Filosofisk Logik

(FTEA21:4)

föreläsningsanteckningar
v. 2.1, *den* 10/9 2014

Staffan Angere
Filosofiska institutionen, Lunds Universitet
staffan.angere@fil.lu.se

~

Förberedande

***Om detta kompendium*:**

Det här kompendiet är ett hjälpmedel till kursen FTEA21:4, *Filosofisk Logik*, vid filosofiska institutionen, Lunds Universitet. Den skall tas som sådant, tillsammans med föreläsningarna, och boken ”Langage, Proof and Logic” av Barwise & Etchemendy, 2:a utgåvan (hädanefter B&E), som är officiell kurslitteratur. Sid- och kapitelhänvisningar nedan är till denna bok, och bör ses som tips för att läsa vidare om och få bättre förståelse för saker som tas upp här. *Uppgifter* som ges här skall ses som förslag; gör så många av uppgifterna i boken som du behöver för att känna att du förstår avsnittet tillräckligt.

***Om kursen*:**

Kursen i filosofisk logik kan delas upp i tre komponenter.

A. Mängdlära (kap. 15), som kommer att vara nödvändigt för den sista komponenten, men som också i sig självt är oerhört användbart för en filosof. Det utgör dessutom ett bra exempel på en formell teori som faktiskt används. Vi kommer att studera både praktiskt tillämpad mängdlära och några filosofisk-logiska problem, såsom Russells paradox.

B. Definition, induktion & aritmetik (kap. 16). Ett mindre avsnitt som syftar till att ge ytterligare ett exempel på en formell teori, och som dessutom introducerar metoder som är användbara inom all logik och matematik.

C. Metalogik (kap. 17-19), som handlar om formella egenskaper hos logiska system såsom sundhet och fullständighet, samt om viktiga logiska och semantiska begrepp (t.ex.

sanning och *modell*), samt om tolkningar av logiska system. Vi kommer framför allt att ge en översikt över detta område såsom det är tillämpbart på språket FOL.

De stycken ur boken som ingår i kursen, officiellt, är:

A. Kap. 15 - 15.10
B. Kap. 16 - 16.4
C. Kap. 17-17.2, 18-18.3 och 19-19.8.

Logik och filosofisk logik

Logik är läran om korrekta slutledningar, d.v.s. hur man resonerar korrekt, inom alla möjliga olika områden. *Formell logik* (äv. kallad *symbolisk logik*) är det sätt att arbeta med logik som är mest välutvecklat för tillfället. Det kan sägas ligga till grund för all modern filosofi, och spelar i princip samma roll där som matematiken gör i naturvetenskaperna.

En av den formella logikens viktigaste uppgifter är att verka som ett universellt språk för filosofin, där resonemang och teorier på ett klarare och mer exakt sätt kan presenteras. På så sätt ger det filosofin en grad av *objektivitet* lik den som ges av experiment i vetenskaperna: vem som helst kan kontrollera om en härledning är giltig, och alla kommer fram till samma resultat om de använder samma regler. Formell logik är därför en nödvändighet för att kunna närma sig filosofiska frågor på ett vetenskapligt och icke-subjektivt sätt. Även om de flesta filosofer inte vardagligen uttrycker sig formellt, finns det anledning att hävda att ett kriterium på att en filosofisk position är substantiell är att den *går* att formalisera, d.v.s. uttrycka i formell logik.

Ämnet *filosofisk logik*, som den här delkursen handlar om, kan kontrasteras med *matematisk logik*. De är dock ganska lika varandra. Matematisk logik brukar ha något mer fokus på strukturer som används inom resten av matematiken, såsom mängdlära eller algebra, och filosofisk logik lägger ofta fokus mer på språk och strukturer som används inom filosofin.

Informella bevis

I den här delkursen kommer vi ofta att använda oss av *informella* bevis, istället för de formella som använts i förra delkursen. Ett informellt bevis kan ses som ett ”recept” för att skapa ett formellt bevis, eller en starkt förkortad version av ett sådant. Anledningen att vi ger dem snarare än formella är i huvudsak två:

Praktikalitet: formella bevis av substantiella mängdteoretiska, metalogiska eller matematiska satser är ofta gigantiska och nästan omöjliga att arbeta med för hand. Detta kan lösas genom att t.ex. använda ett datorprogram för bevishantering, vilket framför allt ibland görs inom datalogi. Det traditionella sättet, som används inom t.ex. matematik, är dock att enbart ge informella bevis.

Förståelighet: i ett informellt bevis kan man ofta förklara de bakomliggande idéerna bättre. Ett formellt bevis säger vad det säger; informella bevis kan också säga varför de säger det. Detta kan lösas genom att varje formellt bevis får ett informellt som tillägg. I allmänhet så räcker dock det informella beviset för att en tränad logiker skall kunna fylla i det formella beviset själv.

Vi ger inga exempel på informella bevis här, då flertalet kommer att dyka upp under kursens gång.

Om modeller

En annan nyhet i denna kurs är ett flitigt användandet av *modeller*. I logik betyder ”modell” i stort sett samma sak som ”tolkning”. Mer specifikt är en modell av en teori en tolkning av den teorin i en annan teori, d.v.s. en översättning av predikat $P(x_1, \ldots, x_n)$ i den första teorin till formler $S(x_1, \ldots, x_n)$ i den andra, där $x_1, ..., x_n$ är fria variabler.

En modell av en teori i en annan är ofta användbar för båda teorierna: den tillåter att saker vi vet om den ena av dem förs över till den andra. Den kanske viktigaste användningen av modeller i logik finns inom metalogiken, där språk i FOL översätts till mängdlära, och informella bevis sedan ges om denna översättning. De flesta av de satser som vi kommer att gå igenom i denna del skulle vara omöjliga att genomföra utan denna översättning.

A. *Mängdlära*
Kap. 15

Vad är mängdlära?

Mängdläran handlar om så kallade *mängder*, och räknas numera vanligen som en del av matematiken, men den ingår också traditionellt i den matematiska logiken. För den moderna logikens anfäder Boole och Frege var dock även mängdbegreppet ett rent logiskt begrepp. Men vad är en mängd? Det finns två sätt att närma sig det:

(*i*) En mängd är en *klass*: extensionen av ett predikat, ett begrepp, eller ett villkor, d.v.s. allt som uppfyller villkoret. Eftersom mängden nödvändigt bestäms av ett begrepp, och begrepp är något som traditionellt är logikens område, är själva mängden här ett mer logiskt objekt. Denna tolkning förknippas framför allt med Frege.

(*ii*) En mängd är en *samling av ting*, samlade ”i tanken” till ett annat ting. Mängden som sådan har ingen nödvändig koppling till något begrepp, och därför räknas mängdläran här ofta som mer matematisk. Denna tolkning är den som Cantor förespråkade då han grundade den moderna matematiska teorin om mängder.

Nuförtiden tycks tolkning (*ii*) vara vanligare (jfr B&E), men det är ändå mest rättvisande att se modern mängdlära som den historiska produkten av inspiration från båda tolkningarna.

Naiv mängdlära 15.1

En *mängd* är ett objekt, vartill en eller flera antal andra objekt står i relationen *medlemskap* (med ett undantag, som vi skall se senare). Om *b* är en mängd och *a* är ett objekt skriver vi *a*

$\in b$ om a är en medlem i b. Ibland kallas samma relation att a är ett *element* i b. Vi förkortar $\neg(a \in b)$ som $a \notin b$.

Låt x, y, z… vara variabler över domänen av alla objekt, och a, b, c, vara variabler över domänen av mängder (d.v.s. en deldomän av den förstnämnda). Vi kan specificera en mängd på två sätt: genom att räkna upp dess medlemmar (jfr tolkning (*ii*)) eller genom att ge ett villkor som alla dess medlemmar och inga andra uppfyller (jfr tolkning (*i*)). Den första metoden kan givetvis bara användas när mängden har ett ändligt antal medlemmar. Om b innehåller talen 1, 6 och 7, och inget annat, så skriver vi $b = \{1, 6, 7\}$. Den andra metoden, däremot, kan bara användas då vi på något sätt kan *specificera* vilka element som skall ingå, lämpligen genom att använda ett predikat. Om b t.ex. är mängden av alla udda tal, predikatet $\mathrm{T}(x)$ uttrycker att x är ett tal, och $\mathrm{U}(x)$ att x är udda, skriver vi $b = \{x \mid \mathrm{T}(x) \wedge \mathrm{U}(x)\}$ – i ord ”b är mängden av de x sådana att $\mathrm{T}(x)$ och $\mathrm{U}(x)$”.

Extensionalitet, abstraktion **15.1**

Från både tolkning (*i*) och tolkning (*ii*) ovan går att motivera att mängden a är identisk med mängden b omm de har exakt samma medlemmar. Detta kallas för *extensionalitetsaxiomet*, och betyder att en mängd bestäms entydigt av att vi för alla objekt bestämmer om de ingår i denna mängd eller inte. Det innebär att *ordningen* vi skriver element i när vi räknar upp dem inte har någon betydelse. Det innebär också att det är meningslöst att påstå något sådant som att en mängd innehåller *två* exemplar av någonting: antingen ingår objektet eller så gör det inte det, och det finns inget sådant som att ingå ”två gånger”. Vi skriver extensionalitetsaxiomet i FOL som

$$\forall a \forall b(\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b)$$

Abstraktionsaxiomet (eng. *comprehension*) är den andra principen i den naiva (intuitiva) mängdläran. Det säger att varje formel $\mathrm{P}(x)$ i FOL med en fri variabel x entydigt bestämmer en mängd – närmare bestämt mängden av alla ting som gör $\mathrm{P}(x)$ till en sann sats om x tar någon av dem som värde:

$$\exists a \forall x(x \in a \leftrightarrow \mathrm{P}(x))$$

Det är värt att notera att detta är ett *axiomschema* snarare än ett enskilt axiom, eftersom P kan vara vilken formel som helst. Om a är mängden av objekt som uppfyller villkoret $\mathrm{P}(x)$, så skriver vi $a = \{x \mid \mathrm{P}(x)\}$. Om a t.ex. är mängden av alla små kuber, kan vi skriva detta som $a = \{x \mid \mathrm{Small}(x) \wedge \mathrm{Cube}(x)\}$.

