



---

# Dynamisk hedging i praktiken

---

*En undersökning av OMXS30 för Black-Scholes-Merton-antagandena.*

Lunds Universitet, Nationalekonomiska institutionen

Kandidatuppsats

Augusti 2011

Handledare: Frederik Lundtofte

Författare: Carl Nilsson

# Abstrakt

---

Uppsatsen inleds med en genomgång av ramverket för Black-Scholes-Merton-modellen. Bl. a. härleds Black och Scholes partiella differentialekvation genom att replikera avkastningen från en köpoption med hjälp av en självfinansierad portfölj bestående utav aktier och obligationer. Även en kort introduktion till risk-neutral värdering ges. Optionens känslighetsmått ("grekerna") presenteras i form av 3D-figurer och formler.

I uppsatsen prövas giltigheten i Black-Scholes-Merton-antagandet om en geometrisk Brownsk rörelse som underliggande process m h a normalitetstester av log-prisavkastningarna från Stockholmsbörsens aktieindex (OMXS30) från 1986 till 2011. Antagandet om normalfördelade log-prisavkastningar förkastas.

Slutligen ges en alternativ modell, Constant Elasticity of Variance, en modell där volatiliteten är nivåberoende utav den underliggande tillgångens pris.

## Nyckelord

Black–Scholes–Merton, Hedging, Greker, CEV, Normalitetstest.

# Innehållsförteckning

---

<b>Abstrakt</b> .....	<b>ii</b>
Nyckelord.....	ii
<b>Innehållsförteckning</b> .....	<b>iii</b>
<b>1. Inledning</b> .....	<b>1</b>
<b>1.1 Syfte</b> .....	<b>1</b>
<b>1.2 Disposition</b> .....	<b>1</b>
<b>1.3 Ett optionskontrakt</b> .....	<b>1</b>
1.3.1 Spekulation: ett exempel.....	3
1.3.2 Hedging.....	3
<b>1.4 Lite historia</b> .....	<b>4</b>
<b>2. Black-Scholes-Merton-modellen</b> .....	<b>6</b>
<b>2.1 Antaganden</b> .....	<b>7</b>
<b>2.2 Black-Scholes PDE</b> .....	<b>7</b>
<b>2.3 Black-Scholes-Merton-formlerna</b> .....	<b>10</b>
<b>2.4 En risk-neutral härledning</b> .....	<b>12</b>
<b>3. Greker</b> .....	<b>13</b>
<b>3.1 Deltagreker</b> .....	<b>14</b>
3.1.1 Delta.....	14
3.1.2 $\Delta_{vol}$ och $\Delta_{spot}$ .....	17
3.1.3 $\Delta_{time}$ .....	18
3.1.4 Elasticitet.....	19
<b>3.2 Gammagreker</b> .....	<b>20</b>
3.2.1 Gamma .....	20
3.2.2 $\Gamma_{vol}$ .....	22
3.2.3 $\Gamma_{spot}$ .....	23

3.2.4 DgammaDtime .....	24
<b>3.3 Vegagreker .....</b>	<b>25</b>
3.3.1 Vega .....	25
3.3.2 DvegaDvol .....	26
3.3.3 DvegaDtime .....	27
3.3.4 DvommaDvol.....	27
<b>3.4 Theta .....</b>	<b>28</b>
<b>3.5 Rho .....</b>	<b>29</b>
<b>4. Optioner i verkliga marknader .....</b>	<b>31</b>
4.1 En undersökning av OMXS30 .....	31
4.1.1 Normalfördelning? .....	32
4.1.2 Konstant volatilitet? .....	38
<b>5. Modeller med nivåberoende volatilitet.....</b>	<b>42</b>
5.1 Constant elasticity of variance .....	42
<b>6. Avslutning .....</b>	<b>45</b>
6.1 Slutsats.....	45
6.2 Fortsatt forskning.....	45
<b>Bibliografi .....</b>	<b>46</b>

# 1. Inledning

---

## 1.1 Syfte

Syftet med denna uppsats är att pröva huruvida antagandena för den berömda optionsprissättningsformeln som härleddes av Black och Scholes (1973) och Merton (1973) håller när Stockholmsbörsens aktieindex (OMXS30) från 1986 till 2011 undersöks. Mer specifikt prövas om OMXS30 följer en geometrisk Brownsk rörelse. Syftet är också att referera till alternativa metoder för att prissätta optioner om antagandena inte uppfylls.

## 1.2 Disposition

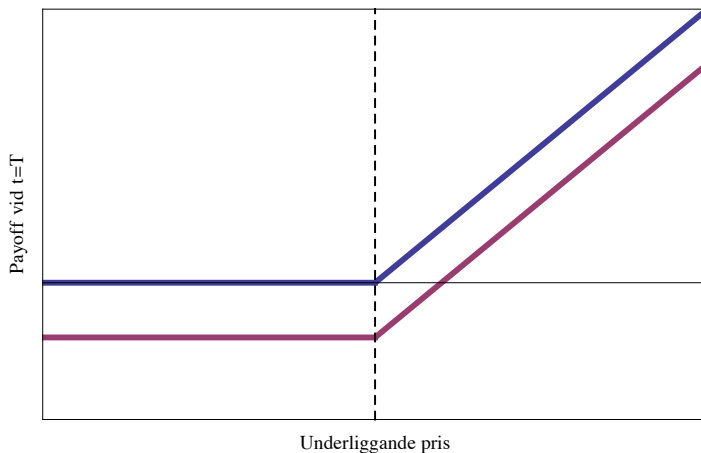
Uppsatsen inleds i avsnitt 1 med en beskrivning av vad ett optionskontrakt är och historien bakom optioner och optionsprissättning. I avsnitt 2 härleds Black-Scholes-Merton-formlerna genom att replikera en köpoptions avkastning med hjälp av en självfinansierad portfölj bestående utav aktier och obligationer. En kort beskrivning av risk-neutral värdering ges också. I avsnitt 3 ges många formler för optionens känslighetsmått (de s.k. ”grekerna”) och även 3D-figurer av hur de förändras med underliggande pris och över tiden. I avsnitt 4 undersöks OMXS30 för normalitet och konstant volatilitet (två implikationer av geometrisk Brownsk rörelse). I avsnitt 5 ges ett alternativ till Black-Scholes-Merton där volatiliteten är varierande med underliggande priser, i form av modellen Constant Elasticity of Variance.

## 1.3 Ett optionskontrakt

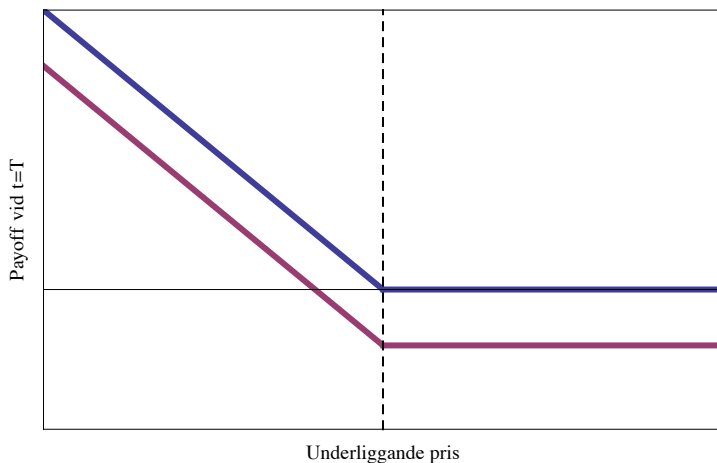
En köpoption (säljoption) är ett finansiellt derivatkontrakt som ger ägaren rätten, men ej skyldigheten, att köpa (sälja) den underliggande tillgången,  $S$  (exempelvis en aktie, en obligation, ett aktieindex, ett volatilitetsindex eller en valuta), vid tiden  $t = T$  för lösenpriset,

K. Utställaren av optionen har skyldigheten att sälja (köpa) den underliggande tillgången om ägaren utövar optionen. Optionen som beskrevs ovan kallas för europeisk och kan enbart utövas vid  $t = T$ , alltså vid löptidens slut. Optioner som benämns som amerikanska kan utövas när som helst mellan utställandet,  $t = 0$ , och förfallodagen  $t = T$ . Köpoptioner benämns även ofta efter det engelska uttrycket call options, och säljoptioner benämns dylikt för put options. I denna uppsats kommer jag att använda de svenska beteckningarna.

Avkastningen för en köpoption vid förfallodagen,  $t = T$ , är  $\max(S - K, 0)$ , alltså differensen mellan underliggande priset och lösenpriset då denna är större än noll (då man ej utövar optionen vid värden  $\leq 0$ ) eller 0. För en säljoption är avkastningen vid förfallodagen,  $t = T$ ,  $\max(K - S)$ , alltså differensen mellan lösenpriset och det underliggande priset då denna är större än noll (då man ej utövar optionen vid värden  $\leq 0$ ) eller 0.



Figur 1.1 – Payoff (i blått) och vinst (i lila) vid förfallodagen för innehavaren av en köpoption.



Figur 1.2 – Payoff (i blått) och vinst (i lila) vid förfallodagen för innehavaren av en säljoption.

Optioner och andra finansiella derivat används av åtminstone två typer av handlare: spekulanter och hedgare. Spekulanter använder optioner på grund av att det är ett billigt sätt att exponera portföljen mot stor risk. Hedgare använder optioner för att minska på risker från marknaden, som de redan är exponerade mot.

### 1.3.1 Spekulation: ett exempel

En investerare tror att en specifik aktie (med nuvarande pris 100 kr) kommer att gå upp vid tidpunkten T. Han köper en köpoption med ett lösenpris på 110 kr genom att betala ett premium på 5 kr. Anta att aktiepriset vid tiden  $t = T$  (förfallodagen) har stigit till 120 kr. Investeraren kan då utöva optionen och köper aktien av utställaren av optionen för 110 kr och säljer den genast på marknaden för 120 kr. Vinsten blir  $120 \text{ kr} - 110 \text{ kr} - 5 \text{ kr} = 5 \text{ kr}$ , en hundraprocentig avkastning. Om han istället hade köpt aktien så hade avkastningen blivit  $(120 - 100)/100 = 20 \%$ . Å andra sidan blir förlusten 100 % om optionen förfaller utan att utövas. Alltså kan investeraren göra enorma vinster genom att utsätta sig för enorma risker. Detta kallas för hävstångseffekt.

### 1.3.2 Hedging

Genom att hedga så skyddar man sig mot händelser som man inte har kontroll över. Genom att kombinera olika tillgångar i en portfölj och skapa en finansiell hedge så kan investeraren skydda sig mot en stor del, eller till och med all, risk (åtminstone i teorin). I en perfekt balanserad portfölj bestående av optioner, underliggande tillgången och riskfria obligationer, så kan man helt hedga bort all risk genom s.k. kontinuerlig dynamisk deltahedging. Delta är ett känslighetsmått ("grek") som anger hur stor del av varje tillgång som ska ingå i portföljen. Att hedgingen sker dynamiskt innebär att man balanserar om portföljen ofta – i teorin i kontinuerlig tid och i kontinuerlig volym, alltså mindre än ett tick (minsta transaktionsstorlek).

## 1.4 Lite historia

Historien om optioner går långt tillbaka i tiden. Aristoteles berättar i sin bok *Politiken*<sup>1</sup> om Thales (ca 625 f.Kr. – ca 545 f.Kr.) från Miletos som hyrde alla tillgängliga olivpressar i Miletos och Chios till ett lågt pris, efter att han, genom sin astronomiska kunskap, förutspått en god skörd för säsongen. När sedan skördesäsongen kom så ökade efterfrågan på olivpressarna drastiskt och han kunde göra en god förtjänst. Detta kan enligt Taleb (1997, s. 13) ses som historiens första kända exempel på handel med optioner.

Även prissättningen av optioner har en lång historia. Enligt Haug (2007, s. 34-44) så beskrev Joseph de la Vega (1688) något diffust vad som sannolikt kan betraktas som köp-sälj paritet för optioner på terminer:

*"We say of those who buy means of a forward call contract and sell at fixed term or of those who sell by means of a put contract and buy at a fixed term that they shift the course of their speculation"*

Haug nämner även att Knoll (2004) menar att köp-sälj paritet potentiellt sett kan spåras 2000 år tillbaka i tiden.

