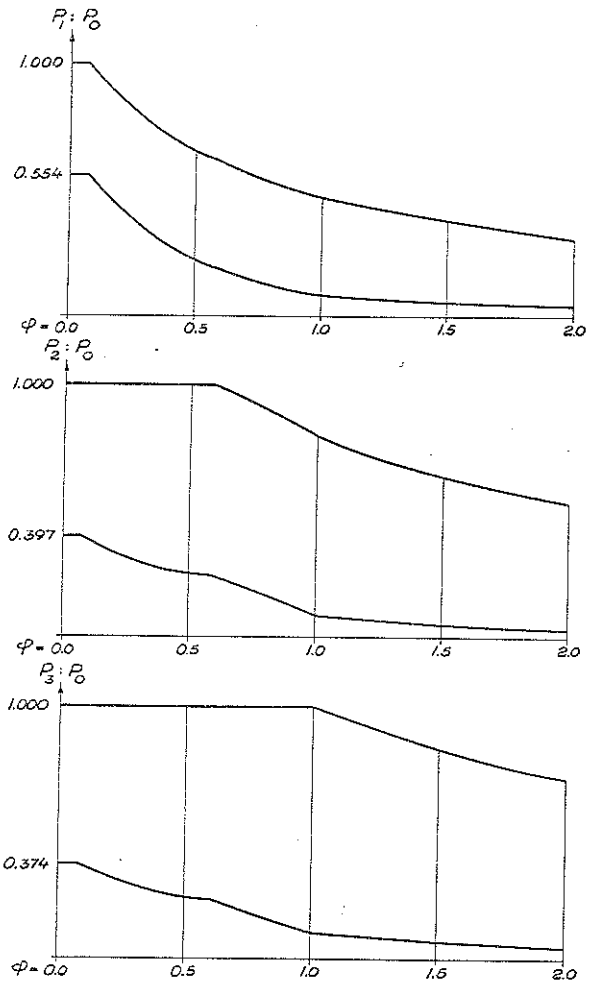

P
φ = 0.5 - 0.4
1.0
0.6
P2
P1
M
-24.80
-19.20
-10.56
-9.76
0
9.76
10.56
12.96
13.76
19.20
22.40
24.80
-0.6
-1.0
a)
P : P0
1.0
0.6
δ
δ0
M
φ = 0.5
φ = 0.4
24.80
22.40
19.20
13.76
12.96
10.56
9.76
-0.225
-0.065
-0.015
0.025
0.060
0.110
0.125
0.150
0.165
0.215
0.300
0.375
θ
-9.76
-10.56
-19.20
-24.80
b)

Fig. 25 (ex. 15)


P1 : P0
1.000
0.600
0.554
φ = 0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
P2 : P0
1.000
0.600
0.397
φ = 0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
P3 : P0
1.000
0.600
0.374
φ = 0.0
0.5
1.0
1.5
2.0


P1 : P0
1.000
0.554
φ = 0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
P2 : P0
1.000
0.397
φ = 0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
P3 : P0
1.000
0.374
φ = 0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

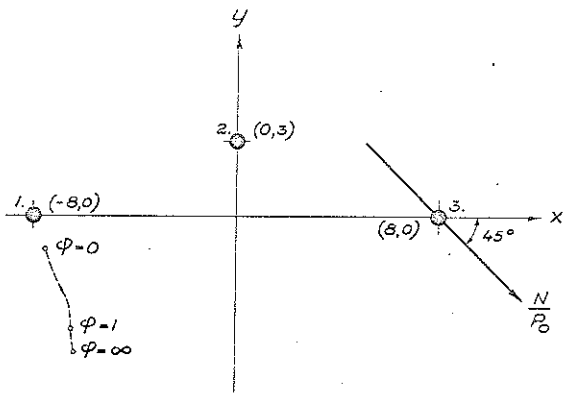
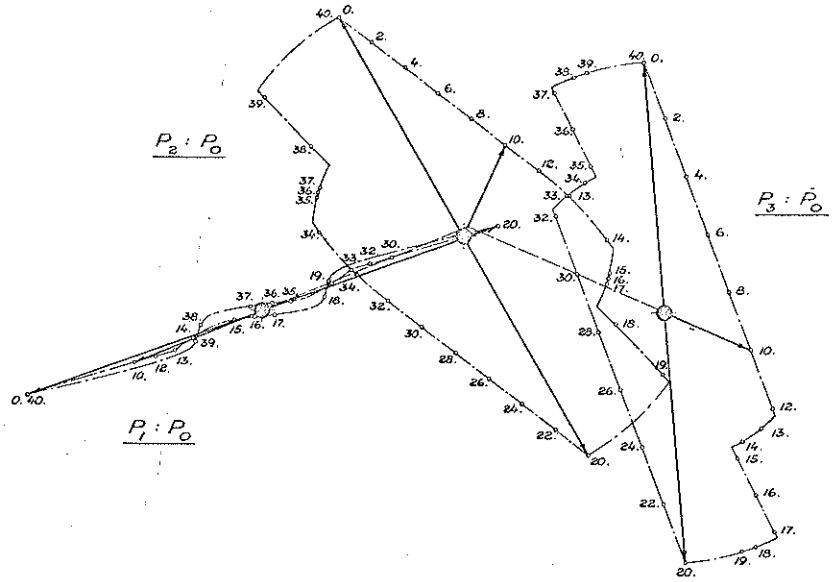
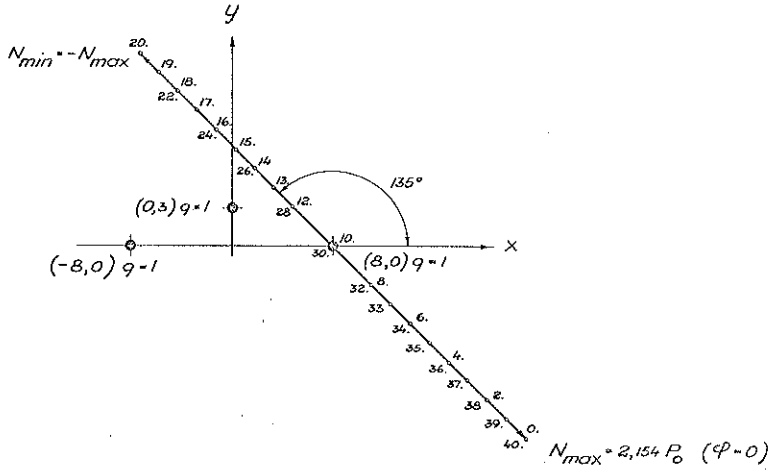

y
2.
(0,3)
1.
(-8,0)
3.
(8,0)
45°
x
φ=0
φ=1
φ=∞
N/P0

Fig. 27 (ex. 17)


P2 : Po
P3 : Po
P1 : Po


y
x
Nmin = -Nmax
135°
(0,3) q=1
(-8,0) q=1
(8,0) q=1
Nmax = 2,154 Po (φ=0)

