

Sammanfattning

Titel: Icke-parametrisk värdering av optioner.

Författare: Erik Karlsson och Jesper von Zweigbergk.

Handledare: Birger Nilsson.

Syfte: Syftet är att utvärdera den ickeparametriska optionsprissättningsmodellen "Canonical model".

Metod: Datan baseras på observerade noteringar av optioner, futures och den underliggande tillgången, OMXS30 index.

Resultat: Resultaten visar att den kanoniska modellen fungerar väl på svensk data. De visar också att kanonisk värdering kan generera ett volatilitetsleende som stämmer överens med det vi observerar på marknaden. Dessa resultat är konsistenta med Stutzers artikel.

Ett teoretiskt motiverat resultat är att den kanoniska värderingsmodellen kan härledas från "Large Deviation Theory".

Nyckelord: Optioner, Black-Scholes, Martingaler, Kanonisk.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

1 INLEDNING	1
1.1 BAKGRUND.....	1
1.2 PROBLEMFÖRMULERING.....	4
1.3 SYFTE.....	5
1.4 METOD.....	6
1.5 AVGRÄNSNINGAR.....	7
2 TEORI	9
2.1 KANONISK VÄRDERING.....	10
2.1.1 Riskneutral värdering.....	11
2.1.2 Skattningar.....	13
2.1.3 Den kanoniska fördelningen.....	14
2.1.4 Optionspriset.....	16
2.1.5 Den bivariata kanoniska fördelningen.....	17
2.1.6 En Bayesiansk ekonometrisk tolkning.....	18
2.2 VOLATILITET.....	19
2.2.1 Volatilitetsleendet.....	19
2.2.2 Köp-sälj pariteten.....	20
2.2.3 Skattningar av volatilitet.....	20
2.3 LARGE DEVIATIONS.....	22
2.3.1 Inledning.....	22
2.3.2 Large Deviations Principen.....	22
3 DATA	25
3.1 OMXS30 INDEX.....	25
3.2 UTDELNINGAR.....	27
3.3 OMXS30 INDEX OPTIONER.....	27
3.4 RÄNTAN.....	28
3.5 VOLATILITET.....	28
4 ANALYS OCH RESULTAT	30
4.1 OPTIONSPRISER.....	31
4.2 VOLATILITET.....	32
4.2.1 Löptid: Tre veckor.....	32
4.2.2 Löptid: Åtta veckor.....	33
4.2.3 Löptid: Tolv veckor.....	34
4.2.4 Löptid: Sexton veckor.....	35
4.3 SANNOLIKHETSFÖRDELNINGAR.....	36
4.3.1 Den empiriska fördelningen: Tre veckors löptid.....	36

4.3.2 Den riskneutrala fördelningen: Tre veckors löptid.....	38
4.3.3 Lagrange-multiplikatorn.....	39
4.4 MODELLANALYS	40
4.4.1 En alternativ infallsvinkel.....	41
4.4.2 Den kanoniska fördelningen	42
5 SLUTSATSER OCH KOMMENTARER.....	44
5.1 FÖRSLAG TILL FORTSATTA STUDIER	45
KÄLLFÖRTECKNING.....	46
TABELLER	49
APPENDIX A	51
APPENDIX B.....	52
APPENDIX C	53
APPENDIX D	54
APPENDIX E.....	56

1 Inledning

1.1 Bakgrund

Fischer, Black och Myron Scholes artikel "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" som publicerades 1973, har sedan publiceringen utgjort en av hörnstenarna i optionspristeorin.¹

Även om Black-Scholes optionsprissättningsmodell är ansedd, så är det ett empiriskt faktum att modellen inte överensstämmer med marknadsdata. Problemet är att priset på den underliggande tillgången antas följa en log-normalfördelning på slutdagen. Detta antagande har visat sig vara oförenligt med de på marknaden observerade optionspriserna. För att komma närmare en med verkligheten överensstämmande modell publicerade Michael Stutzer 1996 en artikel om ickeparametrisk optionsprisivärdering.²

Bakgrunden till Stutzers arbete är att under perioden 1990-92 har S&P 500 indexoptioner med låga lösenpriser en högre implicit volatilitet än vad S&P

¹ Black, Fischer och Scholes, Myron, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economics*, Volym 81, Nummer 3 Maj/Juni 1973.

Kungliga vetenskapsakademien utdelade 1997 Sveriges Riksbanks pris i ekonomisk vetenskap till Alfred Nobels minne till Robert Merton och Myron Scholes för deras formel för värdering av optioner. Fischer Black var avliden vid denna tidpunkt.

² Stutzer, Michael, A Simple Nonparametric Approach to Derivative Security Valuation, *The Journal of Finance*, Volym 51, Nummer 5 December 1996, sid 1633-1652.

500 indexoptioner med höga lösenpriser har.³ Mark Rubinstein fastslår att Black-Scholes applicerbarhet kontinuerligt har försämrats från 1987 och framåt, eftersom in-the-money köpoptioner och out-of-the-money säljoptioner konsekvent överprissats. Detta i jämförelse med motsvarande Black-Scholes priser.⁴ Rubinstein argumenterar för att detta förhållande har sitt ursprung i marknadens rädsla för en upprepning av kraschen 1987.⁵ Denna rädsla brukar beskrivas med att marknaden är kraschofobisk.

John C. Hull bekräftar detta förhållande.⁶ Studier av det amerikanska aktieindexet S&P 500 visar att priset på den underliggande tillgången inte är log-normalfördelat. Istället är den vänstra svansen av log-normalfördelningskurvan tunnare än dito hos den av optionspriserna implicerade fördelningen. I ett diagram över implicit volatilitet som funktion av lösenpriset uppträder detta förhållande som ett volatilitetsleende "volatility smile".⁷

Utöver rädslan för en börskrasch kan volatilitetsleendet förklaras av företagets skuldsättningsgrad. När ett företags börsvärde minskar, ökar företagets skuldsättningsgrad. Detta medför i sin tur att aktiepriset blir mer volatilt, vilket ökar sannolikheten att en köpoption med lågt lösenpris betalar pengar på slutdagen.⁸

Om Black-Scholes modell hade varit korrekt så skulle den implicita volatiliteten vara en konstant funktion av lösenpriset. Det finns forskare som tolkar detta resultat drastiskt. Dessa menar på att optioner är överflödiga och

³ Den volatilitet som kan lösas ut från Black and Scholes formel givet övriga parametrar, inklusive optionens marknadspris.

⁴ Rubinstein, Mark, Implied binomial trees, *The Journal of Finance*, Volym 49, Nummer 3 Juli 1994, sid 773-774.

⁵ Rubinstein (1994), aa, sid 775.

⁶ Hull, John C., *Options, Futures & Other Derivatives*, Femte upplagan, Prentice-Hall International Inc, 2003, sid 340-41.

⁷ En konvex kurva där volatiliteten minskar med ökat lösenpris. Hull (2003), aa, sid 334-35.

⁸ Hull (2003), aa, sid 335-36.

att en organiserad optionshandel är onödig.⁹ Åtminstone visar modellen bristfällighet och att det finns behov av fortsatta studier. Speciellt då handeln i optioner har ökat stadigt sedan Black-Scholes modell publicerades.¹⁰

Stutzers publicering gav upphov till ett antal artiklar vars syfte var att utvärdera den ickeparametriska metoden "Canonical Valuation" (kanonisk värdering).¹¹ I Grays och Newmans artikel framgår att kanonisk värdering har svårt att uppnå samma korrekthet i optionspriserna som Black-Scholes.¹² Detta då den historiska volatiliteten används i modellen.¹³ Samma författare finner att kanonisk värdering är att föredra framför Black-Scholes när den underliggande tillgångens följer en process med stokastisk volatilitet. I en liknande artikel finner Alcock och Gray att kanonisk värdering är att föredra vid dynamisk deltahedging under stokastisk volatilitet.¹⁴ Att den ekonomiska miljön beskrivs av en stokastisk volatilitet är ett realistiskt antagande. Resultaten indikerar därför att kanonisk värdering innehar goda och robusta egenskaper.

Stutzer och Chowdhury finner att kanonisk värdering fungerar bättre än Blacks modell för att värdera optioner på obligationsfutures noterade på The Chicago Board of Trade.¹⁵ Blacks modell lider vid en analys, precis som Black-Scholes, av att den implicita volatiliteten är konstant. Detta eftersom

⁹ Campbell, John Y., Lo, Andrew W. och MacKinlay, A. Craig, *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, 1997, sid 378.

¹⁰ I Sverige inleddes handeln med aktieoptioner 1985 och för privatpersoner med begränsad ekonomi blev handel inte tillgänglig förrän 1994 då warranhandeln introducerades.

¹¹ Stutzer (1996), aa, sid 1633-1652.

¹² Gray, Philip och Newman, Scott, Canonical Valuation of Options in the Presence of Stochastic Volatility, *The Journal of Future Markets*, Vol. 25 , 2005, sid 1-9.

¹³ Gray och Newman (2005), aa, sid 1-9.

¹⁴ Alcock, Jamie och Gray, Philip, Dynamic, nonparametric hedging of European style contingent claims using canonical valuation, *Finance Research Letters*, 2004, sid 41-50.

¹⁵ Stutzer, Michael och Muinul, Cowdhury, A Simple Non-Parametric Approach to Futures Option Pricing, *The Journal of Fixed Income*, 1999, sid 67-76.

räntemarknaden, precis som aktiemarknaden, karakteriseras av ett volatilitetsleende.¹⁶

1.2 Problemformulering

Historiskt har handeln med derivat en naturlig ställning på råvarumarknaden, där futures och optionskontrakt har använts under lång tid. Denna handel har erbjudit företag och andra intressenter möjlighet att hantera sin riske exponering.

Korrekt värdering av derivatkontrakt erbjuder samhällsekonomiska fördelar. De ekonomiska vinsterna från en väl fungerande internationell derivatmarknad är svåra att överskatta. Speciellt om råvaruproducenter och jordbrukare i tredje världen kan erbjudas tillgång till marknaden för ett rimligt pris. Frågan om en korrekt värdering av derivatkontrakt är därför inte bara av spekulativt intresse, utan långt djupare.

Det specifika problem som vi angriper i denna uppsats är följande: Volatiliteten är inte en synlig parameter utan måste alltid skattas, antingen från historisk data eller beräknas implicit från observerade optionspriser. För att komma bort från problemen med hur denna skattning ska ske och hur fördelningen av den underliggande tillgången faktiskt ser ut på slutdagen, kan optioner värderas ickeparametriskt. Stutzer presenterar i sin artikel en ickeparametrisk metod, "Canonical valuation", som i enlighet med Rubinsteins upptäckter värderar out-of-the-money säljoptioner klart högre än Black-Scholes. Detta samtidigt som den i en för Black-Scholes perfekt simulerad värld ger likvärdiga optionspriser som Black-Scholes.¹⁷ En del av Stutzers analyser kan anses onödigt generaliserande och inte helt anpassade för en marknadsmässig bedömning.

¹⁶ Stutzer och Muinul (1999), aa, sid 67-76.

¹⁷ Modellen kommer tillsammans med dess resultat presenteras närmare i kapitel 2.

Om Rubinsteins slutsats att "volatility smile" beror på rädsla för en upprepning av krashen år 1987, är det möjligt att en liknande effekt uppträder efter börsnedgången år 2000. Det vill säga, att marknadsaktörerna uppfattar en ny krasch som mer trolig. Prisfallet på Stockholmsbörsen medförde att OMXS30 index förlorade över två tredjedelar av sitt värde på två år. Vi väljer därför att fokusera på denna händelse i uppsatsen.

1.3 Syfte

Syftet med uppsatsen är att utvärdera Stutzers kanoniska värderingsmodell. Inte att i direkt mening analysera den kanoniska modellens förmåga att prediktera optionspriser. Liksom Stutzer undersöker vi modellens förmåga att generera priser som är konsistenta med de observerade marknadspriserna.¹⁸ För detta ändamål används Black-Scholes modell som referens. Mer precist besvarar vi frågan, Hur förhåller sig modellerna till varandra då tidsserien avslutas *innan, på* eller *efter* en marknadskrasch?

Black-Scholes modell används för att kvotera volatilitet och priser på marknaden och dess prediktiva förmåga är känd. Av denna anledning undersöker vi den kanoniska modellens prissättningsförmåga indirekt med Black-Scholes som referens.

Vår ambition är att utifrån resultaten diskutera modellens tillämpbarhet, dess för och nackdelar samt undersöka relationen till teorin om "Large Deviations".¹⁹

¹⁸ Det vill säga priser som i jämvikt är konsistenta med volatilitetsleendet i icke-arbitrage mening.

¹⁹ Large Deviations förklaras närmare i kapitel 2.3.

1.4 Metod

Då syftet är att bedöma en modells praktiska tillämpbarhet är det enkelt att specificera metoden som kvantitativ snarare än kvalitativ. I slutändan ämnar vi kunna dra slutsatser om gruppen som helhet utifrån en statistisk undersökning.²⁰ Vid granskning av styrkan i vissa samband eller vid granskning av speciella företeelsers omfattning, är den kvantitativa metoden den mest lämpliga.²¹ Därmed kan vi statistiskt falsifiera teorin eller finna stöd för att teorins icke-falsifierbarhet.

Kvantitativa studiers problem kan vara att garantera den insamlade informationens relevans.²² En sådan garanti kan aldrig uppnås. Med tanke på frågeställningens art, och det i empiriska termer väldefinierade syftet, kan åtminstone informationen garanteras vara icke irrelevant. Vidare bör reliabiliteten och validitet i datamaterialet alltid betänkas. Hög reliabilitet innebär att det inte förekommer slumpmässiga fel i datamängden. Detta är en förutsättning för god validitet, som innebär att det inte förekommer systematiska mätfel.²³

All data presenteras ingående i kapitel 3, men generellt fastslås att all data är andrahandsdata insamlad av organisationer med en hög trovärdighet, som OM Group och Riksgäldskontoret. Det finns med andra ord ingen anledning att befara större felaktigheter. Alternativa datakällor finns inte tillgängliga.

