Uppsats på B-nivå (5 p)

En biologisk översyn av två vanliga konsumtionsvalsteoretiska antagande

-Nyttofunktioner och själviskhet, är det biologiskt rimligt?

Nationalekonomiska institutionen
Lunds universitet

Av: Andreas Håkansson

Höstterminen 2004

Handledare: Jerker Holm

Innehållsförteckning

Abstract

Följande uppsats utgör en litteraturstudie över två vanliga konsumtionsvalsteoretiska antagande och deras biologiska rimlighet. De antagande som testas är:
(A) En ekonomisk agent handlar som om hon maximerar en nyttofunktion.
(B) Individen är självisk.
Angående (A) dras slutsatsen att denna kan antas uppfylld. Antagande (B) är mer komplicerat. Både experiment och biologisk teori förutsäger att en individ genom komplicerade mekanismer företar sig till synes helt osjälviska handlingar. Tre enkla ekonomiska modeller presenteras för att förklara detta och till var och en av dessa knyts en biologiska grund.

Till sist undersöks huruvida brottet mot antagande (B) medför allvarliga avvikelser från traditionell teori avseende bytesjämvikt. Svaret på den frågan blir nekande så länge antalet förhandlande individer är stort.

1. Inledning

1.1 Förord

Ekonomisk teori har visat sig fruktbar för att förklara ekonomiskt beteende och samhället omkring oss, men vilken grund vilar ekonomin egentligen på?

Alla vetenskaper måste utgå från ett antal grundläggande antaganden. Fördelen med ekonomi är att dessa antaganden ofta specificeras med tydlighet, nackdelen att de sällan kan testas genom experiment. Hur kan vi då vara säkra på att teorin har någon relevans?

Eftersom allting i världen styrs av fysikaliska lagar kan man tänka sig att fysik kan användas för att underbygga ekonomin. En liten del av fysiken behandlar elektronövergångar hos atomer och molekyler, den kallas kemi. Den delen av kemin som behandlar en uppsättning molekyler som inte tycks vilja ställa in sig i jämvikt kallas biologi.[1] Människan är ett sådant system. Därför borde den ekonomiska teorin kunna stödjas upp ifrån biologiskt håll.

1.2 Frågeställning och metod

Denna uppsats kommer att undersöka om två av de antaganden som görs i konsumtionsvalsteori är konsekventa med biologisk teori. För det första; är det rimligt att anta att individen kan handla som om hon maximerar en nyttofunktion? För det andra; är människor verkligen självisk? Dessutom undersöks vilka konsekvenser eventuella avvikelser kommer att ha.

Uppsatsen utgör en litteraturstudie över ämnet. En diskussion över rimligheten i antagandena förs och ett antal enkla modeller för att förklara osjälviskt beteende presenteras.

Frågan är av största vikt eftersom dessa antaganden bildar grunden för alla ekonomiska modeller. För att få modeller som beskriver verkligheten så bra som möjligt krävs, om antagandena inte visar sig uppfyllda, att modeller och teorier modifieras.

1.3 Avgränsning

Huvuddelen av uppsatsen behandlar frågan om själviskhet. För att överhuvudtaget komma dit är det dock viktigt att kortfattat diskutera rimligheten i att ha nyttofunktioner.

Inga försök att knyta området till psykologi eller antropologi kommer att göras vilket är vanligt i andra liknande studier. Dessutom kommer den matematiska framställningen att hållas på en relativt låg nivå (Utöver gymnasiekunskaper rekommenderas grundläggande kunskaper om vektorer och matrisräkning).

1.4 Målgrupp

Uppsatsen riktar sig främst till ekonomer och studenter i ekonomi med grundläggande kunskaper i mikroekonomi motsvarande B- till C-nivå. Av denna anledning läggs en viss vikt vid att beskriva biologiska samband på ett populärt sätt.

Det bör dock påpekas att uppsatsen på grund av sin tvärvetenskapliga ambition med behållning kan läsas av naturvetare eller andra av ämnet intresserade personer.

---

[1] Denna syn har länge varit självklar inom naturvetenskap. Se exempelvis Erwin Schrödingers ”Ärftlighet och kvantteori” (1959)

1.5 Disposition

Uppsatsen kommer att bestå av fyra kapitel förutom inledningen. I kapitel två ges en kort inledning till biologin. Detta för att kunna använda biologiska lagar senare när vi analyserar ekonomiska samband. För att undvika begreppsförvirring kommer också de grundläggande nationalekonomiska antagandena presenteras.

Tredje kapitlet tar upp frågan om nyttofunktionen kan anses vara en bra modell för mänskligt beteende.

Fjärde kapitlet tar upp själviskhet. Först diskuteras några experiment som undersökt mänsklig altruism, därefter försöker dessa förklaras med hjälp av biologisk teori och de ekonomiska modeller biologin föreslår. Modellerna utvärderas och kapitlet avslutas med att undersöka hur bytesjämvikten förändras när ekonomiska modeller med osjälviskt beteende används.

2. Biologisk ekonomi och ekonomisk biologi

Kopplingar mellan ekonomi och biologi har funnits sedan en lång tid tillbaka. Allmänt känt är det faktum att Darwin i skrivandet av ”Om arternas uppkomst” inspirerades av Malthus ”On population”. De data Darwin insamlade på sin världsomsegling med HMS The Beagle verkade tala för att livet utvecklats under en långsam process, en syn som i det närmaste var vetenskapligt accepterad under 1800-talets början. Men först med Malthus iakttagelse om resursbrist och dess utslagningseffekter fick Darwin idén till den teoretiska modell som förklarar hur processen fungerar.

Beröringspunkterna mellan de två vetenskaperna har därefter alltid varit tydliga. Först vid tiden för andra världskriget bröt sig ekonomin loss för att under en period minska sin användning av biologiska termer och förklaringsmodeller. Detta främst som en del av sitt närmande mot matematiken för att tydligare hävda sin rigiditet. När nu evolutionsbiologin har gått samma förändring till mötes uppstår åter igen givande likheter. Ett relativt sentida exempel är spelteorin som nu används av båda vetenskaperna på i stort sett samma sätt men uppstod inom ekonomin. (Nelsen et al. 2002)

För att kunna analysera ekonomi i skenet av biologi krävs två inledande avsnitt som kortfattat behandlar grunderna i biologi och nationalekonomi.

2.1 Grundläggande biologi

Syftet med uppsatsen är som sagt att titta på biologiska implikationer på det ekonomiska beteendet. För att komma dit behövs åtminstone en kort snabbkurs i biologi[2].

En levande varelse skiljer sig från döda ting huvudsakligen på två punkter; (i) den är inte i kemisk jämvikt med omgivningen och strävar heller inte mot en sådan (se exempelvis Schrödinger, 1959), (ii) levande ting kan replikera sig själva. Replikationen sker generellt genom avknoppning av speciella celler som för med sig arvsmassa från den ursprungliga organismen. Detta gör att den senare kommer att likna den förra. Bland annat eftersom replikationen inte är exakt kommer de inte att vara exakta kopior. (I fallet med människan förenas arvsmassa från två individer vilket ökar variationen ytterligare.)

Arvsmassan består av DNA (deoxiribonukleinsyra), en molekyl uppbyggd mestadels av socker och fosfat. Denna molekyl bär instruktioner för vilka proteiner som skall konstrueras i cellen. Det är viktigt att påpeka att detta är allt DNA gör. Utan större exakthet kan en gen definieras som en bit DNA.

Gener ger proteiner som i sin tur kan ge tydliga skillnader i fenotypen dvs. det man kan observera hos en organism, detta inkluderar även beteendet.

Variationen som finns bland levande organismer tillsammans med en ständig brist på resurser (detta torde vara klart för en ekonom) leder till utslagning. De gener som ökar sin bärares överlevnadsförmåga eller reproduktionsförmåga kommer att öka till antal i populationen på bekostnad av de som inte gör det. Precis som på en marknad finns inget medvetet strävande, utan bara det faktum att bättre aktörer överlever, till skillnad från sämre dito.

I fortsättningen kommer ökad överlevnadsförmåga och reproduktionsförmåga att betecknas med biologisk nytta (till skillnad från ekonomisk nytta) eller F_B (från engelskans *biological fitness*).

Av detta följer[3] det som brukar kallas *centrala teoremet* (Dawkins 1982):

En individ handlar på ett sådant sätt att den maximerar sin biologiska nytta.

[2] Följande är om inte annat anges allmänt känt och accepterat inom biologin. För en översikt se exempelvis Mayr (2001) för grunderna i evolutionsbiologi och Berg et al (2002) för grunderna inom biokemi.

[3] Eller gör det? Frågan diskuteras utförligare längre fram.

Inom den biologiska vetenskapen är det vedertaget att människan till fullo är en biologisk varelse. På samma sätt som stackmyran, *Formica rufa*, är en individuell art skild från alla andra är människan, *Homo sapiens*, det också. Varje art har sina speciella egenskaper men det hindrar dem inte från att styras av samma biologiska lagar.

Särskilt kontroversiellt anses ibland mänskligt beteende och de preferenser som styr människan. Utan att fördjupa oss i denna diskussion måste det påpekas att oavsett om ett beteende är inlärt eller genetiskt betingat utförs det helt och hållet biologiskt, genom kemiska signalmolekyler och bioelektriska signaler[4]. Precis som de datorprogram man använder på en PC begränsas av datorns kapacitet, begränsas människan av sin biologiska struktur. (Liknelsen fungerar lika bra på andra hållet, dvs. en dator begränsas av sin programvara och biologiska organismer begränsas av sin omgivning.)

I denna uppsats kommer nyttofunktionen att diskuteras utförligt. Det blir därför betydelsefullt huruvida denna är biologiskt eller kulturellt betingad. Låt oss lämna denna fråga öppen tills längre fram, men det bör noteras att båda är teoretiskt möjliga. En organisms preferenser kan mycket väl vara genetiskt betingade. Ett aktuellt exempel på detta är hur en polygam sorkart genom införandet av en gen från en monogam släkting fåtts att bete sig monogamt (Lim et al. 2004).

2.2 Grundläggande antaganden i nationalekonomi

Som i allt vetenskapligt arbete måste man i nationalekonomi göra ett antal antagande för att kunna dra några slutsatser och författa teorier. Skillnaden mot mer naturvetenskapliga discipliner är att antagandena där i större utsträckning kan verifieras i efterhand genom laboratorieexperiment. Den typen av experiment är i praktiken omöjlig inom ekonomisk vetenskap. Som konstaterats i förra sektionen är människan en biologisk varelse varför biologi och dess grundval - evolutionsteori - kan användas i detta syfte.

Inom *konsumtionsvalsteori* är kanske det mest grundläggande antagandet att individer handlar som om de maximerande en *nyttofunktion*. Denna nyttofunktion ses som en modell över hur mycket tillfredställelse eller glädje en individ får av olika varor och situationer. För att göra generella utsagor gör man sedan ett antal antaganden om nyttofunktionen. Dessa är av olika art. Några är förutsättningar för att matematiska verktyg ska kunna användas på dem, exempelvis att nyttofunktionen är kontinuerlig. Andra är av mer psykologisk art. Bland dem kan nämnas antaganden om *ickemättnad*, mer av en vara är alltid bättre för en individ när allt annat är lika, och *konvexitet*, individer tenderar att föredra varukorgar med ett mer blandat innehåll framför mer extrema med många enheter av få olika varor. Ytterliggare ett psykologiskt antagande är att människor uppvisar själviskhet i ekonomiskt handlande.