Enligt Haug (2007, s. 34-44) så togs den första optionsprissättningsformeln fram av Louis Bachelier år 1900, vilket var starten för matematisk finans (Courtault et al., 2000). Bachelier var också, enligt Mantegna och Stanley (2000), den första att formalisera en random walk. I Bachelier (1900) går att finna vad som nu kallas Chapman–Kolmogorovs ekvation, vilken används för att räkna ut sannolikheter för prisförändringar. Han insåg även att vad som nu kallas för en Wienerprocess uppfyller värmeledningsekvationen. I motsats till Black-Scholes-Merton modellen så antar Bachelier att det underliggande priset är normalfördelat, med andra ord, förändringen av det underliggande priset kan beskrivas med en aritmetisk Brownsk rörelse:  $dS = \sigma dW$ , där  $W$  är en Wienerprocess. Detta innebär dock att de underliggande priserna kan vara negativa, vilket ju inte är möjligt i verkligheten. I Haug (2006) går det att finna formlerna Bachelier härledde:

---

<sup>1</sup> Finns att läsa i sin helhet (på engelska) på <http://www.gutenberg.org/files/6762/6762-h/6762-h.htm>. Historien om Thales och olivpressarna finnes i Kapitel XI.



$$\text{Köption} = (S - K)N(d) + \sigma\sqrt{T}n(d) \quad (1.1)$$

$$\text{Säljoption} = (K - S)N(-d) + \sigma\sqrt{T}n(d) \quad (1.2)$$

där  $d = \frac{S-K}{\sigma\sqrt{T}}$ ; S = Underliggande tillgångens pris; K = Optionens lösenpris; T = Tid till förfallodagen (i år);  $\sigma$  = Volatiliteten hos den underliggande tillgången;  $N(\cdot)$  = den kumulativa normalfördelningsfunktionen;  $n(\cdot)$  = standardiserade normalfördelningsfunktionen.

## 2. Black-Scholes-Merton-modellen

---

1973 var året som Chicago Board Options Exchange, CBOE grundades, som den första optionsbörsen i USA, och man började med handel av standardiserade optionskontrakt. Handeln har sedan dess vuxit explosionsartat. Den 26 april 1973 – den första dagen av handel – omsattes det 911 kontrakt på 16 underliggande aktier, att jämföra med 18 september 2008 – dagen med störst volym i CBOEs historia – då 9 975 464 optionskontrakt omsattes.<sup>2</sup>

Fischer Blacks och Myron Scholes artikel ”The Pricing of Options and Corporate Liabilities” tillsammans med Robert C. Mertons artikel ”Theory of Rational Option Pricing”, även dem från våren 1973, anses som ett genombrott i prissättningen av optioner.<sup>3</sup> Merton och Scholes tilldelades ju sedermera också 1997 Sveriges Riksbanks pris i ekonomisk vetenskap till Alfred Nobels minne. Även Black nämns i pressmeddelandet, men han avled tyvärr 1995. Handeln med optioner och andra derivatinstrument har ökat enormt sedan 1973 och många anser att det är Black, Merton och Scholes förtjänst.

Nobelpriset tilldelas dock inte på grund utav själva formeln, utan för härledningen av den och användbarheten – dynamisk hedging och konsistensen med CAPM.<sup>4</sup> Enligt Haug (2007, s. 34-44) så existerade formeln redan tidigare, härledd utav bl. a. Sprenkle (1961), Boness (1964), Samuelson (1965), Thorp och Kassouf (1967) och Thorp (1969). Sprenkle antar precis som Black, Scholes och Merton en geometrisk Brownsk rörelse och därmed log-normalt fördelade aktiepriser, han har dock även med en term för marknads riskaversion. Boness formel är faktiskt identisk med Black-Scholes-Merton-formeln i ekvation (2.10). Skillnaden var att Black-Scholes-Merton-modellen var konsistent med Capital Asset Pricing Model (CAPM), härleddes med replikerandeportföljsargumentet och använde sig utav kontinuerlig dynamisk deltahedging. Enligt Derman och Taleb (2005) och Haug (2007) så är

---

<sup>2</sup> <http://www.cboe.com/AboutCBOE/History.aspx>.

<sup>3</sup> Exempelvis Hull (2009, s. 277).

<sup>4</sup> [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/economics/laureates/1997/press-sv.html](http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1997/press-sv.html).

dock dessa argument lång ifrån robusta. Enligt Haug (2006, s. 1) och Haug och Taleb (2009) så använder sig de flesta optionshandlarna främst av hedging med hjälp av andra optioner och utöver det dynamisk deltahedging.

## 2.1 Antaganden

Black och Scholes (1973) antar ideala förhållanden i marknaden för aktien såväl som för optionen. Vissa av deras antaganden har visats icke behövas vid senare generaliseringar. Black och Scholes (1973) härleder en prissättningsformel för en europeisk köption med följande sju antaganden:

- (i) Aktiepriset följer en Itôprocess.
- (ii) Handel av värdepapper är kontinuerlig.
- (iii) Det existerar inte några arbitragemöjligheter.
- (iv) Det är möjligt att köpa och sälja (även blanka) värdepapper när som helst, till vilken mängd som helst (även andelar av en option eller aktie).
- (v) Det existerar inga transaktionskostnader.
- (vi) Marknadens ränta,  $r$ , är konstant. (Kan göras tidsberoende genom generalisering).
- (vii) Aktien betalar inte ut några utdelningar mellan  $t = 0$  och  $t = T$ . (Merton, 1973, visar hur man kan generalisera modellen till att ha en konstant utdelningsyield).

## 2.2 Black-Scholes PDE

Den ursprungliga härledningen av Black och Scholes partiella differentialekvation (PDE) gjordes genom att replikera obligationen (Black och Scholes, 1973 och Merton, 1973). Denna härledning används även i många läroböcker som Hull (2009) och Wilmott (2006 och 2007b). Enligt Rosu och Stroock (2004) så kan denna härledning leda till problem. Istället för att replikera en obligation så kan man replikera en köption vilket gör att man inte behöver ha lika många restriktioner på köptionen. Denna härledning gjordes först av Merton (1977). Min framställning bygger på och använder sig av notationen från Duffie (2001).<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup> För en övergripande genomgång av stokastisk analys se Chalamandaris och Malliaris (2008) och Neftci (2000). För andra sätt att härleda Black-Scholes-Merton-formeln se exempelvis Andreason, Jensen och Poulsen (1998) och Wilmott (2007a).

Anta att  $X$  är en Itôprocess (Itô, 1951) med  $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$  och är deriverbar två gånger. Då är processen  $Y_t = f(X_t, t)$  en Itôprocess med

$$dY_t = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)\mu_t + \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 \right] dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)\sigma_t dW_t \quad (2.1)$$

Detta är Itôs formel.  $W$  betecknar en Wienerprocess (en normalfördelad slumpvariabel med  $\mu = 0$  och där  $E[dW^2] = dt$ ).

Anta att det existerar en aktie,  $S$ , som följer prisprocessen

$$S_t = x \exp(\alpha t + \sigma W_t), \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

där  $x > 0$ ,  $\alpha$  och  $\sigma$  är konstanter. En sådan process kallas för en geometrisk (exponentiell) Brownsk rörelse och är även benämnd som en log-normal random walk.<sup>6</sup>

Eftersom  $X_t \equiv \alpha t + \sigma W_t$  definierar en Itôprocess  $X$  med konstant drift  $\alpha$  och diffusion  $\sigma$ , så implicerar Itôs formel (ekvation (2.1)) att  $S$  är en Itôprocess och att

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t; \quad S_0 = x, \quad (2.3)$$

där  $\mu$  är den ögonblickliga förväntade avkastningen och  $\sigma$  är den ögonblickliga standardavvikelsen, även kallad volatiliteten av  $S$ .

Anta att det existerar en obligation,  $\beta$ , med prisprocessen

$$\beta_t = \beta_0 e^{rt}, \quad t \geq 0,$$

för några konstanter  $\beta_0 > 0$  och  $r$ , den kontinuerliga räntan. Eftersom  $\{rt : t \geq 0\}$  är en Itôprocess så är även  $\beta$  en Itôprocess med

$$d\beta_t = r\beta_t dt. \quad (2.4)$$

Anta vidare att det existerar en självfinansierad portfölj (vilket innebär att handelsstrategin (a, b) inte genererar några inflöden till eller några utflöden från portföljen). För alla  $t$  har vi:

---

<sup>6</sup> Anledningen till att man antar en geometrisk Brownsk rörelse är för att de underliggande tillgångsprisernas fördelning då är lognormal, dvs. priserna kan ej vara negativa. Negativa värden på den underliggande tillgången är möjligt under en aritmetisk Brownsk rörelse (se Bacheliers formel i inledningen), då priserna blir normalfördelade.

$$a_t S_t + b_t \beta_t = a_0 S_0 + b_0 \beta_0 + \int_0^t a_u dS_u + \int_0^t b_u d\beta_u. \quad (2.5)$$

Ekvation (2.5) säger att portföljens nuvarande värde i VL är lika med den ursprungliga investeringen plus handelsvinster i HL.

Anta att  $Y_t = C(S_t, t)$ ,  $t \in [0, T)$ , utan någon kunskap om funktionen C förutom att den går att derivera kontinuerligt två gånger på  $(0, \infty) \times [0, T)$ , så att vi kan tillämpa Itô's formel:

$$dY_t = \mu_Y(t)dt + \frac{\partial C}{\partial x}(S_t, t)\sigma S_t dW_t, \quad t \in [0, T), \quad (2.6)$$

där

$$\mu_Y(t) = \frac{\partial C}{\partial x}(S_t, t)\mu S_t + \frac{\partial C}{\partial t}(S_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(S_t, t)\sigma^2 S_t^2.$$

Anta att det finns en självfinansierad handelsstrategi (a, b) med

$$Y_t = a_t S_t + b_t \beta_t, \quad t \in [0, T]. \quad (2.7)$$

Med ekvation (2.7) och ekvation (2.5) kan man med hjälp av stokastisk integration visa att

$$dY_t = a_t dS_t + b_t d\beta_t = (a_t \mu S_t + b_t \beta_t r)dt + a_t \sigma S_t dW_t. \quad (2.8)$$

Om man vill matcha koefficienterna för både  $dW_t$  och  $dt$  så att både ekvation (2.6) och ekvation (2.8) är uppfyllda, så man väljer handelsstrategin (a, b) så att  $a_t \sigma S_t = \frac{\partial C}{\partial x}(S_t, t)\sigma S_t$ ,

för att göra det så låter vi  $a_t = \frac{\partial C}{\partial x}(S_t, t)$ . Från ekvation (2.7) och  $Y_t = C(S_t, t)$  har vi att

$\frac{\partial C}{\partial x}(S_t, t)S_t + b_t \beta_t = C(S_t, t)$ , eller

$$b_t = \frac{1}{\beta_t} \left[ C(S_t, t) - \frac{\partial C}{\partial x}(S_t, t)S_t \right]. \quad (2.9)$$

Från ekvation (2.6) och ekvation (2.8) matchar vi koefficienterna för  $dt$ , vilket resulterar i, för  $t \in [0, T)$ ,

$$-rC(S_t, t) + \frac{\partial C}{\partial t}(S_t, t) + rS_t \frac{\partial C}{\partial x}(S_t, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(S_t, t) = 0. \quad (2.10)$$

För att ekvation (2.10) ska hålla så räcker det med att C uppfyller följande PDE

$$-rC(x, t) + \frac{\partial C}{\partial t}(x, t) + rx \frac{\partial C}{\partial x}(x, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad (2.11)$$

för  $(x, t) \in (0, \infty) \times [0, T)$ .