Som vi nämnde är ett annat sätt att specificera en mängd att räkna upp dess element: $a = \{c, d, e\}$. Detta kan ses som en förkortning av

$$a = \{x \mid x = c \vee x = d \vee x = e\}$$

Från detta följer t.ex. att $\{c, d, e, d, c\} = \{d, c, e, e\}$, då

$$\forall x\ ((x = c \vee x = d \vee x = d \vee x = c) \leftrightarrow (x = d \vee x = c \vee x = e \vee x = e))$$

är en logisk sanning.

Små mängder **15.2, 15.4**

Från de två axiomen i naiv mängdlära följer existensen av många mängder. Den minsta mängden är den *tomma mängden*

$$\varnothing =_{df.} \{x \mid x \neq x\}$$

Denna kan vara svår att tolka som något som vi vanligen ser som en ”mängd” eller ”samling”, men den är lätt att tolka som extensionen av ett begrepp (begreppet att inte vara självidentisk). Detta är ett bra exempel på hur både tolking (*i*) och tolking (*ii*) ovan behövs för att motivera mängdlärans form

Något större är *singletonmängden* eller *enhetsmängden* av varje objekt *c*, varmed vi menar den mängd som bara innehåller *c* och inget annat. Denna definieras som

$$\{c\} =_{df.} \{x \mid x = c\}$$

Mängder med *två* element kan också definieras, som

$$\{c, d\} =_{df.} \{x \mid x = c \vee x = d\}$$

för varje par av element *c*, *d*. Existensen av alla dessa mängder följer från abstraktionsaxiomet, och deras unikhet från extensionalitetsaxiomet.

Med hjälp av existensen av par och singletonmängder kan vi också definiera *ordnade par*. Ett ordnat par är ett där både ordningen och antalet förekomster av varje objekt har betydelse. De skrivs vanligen som $\langle c, d\rangle$. Den princip ett sådant objekt måste uppfylla är

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \leftrightarrow (a = c \wedge b = d) \qquad (*)$$

Detta skiljer sig från oordnade par, som istället uppfyller

$$\{a, b\} = \{c, d\} \leftrightarrow \forall x\, (x = a \vee x = b) \leftrightarrow (x = c \vee x = d))$$

vilket följer från extensionalitetsaxiomet.

Det finns många sätt att definiera ordnade par: allt vi behöver är att hitta en tvåställig funktion $f(x, y)$ som uppfyller (*). Ett vanligt sätt att göra detta gavs av Kuratowski 1921:

$$\langle x, y\rangle =_{df.} \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Med hjälp av ordnade par kan vi definiera ordnade tripplar, kvadrupplar, etc. Dessa bör uppfylla

$$\langle a, b, c\rangle = \langle a', b', c'\rangle \leftrightarrow (a = a' \wedge b = b' \wedge c = c')$$
$$\langle a, b, c, d\rangle = \langle a', b', c', d'\rangle \leftrightarrow (a = a' \wedge b = b' \wedge c = c' \wedge d = d')$$

etc. En samling definitioner som gör detta är

$$\langle a, b, c\rangle =_{df.} \langle a, \langle b, c\rangle\rangle$$
$$\langle a, b, c, d\rangle =_{df.} \langle a, \langle b, \langle c, d\rangle\rangle\rangle = \langle a, \langle b, c, d\rangle\rangle$$
$$\vdots$$

Alla ändliga sekvenser av objekt (*n-tuplar*) kan representeras på detta sätt. Senare skall vi också titta på *o*ändliga sekvenser.

Har vi ordnade par så kan vi också bilda mängder av dessa. En särskilt viktig sådan mängd är den *Cartesiska produktmängden* $a \times b$, som definieras som

$$a \times b =_{df.} \{\langle x, y\rangle \mid x \in a \wedge y \in b\}$$

D.v.s., $a \times b$ innehåller alla ordnade par vars första element finns i a och vars andra element finns i b.

UPPGIFTER: 15.4, 15.6, 15.10, 15.28, 15.30, 15.31

Några användbara konstruktioner **15.5**

Från två mängder a och b kan vi bilda följande nya mängder:

Snittet av a och b (i symboler $a \cap b$, eng. *intersection*). Den mängd som innehåller allt som finns i *både a* och b:

$$a \cap b =_{df.} \{x \mid x \in a \wedge x \in b\}$$

Om a och b inte överlappar (d.v.s. om inget finns i båda två) är snittet av dem nollmängden.

Unionen av a och b (i symboler $a \cup b$, eng. *union*). Den mängd som innehåller det som finns i *a och* det som finns i b, eller alternativt, den mängd som innehåller de objekt som är element i a eller b:

$$a \cup b =_{df.} \{x \mid x \in a \vee x \in b\}$$

Differensen av a och b (i symboler $a \setminus b$, alt. $a - b$, eng. *difference*). Den mängd som innehåller alla element i a som *inte* är element i b:

$$a \setminus b =_{df.} \{x \mid x \in a \wedge x \notin b\}$$

UPPGIFTER: 15.19, 15.24

Relationer **15.5**

Den vanligaste användningen av mängdlära är för att ”bygga” abstrakta objekt. Mängderna utgör en mycket rik struktur vari man kan tolka mer eller mindre vad som helst. Eller alternativt: mängdlära ger modeller för nästan alla teorier. Så länge man bara bryr sig om logisk struktur så räcker därför mängdlära ofta för att specificera en teori fullständigt.

Ett exempel på sådant modellerande är tolkningen av *relationer* som mängder. En n-ställig relation $\mathrm{R}(x_1, \ldots, x_n)$ kan tolkas som en mängd r vars element är ordnade n-tuplar $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, sådana att

$$\mathrm{R}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in r$$

Det följer att två relationer R, S för vilka $R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow S(x_1, \ldots, x_n)$ håller tolkas som *samma* mängd r. Vi uttrycker detta genom att säga att r ger *extensionen* av R och S.

Många typer av relationer har speciella namn då de ofta uppkommer när man modellerar. Vi kan se detta som att relationen har en viss *egenskap*. Det är dock viktigt att inte tolka ”egenskap” här som någon sorts högre ordningens predikat, eller som någon metafysisk entitet. Att $P(x)$ har en viss egenskap betyder bara att vissa satser som innehåller P är sanna. Några användbara sådana egenskaper är de följande:

Reflexivitet: $\forall x\, R(x, x)$
Irreflexivitet: $\forall x\, \neg R(x, x)$
Transitivitet: $\forall x \forall y \forall z\, (((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$
Symmetri: $\forall x \forall y\, (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$
Asymmetri: $\forall x \forall y\, (R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x))$
Antisymmetri: $\forall x \forall y\, ((R(x, y) \wedge R(y, x)) \rightarrow x = y)$

Givet en relation R kan vi bilda dennas *invers* R^{-1}: den relation i vilken x står till y omm y står i R till x. Om r är extensionen av relationen R bildar vi därför inversens extension r^{-1}som

$$r^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle \in r\}$$

Vi kan se att en relation är identisk med sin egen invers omm relationen är symmetrisk.

En särskilt viktig typ av tvåställig relation är *ekvivalensrelationerna*. Vi säger att R är en *ekvivalens* omm R är reflexiv, transitiv och symmetrisk. Exempel är ”Lika lång som”, ”Lika gammal som”, ”Samma färg som”. Det användbara med ekvivalensrelationer är att de delar upp domänen i klasser eller kategorier: ”Lika lång som” kan t.ex. användas för att dela upp domänen i klasser efter hur långa individerna är.

Uppdelningen genomförs formellt på följande sätt: för varje $x \in D$, låt $[x]_R$ vara följande mängd:

$$[x]_R =_{df.} \{y \mid R(x, y)\}$$

Mängden $[x]_R$ är alltså mängden av allt i domänen som x står i relationen R till. Eftersom R är reflexiv har vi att $x \in [x]_R$. Vi kan också visa att varje individ i domänen ingår i exakt en sådan klass. Vi kallar dessa för *ekvivalensklasser* under relationen R.

Ekvivalensklasser är användbara för att gå från en relation till något som mer liknar en egenskap. I fallet ”Lika lång som” kan vi låta ekvivalensklasserna vara extensioner av predikat för olika längder. För ”samma färg som” ger ekvivalensklasskonstruktionen upphov till extensioner av predikat som motsvarar olika färger.

UPPGIFTER: 15.40, 15.44

Funktioner **15.6**

En funktion kan ses som en sorts relation: en som entydigt bestämmer något av sina argument, givet de övriga. En enställig funktion $f(x)$ kan t.ex. ses som en relation $F(x, y)$ som uppfyller

$$\forall x \exists! y\, F(x, y)$$

I B&E kallas detta en *total funktion*; de använder *funktion* för vilken relation R som helst som uppfyller villkoret

$$\forall x \forall y \forall z\ (((\mathrm{F}(x, y) \wedge \mathrm{F}(x, z)) \to x = y)$$

Den betydelse som vi använder här är dock betydligt vanligare. En relation som uppfyller $\forall x \forall y \forall z\ (((\mathrm{F}(x, y) \wedge \mathrm{F}(x, z)) \to x = y)$ kallas då en *partiell funktion*.