I denna uppsats kommer det sistnämnda samt det grundläggande antagandet om att konsumtionsval kan grundas på nyttofunktioner, att analyseras.

[4] Med filosofen Nietzsches ord: ”Kropp är jag helt och hållet och intet därutöver; och själ är blott ett ord för någonting hos kroppen” (Friedrich Nietzsche, 1999, ”Så talade Zarathustra”, Delfin, s.34)

3. Nyttofunktionen

Frågan är alltså om det är biologiskt rimlig att en människa handlar som om hon maximerar en nyttofunktion. Vi har sedan innan stiftat bekantskap med centrala teoremet som säger att människan faktiskt handlar som om hon maximerar biologisk nytta. Men av detta följer inte automatiskt ett jakande svar på vår frågeställning. Nedan presenteras tre frågor som måste behandlas för implikation:

1) Håller centrala teoremet som en biologisk lag?
2) Om centrala teoremet håller, hur kommer man från att maximera biologisk nytta till en nyttofunktion med konsumtion som argument?
3) Är det över huvud taget rimligt att konsumtionspreferenser ska representeras med en nyttofunktion?

3.1 Centrala teoremet

Den uppmärksamma läsaren av sektion 1.1 har upptäckt en liten svaghet i resonemanget. Naturligt urval måste med nödvändighet ske mellan gener och egentligen inte mellan individer. Detta faktum har framhållits starkast av biologen Richard Dawkins (1976,1982).

Ett uppenbart exempel på att individer handlar för att maximera geners biologiska nytta utgör de sociala insekterna. Det är exempelvis vanligt för getingar att anfalla inkräktare genom att sticka dem med sin gadd trots att detta ofta resulterar i att den individuella getingen slits loss från sin bakkropp. Handlingen kan vid en första anblick tyckas irrationell men beror på att beteendet faktiskt är optimalt för de gener som finns i getingen. Genom att rädda bikupan räddas också drottningen som är den enda som kan föra getingens gener vidare. (Dawkins 1976)

En annan av Dawkins illustrationer bygger på manipulation. Ett exempel på detta är gökungen som lurar sina fosterföräldrar att föda upp honom istället för att mata sina egna ungar. Konsekvensen blir att fosterföräldrarnas egna barn dör varmed deras beteende har varit direkt skadligt för dem, de handlar inte optimalt för sig själva utan i gökungen och gökens biologiska föräldrars intresse. (Man kan här fråga sig hur ett sådant förhållande kan vara stabilt i naturen, Dawkins visar på tre förklaringsmodeller men vi fördjupar oss inte i dem här). Kontentan är att individer bevisligen inte alltid handlar för sitt eget biologiska bästa. (Dawkins 1982)

Bör det centrala teoremet därför förkastas? När man talar om människor bör nog svaret vara nej. Vår art karakteriseras bland annat av långt liv och att varje ny individ kostar sina föräldrar mycket resurser i form av en lång barndom. För generna i en person utgör individen själv därför den viktigaste resursen till skillnad mot exempelvis getingar. De fall där individen handlar som om den tar hänsyn till andra individers nytta kommer vi att diskutera vidare i kapitel 4 som behandlar själviskhet.

3.2 Konsumtion som argument

Ur biologisk mening kan man ifrågasätta det faktum att argumenten till nyttofunktionen skall vara konsumtion av varor. Det enda man kan säga utifrån evolutionsteori är att individer kommer att göra val för att maximera sin biologiska nytta. Alltså borde den biologiska nyttan för en individ vara det enda argumentet till den ekonomiska nyttofunktionen.

Nästa steg borde då vara att titta närmare på vad som ger en individ biologisk nytta. Svaret på den frågan är: barn, och hög biologisk nytta för barnen. Som Arthur Robson (2001a) påpekar kan dock inte en individ använda dessa faktorer som vägledning för beslut. En individ (särskilt i fallet med människan) får ett mycket litet antal barn och kan inte utifrån så få utfall avgöra vad som är en optimal konsumtionsnivå. Detta resonemang utförs med större formalitet av Robson i en annan artikel (2001b). Robsons modell behandlar hur en individ skall handla för att på bästa sätt anpassa sig till förändringar i miljön. Resultatet blir först att en individ maximerar sin biologiska nytta om hon handlar efter en nyttofunktion med konsumtion som argument, och sedan att den här typen av nyttofunktion är direkt nödvändig för att maximera sin biologiska nytta i en föränderlig miljö.

Ett annat angreppssätt har Gary Becker i kapitel 13 av boken ”An Economic approach to Human behavior” (1975). Hans avsikt är att visa hur maximering av biologisk nytta inte ändrar de resultat som ges av att maximera traditionell ekonomisk nytta, i fallet med en altruistisk individ. För att inte gå händelserna i förväg presenteras här en något modifierad modell, som behandlar hur det biologiska maximeringsproblemet kan övergå i det ekonomiska, under ett antal rimliga antagande.

Låt U beteckna nyttofunktionen för en individ och F_B dennes biologiska nytta:

$$U = U(F_B) \tag{3.1}$$

Den biologiska nyttan ser Becker som en vara, som produceras med ett antal insatsvaror och en produktionsfunktion *f*. Vi skriver:

$$F_B = f(\overline{x}, t, \overline{S}, \overline{E}) \tag{3.2}$$

Vi betecknar de varor som behövs för produktionen med $\overline{x}$, *t* betecknar tiden vi behöver lägga på denna produktion, $\overline{S}$ är en vektor[5] med de kunskaper och förmågor vi har och $\overline{E}$ samlar relevanta miljöfaktorer. Individen producerar själv sin biologiska nytta, exempelvis ett barn eller en god uppväxt för ett barn, genom att använda varor som mjölk, böcker, transportmedel med mera. Hon måste därutöver använda lite av sin tid. Hur bra hon lyckas beror också på vilka kunskaper hon har och hur samhället runt omkring henne är organiserat. Becker antar sedan att man kan skriva F_B som proportionell mot $\overline{x}$:

$$F_B = f(\overline{x}, t, \overline{S}, \overline{E}) = a \cdot \overline{x} \tag{3.3}$$

Tolkningen av detta är att a är en artspecifik konstant som talar om hur mycket biologisk nytta en individ kan dra ur en vara. För varan ”ett granbarr” är *a* mycket större för en myra än för en människa. För den förra kan ett barr vara en viktig byggsten till myrans bo medan den senare inte kan använda barret på något bra sätt. Motsvarande resonemang gäller för varan ”Boken: Om arternas uppkomst”, den är av mycket mindre nytta för myran än för människan. Becker tänker sig vidare att det nu är konsumtionsvektorn som är en funktion av de andra argumenten i produktionsfunktionen:

$$\overline{x} = \overline{x}(t, \overline{S}, \overline{E}) \tag{3.4}$$

Hur stor konsumtion en individ kan få beror alltså på den tid hon använder, de förmågor hon har och den miljö hon råkar vara placerad i. Man kan tänka sig att detta sker på så sätt att en person kan, genom att använda mycket tid, ha goda kunskaper i relevanta ämnen och ha turen att leva i en bra omgivning, få en hög lön, för vilken hon kan köpa många varor.

Anta nu att det bara finns en vara på marknaden. Kalla den *x*. Den budgetrestriktion som brukar användas i ekonomiska problem kan då formuleras:

$$p \cdot x = m \tag{3.5}$$

Priserna för varan *x* kallar vi *p*.

För det biologiska fallet finns inget marknadspris för F_B. Men ett s.k. skuggpris (π) kan definieras:

---

[5] Teorin för vektorer behandlas exempelvis av Sparr (1994). Men för uppsatsen räcker det med att veta att en vektor $\overline{v}$ (betecknas med streck ovanpå) består av ett antal element $v_1, v_2, \ldots v_n$ som är vanliga tal. En vektor kan här ses som ett sätt att samla ihop tal på ett behändigt sätt.

$$\pi \equiv \frac{\partial(px)}{\partial F_B} = p \cdot \frac{\partial x}{\partial F_B} \tag{3.6}$$

Det vill säga att priset för evolutionär framgång ges av hur värdet av din konsumtion förändras med att den biologiska nyttan ökar.
Men från ekvation (3.3) vet vi att:

$$x = \frac{F_B}{a} \quad \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial F_B} = \frac{1}{a} \tag{3.7}$$

Alltså kan skuggpriset skrivas:

$$\pi = p \cdot \frac{\partial x}{\partial F_B} = \frac{p}{a} \tag{3.8}$$

Det biologiska budgetvillkoret kan formuleras:

$$\pi \cdot F_B = m \tag{3.9}$$

Ovanstående utläses som att produkten av skuggpriset av biologisk nytta och den biologiska nyttan måste vara lika stor som inkomsten, när alla pengar på något vis går åt för att öka den biologiska nyttan.

På grund av det sätt vi definierat skuggpriset ovan kommer denna budgetrestriktion att övergå i den ekonomiska.

Det är viktigt att inse, att detta på inget sätt är ett bevis för att maximering av F_B övergår i maximering av en nyttofunktion av konsumtion, utan ett sätt att visa hur rimliga antaganden om hur biologisk nytta ges av konsumtion kan göra den traditionella modellen sannolik.

3.3 Nyttofunktion

Då återstår den sista frågan. Även om ingen tror på att individer medvetet funderar över vilket konsumtionsval de ska göra för att få högst nytta, eller beräknar marginalnyttor genom komplicerade derivator, måste man fråga sig om det är rimligt att det undermedvetna systemet kan beskrivas på detta vis.

En annan möjlig väg för detta system att vara konstruerat, är att individen från början föds med en optimal konsumtionsnivå inpräntad i sitt medvetande. Ett banalt exempel kan vara en människa som, oavsett vad som händer, äter tre bananer, en ostsmörgås och dricker fyra glas mjölk om dagen. Om nu detta varit det optimala dagliga födointaget varför skulle inte naturligt urval gynnat denna mekanism? Anledningen är den föränderliga miljön. Svaret ges egentligen av Robsons (2001b) resultat, som säger att en konstant konsumtionsnivå i en föränderlig miljö, inte är optimal. Samma slutsats drar biologen Robert Trivers (1971) om mer sociala preferenser. Eftersom sociala normer varierar snabbare än naturligt urval hinner verka på människan (som är en art med lång livslängd), måste även nyttan av olika sociala beteenden anpassas efter situationen.

Så långt har fastslagits, att en förutbestämd konsumtionsnivå inte fungerar. Finns det då inte bättre sätt för denna väg till optimal konsumtion, givet omgivning och vad som finns tillhands?