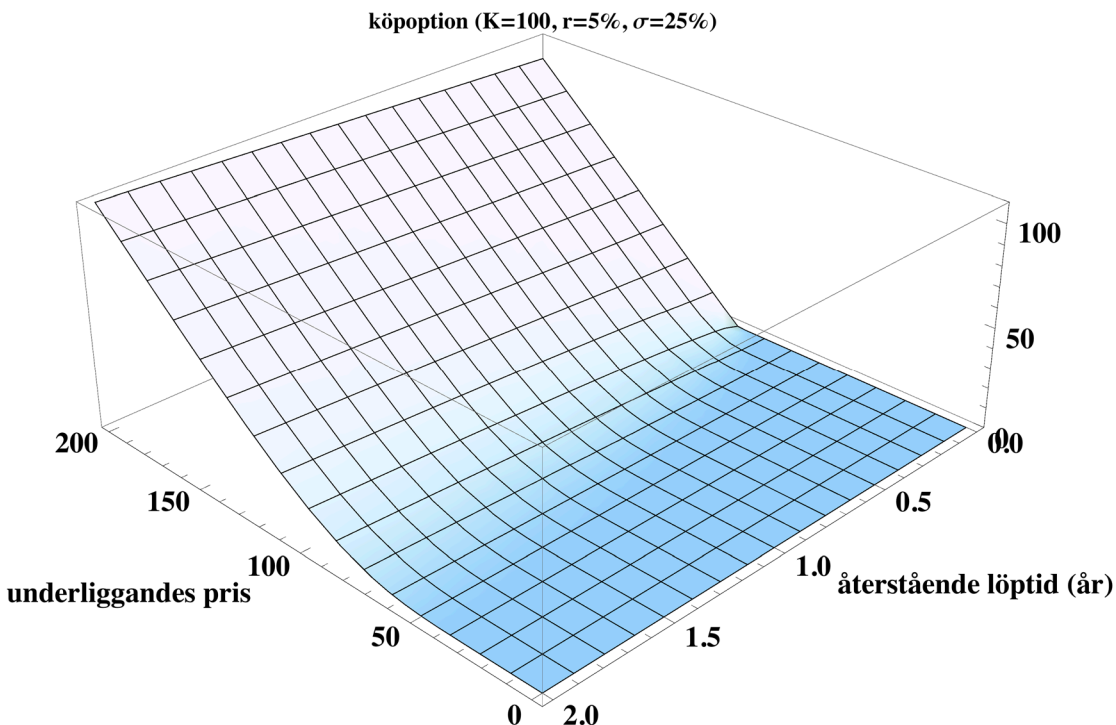
## 2.3 Black-Scholes-Merton-formlerna

Faktumet att  $Y_T = C(S_T, T) = \max(S_T - K, 0)$  ger oss randvillkoret:

$$C(x, T) = \max(x - K, 0), \quad x \in (0, \infty). \quad (2.12)$$

Löser man ekvation (2.11) med randvillkoret i ekvation (2.12), alltså optionens värde på slutdagen, med hjälp av Feynman–Kačs sats (se Björk, 2004, Duffie, 2001 eller Neftci, 2000), så får man Black-Scholes-Merton-formeln för en europeisk köpoption:  $C(x, t) = xN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$ , vilket vi kan skrivas som

$$C(S_t, t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2). \quad (2.13)$$



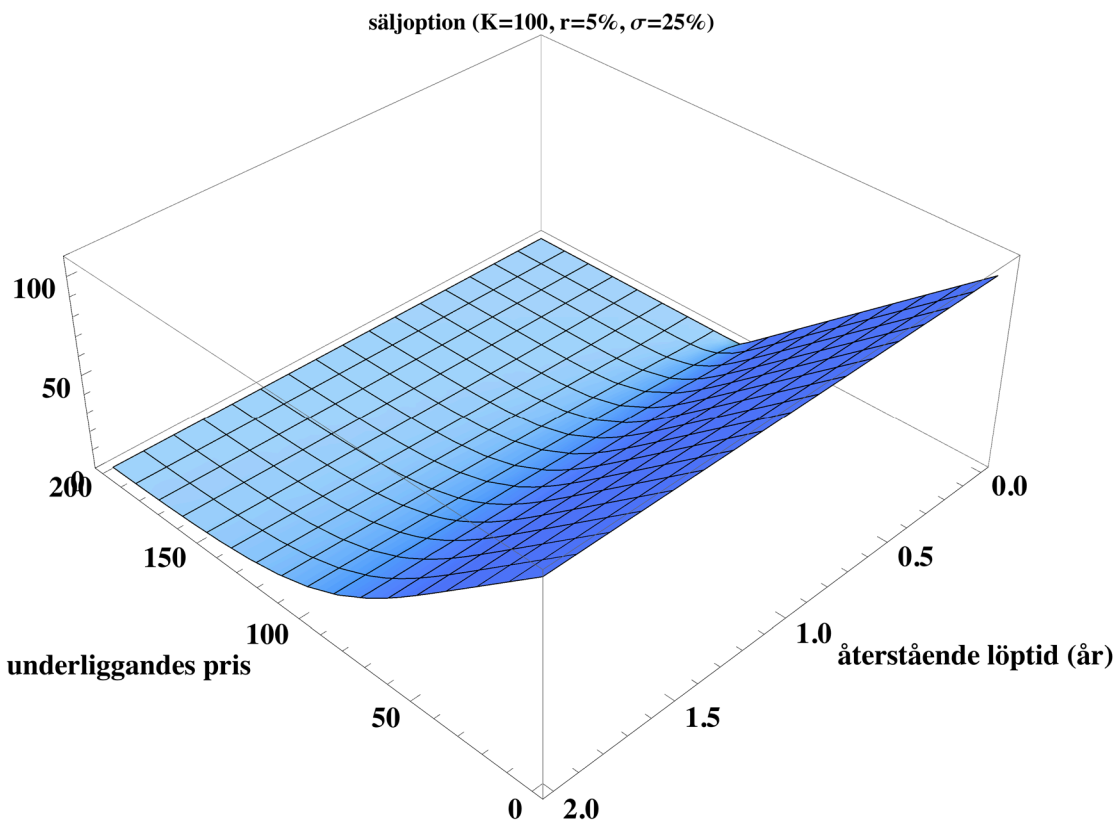
Figur 2.1 – Prisytan för en europeisk köpoption.

Genom Köp-Sälj paritet:  $P(S_t, t) = C(S_t, t) + Ke^{-r(T-t)} - S_t$ , så är Black-Scholes-Merton-formeln för en europeisk säljoption,  $P(S, t)$ ,

$$P(S_t, t) = -S_t N(-d_1) + Ke^{-r(T-t)} N(-d_2), \quad (2.14)$$

där  $d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ ,  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

och  $N(\cdot)$  är den kumulativa standardiserade normalfördelningsfunktionen.



Figur 2.2 – Prisytan för en europeisk säljoption.

Black-Scholes-Merton-modellen bidrar med två viktiga finansiella hjälpmedel. För det första så ger Black-Scholes-Merton-formlerna i ekvation (2.13) och ekvation (2.14) en analytisk lösning för det rationella priset på en europeisk option. För det andra så ger den en handelsstrategi för att bygga upp en riskfri portfölj. Existensen av en riskfri portfölj implicerar också att en specifik portfölj bestående av obligationer och den underliggande tillgången kan vara likvärdig med en portfölj bestående utav en utställd option för den underliggande tillgången vid vilken given tidpunkt som helst. I en finansiell marknad som

följer Black-Scholes-Merton antagandena så kan man med andra ord skapa syntetiska optioner med hjälp av obligationer och aktier (eller andra underliggande). Detta kallas för en replikerande portfölj och härledningen av denna är vad som gav Merton och Scholes nobelpriset i ekonomi 1997.<sup>4</sup> Med hjälp av detta argument så kan man hedga dynamiskt och på så vis eliminera all risk (i teorin).

## 2.4 En risk-neutral härledning

Ett problem med härledningen i avsnitt 2.2 är enligt Björk (2004) att vi antar att det finns en marknad för optionen och för den underliggande så att man kan replikera avkastningarna. Detta är inget problem för standardiserade optioner, men vissa exotiska optioner handlas bara i små mängder eller väldigt sällan och då brakar argumentationen samman, eftersom det inte går att bygga en replikerande portfölj.

Man kan istället använda risk-neutral värdering för att visa att ekvationerna (2.13) och (2.14) faktiskt är de korrekta formlerna för ett rationellt optionspris under antagandena i avsnitt 2.1, utan att behöva kunna replikera en options avkastning.

I en marknad där Black-Scholes-Merton-antagandena håller, så beror inte optionens rationella värde på riskpreferenserna från marknadens aktörer (Björk, 2004). Detta antyder att ett antagande om risk-neutralitet är legitimt. I en risk-neutral värld så är den förväntade avkastningen,  $\mu$ , lika med den riskfria räntan,  $r$ . Vid avsaknaden av arbitragemöjligheter så är alltså det förväntade värdet på en europeisk köpoption vid löptidens slut ( $t = T$ ) lika med  $E^Q[\max(S_T - K), 0]$ , där  $E^Q$  betecknar det förväntade värdet under  $Q$ -måttet, alltså det förväntade värdet i en risk-neutral värld. Om vi diskonterar detta värde med den riskfria räntan så får vi det risk-neutrala värdet på optionen vid tidpunkten  $t$  (Hull, 2009),

$$C(S_t, t) = e^{-r(T-t)} E^Q[\max(S_T - K), 0]. \quad (2.15)$$

Ekvation (2.15) kan skrivas om som:<sup>7</sup>

$C(S_t, t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$ , vilket ju är Black-Scholes-Merton-formeln i ekvation (2.13).

<sup>7</sup> En härledning går att finna i appendix till kapitel 13 i Hull (2009).



## 3. Greker

---

Grekerna är optionsprisernas känslighet (partialderivata) avseende på variabler och parametrar i Black-Scholes PDE i ekvation (2.11). De kallas greker eftersom nästan alla bär namn efter grekiska bokstäver (Vega, vilket bl. a. är namnet på en stjärna, är ett undantag). Om Black-Scholes-Merton-antagandena höll så vore delta, gamma och theta de enda grekerna man behövde använda (de som är med i ekvation (2.11)). Som vi ska se i nästa avsnitt så är dock inte räntan och volatiliteten konstanta i praktiken och man kan även behöva ta hänsyn till högre ordningens partialderivator.

Vi kan skriva Black-Scholes PDE med beteckningarna för grekerna delta, gamma och theta:

$$-rC + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2S^2\Gamma + \theta = 0.$$

Grekerna används av optionshandlare, likviditetsgaranter (market makers) och riskmanagers för att bedöma olika risker och hedga dem. Det är ofta vanligt att en handlare har en maxnivå i sin portfölj för respektive greker. Dessutom är det vanligt att man försöker hålla portföljen neutral för vissa förutbestämda greker.

För en mer omfattande genomgång se Nassim Talebs bok *Dynamic Hedging* (1997) eller Espen Haugs artiklar: ”Know Your Weapon” I och II (2003a och 2003b). Detta avsnitt är till stor del baserat på Haugs artiklar (exempelvis är alla ekvationer därifrån om inget annat påpekas). 3D-diagrammen är skapade i Mathematica med hjälp av kod ifrån Mangano (2010) och Shaw (1998).

## 3.1 Deltagreker

### 3.1.1 Delta

Delta är ett mått på optionens känslighet till små förändringar i det underliggande priset. För en europeisk köpoption på en aktie som inte gör utdelningar så är delta lika med  $N(d_1)$ . När en köpoption kommer långt ”in-the-money” så närmar sig  $N(d_1)$  1. Delta beräknas genom förstaderivatan av optionens värde från Black-Scholes PDE avseende på det underliggande priset:

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) > 0 \quad (3.1)$$

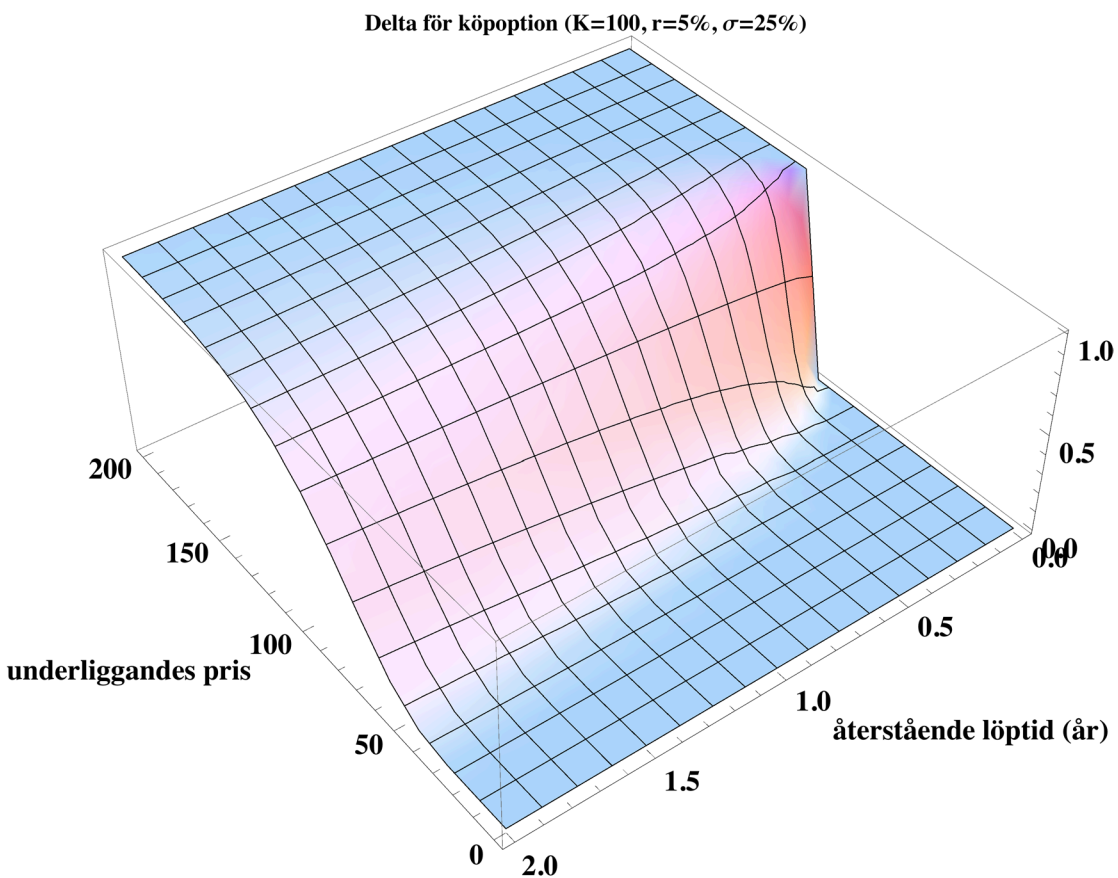
$$\Delta_P = \frac{\partial P}{\partial S} = N(-d_1) < 0. \quad (3.2)$$

*“If the hedge is maintained continuously, then the approximations mentioned above become exact, and the return on the hedged position is completely independent of the change in the value of the stock. In fact, the return on the hedged position becomes certain. This was mentioned to us by Robert C. Merton.”*

*– Black och Scholes (1973, s. 641).*

Om Black och Scholes antaganden vore korrekta så skulle delta vara den enda greken som man behövde hedga, vilket då skulle göra portföljen helt riskfri. För att positionen ska förbli riskfri så måste den ändras genom köp och försäljning av den underliggande tillgången i kontinuerlig tid och mängd, vilket förstås är omöjligt i praktiken då man istället återhedgar portföljen i diskret tid och diskret volym. I praktiken är det ovanligt att man balanserar om portföljen mer än 10 gånger per dag, då transaktionskostnaderna skulle bli enorma även i den mest likvida marknaden (Haug, 2007). I själva verket leder resonemanget, enligt Duffie (2001), i avsnitt 2.2 vid härledningen av Black-Scholes PDE genom den replikerande portföljen att vi måste ändra andelen av aktier,  $a$ , oändligt många gånger – vilket leder till oändliga transaktionskostnader!

Ett exempel:  $\Delta_C$  (100 kr underliggande; 100 kr lösenpris; 25 % volatilitet; 30 dagar till förfall och 5 % ränta) = 0,544643. Alltså optionspriset förändras sig med 0,5446 kr per krona som den underliggande rör sig. Jämför detta värde på delta med differensen mellan två optionspriser från ekvation (2.13) med 1 kr skillnad i värde på underliggande,  $C(S=100,5; K=100; \sigma=0,25; T-t=30; r=0,05) - C(S=99,5; K=100; \sigma=0,25; T-t=30; r=0,05) = 0,544599$ . Skillnaden i deltavärde beror på att delta inte är linjär och att delta mäts på en oändligt liten förändring.



Figur 3.1 – Delta för en europeisk köpoption.

Som vi ser på Figur 3.1 så är känsligheten som störst ju närmare förfalldagen vi kommer och ju mindre skillnad det är mellan det underliggande priset och lösenpriset. Detta kan vi se ännu tydligare greken gamma, partialderivatan av delta avseende på underliggande.

Målet med deltahedging är att hela tiden hålla portföljen delta-neutral, alltså att portföljens totala delta ska vara noll. Ett exempel på diskret dynamisk deltahedging<sup>8</sup>: Vi har en aktie,  $S_t$ , som handlas till priset 100 kr. Aktien betalar inga utdelningar och har en känd konstant volatilitet på 45 % per år. Den riskfria räntan är 4 %.  $S_t$  följer en geometrisk Brownsk rörelse. En likviditetsgarant (market maker) köper 100 europeiska köpoptioner som löper ut om 5 dagar. Kostnaden för en option blir enligt ekvation (2.13) 2,12785 kr, vilket vi avrundar till 2,13 kr. Kostnaden totalt blir  $100 * 2,13 = 213$  kr. Vi antar att det inte finns några transaktionskostnader eller andra avgifter. Likviditetsgaranten lånar 213 kr, köper optionerna och hedgar sedan sin position genom att sälja ett korrekt (som ges av delta) antal aktier.

Vi antar att aktien antar följande priser under de fem dagarna:

{dag 1 = 100, dag 2 = 105, dag 3 = 100, dag 4 = 105, dag 5 = 100}

- Dag 1: Delta =  $0,51 * 100$  optioner = 51. Köp av 100 optioner för 213 kr, vilka lånas för 4 % ränta. 51 aktier säljs och  $51 * 100$  kr = 5100 kr genereras. Dessa tjänar nu 4 % ränta.
- Dag 2: Delta = 89, försäljning av  $89 - 51 = 38$  aktier ytterligare. Dessa genererar  $38 * 105$  kr = 3990 kr. Ränta på lånat belopp =  $213 * 0,04 (1/360) = 0,02$  kr. Ränta på utlånat belopp =  $5100 * 0,04 (1/360) = 0,57$  kr.
- Dag 3: Delta = 51, köper 38 aktier till en kostnad av  $38 * 100$  kr = 3800 kr. Ränta på lånat belopp =  $213 * 0,04 (1/360) = 0,02$  kr. Ränta på utlånat belopp =  $(5100 + 3990) * 0,04 (1/360) = 1$  kr.
- Dag 4: Delta = 98, 47 ytterligare aktier säljs för  $47 * 105$  kr = 4935 kr. Ränta på lånat belopp =  $213 * 0,04 (1/360) = 0,02$  kr. Ränta på utlånat belopp =  $5100 * 0,04 (1/360) = 0,57$  kr.
- Dag 5: Optionerna löper ut utan utövande. Sålta aktier täcks för  $98 * 100$  kr = 9800 kr. Ränta på lånat belopp =  $213 * 0,04 (1/360) = 0,02$  kr. Ränta på utlånat belopp =  $(5100 + 4935) * 0,04 (1/360) = 1,1$  kr.

Totalt: aktiehandel =  $5100 + 3990 - 3800 + 4935 - 9800$  kr = 425 kr. Ränta betald =  $0,02 + 0,02 + 0,02$  kr = 0,08 kr. Ränta tjänad =  $0,57 + 1 + 0,57 + 1,1$  kr = 3,24 kr.

---

<sup>8</sup> En bearbetning av Neftci (2008).

Återbetalning av lån = 213 kr. Total förtjänst =  $425 - 213 + 3,24 - 0,08$  kr = 215,16 kr (ränta-på-ränta är ignorerat). Att likviditetsgaranten får en vinst kan förklaras med att aktiepriset under dessa fem dagar hade en daglig volatilitet på 5 % medan den implicita volatiliteten var 45 % årligen, vilket motsvarar 2,36 % dagligen. Alltså varierade  $S_t$  mer under optionens livslängd, än vad som föreslogs av implicit volatilitet. Detta resulterar i att den långa positionen i optionen (som är konvex) ger en nettovinst.

Taleb (1997) påpekar att enbart hedga delta är för textböckerna och att man i praktiken måste hedga många fler greker. Taleb föreslår även en praktisk modifikation av delta för att göra måttet mer användbart i praktiken: diskret delta =  $\frac{1}{2} \left( \frac{\Delta C(S,t)}{\Delta S^+} + \frac{\Delta C(S,t)}{\Delta S^-} \right)$ , där  $\Delta$  alltså står för en diskret förändring och inte känslighetsmättet delta,  $\Delta S^+$  och  $\Delta S^-$  står för upp- respektive nedgångar i det underliggande priset.

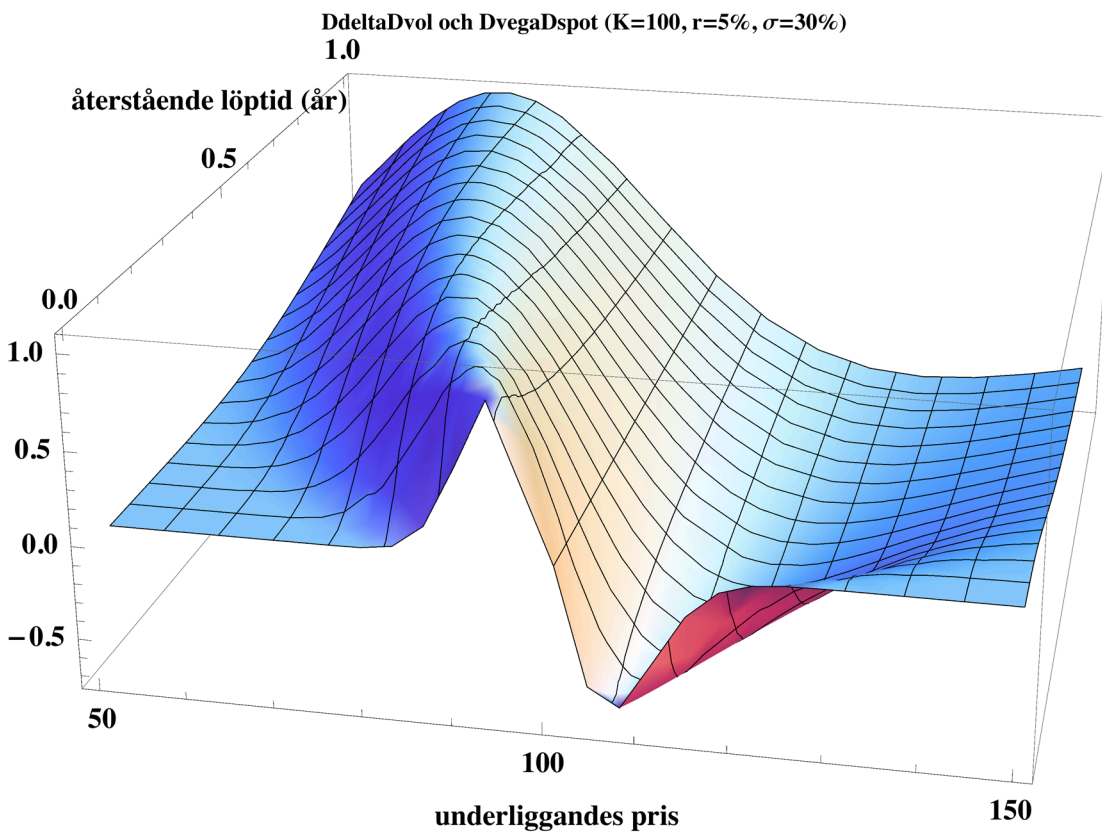
### 3.1.2 DdeltaDvol och DvegaDspot

DdeltaDvol:  $\frac{\partial \Delta}{\partial \sigma}$  visar hur mycket delta förändras för en liten förändring i volatiliteten.

DdeltaDvol är även matematiskt likställd med DvegaDspot (även kallad Vanna):  $\frac{\partial \text{vega}}{\partial S}$ , alltså förändringen i vega då underliggande tillgången förändras lite.

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S \partial \sigma} = \frac{\partial^2 P}{\partial S \partial \sigma} - \frac{e^{-rT} d_2}{\sigma} n(d_1). \quad (3.3)$$

där  $n(\cdot)$  är standardnormalfördelningsfunktionen,  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .



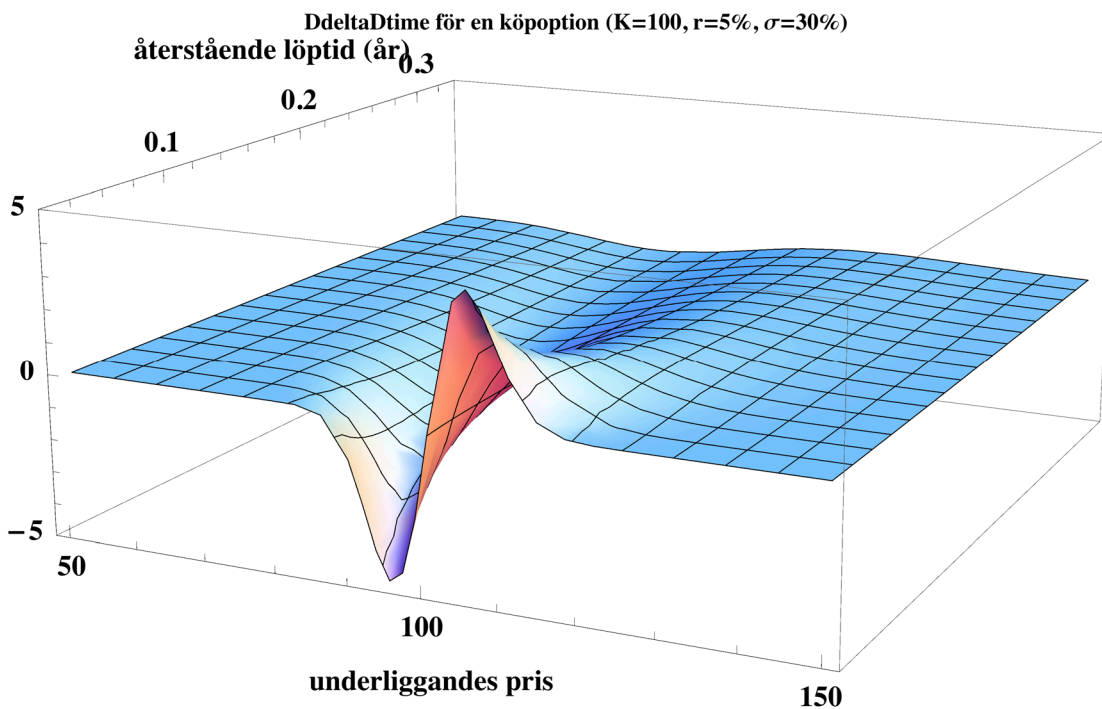
Figur 3.2 – DdeltaDvol och DvegaDspot för en europeisk köpoption/säljoption.

### 3.1.3 DdeltaDtime

DdeltaDtime (även kallad Charm, Delta decay eller Delta bleed) är deltas känslighet mot små förändringar i tiden:

$$DdeltaDtime \text{ köp} = -\frac{\partial C}{\partial T} = -e^{-rT} \left[ n(d_1) \left( -\frac{d_2}{2T} \right) - rN(d_1) \right] \leq 0 \quad (3.4)$$

$$DdeltaDtime \text{ sälj} = -\frac{\partial P}{\partial T} = -e^{-rT} \left[ n(d_1) \left( -\frac{d_2}{2T} \right) + rN(-d_1) \right] \leq 0 \quad (3.5)$$



Figur 3.3 – DdeltaDtime för en europeisk köpoption.

Denna grek ger en indikation på vad som händer med delta när tiden till förfallodagen minskar. För att få DdeltaDtime för en dag så dividerar vi med antalet dagar på året (oftast 365 eller 252).

### 3.1.4 Elasticitet

Optionens elasticitet (även kallad optionens hävstång, Omega:  $\Omega$  eller Lambda:  $\Lambda$ ) är optionens känslighet mot en procents rörelse i den underliggande tillgången. Elasticiteten ges av:

$$\Lambda_C = \Delta_C \frac{S}{C} = e^{-rT} N(d_1) \frac{S}{C} > 1 \quad (3.6)$$

$$\Lambda_P = \Delta_P \frac{S}{P} = -e^{-rT} N(-d_1) \frac{S}{P} < 0 \quad (3.7)$$

Optionens elasticitet är inte enbart ett användbart redskap i sig självt, utan är även hjälpsamt för att estimerar volatiliteten och förväntad avkastning från en option.

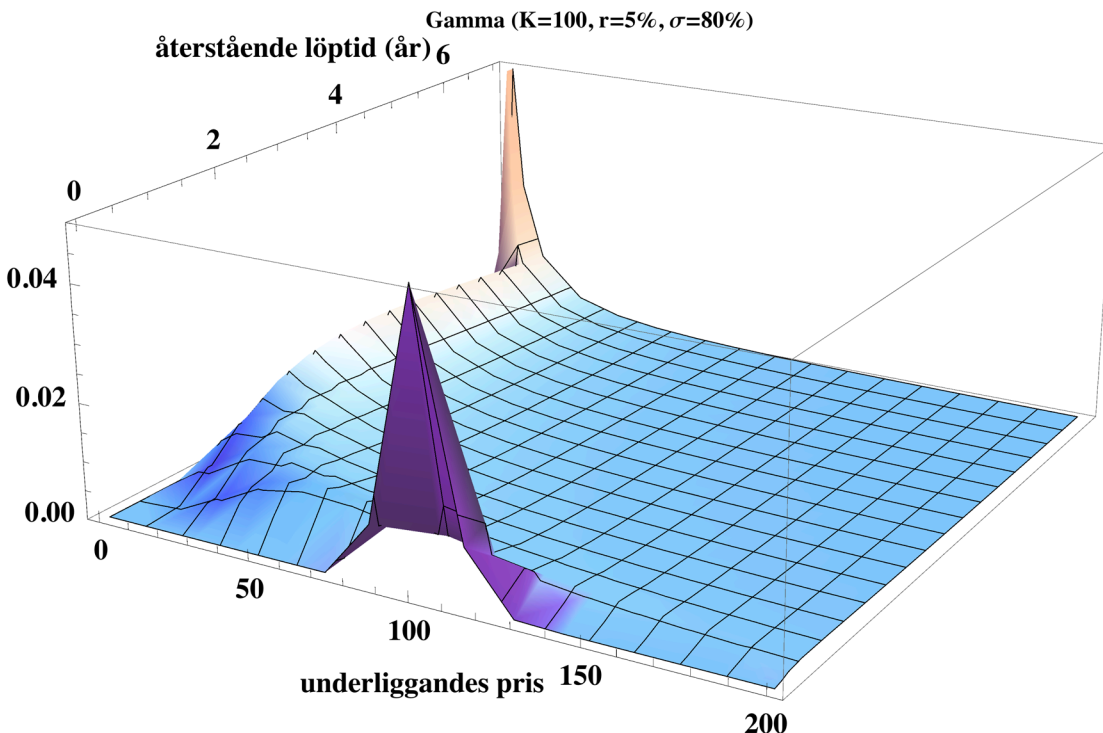
## 3.2 Gammagreker

### 3.2.1 Gamma

Gamma är andraderivatan av optionspriset avseende på underliggande pris, eller förstaderivatan av delta avseende på underliggande pris. Alltså optionens förändringshastighet vid en liten förändring av det underliggande priset. Gamma visar hur mycket vi ska förändra vår deltahedge då det underliggande priset ändras.

$$\Gamma_{C,P} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{n(d_1)e^{-rT}}{S\sigma\sqrt{T}} > 0 \quad (3.8)$$

Genom att göra portföljen gamma-neutral så skyddar vi mot större förändringar i underliggande, som vi inte hinner hedga genom att om-hedga delta.



Figur 3.4 – Gamma för en europeisk köpoption/säljoption med hög volatilitet och långt kvar till förfallodagen.

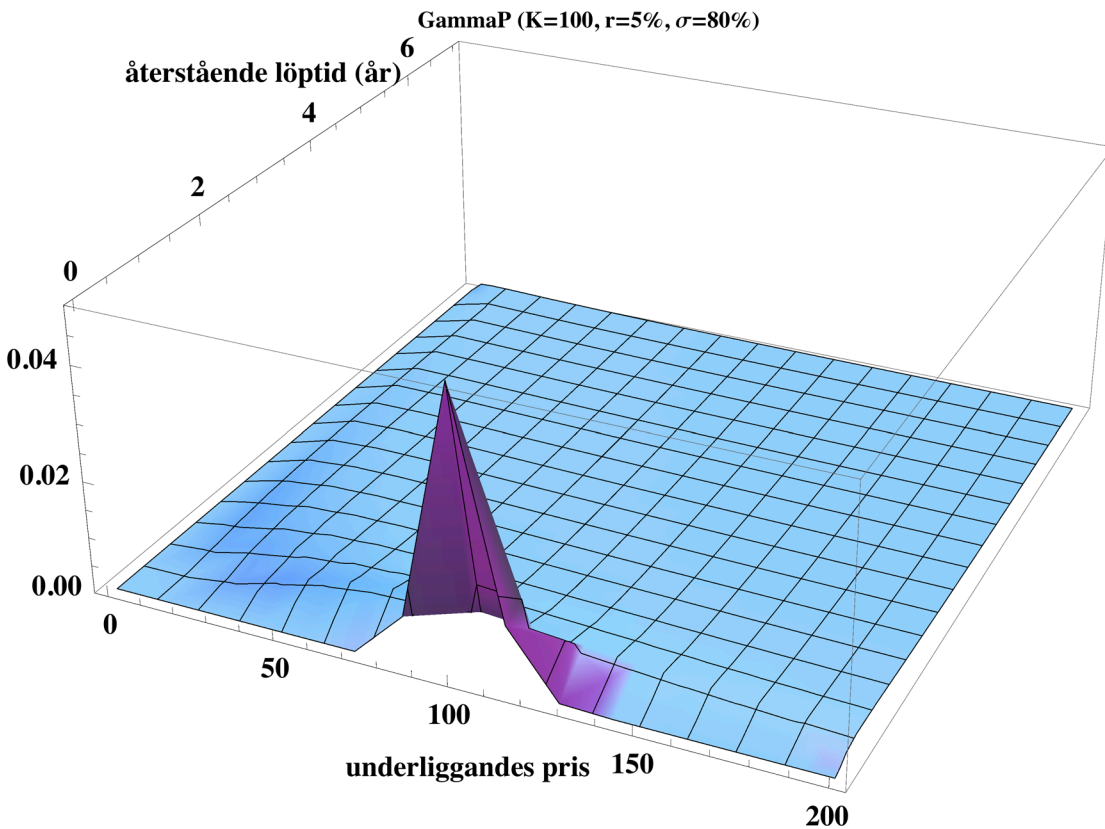
Vid hög volatilitet, när förfallodagen är långt borta (flera år) och den underliggandes pris är nära noll så existerar det för gamma en sadelpunkt och en topp som kan vara större än den egentliga gammarrisken hos en option "at-the-money" (se figur 3.4). Men enligt Haug (2003a)



så är detta i de flesta fall bara en illusion som beror på hur gamma är definierat. Det kan ställa till bekymmer, både för optionshandlare och för riskmanagers (som sätter maxnivåer för gamma) om man slentrianmässigt räknar ut maxpunkten utan att tänka på att värdet man får kan komma från den andra toppen.

Detta kan undvikas genom att istället använda gammaprocent, GammaP (Haug 2003a):

$$\Gamma^P = \frac{S\Gamma}{100} > 0. \tag{3.9}$$



Figur 3.5 – GammaP för en europeisk köpoption/säljoption med samma värden på parametrarna som i figur 3.4. När vi plottar gammaprocent undgår vi sadelpunkten och den andra toppen.

Taleb (1997) menar att man istället för gamma kan använda skugg-gamma som tar hänsyn till volatilitetsförändringar och är kompatibel med ”volatility smile” och ”volatility skew” som ses i figur 4.10. Skugg-gamma är uträkningarna av prognostiserade förändringar i delta med hänsyn till förändringar i volatilitet och dess påverkan på den nya positionen. Positionen omvärderas sedan med hjälp av de nya volatilitetsparametrarna.

