Pensionsåldern

och

individens konsumtion och sparande

Om hur en höjning av pensionsåldern kan ändra konsumtionen och sparandet.

Maria Nilsson

Magisteruppsats

Nationalekonomiska institutionen

Handledare: Pontus Hansson

Inlämnd: 2005-05-27

Abstract

Utifrån Blanchards OLG-modell för en liten öppen ekonomi med åldersberoende arbetsutbud, analyseras vad som sker med konsumtionen och den finansiella förmögenheten per capita när pensionsåldern höjs. Konsumtionen ökar när pensionsåldern höjs eftersom en högre pensionsålder betyder en högre total löneinkomst som kan användas på konsumtion, vilket ger större nytta. Sparandet kan däremot både öka och minska när pensionsåldern höjs. Incitamentet till att öka sparandet kommer från att man vill utjämna den högre konsumtionen som kommer från den ökade livsinkomsten över hela livet. Men en ökning av pensionsåldern betyder att tiden som pensionär då man ska konsumera för sina sparade tillgångar minskar, vilket minskar incitamentet för att spara. En simulering av modellen med parametervärden för Sverige, gav att en höjning av pensionsåldern från 65 till 67 år ökade konsumtionen och minskade sparandet. Ökningen av konsumtionen sker direkt och avtar sedan, medan minskandet av sparandet sker långsamt och är märkbar först efter nästan 10 år.

1. Inledning och problemformulering

1.1 Problemformulering

Denna uppsats huvudtema är pensionsåldern och vad som sker med konsumtionen och sparandet (den finansiella förmögenheten) när pensionsåldern höjs. Under den sista halvan av 1900-talet har befolkningstillväxttaken i Sverige liksom i resten av Europa minskat och man har fått en ”åldrande befolkning”. Det har lett till en diskussion om hur man ska hantera att andelen av befolkningen som arbetar minskar i förhållande till de äldre i befolkningen. Man talar om ett ökat beroendeförhållande och en ökad försörjningsbörda för de yngre generationerna. Samtidigt kommer vi idag allt senare ut på arbetsmarkanden och när vi pensionerar oss vid 65, är vi ofta kapabla till att arbeta längre om vi vill (då vi idag har bättre hälsa). Att diskuterar en höjning av pensionsåldern är en naturlig följd på de demografiska förändringarna som har skett och sker.

Denna uppsats har som förutsättning att diskutera en höjning av pensionsåldern utifrån vad som sker med individens konsumtion och sparande (den finansiella förmögenhet). För att göra det tar jag utgångspunkt i Blanchards OLG-modell (Overlapping Generations) för en liten öppen ekonomi med åldersberoende arbetskraftsutbud. Genom modellen kan man se hur den genomsnittlige nivån av konsumtionen och sparandet utvecklar sig över tiden och vad som sker med dem när pensionsåldern höjs – vilket är denna uppsats huvudtema. Även om det här faller sig naturligt att tala om försörjningsbördan och skatter när man talar om en höjning av pensionsåldern, så är det inte denna uppsats intentioner. Visserligen kommer försörjningsbördan att komma upp i uppsatsen, men endast som en sidospår till diskussionen kring pensionsåldern och en höjning av den. Det central för denna uppsats är att se vad som sker med konsumtionen och de finansiella tillgångarna när pensionsåldern ändras. Jag har valt att fokusera på detta då det i diskussionen om en höjning i pensionsålder är naturligt att diskustera vad som sker med sparandet. Argumenten är ibland att en höjning av pensionsålder skulle leda till att sparandet ökar.

Uppsatsen inleds i nästa stycke med en allmän introduktion till de demografiska förändringar som sker/har skett i Europa, med ett fokus på förändringarna i Sverige. Avsnitt 1 avslutas med en generell diskussion kring möjliga ekonomiska effekter av den åldrande befolkning. I avsnitt 2 presenteras Blanchards OLG-modell för en liten öppen ekonomi med åldersberoende arbetskraftsutbud. Avsnittet är relativt tekniskt och visar steg för steg hur man löser modellen. I det tredje avsnittet fokuseras på pensionsåldern och vad som sker med konsumtionen och sparandet när pensionsåldern höjs. Avsnittet inleds med en diskussion om hur pensionsåldern kan väljas, utifrån vilka premisser bör den väljas. 3.2 och 3.3 ser vad som sker när pensionsåldern höjs. Avsnitt 3.2 ser och diskuterar vad som sker i Blanchards OLG-modell och varför det sker när pensionsåldern höjs. Därefter, i avsnitt 3.3, görs en simulering av modellen för att ge några kvantitativa implikationer av vad som kan ske i Sverige med konsumtionen och sparandet om pensionsåldern höjs. Avsnitt 3 avslutas med en diskussion kring en åldrandebefolkning och en höjning av pensionsåldern. Uppsatsen avslutas med avsnitt 4 som sammanfattar och konkluderar.

1.2. Demografiska trender

Sedan babyboomen efter andra världskriget har barnafödandet i Sverige gått ner, en trend som har kunnat ses i många OECD-länderna. 1960 förväntades en kvinna i Sverige att föda i genomsnitt 2,2 barn under sin levnadstid, 2000 var samma siffra 1,54. (SCB) Genomsnittet för OECD-länder låg 1960 på 2,4 barn per kvinna under hennes livstid och 1997 hade siffran sjunkit till 1,6 barn per kvinna (Spieza 2002). I Europa födde en kvinna 1960 i genomsnitt 2,8 barn under sin livstid, 2000 låg genomsnittet på 1,5 barn[1] (SCB). Diagram 1 visar hur barnafödandet har sjunkit i några europeiska länder samt hur genomsnittet för Europa har utvecklat sig mellan 1960 och 2000.

[1] Genomsnittet gäller för 35 Europeiska länder.

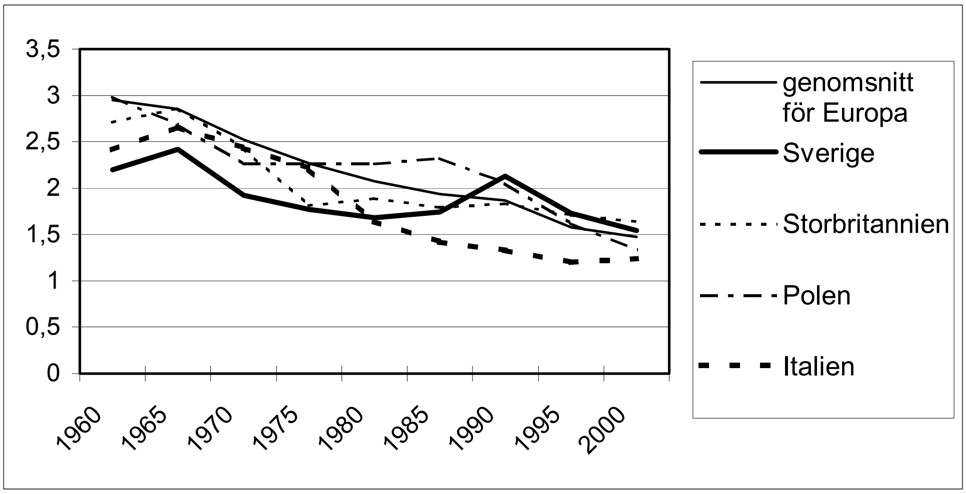


Diagram 1. Antal barn som en kvinna förväntas föda i genomsnitt under sin livstid. Källa SCB:s befolkningsstatistik.

Samtidigt som barnafödandet har minskat, har den förväntade livstiden i Sverige ökat. 1970 var den förväntade livstiden från födsel 74,5 år och 1997 hade den förväntade livstiden stigit till 79,1 år, genomsnittet för OECD-länderna var 1970 70,9 år och 1997 77,2 år (Spieza 2002). Det minskade barnafödandet och den ökade livslängden har lett till att förhållandet gamla/arbetsstyrkan – beroendeförhållandet[2] har ändrats. Beroendeförhållandet visar hur stor andel av befolkningen som är över 65 år i förhållande till andelen av befolkningen mellan 15 och 65 år – de som är i arbetsför ålder. I Sverige var beroendeförhållandet 0,56 år 2000, till år 2040 förväntas det ha stigit till 0,74. Även om man tar hänsyn till immigration så kommer beroendeförhållandet att öka i Sverige och det samma gäller för de flesta OECD-länderna (Spieza 2002). Enligt Fougére och Mérette (1999) har FN gjort undersökningar som i säger att andelen gamla i befolkningen i många industrialiserade länder kommer att fördubblas och att beroendeförhållandet kommer att stiga markant. Genomsnittet för OECD-ländernas beroendeförhållande var år 2000 0,49 och år 2040 tros förhållandet mellan dem som inte är arbetsför ålder och de som är, ligga på 0,74 (Spieza 2002). Bilaga 1 visar hur beroendeförhållandet i några EU-länder (de som var med innan östutvidgningen) förväntas stiga mellan 2000-2050.

1.3. Ekonomiska effekter av demografiska förändringar:

Om den andel av befolkningen som arbetar minskar, så borde det få ekonomiska effekter. De demografiska förändringarna som vi ser i OECD-länderna kommer att påverka (påverkar redan?) ekonomin och frågan är snarare hur kan de påverka ekonomin och i vilken utsträckning. Det finns många olika teorier och tankar kring hur ekonomin kan komma att påverkas av en ändrad befolkningsstruktur och hur man ska tackla dessa förändringar. Olika typer av OLG-simuleringar har gjorts med olika resultat. Ett resultat som ofta framhållits är att det nationella sparandet och produktionen per capita kommer att minska under de nästa årtiondena. Hviding och Mérette (1998) kommer fram till just de slutsatserna genom att använda sig av en OLG-modell i diskret tid.

Men utan att fördjupa mig alltför mycket i hur och varför, vill jag här ge några (mer eller mindre) intuitiva förklaringar på hur en åldrande befolkning kan komma att påverka en ekonomi.

• Enligt Modiglianis livscykelhypotes försöker individen att utjämna sin konsumtion över hela sin livstid. För att kunna utjämna konsumtionen sparar individen medan han/hon arbetar för att vid pension kunna leva på det sparade kapitalet med en bibehållen levnadsstandard (Bodie 2000). När då arbetskraften minskar kommer det att finnas färre som vill spara upp till sin pension och arbetskraften kommer att efterfråga mindre kapital än tidigare. Det gör att nivån på det nationella sparandet går ned.

Det läger sparandet kan påverka handelsbalansen om ekonomin är liten och öppen (och som tar räntan som givet). Då sparandet går ned och räntan är oförändrad, kommer det inte finnas tillräckligt med kapital i ekonomin för de investeringar som vill göras vid den givna räntan. För att kunna tillfredsställa efterfrågan av kapital på den finansiella markanden måste man låna från utlandet. Det gör att man får ett handelsunderskott i ekonomin. Om ekonomin är stängd eller tillräckligt stor för att kunna påverka räntan så leder ett minskat sparande till att räntan stiger (Mankiw 1997). Men det lägre sparandet

[2] ”Beroendeförhållandet” är en fri översättning av begreppet dependency ratio. Översättningen kan dock vara en smula missvissande då det för tankarna till försörjningsproblemet (med skatter och pension).

behöver inte betyda att ekonomin får en permanent minskning i produktionen, utan kan vara ett tecken på att den optimala nivån för sparandet har minskat (Fougère och Mérette 1999).

• En större andel pensionerade betyder att arbetsstyrkan kommer att minska i förhållande till befolkningen och allt annat lika, så betyder det att levnadsstandarden kommer att minska (Kohl och O'Brien 1998). Om inget sker med arbetskraftens produktivitet så kommer deras produktion och lön var den samma som tidigare, men varje arbetare ska nu försörja en större andel av befolkningen och det ger ett lägre BNP per capita.

Ett annat problem som uppstår när arbetskraften minskar är att skatteunderlaget minskar. Det betyder att försörjningsbördan ökar för de som arbetar. En åldrande befolkning betyder ökade offentliga utgifter, främst genom ökade sjukvårdskostnader. Detta är ett problem i de flesta Europeiska länderna, för samtidigt som vi lever allt längre och föder färre barn, så är vi längre om att komma ut på arbetsmarkanden. Längre utbildningstid gör att vår tid som aktiva på arbetsmarkanden minskar. En ökning av beroendeförhållandet kan betyda ett ökat tryck på statsfinanserna (som troligen resulterar i höjda skatter och/eller statsskuld).

• En åldrande befolkning kan påverka tillväxten på flera sätt, genom att sparandemönstret ändras, sammansättningen av arbetskraften förändras, ändringar i humankapitalet och ändrade investeringar i R & D (Fougère och Mérette 1999). Ekonomisk tillväxt påverkas av ackumulering av fysiskt kapital och humankapital och det gör det svårt att sia om de långsiktiga effekterna av en åldrande befolkning på tillväxten. Tillväxten påverkas av arbetskraftens produktivitet och det gör en åldrande befolknings påverkan på produktiviteten intressant med hänsyn till produktions-tillväxten.

• Sverige har relativt nyligen skiftat pensionssystem, från ett PAYG (Pay-As-You-Go) pensionssystem (där de gamlas pension betalas via skatt) till ett delvis funderat system (där man själv spara upp till sin pension). Men för de länder som likt Italien, Frankrike och Storbritannien ännu har ett PAYG system leder en växande andel pensionärer till att trycket på ekonomin ökar. Antigen kommer pensionen att behöva sänkas eller så måste skatten höjas för att hålla en balanserad budget (förutsatt inga andra ändringar). En höjning av skatten kan pressa lönerna uppåt, vilket kan leda till inflation. Men oavsett om pensionen sänks eller skatten höjs, kommer minst en generation att bidra mer till pensionssystemet än vad de själva får ut från systemet.

• Individens humankapital minskar med åldern, men det betyder inte att humankapitalet bara försvinner när man når 65. Men det gagnar inte längre ekonomin via arbetsmarknaden. När andelen pensionerade växer så växer även mängden av outnyttjad humankapital. Det gör att en mindre del av det totala humankapitalet som finns i ekonomin används i produktionen. Oavsett vilken syn man har på humankapital, så leder en åldrande befolkning till att humankapitalet som finns tillgängligt för produktion och ekonomisk tillväxt minskar.[3]

Grunden för de olika (negativa) effekterna på ekonomin som kommer från att befolkningstillväxten minskar är att kompositionen i befolkningen ändras. När färre barn föds och man lever allt längre så växer andelen gamla i befolkningen och andelen som arbetar minskar. Ett sätt att öka arbetsstyrkan är att få människor till att arbeta längre genom att höja pensionsåldern. Men för att kunna göra det så bör man veta hur en höjning av pensionsåldern ändrar individens ekonomi. En naturlig utgångspunkt är att se vad som sker med individens konsumtion och sparande när pensionsåldern höjs.