I matematiken är varje funktion (partiell och total) associerad med två mängder: dess *domän* och dess *kodomän*. Dessa är mängder a, b sådana att om $f(x) = y$, så håller $x \in a$ och $y \in b$. En funktion f med domän a och kodomän b skrivs f: $a \to b$.[1] En funktions *värdemängd* (eng. *range*) är den mängd av värden den kan anta för något argument, d.v.s. mängden

$$\{y \mid \exists x\ f(x) = y\}$$

En funktion vars värdemängd är samma som dess kodomän kallas *surjektiv* (eng. *surjective* eller *onto*). Om två olika element i domänen alltid tas till olika element i kodomänen kallas funktionen *injektiv*. Formellt är en injektiv funktion f en som uppfyller

$$\forall x \forall y (x \neq y \to\ f(x) \neq f(y))$$

eller ekvivalent

$$\forall x \forall y (f(x) = f(y) \to\ x = y)$$

En funktion som är både injektiv och surjektiv kallas för en *ett-till-ett-korrespondens*. En sådan funktion ordnar varje element i domänen till ett och endast ett element i kodomänen, d.v.s. den ”parar ihop” elementen i domänen och kodomänen. Sådana funktioner är av stor betydelse för teorin om oändliga mängder.

UPPGIFTER: 15.51, 15.56

Delmängder och potensmängder

En viktig relation som kan hålla mellan mängder är *delmängdsrelationen*. Denna skriver vi som $a \subseteq b$ och definierar som

$$a \subseteq b \text{ omm } \forall x (x \in a \to x \in b)$$

Det följer från definitionen och extensionalitetsaxiomet att $a = b \leftrightarrow a \subseteq b \wedge b \subseteq a$. Vi har också alltid att $\varnothing \subseteq a$ och $a \subseteq a$.

Det är viktigt att skilja delmängdsrelationen från elementrelationen. I den Fregeanska tolkningen säger $x \in a$ att x har egenskapen a, och $a \subseteq b$ att allt som har egenskapen a också har egenskapen b. Vi har t.ex.

$$x \in \{x\} \text{ men inte } x \subseteq \{x\}$$
$$\{x\} \notin \{x, y\} \text{ men } \{x\} \subseteq \{x, y\}$$

[1] Notera användningen av ’$\to$’ här, och blanda inte ihop den med konditionalen. De kan skiljas på genom att konditionalen håller mellan *formler* medan ’$\to$’ i beskrivningen av en funktion håller mellan *termer*. Hela uttrycket f: $a \to b$ kan ses som ett treställigt predikat med betydelsen ”f är en funktion med domän a och kodomän b”.

Med hjälp av delmängdsrelationen kan vi för varje mängd a bilda *potensmängden* $\wp(a)$, definierad som

$$\wp(a) =_{df.} \{x \mid x \subseteq a\}$$

Eftersom $\varnothing \subseteq a$ och $a \subseteq a$ så gäller alltid för potensmängden $\wp(a)$ att $a \in \wp(a)$ och $\varnothing \in \wp(a)$.

UPPGIFTER: 15.61, 15.62

Antalet element i en mängd

I förra delkursen representerade vi det *antal* objekt som faller under ett visst predikat med hjälp av numerisk kvantifiering (de definierade kvantifikatorerna $\exists^{!n}$). Detta fungerar bara på predikat som ett ändligt antal objekt faller under. Det är också omöjligt att bevisa saker för sådana tal *i allmänhet*, även om vi alltid kan bevisa saker om specifika tal. T.ex. kan vi, om vi har rätt definitioner, ge ett bevis för att $2 + 1 = 1 + 2$, men inte för att $x + y = y + x$ för alla tal x och y.

Mängdlära ger betydligt större möjligheter: eftersom varje predikat $P(x)$ motsvarar en mängd $\{x \mid P(x)\}$ så kan vi istället försöka mäta antalet element i sådana mängder. Men vad betyder det att mäta ett sådant antal?

Den princip som används mest är vad som kommit att kallas *Humes princip*: två mängder har lika många element omm det finns en ett-till-ett-korrespondens mellan dem. Mängden a har minst lika många element som b omm det finns en injektiv funktion f: $b \to a$. Om a har minst lika många element som b så skriver vi $|b| \leq |a|$, och om a och b har lika många element skriver vi $|b| = |a|$ och säger att a och b har samma *kardinaltal*. Om $|a| \leq |b|$ men $|a| \neq |b|$ skriver vi $|a| < |b|$. Cantor använde dessa definitioner för att visa flertalet viktiga teorem om mängdläran. Det viktigaste av dessa är

Teorem (Cantor): För varje mängd a gäller att $|a| < |\wp(a)|$
Bevis: se B&E, s. 440.

Detta visar att för varje mängd finns det någon mängd med strikt sett fler element. Alltså finns det, för varje tal k, någon mängd som har mer än k element. Detta visste vi redan för ändliga tal: om a har n element så har $\wp(a)$ 2^n element. Hur är det med oändliga mängder? Finns det ens sådana?

I naiv mängdlära är svaret är ja: t.ex. mängden

$$V = \{x \mid x = x\}$$

Eftersom det finns åtminstone godtyckligt ändligt antal mängder så måste V innehålla strikt fler element än alla ändliga tal, d.v.s. vara oändlig.[2]

Eftersom $|a| = n$ omm $|\wp(a)| = 2^n$ för ändliga mängder kan vi anta att detta även håller för oändliga. Vi kan se detta som en *definition* av vad 2^n för ett oändligt kardinaltal n betyder, d.v.s. 2^n definieras som antalet element i potensmängden för vilken mängd som helst som har n element. På samma sätt kan vi definiera $n + m$ som antalet element i unionen av två mängder som har n och m element och tomt snitt, och $n \cdot m$ som antalet element i den Cartesiska produktmängden $a \times b$, där $|a| = n$ och $|b| = m$. Detta är grunden för den del av mängdläran som kallas *kardinaltalsaritmetik*.

[2] Ett annat sätt att visa detta är att anta existensen av en mängd $\mathbb{N}$ som innehåller de naturliga talen 0, 1, 2, 3, …. Denna mängd måste vara oändlig, och man kan visa att den är den *minsta* oändliga mängden. En mängd som kan sättas i en ett-till-ett-relation till någon delmängd av $\mathbb{N}$ kallas *uppräknelig*.

Russells och Cantors paradoxer

Naiv mängdlära är inkonsistent. Detta följer direkt från Cantors teorem och existensen av den universella mängden V: vi har att $\wp(V) \subseteq V$, så $|\wp(V)| \leq |V|$, vilket är ekvivalent med $\neg\, |V| < |\wp(V)|$. Men från Cantors teorem får vi $|V| < |\wp(V)|$, och alltså leder antagandet att det finns en mängd innehållande allting till motsägelse. Detta kallas för *Cantors paradox*. Den upptäcktes av Cantor kring år 1900.

Russell försökte år 1902 isolera vad det var i Cantors paradox som gav upphov till motsägelsen, och kom då fram till följande förenkling: från abstraktionsaxiomet följer existensen av mängden

$$r = \{x \mid x \notin x\}$$

Det är en logisk sanning att $r \in r \vee r \notin r$. Men anta att $r \in r$; då håller $r \notin r$ enligt definitionen av r, så vi har både $r \in R$ och $r \notin R$. Anta istället att $r \notin r$. Då håller $r \in r$, återigen per definitionen av r. Tillämpa $\vee$elim, och få att $r \in r \vee r \notin r$ ger att $r \in r \wedge r \notin r$.

Dessa motsägelser visar att vare sig r eller V kan existera. Men deras existens följer från abstraktionsaxiomet, och därför måste det vara falskt.

UPPGIFTER: 15.66

Zermelo-Fraenkels mängdlära

År 1908 gav Ernst Zermelo ett axiomsystem för mängdlära som inte ger upphov till Cantors eller Russells paradoxer. Detta system vidareutvecklades senare av Abraham Fraenkel, och blev det vanligaste systemet för mängdlära idag: ZFC, för *Zermelo-Fraenkel with Choice*. ZFC räcker för att bevisa mer eller mindre allt matematiker ville ha mängdlära till, och ännu har ingen hittat någon motsägelse i systemet.

ZFC består av totalt 7 axiom och två axiomscheman:

Extensionalitet:	samma som i naiv mängdlära.
Oordnade par:	$\forall x \forall y \exists c \forall z(z \in c \leftrightarrow (z = x \vee z = y))$.
Union:	för varje mängd c av mängder finns det en mängd som innehåller allt som finns i c:s element och inget annat.
Potensmängd:	för varje mängd c finns $\wp(c)$.
Oändlighet:	det finns en mängd i sådan att $\varnothing \in i$ och om $x \in i$ så $\{x\} \in i$.
Grundadhet:	varje icke-tom mängd c har något element $x \in c$ sådant att $x \cap c = \varnothing$.
Urval:	För varje mängd c av icke-tomma mängder finns det en mängd som innehåller exakt ett element från varje element i c.