En annan möjlig modell diskuteras av Robson (2002). Anta istället att vårt undermedvetna sagt oss vilken av två möjliga korgar som är bäst för oss, vilken som ger mest nytta. Normalt antas hjärnan ge varje varukrog ett nummer (den ordinala nyttan). Konsumtionsval sker genom att den korg med högst nummer (nytta) väljs. I den alternativa modellen måste hela tiden två korgar jämföras. Hjärnan antas i varje jämförelse veta vilken som är bäst. I en valsituation med många alternativ måste alla korgar jämföras två och två. Som Robson framhåller är det uppenbart att denna organisations skulle vara mycket mer kostsam för individen. Anta att det bara finns fyra varor som en individ kan ha preferenser över. I den traditionella modellen behöver hjärnan lagra fyra informationsblock med siffervärden motsvarande den ordinala nyttan för korgarna. I den andra modellen kommer varje par att kräva ett informationsblock. Redan med fyra varor är antalet kombinationer $\binom{4}{2} = 6$. Med flera varor stiger antalet kombinationer mycket snabbt. Dessutom tillkommer ytterligare nackdelar eftersom ett konsumtionsval i andra systemet kräver fler räkneoperationer. Eftersom varje kapacitetsökning i hjärnan kostar resurser verkar det mycket osannolikt att inte det system som kräver minst minne är det som används.

3.4 Slutsatser om nyttofunktionen

I ovanstående genomgång har det visats att det centrala teoremet rimligen gäller på människan, med det undantaget att individer tidvis, frivilligt eller duperade därtill[6], accepterar negativ marginalnytta mot att öka andra individers nytta. Vi återkommer till detta i nästa avsnitt.

Vidare har det visats att det centrala teoremets maximering av biologisk nytta kan åstadkommas genom att individen maximerar ekonomisk nytta. Mer specifikt kan det visas att det är optimalt för en individ att basera ekonomiska nytta på konsumtionsnivåer.

Slutligen diskuterades andra modeller för hur en ekonomisk agent kan göra konsumtionsval. Av det drogs slutsatsen att den traditionella modellen med en ordinal nyttofunktion är biologiskt rimligare än övriga.

[6] Den fria viljan kommer inte att behandlas vidare här.

4. Själviskhet

Ett av de viktigaste antagandena i konsumtionsteori är det att individen handlar för att maximera sin egen nytta.

Det första problemet vi ställs inför i diskussionen över ämnet är hur man ska definiera ”osjälvisk” respektive ”självisk”. Viken definition man väljer kommer att visa sig mycket viktigt. Inom konsumtionsteori är det inte ovanligt att definiera bort antagandet, genom att säga att själviskt beteende är sådant, som syftar till att maximera den egna nyttofunktionen. Såldes kan det vara själviskt att skänka pengar till en insamling om detta bidrar med positiv marginalnytta. Denna form av cirkelbevis är hopplös om man vill söka en djupare förståelse.

En snävare definition är att osjälviskhet är handlande som innebär att man minskar sin egen konsumtion till fördel för andras. Vi kommer snarare att använda denna i den fortsatta framställningen.

Inom biologin har man länge talat om *altruistiskt* beteende. En passande definition är att det är beteende som (synbart) minskar den egna biologiska nytta för att öka andras. Anledningen till att det smugits in ett ”synbart” är att helt äkta altruism aldrig kan förekomma. För att ett beteende ska vara stabilt i populationen krävs att den gen som framhäver det direkt eller indirekt främjar sin egen existens. Därför kan ingen äkta altruism finnas annat än som en ”olycklig”[7] mutation.

Men låt oss nu inte så här inledningsvis hindras av definitioner. Uppvisar människor över huvud taget några som helst tecken på altruism?

4.1 Empiriska tecken på mänsklig altruism

En rad försök att undersöka förekomsten och egenskaperna för altruism har gjorts av Ernst Fehr tillsammans med olika kollegor. Ett sådant experiment gick ut på att ett antal individer delades in i två grupper: Investerare och Företagare. Därefter fick en Investerare och en Förtagare spela ett spel. Båda gavs 10 pengaenheter (pe). Därefter fick Investeraren möjlighet att skicka valfri summa mellan noll och tio pe till Företagaren. För varje pe Investeraren skänkte mottog Företagaren tre. Därpå gavs Företagaren möjligheten att skicka Investeraren valfritt belopp tillbaka. Det bör påpekas att detta spel bara spelades en gång per individ och att de under försökets gång var helt isolerade och ovetande om den andras identitet. Deltagarna avlönades (med riktiga pengar) efter hur många pe de lyckats erhålla i spelet.

En rationell och helt osjälvisk Investerare har ingen som helst anledning att skicka några pengar eftersom han på inget vis kan förvänta att Företagaren skulle återgälda denna gåva. Med termer från spelteorin kan man säga att strategin ”skicka ingenting” är strikt dominant för båda spelarna.

Trots detta skickade så många som 79% av Företagarna tillbaka en summa större än noll (Fehr, Rockenbach, 2003).

Fehrs arbete fokuserar på att förstå vad som upprätthåller denna typ av beteende. I detta syfte undersöktes vad som händer om Investeraren ges möjligheten att bestraffa Företagare som skickar tillbaka för lite. Det överraskande resultatet är att detta minskar det altruistiska beteendet. Anledningen författaren framlägger är att altruismen kan vara styrd utifrån ett rättvisetänkande. Investeraren gavs nämligen möjligheten att tillsammans med sin ”investering” specificera hur mycket han ville få tillbaka. De Investerare som krävde en hög återbetalning (högre än 2/3 av sin försändelse, vilket ger denne en högre vinst än Företagaren)

[7] Olycklig för organismen. För samhället som helhet måste väl äkta altruism vara bra? Nej, långt ifrån alla är överens om detta; se exempelvis Tullberg (1994)

och använda bestraffningen fick mycket lägre återbetalning. (Fehr, Rockenbach 2003) Vi kommer i fortsättningen att referera till detta experiment som A.

I ett annat experiment (låt oss kalla det B) av samme Fehr (och Gächter 2002) delas ett antal individer in i grupper om fyra. Varje individ får 20 pe och tillåts bidra med valfri summa till en gemensam gruppkassa. Individen fick sedan två femtedelar av den totala kassan. För en självisk och rationell individ är det därför optimalt att behålla alla pengar för sig själv om denne inte har någon anledning att lita på övriga gruppmedlemmar. För att undersöka hur bestraffningar påverkar samspelet gavs alla individer möjligheten att straffa medlemmar i gruppen som inte bidrar tillräckligt mycket. Efter att alla valt sitt bidrag och pengarna fördelats får alla medlemmar se vad de andra gjort för val. Om man vill straffa individer som bidragit för lite kan man betala mellan 1 och 10 pe för att straffa en individ. För varje pe man betalar får den bestraffade böta 3. Precis som i A är alla medlemmarna isolerade från varandra och ovetande om vilka de andra är. Spelet spelas bara en gång för varje gruppkonstellation men varje individ är med i ett antal spel av samma typ, inga två individer mötte någonsin varandra mer än en gång.

Intressant för våra syften är i hur stor utsträckning straffet används. Teorin förutsäger att ingen någonsin skulle straffa någon annan, eftersom man inte har någonting att tjäna på det. Att hota med bestraffning kan låta rationellt men hotet kan aldrig göras troligt. (Det blir ingen delspelsperfekt jämvikt i spelteoretiska termer.) Om en ”svikare” har bidragit med för lite, kommer den ”svikne” att förlora ännu mer om denne använder sitt straff.

Trots detta visar det sig att straffet är en mycket viktig mekanism som signifikant ökar det genomsnittliga bidraget per individ än när inget straff kan utdelas. Över 84% av individerna använder straffet minst en gång under sina tio omgångar. (Fehr och Gächter, 2002)

Straffen kommer att användas på ett sådant sätt att individens vinst av spelet kommer att maximeras av att bidra med genomsnittet av de andras bidrag.

Det har alltså visats att människor i några fall uppvisar synbart äkta altruistiskt beteende mot varandra. Som ekonomer frågar vi oss hur detta kan tas med i våra modeller.

4.2 En ekonomisk modell av altruism - Beckermodellen

Ett försök att utifrån enkel ekonomisk teori förklara och modellera altruism av Gary Becker (1959) presenteras här. Idén går ut på att om det i en grupp individer finns *en* altruist som är villig att överföra pengar till de övriga kommer alla de andra att handla synbart altruistiskt mot både altruisten och de övriga egoisterna. Men låt oss inte gå händelserna i förväg.

Becker utgår ifrån att en individ *A* får nytta av en rad mycket verkliga och observerbara saker, exempelvis att se leende barn eller att känna sig mätt. Dessa grundläggande behov betecknas (Z_1, Z_2, …, Z_n). Nyttan för *A* blir då:

$$U_A = U_A(Z_1, Z_2, ..., Z_n) \qquad (4.2.1)$$

Varje behov kan produceras av individen med en rad insatsvaror, låt *x* beteckna de varor som behövs: *t*, tiden; *E*, individens egenskaper och *R*, individens sociala miljö. (Jämför resonemanget i sektion 3.2) Vi kan då skriva:

$$Z_k = Z_k(x_k{}^A, t_k{}^A, E_k{}^A, R_k{}^A) \qquad (4.2.2)$$

Becker inriktar sig på *R*. Denna kan påverkas genom att individ *A* förändrar sitt handlande. Exempelvis kan *A* öka sin produktivitet av grundläggande behov (och därmed nytta) genom att se till att en vän blir gladare eller genom att göra en ovän olyckligare. *R* antas allmänt kunna skrivas som summan av en av *A*s handlingar oberoende faktor (*D*) och *A*s ansträngning (*h*).

$$R_k{}^A = D + h_A \qquad (4.2.3)$$

Om vi antar att *A* bara kan lägga sina pengar på en vara *x* eller på *h* blir hans budgetrestriktion:

$$p_x x + p_R h = m_A \tag{4.2.4}$$

Här betecknar p_x priset för vara *x*, p_R priset för att öka *h* med en enhet (kostnaden av att göra ansträngningen *h*) och m_A inkomsten för *A*.
Substituera nu in (4.2.3) i (4.2.4). Det ger:

$$p_x x + p_R R = m_A + p_R D_A \tag{4.2.5}$$

Högerledet i (4.2.5) kan tolkas som summan av inkomsten för *A* och värdet av den sociala omgivningen som finns när *A* inte anstränger sig för att förbättra den. Becker definierar detta till S_A; *A*s sociala inkomst:

$$m_A + p_R D_A \equiv S_A \tag{4.2.6}$$

Från detta dras slutsatsen att den inkomst som är intressant för *A*s nyttomaximering är S_A snarare än m_A.

Becker fortsätter sina resonemang genom att undersöka vad som kommer att hända om den monetära inkomsten för *A* ökar och drar slutsatsen att *A* kommer att öka sina ansträngningar för att påverka *R*. Dessutom visar han hur denna ökning blir större när *A*s sociala inkomst beror mer av omgivningen.

Slutsatsen blir att *A* när han är beroende av sin omgivning kommer att använda mycket av sina resurser till att genom påverkan av människor i sin omgivning öka sin nytta. Detta verkar lägga en bra grund för altruistiskt beteende.

