



NEKK01  
Examensarbete  
Kandidatnivå  
VT 2008

## Value at Risk med Extremvärdesteori – En Studie av Råvaror

Nishant Fafalia & Niklas Norén

**Sammanfattning:** Det idag väldigt populära riskmättet Value-at-Risk (VaR) kan beräknas på många olika sätt. En metod som använder sig av extremvärdesteori (EVT) för att estimerar VaR utvecklades under 1990-talet som ett alternativ till de traditionella VaR metoderna. EVT fokuserar på fördelningens svans, eftersom det är här de extrema observationerna uppträder. I denna studie undersöker vi hur framgångsrik extremvärdesmetoden är när det kommer till att estimerar VaR för råvaror, en typ av tillgång som karakteriseras av att vara extremt volatil och därmed speciellt svår att riskbedöma. Våra resultat pekar på att extremvärdesteorin erbjuder ett intressant alternativ när man önskar att estimerar VaR för volatila råvaror. Speciellt bra estimeringar, relativt övriga undersökta metoder, ger EVT för de verkligt extrema händelserna (konfidensintervall 99.9 %). Samtidigt indikerar våra resultat på att den enkla traditionella historiska simuleringsmetoden i vissa fall presterar nästintill lika bra resultat.

## Förkortningar

EVT	Extremvärdesteori
GEV	Generaliserad Extremvärdesfördelning
GPD	Generaliserad Pareto Distribution
IID	Identisk oberoende fördelat
POT	Peaks over Threshold
VaR	Value at Risk

# Innehållsförteckning

<b>1. INLEDNING</b> .....	<b>4</b>
1.1 BAKGRUND .....	4
1.2 PROBLEMATISERING .....	5
1.3 SYFTE .....	5
1.4 AVGRÄNSNINGAR .....	5
<b>2. TEORETISKA KONCEPT</b> .....	<b>6</b>
2.1 RÅVAROR.....	6
2.1.1 <i>Nickel</i> .....	6
2.1.2 <i>Olja</i> .....	6
2.1.3 <i>Silver</i> .....	7
2.1.4 <i>Råvarors gemensamma kännetecken</i> .....	7
2.2 VALUE AT RISK (VaR) .....	7
2.2.1 <i>Uppkomsten och utvecklingen av VaR</i> .....	7
2.2.2 <i>Fördelar med VaR</i> .....	9
2.2.3 <i>Nackdelar med VaR</i> .....	9
2.2.4 <i>Beräkningsmetoder för VaR</i> .....	11
2.2.5 <i>Backtesting av VaR</i> .....	13
2.3 EXTREMVÄRDESTEORI (EVT).....	13
2.3.1 <i>Den Generaliserade Extremvärdesfördelningen (GEV)</i> .....	14
2.3.2 <i>Den Generaliserade Pareto Distributionen (GPD)</i> .....	18
2.3.3 <i>VaR med EVT</i> .....	29
<b>3. DATA</b> .....	<b>31</b>
3.1 OLJA .....	31
3.2 SILVER.....	32
3.3 NICKEL .....	33
<b>4. METOD</b> .....	<b>34</b>
<b>5. RESULTAT</b> .....	<b>37</b>
<b>6. ANALYS</b> .....	<b>39</b>
<b>7. SLUTSATSER</b> .....	<b>43</b>
<b>8. VIDARE FORSKNING</b> .....	<b>44</b>
<b>9. KÄLLOR</b> .....	<b>45</b>

# 1. Inledning

---

*Detta kapitel är avsett att ge en introduktion till uppsatsens ämne. Vidare redogörs här för uppsatsens syfte och begränsningar. Slutligen presenteras uppsatsens utformning.*

---

## 1.1 Bakgrund

De senaste decennierna har intresset av att mäta risken kopplat till finansiella tillgångar ökat markant. Tidigare var det enbart fokus på vad för avkastning en investering gav. Efterhand blev det dock även fokus på vilken risk som var kopplad till den aktuella placeringen. Simons (2000) identifierar två huvudanledningar till denna ökande riskmedvetenhet. För det första, investerares portföljer har i takt med den ökande användningen av derivat blivit mer och mer komplexa. För det andra har flera marknader blivit alltmer volatila.

Att kunna estimeras risken på sin investering är alltså numera mycket viktigt. Det finns flera olika riskmått som man kan använda sig av för detta ändamål. Sedan över ett decennium tillbaka är Value-at-Risk (VaR) ett av de populäraste riskmåten.

VaR svarar på frågan om hur mycket som mest kan förloras över en viss tidshorisont med en viss sannolikhet (konfidensnivå). Med andra ord mäter VaR möjlig förlust under ”normala” marknadsrörelser. VaR är numera det främsta riskmättet gällande marknadsrisk (Jorion 2001). VaR's popularitet beror bland annat på att bankkommittén i Basel beslutade att banker ska klara av att täcka sina förluster på deras handelsportföljer med 10 dagars tidshorisont 99 % av gångerna. Finansiella institutioner använder ofta även VaR till intern riskkontroll. VaR kan beräknas på många sätt. En metod som använder sig av extremvärdesteori för att estimeras VaR utvecklades under 1990-talet som ett alternativ till de traditionella VaR metoderna. Extremvärdesteorin försöker som namnet antyder förklara de extrema händelserna, d.v.s. de ovanliga avvikande händelserna. Till skillnad från många andra teorier inom matematisk statistik fokuserar extremvärdesteorin på det ovanliga istället för på det vanliga. Idéerna och ämnet kan man spåra tillbaka till början av 1900-talet. Det dröjde dock till mitten av århundradet innan teorin formulerades på ett konkret sätt för att användas på fysiska fenomen. I början låg fokus på olika ingenjörsområden såsom att analysera hållbarhet för olika konstruktioner. Idag används extremvärdesteorin inom bland annat meteorologi, hydrologi, och alltså även för att estimeras finansiell risk (Coles 2001).

## 1.2 Problematisering

VaR kan som sagt beräknas på många olika sätt. De flesta VaR metoder bygger på antaganden om prisförändringarnas kumulativa fördelning. Dessa metoders estimeringar fungerar bra i de områdena av den empiriska fördelningen där det finns många observationer. För VaR med högt konfidensintervall (99 % och mer) ger de dock generellt sämre estimat eftersom det normalt finns väldigt få extrema observationer. Det är med andra ord stor risk att antagandet om utseendet på fördelningens svans inte är korrekt. Ironiskt nog är det just extrema förluster som man försöker undvika med hjälp av VaR.

En metod som använder sig av extremvärden för att estimerar VaR utvecklades under 1990-talet, extremvärdesteorin, för att komma tillrätta med dessa tillkortakommanden. Extremvärdesteorin fokuserar på fördelningens svans eftersom det är här de extrema observationerna uppträder.

## 1.3 Syfte

Syftet med studien är att undersöka hur VaR med extremvärdesteori presterar för olika typer av råvaror.

## 1.4 Avgränsningar

Vi undersöker daglig VaR för tre stycken olika råvaror (nickel, olja och silver) på tre olika konfidensnivåer (95 %, 99 % och 99.9 %). Handelsdagarna som vår undersökning baseras på är för olja och silver, från 1987-10-31 till 2007-10-31, samt för nickel, från 1997-10-31 till 2007-10-31. Endast en av extremvärdesteorins fördelningar appliceras i studien, GPD. Som referensmetoder undersöks två andra VaR metoder, historisk simulering och varians/kovarians metoden.

## 2. Teoretiska koncept

---

*Detta kapitel förser läsaren med en summering av de teoretiska koncept som har använts under utförandet av den här studien.*

---

### 2.1 Råvaror

Råvaror handlas på speciella råvarubörser där de köps och säljs med hjälp av standardiserade kontrakt. Några av de viktigaste handelsplatserna är:

- Chicago Mercantile Exchange
- London Metal Exchange
- New York Mercantile Exchange
- Euronext Liffe
- Dalian Commodity Exchange

På dessa börser handlas det med olika sorters råvaror såsom ädelmetaller, basmetaller, jordbruksvaror och energivaror m.m. I denna studie kommer vi begränsa oss till att studera tre olika råvaror; nickel, olja samt silver. Handeln med dessa tre råvaror har olika kännetecken, vilka beskrivs nedan.

#### 2.1.1 Nickel

Nickel är en silverlik metall som länge använts till bland annat mynttillverkning. Idag används nickel främst vid tillverkning av rostfritt stål, mynt och uppladdningsbara batterier. År 1979 började man handla med nickel över London Metal Exchange och idag uppgår världsproduktionen till 1 138 600 ton per år. Handeln med nickel kännetecknas av att vara väldigt volatil.<sup>1</sup>

#### 2.1.2 Olja

Olja är den mest handlade råvaran i världen och har handlats frekvent sedan början av förra seklet. Produktionen av olja är koncentrerad till ett fåtal företag (10 företag står för nära 70 % av total produktion). Dessutom är 9 utav de 10 största oljereserverna statsägda. Detta sammantaget innebär att oljepriset inte enbart styrs utav utbud och

---

<sup>1</sup> [www.lme.co.uk](http://www.lme.co.uk)

efterfrågan utan även av politiska beslut och ställningstaganden. Vid politiskt instabila tider brukar marknaden därför vara extra volatil.

### 2.1.3 Silver

Silver är en ädelmetall som länge använts till bland annat mynttillverkning. Idag är de främsta användningsområdena inom fotoindustrin och smycken. Silver tillhör den minst volatila av de råvaror vi har valt att titta på. Historiskt har silverpriset kännetecknats av att vara stabilt under långa perioder varefter en kraftig prisförändring inträffat.

### 2.1.4 Råvarors gemensamma kännetecken

Enligt Embrechts et al. (2005) kännetecknas tidsserier över råvarupriser av ett flertal egenskaper som försvårar estimeringen av riskmått. Exempel på sådana egenskaper är:

- I. Avkastningarna är inte identiskt oberoende fördelade (IID)
- II. Volatiliteten varierar över tiden
- III. Fördelningarna har tjock svans
- IV. Extrema avkastningar uppkommer i kluster

## 2.2 Value at Risk (VaR)

Definitionen av VaR är enligt Embrechts et al. (2005):

Givet en konfidensnivå  $\alpha \in (0,1)$ , ges VaR av det minsta nummer  $l$  så att sannolikheten att förlusten  $L$  överstiger  $l$  inte är större än  $(1-\alpha)$ :

$$VaR_{\alpha} = \inf \{l \in \mathfrak{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\}$$

VaR är en funktion av två parametrar: tidshorisont och konfidensnivå.

### 2.2.1 Uppkomsten och utvecklingen av VaR

I slutet av 1970-talet och i inledningen av 1980-talet började flera av de stora internationella bankerna utveckla interna modeller som skulle kunna estimeras institutionens totala risk. Anledningen till att de utvecklade dessa modeller var för att deras riskexponering blev alltmer komplex och att det blev allt svårare, men också allt viktigare att aggregera de olika riskerna genom att ta hänsyn till hur de interagerade med varandra. Man började nu införa mer eller mindre godtyckliga begränsningar vilket bland annat resulterade i att lönsamma investeringar ej kunde

göras. Kopplingen mellan olika områden var bristfällig och en minskad risktagning inom ett område innebar sällan att en högre risk kunde tas på ett annat.

Efterhand som bankerna kämpade med dessa problem, blev de gradvis varse om att vad som behövdes var någon form av sannolikhet på hur stor företagets totala förlust kunde bli. Ett sådant mått skulle ge bankerna en bättre förståelse för deras totala riskexponering, vilket i sin tur skulle mynna ut i en bättre allokering av kapital och begränsningar.

Det kanske mest kända resultatet av denna insikt är RiskMetrics systemet som utvecklades av JP Morgan. Det sägs att dåvarande styrelseordföranden på JP Morgan, Dennis Weatherstone, gav sin personal order om att förse honom med en daglig ensidig rapport om den totala risken och de möjliga förlusterna inom de närmsta 24 timmarna på bankens hela handelsportfölj. Personalen på JP Morgan följde ordern och utvecklade ett system där man först mätte alla de olika handelspositionernas enskilda risk och hur de kovarierade med varandra. Därefter summerade man dessa till ett enda mått, ”*the value at risk*”. Att utveckla detta system krävde stora arbetsinsatser och tog lång tid, men år 1990 togs det i bruk och man fann snabbt att det hade stark positiv effekt på företagets riskhantering.

Även andra finansiella institutioner utvecklade sina egna VaR-system under den här perioden. De olika systemen skiljde sig ganska betydligt från varandra även om de hade samma underliggande idé. De olika företagen som utvecklade dessa system var dock väldigt hemlighetsfulla och noga med att deras system inte skulle användas av någon konkurrent. Därför väcktes det stor uppmärksamhet när JP Morgan 1994 beslutade att göra en förenklad version av deras RiskMetrics tillgänglig för alla. Denna lansering var viktig, inte minst för att öka medvetenheten om VaR och skapa debatt om hur systemet kunde förbättras. Beslutet att göra RiskMetrics tillgänglig medförde också att användandet av VaR system ökade markant. Redan ett par år senare hade VaR måttet blivit det dominerande måttet för att mäta finansiell risk (Dowd 1998).