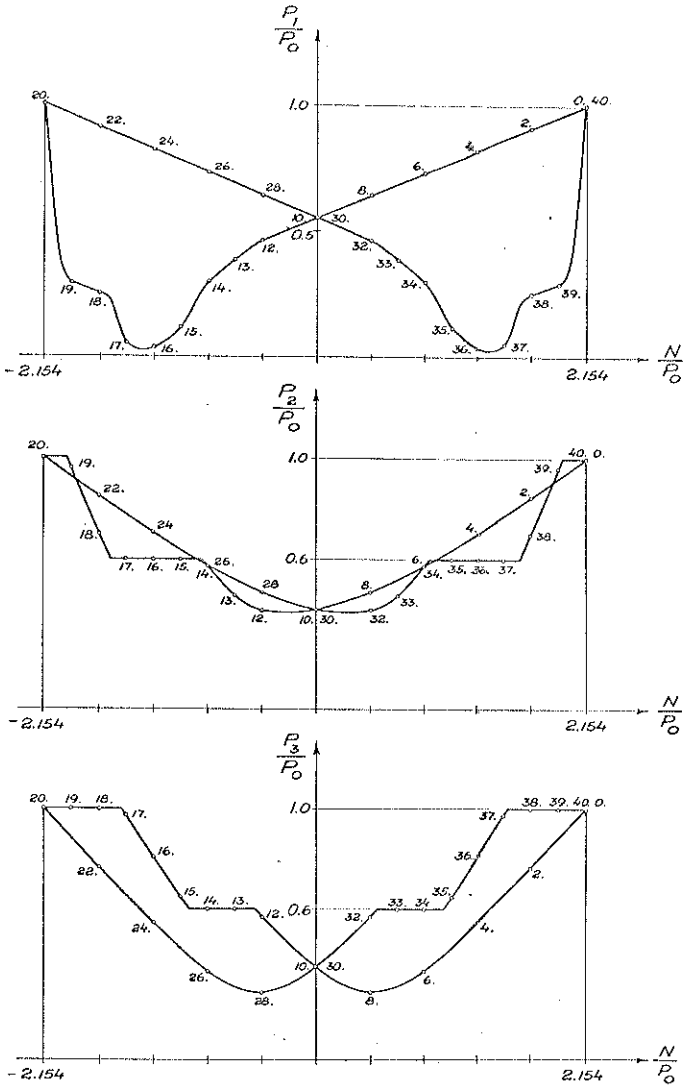
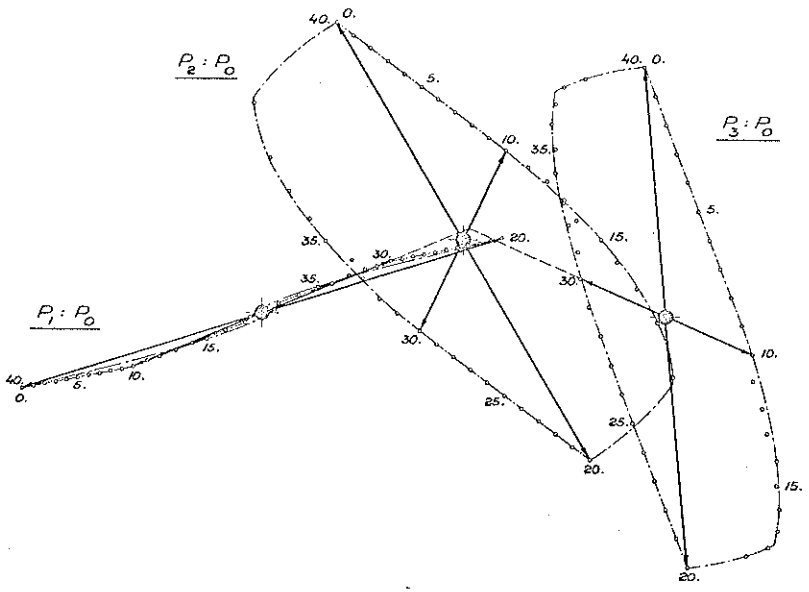
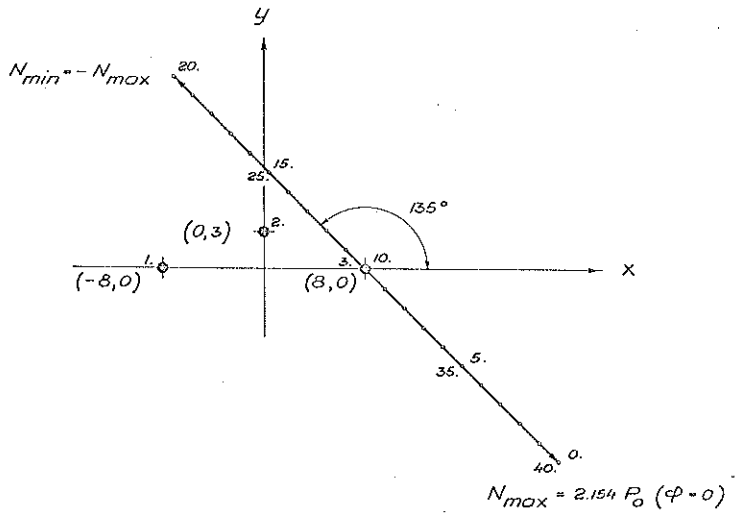

P1/Po
P2/Po
P3/Po
1.0
0.5
0.6
-2.154
2.154
N/Po

Fig. 28 (ex. 18)





$N_{max} = 2.154\ P_o\ (\varphi = 0)$

Fig. 29 (ex. 19)

