



SCHOOL OF ECONOMICS
AND MANAGEMENT
Lund University

Kovariansskattningar vid portföljval

– Utvärdering av fyra alternativa metoder för att skatta kovariansen –

Jakob Birgersson

Handledare: Birger Nilsson och Christoffer Bengtsson

Den 28:e maj 2004

Sammanfattning

I denna uppsats beskrivs och implementeras tre alternativa metoder för att skatta kovariansen mellan finansiella tillgångar. De utvärderas sinsemellan och jämförs med stickprovskovariansen. Utvärderingsmodellen innebär simulering av en aktiv portföljförvaltare i en verklighetstrogen miljö.

Då kovariansen mellan finansiella tillgångar beräknas med stickprovsskattning blir skattningsfelet stort. Detta fel, eller brus, försämrar portföljförvaltares resultat och alternativa metoder eftersöks.

De skattningsmetoder som utvärderas är Power Mapping, Random Matrix Theory och Shrinkage. Det visar sig att alla metoder har högre ex post informationskvot än vid stickprovsskattning. Power Mapping ger lite högre medelavkastning utan att höja risken. Random Matrix Theory och Shrinkage ger en mycket högre medelavkastning till priset av högre risk.

Den viktigaste slutsatsen i uppsatsen är att ingen investerare bör använda stickprovskovariansen vid portföljval. Det finns alternativa metoder, vilka genererar ett bättre resultat.

Innehåll

Innehåll

1	INLEDNING	3
1.1	BAKGRUND	3
1.2	FRÅGESTÄLLNING	4
1.3	AVGRÄNSNINGAR	4
2	MODELLEN	5
2.1	BESKRIVNING AV PORTFÖLJFÖRVALTARENS PROBLEM	5
2.2	SKATTNING AV DEN FÖRVÄNTADE AVKASTNINGEN	7
3	KOVARIANSMATRISEN	9
3.1	SHRINKAGE	9
3.2	POWER MAPPING	10
3.3	RANDOM MATRIX THEORY OCH PRINCIPALANALYS	11
4	EMPIRISK STUDIE	13
4.1	ALGORITMEN	13
4.2	RESULTAT	14
5	SLUTSATSER OCH DISKUSSION	18
	APPENDIX A - STATISTISKA OCH MATEMATISKA VERKTYG	20
	KOVARIANS OCH KORRELATION	20
	MATRISER, EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER	21
	APPENDIX B - MATEMATISK BESKRIVNING AV SHRINKAGE	22
	SHRINKAGE-MÅLET	22
	OPTIMAL VIKTNING VID SHRINKAGE	23
	APPENDIX C - RMT OCH KOVARIANSMATRISEN	26
	APPENDIX D – DATA	31
	APPENDIX E – MATLAB-KOD	34
	REFERENSER	39

1 Inledning

1.1 Bakgrund

Att sammanställa en optimal portfölj av riskfyllda finansiella tillgångar är av alla investerarens intresse. Med optimal, menas då att erhålla så hög avkastning som möjligt vid given risk eller att erhålla så låg risk som möjligt vid given avkastning. Det kraftfullaste verktyget för problemet är minstavariansoptimering, vilket introducerades av Markowitz i början av 50-talet [1][2].

Vid minstavariansoptimering är det två komponenter som har betydelse. Den förväntade avkastningen hos varje tillgång samt skattningen av kovariansmatrisen. Hur bra den förväntade avkastningen prognostiseras beror på hur duktig varje investerare är på att förutse hur priset på tillgångarna kommer att ändras i framtiden. Kovariansmatrisen är å andra sidan svår att ”gissa” och kräver mer avancerade tekniker för att skattas på ett, för optimeringsverktyget, bra sätt.

Det vanligaste sättet att skatta kovariansen är genom att beräkna stickprovskovariansen. Problem uppstår dock då antalet observationer är få. Laloux *et al.* [3] har visat att stickprovskovariansen innehåller brus, vilket ökar kraftigt då antalet datapunkter minskar.

För att lösa problemet med brus skulle det vara naturligt att använda mer data. Detta är inte alltid möjligt, då det ofta inte finns mer data att tillgå och då kovariansen inte är konstant över tiden. Det önskvärda vore att använda oändligt mycket data från ett oändligt kort intervall men då detta inte är möjligt behövs alternativa metoder. Det är just tre sådana metoder denna uppsats kommer att utvärdera.

Power Mapping är en ny metod utvecklad i ett fysiskt sammanhang men presenterad som ett lämpligt filter för finansiella kovariansmatriser [4]. Random Matrix Theory (RMT) är också utvecklat av fysiker men helt analogt med det statistiker kallar principalanalys. RMT har studerats mer än Power Mapping och använts som filter på den finansiella marknaden [5]. Slutligen kommer även Shrinkage att behandlas vilket är hämtad från den finansiella litteraturen. Shrinkage används idag troligen i väldigt

Inledning

liten utsträckning men har länge varit ett ämne för undersökning inom universitetsvärlden [6].

1.2 Frågeställning

För att filtrera stickprovskovariansen kan flera metoder användas. Ingen metod kan sägas vara fel innan den utvärderats. I denna uppsats skall därför tre fundamentalt olika metoder undersökas med hjälp av verkligt data. Vidare kan utvärderingsmodellen väljas på ett flertal sätt. För att resultatet skall visa på hur en realistisk portfölj påverkas av metoderna skall en verklighetstrogen utvärderingsmodell sättas upp.

De metoder av filtrering som skall utvärderas är Power Mapping, Random Matrix Theory och Shrinkage. Den huvudsakliga frågeställningen blir därför:

Vilken prestanda får minstavariansportföljen då stickprovskovarians, Power Mapping, Random Matrix Theory och Shrinkage används? Resultatet kommer att presenteras med ex post informationskvoten och jämföras relativt varandra.

1.3 Avgränsningar

Då bakgrunden till filtreringsmetoderna är mycket tekniskt komplicerade kommer dessa att presenteras förenklat. Målet med presentationerna är att ge en bild av hur de fungerar och en förklaring till hur de implementeras. För djupare teknisk förklaring hänvisas till källorna i dessa avsnitt.

Antalet tillgångar vilka hanteras i utvärderingen är starkt begränsat, vilket gör att utvärderingen endast täcker portföljer med runt 30 tillgångar. Uppsatsen kommer inte att analysera hur portföljens prestanda påverkas då antalet tillgångar ökar eller minskar.

Slutligen används data från olika index på flera marknader. Detta då generella svar kommer att kunna dras och lokala variationer jämnas ut. Vidare innebär detta att uppsatsen inte kommer att besvara några frågor om enskilda marknader, exempelvis Stockholmsbörsen.

2 Modellen

2.1 Beskrivning av portföljförvaltarens problem

Modellen vilken kommer att användas vid utvärdering i denna uppsats är inspirerad av och till delar hämtad från utvärderingsmodellen använd i Ledoit och Wolf [6]. Idén bakom modellen är vidare beskriven i Grinold och Kahn [7].

De tillgångar som är tillgängliga skapar en benchmark-portfölj vilken traditionell är ett värdeviktat index. Då de tillgångar vi använder i denna analys är olika index vilka inte kan värderas på vårt data, väljer vi istället en likaviktad portfölj av tillgångarna som benchmark.

Vår portföljförvaltare får varje dag välja bland de tillgångar som ingår i vår benchmark-portfölj och skapa sin portfölj. I slutet av dagen vill vi sedan analysera förvaltarens resultat.

För att låta vår portföljförvaltare leva i en så realistisk värld som möjligt inför vi begränsningar. Först kräver vi att portföljen är helt investerad, det vill säga att vikterna på de olika tillgångarna summerar till ett. Vidare förbjuder vi portföljförvaltaren att blanka¹ och begränsar portföljvikterna med en övre gräns. Dessa restriktioner är vanliga och ofta förekommer fler, exempelvis maximal turnover, vilket begränsar hur stor del av portföljen som får förändras vid varje uppdatering. Vi kommer i denna uppsats att begränsa antalet restriktioner av implementationstekniska skäl.

Vi definierar överavkastning (eng. excess return) som den avkastning förvaltarens portfölj har relativt vårt benchmark eller den avkastning en enskild tillgång har relativt vårt benchmark.

Vi är nu redo att införa den matematiska notationen som beskriver hur sambanden för avkastning och varians ser ut för de olika portföljerna.

¹ Blanka innebär att en aktör lånar en aktie av en annan aktör och säljer den för att vid ett senare tillfälle köpa tillbaka aktien och lämna tillbaka den med ränta. Detta är en strategi för att få positiv avkastning av en nedgång.

Modellen

Först inför vi följande beteckningar:

$$\begin{aligned}x_B &= \text{vektor med benchmark - portföljens vikter.} \\x_E &= \text{vektor med den aktiva portföljens vikter.} \\x_P &= x_B + x_E = \text{vektor med portföljens vikter.} \\r &= \text{vektor med tillgångarnas avkastning.} \\ \mu &= \text{vektor med tillgångarnas förväntade avkastning.} \\ \alpha &= \mu - x_B \mu^T = \text{vektor med tillgångarnas förväntade överavkastning.} \\ C &= \text{kovariansmatris.}\end{aligned}\tag{1}$$

Med beteckningarna ovan är det lätt att beskriva uttrycken för förväntad avkastning för de olika portföljerna och portföljernas varians:

$$\begin{aligned}\mu_B &= x_B \mu^T = \text{förväntad avkastning av benchmark - portföljen.} \\ \sigma_B^2 &= x_B C x_B^T = \text{variens hos benchmark - portföljen.} \\ \mu_P &= x_P \mu^T = \text{förväntad avkastning av portföljen.} \\ \sigma_P^2 &= x_P C x_P^T = \text{variens hos portföljen.} \\ \mu_E &= x_E \mu^T = \text{förväntad överavkastning av portföljen.} \\ \sigma_E^2 &= x_E C x_E^T = \text{variensen hos den aktiva portföljen.}\end{aligned}\tag{2}$$

Vidare inför vi beteckningar för restriktionerna. Den övre gränsen motsvarar ett värde vilket varje portföljvikt måste vara mindre än, vi kallar det c :

$$\begin{aligned}a &= \text{vektor med ettor.} \\ \sum_{k=1}^N x_{P,k} &= 1 \Leftrightarrow a x_P^T = 1. \\ \text{Då } a x_B^T &= 1 \text{ och } a x_P^T = 1 \text{ samt att } x_P = x_B + x_E \Rightarrow a x_E^T = 0. \\ x_{P,i} \geq 0 &\Leftrightarrow x_P \geq 0 \Leftrightarrow x_E \geq -x_B. \\ x_{P,i} \leq c &\Leftrightarrow x_P \leq c \cdot a \Leftrightarrow x_E \leq c \cdot a - x_B.\end{aligned}\tag{3}$$

Slutligen kan vi nu konstatera att vår förvaltare tillåts blanka i den aktiva portföljen och att benchmark-portföljen tillsammans med den aktiva portföljen skapar den verkliga portföljen.