### 2.2.2 Fördelar med VaR

VaR har många fördelar jämfört med traditionella riskmått, de är enligt Dowd (2005):

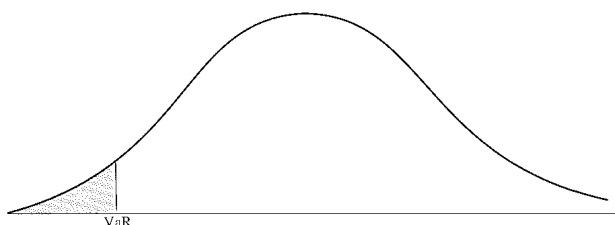
- VaR mäter risken i termer av förlorade pengar, vilket gör att måttet blir lättförståeligt och därmed blir det enklare att kommunicera risken till intressenter som ej är specialister inom riskteori.
- VaR kan användas på alla typer av positioner och riskfaktorer. Den kan appliceras på alla sorters portföljer och ännu viktigare, VaR gör det möjligt att jämföra olika portföljers risk. T.ex. kan VaR för en ränteportfölj jämföras med en portfölj bestående av optioner.
- VaR tillåter att man adderar risken från olika positioner till ett aggregerat riskmått för portföljen. Framförallt görs denna aggregering genom att man tar hänsyn till de inbördes förhållandena mellan riskfaktorena.
- VaR är ett holistiskt riskmått (d.v.s. ett riskmått som beskriver helheten) eftersom det tar full hänsyn till alla drivande riskfaktorer och tittar inte bara på ett riskmått i taget.
- VaR är probabilistiskt vilket innebär att VaR inte bara beskriver hur stor förlusten blir om ett visst scenario inträffar, utan också hur sannolikt detta scenario är.

Dessa fördelar har tillsammans gjort VaR till ett mycket populärt riskmått. Något som också hjälpt till att sprida VaR användandet är rapporten "the Basel Committee" utgav 1995-1996. Efter denna rapport har flera centralbanker gjort det obligatoriskt för underordnade banker att kvantifiera sin riskexponering med hjälp av VaR. Däremot har kommittén inte beslutat om någon standardmodell för beräkning av VaR och bankerna kan därmed välja fritt bland de olika metoderna.

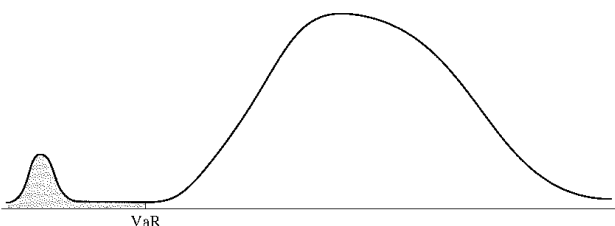
### 2.2.3 Nackdelar med VaR

Tyvärr har VaR precis som alla andra riskmått nackdelar. För det första kräver VaR relativt mycket datorkraft, speciellt om portföljen består av många olika tillgångar.

För det andra, ger VaR ingen information om storleken på förlusten om det blir en stor förlust (d.v.s. en förlust större än VaR). Detta tillkortakommande illustreras i Figur 2.1 och Figur 2.2. Portföljerna i Figur 2.1 och Figur 2.2 har identisk VaR men portföljen i Figur 2.2 är betydligt mer riskfylld eftersom den har en större potentiell förlust.



**Figur 2.1** (Hull 2006)



**Figur 2.2** (Hull 2006)

En annan nackdel med VaR är att det inte är ett så kallat *Coherent riskmeasure* (koherent riskmått). Kraven för ett sådant mått föreslogs av Artzner (1999) och de är:

- *Monotonicity* (monotonitet): Om portfölj A i alla möjliga scenarier har lägre avkastning än portfölj B så måste portfölj A ha lägre risk än portfölj B.
- *Translation Invariance* (omvandlingsbeständighet): Om man adderar x kronor till en portfölj så ska risken på portföljen reduceras med x.
- *Homogeneity* (homogenitet): Att öka storleken på portföljen ska endast innebära en uppskalning av risken med samma faktor.
- *Subadditivity* (subadditivitet): En sammanslagning innebär inte ytterligare risk, d.v.s. risken kan reduceras genom diversifiering.

Anledningen till att VaR inte är ett koherent riskmått är att det inte uppfyller subadditivetsvillkoret.

Slutligen har en del kritik framförts om att VaR inte är ett tillräckligt precist mått. Empirisk forskning utförd av Beder (1995) visar att olika VaR modeller kan ge väldigt olika skattningar. Dessutom visar forskning på att samma VaR modeller kan ge olika resultat beroende på hur de implementeras (Marshall and Siegel 1997).

## 2.2.4 Beräkningsmetoder för VaR

Det finns många olika sätt att beräkna VaR, i detta avsnitt beskriver vi några av de mest kända. Enligt Jorion (2001) kan de olika beräkningsmetoderna för VaR grovt delas in i två grupper:

- **Lokala-värderingsmetoder**

Dessa metoder mäter risk genom att värdera portföljen endast en gång, vid den initiala positionen, därefter beräknas portföljens värdeförändring vid eventuella förändringar som en funktion av den initialapositionen. Dessa metoder antar oftast att de drivande riskfaktorena är normalfördelade.

- **Fulla-värderingsmetoder**

Metoderna i denna grupp mäter risk genom en komplett prissättning för portföljen under en mängd olika scenarion.

Nedan beskrivs de beräkningsmetoder för VaR som tillämpas i denna studie.

### **Delta-normal metoden**

Delta-normal metoden eller varians/kovarians metoden som den också kallas är kanske den enklaste av de olika estimeringsmetoderna för VaR. Det är en lokal värderingsmetod som antar att tillgångarnas avkastning är linjära funktioner (även kallat delta-funktioner) av normalfördelade riskfaktorer. Detta antagande leder till att tillgångarnas avkastningar själva också är normalfördelade. Normalfördelningens standardegenskaper säger då att:

$$VaR_{\alpha} = -\mu + \sigma * z_{\alpha} \quad (2.1)$$

där  $\text{VaR}_\alpha$  betecknar VaR för konfidensnivån  $1-\alpha$ ,  $\mu$  avkastningarnas väntevärde,  $\sigma$  avkastningarnas standardavvikelse och  $z_\alpha$  är standardnormalfördelningens kritiska värde för konfidensnivån  $\alpha$ .

Eftersom man antar en normalfördelning så behöver man med denna metod endast estimerar två parametrar – förväntad avkastning och varians. Estimeringen av variansen görs genom att med hjälp av historisk data beräkna de olika tillgångarnas inbördes varianser och kovarianser (därav metodens namn).

När de två parametrarna är skattade säger normalfördelningens standardegenskaper att detta är allt som behövs för att beskriva avkastningarnas fördelning och därmed är förlusten som endast överstiges  $x$  procent av gångerna (d.v.s. VaR) lätt att bestämma.

Metoden är mycket praktisk och problem i beräkningen uppstår först när man ska beräkna VaR för en portfölj med många tillgångar, detta på grund av att varians/kovarians matrisen växer snabbt i takt med antalet tillgångar. För att råda bot på detta problem så brukar man förenkla uträkningen av varians/kovarians matrisen med hjälp av ”mapping” över ett mindre antal riskfaktorer. Detta minskar naturligtvis skattningens noggrannhet, men för det mesta genereras ändå acceptabla resultat (Jorion 2001).

Den största nackdelen med denna metod är att tyvärr följer inte avkastningar från finansiella tillgångar en normalfördelning (Mandelbrot 1963 och Fama 1963). Ofta karakteriseras finansiell data av; tjock svans, skevhet samt ostabila korrelationer. Detta är allvarliga tillkortakommanden och gör att metoden blir mindre attraktiv.

### **Historisk Simulering**

För att slippa göra antaganden om avkastningarnas fördelning kan historisk simulering användas. Denna metod antar att priserna i framtiden kommer att följa samma fördelning som de gjort förut. Man börjar med att bilda en hypotetisk portfölj som består av portföljens nuvarande position. De historiska avkastningarna till denna tänkta portfölj rekonstrueras sedan. Fördelningen av de hypotetiska avkastningarna används sedan för att beräkna VaR.

Valet av observationsperiodens längd är inte självklart; ett långt intervall innebär ett noggrannare mått men kan å andra sidan innebära att den använda datan blir irrelevant.

De största fördelarna med historisk simulering är att: metoden är relativt lätt att implementera och att den inte kräver att den använda datan har någon speciell fördelning.

En stor nackdel med denna metod är att den ger missvisande resultat om det förflutna inte överensstämmer med framtiden. En annan nackdel är att denna metod ger samma vikt till alla observationer oavsett ålder. Detta innebär dels att gamla otypiska observationer kan få för stor betydelse, dels att när observationer av stora förluster faller bort och inte längre tas med i beräkningen kan resultatet få en betydande påverkan. Slutligen, även om historisk simulering inte gör några antaganden om utseendet på avkastningarnas fördelning så antar metoden att fördelningen är konstant över tiden, dvs. att skevheten, volatiliteten och toppigheten inte förändras.

### 2.2.5 Backtesting av VaR

I det föregående avsnittet beskrevs olika metoder för beräkning av VaR för nästkommande period. Om dessa procedurer kontinuerligt implementeras finns möjligheten att kontrollera hur de olika metoderna presterar och jämföra deras relativa utfall. Den här typen av kontroll kallas *backtesting* (Embrechts et al. 2005).

Anta att vi vid tiden  $t$  estimerar VaR för en period. Vid tiden  $t+1$  kan vi då jämföra vår en-periods-VaR med det verkliga utfallet,  $L$ . Vi har, enligt definitionen av VaR:

$$P(L_{t+1} > VaR_{\alpha}^t) = 1 - \alpha$$

Detta betyder att sannolikheten för en överskridning av VaR är  $1-\alpha$ . Om den använda VaR metoden fungerar tillfredställande så bör alltså antalet överskridningar av VaR estimaten över  $m$  perioder vara:  $m \cdot (1 - \alpha)$ .

## 2.3 Extremvärdesteori (EVT)

I detta avsnitt behandlas ett relativt nytt sätt att analysera extremvärden i olika dataserier. Man skulle kunna säga att teorin försöker förklara det ovanliga istället för det vanliga. Idéerna och ämnet kan man spåra tillbaka till början av 1900-talet. Det dröjde dock till mitten av 1900-talet innan teorin formulerades på ett seriöst sätt för att användas på fysiska fenomen. I början var fokus på olika ingenjörsområden såsom att analysera hållbarhet för olika strukturer.

Man kan säga att extremvärden är de ovanliga avvikande händelserna. Ofta finns det väldigt få av dessa och därmed kan estimat av maxvärde eller minimivärde för en process ofta få väldigt höga/låga värden. Detta innebär att man behöver utföra en extrapolering med hjälp av den data man har. Det är här extremvärdesteorin kommer in, det är en klass av modeller som extrapolerar observerade värden från observerade värden (McNeil, 1999).

I princip finns det två olika modeller inom extremvärdesteori. Den äldre varianten som fokuserar på extremvärden inom olika "block" använder sig av GEV (den Generaliserade Extremvärdesfördelningen). Den modernare varianten kallas för POT (Peaks Over Threshold) och här används en annan fördelning; GPD (den Generaliserade Pareto Distributionen) som istället för att använda sig av block tittar på observationer över en "tröskel". Nedan följer en beskrivning av dessa modeller.

### 2.3.1 Den Generaliserade Extremvärdesfördelningen (GEV)

Detta är en äldre modell men fortfarande mycket användbar. Modellen tittar på de största/minsta observationerna i en serie av observerade värden. Den använder sig av "block", det vill säga att den delar upp de observerade värdena i olika intervall för att sedan titta på minsta eller högsta värdet i varje intervall – block. Det kan vara maximal nederbörd i ett område uppdelat på år eller största negativa prisförändringen på ett finansiellt instrument per månad eller dag.

Som tidigare nämnts analyseras de punkter som är av mest intresse, extremvärdena, här betecknade med  $M_n$ .

$$M_n = \text{Max}\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

där  $X_1, X_2, \dots, X_n$  är en sekvens av oberoende stokastiska variabler med samma fördelningsfunktion,  $F$ . Om,  $n$ , till exempel är observationer under ett år betecknar  $M_n$  det årliga maximum.

Distributionen för ett maximum blir därmed:

$$\Pr\{M_n \leq z\} = \Pr\{X_1 \leq z, \dots, X_n \leq z\} = \{F(z)\}^n$$

För att undvika problem med konvergensen av sannolikhetsmassan görs en linjär normalisering av variabeln  $M_n$  på följande sätt:

$$M_n^* = \frac{M_n - b_n}{a_n} \quad \text{för sekvenser av konstanterna } \{a_n > 0\} \text{ och } \{b_n\}$$

Lämpliga val av  $a_n$  och  $b_n$  stabiliserar placeringen och skalan av  $M_n^*$  när  $n$  växer och på det sättet undviks relaterade problem.

Gränsvärdesdistributionen för  $M_n^*$  kan nu hittas med lämpliga val av  $a_n$  och  $b_n$  istället för  $M_n$ . Det finns begränsade möjligheter för hur denna distribution kan se ut.

Om det existerar sekvenser av konstanter  $\{a_n > 0\}$  och  $\{b_n\}$  så att normaliseringen konvergerar mot distributionen  $G$  enligt nedan:

$$\Pr\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n}\right\} \rightarrow G(z) \text{ när } n \rightarrow \infty$$

Så måste i enlighet med Fisher Tippet teoremet  $G$  tillhöra någon av de tre nedanstående distributionerna (Fernandez 2003):

$$\text{I} \quad G(z) = \exp\left[-\exp\left\{-\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)\right\}\right], \quad -\infty < z < \infty$$

$$\text{II} \quad G(z) = \begin{cases} 0, & z \leq b \\ \exp\left\{-\left(\frac{z - b}{a}\right)^{-\alpha}\right\}, & z > b \end{cases}$$

$$\text{III} \quad G(z) = \begin{cases} \exp\left\{-\left[\left(\frac{z - b}{a}\right)^\alpha\right]\right\}, & z < b \\ 1, & z \geq b \end{cases}$$

för parametrarna  $a > 0, b$  och  $\alpha > 0$ .

Ovanstående klasser av distributioner kallas för I: Gumbel, II: Fréchet och III: Weibull.

Det vanligaste är att man kombinerar dessa klasser till en enda familj av distributioner - den generaliserade extremvärdesdistributionen:

$$G(z) = \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi \left( \frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\}$$

där  $\mu$  och  $\sigma$  motsvarar lokaliseringsparametern  $b$  respektive skalparametern  $a$ . Den sista parametern  $\xi$  är en så kallade formparameter (*shape parameter*).