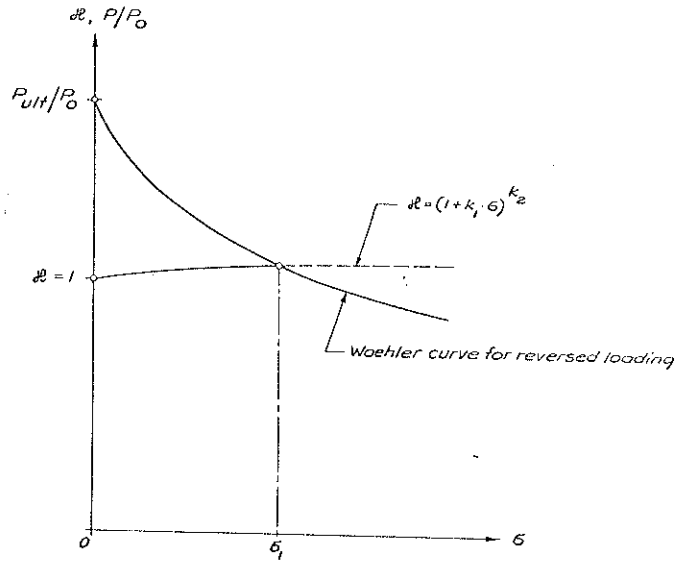


Fig. 31

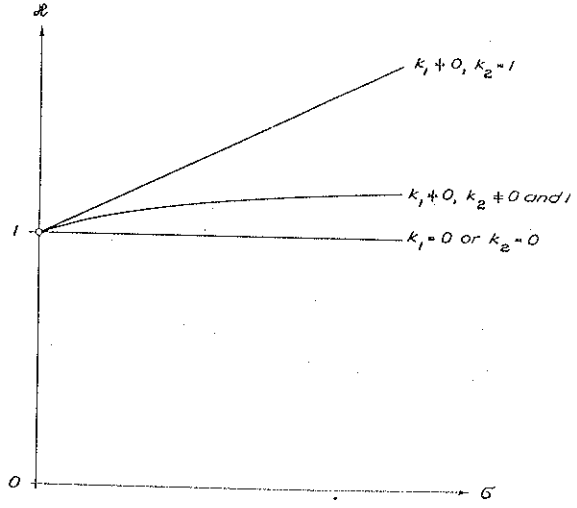


Fig. 30

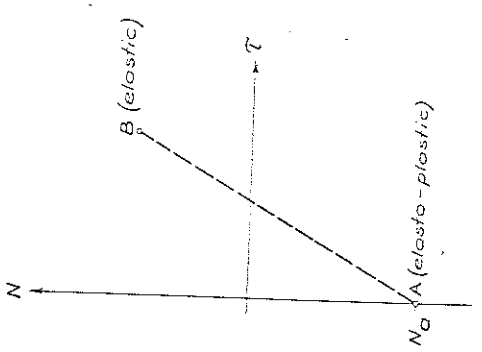


Fig. 32

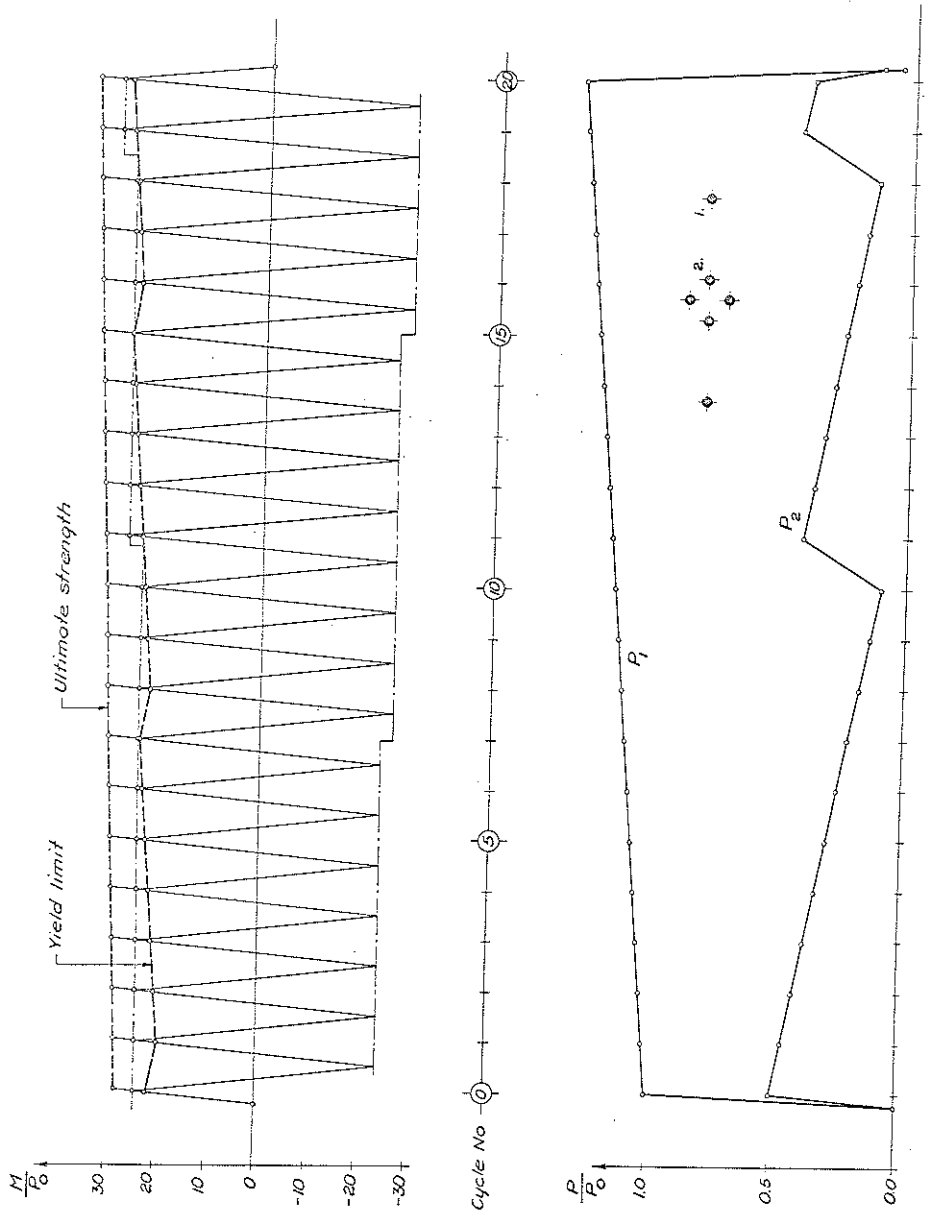


Fig. 33 (ex. 20)