²⁰ Definition "kvantitativ metod", *Nationalencyklopedin Multimedia 2000*, CD-ROM för PC, Bra Böcker AB, maj 2000.

²¹ Holme, Idar Magne och Solvang, Bernt Krohn, *Forskningsmetodik*, Andra upplagan, Studentlitteratur, 1997, sid 76 ff.

²² Holme och Solvang (1997), aa, sid 81.

²³ Lundahl, Ulf och Skärvad, Per-Hugo, *Utredningsmetodik för samhällsvetare och ekonomer*, Tredje upplagan, Studentlitteratur, 1992, sid 150 ff.

1.5 Avgränsningar

Vår ambition är att utföra en så jämförbar studie som möjligt på svensk data. Optionsmarknaden med OMXS30 index eller Ericsson som underliggande tillgång är likvid med svenska mått mätt. Av den anledningen stod valet av underliggande tillgång mellan Ericsson och OMXS30 index.

Fördelen med att välja Ericsson är att de historiska utdelningarna är observerbara. Å andra sidan har utdelningarna en stor påverkan på aktiepriset en gång per år. Utdelningarna hos de aktier som ingår i OMXS30 index är spridda tidsmässigt. Nuvärdet av dessa utdelningar är förhållandevis lågt jämfört med nuvärdet av hela OMXS30 index. Som en konsekvens har en utdelning i enskilda aktier mindre påverkan på värdet av OMXS30 index.²⁴ Detta relativt den prispåverkan som samma utdelning har på den enskilda aktien.²⁵ Detta är en av anledningarna till att vi väljer OMXS30 index, trots att utdelningarna inte är observerbara.²⁶ Den främsta orsaken att vår studie skall följa Stutzers studie i så stor utsträckning som det är möjligt. Stutzers studie är baserad på S&P 500 index. Genom att analysera ett brett index erhålls även en bild av marknadsaktörernas syn på aktiemarknaden som helhet.

I våra beräkningar framgick det att de implicita utdelningarna för OMXS30 index uppvisade en orealistiskt hög volatilitet samt positiva och negativa värden från dag till dag.²⁷ Av den anledningen valde vi att, vid prissättning av

²⁴ Detta eftersom en utdelning i två skilda aktier oftast inte inträffar exakt samtidigt och att utdelningen är liten i förhållande till värdet av hela index.

²⁵ Det bör dock påpekas att i perioden som ledde fram till kraschen på den svenska aktiemarknaden år 2000, viktade Ericsson tungt på den svenska marknaden som helhet.

²⁶ Utdelningarna är inte observerbara eftersom indexportföljen ombalanseras kontinuerligt och att data för portföljvikterna inte finns att tillgå. Stutzer däremot hade fullständig tillgång till den typen av data för S&P 500.

²⁷ Teoretiskt sett bör futurespriset på index minus spotpris och cost of carry återspegla förväntade framtida utdelningar. Genom att studera hur detta förväntade värde förändras från en dag till nästa räknade vi fram de implicita utdelningarna. Att våra skattade utdelningar inte uppvisar realistiska värden pekar på att marknaden för OMXS30 futures relativt dess

optionerna, bortse från de implicit beräknade utdelningarna från i index ingående aktier. Detta eftersom utdelningarna gjorde att optionerna värderades till orimliga priser.

Vi har valt att avstå från att använda stokastiska räntor. Vid en jämförande studie, som den gjord av Stutzer, är det naturligt att använda samma ränta i Black-Scholes modell och den kanoniska modellen. Det står också klart i Stutzers studie att resultaten i den kanoniska modellen påverkas marginellt av stokastiska räntor.

Stutzer utförde sin studie på tre tidsserier med samma slutdatum, 1 juli 1994, men med olika startdatum. Detta för att täcka in olika marknadsutvecklingar. Första startdatumet var 1 januari 1988 direkt efter börskraschen. Det andra är 2 januari 1987 precis innan kraschen medan det tredje är 1 juli 1985 innan volatiliteten på marknaden ökade. För att skapa varierade men ändå långa tidsserier väljer vi att skapa tre tidsserier med samma startdatum men med olika slutdatum. Detta eftersom nedgången 2000-02 ligger nära i tiden, vilket begränsar längden på de tidsserier vi kan skapa utifrån ett fast slutdatum. Som startpunkt har vi valt 1 januari 1993. Att startpunkten inte är tidigare beror på att vi vill undvika de extrema räntor som temporärt rådde dessförinnan.²⁸ Datamaterialet som vi valt att basera vår undersökning på presenteras närmare i kapitel 3.

Det är med kanonisk värdering fullt möjligt att värdera såväl köp- som säljoptioner, men studien kommer endast att studera köpoptioner. Då Stutzer enbart studerar köpoptioner finns det ingen anledning att värdera säljoptioner. Anledningen till att Stutzer endast undersökte köpoptioner är att resultaten är direkt överförbara till säljoptioner med hjälp av köp-sälj pariteten.

spotvärdering under undersökningsperioden inte fungerade på enligt teorin effektivt vis, bristande likviditet kan vara orsaken. I en sådan diskussions förlängning skulle man ganska enkelt kunna fundera kring om inte det samma gällde för den närliggande optionsmarknaden.

²⁸ Den korta räntan, SSVX 3 mån, noterades på 32 procent den 16 september 1992. Se fig. 1.

2 Teori

Teorikapitlet presenterar den teoretiska bakgrunden till den kanoniska metoden och de problem som är förknippade med att modellera den framtida volatiliteten. Kapitlet presenterar också teorin om Large Deviations. Dessa tre ämnen har vi delat upp i tre övergripande avsnitt.

Avsnitt 2.1 presenterar teorin för kanonisk värdering på ett övergripande plan. Kanonisk värdering är en icke-parametrisk metod som ger en alternativ lösning på några av problemen som är förknippade med volatilitet. Med problem avses här hur volatiliteten skall hanteras i modeller för derivatprissättning.

Avsnitt 2.2 redogör kort för hur volatiliteten i Black-Scholes modell förhåller sig till den på marknaden observerade volatiliteten. Vi redogör också för de olika sätt som finns för att skatta volatiliteten samt deras förmåga eller tillkortakommande att skatta framtida volatilitet.

Avsnitt 2.3 redogör kort för vad som kallas för "The Large Deviation Principle". Vi ämnar visa att denna princip ger en i teoretiskt mening mer generell härledning. Denna härledning kan potentiellt göra den kanoniska modellen till en mer komplett optionsprissättningsteori teori.

2.1 Kanonisk värdering

Kanonisk värdering består av fyra delar som kan upplevas som fristående, men de följer en röd tråd:

- i. Avsnitt 2.1.1 lägger grunden för kanonisk värdering genom att presentera teorin för riskneutral värdering av finansiella tillgångar.
- ii. Avsnitt 2.1.2 presenterar därefter de skattningar som är nödvändiga för att ett optionskontrakt ska kunna prissättas i enlighet med kapitel 2.1.1.
- iii. Avsnitt 2.1.3 presenterar hur den riskneutrala fördelningen av aktiepriser kan härledas ur den empiriska fördelningen. Den empiriska fördelningen skattas i kapitel 2.1.2.
- iv. Avsnitt 2.1.4 beskriver hur ett optionskontrakt prissätts som ett väntevärde under den riskneutrala fördelningen.

Utgångspunkten i Stutzers artikel är att utifrån den empiriska sannolikhetsfördelningen härleda en riskneutral sannolikhetsfördelning under vilken ett derivatkontrakt kan prissättas. För att göra detta använder Stutzer resultat från den statistiska informationsteorin i kombination med teorin för riskneutral värdering.

Kapitel 2.1.5 visar hur historiska optionspriser inkluderas i den kanoniska modellen. Stutzer visar att denna värderingsmodell kan stärkas genom antagandet om att ett derivatkontrakt är konsistent prissatt med historiska priser. Detta antagande är vanligt förekommande i ickeparametriska optionsprissättningsmodeller, men alltså inte alltid nödvändigt i den kanoniska modellen.

Kapitel 2.1.6 påpekar, i enlighet med Stutzer, att kanonisk värdering kan ses som en Bayesiansk ekonometrisk modell.

Avsnittet om kanonisk värdering följer till stora delar framställningen i Stutzers artikel.

2.1.1 Riskneutral värdering

Stutzer antar, precis som i Black-Scholes modell, att det råder arbitragefrihet på marknaden och att det existerar en riskfri ränta. Dessa antagande är rimliga eftersom alla arbitragemöjligheter försvinner på en effektiv marknad och att stora finansiella institutioner kan låna till en i det närmaste riskfri ränta.²⁹

Arbitragefrihet och existens av en riskfri ränta är det som krävs för att en prissättningsteori ska kunna utgå från en riskneutral prissättning.³⁰ Stutzer ger följande villkor för detta.

$$(1) P_i = E_{\pi^*} \left[\frac{P_i(T) + D_i(T) + \sum_{t=1}^{T-1} D_i(t) \prod_{s=t}^{T-1} r(s)}{\prod_{t=1}^T r(t)} \right] = E_{\pi} \left[\frac{P_i(T) + D_i(T) + \sum_{t=1}^{T-1} D_i(t) \prod_{s=t}^{T-1} r(s)}{\prod_{t=1}^T r(t)} \frac{d\pi^*}{d\pi} \right],$$

P_i är priset idag på tillgång $i = 1, \dots, N$. I ekvation (1) är E_{π^*} väntevärdet under Martingal-måttet π^* , E_{π} är väntevärdet under det verkliga sannolikhetsmåttet π och $d\pi^*/d\pi$ är Radon-Nikodym derivatan. $P(T)$ är priset vid den framtida tidpunkten T , $D(t)$ är de framtida kassaflödena fram till T och $r(t)$ är den riskfria räntan.

Ekvation (1) är viktig och motiveras, givet att marknaden är arbitragefri, säger första teoremet av matematisk finansiering att efter normering med den riskfria räntan $r(t)$ så existerar det ett Martingal-mått så att dagens pris är det diskonterade väntevärdet av priset $P(t)$ tillsammans med nuvärdet av utdelningar och andra kassaflöden $D(t)$. Om det inte existerar något sådant

²⁹ Hull (2003), aa, sid 44-45.

³⁰ Jarrow, Robert och Turnbull, Stuart, *Derivative Securities*, South-Western College Publishing, 1996, sid 163.

Martingal-mått, är marknaden inte heller arbitragefri.³¹ Enklare uttryckt, summan av priset och utdelningar diskonterat till den riskfria räntan under perioden T är en Martingal under π^* . Det är detta som ekvation (1) uttrycker.

Ekvation (1) kan förklaras med ekonomisk intuition. I en riskneutral värld är alla individer indifferent till finansiell risk.³² Dessa individer kräver därför ingen kompensation för risk och förväntar därmed att erhålla en avkastning lika med den riskfria räntan r^T .

Vidare säger ekvationen att vi kan transformera de egentliga sannolikheterna π till π^* och använda dessa för att beräkna väntevärdet av en investering. Detta betyder inte att marknads aktörer är riskneutrala, utan att vi kan justera deras preferenser som om de vore det. Om vi betraktar en enda tillgång ($i=1$), bortser från alla utdelningar och antar en konstant riskfri ränta

r^T kan ekvation 1 skrivas som väntevärdet, $r^T = \sum_j^L R(j) \pi^*(j)$, där $R(j)$

är en av de L stycken aktieavkastningarna beräknade över en period av längden T .³³

Stutzer använder de förenklade antaganden genom hela sin artikel. Vi kommer därför att presentera resterade delar av teorin under dessa antaganden. Hur den stokastiska riskfria räntan och de stokastiska kassaflödena i ekvation (1) skattas beskrivs i appendix A.

Sammanfattningsvis kan sägas att ekvation (1) har två viktiga syften i den kanoniska modellen. För det första sätter den ramarna för hur vi kan härleda π^* . För det andra kan vi från ekvation (1) beräkna optionspriset som ett väntevärde.

³¹ Terminologin med första teoremet av matematisk finansiering är lånad direkt från Björk, Thomas, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Andra upplagan, Oxford University Press, 2004, sid 29, Proposition 3.7.

³² Hull (2004), aa, sid 204.

³³ Väntevärdet ovan är identiskt med ekvation 4 bortsett notationen.

2.1.2 Skattningar

I detta kapitel beskrivs hur de skattningar som behövs i ekvation (1) beräknas. Kanonisk värdering är, som tidigare nämnts, en ickeparametrisk statistisk metod som utgår från en historisk tidsserie.

Vi börjar med att skatta bruttoavkastningarna $R(-h)$ för den underliggande tillgången. Med hjälp av dessa kan vi sedan skatta möjliga framtida priser P^h vid sluttidpunkten T . Samma variabler som används för att skatta ekvation (1) används för att beräkna optionspriset.

Utgångspunkten är en historisk tidsserie med aktiepriser $P(h)$ med $h = -1, -2, \dots, -H$ som delas upp i perioder av längden T . Dessa används sedan för att skatta möjliga framtida priser P^h , $P^h = PR(-h)$ $h = 1, 2, \dots, H - T$ där $R(-h)$ är de historiska avkastningarna. P är priset idag.

$$R(-h) = \frac{P(-h)}{P(-h-T)} \quad h = 1, 2, \dots, H - T,$$

Vi skattar alltså avkastningar under perioden T för att sedan beräkna möjliga priser vid den framtida tidpunkten T . Genom att multiplicera dagens pris P med avkastningen $R(-h)$ erhålls då på detta sätt $H - T$ antal möjliga priser vid den framtida tidpunkten T .

Kanonisk värdering utgår från ansatsen att vi först skattar den verkliga fördelningen för P^h som den empiriska fördelningen $\hat{\pi}$. Därefter transformeras denna fördelning till riskneutrala sannolikheter.