Vi är nu redo att ställa upp optimeringsproblemet som portföljförvaltaren möter. Den önskade överavkastningen är g och vår portföljförvaltare vill minimera risken (variansen) för detta värde, problemet blir enligt följande:

Modellen

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & x_E C x_E^T. \\ & x_E \alpha^T \geq g, \\ \text{Då} \quad & a x_E^T = 0, \\ & x_E \geq -x_B, \\ & x_E \leq c \cdot a - x_B. \end{aligned} \tag{4}$$

I modellen är önskad avkastning, benchmark-vikterna och övre gräns för vikterna givna och vår portföljförvaltare måste själv bestämma kovariansmatrisen och de förväntade överavkastningarna. Om all information är tillgänglig används en optimerare som kan utföra kvadratisk programmering för att lösa problemet. I denna uppsats har funktionen QUADPROG i MathWorks program MATLAB använts.

Det följande avsnittet kommer att handla om olika metoder för att skatta kovariansmatrisen men först diskuterar vi i ett kort avsnitt hur den förväntade överavkastningen skattas.

2.2 Skattning av den förväntade avkastningen

Då uppsatsen har som syfte att utvärdera olika metoder med vilka kovariansmatrisen kan skattas önskar vi nu finna en metod att simulera den aktiva portföljförvaltarens prognos av den framtida avkastningen utan att med simuleringen påverka utvärderingsresultatet. Metoden som används är hämtad från och noggrannare beskriven i Grinold och Kahn [7].

Först skapar vi en grov prognos genom att till överavkastningen addera ett normalfördelat brus.

$$raw_{i,t} = e_{i,t} + u_{i,t} \text{ där } u_{i,t} \in N(0; \sigma). \tag{5}$$

I uttrycket ovan är $e_{i,t}$ överavkastningen på den aktiva delen av portföljen. För att få en standardavvikelse, σ , av bra storleksordning sätter vi det lika med medelstandardavvikelsen av överavkastningen över tillgångarna, vilket motsvarar 0,0122. Vidare gäller att ex ante korrelationen mellan $e_{i,t}$ och $u_{i,t}$ är lika med informationskoefficienten IC (eng. information coefficient) [7, s 220]. Normalt skall IC vara specifik för varje tillgång men vanligen sätts de lika. För att kunna sätta IC till ett lämpligt värde använder vi ”the Fundamental Law of Active manager” vilken säger att

Modellen

ex ante informationskvoten IR (eng. information ratio) är approximativt bestämd av IC och bredden (eng. breadth) på portföljen [7, s 117f].

$$IR \approx IC \cdot \sqrt{Breadth}. \quad (6)$$

Bredden är lika med antalet oberoende aktiva val vår förvaltare får göra under en period. Då vår portföljförvaltare kan välja bland 33 tillgångar och uppdaterar portföljen varje dag sätter vi bredden till just 33. Slutligen är frågan vad ett lagom IR är? Det finns inget objektiva svar på denna fråga, men för att följa Ledoit och Wolf [6] sätter vi den till 1,5. Kort kan man säga att IR större än 0,75 är mycket bra medan IR över 1 är exceptionellt [7, s 91].

Den förfinade prognosen kan nu skapas genom att normera den grova prognosen, vi kallar den normerade prognosen *score*, och multiplicera den med *IC* och volatiliteten av överavkastningen. Då volatiliteten för överavkastningen inte är känd skattar vi denna som standardavvikelsen hos överavkastningen, $s_{e,i}$. Matematiskt beskrivs de sista stegen enligt

$$\begin{aligned} score_{i,t} &= \frac{raw_{i,t} - E(raw_i)}{s_{raw,i}}, \\ \alpha_{i,t} &= s_{e,i} \cdot IC \cdot score_{i,t}, \end{aligned} \quad (7)$$

där E symboliserar väntevärdet och α är den färdiga förfinade prognosen vilken matas in i den kvadratiske optimeraren. [7, s 217ff]

3 Kovariansmatrisen

Följande avsnitt beskriver de olika kovariansskattningar vi skall utvärdera med hjälp av historiskt data. De fyra metoderna är olika i sin natur och tre av dem kräver en djupare presentation. Den första metoden, stickprovskovariansen, är den vanligaste använda, men inte nödvändigtvis den bästa metoden och behandlas främst i ett jämförande syfte. Är de andra skattningarna bättre eller sämre? För en förklaring till hur stickprovskovariansen definieras och beräknas, hänvisas till appendix A. I samma appendix kan den intresserade läsaren också finna en kort förklaring av den matematik som används i följande avsnitt. De tre metoder som nu skall förklaras är Shrinkage, Power Mapping och Principal Analys.

3.1 Shrinkage

Shrinkage handlar om att försöka krympa de extremaste värdena i stickprovskovariansmatrisen mot ett medelvärde. Metoden introducerades på 1950-talet av professor Charles Stein på Stanforduniversitetet [6]. Ledoit och Wolf [6] förklarar i sin artikel styrkan med metoden, vilken inte kommit så långt utanför universitetsvärlden. Tidigare har de även publicerat en artikel som förklarar metoden mer tekniskt [8]. Denna uppsats har inte som syfte att utreda hela den matematiska bakgrunden utan hänvisar till Ledoit *et al.* [8] men ger ändå en kortare matematisk presentation i appendix B. Nedan följer en enklare förklaring till vad shrinkage är.

Låt oss anta att vi har skattat stickprovskovariansmatrisen S . Metoden för att skatta stickprovskovariansen är enkel och resultatet väntevärdesriktigt. Vid finansiella situationer uppstår det dock ofta ett problem då antalet tillgångar är av samma storleksordning som antalet datapunkter eller till och med större. Detta resulterar i att skattningsfelet blir stort, det vill säga informationen täcks av brus. För att förhindra att skattningsfelet blir stort kan en strukturerad och teknisk matris användas så som Sharpe's "single-factor model". Med en strukturerad matris blir skattningsfelet mindre men matrisen är inte längre väntevärdesriktig. Som i många ekonomiska situationer handlar det nu om att optimera. Å ena sidan önskas väntevärdesriktighet, å andra sidan så litet fel som möjligt. Vi borde följaktligen kunna kombinera stickprovsskattningen

Kovariansmatrisen

med en strukturerad och teknisk matris och på så vis finna en optimal matris. Detta är vad shrinkage handlar om.

Låt oss anta att vi viktar ihop stickprovskovariansmatrisen S med en teknisk matris F med vikten δ enligt

$$C_{new} = \delta F + (1 - \delta)S, \quad (8)$$

där δ är ett tal mellan 0 och 1. Det vi nu behöver bestämma är vilken strukturerad teknisk matris F vill vi använda och vilket värde på δ som är optimalt.

Då det gäller valet av F har Ledoit och Wolf [6] [8] två förslag, Sharps ”single-factor” matris eller en matris med konstant icke-diagonal korrelation. De argumenterar för den senare och visar i en empirisk analys att den oftast ger ett bättre resultat. Vi följer i denna uppsats Ledoit och Wolf rekommendationer och använder kovariansmatrisen med konstant korrelation.

3.2 Power Mapping

Power Mapping är en relativt ny metod presenterad som ett finansiellt verktyg första gången 2003 av Guhr och Kälber [4]. Författarna utförde en kvantitativ analys på simulerade data och ingen publicerad artikel har utfört någon undersökning på historiskt data. Resultatet som presenteras visar att kovariansmatrisen filtrerad med Power Mapping ger bättre prestanda i en portföljvalssituation än stickprovsmatrisen.

Låt oss börja med stickprovskorrelationsmatrisen S där varje element kan betecknas som s_{ij} där i och j symboliserar rad och kolon. Börja med att dela på tecknet och beloppet på elementet enligt

$$s_{ij} = \text{sign}(s_{ij}) \cdot |s_{ij}|. \quad (9)$$

Vi kan nu skapa de nya elementen till den filtrerade matrisen enligt

$$f_{ij} := \text{sign}(s_{ij}) \cdot |s_{ij}|^q. \quad (10)$$

Det som nu är kvar att bestämma är vilket q som ger den bästa filtreringen av matrisen. Guhr och Kälber visar analytiskt att ett optimalt q existerar och bestämmer kvantitativt att $q = 1,5$ måste vara optimalt [4, s 3018ff]. Vi skall i denna uppsats bara kort

Kovariansmatrisen

övertyga oss om att detta resultat är rimligt. Att välja just 1,5 kan kännas helt orimligt vid en första anblick. Om man höjer upp varje elements belopp med ett tal större än 1 borde de bli större vilket skulle motsvara att vi förstärkte bruset. Detta är förvisso sant så länge talet man utgår från är större än 1, men i vårt fall har vi korrelation vars belopp inte kan vara större än 1. Detta löser problemet och vi dämpar alla icke-diagonala korrelationer, och därmed kovarianser, mot noll.

3.3 *Random Matrix Theory och Principalanalys*

Den sista metoden för att skatta kovariansmatrisen är Random Matrix Theory eller principalanalys. Grunden i principalanalysen är att undersöka vilka egenvärden som innehåller mycket information om matrisen och genom att ta bort alla andra filtrera matrisen. Metoden har även intresserat forskare i en helt annan vetenskap, fysiken. Då rörelse av elektronerna i stora atomer skall beräknas hamnar man i svåra ekvationer men genom att introducera principalanalys kan problemet lättare hanteras [9, s 119ff]. I detta sammanhang kommer teorin från lite annorlunda grunder och kallas därför för Random Matrix Theory (RMT).

Under de senaste åren har flera fysiker upptäckt att likheten mellan ett fysiskt system och den finansiella marknaden är stor och en ny gren kallad "Econophysics" har växt fram. Denna bakgrund förklarar varför de källor som ligger till grund för följande stycke är naturvetenskapliga artiklar.

Här följer en kortare och mindre teknisk förklaring till tekniken medan en mer utförlig beskrivning återfinns i appendix C. Låt oss börja med att diskutera egenskaperna hos ett antal "random walks", säg N stycken av längden M , där $M \gg N$. Dessa data liknar mycket det data som N stycken aktier skulle skapa under M tidsenheter. Låt oss nu skapa stickprovskorrelationsmatrisen för avkastningen och undersöka den. Alla matriser har en uppsättning egenvärden som innehåller information om matrisen. Det går analytiskt att visa att för stora M och N kommer egenvärdenas fördelning att vara väldefinierad. Det betyder att om vi finner stora egenvärden utanför denna fördelning innehåller de information om den verkliga kovariansen, medan de egenvärden som ligger i fördelningen kan ses som brus. Filtringen sker genom att återskapa en korrelationsmatris på bara de stora egenvärdena utanför fördelningen, och från korrelationsmatrisen skapa kovariansmatrisen. [9] [11] [15]

Kovariansmatrisen

4 Empirisk studie

4.1 Algoritmen

I detta avsnitt avser vi beskriva den metod som används för att utvärdera prestandan hos våra olika skattningar av kovariansmatrisen vid optimeringsproblemet vi beskrev tidigare med historiskt data. De data vi använder finns beskrivet i appendix D. Vi har dagsdata från 4/12 1996 till 26/2 2004 vilket motsvarar 1879 handelsdagar.