### 3.2.2 DgammaDvol

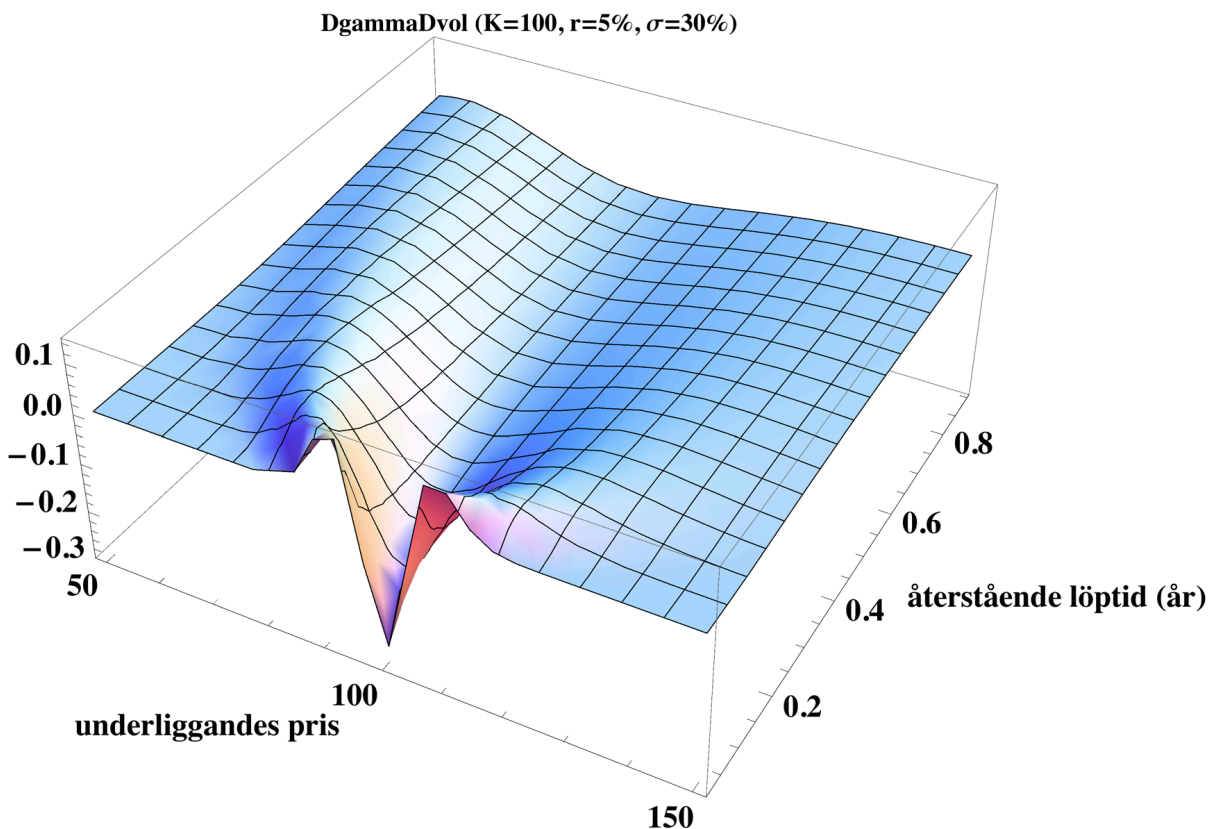
DgammaDvol (även kallad Zomma) är gammas känslighet avseende på förändringar i implicit volatilitet. Enligt Haug (2003a) så är DgammaDvol en av de viktigaste grekerna vid optionshandel.

$$DgammaDvol_{C,P} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma} = \Gamma \left( \frac{d_1 d_2 - 1}{\sigma} \right) \leq \geq 0 \quad (3.10)$$

För gammaP har vi DgammaPDvol:

$$DgammaPDvol_{C,P} = \Gamma^P \left( \frac{d_1 d_2 - 1}{\sigma} \right) \leq \geq 0 \quad (3.11)$$

Om man vill se hur DgammaDvol förändras när volatiliteten förändras med en procentenhet så kan man dividera med 100. Haug menar att DgammaDvol är mest relevant för volatiliteten av historisk volatilitet.

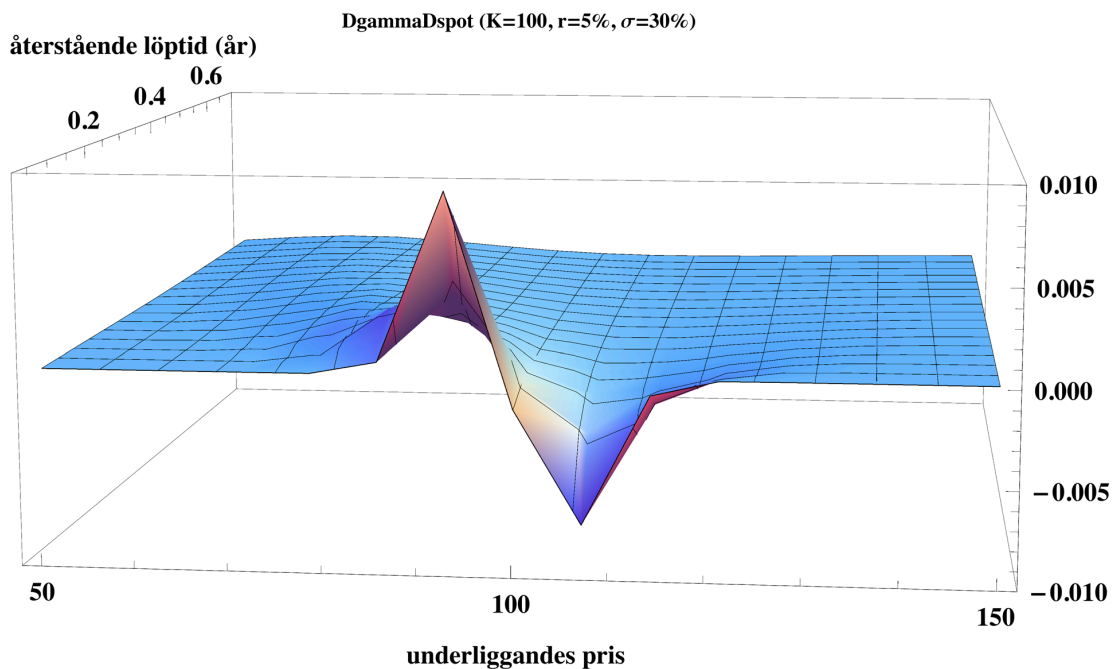


Figur 3.6 – DgammaDvol för en europeisk köption/säljoption.

### 3.2.3 DgammaDspot

DgammaDspot (även kallas Speed) är gammas förändring vid en liten förändring i det underliggande priset.

$$\frac{\partial^3 C}{\partial S^3} = \frac{\partial^3 P}{\partial S^3} = -\frac{\Gamma \left(1 + \frac{d_1}{\sigma\sqrt{T}}\right)}{S} \quad (3.12)$$



Figur 3.7 – DgammaDspot för en europeisk köpoption/säljoption.

DgammaDspot används av optionshandlare för att estimerar hur mycket de måste åter-hedga om den underliggande tillgången rör sig (Wilmott, 2007). Om en aktie rör sig med 1 kr så ändrar sig delta med så mycket som gamma är. Men det är bara en approximation.

Förändringen kan vara större eller mindre än så, speciellt om den underliggandes förändring är stor eller om optionen är nära lösenpriset och förfallodagen. Därför använder man sig av högre orderns derivata.

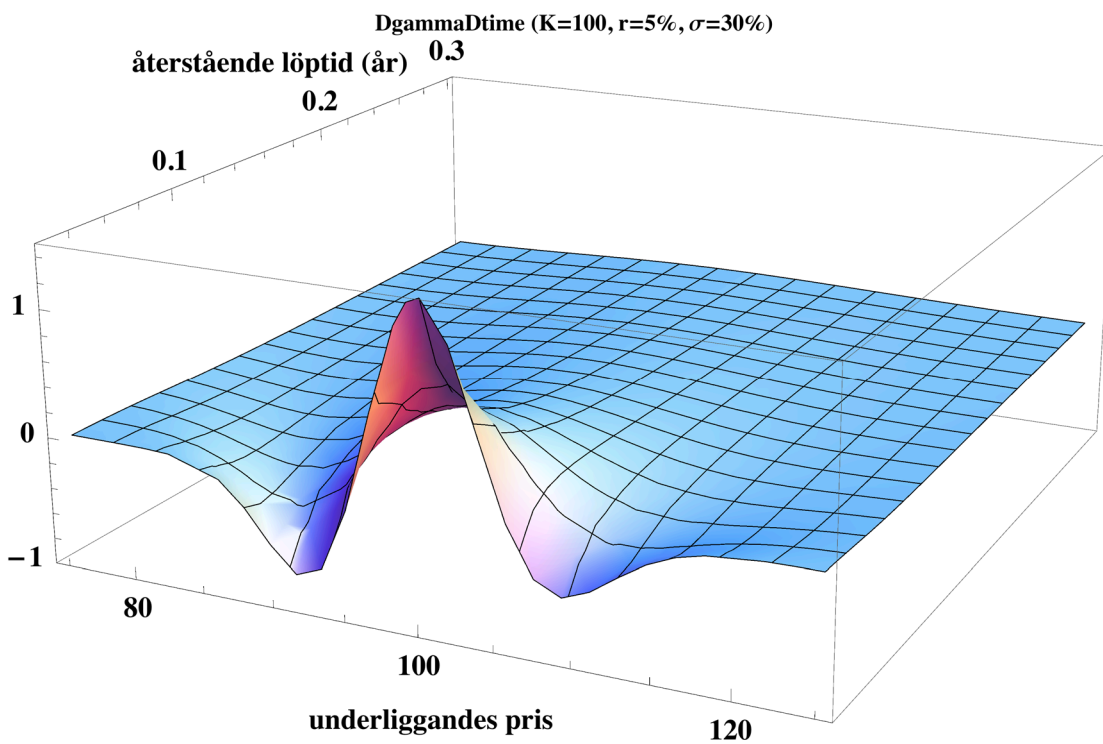
### 3.2.4 DgammaDtime

DgammaDtime (även kallad Colour eller GammaTheta) är förändringen i gamma vid en liten förändring i tid till förfallodagen.

$$-\frac{\partial \Gamma}{\partial T} = \frac{e^{-rT} n(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} \left( r + \frac{1 - d_1 d_2}{2T} \right) = \Gamma \left( r + \frac{1 - d_1 d_2}{2T} \right) \leq \geq 0 \quad (3.13)$$

För DgammaPDtime blir ekvationen följande:

$$-\frac{\partial \Gamma^P}{\partial T} = \Gamma^P \left( r + \frac{1 - d_1 d_2}{2T} \right) \leq \geq 0 \quad (3.14)$$

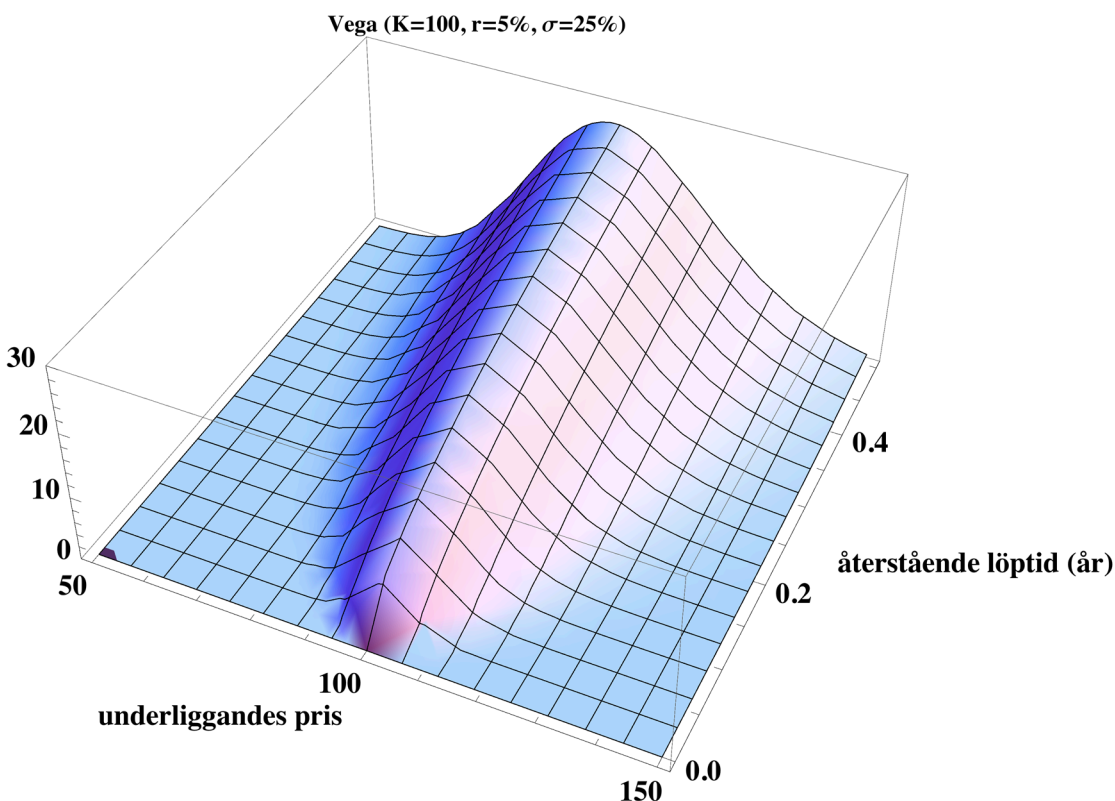


Figur 3.8 – DgammaDtime för en europeisk köpoption/säljoption.