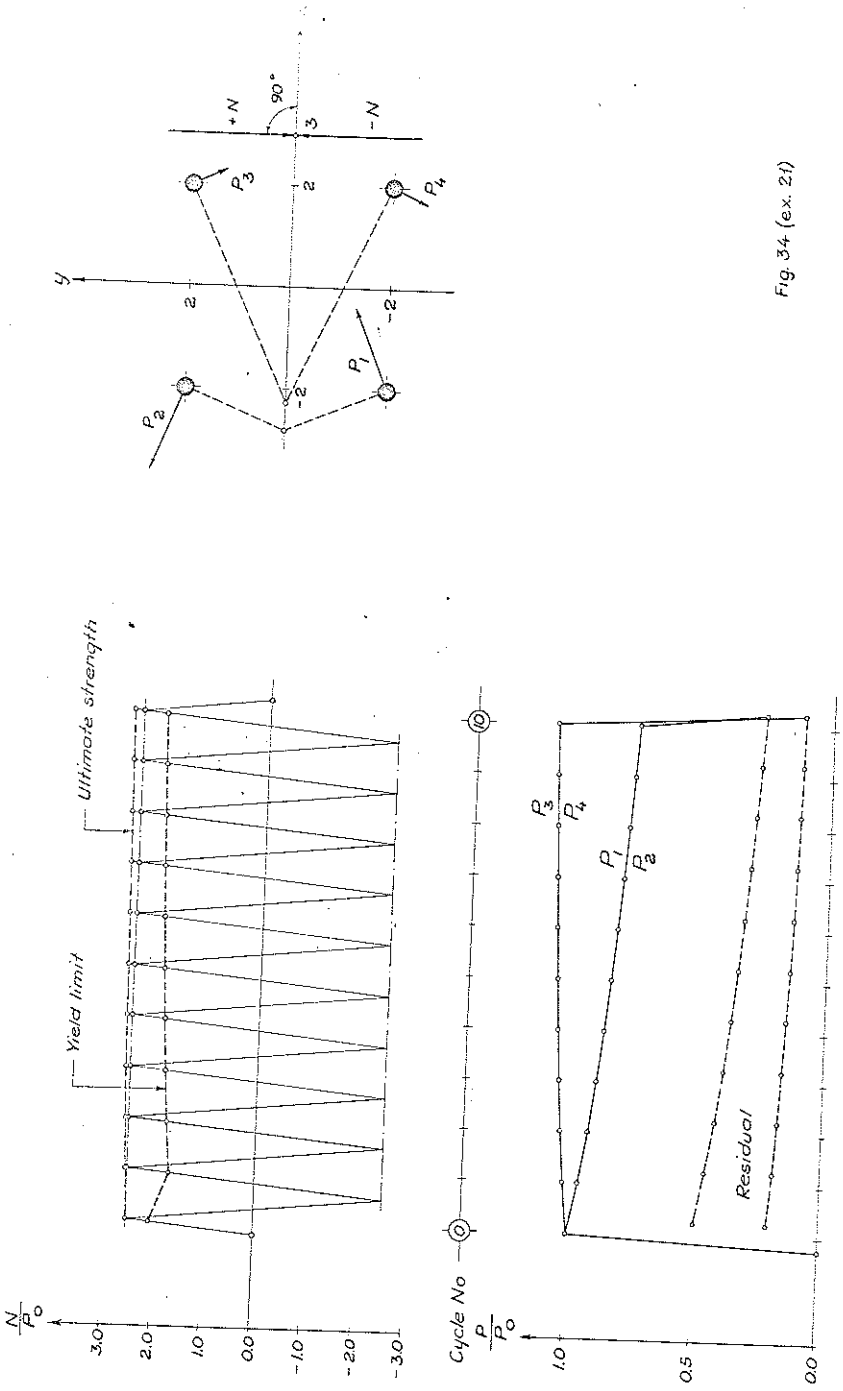

+N
90°
3
-N
P3
P4
2
y
2
-2
P1
P2
-2
Ultimate strength
Yield limit
N/P0
3.0
2.0
1.0
0.0
-1.0
-2.0
-3.0
Cycle No
P/P0
P3
P4
P1
P2
Residual
1.0
0.5
0.0

Fig. 34 (ex. 21)

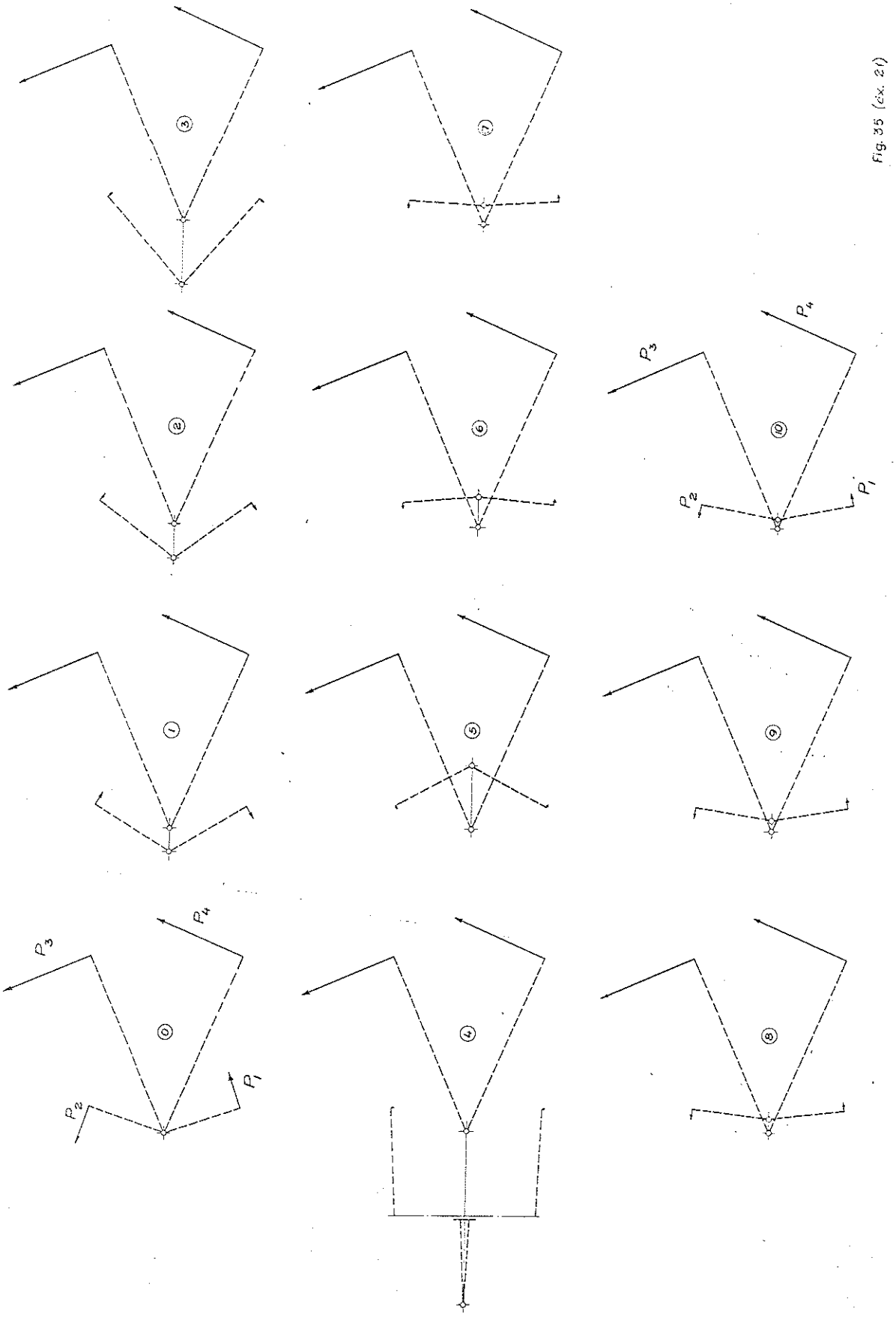


Fig. 35 (ex. 21)