Den skattade empiriska fördelningen ger det relativa antalet utfall i en sekvens av värden. Den stokastiska variabeln P^h antas därför vara fördelad enligt den likafördelade sannolikhetsvektorn $\hat{\pi}(-h) = 1/(H - T)$ för

$h = 1, 2, \dots, H - T$. Detta är alltså vår skattning av den egentliga fördelningen π för P^h , där varje framtida pris erhålls med ekvivalent sannolikhet.

Det finns en förklaring till varför just den empiriska fördelningen är utgångspunkten i kanonisk värdering. Man kan visa att så länge den underliggande tillgångens pris följer en ergodisk Markovprocess är den empiriska fördelningen den till π snabbast konvergerade skattningen.^{34 35} Denna skattning kan sedan transformeras till en beräkning av det riskneutrala sannolikhetsmåttet, vilket kan användas för att prissätta finansiella derivat av den underliggande tillgången. I nästa avsnitt presenterar vi stegen som krävs för att härleda den kanoniska modellen.

2.1.3 Den kanoniska fördelningen

Detta avsnitt redovisar de olika steg som leder fram till den prissättningsteori som Stutzer benämner kanonisk värdering. För att förenkla notationen betraktas, precis som i Stutzer artikel, endast en aktie som inte lämnar någon utdelning samt att räntan är konstant.

För att härleda π^* från $\hat{\pi}$ utnyttjar Stutzer ett antal verktyg från den statistiska informationsteorin i kombination med teoremet om riskneutral prissättning. Ett sådant verktyg är den relativa entropin eller, vilket den också kallas, Kullback-Leibler informationen

$$(2) I(\pi, \hat{\pi}) = \sum_{h=1}^{H-T} \pi^*(h) \log \frac{\pi^*(h)}{\hat{\pi}(h)}. \quad 36$$

³⁴ Stutzer (1996), aa, sid 1633-1652.

³⁵ En ergodisk process har ett tidsmedelvärde som konvergerar mot ensemblemedelvärdet, Lindgren, Georg och Rootzén, Holger, *Stationära Stokastiska Processer*, Föreläsninganteckningar i Matematisk Statistik, Lunds universitet, KFS AB, 2003, sid 42.

³⁶ Dembo Amir och Ofer Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, Andra upplagan, Springer. 1998, sid 13.

Att i detalj redogöra för denna funktions egenskaper ligger utanför ramen för denna uppsats. Kortfattat kan sägas att den mäter (i någon mening) avståndet mellan de båda sannolikhetsmåten väntevärdes mening under Martingalmåttet.³⁷ Det kan också nämnas att den relativa entropin är positiv, kontinuerlig, kompakt samt att den antar sitt minsta värde noll då $\pi^* = \hat{\pi}$.³⁸

Det bästa valet av π^* erhålls genom att minimera den relativa entropin givet eventuella restriktioner. Med andra ord, när "avståndet" mellan de båda sannolikhetsmåten är så litet som möjligt, erhålls också den mest väntevärdes riktiga skattningen. Notera att utan restriktion ger $\pi^* = \hat{\pi}$ per definition att den relativa entropin är noll. Detta är då alltså alltid det optimala valet enligt Kullback-Leibler informationen.

Mot denna bakgrund erhålls följande minimeringsproblem. Den bästa skattningen av Martingal-måttet π^* erhålls från $\hat{\pi}$ som lösningen till följande

problem, (3)
$$\hat{\pi}^* = \arg \min_{\pi^*(h) > 0, \sum_h \pi^*(h) = 1} I(\pi^*, \hat{\pi}^*) = \arg \min_{\pi^*(h) > 0, \sum_h \pi^*(h) = 1} \sum_{h=1}^{H-T} \pi^*(h) \log \frac{\pi^*(h)}{\hat{\pi}^*(h)}$$

med bivillkor (4)
$$1 = \sum_{h=1}^{H-T} \frac{R(-h)}{r^T} \frac{\pi^*(h)}{\hat{\pi}^*(h)}$$
.

Ekvation (4) är en direkt omskrivning av ekvation (1) under de förenklade antaganden som vi gjorde i inledningen av detta kapitel.^{39 40} Kullback-Leibler informationen minimeras alltså så att avståndet mellan de båda sannolikhetsmåten är så litet som möjligt givet att marknaden är arbitragefri. Att informationen om att marknaden är arbitragefri infogas i det nya

³⁷ Den mäter inte avstånd i egentlig mening eftersom den är icke-symmetrisk kring sitt minimum.

³⁸ Dembo och Zeitouni (1998), aa, sid 13. Detta inses enligt författarna genom att applicera Jensens olikhet på funktionen $x \log x$.

³⁹ Vi betraktar en enda tillgång som inte lämnar några utdelningar samt att den riskfria räntan i ekonomin är konstant.

⁴⁰ Precis som i kapitel 2.1.1 kan ekvationen skrivas om enligt:
$$r^T = \sum_{h=1}^{H-T} R(-h) \pi^*(h)$$

sannolikhetsmålet garanteras av att ekvation (4) sätts som bivillkor.⁴¹

Problemet ovan har följande lösning:

$$(5) \hat{\pi}^*(h) = \frac{\exp\left[\gamma^* \frac{R(-h)}{r^T}\right]}{\sum_h \exp\left[\gamma^* \frac{R(-h)}{r^T}\right]} \quad h=1, \dots, H-T,$$

där γ^* är en Lagrange-multiplikator och $R(-h)$ är avkastningen i period $h=1, 2, \dots, H-T$. Ovanstående fördelning är känd som "Canonical distribution" (kanonisk fördelning). Denna fördelning är ett Martingal-mått som uppfyller ekvation (1) och som kan användas för att prissätta ett derivatkontrakt.

Eftersom $\hat{\pi}^*(h)$ är en funktion av Lagrange-multiplikatorn γ^* krävs att även denna parameter skattas. Villkoret för att finna γ^* är enligt Stutzer att Lagrange-multiplikatorn måste uppfylla följande minimeringsproblem.

$$(6) \gamma^* = \arg \min_{\gamma} \sum_h \exp\left[\gamma \left(\frac{R(-h)}{r^T} - 1\right)\right]$$

Vi ger ingen närmare förklaring till ekvation (6) utan nämner bara att denna inte har en analytisk lösning och måste därför lösas numeriskt.

2.1.4 Optionspriset

När vi erhållit det riskneutrala sannolikhetsmålet och skattat de framtida priserna P^h kan ett derivatkontrakt värderas i enlighet med principerna för ekvation (1). Värdet av en köption på slutdagen bestäms av pay-off funktionen $\max[P^T - X, 0]$, där X är optionens lösenpris och P^T är priset på slutdagen. Köptions värde C ges alltså som väntevärdet (7).

$$(7) C = \sum_h \frac{\max[P^h(-h) - X, 0]}{r^T} \hat{\pi}^*(h)$$

⁴¹ Att den underliggande tillgången inte lämnar någon utdelning.

Optionens pris C fås enligt kanonisk värdering som väntevärdet av optionens värde normerat med den riskfria räntan under den kanoniska fördelningen $\hat{\pi}^*$. I kapitel 2.1.5 illustreras hur kanoniska modellen kan utvidgas till att utnyttja mer av den information som finns att tillgå i marknadsdata.

2.1.5 Den bivariata kanoniska fördelningen

Optionspriserna i den kanoniska modellen kan göras mer exakta genom att ytterligare information utnyttjas i beräkningarna. Detta görs genom att nya villkor läggs till restriktionen om arbitragefrihet. Ett sådant villkor som ofta används i icke-parametriska modeller garanterar att prissättningen är konsistent med marknadspriset.⁴² Om vi betraktar samma option som i kapitel 2.1.3 ändras minimeringsproblemet ovan till följande. Minimera ekvation (3) givet ekvation (4) och väntevärdet i ekvation (7). Väntevärdet ska då sättas lika med optionens faktiska marknadspris C för en option med slutdag T och lösenpriset X . Detta är alltså den nya restriktion som läggs till modellen.

Denna restriktion adderar ett bivillkor till minimeringsproblemet, vilket innebär att värdet av två Lagrange-multiplikatorer måste beräknas. Därför minimeras funktion (8) för att beräkna värden på de båda Lagrange-multiplikatorerna γ_1^*, γ_2^* .

$$(8) \gamma^* = \arg \min_{\gamma} \sum_h \exp \left[\gamma_1 \left(\frac{R(-h)}{r^T} - 1 \right) + \gamma_2 \left(\frac{\max[PR(-h) - X, 0]}{r^T} - C \right) \right],$$

Enligt samma förfarande som i kapitel 2.1.3 utgör dessa båda Lagrange-multiplikatorer parametrarna i den bivariata kanoniska fördelningen.

$$(9) \hat{\pi}^* = \frac{\exp \left[\gamma_1^* \frac{R(-h)}{r^T} \right] + \gamma_2^* \left(\frac{\max[PR(-h) - X, 0]}{r^T} \right)}{\sum_h \exp \left[\gamma_1^* \frac{R(-h)}{r^T} \right] + \gamma_2^* \left(\frac{\max[PR(-h) - X, 0]}{r^T} \right)}, \quad h = 1, \dots, H - T.$$

⁴² Stutzer (1996), aa, sid 1633-1652.

Givet att Martingal-måttet $\hat{\pi}^*$ skattats enligt ekvation (9) går prissättningen till som nämnts ovan. Från ekvation (7) beräknas optionspriset som ett väntevärde. Det vill säga, värderingen av derivatkontraktet grundas på teorin om riskneutral värdering. Skillnaden är att ekvation (9) inkluderar ytterligare information i värderingen av optionskontraktet. Detta eftersom vi nu även garanterar att optionen är korrekt prissatt vid en viss tidpunkt.

Anledningen till att den kanoniska modellen utvidgas enligt ovan är följande. Restriktionen om arbitragefrihet begränsar mängden möjliga Martingal-mått i ekvation (5). Det kan dock inträffa att de empiriska sannolikheterna ligger långt ifrån det sanna Martingal-måttet trots att restriktionen om arbitragefrihet är uppfylld. I dessa fall begränsas inte mängden möjliga Martingal-mått i tillräckligt stor utsträckning av arbitragefrihetsrestriktionen. Av denna anledning adderas därför ytterligare ett bivillkor.

Genom att införa ytterligare en restriktion används mer information till att begränsa mängden möjliga beräkningar av Martingal-måttet $\hat{\pi}^*$. Detta medför att mängden möjliga lösningar till minimeringsproblemen ovan minskar och att lösningen i ekvation (9) oftare kommer att ligga närmare det sanna Martingal-måttet. Med andra ord, genom dessa restriktioner erhåller vi mer precisa beräkningar av $\hat{\pi}^*$.

2.1.6 En Bayesiansk ekonometrisk tolkning

Den teori som presenterats i avsnitt 2.1.4 har enligt Stutzer en ekonometrisk tolkning eftersom kanonisk värdering har tydliga drag av Bayesiansk statistik. Innan insamlad data analyserats antas att den riskneutrala sannolikhetsfördelningen är identisk med den empiriska fördelningen $\hat{\pi}$.⁴³

⁴³ $\hat{\pi}$ är vad som brukar kallas en priori fördelning.

Denna fördelning uppdateras sedan dels med antagandet om ickearbitrage i ekvation (4) samt med informationen från våra observationer.

Vi kan även uppdatera vår skattning genom att kräva korrekta optionspriser vid en viss tidpunkt. Minimeringen av Kullback-Leibler informationen $I(\pi^*, \hat{\pi})$, med ovan beskrivna villkor, säkerställer då att den empiriska fördelningen antas vara prior fördelning. Då är den kanoniska fördelning $\hat{\pi}^*$ den optimala uppdateringen av den empiriska fördelningen.

2.2 Volatilitet

2.2.1 Volatilitetsleendet

Black-Scholes modell har en analytisk lösning eftersom den antar att volatiliteten i Ito-processen $dS/S = \mu dt + \sigma(P, t)dW$ är känd och konstant. Detta medför att aktiepriset är log-normalfördelat på slutdagen. Stutzer tillämpar en ickeparametrisk modell och undviker därför problemet med att bestämma en funktionell form för $\sigma(P, t)$.

Den på aktiemarknaden observerade implicita volatiliteten är en invers funktion av lösenpriset.⁴⁴ Detta motsvaras av att den implicita fördelningen har mer sannolikhetsmassa i vänstra svansen.⁴⁵ Det omvända är sant för den högra svansen. Att Black-Scholes inte är förenlig med denna volatilitetsstruktur är ett tillkortakommande hos modellen. Lösningen till problemet i praxis är att använda olika modeller för varje lösenpris. Att Black-Scholes inte är en konsistent modell som kan användas utan justeringar

⁴⁴ Hull (2003), aa, sid 334.

⁴⁵ Hull (2003), aa, sid 335.

medför ett antal problem.⁴⁶ För exotiska optioner ger det oklarhet kring vilken modell som är den korrekta att använda. Detta när optionen beror på mer än ett lösenpris. Ett annat problem är att det är oklart om delta kan konsolideras över lösenpriser, eftersom varje lösenpris motsvaras av en modell. Det tredje problemet är att volatiliteten beror på lösenpriset och den underliggande tillgången. Korrelationssambandet mellan volatiliteten och den underliggande tillgången betyder att en del av det som vegahedgas istället bör deltahedgas.

2.2.2 Köp-sälj pariteten

Skillnaden mellan Black-Scholes och de verkliga marknadspriserna ges av köp-sälj pariteten som $p - p_{MKT} = c - c_{MKT}$.⁴⁷ Denna relation håller med endast antagandet om arbitragefrihet. Köp-sälj pariteten ställer alltså inga krav på den framtida sannolikhetsfördelningens utseende. Detta betyder att den korrekta volatiliteten som skall användas i Black-Scholes modell alltid är den samma för köp respektive säljoptioner med samma löptid och lösenpris. På samma vis låter sig skillnaden mellan Black-Scholes och kanonisk värdering analyseras. Appendix B redogör för Black-Scholes formel medan Appendix C visar hur ovanstående resonemang bygger på köp-sälj pariteten.