Ovanstående distribution är definierad på området  $\{z : 1 + \xi(z - \mu)/\sigma > 0\}$  där parametrarna uppfyller:  $-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0, -\infty < \xi < \infty$

För stora värden på  $n$  kan vi därmed approximera fördelningen:

$$\Pr\{(M_n - b_n)/a_n \leq z\} \approx G(z)$$

Låt  $X_1, X_2, \dots$  beteckna en tidsserie med observerade värden. Genom att dela upp denna serie till ett antal serier,  $m$  "block", med vardera,  $n$ , värden fås en serie med extremvärden. Denna serie kan anpassas till GEV fördelningen.

Att anpassa data till GEV distributionen görs lättast med hjälp av *Maximum Likelihood* metoden. Denna metod används då man har ett antal okända parametrar som ska skattas. Främsta målet med metoden är att maximera sannolikheten för att den observerade dataserien kommer från en bestämd distribution med hänsyn till de okända parametrarna. Med andra ord får man den skattning som har högst sannolikhet med hänsyn till den observerade datan och den förutbestämda fördelningen.

Låt  $x_1, x_2, \dots, x_n$  återigen beteckna observerade värden av en stokastisk variabel med täthetsfunktionen  $f(x; \theta)$ . Maximum likelihood funktionen blir då den totala sannolikheten för att just den här dataserien skulle ha producerats av den antagna



täthetsfunktionen. I parametrarna  $\theta$  ingår både kända och okända parametrar, låt oss beteckna de okända som  $\theta_0$ . Nedan ses Likelihood funktionen:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

Likelihoodfunktionen är relativt tungrodd att jobba med, främst på grund av att det är en produktsumma. Ett vanligt använt knep är att logaritmera den och få fram den så kallade log Likelihoodfunktionen istället:

$$l(\theta) = \log(L(\theta)) = \sum_{i=1}^n \log(f_i(x_i; \theta))$$

Estimatet  $\hat{\theta}_0$  kan nu fås fram genom att maximera ovanstående funktion. Maximering av Likelihoodfunktionen respektive log Likelihoodfunktionen ger samma estimat. Detta eftersom logaritmfunktionen är monoton, vilket innebär att den är ickeavtagande eller ickevåxande. Maximeringen kan utföras på olika sätt. Ett alternativ är att derivera och "sätta lika med noll". Men detta är inte alltid möjligt och då måste maximeringen istället ske numeriskt.

### Return Level

Return level handlar om att estimeras kvantilerna i GEV modellen. Fördelningen sätts lika med en hög sannolikhet, vilket leder till att man kan ta fram det värde,  $z_p$ , som leder till denna höga sannolikhet:

$$G(z_p) = 1 - p \quad 0 < p < 1$$

där  $\frac{1}{p} = m$  och kallas för return level.  $z_p$  är det värde som överskrids av vart  $m$ : te

värde. Om man exempelvis har årsbaserad data innebär det att nivån  $z_p$  överskrids

vart  $m$ : te år.  $z_p$  räknas ut genom att invertera  $G$ :

$$z_p = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi} \left[ 1 - \{-\log(1-p)\}^{-\xi} \right] = \mu - \frac{\sigma}{\xi} \left[ 1 - \left\{ -\log \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \right\}^{-\xi} \right] & \text{för } \xi \neq 0 \\ \mu - \sigma \log\{-\log(1-p)\} = \mu - \sigma \log\{-\log(1-p)\} & \text{för } \xi = 0 \end{cases}$$

Vanligen gör man följande omskrivning:

$$y_p = -\log(1-p)$$

$$z_p = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi} \left[ 1 - y_p^{-\xi} \right] & \text{för } \xi \neq 0 \\ \mu - \sigma \log(y_p) & \text{för } \xi = 0 \end{cases}$$

Omskrivningen görs främst för att underlätta när man plottar en så kallad *return level-plot*, vilket vi kommer att se strax.

### 2.3.2 Den Generaliserade Pareto Distributionen (GPD)

Den Generaliserade Pareto Distributionen (GPD) är en annan metod inom EVT. GEV tar bara hänsyn till maximat i varje block, vilket innebär att vi förlorar värdefull information i de extrempunkter som sällas bort i varje block. GPD är en modernare grupp av modeller som tar hänsyn till mer av de observerade värdena. GPD är generellt sett mer användbar i finansiella sammanhang (McNeil, 1999).

I GPD modellen införs en tröskelnivå,  $u$ , därefter sällas alla de värden som ligger över denna tröskel ut. På detta sätt får man med alla förekommande extrempunkter i datan oavsett när de har observerats.

Återigen betecknas den observerade datan som  $X_1, X_2, \dots, X_n$  värdena anses vara IID med samma fördelningsfunktion  $F$ . Med hjälp av  $F$  kan den sökta betingade sannolikheten erhållas:

$$\Pr\{X > u + y | X > u\} = \frac{1 - F(u + y)}{1 - F(u)}, \quad y > 0$$

Eftersom  $F$  inte är känd behöver vi approximera denna fördelning med en hög tröskelnivå på något sätt. Med hjälp av GEV presenterad tidigare kommer man fram till följande.

Låt återigen:  $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

I enlighet med tidigare diskussion, approximera en GEV distribution enligt nedanstående för stora  $n$ :

$$\Pr\{M_n \leq z\} \approx G(z)$$

$$G(z) = \exp\left\{-\left[1 + \xi\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}\right\}$$

Där de olika parametrarna måste skattas.

Distributionsfunktionen för  $(X - u)$  betingat att  $X > u$  och för stora  $u$  är approximativt:

$$H(y) = 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\tilde{\sigma}}\right)^{-1/\xi} \quad \text{definierat på } \{y : y > 0 \quad \text{och} \quad (1 + \xi y / \tilde{\sigma}) > 0\}$$

$$\text{där } \tilde{\sigma} = \sigma + \xi(u - \mu)$$

Det ovanstående ekvationer säger är att om vi kan approximera GEV fördelningen till de olika blockmaximan så finns det en motsvarande tröskeldistribution (GPD) som kan approximeras. De olika parametrarna har en sammankoppling och  $\xi$  är densamma för de båda distributionerna. I fallet där  $\xi \rightarrow 0$  ser distributionen ut på följande vis:

$$H(y) = 1 - \exp\left(-\frac{y}{\tilde{\sigma}}\right), \quad y > 0$$

Parametrarna i GPD estimeras, i likhet med de i GEV, genom Maximum Likelihood. Detta är inte möjligt analytiskt utan görs med hjälp av numeriska metoder.

## Return Level

Precis som i GEV modellen kan vi få fram en return level i GPD modellen. Tolkningen är precis densamma som i GEV. Den enda skillnaden är att distributionen för att  $X > u$  måste skattas enligt nedan.

$$\Pr(X > x | X > u) = 1 - H(x - u) = \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - u}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi}$$

det följer att

$$\Pr\{X > x\} = \Pr\{X > x | X > u\} \Pr\{X > u\} = \zeta \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - u}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi}$$

där  $\zeta = \Pr\{X > u\}$

För att erhålla return level, i det här fallet betecknad med  $x_m$ , sätts ovanstående

ekvation lika med  $\frac{1}{m}$ , efter invertering erhålls:

$$x_m = \begin{cases} u + \frac{\sigma}{\xi} \left[ (m\zeta)^\xi - 1 \right] & \text{för } \xi \neq 0 \\ u + \sigma \log(m\zeta) & \text{för } \xi = 0 \end{cases} \quad \text{föresatt att } x_m > u$$

$\zeta$  skattas lättast genom att ta antalet värden,  $k$ , över tröskeln dividerat med antalet värden,  $n$ , i dataserien.

$$\hat{\zeta} = \frac{k}{n}$$

## Modellverifiering:

Det är viktigt att se till att den skattade GEV eller GPD modellen inte brister på något sätt. Det främsta verktyget för att göra detta utgörs av ett antal grafer. Man kan inte med hjälp av dessa dra slutsatsen att modellen är perfekt men det är ett av de

bästa verktygen för att se att den inte brister fundamentalt. De vanligaste graferna som förekommer i litteraturen är:

- *Sannolikhetsplot (Probability Plot)*

Här jämförs den empiriska distributionen med den vi har anpassat. Först rangordnas data med avseende på maxima,  $z_{(1)} \leq z_{(2)} \leq \dots \leq z_{(m)}$ . Den empiriska distributionen är:

$$\tilde{G}(z_{(i)}) = \frac{i}{m+1}$$

Medan den framtagna modellen med insatta estimat (betecknat med  $\hat{\cdot}$ ):

$$\hat{G}(z) = \exp \left\{ - \left[ 1 + \hat{\xi} \left( \frac{z - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right]^{-1/\hat{\xi}} \right\}$$

Om modellen stämmer bra överens med den observerade datan bör den empiriska distributionen vara lik den modellerade GEV distributionen:

$$\tilde{G}(z_{(i)}) \approx \hat{G}(z_{(i)})$$

Detta valideras lättast genom att ställa upp en graf med respektive värdepar mot varandra:

$$\left\{ \left( \tilde{G}(z_{(i)}), \hat{G}(z_{(i)}) \right), i = 1, \dots, m \right\}$$

I GPD ritas istället motsvarande fördelningsfunktion:

$$\hat{H}(y) = 1 - \left( 1 + \frac{\hat{\xi}y}{\hat{\sigma}} \right)^{-1/\hat{\xi}}, \hat{\xi} \neq 0$$

Punkterna i grafen bör ligga väldigt nära enhetsdiagonalen (kurvan  $x$ ). Om de avviker för mycket är det en indikation på att något är fel i modellen. Nackdelen med denna plot är dock att båda modellerna är anpassade för att närma sig 1 när

$z_{(i)}$  växer. Det är också denna region som är av mest intresse, därmed erhålls minst information om de punkterna som är av största intresse. För exempel, se Figur 1.

- *Kvantilplot (Quantile Plot)*

För att undvika problemen diskuterade i sannolikhetsplotten kan en kvantilplot ställas upp. Skillnaden här är att man väljer att plotta  $z_{(i)}$  direkt mot inversen av den skattade GEV modellen:

$$\left\{ \left( \hat{G}^{-1}\left(\frac{i}{m+1}\right), z_{(i)} \right), i = 1, \dots, m \right\}$$

I fallet då en GPD modell analyseras ser inversen ut enligt nedan:

$$\hat{H}^{-1}(y) = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left[ y^{-\hat{\xi}} - 1 \right]$$

I likhet med sannolikhetsplotten tyder avvikelser från enhetsdiagonalen på att modellen fallerar på ett eller annat sätt. För exempel, se Figur 1.

- *Return level-Plot*

Return level - plot visar return level,  $z_p$  mot  $y_p$  i en logaritmisk skala.

GEV:

$$y_p = -\log(1-p) \quad 0 < p < 1$$

$$z_p = \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left[ 1 - \{-\log(1-p)\}^{-\hat{\xi}} \right]$$

GPD:

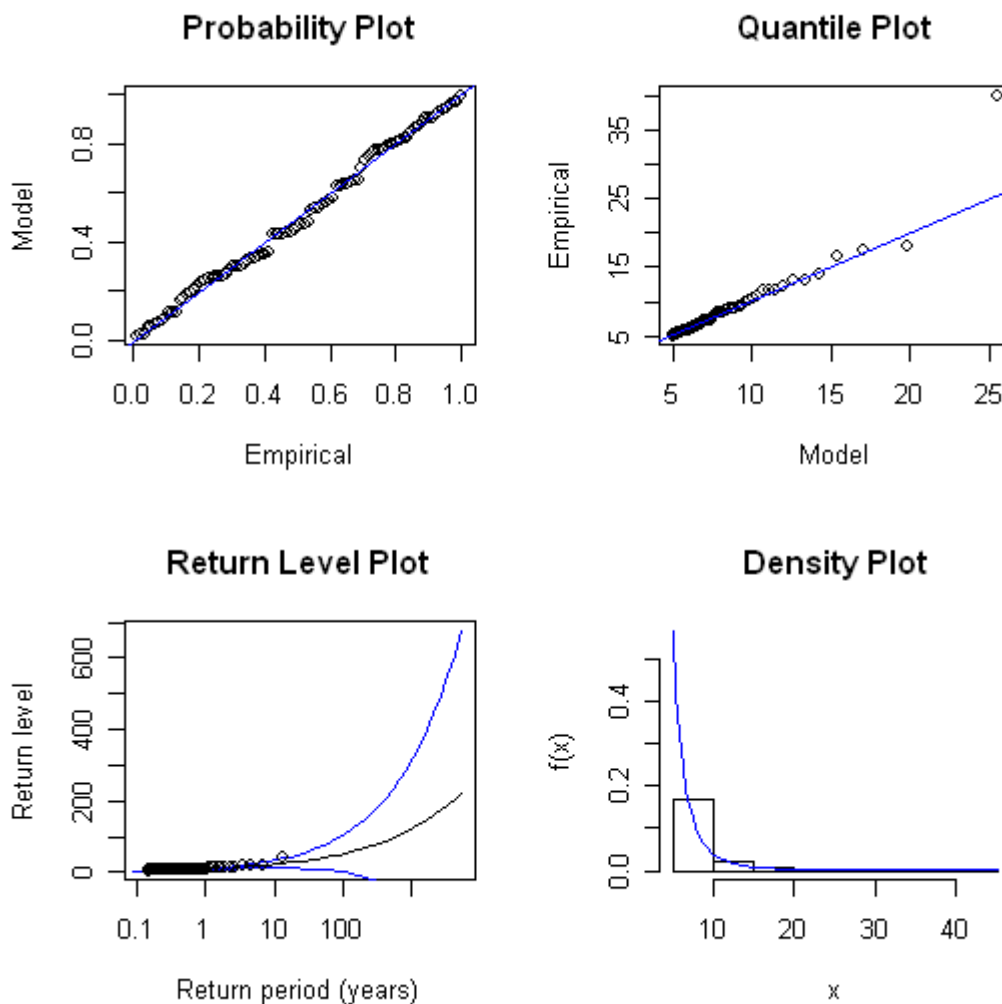
$$\hat{x}_m = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left[ (m \hat{\xi}_u)^{\hat{\xi}} - 1 \right]$$

Svansen på distributionen är komprimerad så att estimatet av return level för långa return levels kan ses i grafen. Linjäriteten av grafen i fallet då  $\xi = 0$  utgör en

baslinje för att avgöra effekterna av den estimerade formparametern. Konfidensintervall kan läggas till för att göra plotten mer informativ. För exempel, se Figur 1.