Med början den 3/3 1997 låter vi vår portföljförvaltare dagligen justera sin portfölj. Efter varje dag observerar vi utfallet av förvaltarens valda portfölj och skaffar oss på detta sätt ett dataunderlag att studera vidare. Algoritmen som beskriver förfarandet återfinns nedan.

I **början av varje dag** görs följande:

- Stickprovskovariansmatrisen beräknas på de senaste 60 handelsdagarna. Matrisen filtreras sedan med Power Mapping, Shrinkage och RMT.
- Grov och förfinad prognostisering av överavkastningen utförs.
- För varje skattning av kovariansmatrisen matas följande in i den kvadratiske optimeraren: Kovariansen, prognosen av överavkastningen, benchmarkvikterna, önskad avkastning samt övre begränsning av den totala portföljen.
- Som önskad avkastning på den aktiva portföljen används 300 baspunkter per år, det vill säga 300/252 baspunkter per dag.

Resultatet av optimeringen är en vektor med portföljvikterna för den aktiva portföljen, x_E . Denna vektor används för att i **slutet av varje dag** beräkna:

- Det upplevda utfallet av överavkastningen, det vill säga
$$e = x_E y^T, \tag{11}$$

där y är vektorn med avkastningen av tillgångarna under dagen.

Överavkastningen på portföljen sparas i en vektor för senare analys.

- För att få ett mått på hur mycket portföljen förändras varje period beräknas förvaltarens turnover. Vi använder Grinold och Kahns definition [7, s 297f].

Empirisk studie

Då den ovanstående processen genomgåtts för alla dagar, beräknas ex post informationskvoten IR som kvoten mellan väntevärdet av överavkastningen dividerat med stickprovsstandardavvikelsen. Vidare beräknas medel-turnover för att få ett mått på hur vår förvaltares resultat skulle påverkas av transaktionskostnader.

Då resultatet beror på alfa, vilken är stokastisk, upprepas förfarandet 50 gånger och medelstatistiken redovisas. Den använda MATLAB-koden för analysen återfinns i appendix E.

4.2 Resultat

Resultatet från analysen redovisas i tabell 1 och 2. Benchmark-portföljens medelavkastning var 0,022 % per dag.

Tabell 1. Resultatet av den empiriska analysen. Medelstatistik hos den aktiva portföljens ex post informationskvot för de olika kovariansmatriserna. Till minstavariansproblemet har önskad avkastning satts till 300 baspunkter per år. $E(e_i)$ står för medelvärdet av en dags överavkastningen och $Std(e_i)$ för standardavvikelsen av överavkastningen.

	IR	$E(e_i)$ [%]	$Std(e_i)$ [%]
Stickprovskovarians	0,37764	0,00081	0,00217
Power Mapping	0,5042	0,00105	0,00211
RMT	1,4997	0,01304	0,00868
Shrinkage	1,2096	0,00809	0,00668
Stickprovskovarians (utan övre och undre begränsning)	0,33529	0,00068	0,00205

Vi skall nu försöka tolka det data som finns i tabell 1 och diskutera vilka slutsatser vi kan dra av vår analys. Det ses direkt att alla de filtrerade kovariansmatriserna ger en högre ex post informationskvot och en högre medelavkastning än stickprovskovariansmatrisen. Vidare gäller att bara Power Mapping har en lägre standardavvikelse på överavkastningen än stickprovskovariansen. RMT och Shrinkage ger en fyra respektive sex gånger större standardavvikelse. Vi kan alltså bara säga att Power Mapping ger en bättre prestanda med avseende på alla våra mätvariabler. Om RMT och Shrinkage ger bättre resultat än det för stickprovskovariansen beror på hur investeraren värderar risk. För en riskneutral investerare kan vi säga att RMT är lite

Empirisk studie

bättre än Shrinkage medan båda är mycket bättre än stickprovskovariansen. Om investeraren är riskavert är det inte längre säkert att detta är fallet.

Tabell 2. Redovisar medel-turnover för de olika portföljerna. Medel-turnover definieras som andel av portföljen som i medel såldes varje dag. (Då portföljerna ej innehåller kontanter är detta helt ekvivalent med andel som köptes varje dag.)

	Turnover
Stickprovskovarians	8,93 %
Power Mapping	8,64 %
RMT	4,39 %
Shrinkage	5,28 %
Stickprovskovarians (utan övre och undre begränsning)	9,26 %

I tabell 2 kan vi se portföljernas medel-turnover. Med ett högt turnover kommer portföljens prestanda försämrats då transaktionskostnader beaktas. Vi ser ännu en gång att alla våra filtrerade skattningar har lägre värde än stickprovskovariansen. Vidare ser vi att RMT och Shrinkage har ett markant lägre värde.

För att få en bild av hur vår portföljförvaltares prestanda påverkas av restriktionerna återfinns stickprovskovariansen optimerad utan övre och undre gräns i tabell 1 och 2. Vi ser att då vi begränsat vår portföljförvaltare har resultatet förbättrats, detta stämmer med en undersökning av Jagannathan och Ma [10] vilka visar att begränsningar på portföljvikter ger en viss Shrinkage-effekt. För att inte uppsatsen skall bli för lång lämnas detta till andra att utreda.

Vidare undersöker vi hur portföljen ser ut vid de olika skattningalternativen. Vi redovisar därför statistik för portföljvikterna i tabell 3. Det ses tydligt att vår portföljförvaltares aktiva portfölj är mycket varierande. Detta symboliseras av lägre väntevärden än standardavvikelse. Vi skall dock hålla i minnet att vi i tabell 2 såg att medel-turnover för portföljerna var låga vilket betyder att portföljvikterna ändras långsamt.

Hur varierar då de olika portföljernas vikter? Vi ser att tecknet oftast är lika medan storleken varierar något mellan de olika portföljerna. Dock kan vissa intressanta iakttagelser göras: Japan och Brasilien är tillgångar vilka innehavs med

Empirisk studie

stickprovskovariansen medan de blankas med de andra metoderna. Vidare liknar den portfölj Power Mapping skapar den med stickprovskovariansen medan Shrinkage och RMT genererar mycket lika portföljer. En vidare analys skulle kunna utföras men lämnas här då det inte ingår i frågeställningen till denna uppsats.

Tabell 3. Den aktiva portföljens vikters statistik över de 50 repetitionerna. $E(x)$ motsvarar väntevärde och $Std(x)$ standardavvikelsen. Observera att dessa vikter skall summer till noll.

	Stickprov		Power Mapping		RMT		Shrinkage	
	E(x)	Std(x)	E(x)	Std(x)	E(x)	Std(x)	E(x)	Std(x)
Australien	-5,84E-06	2,56E-04	-5,02E-06	1,64E-04	-1,40E-05	8,80E-04	-5,53E-06	7,69E-04
Frankrike	7,72E-06	4,59E-04	1,96E-05	3,35E-04	2,57E-05	9,25E-04	2,13E-05	5,80E-04
Tyskland	4,59E-06	3,65E-04	1,13E-06	2,28E-04	2,20E-06	7,69E-04	1,05E-06	5,44E-04
Tyska korta obligationer	-1,32E-04	1,12E-02	-8,23E-05	9,98E-03	1,69E-05	3,04E-03	2,27E-05	3,34E-03
Tyska mellan oblig.	2,88E-04	1,60E-02	2,29E-04	1,52E-02	-5,92E-05	2,87E-03	-4,07E-05	4,30E-03
Tyska långa obligationer	-1,28E-04	5,95E-03	-1,48E-04	5,99E-03	-4,25E-05	2,38E-03	-3,83E-05	2,64E-03
Hong Kong	-5,52E-06	2,31E-04	-1,96E-06	1,37E-04	1,38E-05	6,28E-04	1,57E-05	6,12E-04
Indien	-2,24E-07	1,78E-04	-2,49E-06	1,04E-04	-7,42E-06	6,40E-04	-2,97E-06	5,44E-04
Indonesien	-1,64E-06	1,17E-04	3,93E-07	6,74E-05	2,35E-06	4,32E-04	2,25E-06	4,05E-04
Italien	-7,76E-06	4,48E-04	-8,37E-06	2,90E-04	-4,08E-06	9,83E-04	-1,02E-05	6,46E-04
Japan	2,78E-06	2,31E-04	-4,84E-07	1,39E-04	-1,40E-05	5,35E-04	-8,31E-06	5,32E-04
Japanska korta oblig.	-5,19E-05	1,56E-02	-1,23E-04	1,54E-02	2,07E-05	1,85E-03	2,72E-05	3,16E-03
Japanska mellan oblig.	1,84E-05	2,04E-02	1,12E-04	2,00E-02	-2,08E-05	1,93E-03	-6,48E-05	3,65E-03
Japanska långa oblig.	2,75E-05	5,36E-03	7,16E-06	5,19E-03	-7,35E-06	1,67E-03	4,64E-05	2,44E-03
Ryssland	2,45E-06	1,04E-04	-6,47E-08	5,80E-05	-3,77E-06	3,48E-04	1,79E-06	3,08E-04
Singapore	-1,16E-07	2,36E-04	-7,50E-07	1,27E-04	-1,06E-05	6,40E-04	-1,84E-05	6,14E-04
Taiwan	9,54E-07	1,66E-04	6,42E-07	8,35E-05	5,61E-06	4,81E-04	-9,79E-06	4,52E-04
UK	-5,29E-06	4,43E-04	-8,53E-06	2,91E-04	-3,30E-06	9,45E-04	-2,46E-06	7,92E-04
UK korta obligationer	4,99E-05	1,30E-02	5,96E-05	1,28E-02	1,14E-04	3,20E-03	1,03E-04	3,79E-03
UK mellan obligationer	5,67E-06	1,76E-02	8,07E-06	1,77E-02	7,79E-05	3,08E-03	1,02E-04	4,12E-03
UK långa obligationer	-3,30E-05	6,28E-03	-3,23E-05	5,90E-03	-9,65E-06	2,26E-03	-1,01E-04	3,08E-03
Brasilien	2,32E-07	1,46E-04	-9,24E-07	9,18E-05	-5,85E-06	4,78E-04	-2,22E-06	4,69E-04
Schweiz	7,21E-07	3,52E-04	6,55E-07	2,38E-04	-1,32E-05	9,81E-04	-9,76E-06	6,68E-04
USA	9,17E-06	2,76E-04	4,31E-06	1,81E-04	9,94E-06	7,57E-04	1,34E-05	7,35E-04
US korta obligationer	-9,66E-04	1,45E-02	-7,66E-04	1,51E-02	3,01E-05	1,79E-02	1,39E-04	2,09E-02
US mellan obligationer	1,24E-03	2,03E-02	1,08E-03	2,06E-02	-2,22E-04	9,41E-03	-7,08E-05	1,60E-02
US långa obligationer	-4,37E-04	7,87E-03	-4,14E-04	7,82E-03	-1,13E-05	3,69E-03	-1,08E-04	5,65E-03
Merill Lynch	1,04E-04	3,58E-03	6,12E-05	3,50E-03	1,58E-04	1,36E-02	2,97E-05	1,38E-02
Guld	-3,50E-05	1,23E-03	-1,08E-05	1,03E-03	6,25E-06	1,33E-03	-3,25E-05	1,74E-03
Värdeметaller	3,22E-05	1,25E-03	1,21E-05	1,04E-03	4,52E-06	1,29E-03	2,14E-05	1,72E-03
Industrimetaller	7,34E-06	2,72E-04	1,06E-06	1,75E-04	4,50E-07	9,91E-04	1,73E-05	9,26E-04
Oblig. tillväxtmarknader	5,16E-06	7,34E-04	2,40E-06	5,60E-04	-3,86E-05	2,84E-03	-4,80E-05	2,93E-03
Aktier tillväxtmarknader	2,04E-06	1,27E-04	2,54E-06	6,67E-05	-7,03E-07	3,92E-04	9,22E-06	3,62E-04