Utifrån detta har Becker konstruerat en modell för osjälviskt beteende (Becker, 1959 Kap 13). Låt nu *A* beteckna en altruist. Denna altruist har i sin närhet en egoist *E*. *A* har en nyttofunktion som beror positivt på både *A*s och *E*s konsumtion av varan *x*:

$$\begin{gathered} U_A = U_A(x_A, x_E) \\ \frac{\partial U_A}{\partial x_A} > 0 \quad och \quad \frac{\partial U_A}{\partial x_E} > 0 \end{gathered} \tag{4.2.7}$$

Individ *A* har en inkomst m_A, E har en inkomst m_E. *A* ger h_A till *E*. Individernas budgetbegränsningar blir då:

$$\begin{gathered} pX_A + h_A = m_A \\ pX_E = m_E + h_A \end{gathered} \tag{4.2.8}$$

För att få en bättre bild av modellen föreslår Becker att *A* kan tolkas som en familjeförsörjare i en familj som består av *A* och *E*. För att *E* ska ha något att leva på överför försörjaren h_A till sin son/dotter/man/fru/...
Kombinerar man de två ekvationerna i (4.2.8) får man:

$$pX_E + pX_A = m_A + m_E \equiv S_A \tag{4.2.9}$$

Här definieras den sociala inkomsten för *A* som summan av *A*s och *E*s inkomster. Löser man nyttomaximeringsproblemet får man vid jämvikt som vanligt att marginella substitutionskvoten skall vara lika med priskvoten:

$$\frac{\partial U_A}{\partial x_A} / \frac{\partial U_A}{\partial x_E} = \frac{p}{p} = 1 \tag{4.2.10}$$

Altruisten kommer att konsumera så att hans nyttoökning av ytterligare en *x* till sig själv är lika stor som nyttoökningen han får av att egoisten konsumerar ytterligare en enhet *x*. Detta resultat är visserligen ganska trivialt och följer direkt ur att det inte kostar någonting för försörjaren att ge köpkraft till *E*.

Om nu *E* är en rationell individ kommer han inte längre att uppträda egoistiskt mot *A*. Den ”godhet” som *A* visar kommer *E* att återgälda. Anledningen till det är att en handling som skadar *A* kommer att minska *A*s sociala inkomst. Minskar denna kommer *A* att tvingas minska sitt bidrag till *E*, varmed *E* skadas. (Kom ihåg att ju mer beroende *A* är av sin sociala omgivning, desto mer kommer han att minska sitt bidrag procentuellt. På samma sätt kommer *E* att tjäna på att öka *A*s inkomst.

Becker bygger sedan ut sin modell genom att introducera ytterligare egoister *E1*, *E2*,… Om *A* ger ett bidrag till alla dessa kommer de alla att uppträda altruistiskt mot *A*, men vad som är än mer intressant är att de, antaget rationalitet, kommer att vara osjälviska mot varandra. Eftersom de alla är beroende av *A*s sociala inkomst och denna utgörs av summan av alla inkomster har de ett själviskt incitament att agera osjälviskt. *E1* kan exempelvis vinna mer nytta genom att avstå 500 kr själv genom att ge 2000 kr till *E2*. Detta kommer att leda till både att S_A ökar och att *A* minskar sitt bidrag till *E2* och ökar till sin egen och de andra egoisternas konsumtion.

Med denna modell räcker det att ha en individ som handlar altruistiskt mot alla andra för att få en synbart helt altruistisk population. Resultatet kan låta orealistiskt men experiment visar att detta faktiskt är möjligt. Men denna mekanism är inte stark nog utan det krävs någon form av bestraffningsmöjlighet också (Fehr och Fischbacher 2003).
Svagheten i modellen är givetvis att om antalet egoister blir stort kommer deras bidrag från *A* bli så litet att det inte är värt besväret att ta hänsyn till.

Modellen ger oss inte heller särskilt mycket information om hur altruistiska individerna kommer att vara eller hur altruismen kommer att påverka marknadsutfall. För ekonomer såväl som företag och stat kan det vara intressant att se hur marknader och bytesallokeringar påverkas av altruistiska agenter. Skulle man kunna modellera på ett annat sätt och därmed få resultat som mer ansluter till både experiment och biologisk teori? För att svara på den frågan behöver vi veta mer om biologiska synsätt på altruism.

4.3 Altruism för en biolog, del 1

Biologer har traditionellt delat upp osjälviskt beteende i tre undergrupper:

1) Släktskapsaltruism (eng. kin altruism)
2) Reciprok altruism (eng. reciprocal altruism)
3) Äkta altruism (eng. true altruism)

Enligt ovan är bara de två första helt bevisade varför endast dessa kommer att behandlas. För varje typ undersöks också vilka ekonomiska slutsatser de leder till.

4.3.1 Släktskapsaltruism

Den första förklaringen till osjälvisk beteende framlades av biologen Hamilton 1964. En modern version av hans resonemang är att individer som är nära släkt med varandra kan förväntas dela många gener. Det innebär att en gen som förstärker beteendet ”att dö för att rädda tre syskon” bör vara bärkraftig i populationen. Syskon kan förväntas dela hälften av sina gener med varandra. Det förväntade antalet av den här genen hos syskonen är

Släktskap	Släktskapskoefficient
Enäggstvillingar	1
Föräldrar, syskon	1/2
Mor- och farföräldrar	1/4
Kusiner	1/8

Tabell 1 Släktskapskoefficient. Källa: Dawkins (1976)

därför en och en halv vilket är fler än 1 som är antalet av genen som individen själv har. I själv verket bör genetiskt betingat beteende i frågan ge att individen är indifferent mellan att ”rädda dem och dö” och ” inte ingripa och överleva” om antalet berörda syskon är två[8].

Samma sak gäller för mindre dramatiska beslut. Hamilton kom fram till att en individ bör företa sig en handling om och endast om:

$$k \le \sum r_i \cdot b_i$$

Kostnaden för handlingen betecknas k. Fördelen av beteendet för individ i är b_i och r_i är en släktskapskoefficient mellan den som tar kostnaden och i. För syskon är denna ½. För fler exempel se tabell 1.

Med hjälp av detta kan man göra en modell för ekonomisk altruism mellan släktingar.

4.4 Släktskapsutvidgad nytta - Bergstrommodellen

Den vanliga nyttofunktionen för individ A beror bara på dennes egen konsumtion. Låt denna beskrivas av konsumtionsvektorn $\bar{c}_A = (x_1{}^A, x_2{}^A, ..., x_k{}^A)$ där $x_m{}^A$ är individens konsumtion av vara m. Anta att A värderar $\bar{c}_A$ till V($\bar{c}_A$). Hans nytta blir då:

$$U_A(\bar{c}_A) = V_A(\bar{c}_A) \tag{4.4.1}$$

I enlighet med Hamilton kan man nu utvidga nyttobegreppet till att ingripa både nyttan av egen konsumtion och av släktingars konsumtion. Detta gör Bergstrom (1996) på följande sätt:

$$U_A = V_A(\bar{c}_A) + \sum_{alla\ j} r_j \cdot U_j(\bar{c}_j) \tag{4.4.2}$$

Med detta kan man exempelvis förklara hur föräldrar kan avstå resurser till sina barn.

Modellen som presenteras i (4.4.2) har åtminstone två svagheter. Mest uppenbart är att även om r_j faktiskt i realiteten är positiv för alla människor på jorden, får den antas vara noll för alla utom mellan de allra närmaste släktingar. Bara några generationer bort blir det för beräkningsmässigt och minnesmässigt dyrt att hantera släktskapskoefficienter. Därtill bör läggas att koefficienterna visar *förväntad* likhet. Osäkerheten både på grund av slumpens roll i fördelningen av könsceller och osäkerhet om egentliga släktband[9] gör att släktskapskoefficienten troligen försummas av vårt undermedvetna förutom för ett mycket litet antal individer.

Det andra, mindre uppenbara problemet, är att U_j i sin tur kommer att bero på U_A, vilken beror av U_j och så vidare… Problemet är ganska allmänt när man bygger ut nyttofunktioner på det här sättet. Vi kommer att behandla problemet ytterligare i avsnitt 4.6.1, där också en mer allmän lösning, n individer, till problemet ges. Som en introduktion kan det dock vara intressant att titta på det här fallet speciellt[10].

4.4.1 Stabiliteten hos Bergstrommodellen

Vi begränsar oss till ett fall med två individer, A och B, som är nära släktingar. Deras nyttofunktioner enligt Bergstrommodellen blir då:

[8] För en ekonom kan det tyckas intressant att diskutera riskpremier och riskaversion hos gener men det får anses ligga utanför denna uppsats.
[9] August Strindberg skriver: ”Dåren säger: se här är min fader, men ho kan veta vilkens länder haver honom avlat” (Fadren, 1887, Tredje akten, femte scenen)
[10] Lösningen i 4.6.1 kommer dessutom att kräva mer matematikkunskaper (matrisräkning) av läsaren.

$$
\begin{aligned}
U_A &= V_A(\bar{c}) + r_{AB} \cdot U_B(\bar{c}) \\
U_B &= V_B(\bar{c}) + r_{BA} \cdot U_A(\bar{c})
\end{aligned} \tag{4.4.3}
$$

För att inte drunkna i beteckningar har jag nu infört $\bar{c} = (x_1^{\ A}, x_2^{\ A}, \ldots, x_1^{\ B}, x_2^{\ B} \ldots)$
Det som gör lösningen så mycket lättare är att $r_{AB}=r_{BA}=r$. Med ord; *A* är släkt med *B* i samma grad som *B* är släkt med *A*.
Metoden för att lösa ut nyttan för *A* respektive *B* är att substituera de båda uttrycken med varandra oändligt många gånger. Gör man det får man (för utförligare räkningar se bilaga *A*):

$$
\begin{aligned}
U_A &= \frac{1}{1-r^2}\left[V_A(\bar{c}) + r \cdot V_B(\bar{c})\right] \\
U_B &= \frac{1}{1-r^2}\left[V_B(\bar{c}) + r \cdot V_A(\bar{c})\right]
\end{aligned} \tag{4.4.4}
$$

Av denna lilla utvikning fick vi också fram att Bergstroms modell måste kompletteras för enäggstvillingar för att inte få obegränsade nyttofunktioner. En lämplig sådan komplementering kan enligt mig vara:

$$
U_A = V_A(\bar{c}) + V_B(\bar{c}) \quad \textit{då } r=1 \tag{4.4.5}
$$

4.5 Altruism för en biolog, del 2

Vi konstaterade i 4.4.1 att en modell som inte bara tar hänsyn till nära släktingar kan vara av intresse. Låt oss därför fortsätta med genomgången av biologiska teorier.

4.5.1 Reciprok altruism

Även om Hamiltons släktskapsaltruism förklarar mycket förklarar den inte allt. Därför lade Trivers fram begreppet reciprok altruism (Trivers 1971). Tanken går ut på att individer utbyter ”tjänster och gentjänster”. Särskilt viktigt anser Trivers detta vara för att förklara mänskligt beteende. Hans inledande exempel är att en man råkat falla i vattnet varpå en förbipasserande måste fatta ett beslut. Antingen försöker denne rädda mannen i vattnet eller så går han förbi. Kostnaden för den förbipasserande att försöka rädda är mycket lägre än vinsten för den nödställda av att bli räddad. Det kan därför vara lämpligt att rädda den nödställda om sannolikheten är hög att den andra skulle göra samma sak tillbaka i en liknande situation.