De två axiomschemana är

Separation:	För varje formel P(x) med x fri och varje mängd c finns en mängd d sådan att $x \in d$ omm $x \in c$ och P(x).
Utbyte:	För varje tvåställigt predikat P(x, y) som är en (total) funktion gäller att om P:s domän är en mängd, så är P:s värdemängd också är en mängd.

Separation är en försvagning av abstraktionsprincipen. Axiomet bygger på Cantors idé att vad som är problemet med V och r är att de är *för stora* för att kunna tänkas på som enskilda objekt. Varken separations- eller utbytesaxiomen kan ge mängder som har fler element än de vi började med. Det är detta som är anledningen till att vi behöver de flesta av de övriga axiomen: de krävs för att bygga upp mängder ”nedifrån”, d.v.s. från nollmängden. Dennas existens följer i sin tur från paraxiomet tillsammans med separationsschemat.

UPPGIFTER: 15.71, 15.72, 15.76

B. *Definition, induktion och aritmetik*
Kap. 16

Explicita och implicita definitioner

En *explicit* definition är den enklaste formen av definition: den specificerar betydelsen av ett uttryck (*definiendum*) helt i termer av ett annat (*definiens*) sådant att det första uttrycket alltid kan bytas ut mot det andra; t.ex.

$$\exists^{\leq 2} x\ \mathrm{P}(x) \equiv_{df.} \forall x\ \forall y\ \forall z\ ((\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{P}(y) \wedge \mathrm{P}(z)) \rightarrow (x = y \vee x = z \vee y = z))$$

En *implicit* definition är istället ett villkor, d.v.s. en formel $\mathrm{S}(x)$ med en fri variabel x. Den kan användas på två sätt:

1. För att definiera ett *enskilt objekt*. För att definitionen skall fungera behöver vi då visa att det finns exakt ett objekt som uppfyller $\mathrm{S}(x)$.
2. För att definiera en *mängd*: mängden av objekt som uppfyller $\mathrm{S}(x)$.

Ett implicit definierat uttryck kan *inte* alltid ersättas med sin definiens, eftersom denna inte alltid är given som ett uttryck självt.

Induktiva definitioner **16.1, 16.2**

En induktiv definition är en typ av implicit definition av ett predikat $\mathrm{S}(x)$, eller den motsvarande mängden $s = \{x \mid \mathrm{S}(x)\}$. En induktiv definition görs i tre steg:

1. Ett *bassteg*. Detta är en uppräkning av objekt som uppfyller $\mathrm{S}(x)$. Det är vanligtvis en ändlig uppräkning, men det kan också vara en mängd som givits av en tidigare definition.
2. Ett *induktivt steg*. Detta säger att *om ett objekt x uppfyller* $\mathrm{S}(x)$, *så uppfyller också objekten* $y_1, \ldots, y_n$ *predikatet* $\mathrm{S}(x)$.
3. Ett *avslutande steg*. Detta säger att ingenting utom det som givits av steg 1 och 2 uppfyller $S(x)$.

Det är viktigt att se att steg 2. kan tillämpas hur många gånger som helst: om vi har att c är en term ger att $f(c)$ är en term, så är även $f(f(c))$, $f(f(f(c)))$ etc. termer. Steg 2 kan också innehålla flera villkor, som i definitionen av en satslogisk sats: denna säger att om S och T är satser, så är också $\neg$S, (S$\wedge$T), (S$\vee$T), (S$\rightarrow$T) och (S$\leftrightarrow$T) satser.

Hur formaliserar vi det tredje steget? Med mängdlära.[3] Vi börjar med att notera att steg 1 och 2 i sig definierar en *mängd m av mängder*, nämligen de mängder som uppfyller villkoren i 1 och 2:

$$m = \{c \mid b \subseteq c \wedge \forall x\, (x \in c \rightarrow (f_1(x) \in c \wedge \ldots \wedge f_n(x) \in c)\}$$

Här är b den mängd av objekt som givits i bassteget, och $f_1, \ldots, f_n$ funktioner som beskriver det induktiva steget. Mängderna i m kommer dock att också innehålla mycket annat som inte uppfyller 1 och 2. För att få bort dessa tar vi *snittet* av alla mängder i m:

$$m' = \bigcap m$$

Mängden m' innehåller allt som är i *alla* mängder som uppfyller 1 och 2 Ett annat sätt att säga detta är att den inte innehåller något som inte krävs av 1 och 2.

Induktiva bevis **16.1, 16.2**

När vi har satt upp en induktiv definition av ett begrepp kan vi använda den för att göra induktiva *bevis*, d.v.s. bevis av att *alla* element i en induktivt definierad mängd m har en viss egenskap. Dessa är inte egentligen en ny form av bevis: de kan utföras helt och hållet i FOL, med tillägget av mängdlära. Det ”nya” med dem är att de använder sig av induktiva definitioner. Ett induktivt bevis av att alla S är T, där S är ett induktivt definierat predikat, består av 2 steg:

1. Bassteget: vi visar att objekten i bassteget som användes för att definiera S(x) uppfyller T(x).
2. Det induktiva steget. Vi visar att om S(x) håller, så håller S($f_1(x)$) $\wedge \ldots \wedge$ S($f_n(x)$), där $f_1, \ldots, f_n$ återigen är de funktioner som beskriver det induktiva steget i definitionen.

För några exempel, se s. 457-460 i B&E.

UPPGIFTER: 16.1, 16.2, 16.6

Aritmetik **16.3, 16.4**

Det mest berömda exemplet på en induktiv definition är den varigenom de naturliga talen (d.v.s. de icke-negativa heltalen) ges:

1. 0 är ett naturligt tal.
2. Om n är ett naturligt tal, så är $n + 1$ ett naturligt tal.
3. Ingenting annat är ett naturligt tal.

[3] Eller i högre ordningens logik, som Frege från början gjorde.

Om vi nu har mängdlära i bakgrunden så räcker detta för att definiera aritmetiken: vi kan införa addition, multiplikation, subtraktion, division etc. med hjälp av induktiva definitioner på dessa tal. Ofta är det emellertid användbart att inte anta mängdlära när vi arbetar med aritmetik.

De naturliga talen är en betydligt mindre struktur än det mängdteoretiska universumet, och vi har ännu större anledning att tro att aritmetiken är konsistent än att mängdläran är det. För att få en användbar definition för FOL utan mängdlära måste vi dock också ta med regler för addition och multiplikation i axiomen.

Den mest kända uppsättningen axiom kallas för *Peanoaritmetiken* (PA), och består av 6 axiom och ett axiomschema, uttryckta i ett första ordningens språk med individkonstanten 0, den enställiga funktionssymbolen s (”successor”), och de tvåställiga funktionssymbolerna + och $\times$.

1. $\forall n\ 0 \neq s(n)$
2. $\forall n\ \forall m\ (s(n) = s(m) \rightarrow n = m)$
3. $\forall n\ n + 0 = n$
4. $\forall n\ \forall m\ n + s(m) = s(n + m)$
5. $\forall n\ n \times 0 = n$
6. $\forall n\ \forall m\ n \times s(m) = n \times m + m$
7. $(\mathrm{P}(0) \wedge \forall n\ (\mathrm{P}(n) \rightarrow \mathrm{P}(n + 1))) \rightarrow \forall n\ \mathrm{P}(n)$

I axiomschemat 7 är P vilket enställigt predikat som helst. Det kallas för *induktionsaxiomet*, och är det huvudsakliga verktyget för att visa saker om *alla* tal i PA.

Peanoaxiomen ger, vid sidan om ZFC, kanske det historiskt viktigaste exemplet på en första ordningens teori. PA är den teori som Gödels ofullständighetsbevis, som vi skall beskriva i nästa del av kursen, oftast formaliseras i.

UPPGIFTER: 16.14, 16.19, 16.20, 16.24

C. *Metalogik*
Kap. 17-19

Modeller för satslogiken — **18.1**

Vi har tidigare sagt att en *modell* är en tolkning av en teori i en annan. Att tolka *satslogiken* innebär att ge en översättning från ett satslogiskt språk till ett annat språk. Det vanligaste språk vi gör en sådan tolkning i är mängdlära, då mängdläran innehåller många användbara bevismetoder som vi kan använda för att visa teorem om satslogiken.

För satslogiken är det enda som har betydelse *sanningsvärdena S* och *F*; detta är det vi använder då vi gör sanningsvärdestabeller. Proceduren för att göra en rad i en sanningsvärdestabell kan sägas gå till såhär:

1. Vi sätter ut ett av värdena *S*, *F* på varje atomär sats.
2. För varje komplex sats räknar vi ut ett nytt sanningsvärde med hjälp av tabellerna för konnektiven.

Detta betyder att en tolkning kan ses som en *funktion* från det satslogiska språket till mängden $\{S, F\}$.[4] För att fånga betydelsen hos konnektiven behöver vi begränsa de värden en sådan funktion kan anta. Detta görs genom följande induktiva definition:

En *sanningsvärdestilldelning* är en funktion h från satserna i ett satslogiskt språk till mängden $\{S, F\}$ som uppfyller följande villkor:

1. Varje atomär sats tilldelas S eller F.
2. För komplexa satser P och Q håller:
    a. Om $h(\mathrm{P}) = S$ och $h(\mathrm{Q}) = S$ så håller $h(\neg\mathrm{P}) = F$, $h(\neg\mathrm{Q}) = F$, $h(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) = S$, $h(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) = S$, $h(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) = S$ och $h(\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}) = S$.
    b. Om $h(\mathrm{P}) = S$ och $h(\mathrm{Q}) = F$ så håller $h(\neg\mathrm{P}) = F$, $h(\neg\mathrm{Q}) = S$, $h(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) = F$, $h(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) = S$, $h(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) = F$ och $h(\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}) = F$.
    c. Om $h(\mathrm{P}) = F$ och $h(\mathrm{Q}) = S$ så håller $h(\neg\mathrm{P}) = S$, $h(\neg\mathrm{Q}) = F$, $h(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) = F$, $h(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) = S$, $h(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) = S$ och $h(\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}) = F$.
    d. Om $h(\mathrm{P}) = F$ och $h(\mathrm{Q}) = F$ så håller $h(\neg\mathrm{P}) = S$, $h(\neg\mathrm{Q}) = S$, $h(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) = F$, $h(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) = F$, $h(\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}) = S$ och $h(\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q}) = S$.