[3] Fougère och Mérette (1999) menar däremot att en åldrande befolkning ökar investeringarna i humankapitalet vilket i sin tur gör arbetskraften mer effektiv och således ökar produktiviteten i ekonomin.

2. Blanchards OLG-modell

2.1. Introduktion till Blanchards OLG-modell.

Modellen som jag har valt till att bygga min uppsats kring och simulering på är Blanchards OLG-modell från Blanchard (1985). Men jag har även använt mig av läroboken *Economic Growth* av Barro och Sala-i-Martin (2004) samt föreläsningsunderlag till vidaregående makro vid KU till beskrivningen av Blanchards OLG-modell.

Den version av Blanchards OLG-modell som jag använder här i min uppsats är för en liten öppen ekonomi, där arbetsutbudet påverkas av åldern. Jag har valt att presentera modellen steg för steg och samtidigt försöka att inte bli för detaljerad, uträkningarna till en del av funktionerna finns i appendix.

Blanchards OLG-modell är i kontinuerlig tid och det föds hela tiden nya individer och andra dör. Så vid en viss tidpunkt lever det individer i olika åldrar som har olika nuvärden av deras förväntade inkomst och olika finansiella tillgångar. Det finns inget arvsmotiv i modellen eller andra överföringar mellan generationerna, så man föds utan finansiella tillgångar. Det kan tolkas som att individerna har en ändlig tidshorisont[4] och inte intresserar sig för vad som sker efter döden. Det finns inga skatter eller någon regering (offentlig sektor) i modellen. Visserligen inverkar skatter och pensionssystem på hur individens ekonomi påverkas av en höjning i pensionsålder, men jag har valt att fokusera på individens konsumtion och sparande. Då befolkningen inte är homogen, finns det heller ingen representativ agent som man kan använda för att studera dynamiken i ekonomin.

[4] Jämför t.ex. med Ramsey-modellen där individerna har en oändlig tidshorisont. Huruvida tidshorisonten är ändlig eller oändlig påverkar exempelvis individens ackumulering av kapital och effekterna av skatter eller lån (Ricardo ekvivalensen).

Den enkla individens maximeringsproblem är beskrivet i avsnitt 2.3, individens problem är detsamma oavsett när man är född. Därefter, i avsnitt 2.4 beskrivs hur konsumtionen, de finansiella tillgångarna och nuvärdet av lönen för den enkla individen i en viss generation, som här är född vid tiden j och fortfarande lever vid tiden t. Nästa steg är att summera variablerna över alla individer som lever vid tiden t oavsett när de är födda så att man får hur stora de är för hela befolkningen. Den första delen har nu ägnats åt hushållen, men för att kunna gå vidare ska man även se på företagens problem. Avsnitt 2.5 behandlar ett representativt företags maximeringsproblem. I avsnitt 2.6 – det dynamiska systemet, används de summerade värdena för konsumtion, de finansiella tillgångarna, nuvärdet av den förväntade inkomsten samt det totala arbetsutbudet för att få fram ett genomsnitt för dem. (Vilket man gör eftersom det inte finns någon representativ agent, utan alla generationer är olika. Man får nu fram de två differentialekvationerna som visar dynamiken i ekonomin – hur konsumtionen och kapitalet utvecklar sig. De två differentialekvationerna används tillsammans i fasdiagrammet i avsnitt 2.7 och det illustrerar dynamiken i ekonomin. Allra sist kommer en sammanfattning och kritik till modellen. Men först:

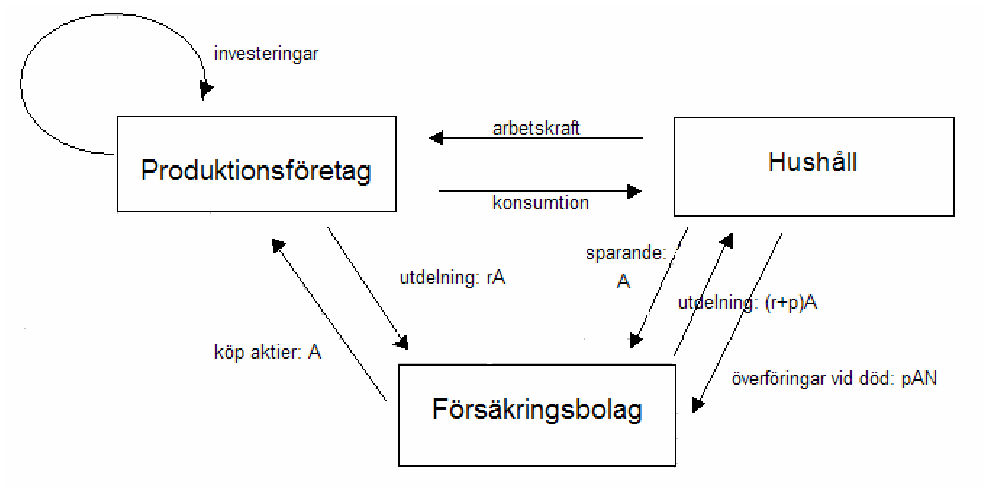
2.2. Marknad för annuiteter

Tillskillnad från i Ramsey-modellen så dör man i Blanchards OLG-modell. Döden introduceras i modellen genom dödsfrekvensen p som är sannolikheten för att man ska dö under ett år. Man kan beräkna p som $p \approx 1$/förväntad livstid. Sannolikheten för att man ska dö är den samma oavsett hur gammal man är. Detta är en förenkling man gör för att kunna summera i modellen senare. Då individerna/hushållen inte vet när de ska dö och inte heller intresserar sig för vad som sker efter döden (de får ingen nytta av framtida generationers nytta) uppstår det en (något orealistisk) marknad för annuiteter. Markanden uppstår eftersom man vill försäkra sig en inkomst även efter att man har slutat att arbeta. Individerna investerar sin pengar hos försäkringsbolagen som garanterar att man alltid kommer ha pengar oavsett hur länge man lever.

Det finns tre typer av aktörer på marknaden; hushållen, produktionsföretag och försäkringsbolag, se figur 1. Det råder perfekt konkurrens på markanden för annuiteter och det finns ingen kostnad för att ta sig in på marknaden, vilket gör att försäkringsbolagen inte får någon vinst.

Hushållen utbjuder arbetskraft till produktionsföretagen som i gengäld ger hushållen lön för deras arbete som de kan konsumera för. Hushållen sparar sina pengar hos försäkringsbolagen, som köper obligationer av produktionsföretagen som investerar pengarna och ger försäkringsbolagen räntan r, på försäkringsbolagens obligationer. Försäkringsbolagen ger vid varje tidsenhet utdelningen $(r+p)A$ till hushållen, där A är finansiell förmögenhet som hushållet har sparat upp hos försäkringsbolaget, p är en livförsäkringspremie och den är lika stor som sannolikheten för att dö. Till varje tid dör det pN hushåll/individer (N betecknar befolkningsmängden) och de lämnar pNA i ”arv” till försäkringsbolaget och per capita blir det pA som tillfaller försäkringsbolaget i varje period. Försäkringsbolaget får därför följande vinstfunktion:

$$\pi = rA - (r+p)A + pA = 0 \qquad (1)$$



Figur 1. Marknad för annuiteter.

2.3. Individen

Varje individ ska maximera sin förväntade nytta, (2) och den är den samma oavsett när individen är född:

$$E_t U = E_t \left[\int_0^{\infty} \log c(t) e^{-\rho t} dt \right] \qquad (2)$$

Ens nytta maximeras givet individens dynamiska budgetrestriktion som visar den finansiella förmögenheten som växer i takt med räntan på sparade tillgångar plus lönen minus konsumtionen. Nyttofunktionen för konsumtionen, *u(c(t))* antas vara logaritmisk, så *u(c(t))=log c(t),* där *c(t)* är konsumtionen vid tiden *t*. *ρ* visar individens tidspreferenser, ju större *ρ* är desto mer diskonterar man framtida konsumtion gentemot nutida konsumtion, man får således mindre nytta från framtida konsumtion. Det betyder att om man har ett högt *ρ* så är man otålig och vill hellre konsumera nu än imorgon och därför sparar man mindre. Har man däremot ett lågt *ρ* så är man mer tålmodig och sparar för att kunna konsumera mera i framtiden.

Sannolikheten för att en individ fortfarande lever vid tiden *t* är e^{-pt}. Då individen vet sannolikheten för att fortfarande vara vid liv vid en viss tid kan den förväntade nyttofunktionen skrivas om så att individens maximeringsproblem blir:

$$\max_{c(t)} U = \int_t^{\infty} \log c(t) e^{-(\rho+p)t} dt \qquad (3)$$

$$c(t) > 0$$

$$\dot{a} = (r+p)a(t) + w(t) - c(t) \qquad (DBR)$$

$$\lim_{t\to\infty} a(t) e^{(r+p)t} \geq 0 \qquad (NPG)$$

Man diskonterar framtiden med *ρ* för att man hellre vill konsumera idag än imorgon och med *p* eftersom man kan vara död imorgon. Det ger diskonteringsfaktorn: *(ρ + p).* DBR står för dynamisk budgetrestriktion och den visar hur den finansiella förmögenheten utvecklar sig över tiden. En prick över en variabel betyder att den är deriverad över tiden, här visar $\dot{a}$, hur den finansiella förmögenheten utvecklar sig över tiden. *(r+p)* är den effektiva räntan och kommer från markanden för annuiteter och det är med den takten som den redan sparade finansiella förmögenheten växer, *w(t)* är lönen och *c(t)*är konsumtionen vid tiden *t*. NPG står för No-Ponzi-Game och innebär att på långsikt får en skuld inte vara positiv – den får inte växa fortare än *(r+p),* (den effektiva räntan) på långsikt. (Uträkningarna för individens maximeringsproblem finns i appendixet.)

Individens maximeringsproblem ger Keynes-Ramsey regeln[5]:

---

[5] Även känd som Euler ekvationen, men då det här är hushållets beslut som optimeras kallas den Keynes-Ramsey regeln.

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = r - \rho \qquad (4)$$

Keynes-Ramsey regeln visar hur konsumtionen utvecklar sig över tiden. Om realräntan är högre än ρ, diskonteringsfaktorn av framtiden, så växer konsumtionen över tiden.

Keynes-Ramsey regeln (4) ger tillsammans med transversalitetsvillkoret nivån för konsumtionen (se appendix):

$$c(t) = (\rho + p)[a(t) + \tilde{w}(t)] \qquad (5)$$

Den marginella benägenheten[6] för att konsumera av de totala tillgångarna, de finansiella tillgångarna och lönen, är *(ρ + p)* – diskonteringsfaktorn och är konstant och den samma för alla individer. Vad som skiljer individerna åt är att då de är olika gamla och de har olika nivåer av tillgångar. Man föds t.ex. utan finansiella tillgångar, men å andra sidan är nuvärdet av ens totala lön som störst när man föds.

Konsumtionen vid tiden t för en individ som är född till tiden j blir då:

$$c(j,t) = (\rho + p)[a(j,t) + \tilde{w}(t)] \qquad (6)$$

a(j,t) är den finansiella förmögenheten vid tiden t för en individ som är född till tiden *j,* lönen $\tilde{w}(t)$, är samma till varje tid oavsett när man är född. *(ρ + p)* visar hur benägen man är att konsumera av sin förmögenhet (den finansiella (det sparade) och nuvärdet av den totala förväntade lönen).

2.4 Hushållen

Antal individer i en generation

L(j,t) är antalet individer vid liv i åldern *t-j*. Befolkningen växer med n så att $L(t)=L(0)e^{nt}$ och b är födelsetalet vilket ger:

$$L(j,t) = L(0)e^{nj}be^{-p(t-j)} \qquad (7)$$

[6] The marginal propensity to consume.

Den första biten, $L(0)e^{nj}b$ är antalet nyfödda år j, medan $e^{-p(t-j)}$ stor för sannolikheten att de fortfarande är vid liv till tiden t.

Det diskonterade nuvärdet av den förväntade lönen.

Den humana förmögenheten utgörs av det diskonterade nuvärdet på individens förväntade inkomst. Det diskonterade nuvärdet av individens lön är som störst när individen föds och minskar sedan efter hand som lönen utbetalas. Varje individ utbjuder l arbetskraft och l är en funktion av åldern. Ju äldre individen är desto mindre arbetskraft utbjuder han/hon och arbetsutbudet kan beskrivas av följande funktion:

$$l(t-j) = me^{-\omega(t-j)}$$

m är en positiv konstant som kan normaliseras till ett och ω är pensionsfrekvensen och bestäms av pensionsåldern. ω kan beräknas som 1/pensionsåldern, vilket ger att ju mindre ω är desto senare pensioneras man och vice versa.

$\widetilde{w}(j,t)$ är det diskonterade nutidsvärdet av lönen vid tiden t för en individ född vid tiden j :

$$\widetilde{w}(j,t) = \int_t^{\infty} w(\tau) l(\tau - j) e^{-(r+p)(\tau - t)} d\tau$$

$$\Updownarrow$$

$$\widetilde{w}(j,t) = e^{-\omega(t-j)} \widetilde{w}(t,t) \qquad där \qquad (8)$$

$$\widetilde{w}(t,t) = \int_t^{\infty} w(\tau) e^{-(r+p+\omega)\tau} d\tau$$

$\widetilde{w}(t,t)$ är nutidsvärdet av lönen för en nyfödd, mer utförliga räkningar om hur man får fram nutidsvärdet av lönen finns i appendix.

Vi har nu konsumtionen, nutidsvärdet av lönen, arbetsutbudet och den finansiella förmögenheten vid tiden t för en individ som är född vid tiden j. Nästa steg är nu att få fram deras totala värde. Det görs genom att man multiplicerar värdena för en individ med de antal som finns i den generationen. Det integrerar man sedan över alla generationer som lever nu oavsett när de är födda. På så sätt får man fram de totala värdet av konsumtionen, den finansiella förmögenhet, lönen och arbetsutbudet just nu.