- *Histogram (Density Plot)*

Här plottas täthetsfunktionen för den skattade modellen tillsammans med ett histogram byggt på den observerade datan. Denna plot är lite svår att handskas med eftersom histogrammet ändrar sig markant beroende på vilka intervall man väljer. Därmed är denna plot inte lika informativ som de andra men den kan ge mindre indikationer på problem. För exempel, se Figur 1.



**Figur 1.** Exempel på Sannolikhetsplot, Kvantilplot, Return Level-plot och Histogram.

## Tröskelval

Ett uppenbart problem med att anpassa en GPD distribution är valet av tröskelnivå. En för hög eller låg tröskel leder till olika slags problem. Det kan ibland vara väldigt problematiskt att komma fram till en rimlig tröskelnivå, i detta avsnitt beskrivs två metoder som kan hjälpa till att verifiera en bra nivå.

Att välja en för låg tröskel innebär att punkter tas med i analysen som egentligen inte utgör några extrempunkter. Detta leder till en snedhet i modellen (*bias*). Val av en för hög nivå förkastar en hel del punkter med användbar information och leder istället till en hög varians. Utmaningen ligger i att hitta en lagom nivå som balanserar dessa.

Vanligen brukar man välja tröskelnivån så låg som möjligt med hänsyn till att modellen ändå utgör en acceptabel approximation. Det finns främst två metoder för att göra detta, den ena utför man innan man anpassar distribution och den andra bygger på att man stabiliserar parametrarna efter att approximeringen av modellen ägt rum.

Återigen används samma beteckningar. Den råa datan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  anses vara IID. Extremvärden är de händelser som överstiger tröskeln  $u$ . Dessa extremvärden betecknas som  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(k)}$  och överskridningarna som  $y_j = x_{(j)} - u$ ,  $j = 1, \dots, k$

Den första metoden för att komma fram till ett bra tröskelvärde baseras på väntevärdet av GPD. Om  $Y$  har en GPD distribution med parametrarna  $\sigma$  och  $\xi$  så är väntevärdet.

$$E(Y) = \frac{\sigma}{1 - \xi} \quad \text{föresatt att } \xi < 1, \text{ när } \xi \geq 1 \text{ är väntevärdet oändligt.}$$

Om man antar att GPD distributionen är lämplig som modell för att modellera de värden som överskrider tröskeln (extremvärdena) kan väntevärdet skrivas som:

$$E(X - u_0 | X > u_0) = \frac{\sigma_{u_0}}{1 - \xi} \quad \text{föresatt att } \xi < 1$$



där  $\sigma_{u_0}$  betecknar skalparametern som motsvarar tröskelnivån  $u_0$ .

Om nu GPD är giltig för de överskridande värdena bör den vara lika giltig för  $u > u_0$  med lämplig förändring av skalparametern  $\sigma_u$ .

$$E(X - u \mid X > u) = \frac{\sigma_{u_0} + \xi u}{1 - \xi}$$

Därmed är  $E(X - u \mid X > u)$  en linjär funktion av  $u$  för  $u > u_0$ .  $E(X - u \mid X > u)$  är helt enkelt väntevärdet av de värden som överskrider  $u$ , där väntevärdet av stickprovet ger ett empiriskt estimat. Dessa ska därmed ändras linjärt med  $u$  och leder till följande procedur. Man ritar upp nedanstående punkter i en graf:

$$\left\{ \left( u, \frac{1}{n_u} \sum_{i=1}^{n_u} (x_{(i)} - u) \right) : u < x_{\max} \right\}$$

där  $x_{(1)}, \dots, x_{(n_u)}$  består av de  $n_u$  observationer som överskrider  $u$  och  $x_{\max}$  är det största värdet, denna graf kallas ”*mean residual life plot*”, för exempel se bilaga 2,3 och 4. Grafen bör vara linjär i  $u$  och konfidensintervall kan läggas till baserat på approximerad normalitet av stickprovets väntevärden. Genom att studera plotten kan man avgöra vid vilket värde på  $u$ , man kan se en linjär trend. Som tidigare påpekats bör det lägsta lämpliga värdet väljas.

Den andra metoden består av att undersöka stabiliteten i de olika förekommande parametrarna i modellen. Det innebär att man anpassar ett antal olika GPD fördelningar och ser hur  $\sigma$  och  $\xi$  beter sig. Om GPD är en lämplig modell för att modellera extremvärden över en tröskel  $u_0$  så bör också extremvärden baserat på en högre tröskel  $u$  följa en GPD distribution. Formparametern  $\xi$  bör vara identisk för de två modellerna med olika trösklar medan  $\sigma$  förändras så länge  $\xi \neq 0$ :

$$\sigma_u = \sigma_{u_0} + \xi(u - u_0)$$

Ovanstående ekvation kan skrivas om så att den istället blir konstant med  $u$  enligt:

$$\sigma^* = \sigma_u - \xi u$$

Med denna omskrivning bör både  $\sigma^*$  och  $\xi$  vara konstanta med  $u$  då  $u > u_0$ . De kommer inte att vara exakt konstanta men bör vara stabila efter hänsyn till deras samplingsfel. Detta argument påpekar vikten av att plotta både  $\sigma^*$  och  $\xi$  mot  $u$  tillsammans med konfidensintervall för respektive parameter och att välja  $u_0$  som det lägsta värdet på  $u$  där estimaten fortfarande är konstanta, för exempel se bilaga 2,3 och 4. Konfidensintervallen skattas lätt fram genom *delta metoden* som beskrivs i nästa avsnitt.

### Deltametoden

Deltametoden är en metod för att ta fram konfidensintervall för skalära funktioner av maximum likelihood estimat. Den ger generellt ett bra estimat och bygger på approximering av normalfördelningen.

Efter en maximum likelihood skattning har estimatet,  $\hat{\theta}_0$ , av parametern  $\theta_0$  med dimensionen  $d$ , erhållits. Under vissa passande regularitetsvillkor för stora  $n$ , kan man anta en normalfördelning för dessa maximum likelihood skattningar:

$$\hat{\theta} \in MVN(\theta_0, I_E(\theta_0)^{-1})$$

där  $I_E(\theta)$  kallas för den förväntade informationsmatrisen och är en  $d \times d$  matris med

$$\text{elementen: } e_{i,j}(\theta) = E \left\{ - \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ell(\theta) \right\}$$

Denna måste skattas och kallas då istället för den observerade informationsmatrisen,  $I_o(\theta)$  och de olika elementen blir istället:

$$e_{i,j}(\theta) = - \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ell(\theta)$$

Variansmatrisen är enligt fördelningen ovan för de skattade maximum likelihood parametrarna:

$$V_{\theta} = I_{\theta}(\theta)^{-1}$$

En skalär funktion av maximum likelihood estimaten,  $\phi = g(\theta_0)$  ger maximum likelihood estimaten av funktionen,  $\hat{\phi}_0 = g(\hat{\theta}_0)$ . Dessa funktioner uppkommer ofta som vi har sett i tidigare avsnitt.

Fördelningen för funktionen blir:

$$\hat{\phi}_0 \in N(\phi_0, V_{\phi})$$

$$\text{där } V_{\phi} = \nabla \phi^T V_{\theta} \nabla \phi \quad \text{med} \quad \nabla \phi = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial \theta_d} \right]^T$$

evaluerad vid  $\theta_0$

För att därefter få fram konfidensintervall för  $\phi_0$  genom:

$$\hat{\phi}_0 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{V_{\phi}}$$

där  $z_{\alpha/2}$  är den  $(1 - \alpha/2)$  kvantilen av den standardiserade normalfördelningen.

## Deklustring

De ovanstående modellerna, GEV och GPD, har tidigare förutsatt oberoende stokastiska variabler. I de data där vi vanligtvis applicerar dessa modeller förekommer ofta temporära beroenden. Här nedan presenteras ett enkelt sätt att hantera dessa.

I finansiell data är det väldigt vanligt med dessa beroenden, det kan exempelvis handla om att stora nedgångar följer varandra. Detta förekommer också i andra data, om vi till exempel vet att det regnade mycket idag är sannolikheten för mycket regn imorgon eller i övermorgon stor men det säger ingenting om hur det kommer att se ut om 30 dagar. Däremot är den grundläggande distributionen densamma för nederbörden idag och om 30 dagar. Detta kallas matematiskt för att processen är stationär. Man visar enkelt att maxima av en sådan här process följer en GEV

distribution,  $G$ , presenterad tidigare. Den enda skillnaden blir att vi får justera modellen med ett extremindex,  $\Theta$ . Den nya justerade modellen,  $G_1(z)$  ser ut enligt nedan (den tidigare härledda modellen för samma helt oberoende data är betecknad med  $G$ ):

$$G_1(z) = G^\Theta(z) = \exp\left\{-\Theta \left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}\right\} = \exp\left\{-\left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu^*}{\sigma^*}\right)\right]^{-1/\xi}\right\}$$

$$\text{där } \mu^* = \mu - \frac{\sigma}{\xi} (1 - \Theta^{-\xi}) \quad \text{och} \quad \sigma^* = \sigma \Theta^\xi$$

$\sigma$  och  $\mu$  ändras medan  $\xi$  är konstant.

I fallet då man har en gumbel distribution blir motsvarande parametrar:

$$\mu^* = \mu + \sigma \log \Theta \quad \text{och} \quad \sigma^* = \sigma$$

I det här fallet är det endast  $\mu$  som ändrar sig.

$\Theta$  kallas som tidigare nämnts för extremindex och beskriver medelstorleken på ett kluster och förklaras utförligare nedan.

Inom GEV ändrar inte detta någonting eftersom man redan har delat in sin data i olika block och endast tittat på maxima i varje block. Det innebär med andra ord att de beroende datapunkterna redan har sällats bort.

I GPD fungerar det däremot ibland effektivt att använda en metod kallad deklustring. Tillvägagångssättet är enligt följande, först använder man sig av en empirisk regel för att definiera kluster över tröskeln,  $u$ . Med andra ord, letar man efter intervall (kluster) där datapunkter efter varandra överskrider tröskeln. Efter detta identifieras maxima i varje kluster. Därefter antar man att dessa maxima är oberoende i enlighet med begreppet stationaritet beskrivet tidigare. Nu kan man anpassa en GPD distribution till dessa punkter.

Vanligtvis definieras kluster med hjälp av en parameter,  $r$ , som avgör hur många datapunkter som måste underskrida tröskeln,  $u$ , innan nästa kluster startas. På detta sätt delas hela dataserien in i ett antal kluster,  $N$ . Det finns inte några klara empiriska

eller teoretiska regler hur man bör välja  $r$  eftersom det är beroende på hur datan ser ut. Coles (2001) föreslår att man provar sig fram till ett lämpligt värde som leder till bra resultat.

Vi har tidigare definierat extremindeks som medelstorleken på ett kluster. Antalet punkter,  $n$ , som överskrider tröskeln,  $u$ , i dataserien tillsammans med antalet kluster,  $N$ , ger en skattning av extremindeks:

$$\Theta = \frac{n}{N}$$

### Return level med deklustring och GPD

Resonemanget här ser precis likadant ut som return level resonemanget för GPD, enda skillnaden är att vi i detta fall behöver skatta en sannolikhet för att  $x$  ligger inom ett kluster såväl som att  $x$  är större än  $u$ .

$$\begin{aligned} \Pr\{X > x\} &= \Pr\{X > x | X > u, X \text{ inom kluster}\} \Pr\{X > u\} \Pr\{X \text{ inom kluster}\} = \\ &= \theta \zeta \left[ 1 + \xi \left( \frac{x-u}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \end{aligned}$$

där  $\Theta$  är extrem index från deklustringen.

Return level,  $x_m$ , ekvationen blir enligt nedan och tolkas likadant som tidigare:

$$x_m = \begin{cases} u + \frac{\sigma}{\xi} \left[ (m\zeta\theta)^\xi - 1 \right] & \text{för } \xi \neq 0 \\ u + \sigma \log(m\zeta\theta) & \text{för } \xi = 0 \end{cases} \quad \text{förutsatt att } x_m > u$$

### 2.3.3 VaR med EVT

VaR enligt definition är att hitta de kvantiler på den konfidensnivån på VaR man önskar. Med andra ord har vi redan härlett formeln för VaR i samband med return level.