## 3.3 Vegagreker

### 3.3.1 Vega

Vega (även benämnd tau:  $\tau$ , eller av akademiker kappa:  $\kappa$  och ibland betecknad med den grekiska bokstaven ny:  $\nu$ ) är optionens känslighet för små förändringar i implicit volatilitet. Om vi vill ha optionsvärdets förändring för en procentenhets förändring av volatiliteten så dividerar vi vega med hundra.



Figur 3.9 – Vega för en europeisk köpoption/säljoption.

Om man vill göra sin portfölj vega-neutral, alltså eliminera sin exponering mot förändringar i implicit volatilitet, så kan man vega-hedga (Neftci, 2008). Detta görs i praktiken genom att

$$Vega = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{\partial P}{\partial \sigma} = Se^{-rT} N(d_1) \sqrt{T} > 0. \quad (3.15)$$

köpa och sälja optioner (eftersom de är konvexa och därför har vega).

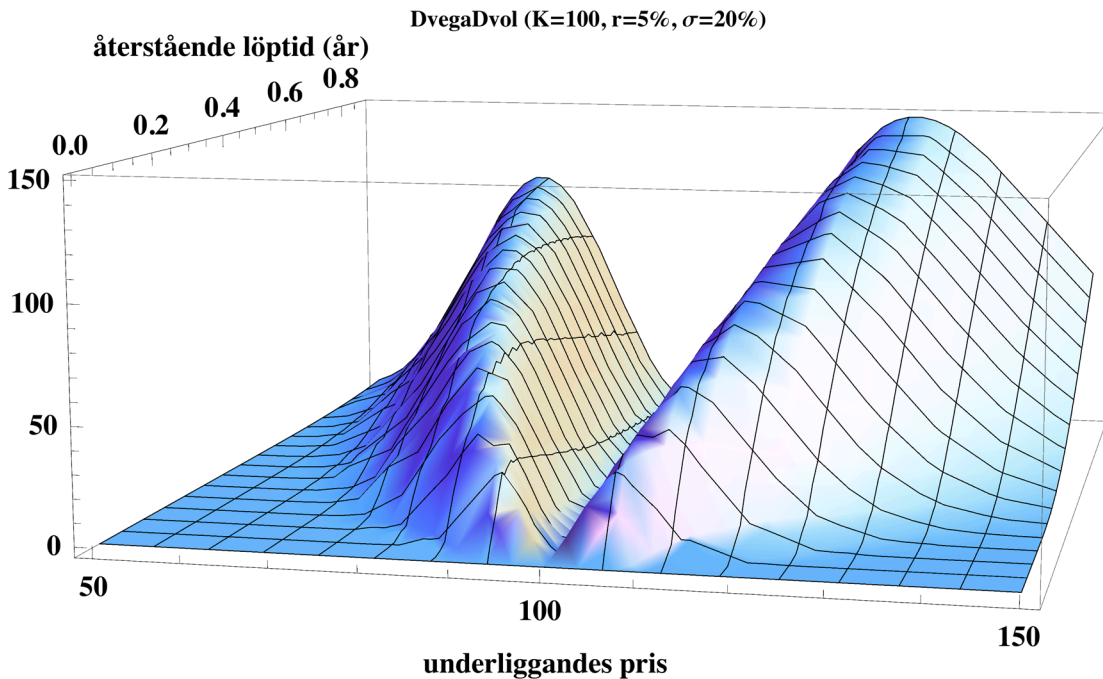
Taleb (1997) beskriver följande samband mellan vega och gamma:  $vega = \Gamma \sigma S^2 T$ .

### 3.3.2 DvegaDvol

DvegaDvol (även kallad för Vomma, Volga eller Vega konvexitet) är Vegas känslighet för förändringar i implicit volatilitet. Enligt Haug (2003b) så är DvegaDvol en av de viktigaste grekerna. I praktiken så brukar man dividera DvegaDvol med 10 000 för att få värdet vid en procents förändring av volatiliteten.

$$DvegaDvol = \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} = Vega \left( \frac{d_1 d_2}{\sigma} \right) \leq \geq 0. \quad (3.16)$$

För DvegaPDvol har vi  $VegaP \left( \frac{d_1 d_2}{\sigma} \right) \leq \geq 0$ .



Figur 3.10 – DvegaDvol för en europeisk köption/säljoption.

DvegaDvol är enligt Haug mest relevant för volatiliteten av implicit volatilitet, till skillnad från DgammaDvol där det är historisk volatilitets volatilitet som är mest relevant.

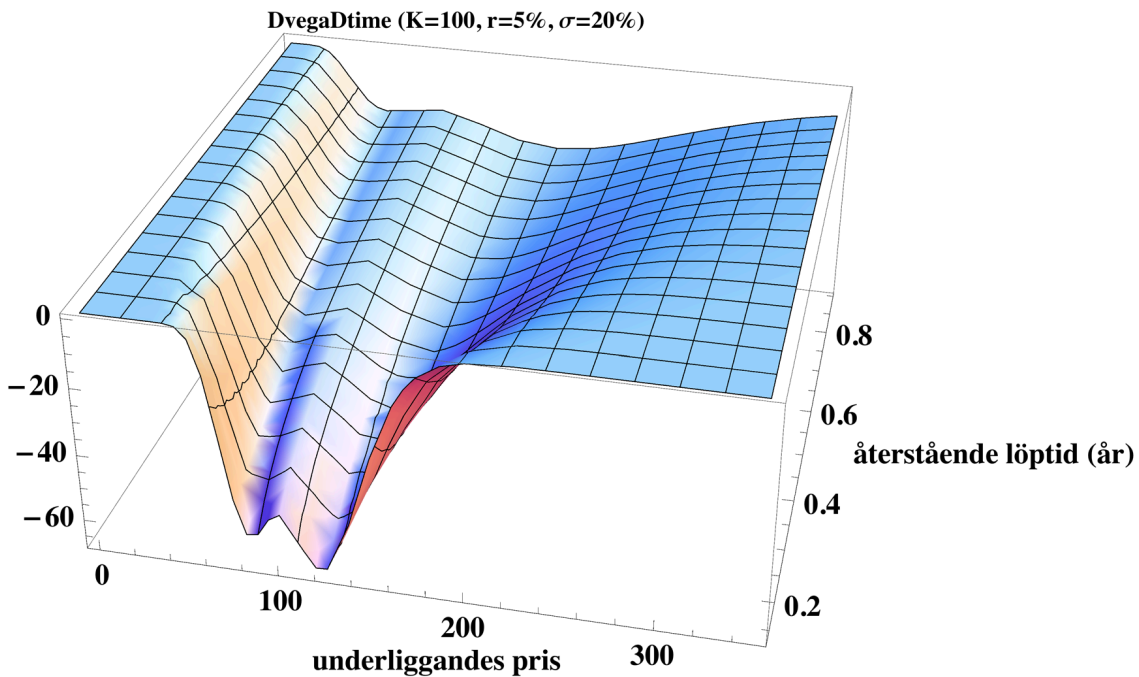
DgammaDvol är viktig för dynamisk deltahedging under stokastisk volatilitet, medan DvegaDvol har lite att göra med traditionell dynamisk deltahedging. Istället används DvegaDvol-handel som ett spel på en förändring av priset (eller med andra ord implicit volatilitet), för osäkerhet i utbud och efterfrågan, stokastisk historisk volatilitet (vilken är korrelerad med implicit volatilitet), hopp och annan modellrisk samt faktorer som påverkar

priset men som inte tas i beräkning i Black-Scholes-Merton-modellen. Som handlare av DvegaDvol behöver man inte ens veta orsaken till att implicit volatilitet förändras. Om man tror att implicit volatilitet kommer vara volatil på kort sikt så bör man försöka hitta optioner med hög DvegaDvol.

### 3.3.3 DvegaDtime

DvegaDtime är vegas förändring avseende på tiden. Eftersom vi oftast kollar på minskande återstående löptid så uttrycker vi det som minus partialderivatan:

$$DvegaDtime = -\frac{\partial Vega}{\partial T} = Vega \left( r - \frac{1 + d_1 d_2}{2T} \right) \leq \geq 0 \quad (3.17)$$

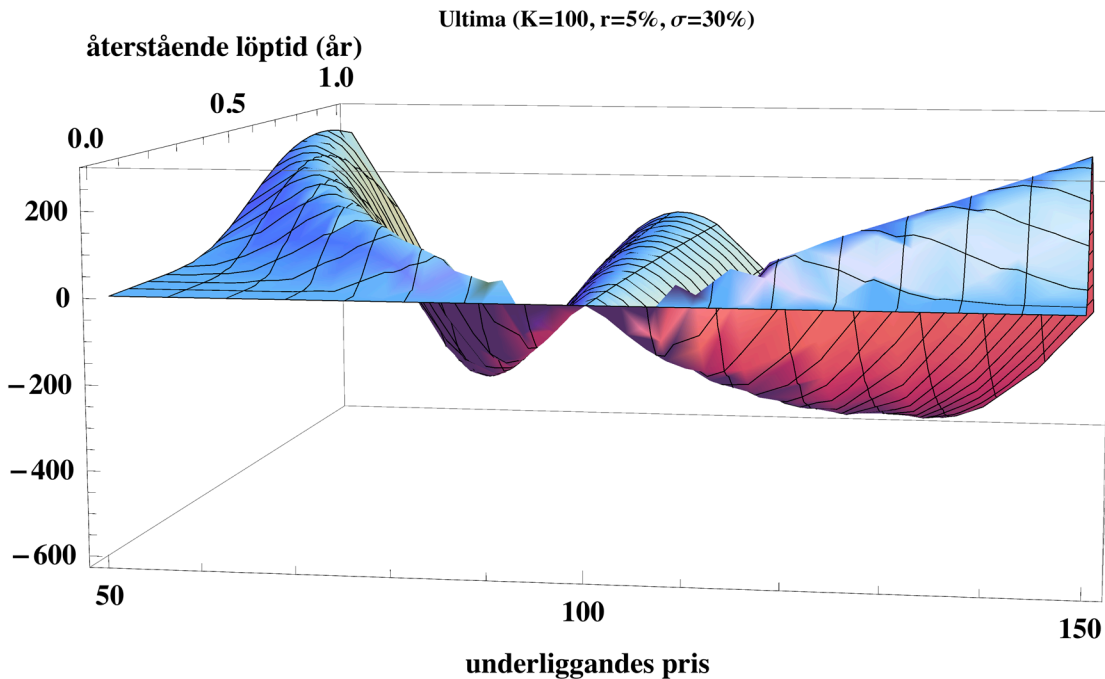


Figur 3.11 – DvegaDtime för en europeisk köption/säljoption.

### 3.3.4 DvommaDvol

DvommaDvol (även kallad ultima) är DvegaDvols (vommas) känslighet avseende på volatiliteten, eller med andra ord optionsprisets tredjederivata avseende på volatiliteten. Om vi är intresserade av känsligheten vid en förändring på en volatilitetspunkt så får vi dividera Ultima med 1 000 000.

$$Ultima = \frac{\partial Vomma}{\partial \sigma} = \frac{\partial^3 C}{\partial \sigma^3} = \frac{\partial^3 P}{\partial \sigma^3} = \frac{-Vega}{\sigma} [d_1 d_2 (1 - d_1 d_2) + d_1^2 + d_2^2] \quad (3.18)$$



Figur 3.12 – Ultima för en europeisk köption/säljoption.