Befolkningen

Vi vet hur många som föds till varje tid (från *L(j,t)*) och det integrerar vi nu över alla tider, från – ∞ fram till nu, *t,* får man den nuvarande befolkningen (för utförligare uträkningar se appendix). Det gör att vi får fram hur många som lever nu oavsett när man född:

$$\int_{-\infty}^{t} N(j,t)dj = \int_{-\infty}^{t} N(0)e^{nj}be^{-p(t-j)}dj = N(0)e^{nt} = N(t) \qquad (9)$$

$$eftersom \quad b \equiv n + p$$

Arbetsutbudet

Genom att multiplicera antalet individer i åldern *t-j* , (9) med deras arbetsutbud så får vi den generationens arbetsutbud vid tiden *t*. Likt tidigare integrerar man det resultatet över alla individer som lever vid tiden *t*, oavsett när man är född och så får man:

$$L(t) = \int_{-\infty}^{t} l(t-j)N(j,t)dj = \int_{-\infty}^{t} me^{-\omega(t-j)}N(0)e^{nj}be^{-p(t-j)}dj \qquad (10)$$

Genom att lösa integralen fås det totala arbetsutbudet vid tiden *t*:

$$L(t) = m\frac{b}{\omega + b}N(t) \qquad (11)$$

L(t) visar hur stor andel av befolkningen som arbetar just nu. Den totala arbetskraften beror på hur många som föds och hur många som pensioneras – hur många som tillkommer och lämnar arbetskraften just nu. Ekvation (11) kan lösas för ω, så att $\omega = b\frac{N}{L} - b$, då $m = 1$. Om förenklingarna i modellen stämmer så borde (11) ge en lösning på ω som motsvara 1/pensionsåldern. Mer om pensionsåldern kommer i avsnitt 3.2. som berör vad som sker i modellen när pensionsåldern höjs.

Konsumtionen

Den sammanlagda konsumtionen *C(t)* fås genom att multiplicera konsumtionen för en individ i åldern *t-j* med antalet individer i den generationen och sedan summera det över alla generationer som lever nu.

$$C(t) = \int_{-\infty}^{t} c(j,t)N(j,t)dj \qquad (12)$$

Det ger *C(t)* som är den totala konsumtionen i ekonomin vid den nuvarande tiden.

De finansiella tillgångarna

Det totala värdet på de finansiella tillgångarna fås på samma sätt som den totala konsumtionen:

$$A(t) = \int_{-\infty}^{t} a(j,t)N(j,t)dj \qquad (13)$$

Lönen

Även för att få nutidsvärdet av den samlade lönen följer man samma procedur (i appendixet finns den fulla uträkningen för nutidsvärdet av den summerade lönen):

$$\widetilde{W}(t) = \int_{-\infty}^{t} \widetilde{w}(j,t)N(j,t)dj = \widetilde{w}(t,t)L(t) \qquad (14)$$

2.5 Det representativa företaget:

Det representativa företaget beskrivs av en neoklassisk produktionsfunktion med konstant skalavkastning:

$$Y(t) = F(K(t), T(t) \cdot L(t)) \qquad (15)$$

T står för teknologi och den växer i takten *g*, så att $T(t)=T(0)e^{gt}$. Teknologin är Harrodneutral, vilkt betyder att teknologiska framsteg endast påverkar arbetskraften. *K* står som vanligt för kapitalet, *A* och *K* är skilda från varandra eftersom ekonomin är öppen och då kan ekonomins samlade finansiella tillgångar *A* utgöras av både ekonomins eget kapital *K* samt det utländska kapitalet *D*:

$$A \equiv K + D$$

Marginalprodukten av kapitalet är räntan plus deprecieringstakten:

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} = f'\left(\hat{k}(t)\right) = r + \delta \qquad (16)$$

$\hat{k}$ är kapitalet per effektiv arbetskraft, $\hat{k} = K/(L(t) \cdot T(t))$, en ^ ovanför en variabel visar att den är justerade för teknologisk tillväxt.

Då det är en liten öppen ekonomi så är räntan bestämd utanför ekonomin och kapitalnivån i ekonomin anpassar sig således efter räntan. Om räntan går upp, så stiger marginalprodukten av kapitalet och för att marginalprodukten av kapitalet ska stiga så måste mängden kapital minska. Det sker eftersom man inte vill investera (ex. bygga fabriker) när man kan få bättre utdelning på sitt kapital genom att köpa obligationer (spara dem i banken). Därför är det räntan som bestämmer kapitalintensiteten, istället för tvärtom likt i en stängd ekonomi.

Vi antar att det inte finns någon arbetslösheten och att företagen vinstmaximerar, så att lönen bestäms utav arbetskraftens marginalprodukt:

$$w(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} = \left[f(\hat{k}) - \hat{k}f'(\hat{k})\right]T(t) \equiv \hat{w} * T(t) \qquad (17)$$

Då räntan, som bestäms utanför ekonomin, bestämmer mängden kapital så bestäms lönen indirekt utanför ekonomin genom $\hat{k}$.

2.6 Det dynamiska systemet

Dynamiken i modellen beskrivs genom två differentialekvationer som visar hur konsumtionen och den finansiella förmögenheten utvecklar sig över tiden. De två differentialekvationerna kan kombineras tillsammans i ett fasdiagram, i vilket man kan finna den stabila vägen för konsumtionen och den finansiella förmögenheten som leder till steady state.

Först visar jag hur man får fram de två differentialekvationerna och tolkar dem. Därnäst sätter jag dem samman i ett fasdiagram som presenteras ingående. I avsnitt 3.2 återkommer jag till fasdiagrammet när jag ser vad som sker i modellen om pensionsåldern ändras.

2.6.1. Differentialekvationen för A – den finansiella förmögenheten

Första steget är att finna ett uttryck för $\dot{A}(t)$ $\left(\dot{A}(t) \equiv \frac{\partial A(t)}{\partial t}\right)$ som visar hur det egna nationella kapitalet tillsammans med nettot av det utländska kapitalet i ekonomin utvecklar sig över tiden. $\dot{A}(t)$ kan fås fram genom vanlig bokföring, det totala kapitalet i en ekonomi borde i varje period växa med inkomsterna i perioden (som här är räntan på den redan sparade finansiella förmögenheten samt den totala lönen) minus utgifterna, som här är konsumtionen. Det ger uttrycket:

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} \equiv \dot{A}(t) = rA(t) + w(t)L(t) - C(t) \qquad (18)$$

För att kontrollera att vår bokföring är korrekt kan man derivera uttrycket för de summerade finansiella tillgångarna. Deriveringen görs med hjälp av Leibniz's formel (se appendix) och resultatet är det samma som med bokföringen – så bokföringen stämmer.

Räntan i (18) är endast *r*, men i markanden för annuiteter fick varje individ räntan *(r+p)* på sitt sparade kapital. Men då det i varje period dog *pL* individer som efterlämnade sig *pLA* i arv till försäkringsbolagen blir genomsnittsräntan för varje individ:

$$(r+p)A - \frac{pLA}{L} = rA$$

vilket förklarar varför räntan bara är *r* i differentialekvationen (18).

Nästa steg är att få fram hur den genomsnittliga finansiella förmögenheten per person utvecklar sig över tiden och det definieras som $\dot{\hat{a}} \equiv \frac{\partial \hat{a}}{\partial t}$ där $\hat{a} \equiv \frac{A}{TN}$. Den sistnämnda definitionen skrivs om till logaritmisk[7] form: $\log \hat{a} = \log A - \log T - \log N$, som deriveras med hänsyn till tiden och ger:

$$\frac{\dot{\hat{a}}}{\hat{a}} = \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{T}}{T} - \frac{\dot{N}}{N} = \frac{\dot{A}}{A} - g - n \qquad (19)$$

Ekvation (19) kombineras med ekvation (18) för $\dot{A}$ samt med (11) arbetsutbudet och man får differentialekvationen (20) som visar hur $\dot{\hat{a}}$ utvecklar sig:

$$\dot{\hat{a}} = (r - g - n)\hat{a} + \hat{w}^* \frac{b}{\omega + b} - \hat{c} \qquad (20)$$

[7] Att skriva om identiteten till logaritmisk form är inte nödvändigt, men personligen jag tycker att det är lättare att derivera $\hat{a}$ med hänsyn till tiden när den stor i logaritmisk form.

Den första termen i (20) $(r-g-n)\hat{a}$ visar avkastningen på den sparade finansiella förmögenheten. Avkastningen är justerad för teknologisk tillväxt och befolkningstillväxten. Den andra termen visar lönen, men då inte hela befolkningen arbetar multipliceras lönen med $\frac{b}{\omega+b}$ för att få genomsnittslönen per capita. Differentialekvationen för $\dot{\hat{a}}$ säger att den finansiella förmögenheten växer med avkastningen på sparade tillgångar plus lönen minus konsumtionen, vilket också intuitiv är logiskt enligt vanlig bokföring.

2.6.2 Differentialekvationen för C – konsumtionen

För att få fram differentialekvationen för konsumtionen följer man samma mönster som för att få fram differentialekvationen för *A*.

Ekvation (12) som beskriver *C(t)* deriveras med hänsyn till tiden och med hjälp av Leibniz’s formel (se appendix) och ger (21) som beskriver hur den totala konsumtionen utvecklas över tiden:

$$\frac{\partial C(t)}{\partial t} \equiv \dot{C}(t) = [r-\rho+\omega+n]C(t) - (\omega+b)(\rho+p)A(t) \qquad (21)$$

Den första delen av (21), känns igen från Keynes-Ramsey regeln, medan den andra delen är en ersättningseffekt för nya generationer. Individens maximeringsproblem ger Keynes-Ramsey regel:

$$\frac{\dot{c}}{c} = r-\rho \Leftrightarrow \dot{c} = (r-\rho)c$$

då $\dot{C} = \dot{c}L + c\dot{L} \Leftrightarrow \frac{\dot{C}}{cL} = \frac{\dot{c}L}{cL} + \frac{c\dot{L}}{cL} \Leftrightarrow \dot{C} = \left(\frac{\dot{c}}{c}+n\right)cL = \left(\frac{\dot{c}}{c}+n\right)C$

får man den första delen av (21) [r – ρ + n]C.

Nivån för konsumtionen och därmed den marginella benägenheten att konsumera av ens tillgångar (de sparade finansiella tillgångarna och nuvärdet av den totala framtida lönen) gavs av ekvationen:

$$c(t) = (\rho+p)[a(t)+\tilde{w}(t)] \qquad (5)$$

Benägenheten att konsumera av sin tillgångarna är den samma för alla individer oavsett deras ålder, vilket gör att (5) kan skrivas om till:

$$C(t) = (\rho + p)\left[A(t) + \widetilde{W}(t)\right] \qquad (5b)$$

I varje period föds det $b*L$ nya individer som inte har några finansiella tillgångar. De genomsnittliga finansiella tillgångarna påverkar konsumtionen i varje period med $(\rho + p)A/L$. Den effekten minskar med antalet nya individer ($b*L$) i varje period, vilket ger: $-bL(\rho + p)\frac{A}{L} = -b(\rho + p)A$. Det är den negativa effekten på konsumtionen som kommer från att det föds nya individer utan finansiella tillgångar i varje period.

Pensionsåldern, ω kommer in på två ställen i ekvationen. Det sker eftersom pensionsålder påverkar hur stor den human förmögenhet – nuvärdet av den totala lönen. Den human förmögenheten - $\widetilde{w}$, nuvärdet av den totala lönen kan användas till konsumtion, mera c eller för att spara upp mera a. Pensionsåldern påverkar den humana förmögenheten så att $d\widetilde{W} = \omega\widetilde{W} > 0$. Genom att totaldifferentiera (5b) och sätta $dA = 0$ får man:

$$dC = (\rho - p)d\widetilde{W} = (\rho - p)\omega\widetilde{W} = (\rho - p)\omega\left[\frac{C}{(\rho - p)} - A\right] = \omega C - \omega(\rho - p)A$$

vilket ger hur ω kommer in i (21) och påverkar konsumtionens utveckling.[8]

Nästa steg för att få fram hur konsumtionen per effektiv capita utvecklar sig över tiden är att definiera: $\dot{\hat{c}} = \frac{\partial \hat{c}}{\partial t}$ där $\hat{c} \equiv \frac{C}{TN}$. Den sista definitionen skrivs om till logaritmisk form: $\log \hat{c}$ = log C –log T – log N som deriveras med hänsyn till tiden:

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{T}}{T} - \frac{\dot{N}}{N} = \frac{\dot{C}}{C} - g - n \qquad (22)$$

Ekvation (22) kombineras med (21) och man får differentialekvationen (23) som visar hur konsumtionen per effektiv capita utvecklar sig över tiden:

[8] Detta är en ”genväg” för att få in pensionsåldern i modellen. Det korrekta borde vara att ta med ω i individens maximeringsproblem, men detta är ett enklare sätt.

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = (r - \rho + \omega - g) - (\omega + b)(\rho + p)\frac{\hat{a}}{\hat{c}} \qquad (23a)$$
$$\dot{\hat{c}} = (r - \rho + \omega - g)\hat{c} - (\omega + b)(\rho + p)\hat{a} \qquad (23b)$$

$\dot{c}$-linjen är inte lika intuitiv som $\dot{a}$-linjen, (23a) visar tillväxttakten för konsumtionen. Den första delen av (23b), $[r - \rho + \omega - g]\hat{c}$, kommer likt i (21) från Keynes Ramsey-regeln, men konsumtionen är nu korrigerad för teknologisk tillväxt. Den andra delen av ekvationen, $-(\omega + b)(\rho + p)\hat{a}$ – ersättningseffekten för nya generationer – är den samma som i (21). Ekvation (23) visar vad som påverkar tillväxttakten i konsumtionen. Man kan se att en ökning av barnafödandet leder till en lägre tillväxttakt i konsumtionen, det sker genom ersättningseffekten som ökar när det är fler som föds (eftersom de föds utan finansiella tillgångar). Pensionsålder kommer in på två ställen och verkar i olika riktningar. En högre pensionsålder (lägre ω) gör att den framtida lönens nuvärde ökar. Ökningen kan användas på konsumtionen och/eller mer sparande, ökade finansiella tillgångar, se (5b).

De två differentialekvationerna (20) och (23), kombineras med varandra (och med transversallitets vilkoret) och visar tillsammans hur konsumtionen och den finansiella förmögenheten utvecklar sig över tiden i ett fasdiagram. Fasdiagrammet visar hur ekonomin ser ut i steady state och hur ekonomin utvecklar sig för att nå steady state.

I nästa stycke börjar jag med att visa hur differentialekvationerna ger fasdiagrammet och sedan presenteras själva fasdiagrammet. Därefter kommer en kort sammanfattning av Blanchards OLG-modell för en liten öppen ekonomi och några konklusioner, samt lite kritik till modellen.