$\alpha$  motsvarar  $p$  och som vi har visat tidigare är  $p = \frac{1}{m}$

Sammanfattat blir ekvationerna för att räkna ut VaR därmed:

### GEV

$$VaR_\alpha = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi} [1 - y_p^{-\xi}] & \text{för } \xi \neq 0 \\ \mu - \sigma \log(y_p) & \text{för } \xi = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

där

$$y_p = -\log\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

### GPD

$$VaR_\alpha = \begin{cases} u + \frac{\sigma}{\xi} \left[ \left( \frac{1}{\alpha} \zeta \right)^\xi - 1 \right] & \text{för } \xi \neq 0 \\ u + \sigma \log\left( \frac{1}{\alpha} \zeta \right) & \text{för } \xi = 0 \end{cases} \quad \zeta = \frac{k}{n} \quad (2.2)$$

### GPD med Deklustring

$$VaR_\alpha = \begin{cases} u + \frac{\sigma}{\xi} \left[ \left( \frac{1}{\alpha} \zeta \theta \right)^\xi - 1 \right] & \text{för } \xi \neq 0 \\ u + \sigma \log\left( \frac{1}{\alpha} \zeta \theta \right) & \text{för } \xi = 0 \end{cases} \quad \theta = \frac{n}{N} \quad (2.3)$$

### 3. Data

---

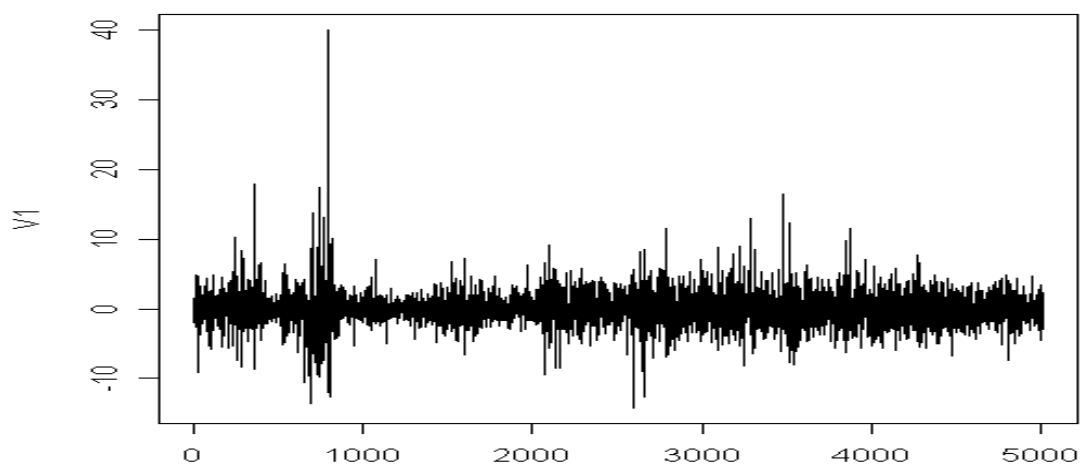
*I detta kapitel förses läsaren med information om den empiriska datan som har använts i denna studies VaR analys.*

---

Datan som används i denna studie är tidsserier över tre olika råvarors (nickel, olja, silver) prisförändringar. Anledningen till valet av just dessa tre råvaror är främst att de representerar råvaror med olika egenskaper såsom normalitet, volatilitet och extremhet.

Undersökningsperioden sträcker sig mellan 1987-10-31 och 2007-10-31 för olja och silver. Då nickel inte handlats lika länge, väljer vi en undersökningsperiod lika lång som vi har tillgänglig data. Det innebär att nickel undersöks för perioden 1997-10-31 till 2007-10-31. Tidsserierna hämtas från Reuters. Deras olika karakteristik diskuteras nedan.

#### 3.1 Olja



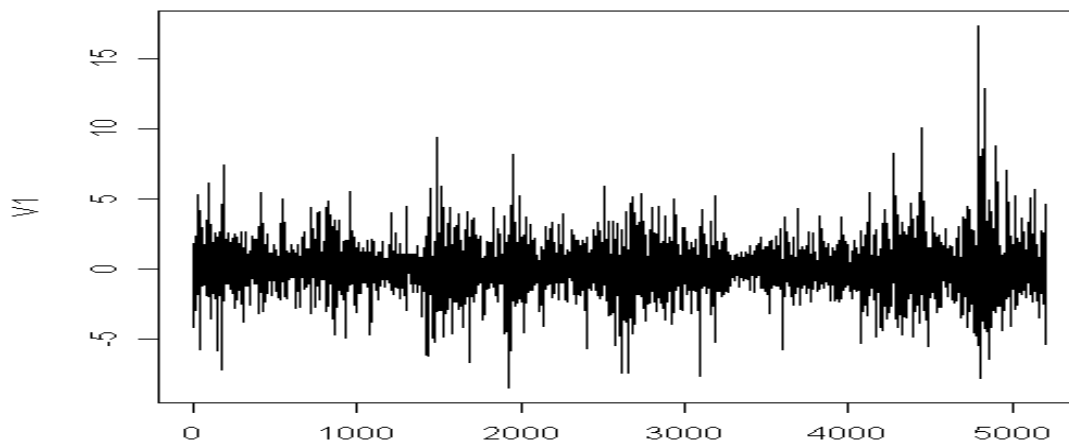
**Figur 3.1** Dagliga logaritmerade avkastningar för olja, neglerat.

Oljetidserien är mycket volatil (standardavvikelse=0.0237). Tidsseriens kurtosis (toppighet) är lika med 20.7, vilket innebär att fördelningen har smal topp och feta svansar. Det är med andra ord mycket hög sannolikhet för extrema utfall jämfört med en normalfördelning som har en kurtosis på 3. Datans skevhet är -1.25 vilket

innebär att datan ”lutar åt vänster”. Även här syns alltså en viss avvikelse från normalfördelningsantagandet som innebär 0 i skevhet.

Vidare finns flera extrema prisförändringar på över 10 %, den största observerade förlusten uppgår till hela 40 %. Medelprisförändringen är 1.7 %.

### 3.2 Silver



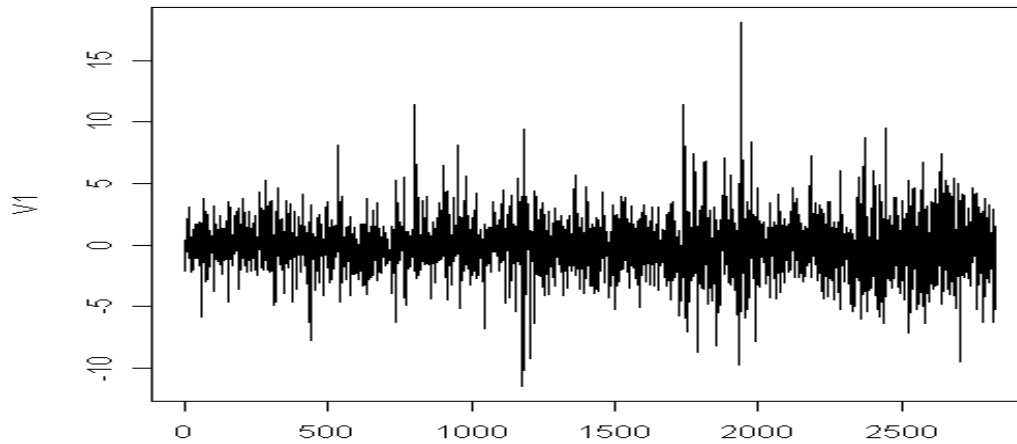
**Figur 3.2** Dagliga logaritmerade avkastningar för silver, neglerat.

Silver är den minst volatila råvaran av de råvaror vi inkluderat i denna studie (standardavvikelse 0.015). Dock, som nämnts i teoriavsnittet och som syns i Figur 3.2 så karaktäriseras priserna av att i långa perioder ligga relativt stabilt varefter det kan ske kraftiga upp- och nedgångar. Den största observerade förlusten uppgår till 17.3% medan medelstorleken på en upp- eller nedgång är 1.03%. Silvrets prisförändringar har en kurtosis som uppgår till 8.0, d.v.s. betydligt mindre toppig än oljetidsserien (kurtosis 20.7) men fortfarande klart skiljd från normalfördelningens kurtosis (3). Skevheten är -0.67 och lägger sig därmed även den mellan oljans (-1.25) och normalfördelningens (0).

Till slut noterar vi tendensen till att extrema observationer kommer i kluster; en stor förlust följs med andra ord ofta av ytterligare en stor förlust.



### 3.3 Nickel



**Figur 3.3** Dagliga logaritmerade avkastningar för nickel, neglerat

Nickeldatan karakteriseras av att vara relativt volatil (standardavvikelse=0.021). Datans kurtosis är bara 4.2, d.v.s. endast något toppigare än normalfördelningen. Skevheten är -0.25, också det en ganska liten avvikelse från normalfördelningsantagandet. Medelprisförändringen är 1.25%. Den största observerade förlusten uppgår till 19%.

## 4. Metod

---

*I detta kapitel presenteras de metoder som använts i studien. För att underlätta förståelsen för vårt tillvägagångssätt presenterar vi ett antal grafer. Vi har valt att förlägga dessa till bilagor för att inte kapitlet ska bli för stort och svårläst vid en första genomläsning.*

---

Samtliga beräkningsmetoder i vår studie använder sig på något sätt av de historiska prisförändringarna. För att göra vår jämförelse mellan metoderna så rättvis som möjligt använder vi oss av samma skattningsperiod för alla tre metoderna. Detta ”skattningsfönster” är hela tiden 3000 observationer långt (hälften, d.v.s. 1500 för nickel) vilket innebär att gamla observationer ramlar ut efterhand som nya prisförändringar observeras. Anledningen till att vi väljer att använda ett sådant ”rörligt fönster” är att vi på så sätt undviker användandet av alltför gammal data som inte längre kan antas spegla framtiden. Våra skattade VaR mått backtestas över 2000 (hälften d.v.s. 1000 för nickel) observerade verkliga förluster. Nedan beskriver vi hur de olika VaR skattningarna erhålls.

### **EVT**

I vår analys av denna metod går vi tillväga på följande sätt. Vi börjar med att definiera de logaritmerade dagliga avkastningarna för de tre råvarorna med hjälp av Excel. Främst för att vi endast är intresserade av de dagliga förändringarna i samband med VaR och för att uppnå stationaritet. Eftersom de formler vi redovisat under teoriavsnittet kring EVT bygger på maximan väljer vi att negligera våra avkastningar. Detta innebär att de negativa avkastningarna kommer att motsvaras av positiva tal och tvärtom. Vi för in vår data i programmet R, valet av modell blir POT inom GPD familjen eftersom denna är bäst lämpad för detta slag av simuleringar. Därefter följer vi nedanstående metod, beskriven i kronologisk ordning:

#### I. Val av tröskel

En *mean residual life plot* ritas och en graf över de olika GPD parametrarna plottade mot  $u$  för att analysera valet av en lämplig tröskel.

- II. Estimering av parametrar  
Nu estimeras de två ingående parametrarna i GPD modellen,  $\sigma$  och  $\mu$ . Detta görs hela tiden för de 3000 (1500 för nickel) senaste dagsavkastningarna.
- III. Verifiering av modell  
Modellen verifieras med hjälp av de fyra modellverifieringsplottarna redovisade i teoriavsnittet.
- IV. VaR skattas  
I detta steg används formel (2.2) för att beräkna VaR för de 2000 (1000 för nickel) paren av parametrar som togs fram i föregående steg.
- V. Backtesting av VaR skattningarna  
Skattningarna backtestas för det 2000 VaR skattningarna och överskridningar räknas.

I fallet då vi använder oss av deklustring läggs ett steg till mellan punkt I och II där vi deklustrar vår data innan parametrarna skattas i GDP modellen. I det här fallet måste man också välja parametern  $r$  och dessutom ändras formeln för VaR uträkningen till formel (2.3). Eftersom vår data enligt tidigare studier inte är klustrad i någon större utsträckning väljer vi att använda oss av ett värde av 1 för  $r$ .

Hur ovanstående process görs rent programmeringsmässigt i R kan ses i bilaga 1.

### **Delta-Normal**

Vi använder oss återigen av de logaritmerade dagliga prisförändringarna. I Excel används dessa sedan för att göra följande:

- I. Estimering av parametrar  
Beräkning av historisk volatilitet och historisk medelavkastning.
- II. VaR skattas  
Med hjälp av formel (2.1) genereras våra VaR estimeringar. Det kritiska värdet  $z_\alpha$  för respektive konfidensnivå är (1.64 - 95 %, 2.33 - 99 %, 3.10 - 99.9%).

### III. Backtesting av VaR skattningarna

Skattningarna backtestas och överskridningarna räknas.

#### **Historisk Simulering**

Även för beräkningen av VaR med historisk simulering så använder vi Excel. Från vår urvalsperiod tar vi ut den önskade kvartilen (95 %, 99 %, 99.9 %). Dessa värden utgör våra VaR skattningar. Slutligen backtestas dessa skattningar och överskridningarna räknas.

## 5. Resultat

---

*I detta kapitel presenteras studiens resultat.*

---

### EVT

Resultat och analys av de olika *mean residual life plottarna* och en graf där de olika parameterskattningarna plottas mot  $u$  finns i bilaga 2,3,4 för de tre råvarorna. Trösklarna valdes till 4, 0.5, 3.5 för respektive råvara (olja, silver och nickel).

Givet dessa trösklar erhöles parameterskattningarna för  $\sigma$  och  $\xi$ . Dessa skattades, som tidigare nämnts, 2000 gånger där vi varje gång använde oss av 3000 värden. Verifieringsplottar baserade på parametrarna ovan och diskussioner kring dessa hittas i bilaga 2,3 och 4. Efter detta togs VaR estimat för nästkommande dag fram i enlighet med vår metod, skattningsintervallen för dessa finns presenterade i tabell 5.1.

Råvara	95 %	99 %	99.9 %
<b>Olja EVT</b>	3.49 – 3.78	5.72 – 6.82	10.82 – 16.36
<b>Olja Deklustrad</b>	3.50 – 3.87	5.73 – 6.71	10.82 – 16.62
<b>Olja Hist. Sim.</b>	3.42 – 3.60	5.43 – 6.45	10.90 – 12.94
<b>Olja Delta-Normal</b>	3.15 – 4.04	4.49 – 5.75	6.22 – 7.98
<b>Nickel EVT</b>	3.08 – 3.68	4.69 – 6.03	9.56 – 13.82
<b>Nickel Deklustrad</b>	3.09 – 3.35	4.65 – 6.19	9.45 – 14.25
<b>Nickel Hist. Sim.</b>	2.69 – 3.31	4.57 – 6.23	8.40 – 10.79
<b>Nickel Delta-Normal</b>	2.99 – 3.72	4.29 – 5.34	5.92 – 7.39
<b>Silver EVT</b>	2.20 – 2.38	3.90 – 4.51	6.62 – 8.44
<b>Silver Deklustrad</b>	2.33 – 2.65	4.12 – 5.09	6.83 – 9.69
<b>Silver Hist. Sim</b>	2.10 – 2.40	3.93 – 4.39	5.73 – 8.43
<b>Silver Delta-Normal</b>	2.24 – 2.58	3.18 – 3.68	4.37 – 5.10

**Tabell 5.1** Intervall för VaR skattningarna

Resultat från baktestningen redovisas i Tabell 5.2.