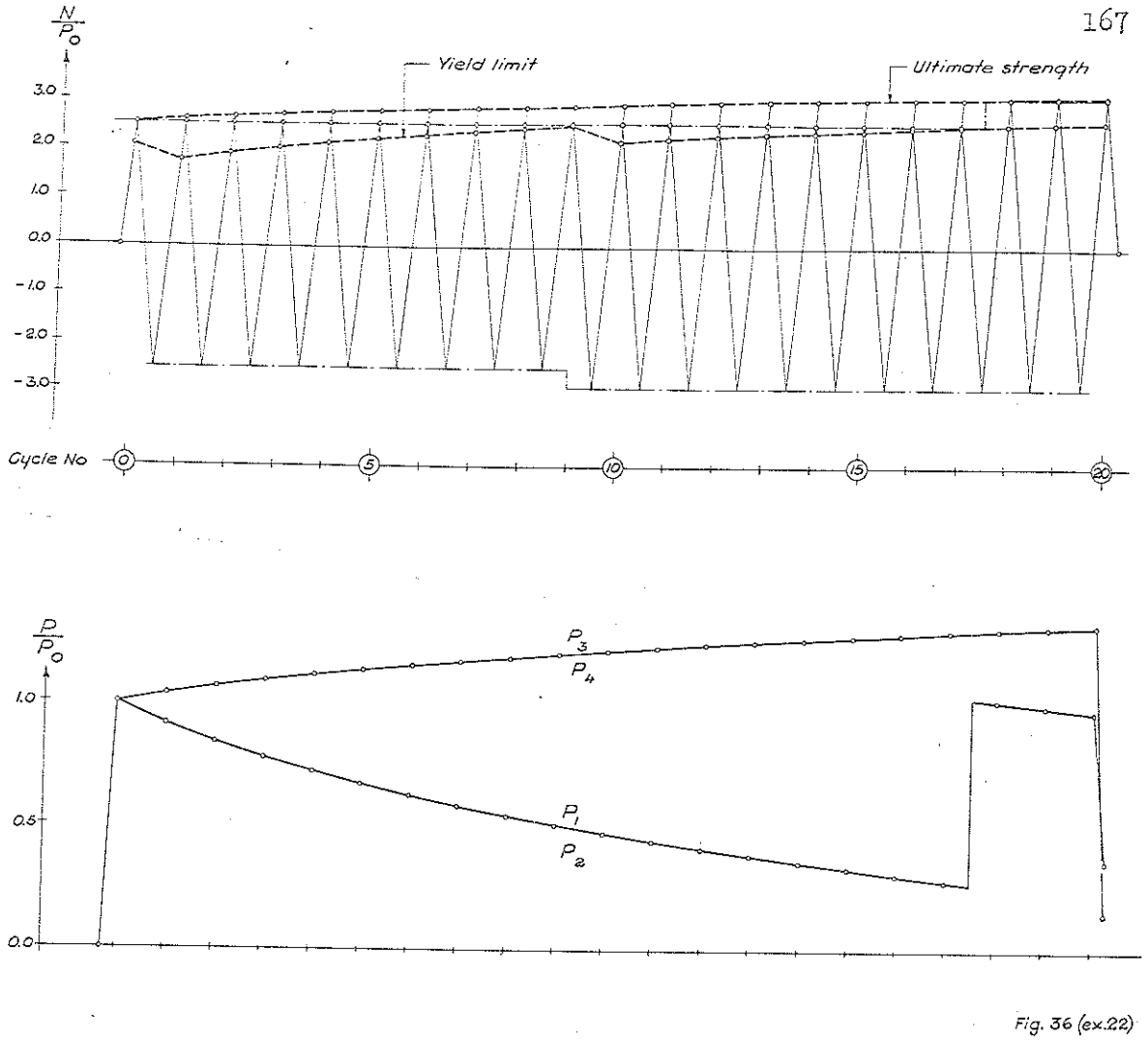
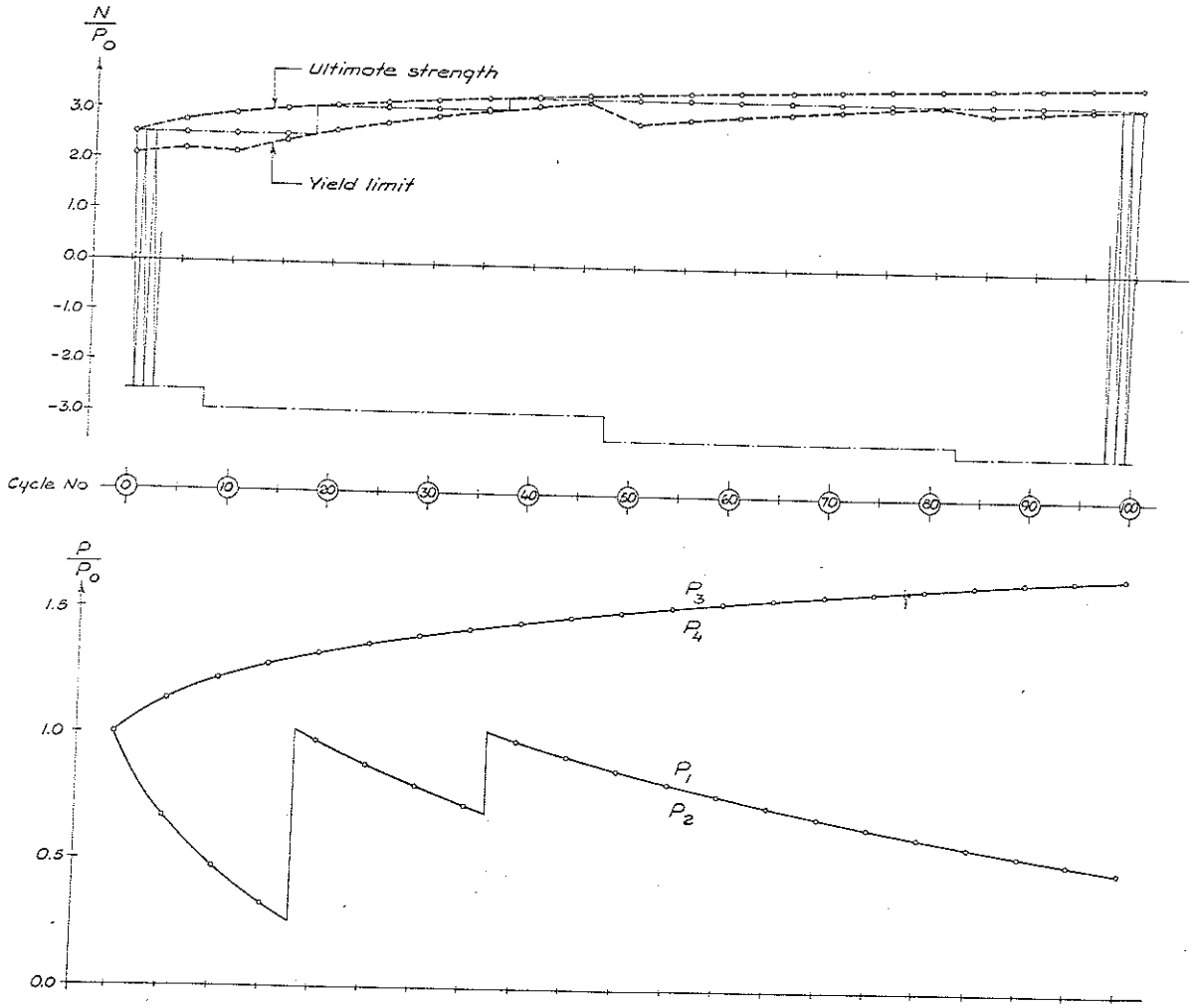