2.7 Fasdiagrammet

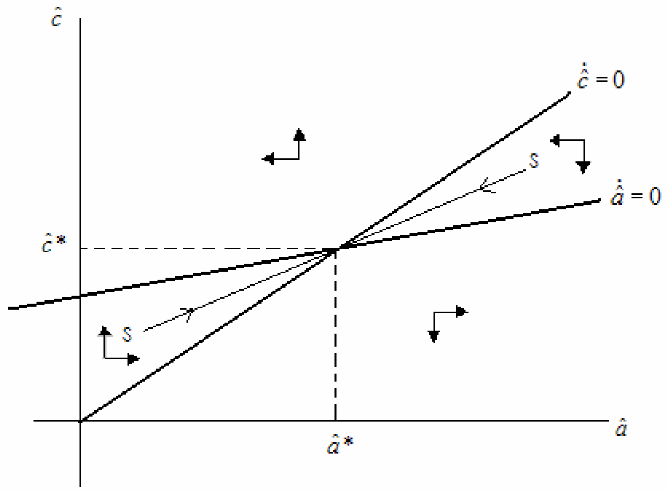
I steady state så är $\dot{\hat{a}} = \dot{\hat{c}} = 0$ eftersom konsumtionen och den finansiella förmögenheten i steady state är i jämvikt och inte ändras. Genom att använda sig av att $\dot{\hat{a}} = \dot{\hat{c}} = 0$ ger de två differentialekvationerna (20) och (23), de två ekvationerna i fasdiagrammet.

$$\dot{\hat{a}} = 0 \Rightarrow \hat{c} = (r - g - n)\hat{a} + \hat{w}^* \frac{b}{\omega + b} \qquad (24)$$

och

$$\dot{\hat{c}} = 0 \Rightarrow \hat{c} = \frac{(\omega + b)(\rho + p)\hat{a}}{r - \rho + \omega - g} \qquad (25)$$

Dessa två linjer, ekvationerna (24) och (25), kombineras tillsammans i fasdiagrammet och visar dynamiken i ekonomin, var steady state är och hur ekonomin ändrar sig för att nå dit. Genom de två differentialekvationerna och fasdiagrammet kan man studerar hur ändringar av t.ex. räntan, pensionsåldern, befolkningstillväxten och teknologisk tillväxt påverkar ekonomin – konsumtionen och de finansiella tillgångarna.



Figur 2. Fasdiagram för en liten öppen ekonomi. $\hat{c}*$ och $\hat{a}*$ markerar var konsumtionen och de finansiella tillgångarna är i steady state.

Den version av Blanchards OLG-modell som jag använder mig av är för en liten öppen ekonomi och där räntan är given av världsmarkanden. I själva fasdiagrammet antas räntan vara konstant vilket betyder att världsekonomin är i steady state.

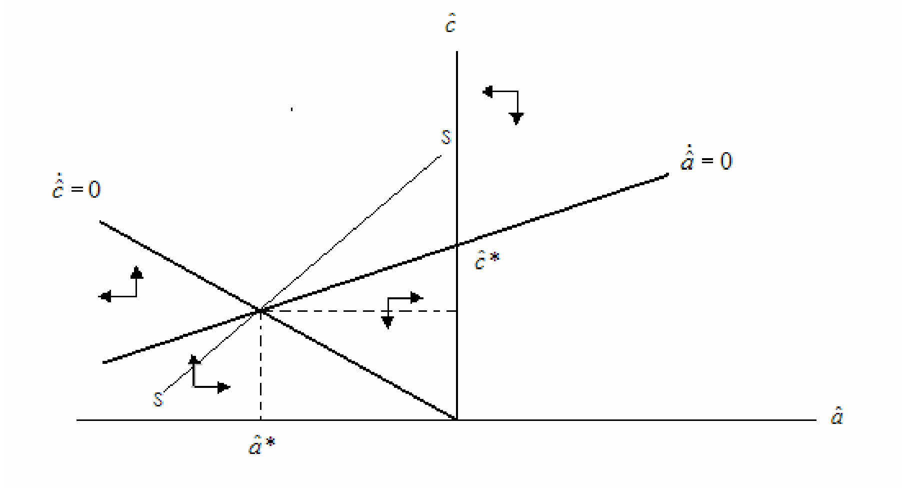
Transversallitets villkoret (TVC): $\lim_{t \to \infty} a(t)e^{(r+p)t} = 0$, (TVC) säger att när tiden går mot oändligt så går *a(t)* mot noll. Det sker eftersom individen endast får nytta av konsumtion och därför vill man hellre konsumera för sina sparade tillgångar än ha dem kvar i "slutet". Transversallitets villkoret säger att ekonomin rör sig längs en stabil väg (ss) mot steady state och utesluter att ekonomin rör sig enligt:

- Pilarna nederst i den högra delen av fasdiagrammet. Om ekonomin skulle följa dem, skulle man inte konsumera något utan spara alla sin tillgångar.
- Pilarna överst i den vänstra delen av fasdiagrammet. Om ekonomin skulle följa dem, skulle man konsumera för alla sina tillgånga och inte spara något alls.

Den stabila vägen mot steady state för ekonomin är den tunna linjen i mitten av fasdiagrammet (ss). Om ekonomin befinner sig ovan/under den stabila vägen kommer konsumtionen att ”hoppa” ner/upp till den. Att det är *c(t)* som ”hoppar” och inte *a(t)* beror på att de finansiella tillgångarna är förutbestämda. I individens budgetrestriktion ser man att ändringar i *a* beror på föregående periods *a, c* däremot bestäms oberoende av hur konsumtionen såg ut i föregående period. När det kommer en chock till ekonomin, så kommer chocken initialt endast att påverka konsumtionen. Konsumtionen kommer att ”hoppa” till en ny nivå och sedan kommer den finansiella förmögenheten att gradvis ändra sig så att ekonomin återigen når den stabila vägen mot steady state.

$\dot{\hat{a}} = 0$-linjen skär $\hat{c}$-axeln där konsumtionen motsvarar $\hat{w}*\dfrac{b}{\omega + b}$ lönen per capita – som ju är den högsta möjliga konsumtionen per capita om det inte finns några finansiella tillgångar. Linjens positiva lutning kommer från att *(r-g-n)>0* vilket betyder att man får en positiv avkastning på sina sparade finansiella tillgångar. Om *(r-g-n) < 0* så kommer värdet av de sparade tillgångarna att minska och man vill inte spara lika mycket, vilket ger en lägre konsumtion som pensionerad.

$\dot{\hat{c}} = 0$-linjen har sin utgångspunkt i origon. Den positiva lutningen kommer från antagandet att $(r+\omega)>(\rho+g)$. Det väsentliga för individens beteende är huruvida $(r > \rho)$. Om räntan är större än individens subjektiva diskonteringsfaktor så kommer individen att öka sin konsumtion över tiden när *a* ökar. Det gör att ekonomin har ett positivt värde i steady state för *a*, $\hat{a}^* > 0$ och att värdet på utländska tillgångar är positivt. Ett högre ρ betyder att landet är otålmodigt och hellre konsumerar idag än spara för att kunna konsumera imorgon. Lutningen på $\dot{\hat{c}} = 0$-linjen blir därför brantare när ρ ökar. Ju mindre tålamod man har desto lägre konsumtion och finansiella tillgångar har man i steady state. Skulle ρ öka så mycket så att $(r < \rho)$ eller snarare så att $(r + \omega < \rho + g)$så kommer ekonomin ha en negativt värde på sina utländska tillgångar och man har får en nettoskuld. Man kommer att låna pengar med sin framtida lön som säkerhet för att kunna konsumera nu, vilket gör landet till skuldtagare. Om ekonomin är en nettoskuldtagare så blir fasdiagrammet istället:



Figur 3. Fasdiagram för en ekonomi som är skuldtagare.

$\dot{\hat{a}} = 0$ -linjen är oförändrad om man jämför med det andra fasdiagrammet och precis som i figur 2 så skär $\dot{\hat{a}} = 0$ -linjen $\hat{c}$ -axeln vid ett värde som motsvara lönen per capita.

För att lutningen på $\dot{\hat{c}} = 0$ -linjen ska vara brantare än lutningen på $\dot{\hat{a}} = 0$ -linjen antas att:

$$\frac{(\omega + b)(\rho + p)}{r - \rho + \omega - g} > r - g - n > 0$$

Antagandet gör att differentialekvationerna kommer att korsa varandra, vilket betyder att ett steady state existerar och eftersom vi antagit att *(r > ρ)* så har de finansiella tillgångarna ett positivt värde i steady state. (För övrigt säger antagandet att $\dot{\hat{c}} = 0$ -linjen kommer korsa $\dot{\hat{a}} = 0$ -linjen underifrån vilket den även gör i en stängd ekonomi.)

2.8 Sammanfattning och kritik

I Blanchards OLG-modell så lever det flera generationer samtidigt. De olika generationernas (finansiella och humana) förmögenhet skiljer sig åt vilket påverkar deras möjligheter för konsumtion[9]. Sannolikheten för att dö är densamma i varje period och vetenskapen om att man ska dö gör att individerna har en ändlig tidshorisont. Att individerna har en ändlig tidshorisont tillsammans med det faktum att de vid en viss ålder pensioneras påverkar deras sparande- och konsumtionsmönster. Individerna vill utjämna sin konsumtion under sin livstid. Det gör att de sparar medan de arbetar, för att sedan konsumera för sina sparade tillgångar när de är pensionerade. Konsumtions- och sparandemönster grundar sig på livscykelhypotesen och att det inte finns något arvsmotiv i modellen.

Då varje generation skiljer sig från varandra, finns det ingen representativ agent.[10] Istället finner man ett genomsnitt för alla generationers konsumtion, finansiella förmögenhet, arbetsutbud och förväntad diskonterad lön som lever vid tiden *t*. Genomsnittsvärden används för att få fram de två differentialekvationerna för konsumtionen och den finansiella förmögenheten som visar hur de utvecklar sig över tiden. De två differentialekvationerna kombineras i ett fasdiagram och visar var steady state är och vilken den stabila vägen dit är.

Då modellen är för en liten öppen ekonomi, så är både räntan och lönen given utanför ekonomin. Det gör att oavsett om det föds fler eller färre individer till ekonomin så är lönen per arbetskraft konstant. Däremot så ändras den genomsnittliga lönen – lönen per capita när befolkningstillväxten ändras. Men genom att ändra pensionsåldern kan man påverka den genomsnittliga lönen, vilket kan vara intressant med hänsyn till skatt och försörjningsbördan. Om den teknologiska tillväxttakten i ekonomin och individernas tidspreferenserna är konstanta, så är det endast en ändring i pensionsåldern eller demografiska ändringar som kan påverka ekonomins steady state. När det föds färre människor så är det färre som ska dela på den existerande kapitalet vilket gör att de kan konsumera och spara mera. Föds det däremot fler människor så blir steady state nivån

[9] Men alla individer har samma maximerings problem, det är endast åldern som gör att individerna har olika nivåer av humana och finansiella tillgångar och konsumtion.
[10] Som det finns i t.ex. Ramsey-modellen.

för konsumtionen och den finansiella förmögenheten per capita lägre. Det beror på att de nu är fler som ska dela på kapitalet och allt fler föds utan kapital – vilket minskar de genomsnittliga konsumtionsmöjligheterna.

Tidspreferenserna speglar individens tålamod, eller snare brist på tålamod. Om man har ett högt ρ, så är man otålig och vill hellre konsumera idag än spara för att kunna konsumera senare. Ju otåligare individerna är desto lägre blir steady state värdena för konsumtion och den finansiella förmögenheten.

När det kommer en chock till ekonomin är det konsumtionen som ändras direkt. Det beror på att konsumtionen kan variera mellan perioder tillskillnad från den finansiella förmögenheten som är förutbestämd och beror på värdet i föregående period. Genom fasdiagrammet kan man studera hur olika chocker påverkar ekonomin, dess nya steady state värden och hur ekonomin rör sig för att komma dit. I fasdiagrammet kan man med hjälp av TVC utesluta att ekonomin rör sig längs en ostabil väg (under en längre tid) och att individerna antigen enbart konsumerar eller enbart sparar sin inkomst.

Allt sparande sker genom marknaden för annuiteter som uppstår eftersom man inte vet när man ska dö och inte vill lämna något arv efter sig. Försäkringsbolagen ger individerna utdelning på deras sparade kapital $(r+p)$, där p är en riskpremie. Det betyder att när den förväntade livslängden ökar (p minskar så) minskar utdelningen till individen i varje period. Märk väl att det inte påverkar räntan i differentialekvationerna då räntan där är den genomsnittliga utdelningen.

Generell kritik mot OLG-modeller är att de vilar på livscykel hypotesen och individerna förutses veta vad som sker i framtiden.[11] Motivet att spara mer än vad som behövs för pensionsåldern finns heller inte i OLG-modellerna, man tar inte hänsyn till att många spara för att ha en extra buffert om ifall.[12]

Mer specifik invändningar till den version av Blanchards OLG-modell som jag använder kan göras mot några av de förenklingar som görs. Sannolikheten för att dö är den samma oavsett ålder (ett antagande som inte alls passar med verkligheten) och markanden för annuiteter är något orimlig i sin konstruktion. När förenklingar görs i en modell bör man ifrågasätta hur förenklingen underlättar för att få fram resultatet och hur de påverkar resultatet. När det gäller p, sannolikheten för att dö anser jag att

[11] De antas ha ”perfect foresight”.
[12] Tar ingen hänsyn till ”precautionary savings”.

förenklingen visserligen påverkar resultatet, men de förändrar inte intuitionen bakom resultaten i modellen. Den något orealistiska marknaden för annuiteter uppstår pga. av de förenklingar som görs i modellen (samma sannolikhet för att dö och att det inte finns något arvsmotiv). Riskpremien i modellen utgörs endast av sannolikheten för att dö, inga andra risker finns när man investerar vilket ju finns och borde vara inkorporerade i riskpremien. Ett sätt att inkorporera arvsmotivet i modellen skulle kunna vara genom att man får nytta av framtida generationers nytta.[13]

Valet av nyttofunktion kan i princip alltid ifrågasättas. I modellen här är nyttofunktionen: $u(c)=log\ c$ (så marginalnyttan av konsumtionen är avtagande, men aldrig negativ). Det är endast konsumtion som ger nytta till individen, man får varken positiv nytta av fritid eller negativ nytta av att arbeta – något som ofta antas. Pensionsålder tas som given och kan inte påverkas av individen. Men mer om pensionsåldern kommer i nästa avsnitt.

[13] Se exempelvis Barros OLG-modell med arvsmotiv.

3. Pensionsålder – ω

Detta avsnittet har sitt fokus på pensionsåldern, varför man har en pensionsålder, hur väljs den och vad sker i modellen om pensionsåldern ändras. Första delen i detta avsnitt berör varför man har en pensionsålder och hur den kan och bör väljas? I avsnitt 3.2 används Blanchards OLG-modell för att diskutera effekterna på konsumtionen och sparandet när pensionsåldern ändras. Diskussionen tar sin utgångspunkt i vad som sker i fasdiagrammet när pensionsåldern höjs. I avsnitt 3.3 gör jag en simulering på modellen. Simuleringen bygger på data för Sverige och visar vad som skulle kunna ske med konsumtionen och sparandet om pensionsåldern höjs. Avsnitt 3 avslutas med en diskussion om det ökade beroendeförhållandet och en höjning av pensionsåldern.