## Delta-Normal

I enlighet med vår metod estimeras  $\mu$  och  $\sigma$ . Medelvärdet av  $\mu$  är: 0.03 %, 0.06 %, 0.01 % och medelvärdet av  $\sigma$  är 2.33 %, 2.22 %, 1.43 % för respektive råvara (olja, nickel och silver). De estimerade VaR måttens intervall visas i Tabell 5.1. och antalet överskridningar i backtestingen ses i Tabell 5.2.

## Historisk Simulering

Intervallen för de skattade VaR måtten visas i Tabell 5.1 och antalet överskridningar för respektive råvara kan hittas i Tabell 5.2.

<i>Råvara</i>	<i>VaR (p)</i>	<i>Förväntat antal överskridningar</i>	<i>EVT (dekluster)</i>	<i>Historisk Simulering</i>	<i>Delta Normal</i>
<b>Oil</b>	<b>95 %</b>	100	99 (97)	106	83
	<b>99 %</b>	20	16(16)	16	21
	<b>99,9 %</b>	2	2(2)	0	9
<b>Nickel</b>	<b>95 %</b>	50	62 (61)	69	72
	<b>99 %</b>	10	20 (20)	19	29
	<b>99,9 %</b>	1	2 (2)	3	13
<b>Silver</b>	<b>95 %</b>	100	106 (89)	108	98
	<b>99 %</b>	20	27 (24)	27	49
	<b>99,9 %</b>	2	8 (6)	6	17

Tabell 5.2 Resultat backtesting

## 6. Analys

---

*I detta kapitel analyserar vi de resultat som redovisats i föregående kapitel. Vi analyserar varje råvara för sig för att slutligen summera i det avslutande stycket.*

---

Att rangordna metoderna avgörs av hur man rangordnar de olika konfidensnivåerna och hur stor hänsyn man tar till storleken av skillnaderna mellan antalet förväntade och verkliga överskridningar. Eftersom vi utför en generell studie anser vi att alla konfidensnivåerna är lika viktiga och rangordnar därmed metoderna efter en helhetsbild där en lika stor vikt läggs på samtliga nivåer.

### Olja

Skillnaden mellan de olika metoderna och det förväntade antalet överskridningar är i det här fallet små för EVT och större för delta-normal metoden och historisk simulering, skillnaderna kan ses i tabell 5.2. Vi ser att EVT ger bäst resultat på alla konfidensnivåer med undantaget av konfidensnivån 99 %. Vi har tidigare beskrivit olja som en väldigt volatil råvara och detta är troligtvis skälet till varför EVT ger så bra resultat. Någon förklaring till varför delta-normal metoden ger ett väldigt bra resultat på konfidensnivån 99 % kan vi inte ge. Vi har tidigare visat att oljans prisförändringar är långt ifrån normalfördelade och därför borde delta-normal metoden ge relativt dåliga estimeringar på samtliga konfidensnivåer. Eftersom delta-normal metoden ger betydligt sämre resultat för de andra konfidensnivåerna misstänker vi att det anmärkningsvärt goda resultatet för konfidensnivån 99 % rentav är en slump. På nivån 99.9 % står EVT i en klass för sig och lyckas möta förväntningarna på antalet överskridningar exakt till skillnad mot de andra metoder som fallerar.

I tabellen ser vi också att deklustringen inte ger någon positiv effekt på resultatet, faktum är att den till och med ger en negativ effekt på konfidensnivån 95 %. Detta förklaras sannolikt av att de extrema observationerna inte uppträder i kluster till någon större utsträckning. Eftersom deklustringen drar ner på antalet extrempunkter som man använder till att skatta sin modell så extrapoleras högre VaR estimeringar vilket i sin tur leder till färre överskridningar.

Om man avslutningsvis ska rangordna de tre olika metoderna för olja blir resultatet i kronologisk ordning följande: EVT, historisk simulering och sist kommer delta-normalmetoden på grund av dess stora brister på konfidensnivåerna 95 % och 99.9 %.

## Nickel

En inledande analys av nickel visar att alla de tre applicerade metoderna ger dåliga resultat för konfidensnivån 95 %. På de två högre konfidensnivåerna ger EVT och historisk simulering generellt sett ungefär lika bra skattningar av VaR för nästkommande dag. Totalt sett överträffar båda dessa metoder delta-normal metoden med stor marginal, vilket ses i Tabell 5.2. Även för nickel så ger inte deklustringen i samband med EVT något signifikant bättre resultat, anledningen till detta är att nickel i likhet med olja inte är klustrat i någon större bemärkelse.

EVT presterar bäst men ändå inte bra på konfidensnivån 95 % medan den historiska simuleringen är något bättre på konfidensnivån 99 %. På konfidensnivån 99.9 % ger EVT återigen ett mycket bra resultat, till skillnad mot de andra metoderna. Anledningen till att delta-normal metoden presterar sämst på alla konfidensnivåer beror troligtvis på att nickel precis som olja är en väldigt volatil råvara (vanligt i kategorin råvaror över huvudtaget) och att den inte är normalfördelad. Det är dock förvånande att delta-normal metoden presterar så dåligt som den gör med tanke på att nickel var den av de undersökta råvarorna som var närmast en normalfördelning. Faktum är att delta-normal metoden presterar sämre för nickel än vad den gör för olja som är mindre nära en normalfördelning än nickel. Rangordningen av de olika metoderna är väldigt klar. EVT hamnar på första plats eftersom det bättre resultatet som genereras på konfidensnivåerna 95 % och 99,9 %. Andra plats går till historisk simulering och tredje platsen till delta-normal metoden.

## Silver

För silver, som är den minst volatila råvaran i vår studie, ser vi ett annat mönster än för de övriga två. Här presterar EVT generellt sett lika bra som historisk simulering på konfidensnivåerna 95 % och 99 %. På den förstnämnda nivån är EVT en aning bättre än historisk simulering, där också delta-normal metoden ger förvånande bra resultat. På nivån 99 % ger EVT med deklustring det bästa resultatet, troligtvis för att man klart och tydligt ser ett tydligt kluster av stora förluster i slutet av dataserien, se Figur 3.2. På denna nivå ger delta-normal metoden återigen ett dåligt resultat. Antalet överskridningar på den högsta konfidensnivån 99.9 % är betydligt fler i samband med silver jämfört med olja och nickel. Anledningen till detta är svår att avgöra men förklaras troligen av att de allra mest extrema förlusterna uppträder i slutet av backtestperioden vilket leder till att historien inte förklarar framtiden lika bra längre.



Delta-normal metoden uppvisar det bästa resultatet för 95 % konfidensnivå, för de två högre nivåerna ger den dock återigen väldigt dåliga resultat och hamnar därmed på tredje plats i en rangordning.

Valet mellan den historiska simuleringen och EVT är återigen svårt, EVT utan deklustring har fördel på lägsta nivån men uppvisar aningen svagare resultat på de två andra konfidensnivåerna. Däremot ger EVT med deklustring lika bra resultat för den högsta konfidensnivån som historisk simulering. Vi väljer att inte rangordna de två metoderna i detta fall och låter det därmed vara osagt. Oavsett rangordning är iallafall deklustring lämpligt vid tillämpning av EVT på en hög konfidensnivå i samband med en råvara lik silver.

### **Skattningsintervall för VaR**

I tabell 5.1 ses intervallen för VaR estimaten för de olika råvarorna och metoderna. Givetvis bör dessa bli högre för en högre konfidensnivå eftersom vi på en högre nivå vill ha färre överskridelser jämfört med en lägre konfidensnivå. Intressant här är att se hur delta-normal metoden fallerar. Med tanke på att vi nu vet att EVT och historisk simulering överlag ger bättre estimeringar än delta-normal metoden kan vi göra en analys av dessa intervall. Intervallen följer varandra på konfidensnivån 95 % men redan på konfidensnivån 99 % uppvisar delta-normal metoden betydligt lägre skattningsintervall. Den högra ändpunkten (d.v.s. MAX-VaR) är lägst på samtliga råvaror på både konfidensnivåerna 99 % och 99.9 % för delta-normal metoden. Tydligast är det på den högsta konfidensnivån där det skiljer väldigt mycket. Detta får till följd att delta-normal metoden underskattar sannolikheten för verkligt extrema observationer.

Intervallen för EVT och den historiska simuleringen är ganska lika och det är svårt att dra någon mer slutsats av tabell 5.1.

### **Summering**

I vår studie har EVT överlag presterat de bästa resultaten. Förvisso har inte EVT gett bäst resultat sett över alla råvaror och konfidensnivåer, men om man summerar de rangordningar vi har gjort av metoderna inom respektive råvara står det tydligt klart att EVT är vinnaren. EVT presterar bäst på konfidensnivån 99,9 % för alla råvarorna. Vi noterar dessutom att delta-normal metoden inte utgör något bra alternativ för att estimerar råvarors VaR. Historisk simulering som tillsammans med delta-normal

metoden är ett av de enklaste sätten att estimerar VaR på uppvisar dock förvånansvärt bra estimeringar.

## 7. Slutsatser

Syftet med denna studie var att undersöka hur VaR med EVT presterar för olika typer av råvaror. Vi begränsade oss till tre olika råvaror med olika egenskaper och tre olika konfidensnivåer. Våra resultat pekar på att VaR med EVT presterar som bäst när konfidensnivåerna är höga och prisförändringarna mycket volatila. Dessutom visar vår studie att VaR med EVT ger bättre skattningar än den traditionella delta-normal metoden. Den mindre sofistikerade metoden historisk simulering genererar förvånansvärt bra resultat, speciellt då vi hade förväntat oss betydligt större skillnader mellan denna metod och EVT.

Baserat på resultaten från vår undersökning står det klart att EVT är ett intressant alternativ till att beräkna VaR på volatila råvaror och främst på en hög konfidensnivå. Vidare bör man använda EVT som ett komplement till de metoder som används idag av exempelvis ett företag vid beräkning av VaR på råvaror.

Man bör också överväga att använda sig av deklustring då man har att göra med råvaror liknande silver i vår studie, med andra ord råvaror där man ser tecken av icke stationaritet (klustring).

## 8. Vidare forskning

Det vore intressant att inkludera fler råvaror och därefter segmentera dessa efter olika egenskaper såsom volatilitet, normalitet och frekvens av verkligt extrema observationer. En sådan indelning skulle ge ytterligare underlag för att avgöra vilken typ av råvaror EVT-VaR är mest lämpad för.

Att undersöka råvaror vars prisförändringar är signifikant skilda från stationaritets villkoret vore också intressant att undersöka eftersom både EVT och historisk simulering bygger på antagandet om stationaritet.

Slutligen, då många råvaror nyligen har börjat handlas och det därför inte är ovanligt att man bara har tillgång till ett par års handelsdata, skulle man kunna använda sig av ett mindre antal observationer och undersöka om de olika metodernas relativa prestanda förändras.

## 9. Källförteckning

### Tryckta Källor

- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., and Heath, D., (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance* 9:203:228.
- Beder, T., (1995) VaR: seductive but dangerous. *Financial Analyst Journal* 31 (July/August):36-41
- Coles, S., (2001). An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values. Springer Verlag
- Dowd, K., (1998). Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management. West Sussex: Wiley.
- Dowd, K., (2005). Measuring Market Risk. 2nd edn. West Sussex: Wiley
- Embrechts, P., Frey, R, and McNeil, A.J., (2005). Quantitative Risk Management, 1<sup>st</sup> edn. New Jersey: Princeton.
- Fama, E., (1963). Mandelbrot and the stable Paretian hypothesis, *Journal of Business*: 420-429.
- Fernandez, V., (2003) Extreme Value Theory and Value at Risk. *Revista de Análisis Económico*, Vol. 18 (June): 57-85.
- Fisher, R. A. and Tippet, L.H.C., (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest number of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 24:180-190.
- Gilleland, E., and Katz, R., (2004). Extremes Toolkit (extRemes): Weather and Climate Applications of Extreme Value statistics
- Hull, J.C., (2006). Options Futures and other Derivatives, 6th edn. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall
- Jorion, P., (2001). Value at risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk, 2nd edn. New York: McGraw-Hill.
- Mandelbrot, B., (1963). The Variation of certain speculative prices. *Journal of Business* 36 (4): 394-419.
- Marshall, C., and Siegel, M., (1997). Value at Risk: Implementing a Risk Measurement Standard. *Journal of Derivatives* (Spring): 91-111.
- McNeil, A.J., (1999). Extreme Value Theory for Risk Manager, ETH Zentrum
- Simons, K., (2000). The use of Value at Risk by Institutional investors. *New England Economic Review*, November-December

## **Internet källor**

[www.lme.co.uk](http://www.lme.co.uk)

# Bilaga 1

## Script EVT-VaR ,

Inputs:

u = tröskelnivå

råvarudata = neglerade logaritmiska dagliga prisförändringar i procent

clevel = konfidensnivå

```
k=0 //räknare för backtestning nollställs
vartotal=c(1) //vektor för VaR estimat skapas
for (i in 0:1000) {
  window=c(1,1) //skapar observationsfönstret
  window=råvarudata$data$V1[(1+i):(1500+i)] //plockar ut data för vald råvara
  n=length(window) //antal observationer i fönstret
  estimatdata=fpot(window,u) //estimerar GPD (Gilleland & Katz 2004)
  N=length(estimatdata$exceedances) //antal observationer över tröskeln
  sigma=estimatdata$estimate[1] //skalparametern
  xi=estimatdata$estimate[2] //formparametern
  var=u+sigma/xi*((n/N*(1-clevel))^-xi)-1 //VaR beräknas
  vartotal[i]=var //VaR estimeringen sparas undan
  if (råvarudata$data[(1001+i),1]>var) //backtestar
    k=k+1 //antal överskridningar
}
```