2.2.3 Skattningar av volatilitet

Det finns två ofta använda sätt att skatta volatiliteten i Black-Scholes modell, historisk och implicit volatilitet.

⁴⁶ Hagan, Patrick S., Kumar, Deep, Lesniewski, Andrew S. och Woodward Diana E., Managing Smile Risk, *Wilmott magazine*, 2002.

⁴⁷ Hull (2003), aa, sid 331.

Musiela och Rutkowski redogör för tre problem associerade med den historiska volatiliteten.⁴⁸ i) De finns forskningsresultat som visar på att variansen på aktiemarknaden är icke-stationär. Detta innebär att den historiska volatilitetens förmåga att skatta den framtida volatiliteten kan försämrans då antalet datapunkter som används i beräkningarna ökar. ii) Det är svårt att finna en stor mängd data inom ett begränsat tidsintervall. Detta eftersom många tillgängliga dataserier endast innehåller en observation per dag. iii) Den historiska volatiliteten är inte en väntevärdesriktig skattning av optionspriset. Detta eftersom Black-Scholes formel inte är en linjär funktion av volatiliteten.

Fördelen med historisk volatilitet är att den inkluderar den historiska informationen i en tidsserie. Dock visar flertalet undersökningar att den implicita relativt den historiska volatiliteten är avsevärt mycket bättre på att prediktera den framtida volatiliteten.⁴⁹

Även om implicit Black-Scholes volatilitet är att föredra framför historisk volatilitet, kvarstår problemet med det skeva volatilitetsleendet. Lösningen till detta problem är ofta, precis som i kanonisk värdering, att justera skevheten hos fördelningen av aktiepriser.⁵⁰ Det vill säga att göra det mer troligt att erhålla låga aktiepriser relativt höga aktiepriser under Martingal-måttet.

⁴⁸ Musiela, Marek och Rutkowski, Marek, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Första upplagan, Springer, 1998, sid 151.

⁴⁹ Musiela och Rutkowski (1998), aa, sid 152.

⁵⁰ Musiela och Rutkowski (1998), aa, sid 152.

2.3 Large Deviations

2.3.1 Inledning

Vi har valt att presentera teorin om Large Deviations på ett övergripande plan. Alla teorem och tekniker som vi använder återfinns i Appendix D och E.

Teorin om Large Deviations handlar om att beräkna sannolikheter för ovanliga händelser.⁵¹ Om vi betraktar det empiriska medelvärdet beskriver följande fråga problemställningen. Vad är sannolikheten för att vi observerar ett medelvärde som avviker med en viss kvantitet från gränsvärdet i de stora talens lag?

Vi är dock *inte* intresserade av att beräkna sannolikheten för en ovanlig händelse, utan är primärt intresserade av att prissätta optioner. Vi använder Large Deviations för att analysera den kanoniska fördelningen. Detta gör vi med hjälp av några av de tekniker som Large Deviations bygger på. Vi är även intresserade av att analysera den kanoniska värderingsmodellen utifrån ett gränsvärdesperspektiv. Detta för att komma närmare ett svar på frågan, hur påverkas kvaliteten på de kanoniska optionspriserna då antalet datapunkter ökar?

2.3.2 Large Deviations Principen

Vi börjar med att återge en stringent definition av "The Large Deviations Principle". Därefter förenklar vi denna princip till en analogi till centrala gränsvärdessatsen.

⁵¹ Dembo och Zeitouni (1998), aa, sid 1.

För familjen av sannolikhetsmått $\{\mu_\varepsilon\}$ på (X, B) gäller att $\{\mu_\varepsilon\}$ uppfyller large deviation principen med en rate funktion $I(x)$ om, för alla $\Gamma \in B$, följande ekvation håller.⁵²

$$-\inf_{x \in \Gamma^0} I(x) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(\Gamma) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(\Gamma) \leq -\inf_{x \in \bar{\Gamma}} I(x).$$

Här är Γ^0 det inre av Γ medan $\bar{\Gamma}$ är den slutna mängden. Funktionen $I(x)$ är vad som brukar kallas för en "rate function".⁵³ Om infimum av $I(x)$ är den samma för den slutna som öppna mängden av $\Gamma \in B$, kan large deviations principen skrivas med likhet.⁵⁴ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(\Gamma) = -\inf_{x \in \Gamma} I(x)$. Från detta

uttryck erhålls att sannolikheten \Pr för $Z^\varepsilon \in \Gamma$ kan approximeras som $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Pr(Z^\varepsilon \in \Gamma) \approx \exp(I(x)/\varepsilon)$.

Det är intuitivt att skriva uttrycket ovan som en motsvarighet till centrala gränsvärdessatsen. Vi definierar det stokastiska medelvärdet av en sekvens med oberoende och likafördelade stokastiska variabler X_1, \dots, X_n som

$\hat{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Large Deviations motsvarighet till centrala gränsvärdessatsen

kan då skrivas som. $\Pr\left(\left|\hat{S}_n - E[X_1]\right| \geq a\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C \exp(-I(x)n)$, där vi gjort substitutionen $\varepsilon = 1/n$.

I samband med undersökningar av \hat{S}_n antar $I(x)$ ofta följande funktionella form $\Lambda^*(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda x - \Lambda(\lambda)\}$ där $\Lambda(\lambda) = \log E[\exp\langle \lambda X \rangle]$.⁵⁵

⁵² Dembo och Zeitouni (1998), aa, sid 7.

⁵³ Dembo och Zeitouni (1998), aa, sid 4.

⁵⁴ Dembo och Zeitouni (1998), aa, sid 5.

⁵⁵ Dembo och Zeitouni (1998), aa, sid 26.

Här är $\Lambda(\lambda)$ logaritmen av den momentgenererande funktionen, $\Lambda^*(x)$ är Fenchel-Legrende transformen och $\langle X, \lambda \rangle = \sum_{i=1}^d X^i \lambda^i$.⁵⁶ Vi kommer att använda dessa funktioner för att analysera den kanoniska modellen.⁵⁷

⁵⁶ Dembo och Zeitouni (1998), aa, sid 27.

⁵⁷ För en utförligare förklaring hänvisas läsaren till Cramers teorem i Appendix D.

3 Data

I kapitel 3 presenteras den data som ligger till grund för studien. Syftet är att klargöra vilken typ av data som används och hur vi valt att använda denna.

3.1 OMXS30 index

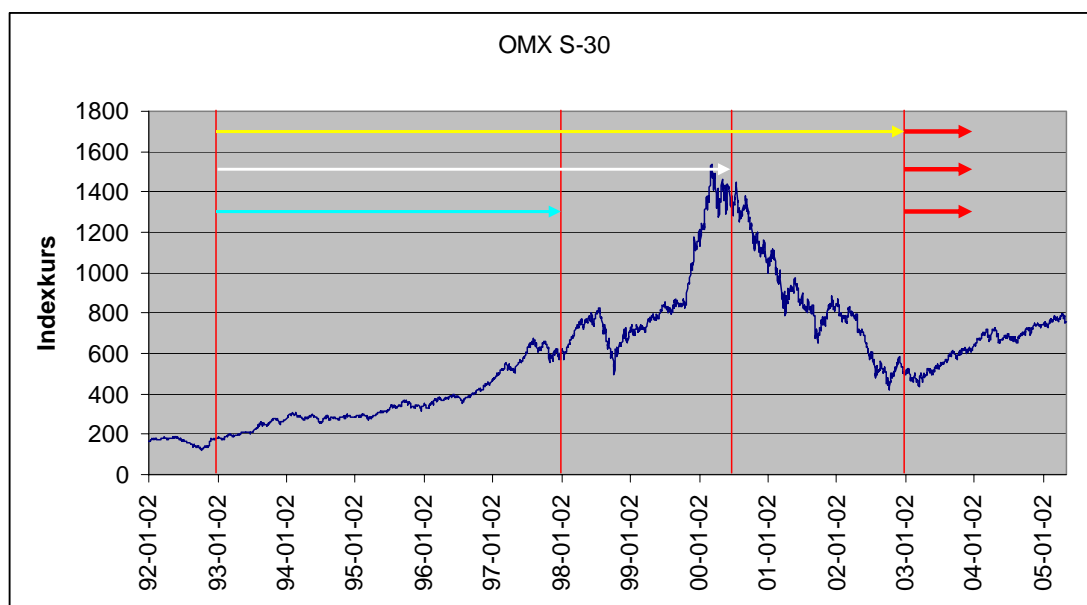
Med OMXS30 index avses det svenska aktieindexet OMX Stockholm 30. Indexet består av de trettio mest handlade bolagen på den svenska Stockholmsbörsen. Vilka aktier som ingår i index utvärderas två gånger om året och varje akties andel i index bestäms av dess relativa marknadsvärde.⁵⁸ Indexet korrigeras inte för utdelningar.

Vi har valt, till skillnad från Stutzer, att använda oss av tre startdatum istället för tre slutdatum på våra tidsserier. Detta för att kunna utnyttja den kraftiga uppgången och nedgången på Stockholmsbörsen kring år 2000 på samma sätt som Stutzer använder kraschen på den amerikanska aktiemarknaden år 1987.⁵⁹ Det är således naturligt att variera våra startdatum istället för slutdatum, eftersom priset på Stockholmsbörsen ligger nära i tiden. På detta sätt kan vi skapa tre olika långa tidsserier.

⁵⁸ Information från OM gruppens hemsida, www.omgroup.com.

⁵⁹ Stutzer gjorde sin studie på tre tidsserier med samma slutdatum var 1 juli 1994. Första startdatum var 1 januari 1984 direkt efter börskraschen. Det andra är 2 januari 1987 precis innan kraschen medan det tredje är juli 1985 innan volatiliteten på marknaden ökade.

Vi har valt den 1 januari 1993 som startdatum tillsammans med följande tre slutdatum: Den 1 januari 1998 strax innan den stora börsuppgången, den 1 juli 2000 strax innan det kraftiga kursfallet och den 1 januari 2003 när nedgången är avslutad. De tre serierna ligger sedan till grund för vår värdering av OMXS30 köpoptioner per 1 Jan 2003. Avgränsningen i våra tidsserier illustreras i Figur 1.



Figur 1. Utveckling av OMX Index Stockholm 30 över tid. Pilarna och de vertikala strecken visar hur indexet OMX Stockholm 30 har delats in i tidsserier.

Att tidsseriernas startpunkt i figur 1 inte är placerad tidigare beror på de mycket höga räntor som temporärt rådde i Sverige 1992.⁶⁰ Genom att exkludera dessa höga räntor behåller vi möjligheten till att använda stokastiska räntor.⁶¹ Räntans utveckling illustreras i figur 2.

⁶⁰ Den korta räntan, SSVX 3 mån, noterades på cirka 32 procent 16 september, 1992. Se fig. 2.

⁶¹ Vi valde att analysera modellen utan stokastiska räntor, men det är en fördel att inte fränsäga sig möjligheten till en sådan analys.

3.2 Utdelningar

Vi har valt att utföra studien utan att justera OMXS30 index för aktieutdelningar. En av fördelarna med att välj ett index framför en individuell aktie är att utdelningarna har en mindre effekt på priset. Detta eftersom utdelningen i en specifik aktie har en begränsad effekt på värdet av ett stort aktieindex. Givetvis beror denna effekt på med vilken vikt aktien ingår i index.

Anledningen till att vi inte tagit hänsyn till utdelningar är följande: Det är svårt att finna data på utdelningar över tidsperioder av den längd som vi studerar. Men den främsta anledningen är att indexsammansättningen ändras med tiden. Av denna anledning är det svårt att i efterhand konstruera ett OMXS30 index korrigerat för de egentliga utdelningarna.

Det är också enligt vår mening motiverat att bortse från alternativa sätt att beräkna utdelningarna, eftersom det introducerar osäkerhet i modellerna. Vi har testat att beräkna de implicita utdelningarna utifrån terminspriser. Dessa utdelningar antog orimliga värden. En möjlig förklaring till de märkliga värdena kan vara att marknaden inte är tillräckligt likvid.⁶²

3.3 OMXS30 index optioner

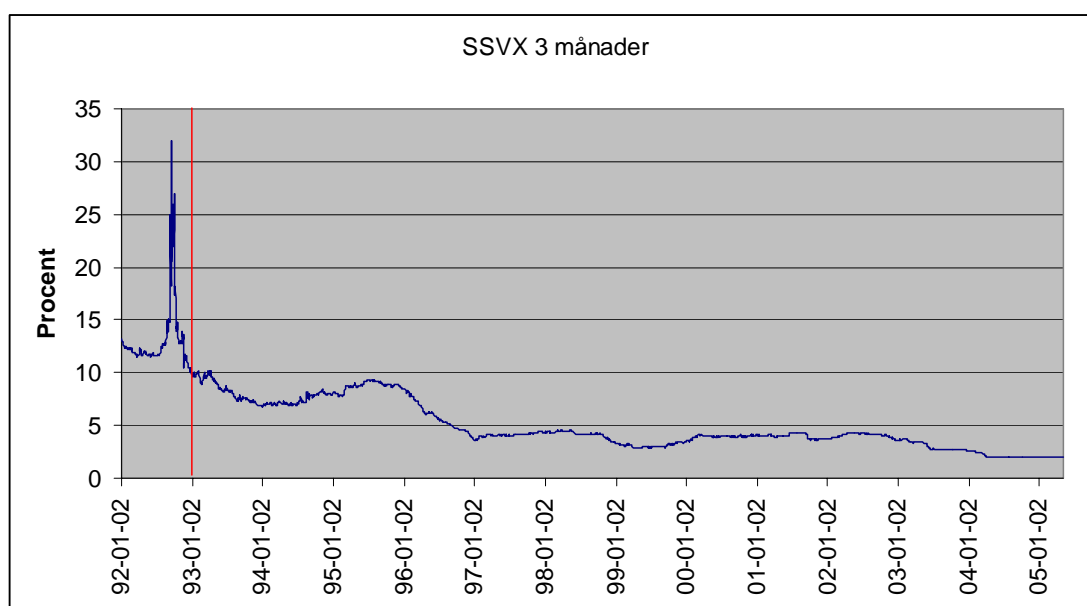
Vi beräknar värdet av köpoptioner per den 2 januari 2003. Detta betyder att vi betraktar optioner som förfaller vid skilda framtida tidpunkter sett från 2 januari, 2003. Optionerna har följande löptider: tre, åtta, tolv och sexton veckor.⁶³

⁶² Se även fotnot 28.