Det uppenbara problemet är att varje individ har ett incitament att ta emot hjälp av andra men att fuska med att betala tillbaka. Kan då detta beteende verkligen vara stabilt, i betydelsen att en individ som använder det inte blir utnyttjad? Trivers kommer fram till ett antal krav för stabilitet, bland dem:

1) Många interaktioner mellan samma individer. (Kräver i sin tur att de lever ”länge”)
2) Individerna samspelar bara med ett litet antal andra.

Båda kraven verkar vara uppfyllda för människan. Vi lever relativt länge och under den allra största tiden av vår historia levde vi i små jägare/samlare - samhällen. Men Trivers påpekar att redan ett mycket litet antal andra individer att interagera med kräver ett mycket stort minne och beräkningsförmåga i hjärnan.

I sin beskrivning av reciprok altruism lägger författaren stor vikt vid beskrivning av mänskligt beteende. Hittar han något som kan förklara de tidigare nämnda experimenten (A och B i sektion 4.1)?

Trivers pekar på två viktiga punkter. För det första kan det vara alltför svårt att hålla reda på alla de sociala interaktionerna för att det ska vara lönt att skilja ut de som fuskar lite lätt. För det andra kan äkta altruistiskt beteende inducera vänskap. För det tredje visar det sig att osjälviska handlingar som ser ut att vara helt äkta, dvs. utan någon som helst förväntan om återbetalning, uppskattas mer av mottagaren och omgivningen.

Det verkar alltså biologiskt rimligt att människor kan handla på sätt som utifrån kan uppfattas som urskiljningslöst och äkta altruistiskt.

4.6 En osjälvisk nyttofunktion -Edgeworthmodellen[11]

Från ovanstående biologisk utläggning ser vi att en modell som beskriver nyttan för en individ bör beakta nyttan för andra individer.

Låt *i* vara en altruistisk individ. Dennes nyttofunktion U_i beror på andra individers nytta enligt:

$$U_i = U_i(\bar{c}_i, U_1, U_2, ..., U_{i-1}, U_{i+1}, U_{i+2} ...)$$
$$\frac{\partial U_i}{\partial U_j} \geq 0 \quad \text{för alla } j \text{ och strikt större för något } j \tag{4.6.1}$$

Detta kan sägas vara en generell modell för en altruist *i*. Den kräver dock några kommentarer. För det första kräver den här typen av modeller alltid att *i* vet hur *j*s nyttofunktion ser ut. Detta är långt ifrån givet men ett antagande vi gör här.

För det andra kräver vi här att nyttan för altruisten beror av den nyttonivå *j* upplever och inte någon subjektiv uppfattning hos *i* om vad som är bra. Detta bör rimligen ligga i termen altruistisk. Denna sortens beroende har kallats ickepatriarkalisk nytta av Hajime Hori (2001), den termen kommer vi att använda i fortsättningen.

Den generella modellen är lite för generell för vårt behov. På vilket sätt kan det vara rimligt att förenkla? Redan den välkända Edgeworth funderade över problemet på 1880-talet. Han formulerade det på följande vis:

> *"we must modify […] by multiplying each pleasure, except the pleasures of the agent himself, by a fraction - a factor doubtless diminishing with what may be called the social distance between the individual agent and those of whose pleasure he takes account"*
> *(*Edgeworth citerad i Collard 1975*)*

Den modell Edgeworth föreslår kan matematiskt skrivas på följande vis:

$$U_i = V_i(\bar{c}_i) + \sum_{j \neq 1} a_{ij} \cdot U_j(\bar{c}_j) \tag{4.6.2}$$

Här representerar U_i nyttan för individ i, $V_j(\bar{c}_j)$ hur individ j värderar sin konsumtionsvektor $\bar{c}_j$ och a_{ij} är vad Edgeworth kallade "coefficient of effective sympathy" (Heijden) med andra ord en sorts konstant som anger hur osjälvisk *i* är gentemot *j*.

Det experimenten A och B (se sektion 4.1) implicerar är att denna konstant är positiv även för helt okända individer. Detta verkar inte orimligt enligt den biologi som diskuterats.

[11] Namnet "Edgeworthmodellen" är inget vedertaget namn på den här typen av lineära nyttofunktioner. Anledningen till att detta namn används här är att den kända ekonomen Edgeworth använde dessa för att modellera altruism. (Se vidare längre fram och speciellt sektion 4.7)

4.6.1 Stabilitet i Edgeworthmodellen

Precis som vi tidigare undersökte om Bergstrommodellen var stabil i den mening att den inte blir oändligt stor eller odefinierad bör samma sak göras för Edgeworthmodellen. En sådan analys görs av Hori (2001) som en inledning till ett mycket allmännare fall. (Utläggningen i detta avsnitt är en förenkling av Horis lineära fall.)

Problemet är alltså att hitta en samling funktioner ($U_1, U_2, U_3, ...U_n$) som samtliga beror på varandra enligt:

$$U_i(\bar{c}_i, \overline{U}_{-i}) = V_i(\bar{c}_i) + \sum_{i=2}^{n} a_{ij} \cdot U_j \quad där\ a_{ij} \geq 0\ i \neq j\ och\ a_{ii} = 0 \qquad (4.6.3)$$

Om vi definierar U som en kolumnmatris[12] innehållande alla individernas nytta, vi skriver:

$$U \equiv (U_1, U_2, ...U_n)^T \qquad (4.6.4)$$

Helt ekvivalent definieras V:

$$V \equiv (V_1, V_2, ...V_n)^T \qquad (4.6.5)$$

Låt nu alla a_{ij} samlas *i* en matris A enligt:

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4.6.6)$$

(I ekvation återfinns också $\overline{U}_{-i}$ vilket är vanlig en beteckning för vektorn innehållande alla nyttofunktioner utom U_i.)

Notera att diagonalen bara består av nollor (a_{ii}=0 för alla *i*).

Med dessa beteckningar kan (4.6.3) skrivas på matrisform enligt:

$$U = V + A \cdot U \qquad (4.6.7)$$

Denna kan skrivas om som:

$$U - AU = V \quad <=> \quad (I - A)U = V \qquad (4.6.8)$$

Här används bokstaven I för att beteckna enhetsmatrisen. Vi vill hitta en lösning för U. Denna kan vi få genom att multiplicera inversen av (I-A) från vänster. Vi skriver:

$$(I - A)^{-1}(I - A)U = (I - A)^{-1}V \quad <=> \quad IU = (I - A)^{-1}V \quad <=> \quad U = (I - A)^{-1}V \equiv CV$$

Matrisen C betecknar här en $n \times n$- matris som ges av osjälviskhetskoefficienterna a_{ij}.

Man kan också se av ovanstående att C inte alltid är definierad och att då inte heller U kan ges någon betydelse. Detta olyckliga fall inträffar då (I-A) saknar invers. Detta sker när dess determinant är noll enligt huvudsatsen för kvadratiska matriser. I ekvationsform:

[12] För en genomgång av matrisräkning se Sparr, 1994, Linjär Algebra, kap 7,9,10 (Skrivkonventioner är hämtade från denna och kan avvika lite från andra läroböcker.)

$$\det(I-A)=\left|\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}\right|=$$

$$=\begin{vmatrix}1&-a_{12}&\dots&-a_{1n}\\-a_{21}&1&\dots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\dots&1\end{vmatrix}=0 \qquad (4.6.9)$$

I sista steget använder vi oss av att diagonalelementen i A är noll. Låt oss titta på ett exempel:

Exempel 1

Anta att två individer (1 och 2) är altruistiska mot varandra med nyttofunktioner enligt Edgeworthmodellen:

$$U_1=V_1(\bar{c}_1)+a_{12}\cdot U_2$$
$$U_2=V_2(\bar{c}_2)+a_{21}\cdot U_1 \qquad (4.6.10)$$

Hur kan dessa skrivas på en mer reducerad form, och vilka förutsättningar måste gälla för att de skall vara definierade?

Enligt (4.6.8)ges lösningen av:

$$\begin{pmatrix}U_1\\U_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}V_1\\V_2\end{pmatrix} \qquad (4.6.11)$$

Matrisen C ges av:

$$C=(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-a_{12}\\-a_{21}&1\end{pmatrix}^{-1} \qquad (4.6.12)$$

Villkoret förenklas på samma sätt som i (4.6.9) i andra steget.
Detta är lösbart precis när det(I-A) är skild från noll. Vi tittar på fallet när C inte är definierad, vi skriver:

$$\begin{vmatrix}1&-a_{12}\\-a_{21}&1\end{vmatrix}=0 \quad <=> \quad 1-(-a_{12})\cdot(-a_{21})=0 \quad <=> \quad 1=a_{12}\cdot a_{21} \qquad (4.6.13)$$

Rimligen kan inte a_{ij} vara större än ett eftersom vi i ekvation (4.6.10) givit den egna värderingen av konsumtion denna vikt. Enda fallet då nyttofunktionerna inte kan beräknas är alltså om $a_{12}=a_{21}=1$.

Men detta är precis samma resultat som gavs när vi undersökte Bergstrommodellen, vilket tydligare visar hur hans modell för släktskapsaltruism kan ses som en förenklad version av vad vi kallat Edgeworthmodellen. På samma sätt kan det visas att lösningen i ekvation (4.4.4) följer av (4.6.11).

Flera individer

Edgeworthmodellen lider av en stor svaghet om den används på en grupp med fler individer än två. För fallet med $a_{ij}=a$ för alla i och j från ett till n, det vill säga när alla individerna är lika altruistiska mot varandra, går det lätt att beräkna determinanten i (4.6.9) och visa att den kommer att ha ett nollställe i intervallet [0,1] för alla värde på *n*. Detta nollställe inträffar då

$$a = \frac{1}{n-1} \tag{4.6.14}$$

(För härledningar se bilaga C)

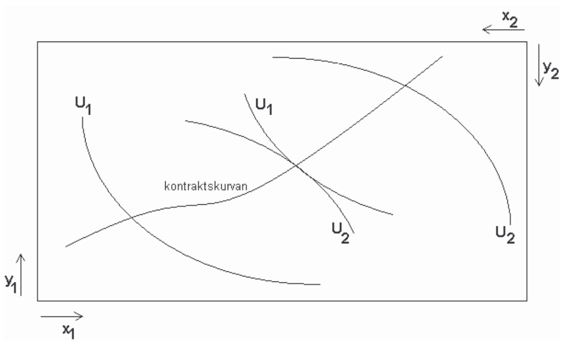
Exempelvis kommer modellen med tre individer som är lika altruistiska mot varandra att bryta ihop för a=1/2. Eftersom Bergstrommodellen är ett specialfall gäller begränsningen även där, det innebär exempelvis att modellen kommer att bryta ihop (ge obegränsade nyttonivåer, om man försöker beskriva tre syskon. Detta problem är mycket allvarligt och innebär enligt mig i stort att Edgeworthmodellen trots sin enkelhet inte bör användas när antalet individer är större än två. Andra modeller än lineära bör användas[13].

4.7 Effekter av osjälviska individer på en marknad

De experiment vi tidigare redovisat tillsammans med de biologiska teorierna förutsäger att individer tvärtemot konventionell teori bör ta hänsyn till andras nytta för att vara rationella. Denna hänsyn kan mycket väl vara av ickepatriarkalisk art. Man kan lätt tro att denna förändring i grundläggande antaganden borde förändra individers sätt att förhandla och komma till en bytesjämvikt.