Ett exempel på en sanningsvärdestilldelning är en rad i en sanningsvärdestabell. En uppsättning modeller för en logik kan också kallas en *semantik* för den logiken.

UPPGIFTER: 17.2

Sundhet och fullständighet

Ett viktigt problem som modeller behövs för är formaliseringen logisk konsekvens. Detta görs enligt följande definition:

> Q är en *logisk konsekvens* av mängden av premisser $\mathcal{T}$ omm Q är sann i varje modell där alla satser i $\mathcal{T}$ är sanna.

Vi har också följande specialiseringar av begreppet:

> Q är en *kontradiktion* omm det inte finns någon modell där Q är sann.
> Q är en *tautologi* omm Q är sann i alla modeller.

För satslogiken innebär att Q är sann i modellen f helt enkelt att $f(\mathrm{Q}) = S$, eftersom en modell bara är en sådan funktion.

Så snart vi har ett sätt att göra modeller av en logik uppkommer frågan om hur väl dessa modeller kan representera denna. För detta är det användbart att introducera lite symbolism:

> $\mathcal{T} \vdash_{\mathbf{H}}$ Q omm det finns en härledning från premisserna i $\mathcal{T}$ med Q som slutsats.
>
> $\mathcal{T} \models_{\mathbf{S}}$ Q omm Q är en logisk konsekvens av $\mathcal{T}$.

[4] Vi kan också istället ta vilka två andra objekt som helst; det enda som behövs är att sanna och falska satser tilldelas olika värden. T.ex. är 0 för falskt och 1 för sant vanliga inom matematiken och datalogin.

Här är **S** en semantik (en samling tolkningar) och **H** ett härledningssystem, d.v.s. en uppsättning regler som bestämmer vilka härledningar som är tillåtna.

Vad betyder *det finns en härledning*? Att vi kan definiera en sekvens av satser $\mathscr{P} = \langle P_1, \ldots, P_m \rangle$ sådan att

1. $P_1, \ldots, P_n$ är medlemmarna av $\mathscr{T}$ (d.v.s. premisserna) för något $n \leq m$.
2. P_{k+1} kan erhållas från $P_1, \ldots, P_k$ genom att tillämpa någon av härledningsreglerna på någon eller några av satserna $S_1, \ldots, S_k$, där $n \leq k < m$.
3. S_m är slutsatsen.

Den grundläggande frågan - kanske den fundamentala metalogiska frågan för varje logik - är hur $\vdash$ och $\vDash$ är relaterade. Vi har två särskilt viktiga villkor här:

- Härledningssystemet **H** är *sunt* med avseende på semantiken **S** omm $\mathscr{T} \vdash_{\mathbf{H}} Q \Rightarrow \mathscr{T} \vDash_{\mathbf{S}} Q$ för varje mängd $\mathscr{T}$ av satser och alla satser Q.
- Härledningssystemet **H** är *fullständigt* med avseende på semantiken **S** omm $\mathscr{T} \vDash_{\mathbf{S}} Q \Rightarrow \mathscr{T} \vdash_{\mathbf{H}} Q$ för varje mängd $\mathscr{T}$ av satser och alla satser Q.

Sundhet är ofta förhållandevis enkelt men arbetsamt att bevisa; skriver man en lärobok i logik är det är vanligt att lämna det som en övningsuppgift så att man inte själv behöver skriva ner allt. Det görs genom att alla härledningsregler gås igenom en och en, och att man bevisar att om en mängd av satser är sann i en viss modell, så är även resultatet av att tillämpa härledningsregeln på några av dessa satser sant i denna modell. Sundhetsteoremet följer sedan genom induktion.

Bevis av fullständighets för satslogiken **17.2**

Hur bevisar vi fullständighet? Ett första förslag: genom att ge en algoritm för att generera ett bevis av Q från $\mathscr{T}$, som terminerar (d.v.s. når fram till ett resultat) om $\mathscr{T} \vDash_{\mathbf{S}} Q$. För satslogiken går faktiskt detta att göra, men för FOL är det omöjligt. Vi kommer därför att gå till väga på ett annat sätt, som är tillämpbart på FOL också, och som dessutom är enklare (om än inte på något vis *enkelt* – fullständighet är alltid någotsånär komplicerat att visa).

Först behöver vi ett lemma (en hjälpsats):

Lemma: $\mathscr{T} \vdash_{\mathbf{H}} Q$ omm $\mathscr{T} \cup \{\neg Q\} \vdash_{\mathbf{H}} \bot$.

Vi börjar med att skriva om $\mathscr{T} \vDash_{\mathbf{S}} Q \Rightarrow \mathscr{T} \vdash_{\mathbf{H}} Q$ som $\mathscr{T} \nvDash_{\mathbf{S}} Q \Rightarrow \mathscr{T} \nvdash_{\mathbf{H}} Q$. Men enligt lemmat är detta ekvivalent med $\mathscr{T} \cup \{\neg Q\} \nvDash_{\mathbf{S}} \bot \Rightarrow \mathscr{T} \cup \{\neg Q\} \nvdash_{\mathbf{H}} \bot$: om det inte finns någon härledning från $\mathscr{T} \cup \{\neg Q\}$ till $\bot$ så är $\mathscr{T} \cup \{\neg Q\}$ konsistent, d.v.s. $\mathscr{T} \cup \{\neg Q\}$ är sann i någon modell. Men att detta håller för alla $\mathscr{T}$ och alla Q följer av att det håller för alla mängder $\mathscr{T}$' av premisser. Alltså räcker det att bevisa:

Teorem: om $\mathscr{T}$' är konsistent så har $\mathscr{T}$' en modell.

Låt en *formellt fullständig*[5] mängd $\mathcal{T}$ av satser vara en mängd sådan att, för alla satser Q, så har vi antingen $\mathcal{T} \vdash_{\mathsf{H}}$ Q eller $\mathcal{T} \vdash_{\mathsf{H}} \neg$Q. Teoremet kan bevisas i två steg:

1. Visa att varje formellt fullständig satsmängd $\mathcal{T}$ har en modell.
2. Visa att varje konsistent satsmängd $\mathcal{T}$ kan utvidgas till en formellt fullständig konsistent satsmängd $\mathcal{T}$' (d.v.s. att $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}$').

Steg 2 görs genom att gå igenom alla atomära satser P och lägga till P om vare sig $\mathcal{T} \vdash_{\mathsf{H}}$ P eller $\mathcal{T} \vdash_{\mathsf{H}} \neg$P. Genom att göra en induktion på satserna i satslogiken kan vi sedan visa att det gäller för alla satser Q att $\mathcal{T}$' inte innehåller både Q och $\neg$Q om inte $\mathcal{T}$ gjorde det.

För steg 2 kan vi göra en modell på följande sätt: börja med att sätta f (P) = S omm P $\in \mathcal{T}$, för alla atomära satser P. För komplexa satser fyller vi sedan i sanningsvärdena enligt semantiken ovan (d.v.s. sanningsvillkoren för konnektiven). Det följer från sundhetssatsen att en sådan tilldelning är entydigt bestämd, d.v.s. den ger ett unikt värde ur $\{S, F\}$ för varje sats.

UPPGIFTER: 17.5, 17.9-17.12

Modeller för första ordningens logik **18.1**

För FOL behöver vi använda modeller med mer struktur än för satslogiken. En *första ordningens modell* $\mathfrak{M}$ för ett första ordningens språk $\mathcal{L}$ är en funktion från predikaten, individkonstanterna, funktionssymbolerna och allkvantifikatorn i $\mathcal{L}$ till mängder, sådan att

1. $\mathfrak{M}(\forall) = D$ för någon mängd D som vi kallar *domänen* för $\mathfrak{M}$.
2. $\mathfrak{M}(c) \in D$ för alla individkonstanter c.
3. $\mathfrak{M}$(P), där P är ett n-ställigt predikat, är en mängd av ordnade n-tuplar av element i D, d.v.s. en relationsextension för P.
4. $\mathfrak{M}(f)$, där f är en n-ställig funktionssymbol, är en mängd av ordnade n+1-tuplar $\langle x_1, \ldots, x_n, y\rangle$ av element i D sådan att om $\langle x_1, \ldots, x_n, y\rangle \in \mathfrak{M}(f)$ och $\langle x_1', \ldots, x_n', y\rangle \in \mathfrak{M}(f)$ så har vi $x_1 = x_1' \wedge \ldots \wedge x_n = x_n'$. D.v.s. en funktionsextension för f.

Ett sätt att tolka detta är att en modell för $\mathcal{L}$ består av en domän D tillsammans med en tilldelning av extensioner i denna domän till varje individkonstant, predikat och funktionssymbol i $\mathcal{L}$. Vi kan ta detta som ett exempel på skillnaden mellan satslogiken och FOL: medan satslogiken bara handlar om sanningsvärden, handlar FOL om extensioner.