⁶³ Löptiderna är valda utifrån de per 2 Jan, 2003, på marknaden handlade optioner.

3.4 Räntan

Våra beräkningar grundar sig på den ränta som ges på en tre månaders statskuldväxel. Detta värdepapper har en mycket låg risk eftersom statskuldväxeln är ett låneinstrument för den svenska staten. Detta gör att tre månaders statskuldväxel kan användas som en approximation till den riskfria ränta i kapitel 2. Som tidigare nämnts har vi valt att inte inkludera perioden med de extremt höga räntor som rådde år 1992 i vår studie. Räntans utveckling illustreras i Figur 2.



Figur 2. Den kort räntans utveckling över tid. Det vertikala strecket illustrerar starten på de tidsserier som används i analysen och att till höger om detta streck är räntorna

3.5 Volatilitet

Precis som Stutzer har vi valt att använda oss av den historiska volatiliteten eftersom denna, i likhet med den kanoniska modellen, bygger på historiska data. En jämförelse mellan Black-Scholes och en icke-parametrisk metod kan dock mycket väl grunda sig på den implicita volatiliteten. Men en sådan jämförelse är främst lämplig då den icke-parametriska metoden bygger på de

faktiska optionspriserna på marknaden. I denna studie skulle därför den implicita volatiliteten ge ett missvisande resultat.⁶⁴

Vi beräknar den historiska volatiliteten på veckobasis utifrån kursnoteringar på OMXS30 index.⁶⁵ Detta görs för var och en av de tre tidsserier som vi beskrivit i kapitel 3.1. Vi använder alltså totalt tre historiska volatiliteter som var och en svarar mot en av de tre tidsperioderna.

⁶⁴ Stutzer (1996), aa, sid 1633-1652.

⁶⁵ Sista notering per handelsdag på OMXS30, informationen kommer från Stockholmsbörsen.

4 Analys och resultat

I kapitel 4 jämförs den kanoniska modellen med Black-Scholes modell. Resultaten redovisas som grafer och hela datamaterialet återfinns i kapitlet Tabeller.

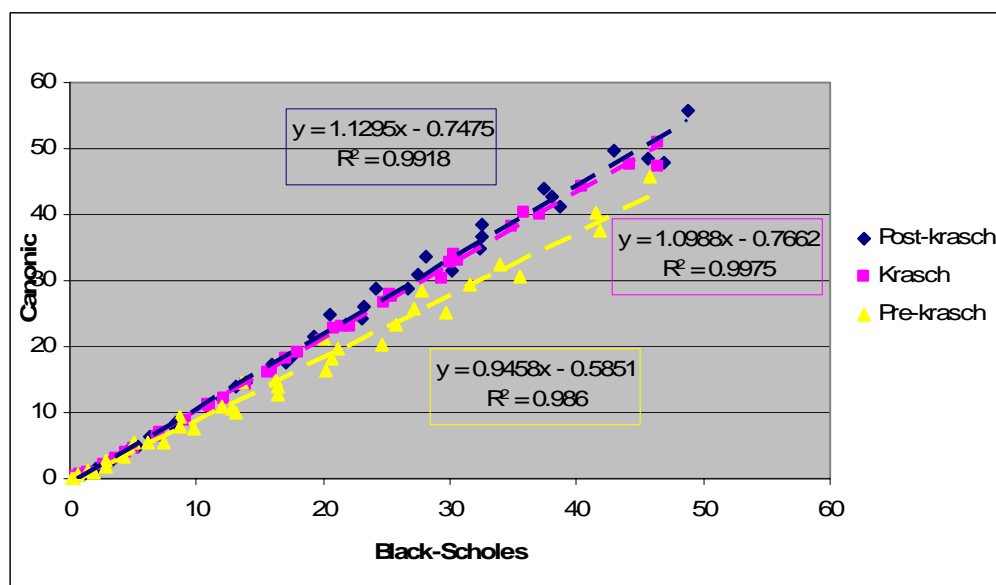
Kapitel 4.1 inleds med att optionspriserna och den riskneutrala fördelningen analyseras för $T = 3$. Därefter undersöker vi den implicita Black-Scholes volatilitet som svarar till de kanoniska priserna. Sist analyserar vi hur Lagrange-multiplikatorn påverkar optionspriset samt hur modellen kan ges en lite annan tolkning med hjälp av Large Deviations teori.

Som tidigare nämnts är det ett empiriskt faktum att säljoptioner som befinner sig out-of-the-money undervärderas i en värld definierad av antagandena bakom Black-Scholes. Enligt köp-sälj pariteten och kapitel 2.2.1 vet vi att samma sak gäller för köpoptioner som befinner sig långt in-the-money. En eventuellt kraschofobisk tendens i prissättningen låter sig därför analyseras med köp- likväl som säljoptioner. Vi kan därför analysera resultat med Black-Scholes som referens.

Nedan betecknar vi varje tidsserie enligt dess förhållande till kraschen på den svenska aktiemarknaden år 2000 (se figur 1). Den längsta tidsserien i studien benämns *Post-krasch*, eftersom denna avslutas då kursfallet är överståndet. Post-krasch innehåller uppgången och nedgången på Stockholmsbörsen kring år 2000. Tidsserien som benämns *Krasch* avslutas när Stockholmsbörsen nådde sin högsta marknadsmässiga värdering samma år. *Pre-krasch*, den kortaste tidsserien, avslutas innan den kraftiga uppgången påbörjas.

4.1 Optionspriser

Genom att utföra linjär regression av de kanoniska priserna mot Black-Scholes priserna undersöks deras inbördes förhållande. Det finns en hög korrelation respektive förklaringsgrad i regressionerna, men det är riktningskoefficienten som är intressant.⁶⁶



Figur 3. Regression av optionspriserna beräknade med kanonisk värdering och priserna beräknade med Black-Scholes formel. Varje regression inkluderar alla löptider.

För de långa tidsserierna, där prisnivån fluktuerar mer, är lutningen större än ett. Detta är inte sant för den kortaste tidsserien Pre-krasch, som har en lutning mindre än ett. Notera att Pre-krasch har en mindre positiv drift och en lägre total varians (se Figur 1). Figur 3 visar att kanonisk värdering genererar OMXS30 optionspriser som i viss mening är konsistent med tidigare empirisk forskning kring volatilitetsleendet, efter en krasch värderar marknaden det som mer troligt att kraschen upprepas.

⁶⁶ Vi är intresserade av hur priserna förhåller sig till varandra sett i relativa termer över alla lösenpriser. Att regressionerna uppvisar höga förklaringsgrader betyder inte att prisskillnaden mellan Black-Scholes och kanonisk värdering är en linjär funktion av moneyness. Bara att ett sådant empiriskt förhållande dominerar sett över alla löptider i denna specifika studie. En kvalificerad gissning är att tredjegrads-polynomregression ofta är mer passande.

Kanonisk värdering tillskriver säljoptioner en positiv premie relativt Black-Scholes i tidsserien Krasch. Vid denna tidsseries slut är kursfallet år 2000 nära förestående. En marknadsaktör som betraktar informationen i tidsserien Krasch, i en värld karakteriserad av kanonisk värdering, uppfattar alltså prisstigningen som mera irrationell. En sådan marknadsaktör är villig att betala en högre försäkring mot att den eventuella aktiebubblan spricker. Detta sagt relativt en värld karakteriserad av antagandena bakom Black-Scholes med vetskap om att det faktiskt var en aktiebubbla.

Ett generellt resultat är att kanonisk värdering är känslig för hur det underliggande datamaterialet väljs. Detta illustrerar en typ av modellrisk som behäftar icke-parametriska modeller generellt. Notera att detta bara är en annan typ av modellrisk än den parameterkänslighet som till exempel Black-Scholes modell lider av.

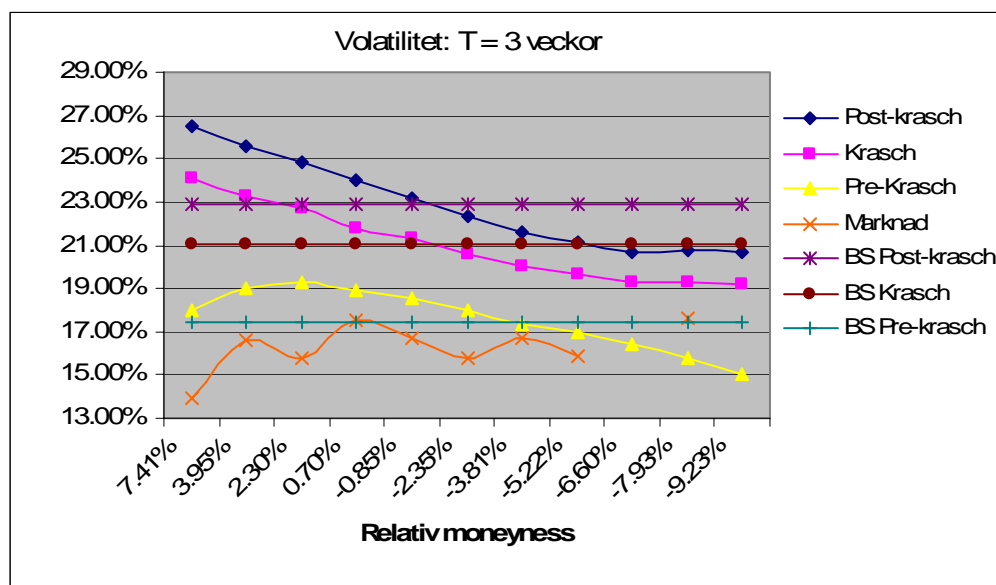
4.2 Volatilitet

I detta kapitel undersöks den implicita Black-Scholes volatilitet som motsvarar de kanoniska priserna. I varje figur återfinns den historiska Black-Scholes volatiliteten, vilken fungerar som referenspunkt i analysen.

4.2.1 Löptid: Tre veckor

En marknadsaktör vars preferenser grundar sig på kanonisk värdering och tidsserien Post-krasch eller Krasch, uppfattar framtida negativa aktieavkastningar som mer sannolika relativt motsvarande utfall i en värld karakteriserad av Black-Scholes, enligt figur 4. En kraschofobisk tendens karakteriserar även den kortaste tidsserien Pre-krasch, men i lägre

utsträckning. Notera att för denna tidsserie är volatilitet som funktion av moneyness konkv.



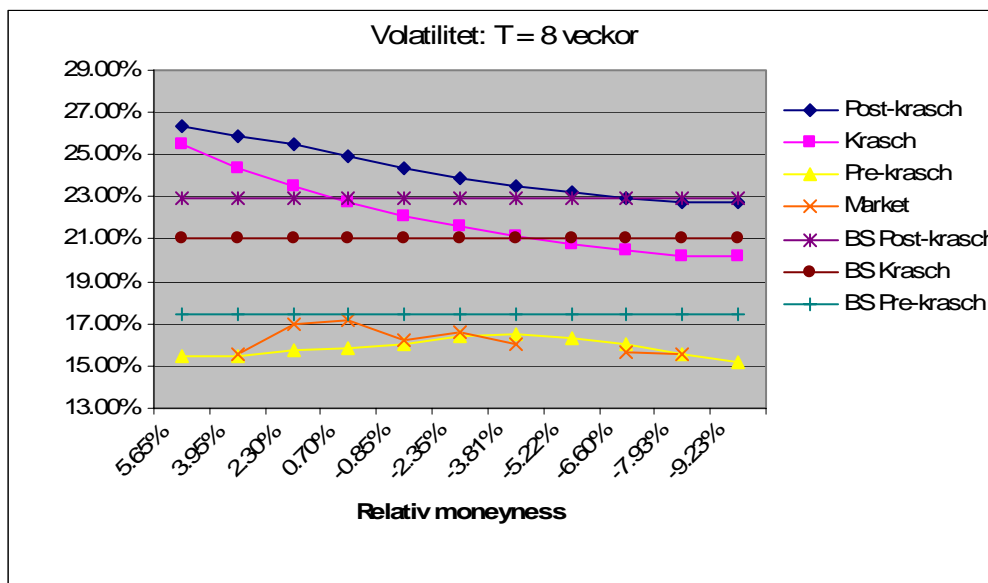
Figur 4. Implicit volatilitet svarande till priserna på en köpoption med tre veckors löptid tillsammans med den historiska volatiliteten för var och en av de tre tidsserierna. Relativ moneyness är definierat som kvoten mellan priset och lösenpriset minus ett.

Den implicita volatiliteten som svarar till marknadspriserna har den lägsta volatiliteten. Denna uppvisar ett mönster som inte kan tillskrivas någon meningsfull rationell uppfattning om den framtida prisutvecklingen. Den mest troliga förklaringen är istället att marknaden är icke-likvid.