N/P0
Yield limit
Ultimate strength
3.0
2.0
1.0
0.0
-1.0
-2.0
-3.0
Cycle No
0
5
10
15
20
P/P0
P3
P4
P1
P2
1.0
0.5
0.0

Fig. 36 (ex.22)


N/P0
Ultimate strength
Yield limit
3.0
2.0
1.0
0.0
-1.0
-2.0
-3.0
Cycle No
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
P/P0
P3
P4
P1
P2
1.5
1.0
0.5
0.0

Weigth		
a	b	c
1.00	1.80	0.31
1.00	1.40	0.40
1.00	1.00	0.56
1.00	0.60	0.93
1.00	0.20	2.80
1.00	0.20	2.80
1.00	0.60	0.93
1.00	1.00	0.56
1.00	1.40	0.40
1.00	1.80	0.31

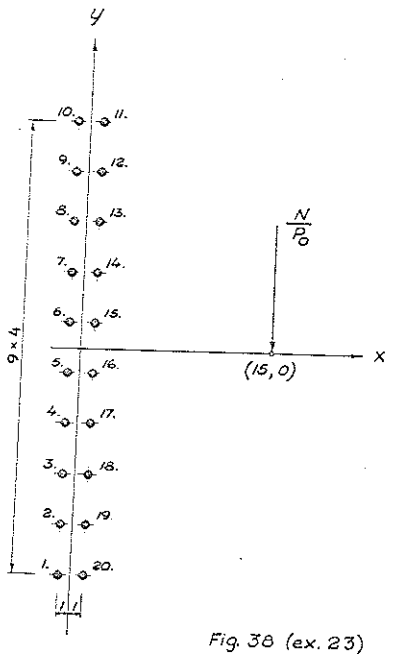
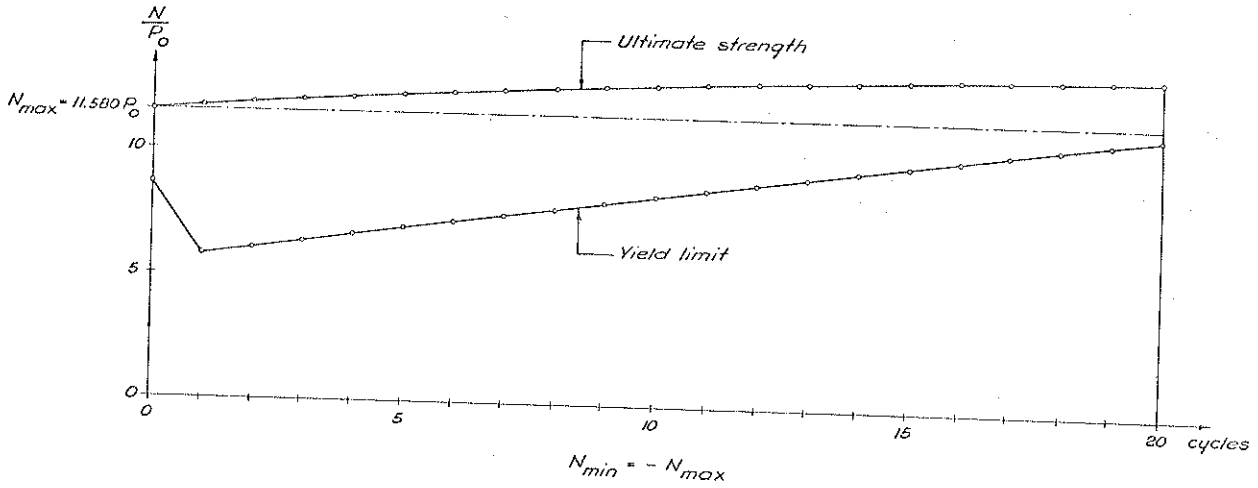
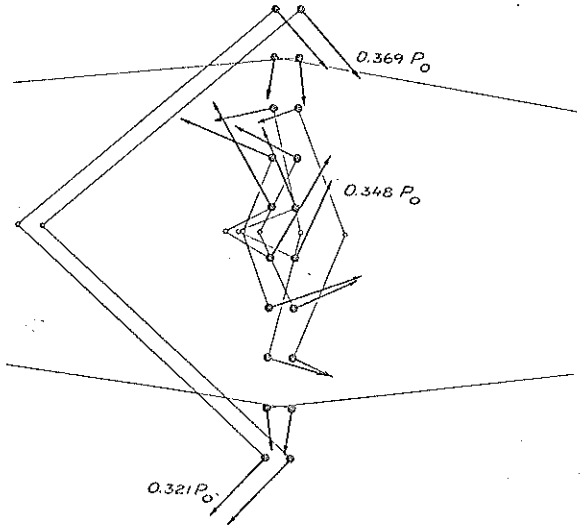


Fig. 38 (ex. 23)


N/P0
Ultimate strength
Nmax = 11.580 P0
10
5
0
Yield limit
0
5
10
15
20 cycles
Nmin = - Nmax


0.369 P0
0.348 P0
0.321 P0

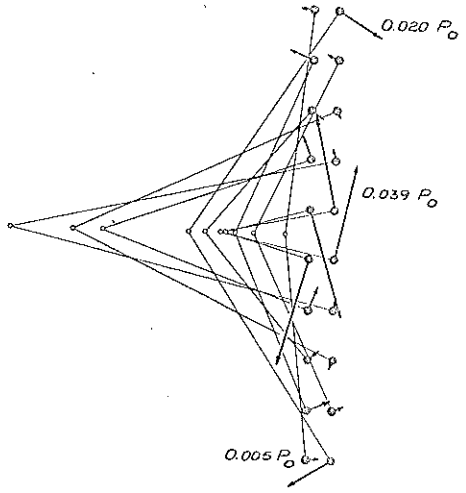
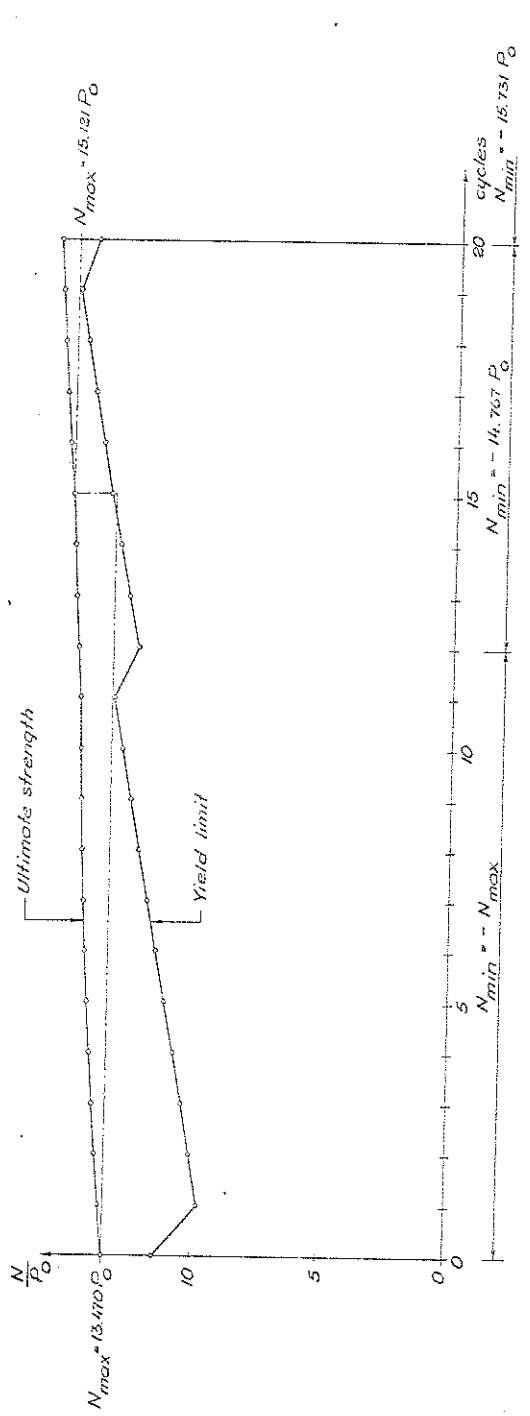