3.1. Pensionsåldern

I modellen tolkas pensionsåldern – ω som takten i vilken arbetskraftens produktivitet avtar. Arbetsutbudet i modellen avtar med tiden: $l(t-j)=me^{-\omega(t-j)}$ och det gör det med faktorn ω (j är perioden man föds i och t är den nuvarande perioden, så arbetsutbudet minskar med tiden). Man kan se det som att det blir allt jobbigare att arbeta med åldern, tills man kommer till en punkt där det inte lönar sig längre. Pensionsåldern blir således den ålder i vilken genomsnittsindividens produktivitet pågrund av förslitningar etc. är liten eller helt upphör. Detta kan vara en anledning till att man valt en viss pensionssonålder. Pensionsåldern skulle göra att oproduktiva arbetare slutar automatiskt. Annars skulle företagen likväl avskeda de äldre arbetarna då de skulle hindra företaget att producera sin maxproduktion givet det kapital de har.

Men idag är det många som skulle kunna arbeta (och också väljer att arbeta) längre än till 65. Således är det nog inte enbart minskad produktivitet som ligger bakom valet av pensionsålder. Vore det så, borde pensionsåldern varierar i ännu högre grad än nu mellan olika arbetsgrupper – då ”förslitningstakten” i hög grad är kopplat till yrkesgrupper.

Valet av själva pensionsålder kan variera beroende på vilka preferenser som ligger till grund för valet. Den optimala åldern för individen behöver inte överrensstämma med den lämpligaste åldern för samhället eller den rådande poltiken. Pensionsåldern kan vara vald utifrån skatter eller pensionssystem, politiska ideal eller agenda. Den kan vara vald utifrån belastningen man utsetts för vid arbete i olika yrkesgrupper, arbetsuppgifterna, arbetskultur och kutym inom yrkesomårdena. Fackligt inflytande och den rådande politiska kulturen är faktorer som kan spela in när pensionsåldern väljs.

Med de demografiska förändringarna, med en allt större andel gamla i befolkningen, som har skett i Sverige och andra OECD-länder, har diskussionen kring en höjd pensionsålder varit knuten till försörjningsproblematiken. En allt större andel gamla i befolkningen betyder lägre skatteintäkter och högre utgifter. Frågan är hur man kan klara att försörja de äldre i befolkningen när arbetskraften som en andel av befolkningen minskar. Ett alternativ (eller komplement) till höjda skatter eller en ökad statsskuld, skulle kunna vara att höja pensionsåldern. Det skulle betyda att arbetskraften ökar och att skatteintäkterna från arbetskraften blir större utan att själva skattesatsen behöver öka. En annan orsak till att man vill höja pensionsåldern kan vara att man inte till fullo utnyttjar det humankapital som finns i ekonomin. Återigen är det nerslitningstakten som kan variera. Inom en del yrkesgrupper är nerslitningstakten lägre och man skulle under en längre tid kunna använda det humankapital som individen besitter. En annan anledning till att man vill höja pensionsåldern är att man börjar arbeta allt senare i livet. Fler vidareutbildar sig och de gör det under en allt längre tid, vilket betyder att deras tid som aktiva på arbetsmarkanden minskar.

I modellen så får individen enbart nytta av konsumtion, ett mer realistiskt antagande är att man även får nytta av fritid eller man får negativ nytta av att arbeta. Då pensionsåldern inträffar i slutet av livet, kan man anta att man får mer negativ nytta av arbeta ju äldre man blir. Låt oss gå bort från Blanchards OLG-modell och istället titta på en CES-funktion där men får negativ nytta av att arbeta:

$$\max U = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \left(\frac{C_{t+i}^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\varphi_t L_{t+i}^{1-\eta}}{1-\eta} \right) \qquad (26)$$

Där konsumtionen betecknas av C och L är arbetskraftsutbudet. β är en diskonteringsfaktor och φ speglar att arbete ger mer negativ nytta med åldern, dvs. den växer med tiden. Det gör att man får mer negativ nytta av att arbeta med tiden. σ och η är konstanter mellan 0 och 1. Budgetrestriktionen ges av:

$$A_t + C_t = W_t L_t + (1 + i_{t-1}) A_{t-1} \qquad (27)$$

W betecknar lönen och A är kapitalet. Budget restriktionen skrivs om och substitueras i nyttofunktionen som maximeras över L och ger bl.a. förstaordersvillkoret:

$$\frac{\partial U}{\partial L} = W_t C_t^{-\sigma} - \varphi_t L_t^{-\eta} = 0 \qquad (28)$$

(28) kan skrivas om till följande funktion som beskriver arbetsutbudet:

$$L_t = \left(\frac{W_t}{C_t^{\sigma} \varphi_t} \right)^{\frac{1}{\eta}}$$

När φ stiger så vill man arbeta mindre och ens arbetsutbud minskar, det beror på att ju äldre man är desto mer negativ nytta får man av att arbeta. För att vilja fortsätta arbeta när φ stiger så bör lönen öka (något den inte kan i den här modellen då den är given av räntan). När lönen inte längre ökar som kompensation för den ökade negativa nyttan från att arbeta, kommer man att välja att inte utbjuda mer arbete vilket motsvara att man går i pension och slutar arbeta. Den optimala pensionsåldern väljs här av den rationella individen som maximerar sin nyttofunktion.

Man skulle också kunna se på pensionstiden som fritid, från vilken man får nytta. Men denna ”fritid” – pensionen kan endast tas ut i slutet av livet och man kan inte arbeta igen efter att man gått i pension. Fritid och konsumtion ger positiv nytta, medan man får negativ nytta av att arbeta. Fritiden kan inte spridas ut över ens hela livstid och man får mest nytta av konsumtion om man utjämnar den över hela livet. Medan man arbetar sparar man kapital som man kan konsumera för när man är pensionerad. Den optimala pensionsålder kommer även här att väljas utifrån nyttomaximering och rationellt beteende.

Men för att individen själv ska välja sin optimala pensionsålder, förutses det att individen har perfekt information, är framåtblickande och rationell. Perfekt information förutsätter att individen vet hur hans/hennes pensions ändras om han/hon arbetar x antal timmar, dagar, månader, år mer eller mindre, vilket kan vara svårt att förutsäga. Om man själv sparar upp till sin pension behöver man även veta under hur lång tid som man ska vara pensionär. Man behöver veta sin förväntade livslängd efter pension för att kunna veta hur mycket man bör spara till pensionen.

Gussman och Steinmeiner (2002) skriver att det i USA kan ses två toppar när det gäller pensionsålder, 62 och 65. De som pensionerar sig vid 62 års ålder gör det ofta trots att de skulle kunna få en betydligt bättre pension om de valde att arbeta till 65 års ålder. Att de ändå väljer att pensionera sig vid 62 menar Gussman och Steinmeiner beror på tidspreferenser – de diskonterar framtida konsumtion högt och är mer intresserade av konsumtionen idag. Men det kan lika väl tyda på att individerna trots fullständig information inte handlar rationellt. Tidspreferenserna visar på individens tålamod eller kanske snarare på dess otålighet. Frågan är, om det inte är otålighet som gör att man hellre vill konsumera idag istället för någon gång i framtiden. Det kan göra att även om man vill välja sin pensionsålder optimalt, så saknar man självkotroll och är otålig och väljer att pensionera sig tidigare med en lägre konsumtion än vad man egentligen vill. Detta med att individen handlar irrationellt, om än ofrivilligt, är också en viktig anledning till att en minsta pensionsålder är given. Stora problem kan uppstå om alltför många pensionerar sig för tidigt. Det skulle kunna betyda att steady state värdena för konsumtion och den finansiella förmögenheten minskar. Arbetsutbudet skulle också minska om många pensionerade sig för tidigt och det skulle minska skatteunderlaget vilket kan leda till problem för samhället.

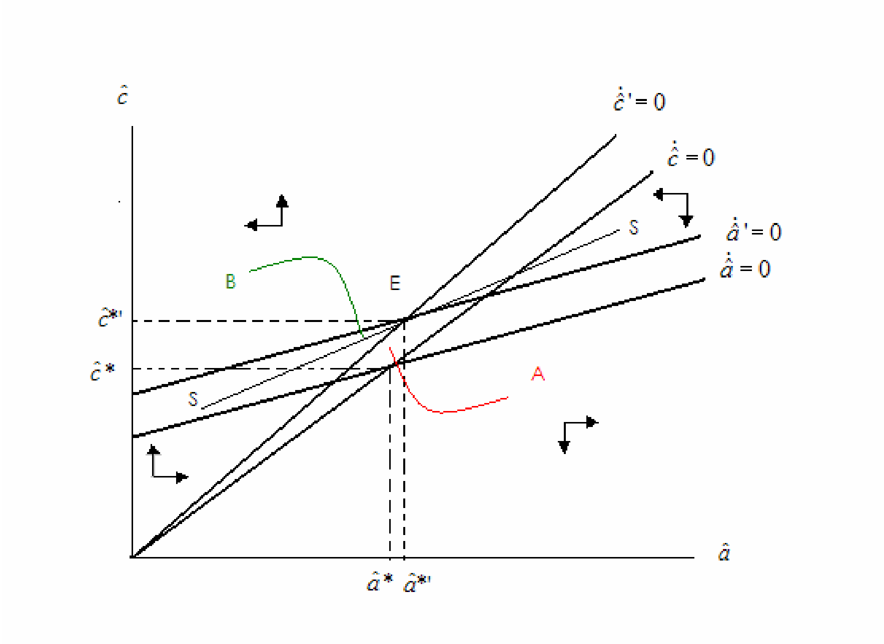
3.2. Fasdiagram

I det här avsnittet ska jag se vad som sker i Blanchards OLG-modell när pensionsåldern höjs. Diskussionen kring vad som sker när pensionsåldern höjs har sin utgångspunkt i fasdiagrammet. Att jag har valt att höja pensionsåldern beror på att det är det som är aktuellt med tanke på försörjningsproblematiken.

Pensionsåldern i modellen betecknas av ω, som ungefär motsvara 1/pensionsåldern. I modellen så föds man till arbetsmarknaden, vilket gör att pensionsåldern motsvara de år man har arbetat. Det betyder att när pensionsåldern höjs så minskar ω och vice versa. (Då man i modellen först föds när man blir en del av arbetskraften vilket jag antar här är vid 18 års ålder, så blir $\omega = 1/(65\text{-}18)$).

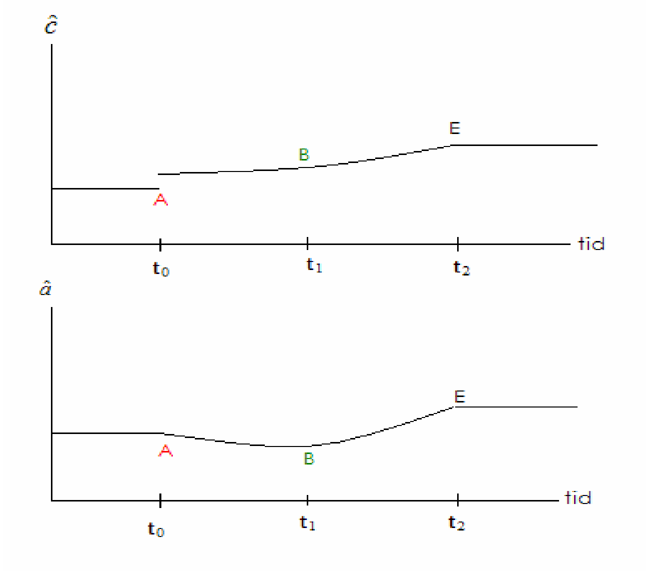
Att höja pensionsåldern är inte något som görs över en natt, det är troligare att en sådan ändring sker efter politisk diskussion (som kan ta sin tid). Det gör att beslutet när det väl kommer är förväntat. Det implementeras troligen heller inte direkt när ändringen annonseras eftersom individerna ska anpassa sitt sparande mönster till pensionsåldern. Tidschemat blir därför att vid t_0 så annonseras en ändring av pensionsåldern och vid t_1 så implementeras beslutet.

Jag har valt att utgå ifrån att $(r - \rho - g - b) < 0$ i fasdiagrammet - figur 4, så att $\dot{\hat{c}} = 0$ - linjens lutning blir brantare när pensionsåldern höjs – ω minskar (men mer om det efter fasdiagrammet).



Figur 4. Effekter av en lägre pensionsåldern.

Tidschemat – figur 5 tydliggör vad som sker med $\hat{c}$ och $\hat{a}$ i fasdiagrammet:



Figur 5. Tidschema över $\hat{c}$ och $\hat{a}$ när pensionsåldern höjs**.**

Vid tiden t_0, så tas beslutet att pensionsåldern ska höjas vid tiden t_1. Det gör att konsumtionen vid tiden t_0 ”hoppar” upp till *A*. Fram tills att den nya pensionsåldern införs så kommer ekonomin att följa dynamiken i det ”gamla” fasdiagrammet. Mellan tiden t_0 och t_1 kommer $\hat{c}$ att öka och $\hat{a}$ att minska enligt pilarna överst till vänster i fasdiagrammet. Vid tiden t_1 kommer ekonomin att befinna sig vid *B* som ligger på den stabila vägen till steady state. Att ekonomin befinner sig på den stabila vägen (ss) när beslutet om minskningen av ω implementeras beror på att man vet när ändringen ska ske och på att individerna är rationella och framåtblickande. Efter tiden t_1 kommer ekonomin att följa den stabila vägen mot steady state – *E*. De nya steady state värden för $\hat{c}$ och $\hat{a}$ kommer här, med den nya pensionsåldern, att vara högre än tidigare. Om höjningen av pensionsåldern inte varit annonserad innan så hade konsumtionen hoppat direkt till den nya stabila vägen när pensionsåldern höjs.

En höjning av pensionsåldern, från ω till ω' ($\omega > \omega'$), påverkar både $\dot{\hat{c}} = 0$ -linjen och $\dot{\hat{a}} = 0$ -linjen.

$$\dot{\hat{a}} = 0 \Rightarrow \hat{c} = (r - g - n)\hat{a} + \hat{w} * \frac{b}{\omega + b} \qquad (24)$$

$\dot{\hat{a}} = 0$-linjen påverkas genom att skärningspunkten på $\hat{c}$-axeln ändras. Minskas pensionsåldern, ω med en enhet så höjs särningspunkten på $\hat{c}$-axeln med $\hat{w}^* \dfrac{b}{(\omega + b)^2}$. (Som fås genom att derivera (24) med hänsyn till ω.) Att skärningspunkten blir högre beror på att det nu är fler som arbetar och får lön, vilket gör att lönen per capita ökar.