Vi skall slutligen kort styrka att vi erhållit tillförlitliga resultat. Låt oss studera väntevärdet av överavkastningen. Vi har i tabell 1 presenterat medelstatistik över 50

Empirisk studie

repetitioner, men hur mycket skiljer sig de olika repetitionerna? Svaret på denna fråga är mycket lite. I tabell 4 återfinns ännu en gång väntevärdet av överavkastningen men nu tillsammans med standardavvikelsen mellan de olika repetitionerna.

Tabell 4. Redovisar väntevärde och standardavvikelsen mellan de 50 olika repetitionerna i den empiriska analysen.

	E(e _t) [%]	Standardavvikelsen mellan repetitionerna [%]
Stickprovskovarians	0,00081	4.2528e-005
Power Mapping	0,00105	4.2275e-005
RMT	0,01304	1.3044e-004
Shrinkage	0,00809	8.1057e-005
Stickprovskovarians (utan övre och undre begränsning)	0,00068	6.7063e-004

Vi ser tydligt att variationen mellan de olika repetitionerna är mycket små och följaktligen är resultaten tillförlitliga.

5 Slutsatser och diskussion

I detta avsnitt skall vi diskutera modellen, vårt resultat och presentera de slutsatser vi kan dra av vår analys.

Vi valde en modell som var mycket verklighetstrogen. Vår portföljförvaltare möter begränsningar och krav likt de aktiva portföljförvaltare möter dagligen. För att inte skatta den förväntade avkastningen på historiskt data utan låta vår portföljförvaltare hantera en större mängd information har vi som prognos använt utfallet med ett adderat brus. Denna metod gör resultatet stokastiskt, vilket måste hanteras. Precis som Ledoit och Wolf [6] har vi därför upprepat analysen 50 gånger och presenterat medelstatistik. Då upprepade försök används för att utjämna stokastiskt beroende är det alltid svårt att avgöra hur många repetitioner som skall göras men författaren av denna uppsats anser att 50 gånger är tillräckligt och leder till tillförlitliga resultat.

Vidare bestod de tillgångar vår förvaltare valde bland av index. Som utvärderingsdata är det bra men för att se hur mycket de olika skattningarna skulle verka positivt eller negativt för en investerare och inte bara jämföra metoderna sinsemellan skulle exempelvis aktierna på Stockholmsbörsen vara mer intressanta att studera.

Resultatet av vår analys visar att alla våra alternativa skattningar ger bättre informationskvot än den för stickprovskovariansen. Vi ser att Power Mapping ger bättre prestanda på alla mätvariabler medan RMT och Shrinkage har högre standardavvikelse än portföljen med stickprovskovarians. De två senare metodernas lämplighet beror följaktligen på investerarens riskaversion.

Det är alltid svårt att svara på frågan om vi kommit fram till rätt resultat. Vi kan dock konstatera att Power Mapping och RMT visats vara mer effektiva än stickprovskovariansen med andra metoder [4] [11]. Vidare har Ledoit och Wolf [6] använt metoden för att utvärdera Shrinkage. De fann att Shrinkage ger bättre prestanda än stickprovskovariansen då det gäller alla mätvariabler. Vid deras undersökning har dock månadsdata använts vilket inte gör våra undersökningar fullt jämförbara. Vårt resultat följer alltså andras men då det gäller standardavvikelsen finns skillnader.

Slutsatser och diskussion

För att summera slutsatserna: Stickprovskovariansen är full av brus och bör inte användas vid portföljval. Power Mapping ger bättre prestanda med avseende på både avkastning och risk medan RMT och Shrinkage ger mycket högre avkastning på bekostnad av högre risk.

Appendix A - Statistiska och matematiska verktyg

Kovarians och korrelation

De två viktigaste statistiska verktygen för vår portföljförvaltare är metoderna för att beräkna stickprovskovarians- och stickprovskorrelationsmatrisen. Begreppen beskrivs väl i de flesta läroböcker i statistik, se exempelvis Blom [12]. Låt oss börja med att definiera de båda begreppen.

Kovariansen beskriver samvariationen mellan två variabler och definieras traditionellt enligt följande

$$\text{cov}(x_1, x_2) = E[(x_1 - \mu_1) \cdot (x_2 - \mu_2)], \quad (12)$$

där E symboliserar väntevärde och μ_i är väntevärdet $E(x_i)$. Vidare kan korrelation beräknas genom att dividera kovariansen med standardavvikelsen för de båda variablerna enligt

$$\text{corr}(x_1, x_2) = \frac{\text{cov}(x_1, x_2)}{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (13)$$

där σ_i symboliserar standardavvikelsen för variabel i .

Då vi i den empiriska delen av denna uppsats behandlar en stor mängd data kan vi vidare beskriva metoder för att lättare beräkna de sökta matriserna. Låt $G_k(t)$ vara avkastningen hos tillgång k vid tiden t . Vi börjar med att skapa nya tidsserier där

$$M_k(t) = G_k(t) - E(G_k(t)). \quad (14)$$

Vi låter nu $M_k(t)$ för alla t utgöra kolonn k i matrisen M . Genom att multiplicera M med sitt transponat och dividera med antalet datapunkter i varje serie erhålls kovariansmatrisen enligt

$$C = \frac{1}{T} M \cdot M^T. \quad (15)$$

På ett liknande sätt kan korrelationsmatrisen beräknas. Låt $G_k(t)$ vara avkastningen för tillgång k vid tidpunkten t . Vi önskar först normera tidsserien genom att subtrahera väntevärdet och dividera resultatet med standardavvikelsen enligt

Appendix A - Statistiska och matematiska verktyg

$$M_k(t) = \frac{G_k(t) - E[G_k]}{\sqrt{E[G_k^2(t)] - E[G_k(t)]^2}}, \quad (16)$$

vidare följer att korrelationen $cor_{k,l}$ mellan tillgång k och l nu kan beräknas enligt

$$cor_{k,l} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T M_k(t)M_l(t). \quad (17)$$

För att lättare kunna implementera detta beskriver vi det ännu en gång på matrisform enligt

$$COR = \frac{1}{T} MM^T. \quad (18)$$

Matriser, egenvärden och egenvektorer

Alla kvadratiske $N \times N$ matriser har egenvärden och egenvektorer. Dessa är definierade enligt:

”Låt A vara en kvadratisk matris. Om vektorn z och skalären λ uppfyller

$$Az = \lambda z, \quad z \neq 0, \quad (19)$$

så sägs z vara en egenvektor till A och λ sägs vara motsvarande egenvärde.” [13, s 34]

Om vi lägger alla egenvärden i diagonalmatrisen D och egenvektorer som kolonner i matrisen s gäller följande samband om s är inverterbar

$$D = s^{-1}As \Leftrightarrow A = sDs^{-1}, \quad (20)$$

där s^{-1} motsvarar inversen till s . [13, s 41ff]

Appendix B - Matematisk beskrivning av Shrinkage

Vi kommer i detta avsnitt att studera Shrinkage mer detaljerat och följer Ledoit och Wolf [6][8] genom hela avsnittet. Först beskrivs hur det så kallade ”Shrinkage target” eller den tekniska matrisen bestäms för att sedan studera hur vi kan finna en optimal viktning för att kombinera denna med stickprovskovariansen. Då beräkningarna och begreppen är mycket komplicerade syftar appendixet främst på att ge en bild av hur problemet kan implementeras vid användning.

Shrinkage-målet

Vi skall nu studera hur vi får fram det mål, eller Shrinkage-målet (eng. Shrinkage target), som vi skall använda i vår vidare analys. Låt $y_{i,t}$, där $1 \leq i \leq N$ och $1 \leq t \leq T$, beteckna avkastningen på tillgång i under period t . Vidare definierar vi medelvärdet av avkastningen på tillgång i som

$$E(y_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{it}. \quad (21)$$

Vi kan nu definiera elementen i (den verkliga) korrelationsmatrisen och stickprovskorrelationsmatrisen mellan tillgång i och j enligt

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}} \quad \text{och} \quad r_{ij} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}s_{jj}}}. \quad (22)$$

Medelkorelationen i dessa matriser blir då

$$E(\rho) = \frac{2}{(N-1)N} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \rho_{ij} \quad \text{och} \quad E(r) = \frac{2}{(N-1)N} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N r_{ij}. \quad (23)$$

Vi är nu redo att skapa den verkliga kovariansmatrisen Φ med konstant korrelation i ickediagonala element och gör det enligt

$$\Phi_{ii} = \sigma_{ii} \quad \text{och} \quad \Phi_{ij} = E(\rho) \sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}. \quad (24)$$

På samma sätt kan vi av stickprovsmatrisen skapa kovariansmatrisen F med konstant korrelation i ickediagonala element genom

Appendix B - Matematisk beskrivning av Shrinkage

$$F_{ii} = s_{ii} \quad \text{och} \quad F_{ij} = E(r) \sqrt{s_{ii} s_{jj}}. \quad (25)$$

Det är denna matris F vi använder som mål (Shrinkage target) vidare i analysen.

Optimal viktning vid Shrinkage

För att Shrinkage skall fungera optimalt krävs det utöver två matriser också en viktning för hur de skall sammansätta den nya. Vi skall nu visa hur den optimala vikningen δ beräknas. Ledoit *et al.* använder en metod som inte kräver inversen av kovariansmatrisen och vi väljer i denna uppsats att följa deras exempel då det innebär att metoden även klarar portföljer med fler tillgångar än datapunkter. Optimeringen går till så att ett kvadratisk mått (Frobenius-normen) på residualen mellan den verkliga kovariansmatrisen och stickprovskovariansmatrisen minimeras.