UPPGIFTER: 18.4

Sanning i FOL **18.2**

Vad menar vi med att en första ordningens sats är *sann* i en modell $\mathfrak{M}$? I satslogiken var detta enkelt då vi tilldelade sanningsvärden direkt till satserna. I FOL går inte detta: för att bygga

[5] Notera att detta begrepp inte har särskilt mycket gemensamt med fullständighetsbegreppet vi introducerade ovan. Det är ”vanlig” fullständighet som Gödels fullständighetsteorem handlar om, och formell fullständighet som hans ofullständighetsteorem handlar om.

upp satser här behöver vi formler med fria variabler, och sanningsvärdena på dessa måste bero på vad variablerna tar för värden (d.v.s. refererar till). Säg att vi *skulle* tilldela sanningsvärde till t.ex. $P(x)$. Hur skulle vi räkna ut sanningsvärdet på $\forall x P(x)$ eller $\exists x P(x)$ från detta?

Detta problem löstes av Alfred Tarski, skaparen av FOL:s modellteori (samt ämnet *formell semantik*), i artikeln ”The concept of truth in formalized languages”, först publicerad 1933. I en senare text beskriver han beskriver sin konstruktion så här:

> ”11. THE CONSTRUCTION (IN OUTLINE) OF THE DEFINITION. A definition of truth can be obtained in a very simple way from that of another semantic notion, namely, of the notion of *satisfaction*.
>
> Satisfaction is a relation between arbitrary objects and certain expressions called "*sentential functions*." These are expressions like "*x is white*," "*x is greater than y*," etc. Their formal structure is analogous to that of sentences; however, they may contain the so-called free variables (like '*x*' and '*y*' in "*x is greater than y*"), which cannot occur in sentences.
>
> In defining the notion of a sentential function in formalized languages, we usually apply what is called a "recursive procedure"; i.e., we first describe sentential functions of the simplest structure (which ordinarily presents no difficulty), and then we indicate the operations by means of which compound functions can be constructed from simpler ones. Such an operation may consist, for instance, in forming the logical disjunction or conjunction of two given functions, i.e., by combining them by the word "*or*" or "*and*." A sentence can now be defined simple as a sentential function which contains no free variables.
>
> As regards the notion of satisfaction, we might try to define it by saying that given objects satisfy a given function if the latter becomes a true sentence when we replace in it free variables by names of given objects. In this sense, for example, snow satisfies the sentential function "x is white" since the sentence "snow is white" is true. However, apart from other difficulties, this method is not available to us, for we want to use the notion of satisfaction in defining truth.
>
> To obtain a definition of satisfaction we have rather to apply again a recursive procedure. We indicate which objects satisfy the simplest sentential functions; and then we state the conditions under which given objects satisfy a compound function—assuming that we know which objects satisfy the simpler functions from which the compound one has been constructed. Thus, for instance, we say that given numbers satisfy the logical disjunction "*'x is greater than y or x is equal to y*" if they satisfy at least one of the functions "*x is greater than y*" or "*x is equal to y*."
>
> Once the general definition of satisfaction is obtained, we notice that it applies automatically also to those special sentential functions which contain no free variables, i.e., to sentences. It turns out that for a sentence only two cases are possible: a sentence is either satisfied by all objects, or by no objects. Hence we arrive at a definition of truth and falsehood simply by saying that *a sentence is true if it is satisfied by all objects, and false otherwise*.
>
> (It may seem strange that we have chosen a roundabout way of defining the truth of a sentence, instead of trying to apply, for instance, a direct recursive procedure. The reason is that compound sentences are constructed from simpler sentential functions, but not always from simpler sentences; hence no general recursive method is known which applies specifically to sentences.) ”
>
> — Alfred Tarski, ur ”The Semantic Conception of Truth*”*, i *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. 4, nr. 3, 1944, s. 352-353).

Satisfiering **18.2**

Vi kommer nu att översiktligt beskriva det formella genomförandet av Tarskis procedur. En *variabeltilldelning* i modellen $\mathfrak{M}$ är en funktion v från variablerna i $\mathcal{L}$ till element i $\mathfrak{M}(\forall)$, d.v.s en tilldelning av element i $\mathfrak{M}$:s domän till variabler. En *värdering* i språket $\mathcal{L}$ baserad på tilldelningen v definierar vi som en funktion $\| \_ \|_v$, från termer (variabler, individkonstanter eller funktionsyttryck) i $\mathcal{L}$ till element i D sådan att

1. $\| x \|_v = v(x)$ för alla variabler x.
2. $\| c \|_v = \mathfrak{M}(c)$ för alla individkonstanter c.
3. $\| f(t_1, \ldots, t_n) \|_v = \mathfrak{M}(f)(\| t_1 \|_v, \ldots, \| t_n \|_v)$ för alla n-ställiga funktionssymboler f.

Detta är ett typexempel på en induktiv definition: värderingen av variabler bestäms av en variabeltilldelning, värderingen av individkonstanter av modellen, och värderingen av funktionsuttryck genom att tillämpa modellens tolkning av funktionssymbolerna på värderingen av de argument vi tillämpar funktionen på.

För att fånga kvantifikatorerna behöver vi också införa en operation på tilldelningar. Vi skriver $v[x / c]$ för den tilldelning som är precis som v förutom att den tilldelar elementet $c \in D$ till variabeln x istället för vad v tilldelar. Med hjälp av värderingar och denna operation kan vi nu ge en induktiv definition av vad satisfiering betyder. Vi skriver $\mathfrak{M} \vDash_v \mathrm{P}$ för *varabeltilldelningen v satisfierar* P *i modellen* $\mathfrak{M}$, och definierar:

1. $\mathfrak{M} \vDash_v \mathrm{P}(t_1, \ldots, t_n)$ omm $\langle \| t_1 \|_v, \ldots, \| t_n \|_v \rangle \in \mathfrak{M}(\mathrm{P})$ för atomära formler P.
2. $\mathfrak{M} \vDash_v \mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}$ omm $\mathfrak{M} \vDash_v \mathrm{Q}$ och $\mathfrak{M} \vDash_v \mathrm{R}$.
3. $\mathfrak{M} \vDash_v \mathrm{Q} \vee \mathrm{R}$ omm $\mathfrak{M} \vDash_v \mathrm{Q}$ eller $\mathfrak{M} \vDash_v \mathrm{R}$.
4. $\mathfrak{M} \vDash_v \mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R}$ omm $\mathfrak{M} \vDash_v \mathrm{Q}$ eller $\mathfrak{M} \nvDash_v \mathrm{R}$.
5. $\mathfrak{M} \vDash_v \mathrm{Q} \leftrightarrow \mathrm{R}$ omm antingen $\mathfrak{M} \vDash_v \mathrm{Q}$ och $\mathfrak{M} \vDash_v \mathrm{R}$ eller $\mathfrak{M} \nvDash_v \mathrm{Q}$ och $\mathfrak{M} \nvDash_v \mathrm{R}$.
6. $\mathfrak{M} \vDash_v \forall x\mathrm{Q}$ omm $\mathfrak{M} \vDash_{v[x / c]} \mathrm{Q}$ för alla $c \in D$.
7. $\mathfrak{M} \vDash_v \exists x\mathrm{Q}$ omm $\mathfrak{M} \vDash_{v[x / c]} \mathrm{Q}$ för något $c \in D$.

Eftersom satser är de formler som inte har några fria variabler alls kan vi visa att dessa antingen satisfieras av *alla* tilldelningar, eller av *inga*. I det första fallet kallar vi satsen *sann* och i det andra *falsk*.

UPPGIFTER: 18.7, 18.8

Fullständighet för FOL **19.1**

Att bevisa fullständighet för det härledningssystem vi har använt för FOL, med avseende på den semantik som gåtts igenom är ett betydligt svårare problem än att bevisa det för satslogiken. De grundläggande idéerna är dock samma som för satslogiken. För satslogiken visades fullständighet först av Emil Post år 1923, och för predikatlogiken av Kurt Gödel år 1929, även om båda använde helt andra metoder än den vi skall använda oss av.

Det centrala steget är, som vanligt i ett fullständighetsteorem, att visa att om $\mathcal{T}$ inte är inkonsistent, så finns det en modell $\mathfrak{M}$ vari alla satser i $\mathcal{T}$ är sanna. Precis som för satslogiken *konstruerar* vi en sådan modell: i detta fall en vars domän, relationer och funktioner utgörs av mängdteoretiska konstruktioner av individkonstanter tagna ur språket självt. För FOL görs detta i 4 steg:

1. Tillägg av *vittneskonstanter*. Vi har inga garantier för att de individkonstanter som finns i $\mathcal{L}$ är tilltäckliga för att beskriva alla domäner och behöver därför lägga till några. Vi kallar det resulterande språket $\mathcal{L}_H$.
2. Bilda *Henkinteorin* $\mathcal{H}$ i språket $\mathcal{L}_H$. Denna är en uppsättning axiom som beskriver hur kvantifikatorerna och identitetspredikatet fungerar i termer av konnektiven, d.v.s. en sorts ”reduktion” av predikatlogik till satslogik.
3. Visa *eliminationsteoremet*. Detta säger att det som kan visas i Henkinteorin, och som inte innehåller vittneskonstanterna, också kan visas i första ordingens logik *utan* att anta Henkinteorin. Detta behövs för att garantera att den modell vi konstruerar för $\mathcal{T} \cup \mathcal{H}$ gör sanna och falska samma satser som teorin $\mathcal{T}$.
4. Bilda *Henkinkonstruktionen*. Denna är en modell vars domän består av ekvivalensklasser av individkonstanter i $\mathcal{L}_H$ som gör sann alla satser i $\mathcal{T} \cup \mathcal{H}$, och därmed också alla satser i $\mathcal{T}$.