0.020 P0
0.039 P0
0.005 P0

Fig. 39 (ex. 23)


Ultimate strength
Yield limit
N_{max} = 15.121 P_o
N_{max} = 13.470 P_o
N_{min} = - 16.731 P_o
N_{min} = - 14.707 P_o
N_{min} = - N_{max}
$\frac{N}{P_o}$
cycles
0
5
10
15
20

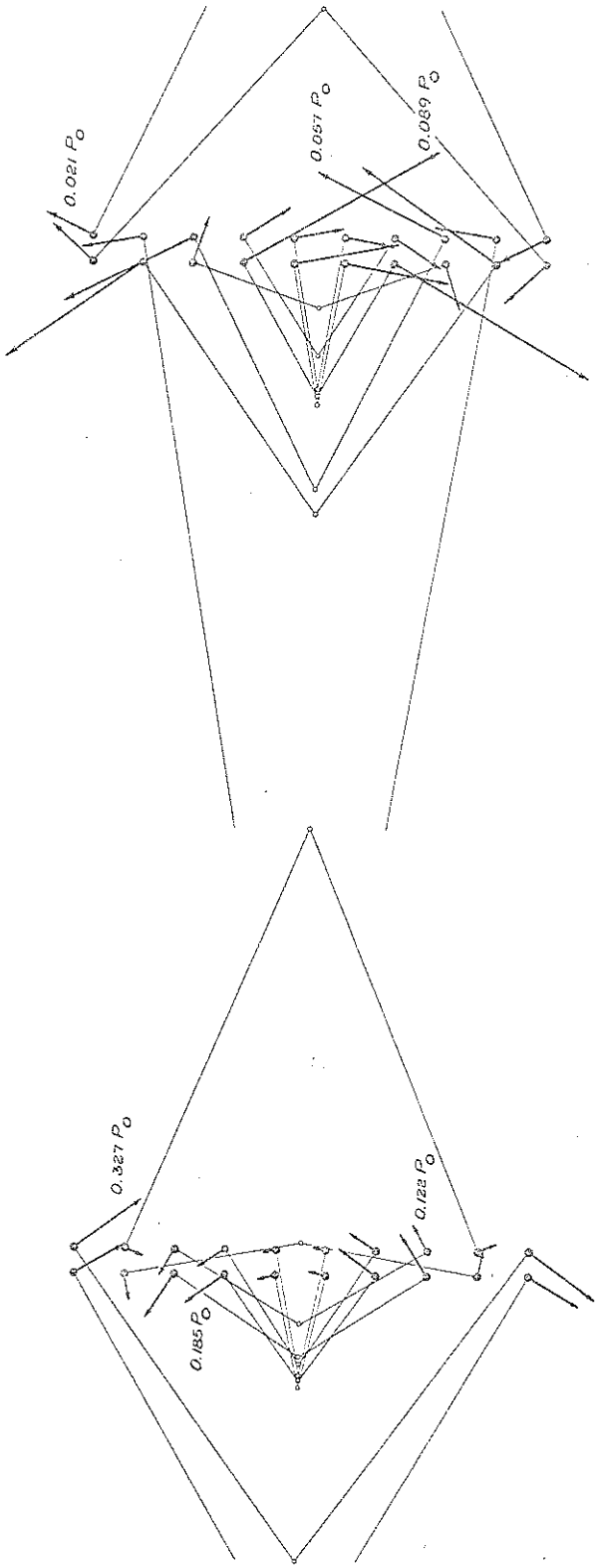
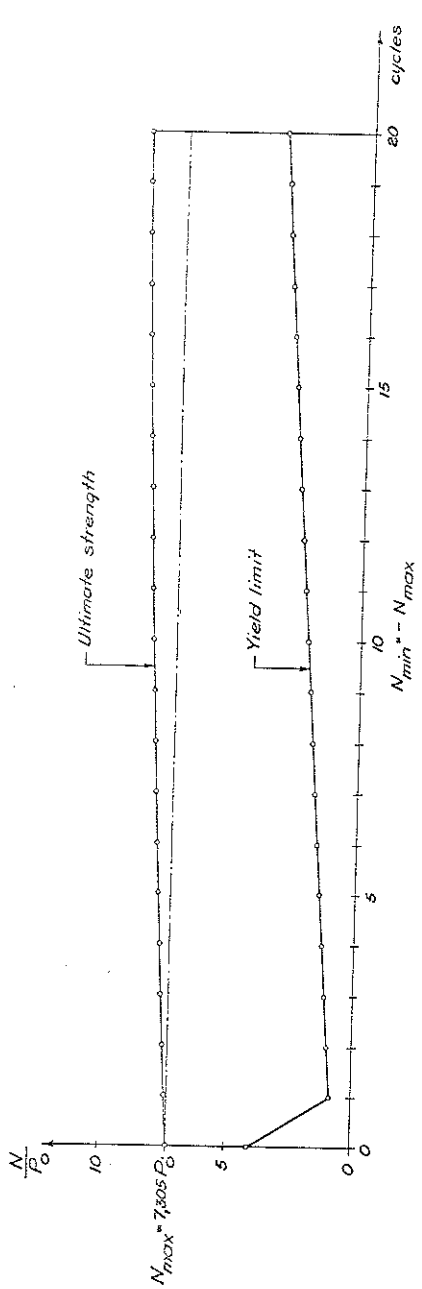

0.021 P_o
0.057 P_o
0.089 P_o
0.327 P_o
0.122 P_o
0.185 P_o

Fig. 4.0 (ex. 23)


Ultimate strength
Yield limit
$\frac{N}{P_0}$
10
5
0
$N_{max} = 7.305\ P_0$
0
5
10
15
20
cycles
$N_{min} - N_{max}$