Frobenius-normen av en kvadratisk $N \times N$ matris Z med element z_{ij} , där $i, j = 1, \dots, N$ definieras som

$$\|Z\|^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N z_{ij}^2. \quad (26)$$

I vårt fall blir målfunktionen för optimeringsproblemet, det vill säga felet för Shrinkage-skattningen, enligt följande:

$$L(\delta) = \|\delta F + (1 - \delta)S - \Sigma\|^2, \quad (27)$$

där Σ symboliserar den sanna korrelationsmatrisen. Det som nu är kvar är att finna det δ som minimerar funktionen. Innan detta kan ske måste vi definiera ett begrepp kallat asymptotisk varians. Enligt Greene [14, s109] kan denna definieras enligt följande

$$\text{AsyVar}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E \left[\left(t - \lim_{n \rightarrow \infty} E[t] \right)^2 \right]. \quad (28)$$

På samma sätt definieras asymptotisk kovarians enligt

$$\text{AsyCov}(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E \left[\left(x - \lim_{n \rightarrow \infty} E[x] \right) \left(y - \lim_{n \rightarrow \infty} E[y] \right) \right]. \quad (29)$$

Vi skall nu beräkna summan av den asymptotiska variansen för elementen i stickprovskovariansmatrisen multiplicerade med roten ur T enligt

Appendix B - Matematisk beskrivning av Shrinkage

$$\pi = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \text{AsyVar}[\sqrt{T}s_{ij}] \quad (30)$$

Vidare sätter vi ρ lika med summan av de asymptotiska kovarianserna mellan elementen i Shrinkage-målet F och elementen i stickprovskovariansmatrisen S multiplicerade med roten ur T

$$\rho = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \text{AsyCov}[\sqrt{T}f_{i,j}, \sqrt{T}s_{i,j}] \quad (31)$$

Slutligen låter vi γ symbolisera det totala felet mellan den verkliga kovariansmatrisen och det verkliga Shrinkage-målet enligt

$$\gamma = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\Phi_{ij} - \sigma_{ij})^2. \quad (32)$$

Ledoit *et al.* visar i sin artikel [8] att om dessa parametrar var kända skulle vi kunna använda $\delta = \kappa/T$ som optimal vikt där κ definieras som

$$\kappa = \frac{\pi - \rho}{\gamma}. \quad (33)$$

Då dessa inte är kända måste de skattas. Först visar författarna att π kan skattas som

$$\hat{\pi} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [(y_{it} - E(y_i))(y_{jt} - E(y_j)) - s_{ij}]^2 \right). \quad (34)$$

Vidare beskriver Ledoit *et al.* hur en skattning av ρ fås i den senare artikeln [6]. Vi nöjer oss här med att ge resultatet. Låt oss börja med att definiera tre hjälpfunktioner enligt

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ii,ij} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [(y_{it} - E(y_i))^2 - s_{ii}] \cdot [(y_{it} - E(y_i))(y_{jt} - E(y_j)) - s_{ij}] \\ \mathcal{G}_{jj,ij} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [(y_{jt} - E(y_j))^2 - s_{jj}] \cdot [(y_{it} - E(y_i))(y_{jt} - E(y_j)) - s_{ij}] \\ \hat{\pi}_{ij} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [(y_{it} - E(y_i))(y_{jt} - E(y_j)) - s_{ij}]^2, \end{aligned} \quad (35)$$

vidare får vi skattningen enligt

Appendix B - Matematisk beskrivning av Shrinkage

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^N \hat{\pi}_{ii} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{E(r)}{2} \left(\sqrt{\frac{s_{jj}}{s_{ii}}} g_{ii,ij} + \sqrt{\frac{s_{ii}}{s_{jj}}} g_{jj,ij} \right). \quad (36)$$

Slutligen blir skattningen av γ

$$\hat{\gamma} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (f_{ij} - s_{ij})^2. \quad (37)$$

Vi kan nu bestämma skattningen av κ enligt

$$\hat{\kappa} = \frac{\hat{\pi} - \hat{\rho}}{\hat{\gamma}}. \quad (38)$$

Vi sätter slutligen, efter rekommendationer av Ledoit *et al.*, den optimala Shrinkagevikten till

$$\hat{\delta}^* = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{\hat{\kappa}}{T}, 1 \right\} \right\}. \quad (39)$$

Detta för att säkerställa att $0 \leq \kappa \leq 1$ gäller.

Appendix C - RMT och kovariansmatrisen

Vi skall i detta appendix närmare studera hur Random Matrix Theory kan användas som ett filter på kovariansmatrisen för finansiella tillgångar. Modellen bygger på att de egenskaper stickprovskovariansmatrisens egenvärden uppvisar är ekvivalenta med egenskaperna till de egenvärden som återfinns vid lösning av Schrödingerekvationen på matrisform [9, s 119ff]. Modellen förklaras utan att några kunskaper i fysik krävs.

Låt oss börja med att studera de egenskaper en helt slumpmässig korrelationsmatris uppvisar. Vi börjar med att skapa en $N \times L$ -matris A bestående av N tidsserier med L slumpmässiga element med väntevärde noll och standardavvikelse ett. För enkelhetens skull låter vi

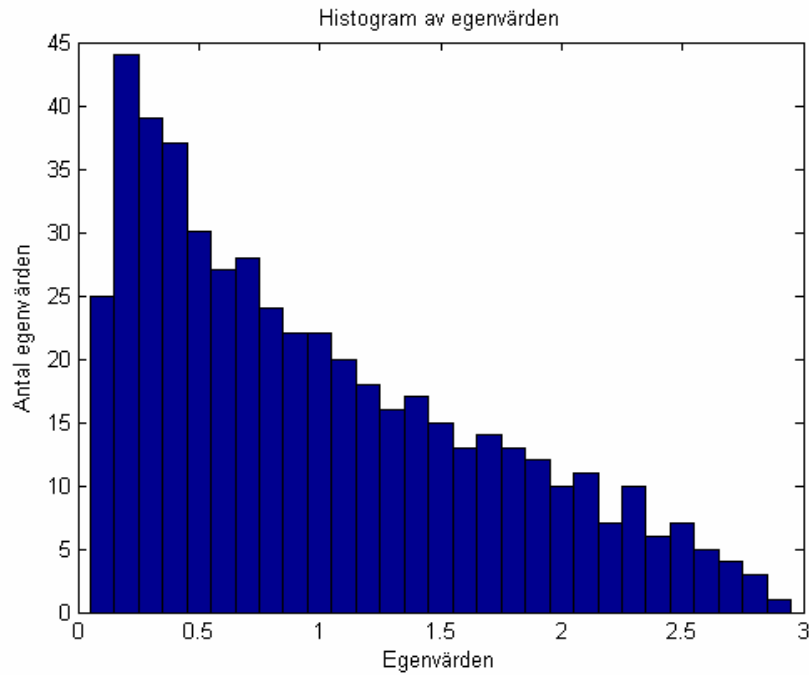
$$A_{ij} \in N(0,1). \quad (40)$$

Då tidsserien redan är normerad är det mycket lätt att beräkna korrelationsmatrisen enligt

$$R = \frac{1}{L} AA^T. \quad (41)$$

Som kuriosas kan nämnas att genom att konstruera R på detta vis ingår den i den typ av matriser som inom statistiken kallas Wisharts-matriser. Vi kan nu beräkna egenvärdena till matrisen och studera fördelningen rent grafiskt, se figur 1.

Appendix C - RMT och kovariansmatrisen



Figur 1. Figuren beskriver ett histogram av egenvärdena till R skapad från en $N \times L$ matris A med enhetsnormalfördelade element. N var satt till 500 och L till 1000.

Då N och L blir stora på ett sådant sätt att deras kvot är känd är fördelningen känd [11]. Speciellt gäller att då $N \rightarrow \infty$ och $L \rightarrow \infty$ så att $Q = N/L$ är ett fixt tal är fördelningen

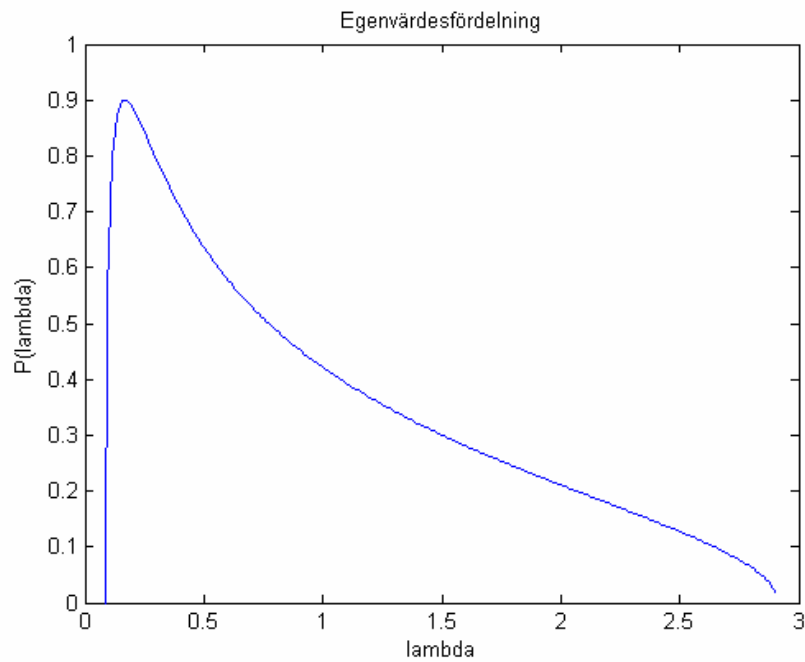
$$P(\lambda) = \frac{Q}{2\pi} \frac{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}}{\lambda}, \quad (42)$$

där λ symboliserar egenvärden och är bunden i intervallet $\lambda_- \leq \lambda_i \leq \lambda_+$. Begränsningarna för de egenvärden som kan erhållas av R ges av

$$\lambda_{\pm} = 1 + \frac{1}{Q} \pm 2\sqrt{\frac{1}{Q}}. \quad (43)$$

I figur 2 återfinns fördelningen då Q är lika med 1/2.