Vittneskonstanter och axiom; *eliminationsteoremet* **19.2-19.4**

För att kunna ge en teori som beskriver kvantifikatorerna måste vi kunna ersätta $\exists x\mathrm{S}(x)$ med någon sats som inte innehåller $\exists x$. Detta kan göras genom att byta ut x mot någon konstant c varom vi inte har antagit något mer än $\mathrm{S}(c)$. Ett sätt att kunna garantera att sådana konstanter finns är att lägga till dem. För varje sats $\exists x\mathrm{S}(x)$ lägger vi därför till konstanten $c_{\mathrm{S}(x)}$, och kallar resultatet av detta $\mathcal{L}_1$. Eftersom vi också kan använda dessa konstanter för att bilda nya satser, så innehåller detta språk dock fortfarande satser, på formen $\exists x\mathrm{S}'(x)$, som inte har motsvarande vittneskonstanter. Därför upprepar vi processen för att få språken $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}_4$, etc. Språket $\mathcal{L}_H$ definieras som

$$\mathcal{L}_H =_{df.} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_k$$

För att de nya konstanterna skall bete sig som vi vill, och för att vidare kunna beskriva kvantifikatorerna och identitetspredikatet, behöver vi Henkinteorin $\mathcal{H}$ som definieras som följande oändliga mängd satser:

1. $\exists x\mathrm{S}(x) \rightarrow \mathrm{S}(c_{\mathrm{S}(x)})$ för alla satser $\exists x\mathrm{S}(x)$.
2. Alla satser på formen $\mathrm{S}(c) \rightarrow \exists x\mathrm{S}(x)$.
3. Alla satser på formen $\neg\forall x\mathrm{S}(x) \leftrightarrow \exists \mathrm{x}\neg\mathrm{S}(x)$.
4. Alla satser på formen $c = c$.
5. Alla satser på formen $(\mathrm{S}(c) \wedge c = d) \rightarrow \mathrm{S}(d)$.

Eliminationsteoremet säger att alla satser som inte innehåller någon av vittneskonstanterna och som kan härledas från $\mathcal{T} \cup \mathcal{H}$ också kan härledas från $\mathcal{T}$. Detta kan inses genom att studera Henkinaxiomen: de är direkta tillämpningar av härledningsregler i FOL. För ett mer utarbetat bevis, se B&E, s.550 - 554.

UPPGIFTER: 19.3, 19.7, 19.9, 19.14

Henkinkonstruktionen **19.5**

Som vi gått igenom består en *modell* för ett språk $\mathcal{L}$ i FOL av en mängd D som kallas *domänen*, samt extensioner till alla predikat och funktionssymboler. Grundidén i Henkinkonstruktionen är att använda $\mathcal{L}_H$:s individkonstanter för D. Eftersom $c = d$ kräver att c och d är identiska för att vara sann kan vi emellertid inte använda dem som de är: vi kommer att ha många olika konstanter c, d som visserligen satisfierar samma predikat, men som ändå är distinkta. Lösningen här är att bilda relationen

$$c \equiv d \text{ omm } \mathcal{T} \cup \mathcal{H} \vdash c = d$$

Detta kan visas vara en ekvivalensrelation, så den tillåter att vi bildar ekvivalensklasser av konstanterna i $\mathcal{L}_H$. Vi låter elementen i D vara dessa ekvivalensklasser.

När vi satt ihop domänen är inte extensionerna något större problem. Vi låter extensionen av predikatet $\mathrm{P}(x_1, ..., x_n)$ vara mängden av n-tupler $\langle [c_1]_\equiv, \ldots, [c_n]_\equiv \rangle$ av element i D sådana att $\mathcal{T} \cup \mathcal{H} \vdash \mathrm{P}(c_1, ..., c_n)$. Detta är väldefinierat eftersom alla konstanter i samma ekvivalensklass $[c]_\equiv$ satisfierar samma predikat. Detta kan i sin tur härledas med hjälp av Henkinaxiomen och =elim.

Henkinkonstruktionen ger en modell $\mathfrak{M}_\mathcal{T}$ för varje konsistent mängd satser $\mathcal{T}$. Följer vi samma steg som för beviset av satslogikens fullständighet får vi

$$\text{Om } \mathcal{T} \nvdash \bot \text{ så finns en modell } \mathfrak{M} \text{ sådan att } \mathfrak{M} \vDash \mathcal{T} \quad \Leftrightarrow$$

$$\text{Om } \mathcal{T} \nvdash \bot \text{ så } \mathcal{T} \nvDash \bot \quad \Leftrightarrow$$

$$\text{Om } \mathcal{T} \cup \{\mathrm{P}\} \nvdash \bot \text{ så } \mathcal{T} \cup \{\mathrm{P}\} \nvDash \bot \quad \Leftrightarrow$$

$$\text{Om } \mathcal{T} \vDash \mathrm{P} \text{ så } \mathcal{T} \cup \{\mathrm{P}\} \vdash \bot$$

UPPGIFTER: 19.20, 19.22

Kompakthet och Löwenheim-skolemsatsen **19.6-19.7**

Närhelst vi har en mängd satser i FOL som inte är självmotsägande kan vi konstruera en Henkinmodell vari alla satserna är sanna. Det betyder att vi, om vi tar FOL som ett sätt att beskriva världen, aldrig kan utesluta att världen är en sådan modell. Mer specifikt gäller att Henkinmodellerna alltid är *uppräkneliga*, och alltså finns inget sätt i FOL att säga att det finns ouppräkneligt många ting. Formellt är detta känt som *Löwenheim-Skolems sats*: om $\mathcal{T}$ är en konsistent mängd satser i FOL så finns det en uppräknelig modell för $\mathcal{T}$.[6]

Ett relaterat resultat är det som kallas för *kompakthetssatsen*. Denna säger att en mängd $\mathcal{T}$ av satser är konsistent omm varje ändlig delmängd av satserna i $\mathcal{T}$ är konsistent, eller alternativt, att om P följer från mängden $\mathcal{T}$ av satser, så finns det en ändlig delmängd $\mathcal{T}'$ av $\mathcal{T}$ sådan att P följer av $\mathcal{T}'$. Detta innebär t.ex. att vi *inte* kan ge en första ordningens teori som fångar de naturliga talens struktur perfekt: antag att vi har ett system vari vi vill tolka predikatet $\mathrm{N}(x)$ som ”x är ett naturligt tal”. Låt $\mathcal{T}$ vara följande uppräkneligt oändliga mängd av satser:

(0)	$\mathrm{N}(c)$
(1)	$c \neq 1$

[6] Detta bevisades av den briljanta men idag mycket underskattade norska logikern Thoralf Skolem år 1920, alltså nästan 10 år innan fullständighetsteoremet bevisades. Han använde följaktligen en annan sorts argument.

$$\begin{array}{ll} (2) & c \neq 2 \\ (3) & c \neq 3 \\ (4) & c \neq 4 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Om nu N verkligen fångade vad det innebar att vara ett naturligt tal så skulle denna uppsättning satser leda till en motsägelse. Varje ändlig delmängd av den är däremot konsistent, och därför säger kompakthetssatsen att vi inte kan härleda någon motsägelse från hela mängden heller.

Gödels ofullständighetsteorem **19.8**

Gödels ofullständighetsteorem var förmodligen det mest diskuterade resultatet i logiken under 1900-talet. Det rör en annan typ av fullständighet än den som omtalas i hans fullständighetsteorem: medan det sistnämndas betydelse är den som vi gått igenom tidigare, används ordet ”fullständig” i hans ofullständighetsteorem för det som boken (och vi) kallat ”formellt fullständig”. Som vi nämnt är en satsmängd $\mathcal{T}$ är *formellt fullständig* omm, för varje sats P i språket, antingen $\mathcal{T} \vdash$ P eller $\mathcal{T} \vdash \neg$P.

Varför skulle vi vara intresserade av formellt fullständiga satsmängder? Om vi axiomatiserar en empirisk teori så bör vi inte förvänta oss att den är formellt fullständig: inte ens en perfekt återgivning av Newtons fysik säger någonting om hur snabbt specifika ting rör sig eller vad de väger, även om den specificerar samband mellan dessa egenskaper. Satser om enskilda ting förväntas vi fylla i med hjälp av empiriska mätningar. Däremot är det annorlunda med en rent a priori disciplin som matematiken: här har vi inte tillgång till några empiriska mätinstrument. Istället tycks vad som är sant och falskt här följa med logisk nödvändighet utifrån matematiska termers betydelse, och för att få detta strikt och på en säker grund skulle vi vilja bestämma hur detta går till formellt – förslagsvis i FOL.

Eftersom vad som är matematiskt sant och falskt bör avgöras helt av de grundläggande antaganden vi gör om t.ex. de naturliga talen, de reella talen, eller mängdläran, borde vi alltså kunna kräva, om $\mathcal{T}$ är en uppsättning axiom för det matematiska område vi vill beskriva, att $\mathcal{T} \vdash$ P eller $\mathcal{T} \vdash \neg$ P, för varje sats P som bara innehåller matematiska predikat (t.ex. ”>” och ”+”). Gödels ofullständighetsteorem säger emellertid att detta är omöjligt:

> *Teorem* (Gödels ofullständighetsteorem): Varje logiskt system som innehåller Penoaritmetiken är formellt ofullständigt.