Den man som lagt grunden för analys av bytesallokeringar är ingen mindre än Edgeworth[14]. Byteshandeln brukar beskrivas med hjälp av en Edgeworthbox (se figur 1). Mängden av paretooptimala allokeringar brukar benämnas kontraktskurvan och den delmängd av denna som inte blockeras i förhandlingarna, av individer eller grupper av individer, kallas kärnan.

Edgeworth själv funderade över samma problem för över 100 år sedan och kom fram till följande två satser (Collard 1975):



Figur 1. Edgeworthbox för två individer, 1 och 2, med två varor x och y.

(1) Kontraktskurvans läge är oberoende av om individerna är altruistiska eller ej.
(2) När a_{ij} ökar kommer kärnan att krympa ihop för att slutligen bli till en punkt.
(En modern analys av Edgeworths satser gjordes av Collard 1975 och nedanstående följer hans arbete.)

I följande avsnitt presenteras bevis för första satsen och en illustration av den andra. För enkelhetens skull följer vi Collard i det att två individer och två varor antas.

4.7.1 Bevis av (1)

Låt de två individerna vara 1 och 2. De två varorna kallar vi *x* och *y*. Med x_i avses konsumtionen av vara *x* för individ *i*. Deras nyttofunktioner ges då av:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_1(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ U_2 &= U_2(x_1, x_2, y_1, y_2) \end{aligned} \tag{4.7.1}$$

[13] Kanske hjälper det inte att använda andra funktioner. Under samma förutsättningar som ovan kan man visa att altruistiska ”Cobb-Douglas”-funktioner har samma nollställen. (Se bilaga D)
[14] Det bör nämnas att han är mest känd för detta. Hans tankar om altruism har aldrig varit lika framgångsrika.

Låt varorna värderas till priserna p_x respektive p_y. Individ 1 ställs därmed inför följande nyttomaximeringsproblem:

$$\max_{\{x_1, x_2\}} U_1 = U_1(x_1, x_2, y_1, y_2) \quad då \quad p_x \cdot x_1 + p_y \cdot y_1 = m_1 \tag{4.7.2}$$

(Här antas att den totala mängden av varan *x* är summan av den av individ 1 och 2 konsumerade mängden. Man kan annars tänka sig situationer när båda individerna vill avstå resurser men ingen vill motta.)
Ovan betecknar m_1 inkomsten för individ 1. En alternativ tolkning av m_1 är marknadsvärdet av de varor 1 har initialt.

Nyttomaximeringsproblemet för 2 kan formuleras helt ekvivalent. Paretooptimala allokeringar är de som uppfyller villkoret att den marginella substitutionskvoten mellan individerna för *x* mot *y* ska vara lika. Detta ger (se bilaga B):

$$\frac{MU_{1x} - a_2 \cdot MU_{2x}}{MU_{1y} - a_2 \cdot MU_{2y}} = \frac{MU_{2x} - a_1 \cdot MU_{1x}}{MU_{2y} - a_1 \cdot MU_{1y}} \tag{4.7.3}$$

(MU_{ix} är marginalnyttan för individ 1 av vara *x*, MU_{iy} definieras ekvivalent. Konstanterna a_1 och a_2 definieras i bilaga B.)
Ovanstående kan förenklas (se bilaga B för detaljer) till:

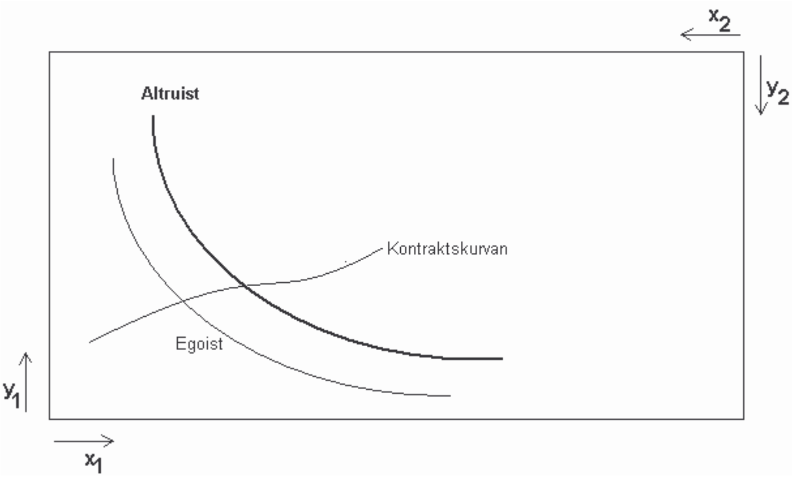
$$\frac{MU_{1x}}{MU_{1y}} = \frac{MU_{2x}}{MU_{2y}} \tag{4.7.4}$$

Men detta är precis villkoret för en paretooptimal bytesallokering med självviska individer. Det är också denna som definierar kontraktskurvan. Eftersom villkoret inte ändras av altruistiska agenter skiftar inte heller kontraktskurvan.

4.7.2 Illustration av (2)

Satsen visas lättast grafiskt med hjälp av Edgeworthboxen. I detta diagram skiljer sig altruistens indifferenskurva mot egoistens genom att ligga närmare individ 2s origo. Betrakta figur 2 nedan, endast den första individens nyttofunktion är inritad. Kurvan i fetstil representerar individ 1 om denne är osjälvisk enligt Edgeworthmodellen och den smala är den traditionella indifferenskurvan.

Utifrån sats 1 vet vi att kontraktskurvan inte påverkas av graden av altruism. Att kurvan i det altruistiska fallet ligger längre upp och till höger (för samma nyttonivå för individ 1) beror på att altruisten till skillnad från egoisten sätter ett värde på att 2 uppnår en högre nytta.



Figur 2. Indifferenskurvor för själviska och osjälviska individer.

Enligt resonemanget ovan måste indifferenskurvorna röra sig närmare och närmare varandra när värdet ökar på de altruistiska koefficienterna. Därmed minskar också kärnan vilket Edwgeworth förutsåg. Detta innebär också att individernas förhandlingsutrymme minskar eftersom det finns färre möjliga allokeringar i kärnan.

4.7.3 Jämviktspåverkan

Vi har alltså visat att kärnan men inte kontraktskurvan förändras av att individer är osjälviska. Detta kan utgöra en delförklaring till att de tecken på altruism som uppstår i spel mellan två individer (som experiment A och B i sektion 4.1) försvinner när man tittar på större grupper och marknader (Roth et al, 1991).

I fallet med marknader innehållande många individer kan man visa att kärnan krymper till en punkt även med själviska individer. Frågan om huruvida dessa är själviska eller ej har då inte så stor effekt eftersom kärnan redan saknar utsträckning.

På samma sätt kan man då förklara det altruistiska beteendet i små grupper med att krympningen av förhandlingsutrymmet ger betydande konsekvenser på jämviktsläget.

Detta är en möjlig, om än kanske lite förhastat dragen, slutsats av Edgeworths satser. Poängen är, att även om antagandet om själviskhet i detta kapitel kan anses motbevisat, kommer inte effekterna på marknader bli så stora som man kunde frukta, i alla fall inte om antalet marknadsaktörer är stort.

5. Samanfattning och slutsatser

Avsikten med uppsatsen var att undersöka de två kanske vikigaste antagandena i konsumtionsvalsteorin utifrån förutsättningen att människan är en biologisk varelse styrd av biologiska lagar.

Först diskuterades om det var biologiskt rimligt att en individ handlar som om hon maximerar en nyttofunktion med konsumtionsnivåer som argument. Slutsatsen från detta var att även om det finns vissa biologiska betänkligheter mot att individen verkligen handlar främst för sin egen nytta kan antagandet vara rimligt för människan. Att individen använder konsumtionsnivåer som valvariabler istället för mer uppenbara faktorer som exempelvis antal barn eller barnbarn förklaras genom att man på detta sätt har lättare för att utvärdera vilka strategier som är bättre än andra.

Det fördes också en kort diskussion om vi verkligen är inne på rätt spår när vi försöker utrycka preferenser genom en funktion som avbildar en konsumtionskombination på en ordinal nyttonivå. Slutsatsen blev att det troligtvis måste vara på det sättet eftersom de andra påtänkliga varianterna är sämre på att utföra uppgiften.

När det fastslagits att nyttofunktionen är en rimlig modell gick vi över till att diskutera hur människor påverkar varandras nyttofunktioner. Tvärtemot vad traditionell teori ofta gör gällande blev resultatet att altruistiskt beteende inte är ovanligt eller orimligt. Bevis för detta framlades i form av experiment och några bakomliggande biologiska förklaringar presenterades kortfattat.

Därefter gjordes en genomgång av ekonomiska modeller som föreslagits för att modellera altruism i avsikt att se hur en ekonomi med osjälviska agenter skiljer sig från en med självviska.

Första modellen (Beckermodellen) förklarade hur altruism kan uppstå från att en individ skänker resurser till andra. Denna ger en anledning för rationella individer att vara synbart altruistiska mot varandra av egenintresse.

Andra modellen (Bergstrommodellen) innebär att en individ i enlighet med Hamiltons beslutsregel bör väga in nyttan av sina nära släktingar i sin egen nyttofunktion.

Tredje modellen (Edgeworthmodellen) är en mer generell modell där varje individ tar hänsyn till alla andra medmänniskor på ett lineärt sätt. Det visar sig också att denna modell är mer rimlig enligt biologisk teori än man lätt kan tro vid en första anblick.

Den sista modellens effekter (som kan ses som en generalisering av den andra) på en bytesjämvikt undersöks sedan med hjälp av de av Edgeworth framlagda satserna i frågan. Resultatet blev att osjälviskheten har mindre betydelse om antalet underhandlande individer är många än om de var få. Både detta resultat och användningen av Edgeworth- och Bergstrommodellen är tyvärr starkt begränsade av att nyttofunktionerna blir odefinierade för vissa nivåer för fallet med fler individer än två varför helst andra modeller för altruism bör användas.

Om slutsatserna av Edgeworths satser inte störs av dessa problem kommer troligen, trots att antagandet om självviskhet inte är rimligt, inte bytesallokeringar att förändras, åtminstone inte så länge antalet individer är många. Det kan i sin tur innebära att effekterna av det felaktiga antagandet inte är så stora som man först kan tro. För att förvissa sig om att så är fallet bör frågan undersökas djupare.

6. Källförteckning

Becker, Gary S., 1976, ”The economic approach to Human Behavior”, The university of Chicago Press, Chicago

Berg, J., Tymoczko J., Stryer, L., 2002, ”Biochemistry”, 5th edition, W.H. Freeman and Company. New York.