Appendix C - RMT och kovariansmatrisen

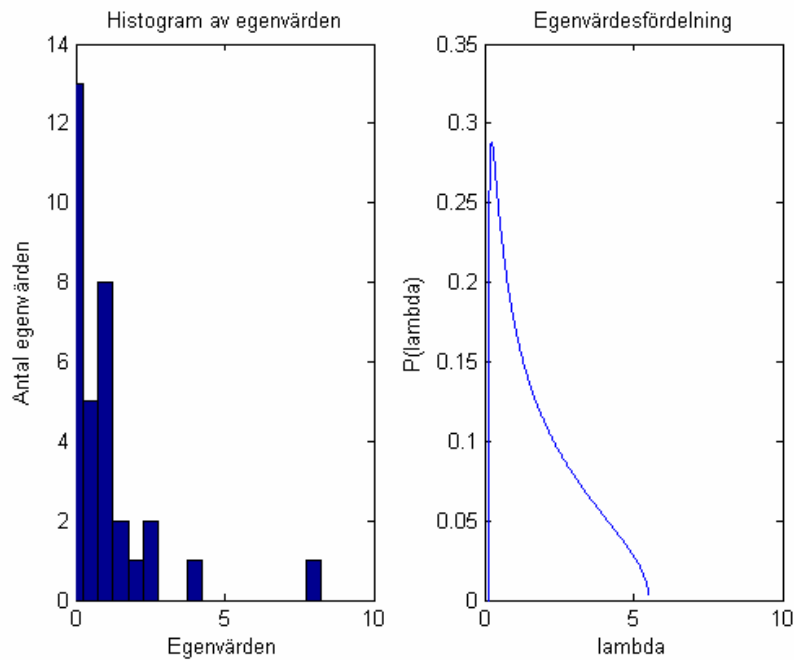


Figur 2. Sannolikhetsfördelningen av egenvärdena för den oändliga kovariansmatrisen med $Q=1/2$.

Observera likheten mellan histogrammet och den analytiska fördelningen. Genom att approximativt säga att fördelningen gäller för stora N och L kan vi med hjälp av detta skapa ett filter.

För att vidare förklara metoden undersöker vi fördelningen av en verklig stickprovskovariansmatris. Vi använder oss av det data som vi använder i vår empiriska studie och precis som i denna använder vi 60 dagar för att beräkna stickprovskovariansen. Vi plottar ännu en gång ett histogram och jämför den fördelningen för den oändliga slumpkovariansmatrisen vars $Q=33/60$, se figur 3.

Appendix C - RMT och kovariansmatrisen



Figur 3. Jämförelse mellan histogram av verkliga data och sannolikhetsfördelningen då $Q=33/60$.

Vi ser tydligt ansamlingen av egenvärden som återfinns mellan noll och fem, dessa stämmer bra med den teoretiska fördelningen. Det ligger ett egenvärde mellan fem och 10 som inte skulle finnas enligt teorin. Det är också detta egenvärde som är intressant. Då histogrammet till en ren slumpmatris skulle likna den teoretiska fördelningen kan vi nu säga att de egenvärden som utgör denna ansamling borde symbolisera bruset i matrisen. Det ensamma stora egenvärdet skulle om det var slumpdata inte existera. Detta kan vi tolka som att det är i detta egenvärde all värdefull information ligger. Genom att nu återskapa kovariansmatrisen med bara detta egenvärde har vi filtrerat vårt data. Rent tekniskt görs detta genom att sätta alla andra egenvärden till noll och återskapa kovariansmatrisen enligt

$$C_{new} = S \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_s & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} S^{-1}, \quad (44)$$

där λ_s är det största egenvärdet och s matrisen med egenvektorer. Det är viktigt att behålla ordningen på egenvärdena och egenvektorerna. Slutligen måste elementen i

Appendix C - RMT och kovariansmatrisen

diagonalen till C_{new} sätts lika med ett så att varje tillgång har korrelationen ett med sig själv.

I denna uppsats väljer vi, för att inte förlora viktig information, att inkludera de två största egenvärdena vid filtrering. Ett alternativt sätt kunde vara att vid varje filtrering beräkna λ_+ och välja alla egenvärden som är större.

Appendix D – Data

Appendix D – Data

I detta avsnitt beskrivs det data som används under den empiriska studien. Allt data representerar dagspriset på de olika tillgångarna från 4/12 1996 till 26/2 2004. De tillgångar som används är olika länders generalindex, olika obligationsindex, samt tre råvaruindex. Vidare justeras allt data till USD vilket implicerar att även växelkursdata används. De data som använts samt viss statistik återfinns i tabell 5.

Tabell 5. I tabellen presenteras de tillgångar vars data som använts i den empiriska undersökningen. Majoriteten av posterna är hämtad från Morgan Stanley's databas. Väntevärde och standardavvikelse motsvarar hela datamängden, det vill säga 1879 punkter.

		Väntevärde (%)	Standardavvikelse (%)
Länders generalindex	Australien	0,019333	1,0815
	Frankrike	0,028751	1,833
	Tyskland	0,016855	2,0218
	Hong Kong	-0,010849	1,8838
	Indien	0,057291	1,6994
	Indonesien	0,056845	3,1137
	Italien	0,034077	1,7499
	Japan	-0,021893	1,5205
	Ryssland	0,14109	3,9909
	Singapore	0,0057247	1,5225
	Taiwan	0,0046941	1,8088
	Storbritannien	0,00040282	1,4327
	Brasilien	0,11027	2,3297
	Schweiz	0,023327	1,6994
	USA	0,022208	1,263
	Index över tillväxtländer	0,085972	2,4237
Obligationer	Tyska statsobligationsindex (1-5 år)	0,018629	0,61424
	Tyska statsobligationsindex (5-7 år)	0,023662	0,61995
	Tyska statsobligationsindex (7- år)	0,026247	0,66551
	Japanska statsobligationsindex (1-5 år)	0,0013282	0,74032
	Japanska statsobligationsindex (5-7 år)	0,0057036	0,75225
	Japanska statsobligationsindex (7- år)	0,012535	0,81045
	UK statsobligationsindex (1-5 år)	0,016519	0,49607
	UK statsobligationsindex (5-7 år)	0,017935	0,5129
	UK statsobligationsindex (7- år)	0,021137	0,56598
	US statsobligationsindex (1-5 år)	0,021605	0,098533
	US statsobligationsindex (5-7 år)	0,026116	0,219
	US statsobligationsindex (7- år)	0,028555	0,40081
	Merill Lynch high yield	0,022231	0,24292
Utvecklingsländers statsobligationer	0,038228	0,81333	
Råvaror	Guldindex	0,0033508	0,88392
	Värdeindex	0,011649	0,89507
	Industimetallindex	0,012213	0,91539

Appendix D – Data

Vidare kan det vara av intresse att studera hur hela datamängdens stickprovskorellation ser ut. Den totala stickprovskorellationsmatrisen återfinns därför i tabell 6.

Tabell 6. Korellationsmatris över hela datamängden. X-led fortsätter på nästa sida.

Tillgångarna har samma ordning i både X- och Y-led.

Australien	1,00	0,29	0,27	0,33	0,32	0,30	0,28	0,14	0,11	0,28	0,37	0,24	0,24	0,21	0,14
Frankrike	0,29	1,00	0,86	0,56	0,51	0,45	0,30	0,13	0,06	0,86	0,31	0,23	0,22	0,19	0,31
Tyskland	0,27	0,86	1,00	0,52	0,48	0,42	0,30	0,11	0,06	0,80	0,29	0,21	0,20	0,17	0,31
Tyska korta obligationer	0,33	0,56	0,52	1,00	0,98	0,91	0,14	0,06	0,04	0,53	0,21	0,32	0,31	0,29	0,15
Tyska mellan oblig.	0,32	0,51	0,48	0,98	1,00	0,97	0,13	0,04	0,03	0,49	0,19	0,32	0,31	0,29	0,14
Tyska långa obligationer	0,30	0,45	0,42	0,91	0,97	1,00	0,10	0,03	0,02	0,44	0,17	0,30	0,29	0,27	0,12
Hong Kong	0,28	0,30	0,30	0,14	0,13	0,10	1,00	0,20	0,10	0,27	0,32	-0,02	-0,03	-0,04	0,29
Indien	0,14	0,13	0,11	0,06	0,04	0,03	0,20	1,00	0,09	0,13	0,13	0,00	0,00	-0,01	0,13
Indonesien	0,11	0,06	0,06	0,04	0,03	0,02	0,10	0,09	1,00	0,05	0,15	0,09	0,09	0,08	0,08
Italien	0,28	0,86	0,80	0,53	0,49	0,44	0,27	0,13	0,05	1,00	0,30	0,22	0,21	0,19	0,31
Japan	0,37	0,31	0,29	0,21	0,19	0,17	0,32	0,13	0,15	0,30	1,00	0,45	0,44	0,38	0,18
Japanska korta oblig.	0,24	0,23	0,21	0,32	0,32	0,30	-0,02	0,00	0,09	0,22	0,45	1,00	0,99	0,94	0,05
Japanska mellan oblig.	0,24	0,22	0,20	0,31	0,31	0,29	-0,03	0,00	0,09	0,21	0,44	0,99	1,00	0,97	0,05
Japanska långa oblig.	0,21	0,19	0,17	0,29	0,29	0,27	-0,04	-0,01	0,08	0,19	0,38	0,94	0,97	1,00	0,03
Ryssland	0,14	0,31	0,31	0,15	0,14	0,12	0,29	0,13	0,08	0,31	0,18	0,05	0,05	0,03	1,00
Singapore	0,31	0,31	0,29	0,19	0,17	0,15	0,55	0,19	0,20	0,29	0,36	0,12	0,11	0,08	0,19
Taiwan	0,16	0,15	0,15	0,09	0,08	0,06	0,25	0,11	0,08	0,13	0,20	0,00	0,00	-0,01	0,10
UK	0,26	0,79	0,73	0,38	0,34	0,28	0,31	0,11	0,06	0,73	0,30	0,18	0,17	0,15	0,28
UK korta obligationer	0,25	0,38	0,34	0,58	0,57	0,53	0,10	0,06	0,03	0,36	0,16	0,22	0,22	0,20	0,11
UK mellan obligationer	0,24	0,33	0,29	0,56	0,57	0,55	0,08	0,05	0,02	0,32	0,14	0,21	0,21	0,19	0,09
UK långa obligationer	0,22	0,25	0,22	0,50	0,55	0,59	0,06	0,04	0,00	0,26	0,12	0,20	0,19	0,18	0,06
Brasilien	0,05	0,17	0,18	0,06	0,05	0,05	0,10	0,05	-0,02	0,17	0,09	0,01	0,01	0,00	0,12
Schweiz	0,29	0,84	0,81	0,57	0,52	0,46	0,29	0,12	0,09	0,80	0,33	0,24	0,23	0,20	0,31
USA	0,05	0,43	0,47	0,13	0,12	0,11	0,13	0,04	-0,02	0,39	0,12	0,04	0,03	0,02	0,15
US korta obligationer	-0,03	-0,19	-0,24	-0,03	0,05	0,12	-0,06	-0,06	-0,01	-0,16	-0,03	0,02	0,02	0,03	-0,05
US mellan obligationer	-0,03	-0,19	-0,25	-0,03	0,06	0,15	-0,08	-0,06	-0,02	-0,17	-0,03	0,03	0,03	0,04	-0,04
US långa obligationer	-0,02	-0,17	-0,22	-0,01	0,09	0,19	-0,08	-0,05	-0,03	-0,14	-0,02	0,05	0,05	0,07	-0,04
Merill Lynch	0,08	0,20	0,18	0,07	0,08	0,10	0,13	0,09	0,03	0,20	0,18	0,10	0,10	0,09	0,13
Guld	-0,12	-0,16	-0,19	-0,20	-0,18	-0,16	0,03	-0,01	0,00	-0,16	0,00	-0,13	-0,13	-0,12	0,00
Värdemetaller	-0,11	-0,17	-0,17	-0,21	-0,19	-0,17	0,01	-0,02	0,00	-0,16	-0,02	-0,17	-0,16	-0,16	0,00
Industrimetaller	0,01	0,14	0,14	-0,04	-0,07	-0,09	0,12	0,06	0,02	0,11	0,05	-0,05	-0,05	-0,05	0,08
Oblig. tillväxtmarknader	0,06	0,20	0,20	0,05	0,06	0,07	0,12	0,05	-0,06	0,24	0,10	0,02	0,02	0,01	0,27
Aktier tillväxtmarknader	0,07	0,19	0,18	0,07	0,05	0,03	0,15	0,08	0,04	0,20	0,08	0,04	0,04	0,04	0,15

Appendix D – Data

Tabell 6. fortsättning.