Output:

k = antal överskridningar

## Script EVT-VaR med dekluster

Inputs:

u = tröskelnivå

råvarudata = neglerade logaritmiska dagliga prisförändringar i procent

deklusterdata= deklustrad råvarudata

clevel = konfidensnivå

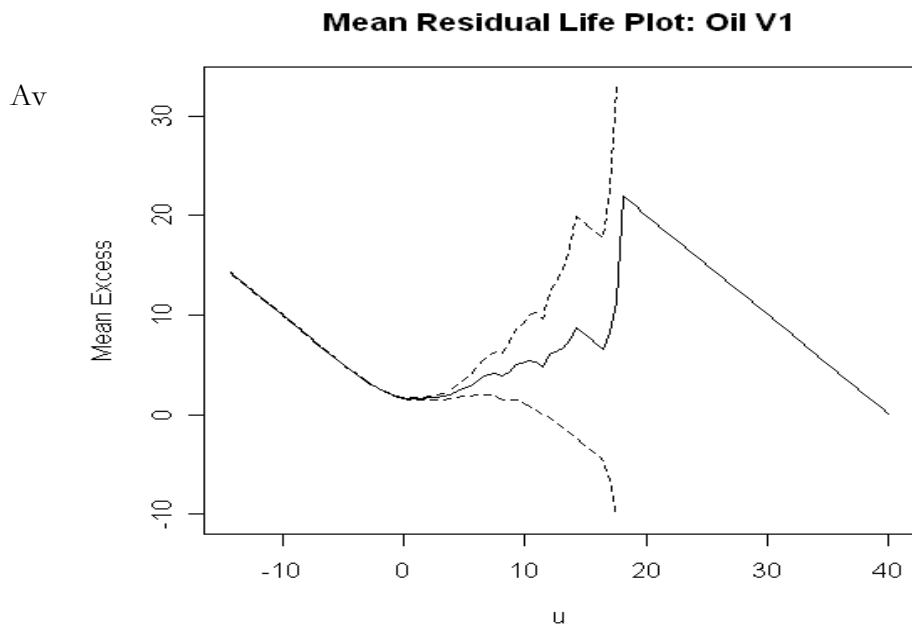
```
k=0 //räknare för backtestning nollställs
vartotal=c(1) //vektor för VaR estimat skapas
for (i in 0:1000) {
  exi=exi(råvarudata$data[(1+i):1500+i,1], 3.5) //extremalindex estimeras
  window=c(1,1) //skapar observationsfönster
  window=deklusterdata$data$V1[(1+i):(1500+i)] //plockar ut data för vald råvara
  n=length(window) //antal observationer i fönstret
  estimatdata=fpot(window,u) //estimerar GPD
  N=length(estimatdata$exceedances) //antal observationer över tröskeln
  sigma=estimatdata$estimate[1] //skalparametern
  xi=estimatdata$estimate[2] //formparametern
  var=u+sigma/xi*((n/N*exi*(1-clevel))^-xi)-1 //VaR beräknas
  vartotal[i]=var //VaR estimeringen sparas undan
  if (råvara$data[(1001+i),1]>var) //backtestar
    k=k+1 //antal överskridningar
}
```

Output:

k =antal överskridningar

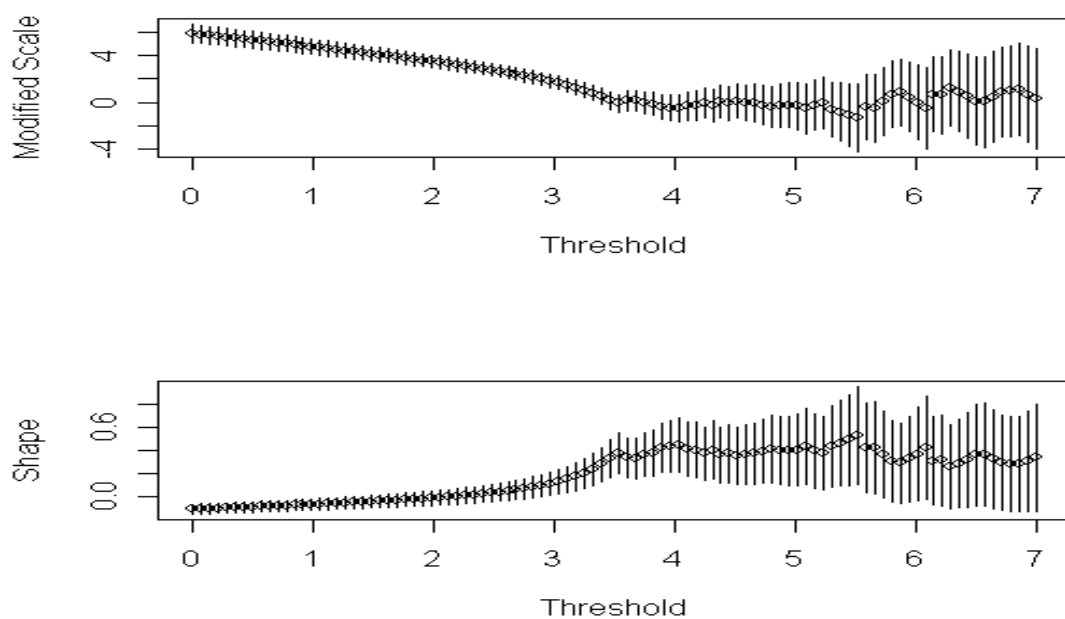
## Bilaga 2

### Olja



**Figur B2.1** Mean Residual Life Plot för Olja

Ovan ses en *mean residual life plot*, Figur B2.1 för olja, slutsatsen vi drar av denna plot är att en tröskel mellan 3 och 5 verkar vara rimlig eftersom medelvärdet av överskridningarna där börjar bli linjära i  $u$ . För att få mer underlag för tröskelbeslutet tittar vi även på hur stabila GPD parametrarna är för olika tröskelvärden:

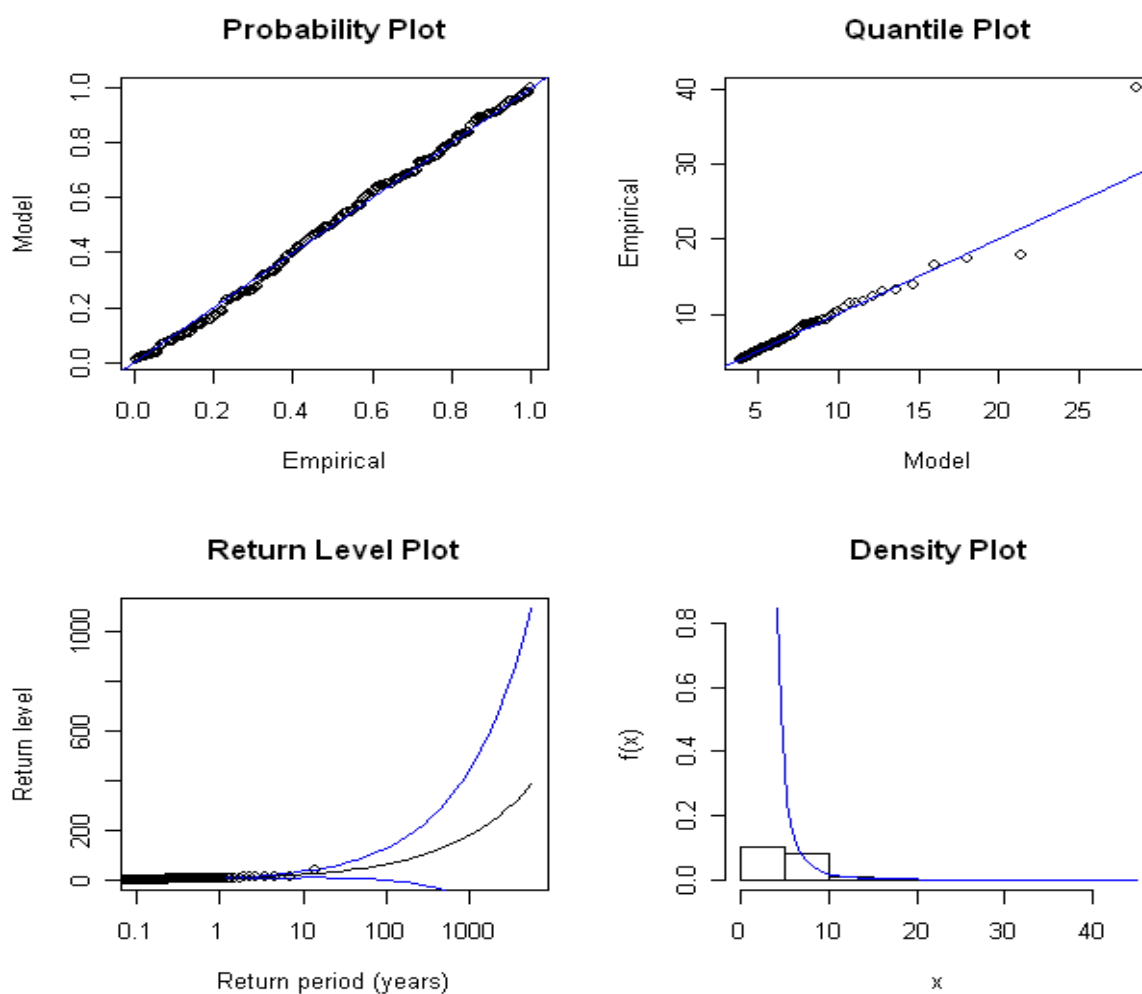


**Figur B2.2** GPD parametrar mot tröskel, för olja



Som synes i Figur B2.2 så uppvisar parametrarna stabila värde för  $n=4$  och uppåt, därför väljs tröskeln till 4.

För att försäkra oss om att vår data givet den nu valda tröskeln kan beskrivas med GPD modellen studerar vi slutligen verifierings plottarna, se Figur B2.4, beskrivna i teoriavsnittet. Dessa ser ut som följer:



**Figur B2.3** Sannolikhetsplot, Kvantilplot, ReturnLevel-plot och Histogram för olja

Sannolikhetsplotten ser bra ut eftersom alla punkterna ligger längs med enhetsdiagonalen. Kvantil plotten kan tyckas lite sämre eftersom vissa punkter avviker från enhetsdiagonalen men det är svårt att få en plot där alla observationerna följer denna diagonal slaviskt. Vi godkänner plotten men noterar denna avvikelse. Return level plotten ser bra ut eftersom alla punkterna ligger inom konfidensintervallet. För mycket tyngd bör ej läggas på histogrammet som ofta kan avvika som tidigare diskuterats, dock uppvisar plotten i just detta fallet inte upp några avvikelser och vi antar vår modell.