4.2.2 Löptid: Åtta veckor

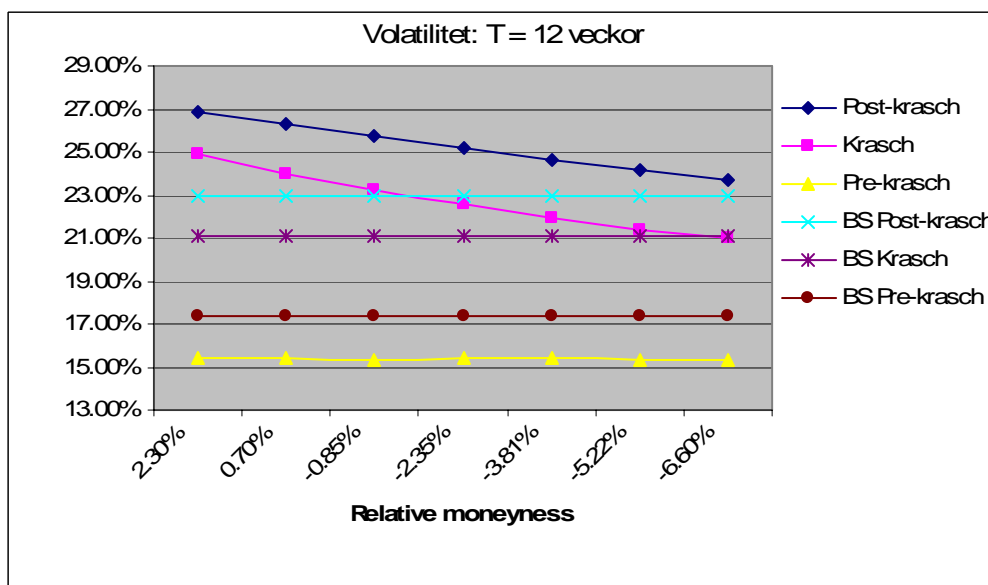
I figur 5 har tidsserien Krasch en kraftigare skevhet än övriga tidsserier, vilket gör att avståndet till Post-krasch minskar för låga lösenpriser. Relativt tidigare figur minskar även avståndet från de långa tidsserierna Post-krasch och Krasch till den korta tidsserien Pre-krasch. Detta bortsett från den köpoption som befinner sig längst out-of-the-money. Tidsserien Post-krasch uppvisar en relativt konstant volatilitet även om dess första derivata varken är konstant eller monoton. Redan här, med endast åtta veckors löptid, ger den kanoniska

modellen lägre implicita volatiliteter än den historiska realiserade volatiliteten för tidsserien Pre-krasch.



Figur 5. Implicit volatilitet svarande till priserna på en köpoption med åtta veckors löptid tillsammans med den historiska volatiliteten för var och en av de tre tidsserierna. Relativ moneyness är definierat som kvoten mellan priset och lösenpriset minus ett.

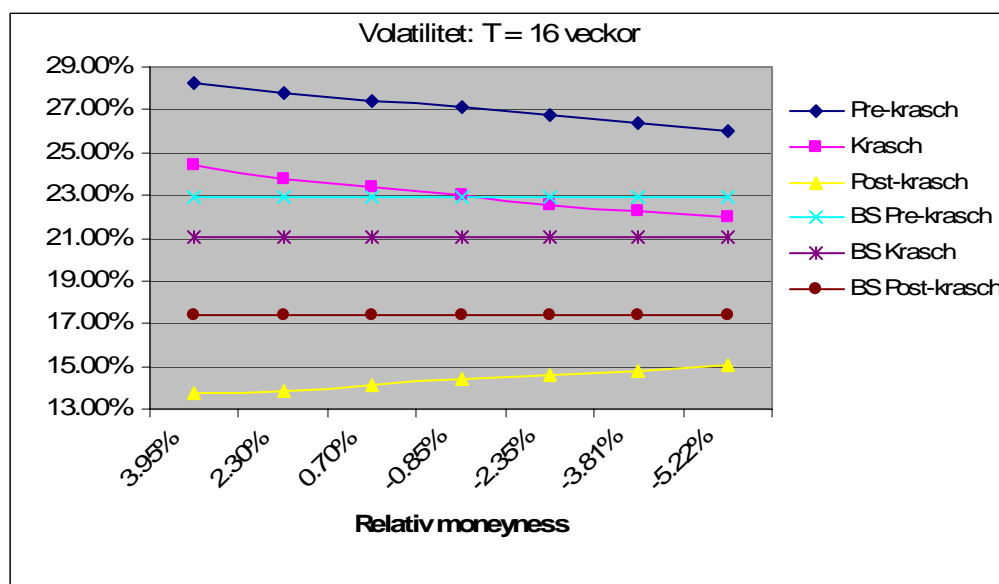
4.2.3 Löptid: Tolv veckor



Figur 6. Implicit volatilitet svarande till priserna på en köpoption med tolv veckors löptid tillsammans med den historiska volatiliteten för var och en av de tre tidsserierna. Relativ moneyness är definierat som kvoten mellan priset och lösenpriset minus ett.

Det är tydligt att de implicita volatiliteterna behåller sina inbördes förhållanden amplitudmässigt i figur 6, och att alla serierna är approximativt linjära. Det verkar som om det ickelinjära förhållandet mellan volatiliteten och den underliggande tillgången avtar med löptiden. Den kortaste tidsserien Pre-krasch indikerar en log-normal modell med lägre optionspriser än BS Pre-krasch.

4.2.4 Löptid: Sexton veckor



Figur 7: Implicit volatilitet svarande till priserna på en köpoption med sexton veckors löptid tillsammans med den historiska volatiliteten för var och en av de tre tidsserierna. Relativ moneyness är definierat som kvoten mellan priset och lösenpriset minus ett.

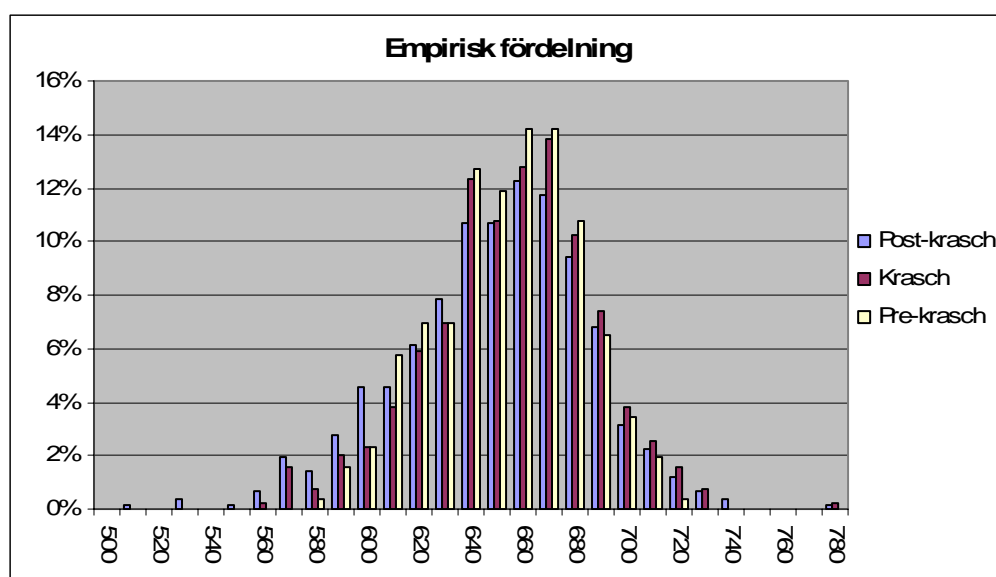
I figur 7 har pre-krasch parallell förskjutits uppåt och spridningen av de implicita volatiliteterna har ökat generellt relativt föregående figur. Lutningen på de tidsserier som kommer från de kanoniska priserna är konstant precis som för tolv veckors löptid. Skillnaden är att Pre-krasch har antagit en negativ lutning som funktion av moneyness och att Post-krasch och Krasch har en lägre lutning.

4.3 Sannolikhetsfördelningar

I detta kapitel jämförs den empiriska och den riskneutrala fördelningen. Vi låter tre veckors löptid fungera som ett representativt exempel eftersom resultaten för alla löptider redovisats som volatilitetsleenden i Figur 4 till 7.⁶⁷

4.3.1 Den empiriska fördelningen: Tre veckors löptid

Figur 8 visar den empiriska fördelningen av de beräknade aktiepriserna $P(-h)$, $h = 1, \dots, H - T$.⁶⁸ Figuren visar att Post-krasch har det högsta relativa antalet låga priser följt av Krasch. Informationen i den vänstra svansen av Post-krasch speglar kursfallet i OMXS30 index år 2000.



Figur 8. De beräknade indexprisernas empiriska fördelning för var och en av de tre tidsserierna. Figur 8 är baserad på tre veckors löptid och priserna i figuren är grupperade i steg av 10kr.

⁶⁷ Vi vill undvika att redovisa samma information flera gånger. Vi valde tre veckors löptid eftersom volatilitetsstrukturen liknar den på marknaden ofta observerade.

⁶⁸ Figur 8 innehåller *inte* den likafördelade empiriska fördelning som vi definierade som apriori fördelning till den riskneutrala fördelningen.

För att underlätta en jämförelse till den riskneutrala fördelningen presenteras ett antal statistiska mått i Tabell A. Den översta raden innehåller medelvärdet av de beräknade priserna, normerat med den riskfria räntan och dagens pris. Normering syftar till att koppla samman storleken på detta tal med villkoret om arbitragefrihet i ekvation (4). De två efterföljande raderna innehåller medelvärdet och standardavvikelsen av det beräknade OMXS30 priset $P(-h)$. Den sista raden mäter fördelningarnas skevhet.

	Post-krasch	Krasch	Pre-krasch
Normerat medelvärde	1.00653	1.01515	1.01210
Medelvärde	649.66364	654.24601	653.77425
Standardavvikelse	36.01157	32.27605	27.59197
Skevhet	-0.36901	-0.22247	-0.21979

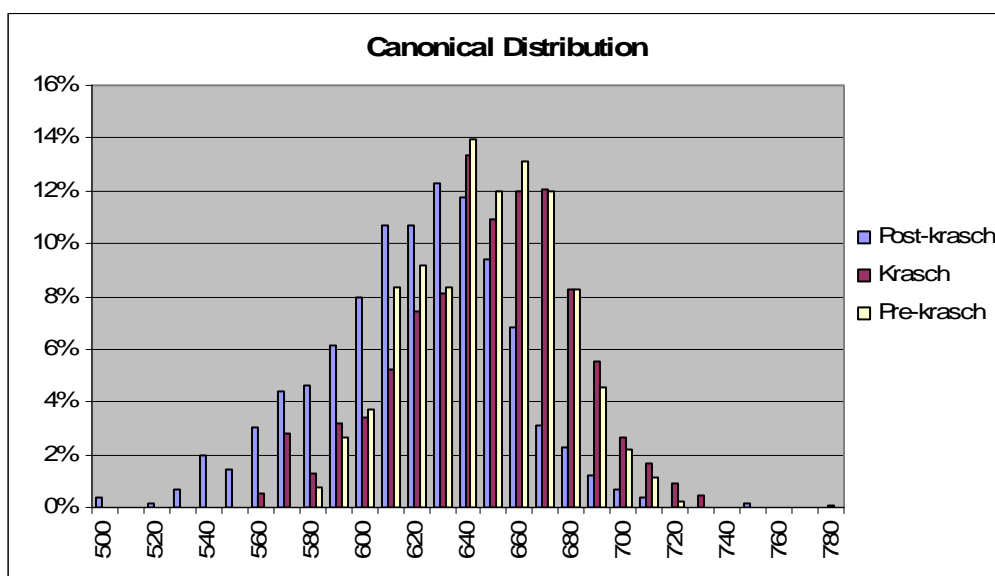
Tabell A. Den första raden innehåller det empiriska medelvärdet av OMXS30 priset normerat med den riskfria räntan och dagens pris P : $E[PR(-h)]/P^*r$. De två efterföljande raderna innehåller medelvärdet och standardavvikelsen. Den fjärde raden mäter tredje momentet normerat med standardavvikelsen upphöjd till tre. Detta ger ett uttryck för fördelningens skevhet. Alla beräkningar till Tabell A är utförda med en löptid på tre veckor.

Post-krasch har den i absoluta tal största skevheten -37 %, men både Krasch och Pre-krasch uppvisar en skevhet på cirka -20 %. Den översta raden visar att alla tidsserier har en genomsnittlig avkastning som överstiger den riskfria räntan. Skevheten i Tabell A indikerar att tidsserierna karakteriseras av tillfälliga negativa prisrörelser.

Som vi nyss noterade är de normerade medelvärdena större än ett. Detta betyder att de riskneutrala fördelningarna i Figur 8 måste förskjuta sannolikhetsmassan till vänster. Anledningen är att ekvation (4) måste hålla med likhet för att marknaden skall vara arbitragefri. Vi undersöker detta påstående närmare i avsnitt 4.2.3, men först ser vi närmare på den kanoniska fördelningen.

4.3.2 Den riskneutrala fördelningen: Tre veckors löptid

I Figur 9 nedan återfinns den tre veckors baserade kanoniska fördelning π^* . Precis som i Figur 8 varierar medelvärdet och graden av skevhet mellan tidsserierna, men vid en närmare granskning ses att sannolikhetsmassan har förskjutits åt vänster. Detta är en direkt konsekvens av minimeringsproblemet i ekvation (3).



Figur 9: Den kanoniska fördelningen för var och en av de tre tidsserierna. Figuren är baserad på tre veckors löptid och priserna i figuren är grupperade i steg av 10kr.

Tabell B beskriver den kanoniska fördelningens läge, spridning och symmetri. Syftet är att beskriva förhållandet mellan fördelningarna i Figur 8 och 9. I den översta raden har det normerade medelvärdet bytts ut mot Lagrange-multiplikatorn γ^* . Den sista raden innehåller kvoten mellan sannolikheten att erhålla ett pris mindre än 650 kr under $\hat{\pi}$, respektive $\hat{\pi}^*$. Talen inom parentes innehåller kvoten mellan talen i Tabell B och Tabell A.