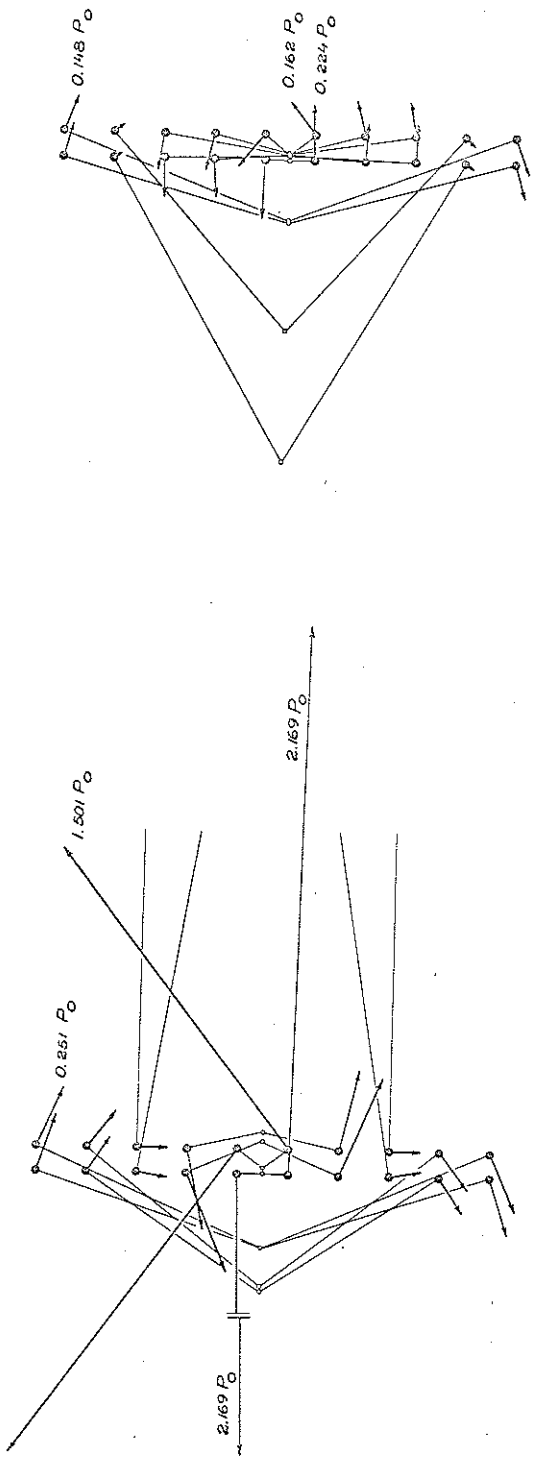

0.148 P_0
0.162 P_0
0.224 P_0
2.169 P_0
1.501 P_0
0.251 P_0
2.169 P_0

Fig. 41 (ex 23)

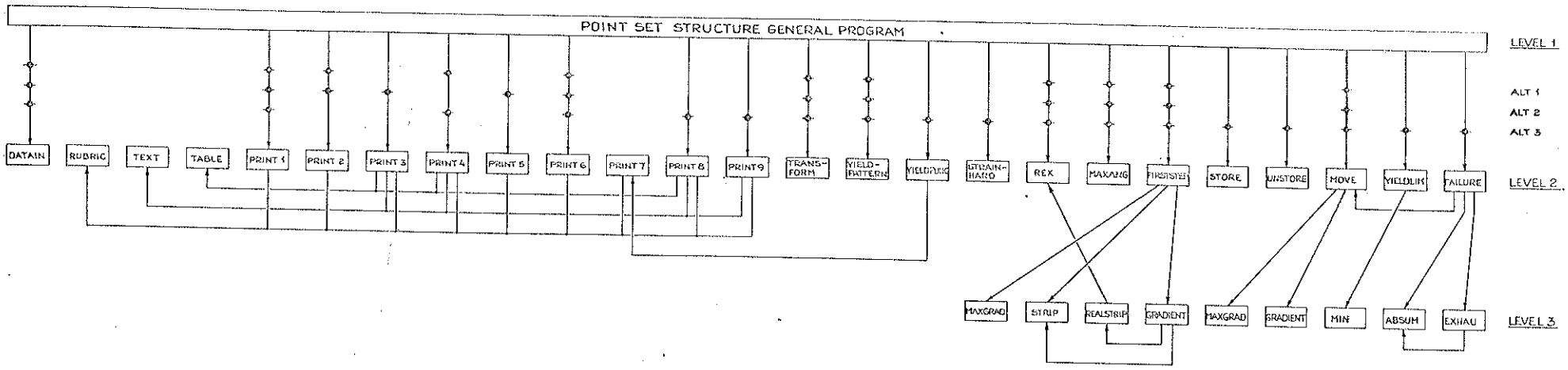
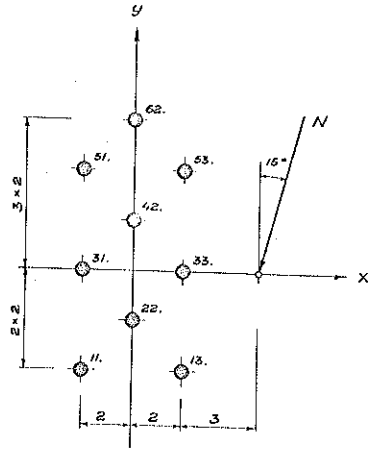


Fig. 42



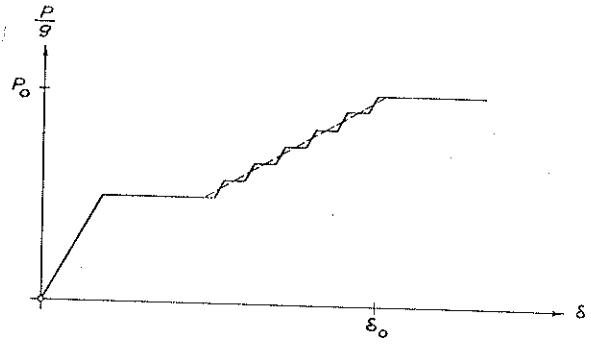


Fig. 44

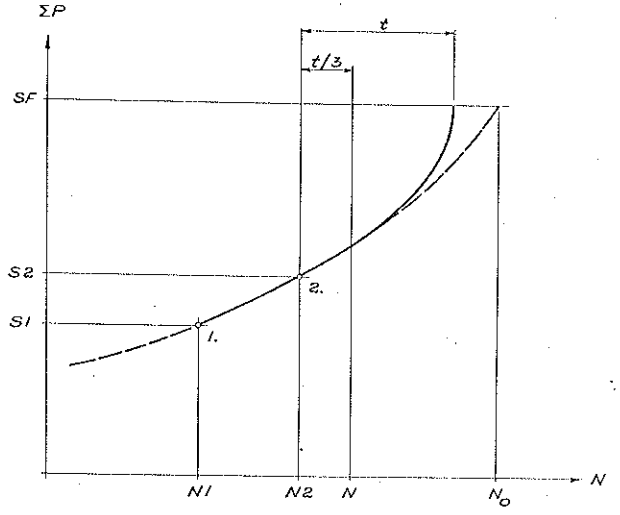


Fig. 43