Peanoaritmetiken (PA) är, som vi nämnt, den sedvanliga axiomatiseringen av aritmetik med de naturliga talen – en uppsättning med 6 axiom och ett axiomschema som definierar de naturliga talen samt addition och multiplikation, och som torde anses vara nödvändiga sanningar för att man skall kunna säga att man axiomatiserar just matematiken. Trots detta går Gödels ofullständighetsteorem igenom även med en del svagare system, och till och med inom några med bara ändligt många axiom.

Det går att uttrycka PA i ZFC, genom att t.ex. definiera talet 0 som $\varnothing$, och varje tal $n > 0$ som mängden av de föregående (denna definition gavs först av John von Neumann, och är den vanligaste numera). Därför är ZFC formellt ofullständigt. Gödels ofullständighetsteorem visar att vi aldrig kan ”täppa till” alla hål i matematiken så att den kan bringas till formell fullständighet.

Bevisidén i Gödels teorem är att representera satser i FOL som tal. Genom att genomföra detta noggrant kan vi visa att det finns rent numeriska predikat (d.v.s. predikat som kan definieras helt i termer av + och × i PA) som motsvarar begrepp såsom att vara en formel, att vara en sluten sats, att vara en sekvens av satser, eller att vara ett bevis för en sats. Om Bew(n) är predikatet för *bevisbarhet* så kan vi t.ex. visa att om n är talet för en sats i PA, så finns det ett bevis för denna sats i PA omm Bew(n) är sann.

Gödels bevis består i att betrakta satsen

(G) G går inte att bevisa i PA.

Gödel visade att det verkligen finns ett tal g för denna sats, och därför är satsen Bew(g) en välformad sats i PA. Men om denna är sann (och PA inte är självmotsägande) så går Bew(g) inte att bevisa, och alltså har vi Bew(g) $\rightarrow \neg$Bew(g), eller, vilket vi kan se med lite satslogisk omflyttning, helt enkelt $\neg$Bew(g). Men detta är precis vad satsen säger, och alltså är den sann, men inte bevisbar (att den är *sann* kan t.ex. formaliseras och visas med Tarskis sanningsbegrepp, så även detta steg går att göra formellt).

Gödels ofullständighetsteorem, som visar att matematiken inte är formellt fullständig och inte heller kan göras formellt fullständig genom att lägga till fler axiom, har fått stor betydelse för logiken och filosofin. T.ex. har den framhållits som ett ”bevis” för att människor inte är någon form av maskiner, eftersom en maskin antas följa ett formellt system och därför inte kan bevisa allt som är sant om den, medan människor inte antas ha någon sådan begränsning. Dessutom har det haft stor betydelse för diskussionen om vad *sanning* är, eftersom det begreppet enligt teoremet tycks skilja sig från *vad vi kan veta*, d.v.s. vad vi potentiellt kan bevisa i FOL. Många av dessa påståenden är emellertid tämligen ogrundade och baserar sig snarast på analogier; för en kritisk genomgång rekommenderas Torkel Franzéns bok *Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*, som nämns i den ytterligare läsningen sist i detta kompendium.

Olika logikers uttryckkraft

Vi har i denna kurs endast ägnat oss åt FOL och satslogik. Det finns många olika sorters logik, och de är i de flesta fall användbara till olika saker. Säg att vi har en semantik **S** för logiken $\mathcal{L}$, med en klass av modeller $\mathcal{M}$. Varje teori $\mathcal{T}$ bestämmer då en delklass av $\mathcal{M}$, nämligen de modeller vari teorin är sann. Vi säger att logiken $\mathcal{L}$', med samma semantik **S**, är *minst lika uttrycksfull* som $\mathcal{L}$ omm alla delklasser av $\mathcal{M}$ som bestäms av någon teori i $\mathcal{L}$ också bestäms av någon teori i $\mathcal{L}$'. Informellt kan vi säga att en logik är mer uttrycksfull än en annan omm teorier uttryckta i den kan göra skillnad mellan fler modeller.

Ett viktigt exempel här är FOL: enligt Löwenheim-Skolemsatsen kan inte denna logik skilja mellan uppräkneligt och ouppräkneligt oändliga modeller. En annan följd av dess begränsning är att man i första ordningens PA inte kan visa att det inte finns något tal med oändligt många tal före sig. Eftersom detta följer från en begränsning i FOL snarare än PA, så följer det också att det inte går att lägga till axiom i PA så att detta går att bevisa: FOL kan inte uttrycka ändlighet, även om det lustigt nog kan uttrycka *o*ändlighet.

Andra ordningens logik

Första ordningens logik tillåter oss att kvantifiera över objekt i domänen. Andra ordningens logik tillåter oss att också kvantifiera över predikat, men eftersom dessa tolkas som mängder av *n*-tuplar av objekt, så är detta ekvivalent med att kvantifiera över sådana mängder. För kvantifiering av enställiga predikat, som i

$$\forall X\ (X(a) \rightarrow X(b))$$

kan vi tolka X som helt enkelt en delmängd av D. Vinner vi något genom att tillåta sådan kvantifiering? Ja: många teorier som vi bara kan beskriva med oändliga axiomscheman i FOL går att beskriva med enskilda axiom i andra ordningen logik. T.ex. kan induktionsschemat i PA skrivas som

$$\forall X\ ((X(0) \wedge \forall n\ (X(n) \rightarrow X(n+1))) \rightarrow \forall n\ X(n))$$

Men detta är till och med *starkare* än induktionsschemat: som vi sade finns det modeller för första ordningens PA som har tal större än alla ändliga tal, men i andra ordningens PA har vi möjligheten att utesluta dessa.

Nackdelen med andra ordningens logik är att vi inte kan göra fullständiga härledningssystem för den. Detta följer från Gödels ofullständighetsteorem tillsammans med satsen att andra ordningens aritmetik är formellt fullständig, d.v.s. den avgör sanningsvärdena för alla satser i sitt språk. Detta kan i sin tur bevisas informellt, eller formellt genom att man uttrycker andra ordningens aritmetik som en del av ZFC.

Lindströms teorem

Dessa resultat kopplas ihop i ett av metalogikens viktigaste teorem: *Lindströms teorem*, som bevisades av Per Lindström i Göteborg år 1969. Lindström visade att FOL är den mest uttrycksfulla logik som, förutom några triviala villkor, uppfyller Löwenheim-Skolemsatsen och kompakthetssatsen. Detta betyder att varje mer uttrycksfull logik, d.v.s. varje logik vari man kan beskriva allt man kan beskriva i FOL, och dessutom någonting mer, måste ha åtminstone en av följande egenskaper:

1. Det finns någon ouppräkneligt oändlig modell $\mathfrak{M}$ som inte gör sann samma teorier som någon uppräkneligt modell.
2. Det finns någon bevisbar sats som inte kan bevisas från ett ändligt antal premisser.

Båda dessa leder emellertid till att man inte längre kan göra ett fullständigt härledningssystem för logiken i fråga. Därför kan man säga att FOL, på ett sätt, är den starkaste logik som vi kan fånga härledningar fullständigt formellt i utan att kräva att vi kan genomföra oändliga härledningar. Det är detta som ger den dess speciella betydelse.

Ytterligare läsning

Här följer några tips för den som vill sätta sig in mer i den filosofiska logiken (t.ex. över kommande ledighet!) Alla dessa torde vara tillgängliga för någon som gått den här kursen.

Allmänt om filosofisk logik: *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, red. Lou Goble, Blackwell, 2001. En riktigt bra översikt över området ”filosofisk logik”, som kan fungera som en karta för den som vill lära sig hitta där.

Om mängdlära: En klassiker vad gäller hantering av mängdlära från ett filosofiskt och logiskt perspektiv är *Set Theory and Its Logic*, Willard van Quine, Belknap Press, 1969.

Om aritmetik: Mer filosofiskt lagda viktiga utläggningar är Freges *Grundlagen der Arithmetik* (på svenska som *Aritmetikens Grundvalar*, Thales, 2002) och Dedekinds *Was sind und was sollen die Zahlen* (på engelska i samlingen *Essays on the theory of numbers*, Dover, 1963). En matematisk uppbyggnad av alla talsystem från axiom för naturliga tal ges i Edmund Landau, *Foundations of Analysis*, AMS Chelsea Publishing, 2001.

Om Gödels ofullständighetsteorem: En bra översikt både över det formella och över tolkningar (och feltolkningar) av teoremet är *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to its Use and Abuse*, Torkel Franzén, A K Peters Ltd, 2005.

Om filosofiska tillämpningar: Jag nöjer mig med att rekommendera min personliga favorit här: Hilary Putnam:s ”Models and Reality”, *Journal of Symbolic Logic* vol. 45, 1980. (Finns också på nätet: http://www.princeton.edu/~hhalvors/teaching/phi520_f2012/putnam1980.pdf) I denna text använder Putnam en version av Löwenheim-Skolemteoremet för att argumentera mot metafysisk realism.

Om framväxten av vår nuvarande logik: Mer eller mindre alla viktiga artiklar från början av 1900-talet finns i antologin *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, red. Jean van Heijenoort, Harvard University Press, 2002. En lättsammare beskrivning återfinns i seriealbumet *Logicomix: An Epic Search for Truth*, av Doxiadis och Papadimitrou, som beskriver logikens framväxt sett ur Bertrand Russells perspektiv. Perfekt som ett mer avslappnande komplement till andra böcker i den här listan, till exempel.