0,31	0,16	0,26	0,25	0,24	0,22	0,05	0,29	0,05	-0,03	-0,03	-0,02	0,08	-0,12	-0,11	0,01	0,06	0,07
0,31	0,15	0,79	0,38	0,33	0,25	0,17	0,84	0,43	-0,19	-0,19	-0,17	0,20	-0,16	-0,17	0,14	0,20	0,19
0,29	0,15	0,73	0,34	0,29	0,22	0,18	0,81	0,47	-0,24	-0,25	-0,22	0,18	-0,19	-0,17	0,14	0,20	0,18
0,19	0,09	0,38	0,58	0,56	0,50	0,06	0,57	0,13	-0,03	-0,03	-0,01	0,07	-0,20	-0,21	-0,04	0,05	0,07
0,17	0,08	0,34	0,57	0,57	0,55	0,05	0,52	0,12	0,05	0,06	0,09	0,08	-0,18	-0,19	-0,07	0,06	0,05
0,15	0,06	0,28	0,53	0,55	0,59	0,05	0,46	0,11	0,12	0,15	0,19	0,10	-0,16	-0,17	-0,09	0,07	0,03
0,55	0,25	0,31	0,10	0,08	0,06	0,10	0,29	0,13	-0,06	-0,08	-0,08	0,13	0,03	0,01	0,12	0,12	0,15
0,19	0,11	0,11	0,06	0,05	0,04	0,05	0,12	0,04	-0,06	-0,06	-0,05	0,09	-0,01	-0,02	0,06	0,05	0,08
0,20	0,08	0,06	0,03	0,02	0,00	-0,02	0,09	-0,02	-0,01	-0,02	-0,03	0,03	0,00	0,00	0,02	-0,06	0,04
0,29	0,13	0,73	0,36	0,32	0,26	0,17	0,80	0,39	-0,16	-0,17	-0,14	0,20	-0,16	-0,16	0,11	0,24	0,20
0,36	0,20	0,30	0,16	0,14	0,12	0,09	0,33	0,12	-0,03	-0,03	-0,02	0,18	0,00	-0,02	0,05	0,10	0,08
0,12	0,00	0,18	0,22	0,21	0,20	0,01	0,24	0,04	0,02	0,03	0,05	0,10	-0,13	-0,17	-0,05	0,02	0,04
0,11	0,00	0,17	0,22	0,21	0,19	0,01	0,23	0,03	0,02	0,03	0,05	0,10	-0,13	-0,16	-0,05	0,02	0,04
0,08	-0,01	0,15	0,20	0,19	0,18	0,00	0,20	0,02	0,03	0,04	0,07	0,09	-0,12	-0,16	-0,05	0,01	0,04
0,19	0,10	0,28	0,11	0,09	0,06	0,12	0,31	0,15	-0,05	-0,04	-0,04	0,13	0,00	0,00	0,08	0,27	0,15
1,00	0,25	0,30	0,11	0,09	0,06	0,07	0,31	0,13	-0,08	-0,09	-0,10	0,13	-0,03	-0,02	0,09	0,09	0,12
0,25	1,00	0,13	0,07	0,05	0,03	0,05	0,16	0,09	-0,11	-0,11	-0,10	0,13	-0,04	-0,03	0,05	0,04	0,03
0,30	0,13	1,00	0,51	0,47	0,38	0,19	0,74	0,39	-0,17	-0,18	-0,15	0,20	-0,13	-0,13	0,13	0,20	0,19
0,11	0,07	0,51	1,00	0,98	0,89	0,04	0,36	0,09	0,00	0,00	0,02	0,08	-0,15	-0,15	-0,03	0,05	0,06
0,09	0,05	0,47	0,98	1,00	0,95	0,03	0,31	0,07	0,07	0,08	0,10	0,09	-0,13	-0,14	-0,05	0,05	0,05
0,06	0,03	0,38	0,89	0,95	1,00	0,03	0,24	0,05	0,18	0,20	0,23	0,10	-0,10	-0,11	-0,07	0,07	0,03
0,07	0,05	0,19	0,04	0,03	0,03	1,00	0,18	0,30	-0,11	-0,09	-0,08	0,04	0,01	0,00	0,04	0,39	0,20
0,31	0,16	0,74	0,36	0,31	0,24	0,18	1,00	0,38	-0,19	-0,19	-0,17	0,21	-0,17	-0,16	0,09	0,22	0,18
0,13	0,09	0,39	0,09	0,07	0,05	0,30	0,38	1,00	-0,19	-0,18	-0,15	0,12	-0,11	-0,10	0,12	0,27	0,14
-0,08	-0,11	-0,17	0,00	0,07	0,18	-0,11	-0,19	-0,19	1,00	0,96	0,89	0,06	0,11	0,06	-0,13	-0,03	-0,05
-0,09	-0,11	-0,18	0,00	0,08	0,20	-0,09	-0,19	-0,18	0,96	1,00	0,97	0,08	0,11	0,06	-0,13	0,00	-0,04
-0,10	-0,10	-0,15	0,02	0,10	0,23	-0,08	-0,17	-0,15	0,89	0,97	1,00	0,11	0,10	0,05	-0,13	0,02	-0,03
0,13	0,13	0,20	0,08	0,09	0,10	0,04	0,21	0,12	0,06	0,08	0,11	1,00	0,05	0,02	0,05	0,18	0,09
-0,03	-0,04	-0,13	-0,15	-0,13	-0,10	0,01	-0,17	-0,11	0,11	0,11	0,10	0,05	1,00	0,85	0,12	0,04	-0,03
-0,02	-0,03	-0,13	-0,15	-0,14	-0,11	0,00	-0,16	-0,10	0,06	0,06	0,05	0,02	0,85	1,00	0,14	0,02	-0,01
0,09	0,05	0,13	-0,03	-0,05	-0,07	0,04	0,09	0,12	-0,13	-0,13	-0,13	0,05	0,12	0,14	1,00	0,05	0,05
0,09	0,04	0,20	0,05	0,05	0,07	0,39	0,22	0,27	-0,03	0,00	0,02	0,18	0,04	0,02	0,05	1,00	0,26
0,12	0,03	0,19	0,06	0,05	0,03	0,20	0,18	0,14	-0,05	-0,04	-0,03	0,09	-0,03	-0,01	0,05	0,26	1,00

Appendix E – MATLAB-kod

```

% *****
% Skrivet av Jakob Birgersson våren 2004
% som en del av en C-upsats i nationalekonomi.
% Utvärdering av skattningar av kovariansmatrisen genom
% att simulera en aktiv portföljförvaltare
% *****
clear
% -----
% Laddar data från filen data.mat => variabeln data
% innehåller alla avkastningar. Bestämmer också
% matrisens dimensioner.
load data.mat;
[m,n] = size(data); % n är antalet tillgångar!
% -----
% Deklarerar de variabler vilka bär det slutgiltiga resultatet
iR=0; meanEtot=0; stdEtot=0; meanBench=0; meanTurnoverTest=0;
meanTurnover = 0; meanTurnoverPower = 0; meanTurnoverRMT = 0;
meanTurnoverShrink = 0;
% -----
% Upprepar analysen 50 ggr för att hantera det stokastiska alfa
for a=1:50
    % -----
    % Deklarerar variabler som skall komma ut ur while-satsen...
    eTest=[ ]; e = [ ]; ePower = [ ]; eRMT = [ ]; eShrink = [ ];
    bench=[ ]; xTest=zeros(1,n); x=zeros(1,n); xPower=zeros(1,n);
    xRMT=zeros(1,n); xShrink=zeros(1,n); turnoverTest=[ ];
    turnover = [ ]; turnoverPower = [ ]; turnoverRMT = [ ];
    turnoverShrink = [ ];
    % -----
    % Input till optimeraren:
    % Benchmark vikter
    wB = ones(1,n)*(1./n);
    % Önskad överavkastning
    Rp = 300/(100*252)*1/100; %Enhetslös!
    % Övre viktgräns
    c = ones(1,n)*0.1;
    % -----
    % Beräknar alfa skattningar
    IR = 1.5;
    tradingDays=252;
    alfa = alfaForecastDay(data, IR, tradingDays, wB);
    % -----
    % Huvudberäkningar som görs varje dag: Stoppas in data i optimeraren
    % och beräknar optimal portfölj. Sparar sedan resultatet av investeringen
    k=61; %Första dagen! => 60 dagar att skatta på
    while k<m
        lastMonths = data((k-60 : k-1), :);
        today=data(k,:);
        % -----
        % Beräknar väntevärde, varians, standardavvikelse
        % kovarians och korrelation för senaste månaderna.
        meanLastMonths = mean(lastMonths);
        varLastMonths = var(lastMonths);
        stdLastMonths = std(lastMonths);
        covLastMonths = cov(lastMonths);
    end
end