Vad som sker med $\dot{\hat{c}} = 0$-linjen är svårare att sia om eftersom ω finns både i täljaren och nämnaren.

$$\dot{\hat{c}} = 0 \Rightarrow \hat{c} = \frac{(\omega + b)(\rho + p)}{r - \rho + \omega - g}\hat{a} \qquad (25),$$

Om $\dfrac{\partial \hat{c}}{\partial \omega} < 0$, så leder en höjning av pensionsålder (en minskning av ω) till att $\dot{\hat{c}} = 0$-linjens lutning blir brantare. Är däremot $\dfrac{\partial \hat{c}}{\partial \omega} > 0$ så blir $\dot{\hat{c}} = 0$-linjens lutning flackare när ω minskar.

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \omega} = \frac{(r - \rho - g - b)}{(r - \rho + \omega - g)^2}\hat{a} \quad (27)$$

Ekvation (27) visar att det som avgör om $\dot{\hat{c}} = 0$-linjens lutning minskar eller ökar beror på huruvida $(r - \rho - g - b) < 0$ eller > 0.

ω äntrar ekvation för $\dot{\hat{c}}$=0-linjen på två ställen genom ersättningseffekten för nya generationer. Likt tidigare så föds man utan finansiella tillgångar, men de generationer som föds efter ω ändras har nu en högre human förmögenhet, större nuvärde av sin totala lön. De kommer att arbeta längre vilket gör att nuvärdet av deras lön är högre än tidigare. Den extra förmögenheten som de nya generationerna får kan de använda på konsumtion – c och på att spara upp mer – a.

I täljaren leder en höjning av ω till att $\dot{\hat{c}}$=0-linjens lutning ökar. Det sker genom att den extra förmögenhet man får av att arbeta längre används till att konsumera mer. Däremot så leder en höjning av ω i nämnaren till att $\dot{\hat{c}}$=0-linjens lutning minskar. Effekten i nämnaren kommer från att höjningen i lönen går till att spara up mer. För att $\dot{\hat{c}} = 0$-linjens lutning ska bli brantare så ska effekten av en höjd pensionsålder vara starkast i täljaren. Det betyder att den extra humana förmögenhet som man får av att arbeta längre, främst ska gå till en ökad konsumtion. Intuitivt låter det troligt att en ökning av nuvärdet av den totala lönen främst leder till ökad konsumtion.

Men som tidigare sagt så kan lutningen bli mindre när pensionsåldern går upp. Det sker om $(r - \rho - g - b) > 0$. Det skulle betyda att den finansiella förmögenheten per capita ökar oavsett hur hög pensionsåldern är. I marginalen skulle en alltför stor höjning av pensionsåldern leda till att $\dot{\hat{c}} = 0$-linjen inte korsar $\dot{\hat{a}} = 0$-linjen, vilket skulle betyda att systemet är ostabilt och att det inte finns någon steady state lösning. Rent intuitivt, stämmer det inte att en höjning av pensionsåldern oförbehållet leder till en ökning $\hat{a}$ med livscykelhypotesen. Enligt livscykelhypotesen sparar man till sin pension så att man kan utjämna sin konsumtion. Om pensionsåldern höjs så att man i princip arbetar tills man dör, så borde incitamentet för att spara minska (eller snarare upphöra) och $\hat{a}$ borde minska och inte oförbehållet öka när pensionsåldern höjs.

Genom lite algebra kan man se att $(r - \rho - g - b)$ rimligtvis är < 0, vilket gör att $\dot{\hat{c}} = 0$-linjens lutning blir brantare när pensionsåldern höjs. Säg att den teknologiska tillväxttakten – g är cirka 2%, vilket den också har varit i genomsnitt i Västeuropa efter andra världskriget och att tidspreferensen, ρ, är positiv och cirka. 0,02 vilket är vanligt att anta (Barro & Sala-i-Martin). Födelsefrekvens estimerar jag till att vara cirka 0,017 och då är uttrycket negativt så länge räntan är under cirka 5%. Att räntan ska vara cirka 5% eller under är inte ett helt orimligt antagande då det är den reella räntan som gäller här.

I fasdiagrammet – figur 4 ökar steady state värdena både för $\hat{a}$ och $\hat{c}$. Men man kan tydligt se att det inte ska mycket till för att steady state värdet för $\hat{a}$ ska minska. Det sker när lutningen på $\dot{\hat{c}} = 0$-linjen blir ”alltför” brant. Om pensionsåldern höjs alltför mycket så kommer ens tid som pensionär att minska betydligt. Det gör att incitamentet för att spara minskar, eftersom man nu inte behöver spara lika mycket som tidigare för att kunna utjämna sin konsumtion. Steady state värdet för konsumtionen kommer fortfarande att öka eftersom man får en högre livsinkomst som man kan konsumera för.

För att sammanfatta, så är det central att ens humana förmögenhet – ens totala lön stiger när man höjer pensionsåldern. Lönen per arbetskraftsenhet minskar inte när mer arbetskraft utbjuds eftersom det är en liten öppen ekonomi, där lönen bestäms av den givna räntan. Det enda som kan påverka lönen är teknologiska förändringar. Den extra lönen som man kommer att tjäna under sitt liv kan man lägga på konsumtion och sparande (till pensionen). Om man väljer att både konsumera mera och spara mera kommer steady state värdena för konsumtionen och den finansiella förmögenheten att öka. Men om pensionshöjden höjs allför mycket kommer incitamentet till att spara att minska, vilket kan göra att steady state värdet för den finansiella förmögenheten minskar. Att man väljer att spara mindre beror på att den tiden som man ska vara pensionär och leva på sina sparade tillgångar blir kortare. Det gör att man inte behöver spara lika mycket som tidigare för att kunna utjämna sin konsumtion över livet. De finansiella förmögenheten kan alltså både öka och minska när pensionsåldern höjs, jag har därför valt att göra en simulering i nästa avsnitt för att ge en kvantitativ implikation av vad som sker med a.

3.3. Simulering

För att testa modellen kvantitativt har jag valt att göra en simulering av modellen. Då modellen är för en lite öppen ekonomi, har jag valt att använda data för Sverige i min simulering. Min simulering går ut på att se vad som sker med konsumtionen och sparandet när pensionsåldern höjs från 65 till 67. Jag är intresserad av vad som sker på både kort och lång sikt när pensionsåldern höjs.

För att kunna simulera modellen har jag använt programmet SoWhat, i vilket man kan simulera differentialekvationer. Om inget annat anges är den data jag använder från SCB:s databas. Simuleringen sträcker sig över en period på 130 år och har sin början i 1968. Jag har, i så stor utsträckning som möjligt, valt att använda data från perioden 1968-1998 som jag sedan har använt för att se hur ekonomin utvecklar sig med de valda parametrarna i hundra år framåt. Avsnittet inleds med att jag definierar de olika parametrarna och redogör för simuleringen. Sedan presenteras själva simuleringen och en diskussion kring resultaten från den.

3.3.1 Definiering av parametrar

Befolkningen - *b, p och n:* För att bestämma de demografiska parametrarna har jag använt mig av SCB:s databas för befolkningsstatistik. Befolkningsparametrarna definieras enligt:

$$b = \frac{antalet\ födda + invandrade}{befolkningen}$$

$$p = \frac{antalet\, döda + utvandrade}{befolkninge}$$

$$n = b - p$$

I modellen så föds man först i ekonomin när man är en del av arbetskraften, därför motsvara en ”nyfödd” i modellen en 18-åringar. Huruvida en nyfödd är 18 eller 0 år gör ingen större skillnad här. Jag har valt *b* utifrån ett genomsnitt mellan åren 1968 och 2003, där jag har vägt de senare årens värdena en smula mer då simuleringen sträcker sig 100 år framåt och jag antar att de fortsätter vara konstanta. *p* har jag valt enligt samma princip och även den är konstant och det ger:

b = 0,0181

p = 0,0181

n = 0,0038.

Pensionsåldern – *ω:* bestäms som 1/pensionsåldern. Då man först föds i modellen när man är 18 år och tillhör arbetsmarknaden ger det: 1/(pensionsåldern-18).

Lönen – ***w:*** För att få ett passande värde för lönen har jag använt mig av SCB:s data för genomsnittliga månadslöner inom den offentliga och privata sektorn mellan 1973-1995. Då den reella lönen har varit ganska stabil under hela perioden har jag använt den reella lönen från 1995 på 33903 sek i min simulering.

Tidspreferensen – *ρ:* har jag antagit vara 0,02, vilket betyder att man hellre konsumerar idag än imorgon.

Teknologisk tillväxttakt - *g:* antas ofta ha varit ca 2% (i genomsnitt) i Västeuropa sedan andra världskriget (Barro & Sala-i-Martin 2004). Men Henrekson, Jonung och Stymne (1996) finner att Sveriges totala faktorproduktivitet (TFP) mellan åren 1970 och 1985 endast var på 0,61%. Jag har valt att sätta *g* = 0,0061 då den tidsperioden passar bättre in på min simulering och med tanke på att TFP var högre efter andra världskriget än den är nu.

Räntan – *r:* var svårast att bestämma. Då räntan i Blanchards OLG-modell för en stängd ekonomi ska ligga mellan $\rho + g - \omega > r^* > \rho + g + b$ har jag valt $r \approx \rho + g + b - \omega$. Detta är en förenkling som jag har valt trots att modellen är för en liten öppen ekonomi. (Men man skulle kunna argumentera för förenklingen då de flesta OECD—ländernas födelsetal har minskat vilket borde leda till en minskning av världsräntan.) Därför har jag valt att sätta räntan till 2% i min simulering.

3.3.2 Simuleringen

Simuleringen görs på de två differentialekvationerna:

$$\dot{\hat{c}} = (r - \rho + \omega - g)\hat{c} - (\omega + b)(\rho + p)\hat{a} \qquad (23b)$$

och

$$\dot{\hat{a}} = (r - g - n)\hat{a} + \hat{w} * \frac{b}{\omega + b} - \hat{c} \qquad (20)$$

och simuleringen löper över i allt 130 perioder, där en period motsvarar ett år. I den första simuleringen är pensionsåldern 65 (så att ω = 1/(65-18)) och simuleringen löper från 1968 och 130 år framåt. För de 30 första åren i simuleringen har jag de faktiska värdena för konsumtionen och den finansiella förmögenheten som jag jämför med simuleringen. De faktiska värdena för $\hat{c}$ och $\hat{a}$ är i fasta priser med 1968 som basår och de är justerade för teknologisk tillväxt. Det har jag gjort genom att dividera konsumtionen och kapitalet per capita med 1,006^tid, det görs eftersom $\hat{c}$ och $\hat{a}$ är korrigerade för teknologisktillväxt, $\left(\hat{a} = \frac{A}{TN} \; och \; \hat{c} = \frac{C}{TN}\right)$.

I den andra simuleringen har pensionsåldern höjts till 67 år så att ω = 1/(67-18), annars är alla parametrar de samma för de båda simuleringarna. Den andra simuleringen löper från 1998, vilket är det år jag antar att pensionsåldern höjs, och i 100 perioder framåt. I simuleringen tas beslutet om en höjning av pensionsåldern i samma period som höjningen sker. Jag har i båda simuleringarna antagit att K ≡ A, vilket betyder att D = 0, det finns inget utländskt kapital, varken lånat eller utlånat.

	Simulering 1	Simulering 2
pensionsåldern:	65	67
b - födelsetalet:	0,0181	0,0181
p - dödsfrekvensen	0,0143	0,0143
n - befolknings-tillväxttakten	0,0038	0,0038
r - realräntan	0,02	0,02
w - lönen	33903	33903
ρ - tidspreferens	0,02	0,02
ω - pensionsfrekvensen	0,021277	0,020408
startvärde a	100000	151083,1508*
startvärde c	14293	15964
startår	1968	1998
antal perioder:	130	100
*vilket motsvara simulering 1:s värde för a i 1998		

Tabell 1. Värden för simulering

Simuleringen ger följande värden för $\hat{c}$ och $\hat{a}$:

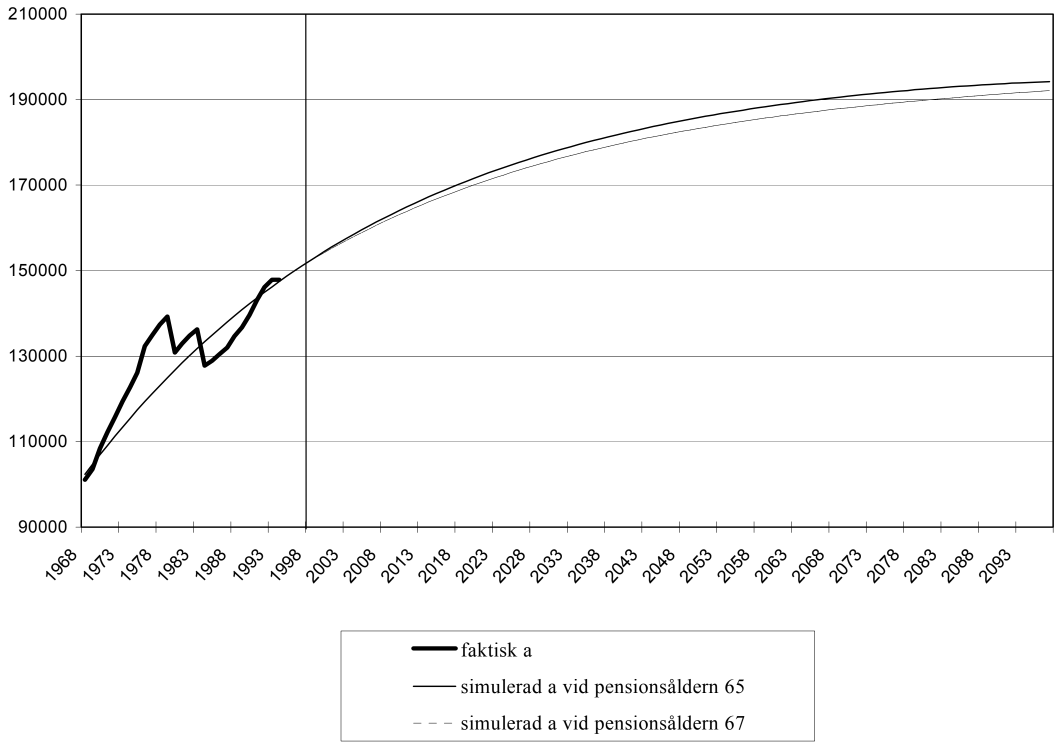


Diagram 2. Den finansiella förmögenheten per capita.