Bergstrom, Theodore C.,1996, “Economics in a Family Way.” Journal of Economic Literature, pages 1903-34, December

Collard, 1975 "Edgeworth's proposition on altruism", Economic Journal vol. 85 pp. 355-360

Darwin, Charles, 1859, “Om arternas uppkomst genom naturligt urval eller de bäst utrustade rasernas bestånd i kampen för tillvaron”, John Murray, London (avser första upplagan)

Dawkins, Richard, 1976, ”The selfish gene”, Oxford University Press, Oxford

Dawkins, Richard, 1982, “The extended phenotype”, Oxford University Press, Oxford

Fehr, E., Fischbacher, U.. 2003, “The nature of human altruism” Nature 425, 785-791

Fehr, E., Gächter, S., 2002, “Altruistic punishment in humans” Nature 415, 137-140

Fehr, E., Rockenbach, B., 2003, “Detrimental effects of sanctions on human altruism” Nature 422, 137-140

Hori, Hajime, 2001, ”Non-paternalistic altruism and utility interdependence” The Japanese Economic Review, vol. 52, pp. 137-155, June.

Lim, M.M., et al., 2004. “Enhanced partner preference in a promiscuous species by manipulating the expression of a single gene.” Nature 429: 754-757, June.

Mayr, Ernst, 2001, “What evolution is”, Phoenix, London

Nelson, R., Winters, S., 2002, “Evolutionary Theorizing in Economics” Journal of Economic perspectives, vol. 16(2) pages 33-46, Spring

Robson, Arthur J., 2002 “Evolution and Human Nature”, Journal of economic perspectives, American Economic Association, vol. 16(2) pages 89-106, Spring.

Robson, Arthur J., 2001(a) ”The biological Basis of Economic Behavior”, Journal of Economic Literature, American Economic Association, vol. 39(1), pages 11-33, March

Robson, Arthur J., 2001(b), “Why would Nature Give Individuals utility Functions?” journal of Political Economy, University of Chicago Press, vol. 109(4) pages 900-929, August

Roth, Alvin E., 1991, “Bargaining and Market Behavior in Jerusalem, Ljubljana, Pittsburgh, and Tokyo: An Experimental study”. American Economic Review, vol. 81 (5) pp 1068-1095, December

Schrödinger, Erwin, 1959, “Ärftlighet och kvantteori”, Sigma - en matematikens kulturhistoria, vol. 2, pp. 710-731

Trivers, Robert L., 1971, “The evolution of reciprocal altruism” Quarterly Review of Biology, 46,p. 35-57

Tullberg J., Tullberg B., 1994, ”Naturlig etik – en uppgörelse med altruismen”, Lykeion

Waldman, Michael, 1994, ”Systematic Errors and the Theory of Natural Selection”, American Economic Review, 84:3, pages 482-97, June

6.1 Matematisk referenslitteratur

Böiers, L-C, Persson, A., 1988, “Analys i flera variabler”, Studentlitteratur, Lund

Böiers, L-C, Persson, A., 2001, “Analys i en variabel”, Studentlitteratur, Lund

Sparr, Gunnar, 1994, “Linjär algebra”, Studentlitteratur, Lund

6.2 Elektroniska resurser

van der Heijden, E. “On the Notion of Altruism"
Tilburg University, Faculty of Economics and Business Administration, Research Memorandum, 678.
http://greywww.kub.nl:2080/greyfiles/few/1994/doc/678.pdf (2004-12-03)

Bilaga A

Nyttan för A respektive B ges av ekvationen nedan.

$$U_A = V_A(\bar{c}) + r_{AB} \cdot U_B(\bar{c}) \qquad \text{(A.1a)}$$

$$U_B = V_B(\bar{c}) + r_{BA} \cdot U_A(\bar{c}) \qquad \text{(A.1b)}$$

Som konstaterats är $r_{AB}=r_{BA}$ låt oss sätta $r=r_{AB}=r_{BA}$.
Vi får då:

$$U_A = V_A(\bar{c}) + r \cdot U_B(\bar{c}) \qquad \text{(A.2a)}$$

$$U_B = V_B(\bar{c}) + r \cdot U_A(\bar{c}) \qquad \text{(A.2b)}$$

Substituera nu in (A.2b) i (A.2a). Denna blir då:

$$U_A = V_A(\bar{c}) + r \cdot (V_B(\bar{c}) + r \cdot U_A(\bar{c})) = V_A(\bar{c}) + r \cdot V_B(\bar{c}) + r^2 \cdot U_A(\bar{c}) \qquad \text{(A.3)}$$

Man kan nu fortsätta med att substituera in (A.2a) i (A.3). Då får vi:

$$\begin{aligned} &V_A(\bar{c}) + r \cdot V_B(\bar{c}) + r^2 \cdot U_A(\bar{c}) = V_A(\bar{c}) + r \cdot V_B(\bar{c}) + \\ &+ r^2 \cdot [V_A(\bar{c}) + V_A(\bar{c}) + r \cdot U_B(\bar{c})] = (1 + r^2) \cdot V_A(\bar{c}) + r \cdot V_B(\bar{c}) + r^3 \cdot U_B(\bar{c}) \end{aligned} \qquad \text{(A.4)}$$

Man kan fortsätta med detta och man får då:

$$\begin{aligned} &U_A = (1 + r^2 + r^4 + \ldots) \cdot V_A(\bar{c}) + (r + r^3 + r^5 + \ldots) \cdot V_B(\bar{c}) = \\ &= V_A(\bar{c}) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} r^{2i} + V_B(\bar{c}) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} r^{2i+1} \end{aligned} \qquad \text{(A.5)}$$

Summorna är geometriska[15]. En oändlig geometrisk summa kan skrivas:

$$\sum_{i=n}^{\infty} x^k = \frac{1 \cdot x^n}{1 - x} \quad om \quad |x| < 1 \qquad \text{(A.6)}$$

Om vi antar $r < 1$ får vi genom att använde (A.6) på (A.5):

$$U_A = \frac{1}{1 - r^2} \cdot V_A(\bar{c}) + \frac{r}{1 - r^2} \cdot V_B(\bar{c}) = \frac{1}{1 - r^2} \cdot \left[V_A(\bar{c}) + r \cdot V_B(\bar{c})\right] \qquad \text{(A.7)}$$

För släktingar med r=1 (enäggstvillingar) är det rimligt att istället direkt anta:

$$U_A = V_A(\bar{c}) + V_B(\bar{c}) \qquad \text{(A.8)}$$

På grund av symmetri blir resultatet för B helt ekvivalent.

[15] För mer information om geometriska summor se Persson och Böijers (2001)

Bilaga B

Nyttomaximeringsproblemet för A är:

$$\max_{\{x_1, x_2\}} U_1 = U_1(x_1, x_2, y_1, y_2) \quad då \quad p_x \cdot x_1 + p_y \cdot y_1 = m_1 \tag{B.1}$$

Lagrangefunktionen: $\ell = U_1(x_1, x_2, y_1, y_2) + \lambda(m_1 - p_x x_1 - p_y y_1)$ (B.2)

Första ordningens villkor för maximum:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial x_1} = 0 \quad &<=> \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \lambda \cdot p_x \\ \frac{\partial \ell}{\partial y_1} = 0 \quad &<=> \frac{\partial U_1}{\partial y_1} + \frac{\partial U_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial y_1} = \lambda \cdot p_y \end{aligned} \tag{B.3}$$

Termen $\partial x_i / \partial x_j$ med *i,j* =1,2 är en inre derivata. Den talar om hur x_j förändras med x_i och måste vara med eftersom dessa beror av varandra. Närmare bestämt måste $\partial x_i / \partial x_j = -1$ eftersom *x* bara kan fördelas mellan individ 1 och 2. Samma sak gäller för *y*.

Detta gör att vi kan skriva om (B.3) som:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial x_1} = 0 \quad &<=> \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \cdot (-1) = \lambda \cdot p_x \quad <=> \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = \lambda \cdot p_x \\ \frac{\partial \ell}{\partial y_1} = 0 \quad &<=> \frac{\partial U_1}{\partial y_1} + \frac{\partial U_1}{\partial y_2} \cdot (-1) = \lambda \cdot p_y \quad <=> \frac{\partial U_1}{\partial y_1} - \frac{\partial U_1}{\partial y_2} = \lambda \cdot p_y \end{aligned} \tag{B.4}$$

Ur ekvation (B.4) kan λ brytas ut ur vardera ekvation. Sätter man de två uttrycken lika får man (inses lättast genom att dela leden med varandra och sätta kvoterna lika):

$$\frac{\dfrac{\partial U_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial U_1}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial U_1}{\partial y_1} - \dfrac{\partial U_1}{\partial y_2}} = \frac{p_x}{p_y} \tag{B.5}$$

Gör man nu på precis samma sätt för individ 2 får man:

$$\frac{\dfrac{\partial U_2}{\partial x_2} - \dfrac{\partial U_2}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U_2}{\partial y_2} - \dfrac{\partial U_2}{\partial y_1}} = \frac{p_x}{p_y} \tag{B.6}$$

Lägg nu märke till att (B.5) och (B.6) har samma högerled. De båda vänsterleden är därmed lika enligt Euklides axiom.

För läsvänlighetens skull definierar vi:

$$MU_{ixj} \equiv \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad och \quad MU_{iyj} = \frac{\partial U_i}{\partial y_j}$$

Vi får:

$$\frac{MU_{1x1} - MU_{1x2}}{MU_{1y1} - MU_{1y2}} = \frac{MU_{2x2} - MU_{2x1}}{MU_{2y2} - MU_{2y1}} \qquad \text{(B.7)}$$

Enligt Edgeworthmodellen värderar man en nyttoökning för en annan individ med en konstant gånger den ökning man själv skulle fått av att öka nyttan lika mycket. Låt oss kalla dessa konstanter för individ 1 och 2 med a_1 respektive a_2. För marginalnyttorna gäller då:

$$\begin{aligned} MU_{2x1} &= a_1 \cdot MU_{1x1} \equiv a_1 \cdot MU_{1x} \\ MU_{2y1} &= a_1 \cdot MU_{1y1} \equiv a_1 \cdot MU_{1x} \\ MU_{1x2} &= a_2 \cdot MU_{2x2} \equiv a_2 \cdot MU_{2x} \\ MU_{1y2} &= a_2 \cdot MU_{2y2} \equiv a_2 \cdot MU_{2y} \end{aligned} \qquad \text{(B.8)}$$

Sätter man in (B.8) i (B.7) får man:

$$\frac{MU_{1x} - a_2 \cdot MU_{2x}}{MU_{1y} - a_2 \cdot MU_{2y}} = \frac{MU_{2x} - a_1 \cdot MU_{1x}}{MU_{2y} - a_1 \cdot MU_{1y}} \qquad \text{(B.9)}$$

Ekvation (B.9) kan nu skrivas om i ett antal steg. I första steget har vi använt oss av att två bråk som är lika med varandra kan skrivas om genom korsvis multiplikation:

$$(B.9) <=> (MU_{1x} - a_2 MU_{2x})(MU_{2y} - a_1 MU_{1y}) = (MU_{2x} - a_1 MU_{1x})(MU_{1y} - a_2 MU_{2y}) <=>$$

$$<=> MU_{1x} MU_{2y} - a_1 MU_{1x} MU_{1y} - a_2 MU_{2x} MU_{2y} + a_2 a_1 MU_{2x} MU_{1y} =$$

$$= MU_{2x} MU_{1y} - a_2 MU_{2x} MU_{2y} - a_1 MU_{x1} MU_{1y} + a_1 a_2 MU_{1x} MU_{2y} <=>$$

$$<=> MU_{1x} MU_{2y} (1 - a_1 a_2) = MU_{2x} MU_{1y} (1 - a_1 a_2)$$

Båda leden innehåller nu (1-a_1a_2) varför denna kan divideras bort. (Observera att vi därmed också här kan se att a_1a_2=1 ställer till problem, men eftersom vi vet sedan tidigare att modellen inte är definierad i det fallet kan vi lugnt utföra divisionen.)