	Post-krasch	Krasch	Pre-krasch
Lagrange	-1.10291	-5.84526	-6.91187
Medel	647.42595 (99.66%)	644.47999 (98.51%)	648.11195 (99.13%)
Standardavvikelse	36.39855 (101.07%)	33.48326 (103.74%)	28.34379 (102.72%)
Skevhets	-0.37929 (102.79%)	-0.15314 (68.84%)	-0.35393 (161.03%)
$\hat{\pi}(\text{OMXS30}<650)/\pi^*(\text{OMXS30}<650)$	0,99607	0,77834	0,79043

Tabell B: Den första raden innehåller Lagrange-multiplikatorn. De två efterföljande raderna innehåller medelvärdet och standardavvikelsen av OMXS30 priset. Den fjärde raden mäter tredje momentet normerat med standardavvikelsen upphöjd till tre, vilket ger ett uttryck för fördelningens skevhet. Den sista raden mäter kvoten av sannolikheterna att erhålla ett pris mindre än 650. Talet inom parentes är kvoten mellan Tabell B och Tabell A. Alla beräkningar till Tabell A är utförda med en löptid på tre veckor.

Medelvärdet minskar över lag i Figur 9, medan standardavvikelsen ökar. Skevheten reduceras med cirka 30 % i tidsserien Krasch, medan Pre-krasch har en ökning på cirka 60 % i samma statistika. Absolutvärdet av γ^* hos tidsserierna Krasch och Pre-krasch är högre än motsvarande värde hos Post-krasch. Vi ser också att det verkar finnas ett tydligt samband mellan Lagrange-multiplikatorn och kvoten av sannolikheter i den nedersta raden. Ett lägre värde på den förstnämnda implicerar att den riskneutrala fördelningen har en relativt tjockare vänster svans än den empiriska fördelningen.

Vi nämnde i slutet på förra kapitlet att den riskneutrala fördelningen måste förskjuta sannolikhetsmassa till vänster jämfört med den empiriska fördelningen. I nästa stycke ger vi en förklaring till hur detta hänger samman med värdet på γ^* .

4.3.3 Lagrange-multiplikatorn

Förhållandet mellan den riskneutrala fördelningen och villkoret om arbitragefrihet kan analyseras med logaritmen av den momentgenererande funktionen, $\Lambda_{\pi}(\gamma) = \log(E_{\pi}[\exp(\gamma R / r^T)])$. Här är väntevärdet taget under den

empiriska fördelningen π . Genom att derivera denna funktion inses att ekvation (4) kan skrivas som derivatan av $\Lambda_\pi(\lambda)$ med avseende på λ ,

$$(10) E_{\pi^*}[\gamma R / r^T] = \Lambda'_\pi(\gamma) = \frac{\sum_{h=1}^{H-T} R(-h) / r^T \cdot \exp(\gamma R(-h) / r^T)}{\sum_{h=1}^{H-T} \exp(\gamma R(-h) / r^T)} = 1.$$

Där det första väntevärdet är taget under det kanoniska måttet. Vi noterar att $\Lambda(\gamma)$ är konvex, vilket bevisas med Hölders olikhet samt att $\Lambda(0) = \log(1) = 0$.⁶⁹

Vi kan utläsa två saker från ekvation (10). Det finns en unik lösning γ^* till ekvation (4) sådan att: $P \cdot \Lambda'_\pi(\gamma) = P$. Här multiplicerar vi ekvation (10) med priset på båda sidor för att understryka Martingal-villkoret i ekvation (1). Det andra vi kan utläsa är att medelvärdet ökar monotont med γ eftersom $\Lambda(\gamma)$ är konvex.

Krasch och Pre-krasch har höga normerade medelvärden i Tabell A, vilket implicerar låga värden på γ^* i Tabell B. Mot denna bakgrund gör vi följande två tolkningar av γ^* : Värdet av Lagrange-multiplikatorn kan tolkas som ett mått på hur en riskneutral marknadsaktör transformerar informationen i Post-krasch, Krasch och Pre-krasch. Ytterligare en tolkning ges av att γ^* är det värde som ger ett aktuariemässigt rättvist spel: $E_{\pi^*}[\tilde{R}] = 1$, där \tilde{R} är den stokastiska totalavkastningen i spelet med vinsten $P \cdot \hat{R}$.⁷⁰

4.4 Modellanalys

I detta kapitel argumenterar vi för att det finns fördelar med att se på den kanoniska värderingsmodellen ur ett asymptotiskt perspektiv. Istället för att

⁶⁹ Dembo och Zeitouni (1998), aa, sid 28.

⁷⁰ Hansson, Björn, *Lecture Notes Financial Economics D*, Lund University, Department of Economics, 2005. sid 26.

härleda modellen utifrån att vi har en viss mängd data härleder vi modellen oberoende av en existerande datamängd. Vi härleder alltså modellen generellt matematiskt. Denna modell kan sedan bli testad med en mängd data.

En marknadsaktör som funderar på att använda den kanoniska värderingsmodellen stöter på följande problem: Hur många datapunkter skall tidsserien bestå av och vilken historisk tidsperiod är den relevanta? Stutzer skriver följande.⁷¹

A second, difficult theoretical topic is to determine the optimal sampling interval and the length of the required historical time series. Computational demand increases with more frequent sampling and/or longer historical periods. In this introductory article, a sampling interval of one week and a series length dating back to before the Crash of 1987 seemed to yield sensible results. But it might be possible to use large deviation theory to quantify the nature of the results' dependence on both these variables.

I nästa avsnitt ser vi närmare på kanonisk värdering med hjälp av den i citatet nyss nämnda large deviation teorin.

4.4.1 En alternativ infallsvinkel

Genom att utnyttja Gibbs betingningsprincip skriver vi över den kanoniska värderingsmodellen på följande frågeställning: Vad är fördelningen av OMXS30 givet att marknaden är arbitragefri och att antalet datapunkter är stort? Det vill säga, vi söker den riskneutrala fördelningen givet ekvation (4), då $H - T \rightarrow \infty$.

⁷¹ Stutzer (1996), aa, sid 1650.

Gibbs betingningsprincip återfinns i Appendix E.⁷² Denna princip garanterar att den riskneutrala fördelningen π^* går mot ett entydigt sannolikhetsmått π_{H-T}^* , då $H-T \rightarrow \infty$. Gibbs betingningsprincip säger också att π_{H-T}^* har en large deviation rate funktion, $I_\Gamma(x) = \inf_{\pi^* \in \Gamma} I(\pi^*, \hat{\pi}) = E_{\pi^*} [\log(\pi^* / \hat{\pi})]$, där infimum är taget över mängden $\Gamma = \{\pi^* : E_{\pi^*} [R / r^T] = 1\}$. Notera att $I(\pi^*, \hat{\pi})$ är Kullback-Leibler information i ekvation (2). Vi kan alltså direkt överföra utgångspunkten i Stutzers härledning på large deviation principen i kapitel 2.3.2. Med utgångspunkt avses ekvation (3) och (4). Skillnaden mot dessa ekvationer är att infimum har ersatt minimeringen av ekvation (3).

4.4.2 Den kanoniska fördelningen

Det återstår att motivera varför π_{H-T}^* antar formen av den kanoniska fördelningen. Detta följer av att applicera Cramers teorem i appendix D på Gibbs betingningsprincip. Appendix E visar att vi kan skriva gränsvärdet π_{H-T}^* som $\pi_{H-T}^* = E_{\hat{\pi}} [\tilde{\pi}_{H-T} | \tilde{\pi}_{H-T} \in \Gamma]$. $\tilde{\pi}_n$ definieras här som den stokastiska empiriska fördelningen, av vilken det empiriska medelvärdet $\hat{\pi}$ är en realisering.

Vi antar nu att Cramers teorem i Appendix D håller med likhet för π_{H-T}^* , uttryckt som medelvärdet i stycket ovan, och med ekvation (2) som rate funktion $I_\Gamma(x) : -\inf_{\pi^* \in \Gamma} I(\pi^*, \hat{\pi}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \Pr(\tilde{\pi}^* \in \Gamma)$.

Med hjälp av egenskaperna hos Fenchel-Legendre transformen $\Lambda^*(x)$, logaritmen av den momentgenererande funktionen $\Lambda(\gamma)$, ekvation (10) och

⁷² Vi utgår där från att priset antar ett begränsat antal värden. Detta är inte sant, men förenklar matematiken.

Jensen olikhet går det att visa följande: Ekvationen ovan håller med likhet då $\tilde{\pi}_n$ är den kanoniska fördelningen med parameter γ^* .⁷³

Utifrån härledningen ovan kan med stor sannolikhet problemet med att bestämma tidsseriens längd lösas. Vi gör dock ingen ansats för att finna en sådan lösning, utan nöjer oss med att lägga grunden för en vidare utveckling av kanonisk värdering.

⁷³ Påståendet verifieras med utgångspunkt i kommentar c i Dembo och Zeitouni (1998), aa, sid 89. Därefter jämförs beviset av Gibbs betingningsprincip med beviset för Cramers teorem.

5 Slutsatser och kommentarer

Att vi inte undersökt den kanoniska modellen med det extra bivillkor som redovisas i Kapitel 2.1.5 är ett tillkortakommande. Det finns dock inte mycket som talar för att en sådan undersökning skulle förse analysen med ytterligare information. Ett annat problem är att vi inte korrigerat OMXS30 för aktieutdelningar. Det är svårt att bedöma vilken skada detta gjort för vår studie. Våra resultat beskriver den kanoniska modellens generella drag relativt Black-Scholes, och dessa bör inte påverkas allt för mycket av aktieutdelningar. Dessa problem kan vid en första anblick anses vara av mindre betydelse. I själva verket pekar de på ett mera allvarligt problem: Vi undersöker inte den kanoniska modellens förmåga att "matcha" volatilitetsleendet på marknaden eller att prediktera framtida optionspriser.

Vi har utifrån en kombination av empirisk och teoretisk analys gjort följande slutsatser.

- Stutzers resultat kan återupprepas på svensk data för OMXS30 Stockholm Index.
- Kanonisk värdering tillskriver köptioner som befinner sig långt out-of-the-money en extra premie relativt Black-Scholes då en marknadskrasch betraktas. Vi undersöker, till skillnad från Stutzer, vad som händer när vi endast betraktar den kraftiga kursuppgången utan den efterföljande nedgången. Vi finner att resultat inte skiljer sig nämnvärt från när hela uppgången och den efterföljande kraschen inkluderas i modellen.

- Vi har visat att den kanoniska modellen kan härledas från teorin om large deviations. Denna teori ger enligt vår mening en härledning som ligger närmare den kanoniska modellens sanna natur. Vikten av att en marknadsaktör förstår sina prissättningsmodeller kan inte understrykas nog.
- Vi har klarlagt förhållandet mellan den riskneutrala fördelningens utseende och det underliggande datamaterialet. En direkt konsekvens av detta är att optionspriserna låter sig analyseras utifrån värdet av den kanoniska fördelningens parameter.

5.1 Förslag till fortsatta studier

Innan den kanoniska värderingsmodellen kan konkurrera med mer vedertagna optionsprissättningsmodeller måste frågan om hur tidsserierna ska väljas lösas. Det är troligt, vilket Stutzer påpekar, att svaret finns i large deviation teori. En stringent härledning och karakterisering av resultaten från en sådan ansats överskuggar andra förslag till fortsatta studier. Detta eftersom den kanoniska värderingsmodellen redan har uppvisat flera goda empiriska resultat. Samtidigt har ingen av de artiklar vi nämner i kapitel 1.2 använt ett datamaterial som motsvarar marknadsmässiga krav, men detta faktum hänger starkt ihop med problemet att välja en relevant tidsserie.

Källförteckning

Skriftliga källor

Alcock, Jamie och Gray, Philip, Dynamic, nonparametric hedging of European style contingent claims using canonical valuation, *Finance Research Letters*, Vol. 2, Nummer 1 2005, Sid. 41-50.

Björk, Tomas, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Andra upplagan, Oxford University Press, 2004.

Black Fischer och Scholes, Myron, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economics*, Vol. 81, Nummer 3 Maj/Juni 1973.

Campbell, John Y., Lo, Andrew W. och MacKinlay, A. Craig, *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, 1997.

Dembo Amir, Ofer Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, Andra upplagan, Springer. 1998.

Gray, Philip och Newman, Scott, Canonical Valuation of Options in the Presence of Stochastic Volatility, *The Journal of Future Markets*, Vol. 25, Nummer 1 2005, Sid. 1-9.

Hagan Patrick S., Kumar, Deep, Lesniewski, Andrew S. och Woodward, Diana E., Managing Smile Risk, *Wilmott magazine*, 2002.

Hansson Björn, *Lecture Notes Financial Economics D*, Lund University, Department of Economics, 2005.

Holme, Idar Magne & Solvang, Bernt Krohn, *Forskningsmetodik*, Andra upplagan, Studentlitteratur, 1997.

Hull, John C., *Options, Futures & Other Derivatives*, Femte upplagan, Prentice-Hall International Inc., 2003.

Jarrow, Robert och Turnbull, Stuart, *Derivative Securities*, Första upplagan South-Western College Publishing, 1996.

Lindgren, Georg och Rootzén, Holger, *Stationära Stokastiska Processer*, Föreläsninganteckningar i Matematisk Statistik, Lunds universitet, KFS AB, 2003.

Lundahl, Ulf och Skärvad, Per-Hugo, *Utredningsmetodik för samhällsvetare och ekonomer*, Tredje upplagan, Studentlitteratur, 1992.

Musiela, Marek och Rutkowski, Marek, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Första upplagan, Springer, 1998.

Patel, Runa och Tebelius, Ulla (red), *Grundbok i forskningsmetodik*, Studentlitteratur, 1987.

Rubinstein, Mark, Implied Binomial Trees, *The Journal of Finance*, Vol. 49, Nummer 3 Juli 1994, sid. 771-818.

Stutzer, Michael, A Simple Nonparametric Approach to Derivative Security Valuation, *The Journal of Finance*, Vol. 51, Nummer 5 December 1996, sid. 1633-1652.

Stutzer, Michael och Muinul, Cowdhury, A Simple Non-Parametric Approach to Futures Option Pricing, *The Journal of Fixed Income*, Vol. 8, Nummer 4 Mars 1999, Sid. 77-87.