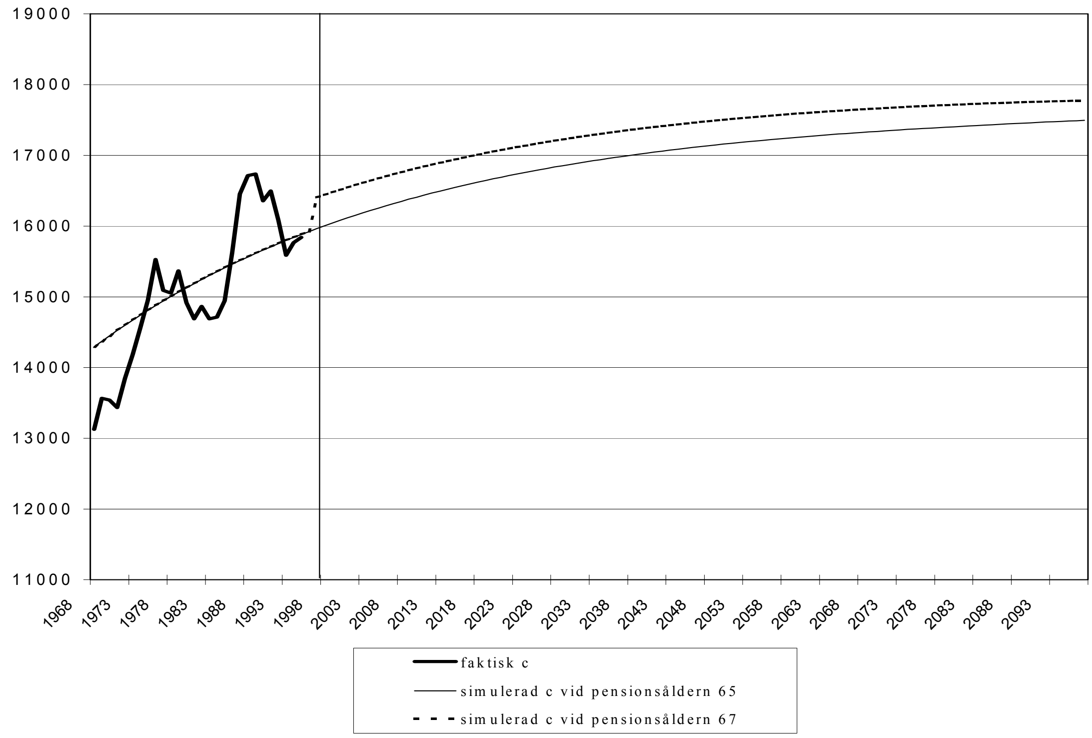


Diagram 3. Konsumtionen per capita

I både diagram 2 och 3 är den tjocka heldragna linjen de faktiska värdena för $\hat{c}$ och $\hat{a}$, den tunna linjen visar värdena för simulering 1 och den prickade linjen är värdena för $\hat{c}$ och $\hat{a}$ i simulering 2. Den lodräta linjen vid år 1998, markerar det år då pensionsåldern i simulering 2 höjs.

Med de valda värdena på parametrarna (enligt tabell 1) så leder en höjning av pensionsåldern till att $\hat{c}$ ökar och $\hat{a}$ minskar i steady state. Konsumtionen ökar i steady state från 17.496 till 17.773, medan de finansiella tillgångarna minskar från 194.213 till 192.115. När pensionsåldern höjs så ”hoppar” konsumtionen direkt upp till sin nya stabila väg mot steady state. En höjning av pensionsåldern ger ett högre steady state värde för konsumtionen. Men skillnaden i konsumtionen mellan att pensionera sig vid 65 eller vid 67 minskar med tiden. I diagram 2, över den finansiella förmögenheten per capita, kan man se att sparandet med den högre pensionsåldern inte leder till en särskilt stor minskning i *a* och det tar nästan 10 år innan någon skillnad uppstår och ytterligare 20 år för att skillnaden ska bli synlig. Att *a* är längre om att nå sitt lägre värde är för att *a* är bestämt i förväg och beror på den föregående periodens *a.*

Så vad talar för och vad talar emot en höjning av pensionsåldern? Även om a inte minskar särskilt mycket så betyder det mindre inhemskt kapital. Även om det inte borde betyda något om man investerar med utländskt eller inhemskt kaptal finns det oftast en ”hem bias”,[14] Det gör att man hellre vill investerar med inhemskt kapital än utländskt kapital. Så även en liten minskning i a kan göra att det kommer negativa externeliteter när pensionsåldern höjs. I diagram 3 ser man att en höjning av pensionsåldern direkt leder till en högre konsumtion och att skillnaden minskar efterhand. Det gör att om man diskonterar framtida konsumtion mer, har ett högre ρ, så är man villigare att höja pensionsåldern. Ju större vikt man lägger på framtida konsumtion desto mindre är vinsterna för individen av att höja pensionsåldern.

Tillskillnad från i avsnitt 3.2 höjs pensionsåldern här samtidigt som beslutet om höjningen tas. Det gör att den direkt ökningen i konsumtionen blir högre än om beslutet varit annonserat innan. Det troliga förlöpet är att man får veta om höjningen av pensionsåldern innan det sker. De direkt vinsterna av att höja pensionsåldern blir då mindre vilket kan påverka individens vilja att arbeta längre. Att beslutet om att höja pensionsåldern implementeras direkt i simuleringen är för att det är enklare att simulera. Annars skulle konsumtionen under en viss tid följa en ostabil väg som skulle leda till den nya stabila vägen. Att finna den riktiga ostabila vägen som leder till den stabila vägen är vanskligt. Bara att finna den stabila vägen i säg är svårt eftersom man måste hamna exakt på den stabila vägen för att komma till steady state. Det betyder att man måste träffa rätt ner på minsta öret. Då simuleringen här löper av hundra år, har jag utgått från att jag princip är på väg mot steady state om a och c vid simuleringens slut är relativt jämna/stabila.

Resultatet i simuleringen är att $\hat{c}$ ökar och $\hat{a}$ minskar i steady state när pensionsåldern höjs. Konsumtionen ökar direkt när pensionsåldern höjs, men ökningen minskar sedan i förhållande till konsumtionen innan höjningen. Sparandet minskar sakta och den slutgiltiga minskningen är inte särskilt stor (vilket inte är detsamma som att den är utan betydelse för ekonomin). Det gör att ju mer man intresserar sig för idag än för imorgon, desto villigare är man att höja pensionsåldern. Det beror på att den positiva effekterna av en höjning är som störst nu, medan de negativa effekterna kommer senare då

[14] Home bias

minskningen av sparande märks först senare. Simuleringens resultat är inte helt robust, för en del parameterändringar så vill a fortfaranden minska. Men skulle exempelvis ω definieras som 1/65 istället för 1/(65-18), så skulle a öka när ω höjs, så resultatet är inte helt robust till ändringar i parametrarna. Simuleringen ska ses som en fingervisning om vad som kan ske med konsumtionen och sparandet i Sverige om pensionsåldern höjs idag (givet att de valda parametrarna passar och fortsätter att passa).

3.4 Beroendeförhållandet och pensionsåldern

Avsnitt 3 har fokuserat på pensionsåldern, i avsnitt 3.1 diskurerades varför man väljer en viss pensionsålder och de efterföljande avsnitten (3.2 och 3.3) berörde vad som sker när man höjer pensionsåldern. Här till sist skulle jag vilja diskutera beroendeförhållandet och pensionsåldern. Diskussionen har sin utgångspunkt i de demografiska förändringar som har skett i Sverige (och i Europa) och hur beroendeförhållandet ändrats.

Men en förutsättning för att kunna diskutera huruvida man ska höja pensionsåldern är att den i nuläget inte är den högsta möjliga. Individernas ”nedslitningsgrad” vid pensions ska vara så pass låg att de utan större negativ effekt kan arbeta ytterligare en tid. Pensionsåldern kan ursprungligen vara mer eller mindre optimalt vald men förbättrad hälsa och arbetsvillkor ska ha gjort att man idag kan arbeta längre än tidigare, så att det finns utrymme för att höja pensionsåldern.

Beroendeförhållandet ökar när andelen gamla i förhållande till dem i befolkningen som arbetar ökar. I modellen så ges förhållande mellan arbetskraften och hela befolkningen av (11):

$$\frac{L(t)}{N(t)} = m\frac{b}{\omega + b} \qquad (11)$$

När beroendeförhållandet ökar så minskar L (arbetskraften) i förhållande till N (befolkningen). I Sverige har befolkningstillväxten avtagit sedan slutet av 1940-talet. Det har skett genom att b – barnafödandet har gått ner.

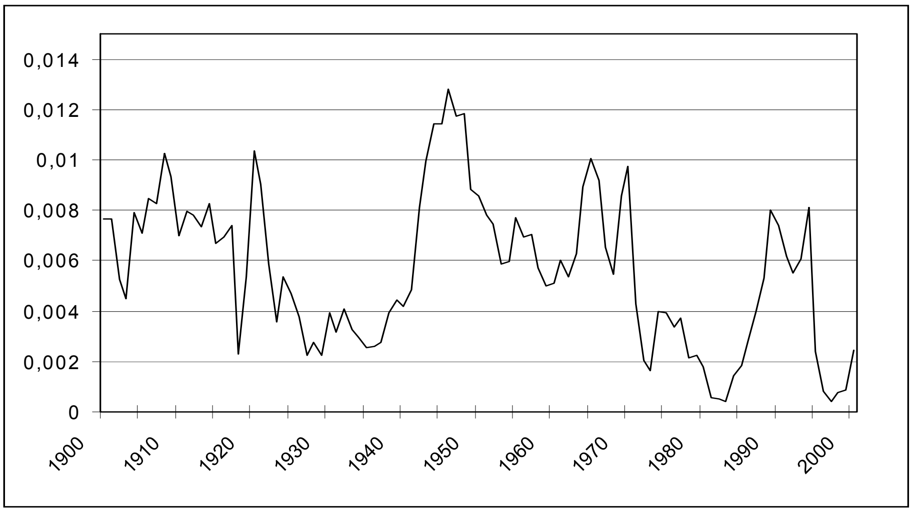


Diagram 4. Befolkningstillväxttakten ([antalet födda och invandrande – antalet döda och utvandrande] /befolkningen) i Sverige under 1900- talet. Källa: SCB

En minskning i b gör att L minskar, vilket betyder att andelen av befolkningen som arbetar minskar. Ett sätt att minska effekten av det minskade b är att höja ω – pensionsåldern. Det skulle göra att arbetskraften ökade och beroendeförhållandet skulle minska. Att beroendeförhållandet minskar beror på att det nu är fler som kan försörja de äldre generationerna. I den version av Blanchards OLG-modell som jag har använt betyder beroendeförhållandet i sig ingenting. Det beror på att det inte finns någon regering och såldes inga offentliga utgifter och heller inga skatter (och man sparar själv upp till sin pension). Men då både offentliga utgifter och skatter existerar i den verkliga världen är beroendeförhållandet både intressant och viktigt.

En åldrande befolkning betyder ökade utgifter för staten, (genom bl.a. ökade sjukvårdskostnader och pensioner). För att kunna täcka de ökade utgifterna kommer antigen skatten att höjas eller så får man ett budgetunderskott (man kan ju också minska sina utrgifter)[15]. En höjning av pensionsåldern skulle betyda att skatteunderlaget ökar, vilket skulle kunna minska skattetrycket på den yngre generationerna. Men även om man höjer pensionsförhållandet så kommer beroendeförhållandet att öka. Under första halvan av 1900-talet var b i Sverige på 0,0202 och under andra halvan av 1900-talet sjunk b till 0,0136. Det betyder att pensionsåldern skulle behöva höjas med ca 30 år för

[15] Givet en balanserad budget och att inga andra ändringar i budgeten görs.

att förhållandet mellan arbetskraften och hela befolkningen ska vara oförändrat i den här modellen.

Men man bör dock inte glömma att förhållandet mellan L och N beror på förenklingar i modellen. Då sannolikheten för att dö är densamma oavsett ålder så finns inte p med i ekvation (11), vilket gör förhållandet är bias. I verkligheten så är sannolikheten för att dö större ju äldre man är och skulle den förväntade livslängden gå ner så är det främst N som kommer att påverkas och inte L. Det gör att uttrycket är bias nedåt. Men trots att förhållande i (11) inte helt passar så kan det ge värdefulla implikationer. Om b går ner så kommer förhållandet mellan L och N att ändras och en höjning av pensionsåldern kan minska effekterna från ett lägre b. Men även om en höjning av pensionsåldern inte skulle återställa förhållandet mellan L och N när b går ner, så kan en höjning vara värdefull för de yngre generationerna. Det skulle betyda att deras försörjningsbörda kan minska och spridas ut över livet (ex skulle en ökad lumpsummeskatt kunna spridas över en lägre tid). Man skulle också kunna sprida kostnaderna av den ökade försörjningsbördan på generationer som ännu inte är födda. Eftersom individerna har en ändlig tidshorisont så håller inte den Ricardianska ekvivalensen (enligt vilken det inte spelar någon roll om skatten höjs eller man lånar). Det gör att man kan låna pengar nu utan att de nuvarande generationerna reagerar på skulden som om den vore en ökad skatt.

Vad som sker med beroendeförhållandet och hur en höjning av pensionsåldern kan påverka det är en reell diskussion. Jag anser att fokus bör ligga på detta när man diskustera en höjning av pensionsåldern och inte att man vill öka sparandet. Att sparandet ökar när pensionsåldern höjs är inte säkert, men att beroendeförhållandet ökar är.

4. Sammanfattning och konklusioner

Målet med denna uppsats är att se vad som kan ske med individens konsumtion och finansiella förmögenhet när pensionsåldern höjs. När pensionsåldern höjs så kommer ens totala inkomst att öka. Den ökade inkomsten kan användas på att konsumera och spara. Både i modellen och i simuleringen ökar konsumtionen när pensionsåldern höjs. Konsumtion är det enda i modellen som man får nytta av, vilket gör det naturligt att konsumtionen höjs när inkomsten ökar. Vad som sker med sparandet när pensionsåldern höjs är mer ambivalent. Man spara i modellen till sin pension, så att man kan utjämna sin konsumtion över hela livet. En liten höjning av pensionsåldern gör att sparandet minskar (likt i simuleringen) eller att det ökar likt i analysen i avsnitt 3.2. Ökningen kommer från att man vill sprida de ökade konsumtionsmöjligheterna från ökningen av den totala lönen över hela livet. Är höjningen av pensionsåldern däremot för hög så kommer tiden som pensionär att minska, vilket gör att man inte behöver spara så mycket som tidigare för utjämna sin konsumtion över livet.