(B.9) kan därmed formuleras på det gamla välkända sättet:

$$(B.9) <=> \frac{MU_{1x}}{MU_{1y}} = \frac{MU_{2x}}{MU_{2y}} \qquad \text{(B.10)}$$

Bilaga C

Determinanten i (4.6.9) kan skrivas:

$$\det(I-A)=\begin{vmatrix} 1 & -a & -a & \dots & -a \\ -a & 1 & -a & \dots & -a \\ -a & -a & 1 & \dots & -a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & -a & -a & -a & 1 \end{vmatrix}=(-a)^n\cdot\begin{vmatrix} -1/a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1/a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -1/a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1/a \end{vmatrix}=(*)$$

Här har faktorn (-*a*) brutits ut. För varje rad får man bryta ut en sådan vilket ger *n*et i exponenten. I nästa stegmultipliceras den andra kolumnen med (-1) och läggs till den första. På samma sätt multipliceras den tredje med (-1) och läggs till den andra och så vidare. Då kommer determinanten att bli:

$$(*)=(-a)^n\cdot\begin{vmatrix} -1/a-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1/a+1 & -1/a-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/a+1 & -1/a-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/a+1 & -1/a-1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1/a-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1/a+1 & -1/a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/a+1 & -1/a \end{vmatrix}= \text{(C.1)}$$

$$=(-a)^n\cdot(d_1+d_2)$$

I nästa steg utvecklas determinanten efter översta raden. Detta ger två termer eftersom alla andra multipliceras med nollor. Den andra termen (från sista elementet i första raden) kommer att resultera i en determinant av typen:

$$d_2=(-1)^{n-3}\cdot\begin{vmatrix} 1/a+1 & -1/a-1 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a+1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1/a+1 \end{vmatrix} \qquad \text{(C.2)}$$

Storleken på matrisen är $(n-1)\times(n-1)$

I uttrycket ovan förekommer en potens av (-1) vars enda uppgift är att justera för det faktum att om n är ett jämnt tal kommer d_2 att vara negativ enligt reglerna för beräkning av determinanter.

Första kolumnen har bara ett element skilt från noll och utvecklar man efter denna upprepade gånger får man till slut:

$$d_2=(-1)^{n-3}\cdot\left(\frac{1}{a}+1\right)^{n-1} \qquad \text{(C.3)}$$

Den andra termen blir:

$$d_1=-\left(\frac{1}{a}+1\right)\begin{vmatrix} -1/a-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1/a+1 & -1/a-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/a+1 & -1/a-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/a+1 & -1/a-1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1/a-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1/a+1 & -1/a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/a+1 & -1/a \end{vmatrix} \qquad \text{(C.4)}$$

Storleken på ovanstående determinant är $(n-1)\times(n-1)$. Vi ser nu att (C.4) är identisk med (C.1) med det undantaget att storleken är minskad med ett. Det betyder att (C.4) i sin tur kan brytas ner till två determinanter enligt ovan. På det viset kan (C.1) succesivt brytas ner till:

$$(-a)^n\left[(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{a}+1\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{a}+1\right)\left[(-1)^{n-4}\left(\frac{1}{a}+1\right)^{n-4}-\left(\frac{1}{a}+1\right)\left[(-1)^{n-5}\left(\frac{1}{a}+1\right)^{n-5}-\ldots+\right.\right.\right.$$
$$+\left(\frac{1}{a}+1\right)^{n-2}\cdot\begin{vmatrix}-1/a-1 & 1\\ 1/a+1 & -1/a\end{vmatrix} \qquad \text{(C.5)}$$

Alla termerna utom den sista erhålles genom att använda (C.3) och fortsätta utveckla från n×n-matrisen i (C.1). Sista termen avviker eftersom de nedersta elementen längst till höger i (C.1) skiljer sig från resten av matrisens struktur.

I (C.5) minskar exponenten till parentesen (*1/a+1*) med ett för varje term men samtidigt blir det en (*1/a+1*) mer för varje ny parentes. Det innebär att alla (*1/a+1*) kommer att ha exponenten (*n-1*). (Läsaren bör testa att utveckla de första termerna för att övertyga sig om detta.)

Samma resonemang gäller för faktorn (-1) vilket gör att (C.5) kan skrivas:

$$(-a)^n\left[(-1)^{n-1}(n-2)\left(\frac{1}{a}+1\right)^{n-1}+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{a}+1\right)^{n-2}\left(\left(\frac{1}{a}+1\right)\frac{1}{a}-\left(\frac{1}{a}+1\right)\right)\right]=$$
$$=(-a)^n\left[(-1)^{n-1}(n-2)\left(\frac{1}{a}+1\right)^{n-1}+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{a}+1\right)^{n-1}\left(\frac{1}{a}-1\right)\right]= \qquad \text{(C.6)}$$
$$=(a)^n\cdot(-1)^{n+n-1+1}\left(\frac{1}{a}+1\right)^{n-1}\left[(2-n)+\frac{1}{a}-1\right]=a^n\left(\frac{1}{a}+1\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{a}-n\right)$$

En särskild kommentar förtjänar minustecknen. I sista steget samlas alla minustecken upp i en term. Först n från $(-a)^n$, sedan (*n-1*) som står framför alla termer i utvecklingen. Till sist ett minustecken från att (*n-2*) blir (*2-n*). Sammanlagt finns då 2*n* stycken. Det talet är jämnt oavsett värdet på n varför allt ihop blir ett.

Efter denna härledning kan man lätt lösa ekvationen det(I-A)=0. Man får två lösningar:

$$\begin{cases}a=-1\\ a=\dfrac{1}{1-n}\end{cases} \qquad \text{(C.7)}$$

De följer av att sätta den första respektive andra parentesen till noll. Lösningen *a*=-1 är av mindre om man inte vill använda modellen för att räkna med avund eller liknande preferenser.

Bilaga D

Anta istället Cobb-Douglasfunktioner definierade enligt (D.1). Samma beteckningar används som innan. U är individens nyttofunktion och V är en dess egen värderingsfunktion. Man kunde tänkt sig att definiera U_k i (D.1) med exponent på V_k men det är inte nödvändigt eftersom denna kan fångas upp inuit V_k.

$$U_k = V_k \cdot U_1^{a_{k1}} \cdot U_2^{a_{k2}} \cdots U_k^{a_{kk}} \cdots U_n^{a_{kn}} \tag{D.1}$$

För enkelhetens skull antas $a_{k1}=a_{k2}=\ldots=a_{kn}=a$.
Dessutom antas $a_{kk}=0$ för alla k.

På samma sätt som i bilaga A utgår vi nu från U_1 och substituerar in de andra nyttofunktionerna i denna gång på gång.

$$\begin{aligned} U_1 &= V_1 \cdot U_2^{a} \cdot U_3^{a} \cdots U_n^{a} = V_1 \cdot (V_2 \cdot U_1^{a} \cdot U_2^{0} \cdots U_n^{a})^{a} \cdot (V_3 \cdot U_1^{a} \cdot U_2^{a} \cdot U_3^{0} \cdots U_n^{a})^{a} \cdots \\ &\cdots (V_n \cdot U_1^{a} \cdot U_2^{a} \cdot U_3^{a} \cdots U_n^{0})^{a} = V_1 \cdot V_2^{a} \cdots V_n^{a} \cdot U_1^{(n-1)a^2} \cdot U_2^{(n-2)a^2} \cdots U_n^{(n-2)a^2} \end{aligned} \tag{D.2}$$

Funktionerna här har substituerats in en gång. Låt oss göra samma sak en gång till:

$$\begin{aligned} U_1 &= V_1 \cdot V_2^{a} \cdots V_n^{a} \cdot U_1^{(n-1)a^2} \cdot (V_2 \cdot U_1^{a} \cdot U_2^{0} \cdot U_3^{a} \cdots U_n^{a})^{(n-2)a^2} \cdots \\ &\cdots (V_n \cdot U_1^{a} \cdot U_2^{a} \cdot U_3^{a} \cdots U_n^{0})^{(n-2)a^2} = \\ &= V_1 \cdot V_2^{a+(n-2)a^2} \cdots V_n^{a+(n-2)a^2} \cdot U_1(n-1)^{a^2+(n-1)(n-2)a^3} \cdot U_2^{a^3(n-2)^2} \cdots U_n^{a^3(n-2)^2} \end{aligned} \tag{D.3}$$

Fortsätter man på det viset oändligt många gånger kommer man att få:

$$U_1 = V_1 \cdot V_2^{k} \cdots V_n^{k} \cdot U_1^{l} \cdot U_2^{m} \cdot U_3^{m} \cdots U_n^{m} \tag{D.4}$$

Med k, l och m enligt:

$$\begin{aligned} k &= a \cdot \sum_{i=0}^{\infty} [a(n-2)]^i = \frac{a}{1-a(n-2)} \quad om\ a(n-2) < 1 \\ l &= (n-1) \cdot a^2 \sum_{i=0}^{\infty} [a(n-2)]^i = \frac{a^2(n-1)}{1-a(n-2)} \quad om\ a(n-2) < 1 \\ m &= \lim_{i \to \infty} a \cdot [a(n-2)]^i = 0 \end{aligned} \tag{D.5}$$

Om vi stoppar in k och m från (D.5) i (D.4) kan vi lösa ut U_1:

$$U_1 = \left(V_1 \cdot V_2^{a/(1-a(n-2))} \cdots V_n^{a/(1-a(n-2))} \cdot 1 \cdots 1\right)^{\frac{1}{1-l}} \tag{D.6}$$

Förutom att se hur U_1 kan skrivas på reducerad form kan vi nu se när uttrycket inte är definierat. Detta händer enligt (D.5) när:

$$a(n-2) \geq 1 \tag{D.7}$$

Troligen kommer detta problemet att vara mindre utan vårt antagande om lika altruistiska exponenter. Ekvationen ovan kan ses som en övre begränsning för den altruistiska koefficienten när man visar ett sådant beteende mot väldigt många. Vid måttliga n ställer det inte till stora besvär. (För ex $n=5 \Rightarrow a < 1/3$ för att modellen skall hålla)

Uttrycket är heller inte definierat när nämnaren på exponenten av hela uttrycket i (D.6) är noll. För att hitta dessa nollställen undersöks följande ekvation:

$$1-l=0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-\frac{a_2(n-1)}{1-a(n-2)}=0 \quad \Leftrightarrow \quad na^2-a^2=1-an+2a \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad n\cdot a\cdot(a+1)=(a^2+2a+1)=(a+1)^2 \quad \Leftrightarrow a=\frac{1}{1-n} \quad \textit{eller} \quad a=-1 \tag{D.8}$$

Resultatet liknar mycket det i bilaga C. Det är utanför denna uppsats ramar att undersöka varför resultaten samanfaller. Det enda som vi kommer att konstatera är att också Cobb-Douglasfallet kommer att resultera i de farliga nollställena: $a = 1/(1-n)$