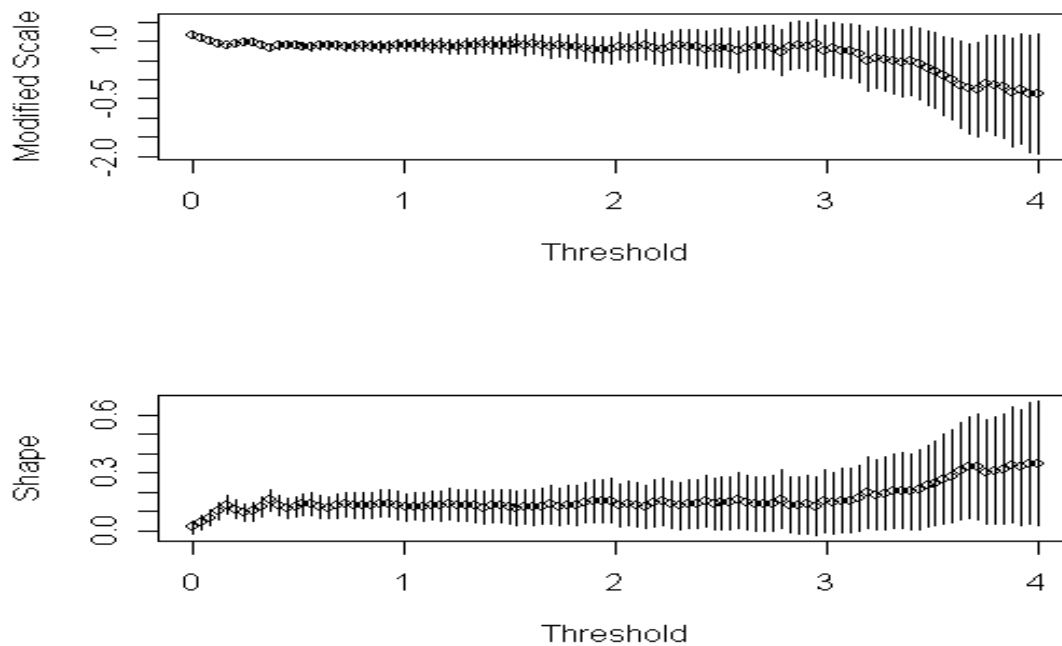
## Bilaga 3

### Silver



**Figur B3.1.** Mean Residual Life Plot för silver

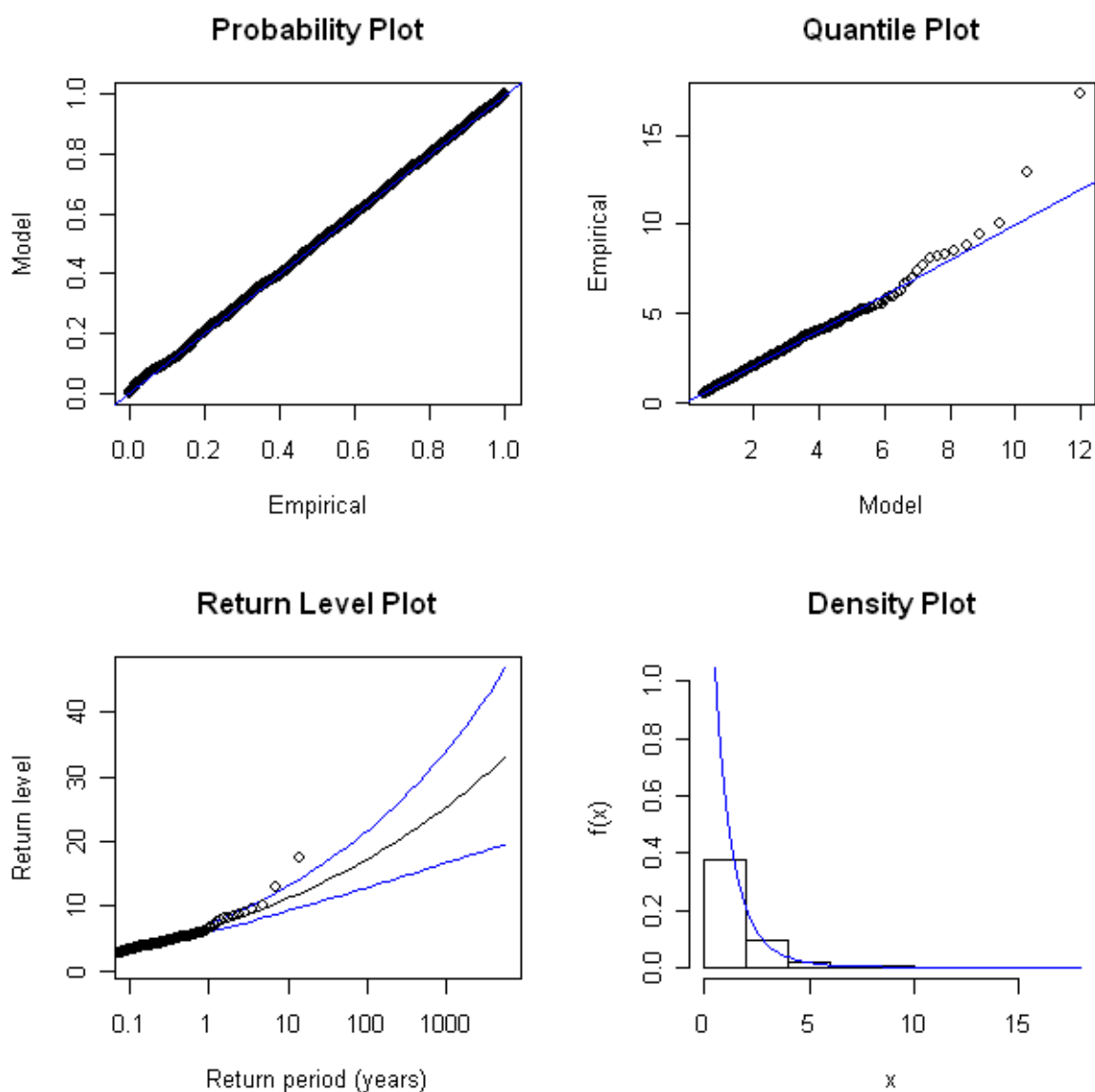
Här kan ett linjärt samband anas nästan omgående, nämligen redan vid  $u=5$ , se Figur B3.1. Vi väljer därmed att titta vidare på parametrarnas stabilitet:



**Figur B3.2** GPD parametrar mot  $u$ , för silver

Som synes i Figur B3.2 är parametrarna stabila för  $n$  redan vid 0.5. Med tanke på att vi bör välja en så låg tröskel som möjligt faller valet naturligt på 0.5.

För att försäkra oss om att vår data givet den nu valda tröskeln kan beskrivas med GPD studerar vi slutligen verifierings plottarna, se Figur B3.3 beskrivna i teoriavsnittet. Resultatet ses nedan.



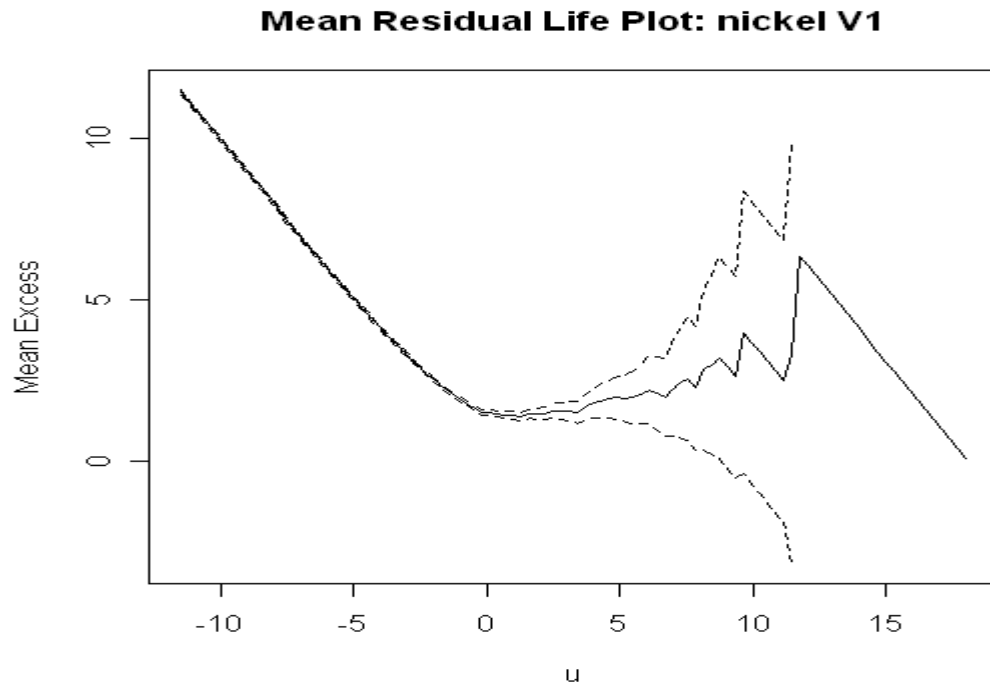
**Figur B3.3** Sannolikhetsplot, Kvantilplot, ReturnLevel-plot och Histogram för silver

Sannolikhetsplotten ser bra ut eftersom alla punkterna ligger längs med enhetsdiagonalen. Kvantilplotten kan tyckas lite sämre, men precis som i analysen av

olja kan vissa punkter avvika från enhetsdiagonalen eftersom det är svårt att få en modell där alla plottarna följer denna diagonal slaviskt. Likadant som i fallet olja godkänner vi plotten men noterar denna avvikelse. I return level-plotten avviker två värden och hamnar utanför konfidensintervallen, detta är inte önskvärt men tyvärr fallet. Dock är denna plot tillsammans med de andra acceptabla och en sista blick på histogrammet får oss att godkänna modellen.

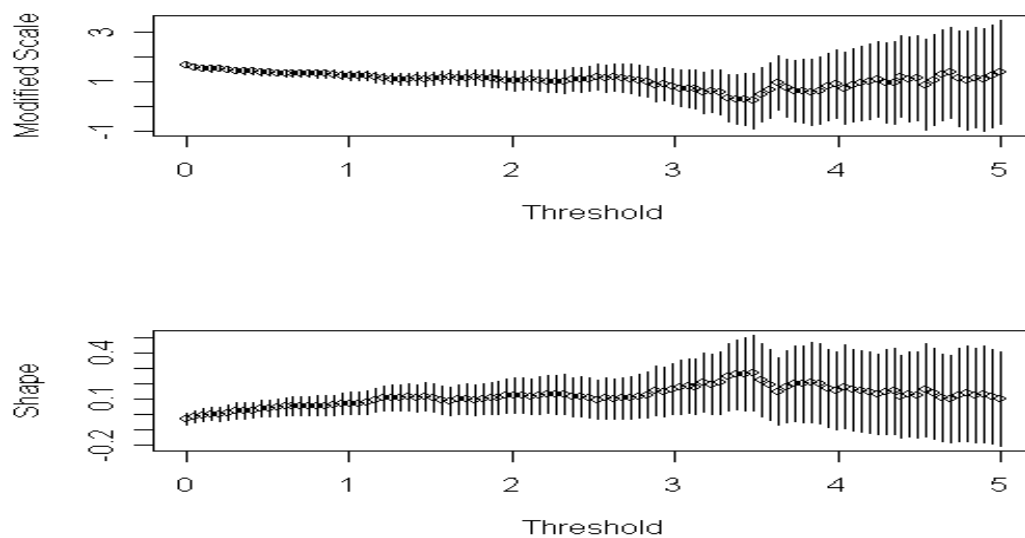
## Bilaga 4

### Nickel



**Figur B4.1** Mean Residual Life Plot för Nickel

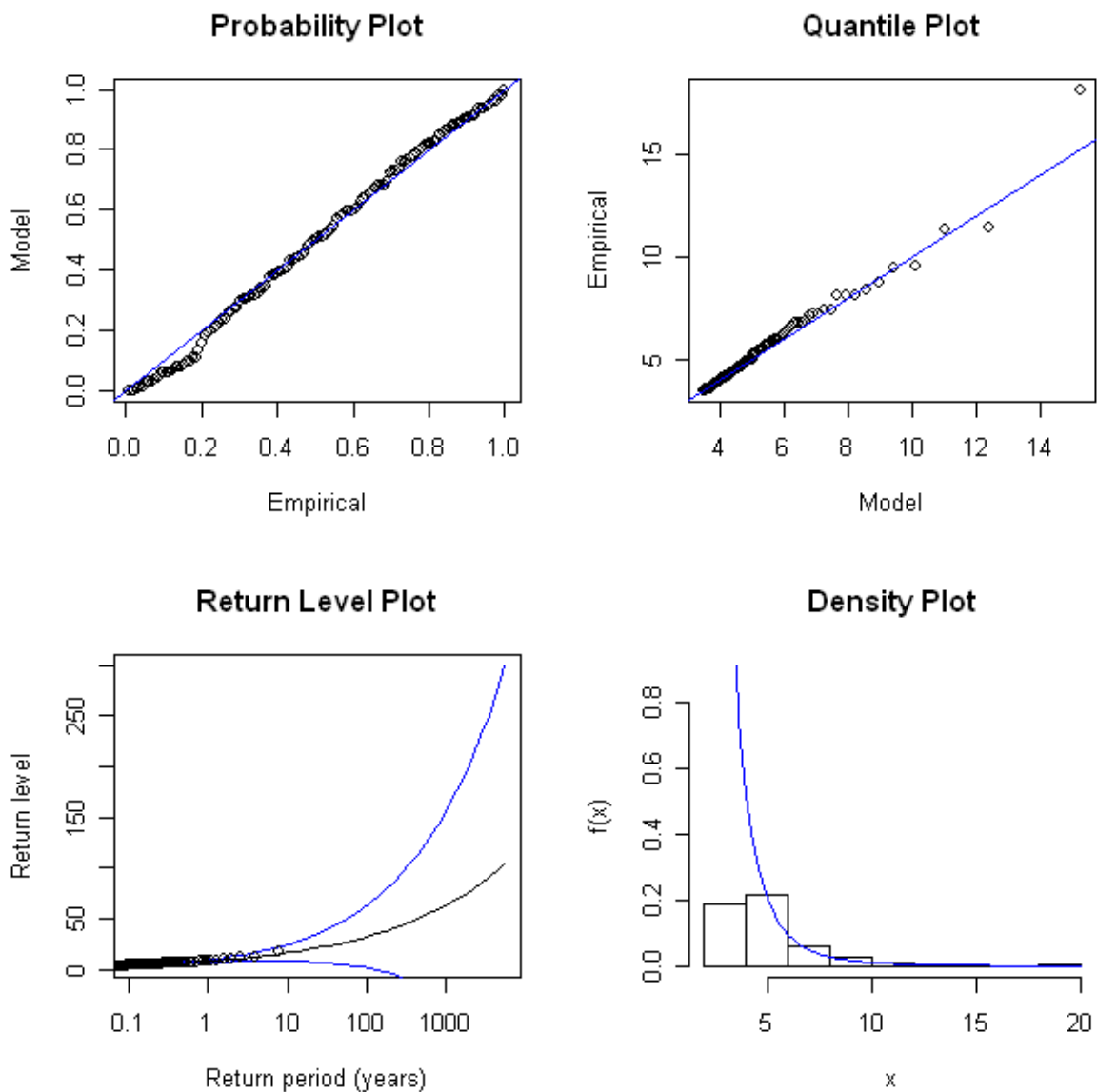
I ovanstående, Figur B4.1, mean residual life plot kan linjäritet utläsas för en tröskelnivå någonstans mellan 3 och 4. Ytterligare analys för oss till en plot av parametrarnas stabilitet för olika trösklar:



**Figur B4.2** GPD parametrar mot tröskel, för Olja

Stabilitet tycks inträda vid en tröskelnivå av 3.5, se Figur B4.2 därmed blir det också vårt tröskelval.

För att försäkra oss om att vår data givet den nu valda tröskeln kan beskrivas med GPD studerar vi slutligen verifieringsplottarna, beskrivna i teoriavsnittet.



**Figur B4.3** Sannolikhetsplot, Kvantilplot, Return.Level-plot och Histogram för nickel

I detta fall ser alla fyra plottarna bra ut, se Figur B4.3 Om man ska göra någon anmärkning överhuvudtaget bör det vara på de få värdena som avviker från enhetsdiagonalen i kvantil

plotten. Det kan tilläggas att nickel är den råvara som uppvisar bäst verifieringsplottar trots att alla plottarna för de andra råvarorna är godkända med marginal.