I simuleringen så var ökningen i konsumtionen och minskningen i sparandet inte särskilt stora när pensionsåldern höjdes från 65 till 67 år. Men även om ökningarna i konsumtionen och minskningen i sparandet är små kan de vara betydelsefulla och ge positiva och negativa externeliteter. Oftast så föredrar man att investera i inhemskt kapital framför utländskt kapital och en minskning i sparandet gör att färre kan investera med inhemskt kapital. Om tillväxttakten i ekonomin beror på tillväxttakten i kapitalet så skulle det minskade sparandet få en negativ effekt på tillväxten. En höjning av pensionsåldern nämnas ofta i samband med att beroendeförhållandet ökar, att andelen gamla i förhållande till arbetskraften ökar. En åldrande befolkning betyder ökade offentliga utgifter och samtidigt som skatteunderlaget minskar. Skulle pensionsåldern öka, så kommer arbetskraften i förhållande till befolkningen att öka. Men en höjning av pensionsåldern kommer inte att återställa förhållandet mellan hela befolkningen och arbetskraften men det kan lätta på trycket. Det skulle kanske kunna skapa ett större skatteunderlag och sprida kostnaderna bättre.

Det finns olika argument för och emot en höjning av pensionsåldern. Vi utbildar oss längre och kommer senare ut på arbetsmarkanden samtidigt som vi lever längre. Det gör att andelen gamla och pensionerade i befolkningen växer i förhållande till arbetskraften vilket gör att försörjningsbördan ökar. Å andra sidan antas det ofta att man får negativ nytta av att arbeta och det är inte allt fysiskt möjligt att forsätta arbeta efter en viss ålder. Som antytts genom hela uppsatsen finns det många saker att ta i beaktning om pensionsåldern skulle höjas och denna uppsats har fokuserat på individens konsumtion och sparande. Utifrån det kan man konstatera att individens konsumtion ökar när pensionsåldern höjs och att sparandet minskar pensionsåldern höjs. Sparandet kan både öka och minska när pensionsåldern höjs. Det bör inte glömmas när man diskuterar en höjning av pensionsåldern, men det bör heller inte vara fokus för diskussionen. Personligen anser jag att diskussionen kring pensionsåldern bör ta sin utgångspunkt i vad som sker med beroendeförhållandet och hur en höjning av pensionsåldern kan påverka det.

5. Referenslista:

Barro, Robert J. och Sala-i-Martin, Xavier (2004) *Economic Growth*, 2nd ed. Cambridge Massachusetts.

Blanchard, Olivier (1985) "Debt, Deficits and Finite Horizons." *Journal of Political Economy,* vol. 93, April.

Bodie, Zvi och Merton, Robert (2000), *Finance*, Prentice Hall.

Fougère, Maxime och Mérette, Marcel (1999), "Population ageing and economic growth in seven OECD countries.", *Economic Modelling 16.*

Holzmann, Robert (2004), "Toward a Reformed and Coordinated Pension System in Europé: Rationale and Potential Structure." *Social protecion Discussin Papers Series* Social Protection Unit in Human Development Network, The World Bank. http://www.worldbank.org/sp.

Hviding, Ketil och Mérette, Marcel (1998), "Macroeconomic effects of pension reforms in the context of ageing populations: overlapping generations model simulation for seven OECD countries" *Economics Department Working Papers No. 201* http://www.oecd.org/eco/eco.

Gustman, Alan L. & Steinmeier, Thomas, L. (2002) "The social security early entitlement age in a structural model of retirement and wealth" *National Bureau of Economic Research* Working Paper 9183.

Jones, Charles I. (2002), *Introduction to Economic Growth,* 2nd ed, London.

Henrekson, Magnus, Jonung, Lars och Stymne Joakim (1996) "Economic growth and the Swedish model" i *Economic growth in Europe since 1945* (ed. Crafts, N. och Toniolo, G.) Cambridge University Press.

Kohl, Richard och O'Brien, Paul (1998), "The Macroeconomics of Ageing, Pensions and Savings: A Survey." *Economics Department Working Papers* No. 200, http://www.oecd.org/eco/eco.

Mankiw, N. Gregory (1997), *Macroeconomics 3ed.* Worth Publishers, New York.

Spiezia, Vincenzo (2002), "The greying population: A wasted human capital or just a social liability?" *International Labour Review*, Vol. 141 No. 1-2.

Sydsæter, Knut, Seierstad, Atle och Strøm, Arne (1990), *Matematisk Analyse Bind 2*. Universitetsforlaget, Oslo.

Elektroniska källor:
SCB Sveriges statistiska centralbyrå: http://www.scb.se

Övriga källor:
Föreläsningsunderlag till kursen "Vidaregående Makro" med Christian Groth hållen under höstterminen 2004 vid Köpenhamns Universitet http://www.econ.ku.dk/okocg/.

Appendix

Likt i uppsatsen betyder en prick ovanför en variabel att variabeln är deriverad med hänsyn till tiden.

A.1. Individens maximeringsproblem

Varje individ maximerar sin nytta från och med och framåt, till oändligheten. Nyttan maximeras med hänsyn till konsumtionen och det görs givet den dynamiska budgetrestriktionen och No-Ponzi-Game.

$$\max_{c(t)} U = \int_t^{\infty} \log c(t) e^{-(\rho+p)t} dt$$

$$c(t) > 0$$

$$\dot{a} = (r+p)a(t) + w(t) - c(t) \qquad (DBR)$$

$$\lim_{t\to\infty} a(t) e^{(r+p)t} \geq 0 \qquad (NPG)$$

För att lösa maximeringsproblemet använder man (här current value) Hamiltonian funktionen:

$$H(c,a,\lambda,t) = \log c + \lambda[(r+p)a + w - c]$$

Först maximeras H med hänsyn till c:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = \frac{1}{c} - \lambda = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{c(t)} = \lambda(t) \qquad (A.1.1)$$

Steg två är att maximera H med hänsyn till a:

$$\frac{\partial H}{\partial a} = \lambda(r+p) = -\dot{\lambda} + \lambda(\rho + p)$$

$$\Updownarrow$$

$$r - \rho = -\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \qquad (A.1.2)$$

Förstaordersvillkoret för konsumtionen (A.1.1) skrivs om till logaritmisk form

$$-\log c = \log \lambda$$

och deriveras med hänsyn till tiden och ger:

$$-\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = -\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \qquad (A.1.3)$$

(A.1.3) kombineras med förstaordersvillkoret för a (A.1.2) och ger Keynes-Ramsey regeln:

$$\frac{\dot{c}}{c} = r - \rho \qquad (A.1.4)$$

A.2. Nivån för konsumtionen

För att få fram nivån för konsumtionen ska man först skriva om det dynamiska budgetrestriktionen (DBR) till en intertemporär budgetrestriktion (IBR).

(DBR) ges av:

$$\dot{a} = (r+p)a + w - c$$

$$\Updownarrow$$

$$\dot{a} - (r+p)a = w - c \qquad (DBR)$$

(DBR) multipliseras med den effektiva räntan som diskonteringsfaktor, $e^{-(r+p)t}$ och integreras på bägge sidor från $t = 0$ till ∞:

$$e^{-(r+p)t}\left[\dot{a} - (r+p)a_t\right] = (w_t - c_t)e^{-(r+p)t}$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_{t=0}^{\infty}\left[\dot{a} - (r+p)a_t\right]e^{-(r'p)t}dt = \int_{t=0}^{\infty} w_t e^{-(r+p)t}dt - \int_{t=0}^{\infty} c_t e^{-(r+p)t}dt \qquad (A.2.1)$$

Termen $\int_{t=0}^{\infty} we^{-(r+p)t}\,dt$ motsvara nuvärdet av lönen vid tiden *t = 0*, $\widetilde{w}_0$. Att pensionen inte är mer här beror på att individens maximeringsproblem är densamma oavsett ålder. *(A.2.1)* kan skrivas om till:

$$\int_{t=0}^{\infty}\left[\dot{a}-(r+p)a_t\right]e^{-(r+p)t}\,dt=\widetilde{w}-\int_{t=0}^{\infty}c_t e^{-(r+p)t}\,dt \qquad (A.2.2)$$

Nästa steg är att lösa integralen på den vänstra sidan av *(A.2.2)*, vilket görs med hjälp av transversallitets villkoret (TVC):

$$\lim_{t\to\infty} a(t)e^{(r+p)t}=0 \qquad (TVC)$$ och det ger:

$$\Big|_{t=0}^{\infty} a_t e^{-(r+p)t}=\widetilde{w}-\int_{t=0}^{\infty}c_t e^{-(r+p)t}\,dt \qquad (A.2.3)$$

$$\Updownarrow$$

$$0-a_0=\widetilde{w}-\int_{t=0}^{\infty}c_t e^{-(r+p)t}\,dt$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_{t=0}^{\infty}c_t e^{-(r+p)t}\,dt=\widetilde{w}+a_0 \qquad (IBR)$$

Från Keynes-Ramsey regeln vet man att: $\frac{\dot{c}}{c}=r-\rho$ vilket ger:

$$c_t=e^{(r-\rho)t}c_0 \qquad (A.2.4)$$

(A.2.4) insättes i *(IBR)* och ger:

$$c_0\int_{t=0}^{\infty}e^{-(\rho+p)t}\,dt=\widetilde{w}+a_0 \qquad (A.2.5)$$

Integralen löses och ger:

$$c_0\Big|_{t=0}^{\infty}-\frac{1}{(\rho+p)}e^{-(\rho+p)t}\,dt=\widetilde{w}+a_0$$

$$c_0\left(0+\frac{1}{\rho+p}\right)=\widetilde{w}+a_0 \qquad (A.2.6)$$

och *(A.2.6)* ger nivån för konsumtionen:

$$c_0=(\rho+p)\left[\widetilde{w}+a_0\right] \qquad (A.2.7)$$

A.3. Nutidsvärdet för individens lön

Till tiden τ finns det två utfall för individen, individen kan antigen vara vid liv och tjäna lönen $w(\tau)$ och sannolikheten för att vara i liv vid tiden τ $(\tau > t)$ är $e^{-p(\tau-t)}$ eller så är individen inte i liv och då är lönen noll. Lönen diskonteras med $e^{-r(\tau-t)}$ och vi vet att vid tiden τ är individens arbetsutbud är:

$$l(\tau - j) = me^{-\omega(\tau - j)}, \quad m = 1$$

Arbetsutbudet och den diskonterade lönen tillsammans med sannolikheten för att vara vid liv ger den förväntade diskonterade inkomsten från tiden *t* och framåt för en individ som är född till tiden *j:*

$$\tilde{w}(j,t) = \int_t^\infty w(\tau) l(\tau - j) e^{-(r+p)(\tau - t)} d\tau$$

$$\Updownarrow$$

$$\tilde{w}(j,t) = \int_t^\infty w(\tau) e^{-\omega(\tau - j + t - t)} e^{-(r+p)(\tau - t)} d\tau$$

$$\Updownarrow$$

$$\tilde{w}(j,t) = e^{-\omega(t-j)} \int_t^\infty w(\tau) e^{-(r+p+\omega)(\tau - t)} d\tau$$

$$\Updownarrow$$

$$\tilde{w}(j,t) = e^{-\omega(t-j)} \tilde{w}(t,t) \qquad där$$

$$\tilde{w}(t,t) \equiv \int_t^\infty w(\tau) e^{-(r+p+\omega)(\tau - t)} d\tau$$

$\tilde{w}(t,t)$ är det nuvärde av lönen som en nyfödd individ som är född till tiden *t* har.

A.4. Summering av befolkningen

Vid varje period föds det *N(j,t)* individer som fortfarande är vid liv vid tiden *t:*

$$L(j,t) = L(0) e^{nj} b e^{-p(t-j)}$$

Då det föds lika många i varje period och sannolikheten för att de fortfarande är vid liv till tiden *t* (då dödsfrekvensen är oberoende av åldern) summerar man för alla födslar från -∞ till den nuvarande tiden *t:*

$$\int_{-\infty}^{t} N(j,t)dj = \int_{-\infty}^{t} N(0)e^{nj}be^{-p(t-j)}dj = N(0)be^{-pt}\int_{-\infty}^{t} e^{(n+p)j}dj$$

Genom att lösa integralen och eftersom *n≡b-p* får man den totala befolkningen vid tiden *t*:

$$N(0)(n+p)e^{-pt}\left[\frac{e^{(n+p)t}}{n+p} - 0\right] = N(0)e^{nt} = N(t)$$

A.5. Nutidsvärdet av den summerade lönen:

För att få den summerade lönen multipliceras lönen vid tiden *t* för en individ som är född vid *j* med hur många individer det finns vid tiden *t* som är födda vid tiden *j*. Det summeras sedan över alla generationer som har fötts fram till tiden *t*.

$$\widetilde{W}(t) = \int_{-\infty}^{t} \widetilde{w}(j,t)N(j,t)dj$$

$$\Updownarrow$$

$$\widetilde{w}(t,t)\int_{-\infty}^{t} e^{-\omega(t-j)}N(j,t)dj = \widetilde{w}(t,t)\int_{-\infty}^{t} e^{-\omega(t-j)}N(0)e^{nj}be^{-p(t-j)}dj$$

$$\Updownarrow$$

$$\widetilde{W}(t) = \widetilde{w}(t,t)bN(0)e^{-(\omega+p)t}\int_{-\infty}^{t} e^{(\omega+n+p)j}dj \qquad (A.5.1)$$

Genom att lösa integralen fås:

$$\widetilde{W}(t) = \widetilde{w}(t,t)N(0)e^{nt}\frac{b}{\omega+b}$$

$$\Updownarrow$$

$$\widetilde{W}(t) = \widetilde{w}(t,t)N(t)\frac{b}{\omega+b} = \widetilde{w}(t,t)L(t) \qquad (A.5.2)$$

A.6. Differentialekvationerna

För att få fram de två differentialekvationerna:

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} \equiv \dot{A}(t) = rA(t) + w(t)L(t) - C(t) \qquad (18)$$

och

$$\frac{\partial C(t)}{\partial t} \equiv \dot{C}(t) = [r - \rho + \omega + n]C(t) - (\omega + b)(\rho + p)A(t) \qquad (21)$$

använder man Leibniz' formel (se Sydsæter (1990)) som säger att om

$$F(x) = \int_{y(t)}^{v(t)} f(x,t)dt$$

så är derivatan av *F(x)* givet av:

$$F'(x) = f(x, v(x))v'(x) - f(x, u(t))u'(x) + \int_{u(t)}^{v(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt$$

Den summerade finansiella förmögenheten:

$$A(t) = \int_{-\infty}^{t} a(j,t)N(j,t)dj \qquad (13)$$

skrives om till:

$$A(t) = \int_{-\infty}^{t} a(j,t)L(0)e^{nj}be^{-p(t-j)}dj$$

och genom att använda Leibniz' formel fås differentialekvationen för *A*.

Även den summerade konsumtionen:

$$C(t) = \int_{-\infty}^{t} c(j,t)N(j,t)dj \qquad (12)$$

skrivs om och ger:

$$C(t) = \int_{-\infty}^{t} c(j,t)L(0)e^{nj}be^{-p(t-j)}dj$$

som genom Leibniz' formel ger differentialekvationen för *C*.

Bilaga 1. Diagram över beroendeförhållandet i Europa