```

Appendix E – MATLAB-kod

```

corrLastMonths = corrcoef(lastMonths);
% -----
% Skapar filtrerade kovariansmatriser (med Power mapping,
% RMT och Shrinkage...
corrPowerLastMonths = filterPower(corrLastMonths);
covPowerLastMonths = makeCovFromCor(corrPowerLastMonths, stdLastMonths);
corrRMTLastMonths = filterRMT(corrLastMonths);
covRMTLastMonths = makeCovFromCor(corrRMTLastMonths, stdLastMonths);
covShrinkLastMonths = filterShrink(lastMonths);
% -----
% Prognostisering av avkastningen av idag.
forecastReturn = alfa(k,:);
% -----
% Sparar gårdagens portföljvikter
xTestOld=xTest;
xOld=x;
xPowerOld=xPower;
xRMTOld=xRMT;
xShrinkOld=xShrink;
% -----
% Kvadratisk optimering => portföljvikter av aktiva portföljen
% För att optimera exikveringstiden rekommenderas att editera
% QUADPROG så att disp-satsen i slutet inte gör någon utskrift
xTest = quadprog(covLastMonths, zeros(n,1), -forecastReturn, -Rp,...
ones(1,n), 0)';
x = quadprog(covLastMonths, zeros(n,1), -forecastReturn, -Rp, ...
ones(1,n), 0, -wB', (c'-wB'))';
xPower = quadprog(covPowerLastMonths, zeros(n,1), ...
-forecastReturn, -Rp, ones(1,n), 0, -wB', (c'-wB'))';
xRMT = quadprog(covRMTLastMonths, zeros(n,1), -forecastReturn, ...
-Rp, ones(1,n), 0, -wB', (c'-wB'))';
xShrink = quadprog(covShrinkLastMonths, zeros(n,1), ...
-forecastReturn, -Rp, ones(1,n), 0, -wB', (c'-wB'))';
% -----
% Beräknar Turnover
if k>61
    changeXtest=xTest-xTestOld;
    changeXpower=xPower-xPowerOld;
    changeXrmt=xRMT-xRMTOld;
    changeXshrink=xShrink-xShrinkOld;
    changeX=x-xOld;
    purchaseXtest=0;
    purchaseXpower=0;
    purchaseXrmt=0;
    purchaseXshrink=0;
    purchaseX=0;
    for i=1:length(changeX)
        if changeX(i)>0
            purchaseX=changeX(i)+purchaseX;
        end
        if changeXtest(i)>0
            purchaseXtest=changeXtest(i)+purchaseXtest;
        end
        if changeXpower(i)>0
            purchaseXpower=changeXpower(i)+purchaseXpower;
        end
        if changeXrmt(i)>0
            purchaseXrmt=changeXrmt(i)+purchaseXrmt;
        end
        if changeXshrink(i)>0

```

Appendix E – MATLAB-kod

```

        purchaseXshrink=changeXshrink(i)+purchaseXshrink;
    end
    end
    turnoverTest=[turnoverTest purchaseXtest];
    turnover = [turnover purchaseX];
    turnoverPower = [turnoverPower purchaseXpower];
    turnoverRMT = [turnoverRMT purchaseXrmt];
    turnoverShrink = [turnoverShrink purchaseXshrink];
end
% -----
% Beräkning av överavkastningen efter dagen
eTest=[eTest xTest*today'];
e=[e x*today'];
ePower = [ePower xPower*today'];
eRMT = [eRMT xRMT*today'];
eShrink = [eShrink xShrink*today'];
% -----
%Benchmarken
bench=[bench wB*today'];
k=k+1;
end
% -----
% Summerar resultatet i en matris:
etot=[eTest; e; ePower; eRMT; eShrink];
% Beräknar väntevärdet, standardavvikelsen och den
% "annualized ex post information ratio" på varje rad.
meanEtot = mean(etot')+meanEtot;
stdEtot = std(etot')+stdEtot;
iR=meanEtot./stdEtot+iR;
% -----
% Beräknar medel Turnover
meanTurnoverTest=mean(turnoverTest)+meanTurnoverTest;
meanTurnover = mean(turnover)+meanTurnover;
meanTurnoverPower = mean(turnoverPower)+meanTurnoverPower;
meanTurnoverRMT = mean(turnoverRMT)+meanTurnoverRMT;
meanTurnoverShrink = mean(turnoverShrink)+meanTurnoverShrink;
% -----
% Beräknar medelavkastningen på benchmarkportföljen
meanBench=mean(bench)+meanBench;
% -----
end
% Beräknar medelstatistik
iR=iR/50;
stdEtot=stdEtot/50;
meanEtot=meanEtot/50;
meanBench=meanBench/50;
meanTurnoverTest=meanTurnoverTest/50;
meanTurnover = meanTurnover/50;
meanTurnoverPower = meanTurnoverPower/50;
meanTurnoverRMT = meanTurnoverRMT/50;
meanTurnoverShrink = meanTurnoverShrink/50;
% *****
function alfa = alfaForecastDay(data, IR, tradingDays, wB)
% Beräknar prognostiserad avkastning för varje tillgång och dag
% -----
% Tar reda på antalet tillgångar => n=antalet tillgångar
[m,n] = size(data);
% -----
% Skapar matriser för utdata
alfatemp=zeros(m,n);

```

Appendix E – MATLAB-kod

```

alfa=zeros(m,n);
% -----
% Beräknar överavkastning och en första "raw forecaste".
for i=1:m
    excessReturn(i,:) = data(i,:) - data(i, :)*wB';
    sigma = 0.0122;
    u = sigma*randn(1,n);
    raw(i,:) = excessReturn(i,:) + u;
end
% Tar fram IC
IC = IR./sqrt(n);
% Beräknar standard avvikelsen på excess returns serierna
excessStd = std(excessReturn);
% Beräknar standard avvikelse och väntevärde på raw forcast serierna
rawStreck = mean(raw);
rawStd = std(raw);
% Beräknar score och sedan alfa för varje dag
[m,n]=size(raw);
for i=1:m
    score(i,:) = (raw(i,:) - rawStreck)./(rawStd);
    alfatemp(i,:) = excessStd.*IC.*score(i,:);
end
alfa=alfa+alfatemp;
return
% *****
function corrPower = filterPower(C)
% Filtrerar korrelationsmatrisen enligt power mapping
signC = sign(C);
valueC = abs(C);
valueC = valueC.^(3/2);
corrPower=signC.*valueC;
return
% *****
function corrRMT = filterRMT(C)
% Filtrerar korrelationsmatrisen med hjälp av RMT eller
% principal analys, beroende på hur man tycker.
[V,D] = eig(C);
max = findMax(D);
newD = zeros(size(D));
newD(max(1), max(2)) = D(max(1), max(2));
corrRMT = V*newD*inv(V);
[m,n] = size(corrRMT);
for i = 1:m
    corrRMT(i,i) = 1;
end
return
% *****
function max = findMax(D)
% Hjälpfunktion till "filterRMT"
[m,n] = size(D);
row = 0;
col = 0;
help = 0;
for i = 1:m
    for j = 1:n
        if D(i,j)>help
            help = D(i,j);
            row = j;
            col = i;
        end
    end
end

```

Appendix E – MATLAB-kod

```

        end
    end
    max=[col,row];
    return
    % *****
function cov=makeCovFromCor(cor, std);
% Skapar kovariansmatrisen med hjälp av
% korrelationsmatrisen och standardavvikelsen.
[m,n]=size(cor);
cov=[ ];
for i=1:m
    for j=1:n
        cov(i,j)=cor(i,j)*std(i)*std(j);
    end
end
return
% *****
function covNew = filterShrink(data)
% Beräknar stickprovskovariansen
sampleCov = cov(data);
% Shrinkage traget
varData=var(sample);
stdData=sqrt(var);
rho=corrcoef(data);
sumNoDiag=0;
for i=1:n
    for j=1:n
        if i~=j
            sumNoDiag=sumNoDiag+rho;
        end
    end
end
meanRho=2*sumNoDiag/((n-1)*n);
for i=1:n
    for j=1:n
        if i==j
            target(i,j)=1*varData(i);
        else
            target(i,j)=meanRho*stdData(i)*stdData(j);
        end
    end
end
end
% Beräknar optimal vikt. (Neden till stor del hämtat från www.Ledoit.net)
L=1/n*norm(sampleCov-target,'fro')^2;
y=data.^2;
r2=1/n/m^2*sum(sum(y'*y))-1/n/m*sum(sum(sampleCov.^2));
phidiag=1/n/m^2*(sum(sum(y.^2))-1/n/m*sum(diag(sampleCov).^2));
v=((data.^3)*data)/(m^2)-(varData(:,ones(1,n)).*sampleCov)/m;
v(logical(eye(n)))=zeros(n,1);
phioff=sum(sum(v.*(sqrtvar(:,ones(n,1))./sqrtvar(:,ones(n,1)))))/n;
phi=phidiag+rho*phioff;
% Beräknar skattningen
delta=max(0,min(1,(r2-phi)/L));
covNew=delta*target+(1-delta)*sample;
return

```

Referenser

Referenser

- [1] Markowitz, H., Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, s 77-91, March 1952.
- [2] Markowitz, H., *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*, Chapman & Hall, London, 1959.
- [3] Laloux, L., Cizeau, P., Bouchaud J., Potters, M., Noise Dressing of Financial Correlation Matrices, *Physical Review Letters*, Vol. 83, No. 7, s 1467 – 1470, Aug 1999.
- [4] Guhr, T., Kälber, B., A new method to estimate the noise in financial correlation matrices, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, Vol. 36, s 3009-3032, March 2003.
- [5] Rosenow, B., Plerou, V., Gopikrishnan, P., Stanley, H., Portfolio optimization and the random magnet problem, *Europhysics letters*, Vol. 59, No. 4, s 500 – 506, Aug 2002.
- [6] Ledoit, O., Wolf, M., Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix, November 2003, kommer att publiceras i *Journal of Portfolio Management*, Vol. 31, No. 1, hösten 2004 (<http://www.ledoit.net/honey.pdf>).
- [7] Grinold, R., Kahn, R., *Active Portfolio Management*, McGraw-Hill, New-York, 1995.
- [8] Ledoit, O., Wolf, M., Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection, *Journal of Empirical Finance*, Vol. 10, Issue 5, s 603-621, Dec 2003.
- [9] Guhr, T, *Econophysics*, Matematisk Fysik, LTH, Lunds Universitet, 2001.
- [10] Jagannathan, R., Ma, T., Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps, *Journal of Finance*, Vol. 54, No. 4, s 1651-1684, 2003.
- [11] Plerou, V., Gopikrishnan, P., Rosenow, B., Nunes Amaral, L., Guhr, T., Stanley, H., *A Random Matrix Approach to Cross-Correlations in Financial Data*, *Physical Review E*, Vol 65, 066126, June 2002.
- [12] Blom, G., *Sannolikhetssteori och statistikteori med tillämpningar*, Studentlitteratur, Lund, 1989.
- [13] Spanne, S., *Lineära System*, (Matematiska Institutionen Lunds Tekniska Högskola) KFS AB, Lund, 1997.
- [14] Greene, W., *Econometric Analysis*. 3ed edition, Macmillian Publishing Company, New York, 1997.
- [15] Utsugi, A., Ino, K., Oshikawa, M., *Random Matrix Theory Analysis of Cross Correlations in the Financial Markets*, (ej publicerad) <http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0312643.pdf>, (16/1 2004).