Datakällor

Riksgäldskontoret.

Stockholmsbörsens statistikavdelning, OM Gruppen.

Elektroniska Källor

Nationalencyklopedin Multimedia 2000, CD-ROM för PC, Bra Böcker AB, maj 2000.

www.omgroup.com

Tabeller

Moneyneess T=3	Kanonisk	B&S	Kanonisk	B&S	Kanonisk	B&S
	Postkrasch	Postkrasch	Krasch	Krasch	Exkrasch	Exkrasch
7.41%	0.356004	0.6300762	0.2222	0.396901	0.031407	0.110017
3.95%	0.724443	1.1492783	0.497651	0.787151	0.149306	0.27956
2.30%	1.38274	2.0063444	1.034334	1.48028	0.485146	0.654137
0.70%	2.658477	3.3518419	2.122609	2.639295	1.281828	1.409161
-0.85%	4.717021	5.3597282	3.950059	4.462891	2.78093	2.796458
-2.35%	7.880882	8.207847	6.896278	7.162634	5.424813	5.120254
-3.81%	12.22444	12.049989	11.063	10.92616	9.374771	8.673916
-5.22%	17.62859	16.985512	16.32658	15.87498	14.55779	13.65231
-6.60%	24.10989	23.035269	22.90001	22.03076	21.07135	20.07807
-7.93%	31.38461	30.133265	30.29533	29.30505	28.42074	27.78556
-9.23%	47.86754	46.863108	47.17947	46.44421	45.90283	45.81684

Tabell C. De Black-Scholes parametrar som används i tabellen är: Volatilitet Post-krasch 22.92%, Volatilitet Krasch 21.09%, Volatilitet Pre-krasch 17.41%, Ränta 2.64% och Pris 644.48kr. Lösenpriset är fördelat mellan 620-710kr (inklusive ändpunkterna) i steg av 10kr. Utanför detta intervall finns ett lösenpris på 600kr. De tre tidsserierna är definierade enligt följande: Pre-krasch 1993-01-01 till 1998-01-01, Krasch 1993-01-01 till 2000-07-01 och Post-krasch 1993-01-01 till 2003-01-01.

Moneyneess T=8	Kanonisk	B&S	Kanonisk	B&S	Kanonisk	B&S
	Postkrasch	Postkrasch	Krasch	Krasch	Exkrasch	Exkrasch
5.65%	4.630554	4.7524208	3.172663	3.669168	1.019542	1.850433
3.95%	6.229023	6.3394462	4.507256	5.07309	1.914393	2.837515
2.30%	8.34698	8.3405026	6.403615	6.897117	3.363232	4.237571
0.70%	11.05403	10.821631	8.93125	9.219495	5.323017	6.162662
-0.85%	14.42832	13.846217	12.20011	12.11651	7.913267	8.727999
-2.35%	18.48251	17.47083	16.19872	15.6568	11.03627	12.0408
-3.81%	23.20914	21.740991	20.89995	19.89544	14.78923	16.18761
-5.22%	28.6902	26.686441	26.53277	24.86766	19.70907	21.2215
-6.60%	34.74423	32.318843	32.91865	30.58519	25.65315	27.15338
-7.93%	41.27776	38.629025	39.91723	37.0332	32.44005	33.9478
-9.23%	48.39836	45.587255	47.66317	44.1711	40.2668	41.52685

Tabell D. De Black-Scholes parametrar som används i tabellen är: Volatilitet Post-krasch = 22.92%, Volatilitet Krasch 21.09%, Volatilitet Pre-krasch = 17.41%, Ränta = 2.64% och Pris = 644.48kr. Lösenpriset är fördelat mellan 610-710kr (inklusive ändpunkterna) i steg av 10kr. Pre-krasch 1993-01-01 till 1998-01-01, De tre tidsserierna är definierade enligt följande: Krasch 1993-01-01 till 2000-07-01 och Post-krasch 1993-01-01 till 2003-01-01.

Moneyness T=12	Kanonisk Postkrasch	B&S Postkrasch	Kanonisk Krasch	B&S Krasch	Kanonisk Exkrasch	B&S Exkrasch
2.30%	13.86995	13.06098	11.01911	11.10273	5.430776	7.375217
0.70%	17.33388	15.94438	14.2233	13.8557	7.64226	9.789292
-0.85%	21.41182	19.29777	18.14906	17.11095	10.50771	12.78136
-2.35%	25.98969	23.15580	22.72668	20.91027	13.98913	16.41644
-3.81%	31.06057	27.54644	27.90232	25.28705	18.20185	20.7457
-5.22%	36.64898	32.48845	33.82851	30.26301	23.35124	25.80037
-6.60%	42.68883	37.99131	40.30347	35.84767	29.32658	31.58906

Tabell E. De Black-Scholes parametrar som används i tabellen är: Volatilitet Post-krasch 22.92%, Volatilitet Krasch 21.09%, Volatilitet Pre-krasch 17.41%, Ränta = 2.64% och Pris 644.48kr. Lösenpriset fördelat mellan 630-690kr (inklusive ändpunkterna) i steg av 10kr. De tre tidsserierna är definierade enligt följande: Pre-krasch 1993-01-01 till 1998-01-01, Krasch 1993-01-01 till 2000-07-01 och Post-krasch 1993-01-01 till 2003-01-01.

Moneyness T=16	Kanonisk Postkrasch	B&S Postkrasch	Kanonisk Krasch	B&S Krasch	Kanonisk Exkrasch	B&S Exkrasch
3.95%	24.79399	20.530863	19.21953	18.04507	10.132	13.15648
2.30%	28.9272	24.083516	23.10702	21.52057	12.8286	16.41952
0.70%	33.50804	28.079304	27.58858	25.47518	16.24252	20.2536
-0.85%	38.48021	32.538266	32.63135	29.93252	20.40543	24.69404
-2.35%	43.82108	37.474241	38.10356	34.90835	25.15013	29.76247
-3.81%	49.56693	42.895415	44.09428	40.41085	30.72933	35.46625
-5.22%	55.78612	48.802253	50.78354	46.43838	37.45177	41.79557

Tabell F. De Black-Scholes parametrar som används i tabellen är: Volatilitet Postkrasch 22.92%, Volatilitet Krasch 21.09%, Volatilitet Pre-krasch 17.41%, Ränta 2.64% och Pris 644.48kr. Lösenpriset är fördelat mellan 620-680kr (inklusive ändpunkterna) i steg av 10kr. De tre tidsserierna är definierade enligt följande: Pre-krasch 1993-01-01 till 1998-01-01, Krasch 1993-01-01 till 2000-07-01 och Post-krasch 1993-01-01 till 2003-01-01.

Appendix A

I appendix A beskrivs hur den stokastiska räntan r^h och de stokastiska kassaflödena D^h i ekvation (1) beräknas.

Utdelningarna D^h skattas enligt

$$D^h = P \cdot d(-h) + \sum_{-h-1}^{-h-T-1} P \cdot d(-h) \cdot r(-h) \quad h = 1, 2, \dots, H - T,$$

där $d(-h)$ är de historiska utdelningarna. Dessa är beräknade enligt samma princip som $R(-h)$. Förekomsten av $r(-h)$ i uttrycket ovan kompenserar för diskonteringsfaktorn i nämnaren av ekvation (1). Genom detta diskonteras utdelningarna över rätt antal perioder.

De riskfria räntorna i nämnaren av ekvation (1) beräknas enligt

$$r^h = \prod_{-h=-2}^{-h-T-1} r \cdot r(-h) \quad h = 1, 2, \dots, H - T.$$

Appendix B

Nedan beskrivs Black-Scholes formel för köp respektive säljoption av Europeisk plain vanilla typ.

$$c = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$

$$p = Xe^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

där

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \quad \text{och} \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

Black-Scholes priset på köp och säljoptionen ges av c respektive p . S är priset på den underliggande tillgången. $N(d_1)$ och $N(d_2)$ står för sannolikheterna från normalfördelningen. X är optionens lösenpris, r är den riskfria räntan, T står för kvarvarande löptid och σ för volatilitet i underliggande tillgång.⁷⁴

⁷⁴ Hull (2000), aa, sid 250.

Appendix C

Appendix C beskriver hur volatiliteten mellan köp och säljoptioner är relaterad.

Köp-sälj pariteten håller oberoende av modell. Skillnaden mellan marknadspriset, det kanoniska priset och Black-Scholes priset kan därför beräknas utifrån denna paritet. Vi illustrerar detta med ett exempel från Hull.⁷⁵ Skillnaden mellan marknadspriset och Black-Scholes priset beräknas enligt:

$$p + Pe^{-qT} = c + Xe^{-rT} \text{ och } p_{MKT} + Pe^{-qT} = c_{MKT} + Xe^{-rT}$$
$$\Rightarrow p - p_{MKT} = c - c_{MKT}$$

Där c_{MKT} och p_{MKT} är de faktiska observerade priserna på marknaden. Per definition gäller $p_{MKT} = p$ då den implicita volatiliteten används i Black-Scholes. Enligt formeln ovan gäller då även att $c_{MKT} = c$. Den implicita volatiliteten avviker därför lika mycket från den "sanna" volatiliteten för sälj- respektive köpoptioner.

⁷⁵ Hull (2000), aa, sid 250.

Appendix D

Appendix D innehåller Cramers Teorem för finita delmängder av \mathbb{R} .⁷⁶

Definitioner

Definiera det stokastiska medelvärdet som $\hat{S}_n = \frac{1}{n} \sum_j^n X_j$, där

$X_j = f(Y_j)$, $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ för sekvensen av likafördelade stokastiska variabler $Y_1 \dots Y_n \in \Sigma$. Låt dessa ha sannolikhetsmåttet μ på utfallsrummet

$\Sigma = \{a_i : \mu(a_i) > 0\}$. Vi kan nu skriva \hat{S}_n i intervallet $K = [f(a_1), f(a_{|\Sigma|})]$ som

vektorprodukten av $\mathbf{f} = (f(a_1), \dots, f(a_{|\Sigma|}))$, $f(a_1) < f(a_2) < \dots < f(a_{|\Sigma|})$ och

stokastiska variabeln L_n^Y :

$$\hat{S}_n = \langle \mathbf{f}, L_n^Y \rangle = \sum_{i=1}^{|\Sigma|} f(a_i) L_n^Y(a_i).$$

Vi skriver $L_n^Y(a_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{|\Sigma|} 1_{a_i}(y_j)$ som det realiserade empiriska medelvärdet,

implicerat av sekvensen y_1, \dots, y_n .

⁷⁶ Appendix D är en översättning av Dembo och Zeitouni (1998), aa, sid 18-19.

Cramers Teorem

För ett godtyckligt $A \subset \mathbb{R}$ säger Cramers teorem att

$$-\inf_{x \in A^o} I(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_\mu(\hat{S}_n \in A) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_\mu(\hat{S}_n \in A) \leq -\inf_{x \in A} I(x)$$

där A^o är det inre av A och $I(x) = \inf_{\{v: \langle f, v \rangle = x\}} H(v | \mu)$. $I(x)$ är kontinuerlig för

$x \in K$ och uppfyller $I(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda x - \Lambda(\lambda)\}$, där $\Lambda(\lambda) = \log \sum_{i=1}^{|\Sigma|} \mu(a_i) \exp(\lambda f(a_i))$.

Appendix E

Appendix E innehåller Gibbs betingningsprincip för finita alfabeten.⁷⁷

Inledning

Vi behåller alla definitioner från Appendix D och betraktar återigen sekvensen av oberoende likafördelade stokastiska variabler Y_1, \dots, Y_n .

Gibbs betingningsprincip ger svar på följande fråga: Vad är den betingade gränsvärdesfördelningen av Y_1 då $\hat{S}_n \in A$ och $A \in \mathbb{R}$ när $n \rightarrow \infty$? Med andra ord, vad är gränsvärdet till vektorn $\mu_n^*(a_i) = P_\mu(Y_1 = a_i | \hat{S}_n \in A)$, $i = 1, \dots, |\Sigma|$.

Bakgrund

Följande stycke ger en förklaring till Gibbs betingningsprincip. Vi har tidigare definierat medelvärdet som $\hat{S}_n = \frac{1}{n} \sum_j^n X_j = \langle \mathbf{f}, L_n^Y \rangle$, där $\mathbf{f} = (f(a_1), \dots, f(a_{|\Sigma|}))$ och $X_j = f(Y_j)$, $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Notera att om Y_j betingas av att $\hat{S}_n \in A$ är alla Y_j fortfarande likafördelade men inte oberoende. För en godtycklig funktion $\phi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ kan vi skriva:

⁷⁷ Appendix E är en översättning av Dembo och Zeitouni, (1998), aa, sid 87.

$\langle \phi, \mu_n^* \rangle = E[\phi(a_1) | \hat{S}_n \in A] = E[\phi(a_2) | \hat{S}_n \in A] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \phi(a_j) | \hat{S}_n \in A\right] = E[\langle \phi, L_n^Y \rangle | \hat{S}_n \in A],$
 där $\phi = (\phi(a_1), \dots, \phi(a_{|\Sigma|}))$. Om vi definierar $\Gamma = \{v : \langle f, v \rangle \in A\}$ erhåller vi direkt från härledning ovan att $\mu_n^* = E[L_n^Y | L_n^Y \in \Gamma]$.

Gibbs betingningsprincip håller för denna karakterisering av gränsvärdespunkterna $\{\mu_n^*\}$. Detta för varje icke tom mängd Γ för vilken

$$I_\Gamma = \inf_{v \in \Gamma^o} H(v | \mu) = \inf_{v \in \Gamma} H(v | \mu).$$

Gibbs betingningsprincip

- i. Alla punkter av $\{\mu_n^*\}$ tillhör det konvexa höljet till M .
- ii. Om Γ är en konvex och icke tom så innehåller M en enda punkt till vilken μ_n^* konvergerar då $n \rightarrow \infty$.