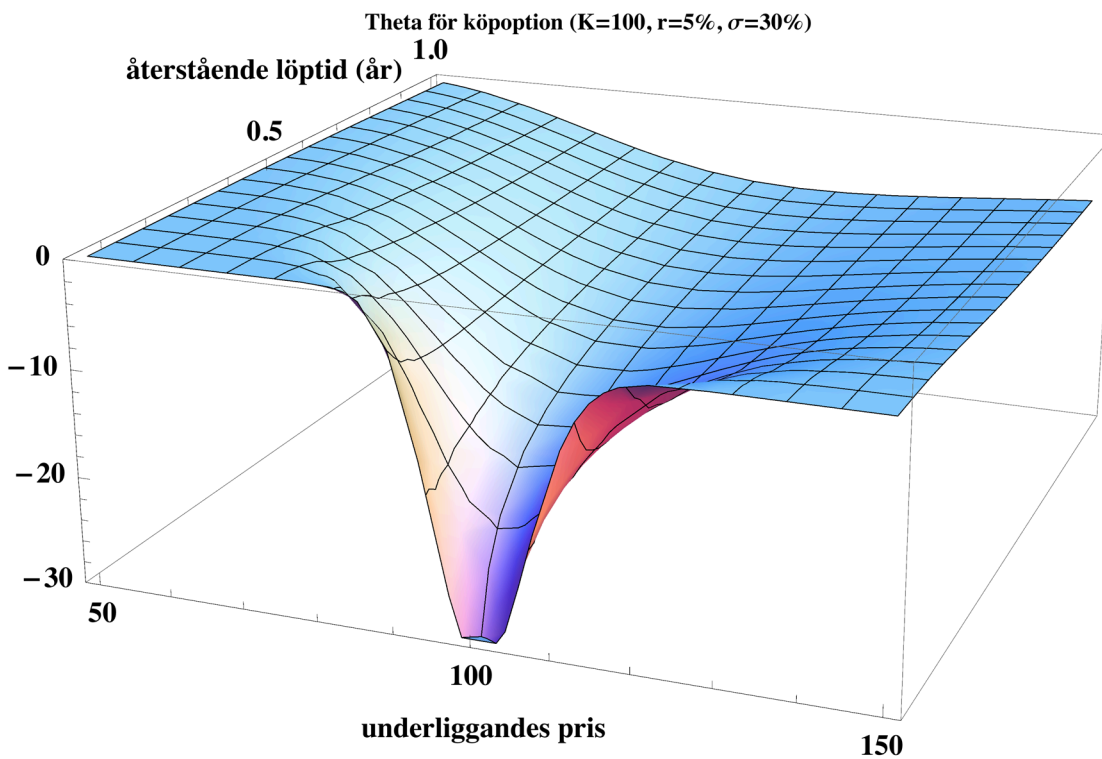
## 3.4 Theta

Theta är optionens känslighet för små förändringar i löptiden, alltså en minskning av optionens tidsvärde. Man brukar uttrycka theta som minus optionsvärdets partialderivata avseende på tiden. För att få theta för en dags förändring så kan man dividera med antalet dagar på ett år (oftast 365 eller 252, beroende på om man räknar kalenderdagar eller handelsdagar).

$$\theta_C = -\frac{\partial C}{\partial T} = -\frac{Se^{-rT}n(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rSe^{-rT}N(d_1) - rKe^{-rT}N(d_2) \leq \geq 0 \quad (3.19)$$

$$\theta_P = -\frac{\partial P}{\partial T} = -\frac{Se^{-rT}n(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rSe^{-rT}N(-d_1) - rKe^{-rT}N(-d_2) \leq \geq 0 \quad (3.20)$$





Figur 3.13 – Theta för en europeisk köpoption.

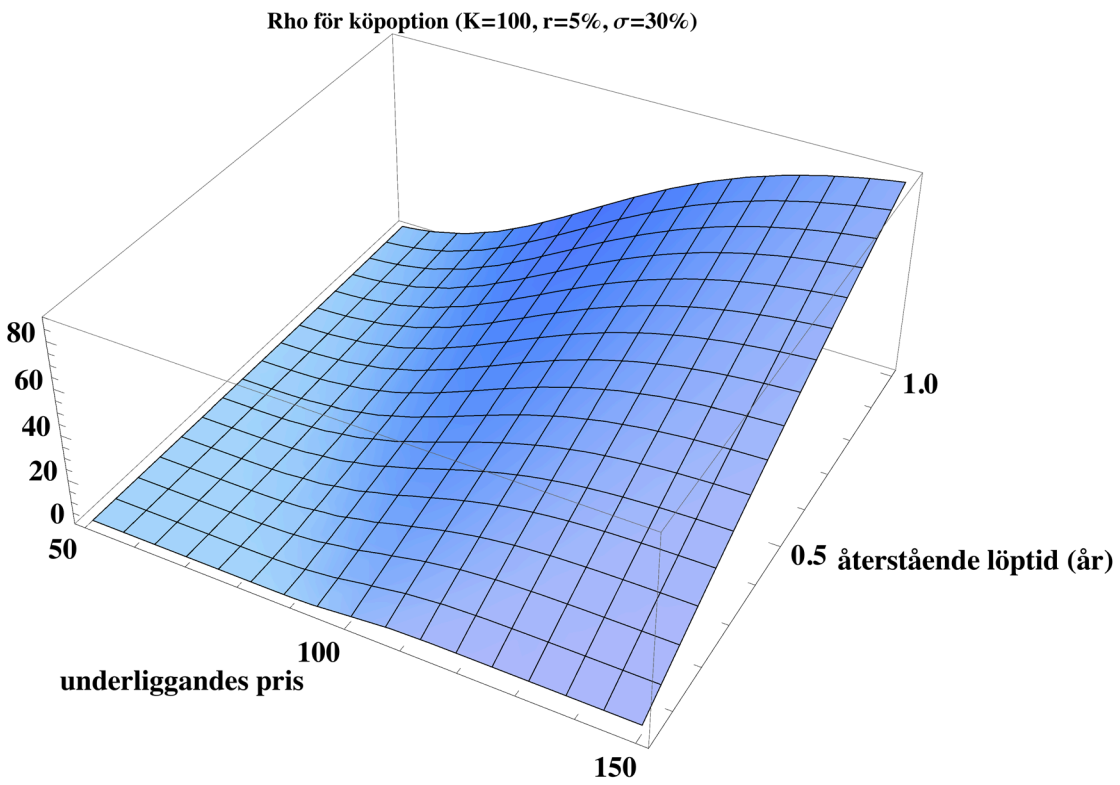
## 3.5 Rho

Rho är optionens känslighet mot små förändringar i räntan. När man hedgar rho, hedgar man alltså för ränterisker. Räntan antas vara konstant av Black-Scholes-Merton, men rho kan trots det vara ett användbart mått i praktiken.

$$\rho_C = \frac{\partial C}{\partial r} = TKe^{-rT}N(d_2) > 0 \quad (3.21)$$

$$\rho_P = \frac{\partial P}{\partial r} = -TKe^{-rT}N(-d_2) < 0 \quad (3.22)$$

Vi dividerar med 100 för att få optionsvärdets förändring för en procentenhets ränteförändring.



Figur 3.14 – Rho för en europeisk köpoption.

# 4. Optioner i verkliga marknader

*“I sometimes wonder why people still use the Black-Scholes formula, since it is based on such simple assumptions – unrealistic simple assumptions.”*

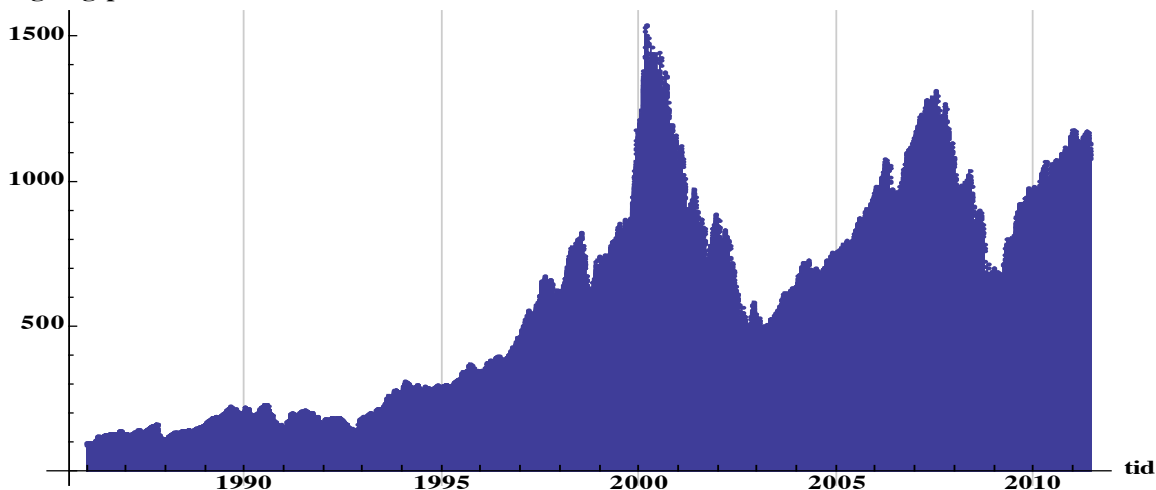
*– Fischer Black (1990)*

Precis som Fischer Black säger i citatet ovan så finns det vissa antaganden i Black-Scholes-Merton-formeln som inte överensstämmer med verkligheten. Två essentiella antaganden är, för det första att handeln sker i kontinuerlig tid och att priserna förändras kontinuerligt, vilket Haug (2007) visar att ackurateten hos diskret hedging inte kommer i närheten av det kontinuerliga fallet, speciellt för under 10 åter-balanseringar av portföljen per dag (vilket måste vara fallet i verkligheten pga. transaktionskostnader). För det andra att aktiepriset följer en geometrisk Brownsk rörelse.

## 4.1 En undersökning av OMXS30

För att kunna avgöra om Black-Scholes-Merton-antagandena är realistiska så undersöks historiska data från Stockholmsbörsens aktieindex, OMXS30, från 1986-01-02 till 2011-06-17. All data är importerad från Thomson Reuters Datastream och alla tester är genomförda i Mathematica. Även alla figurer och tabeller i detta avsnitt är skapade i Mathematica.

stängningspris

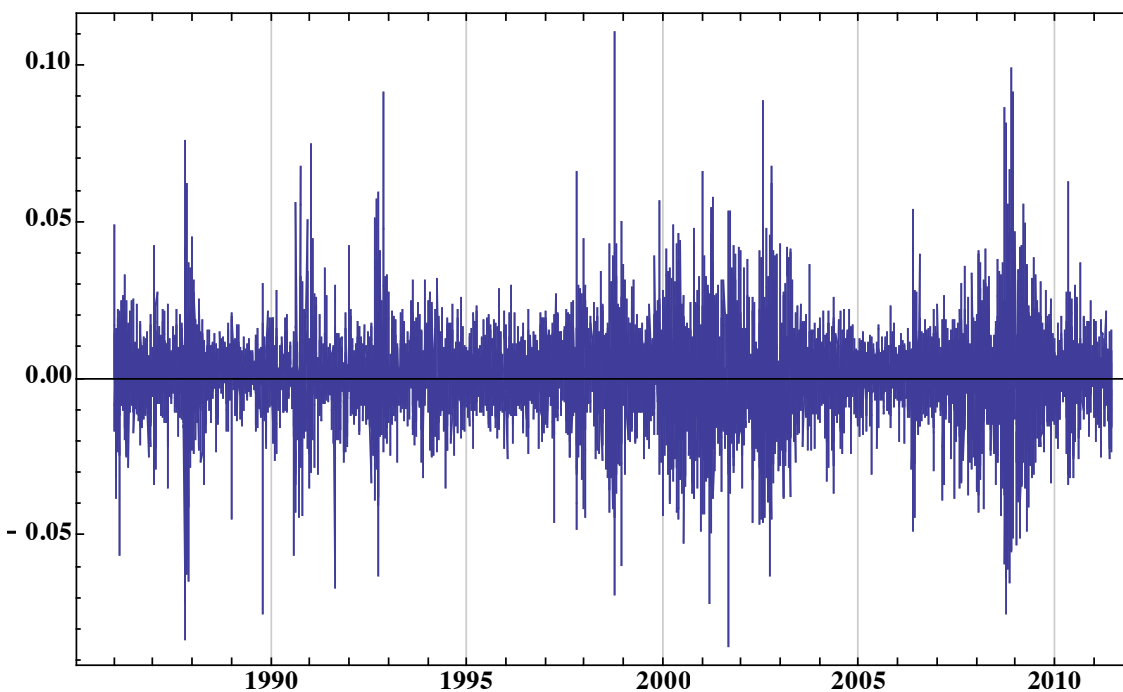


Figur 4.1 – Stängningspris OMXS30: 1986-01-02 till 2011-06-17.

### 4.1.1 Normalfördelning?

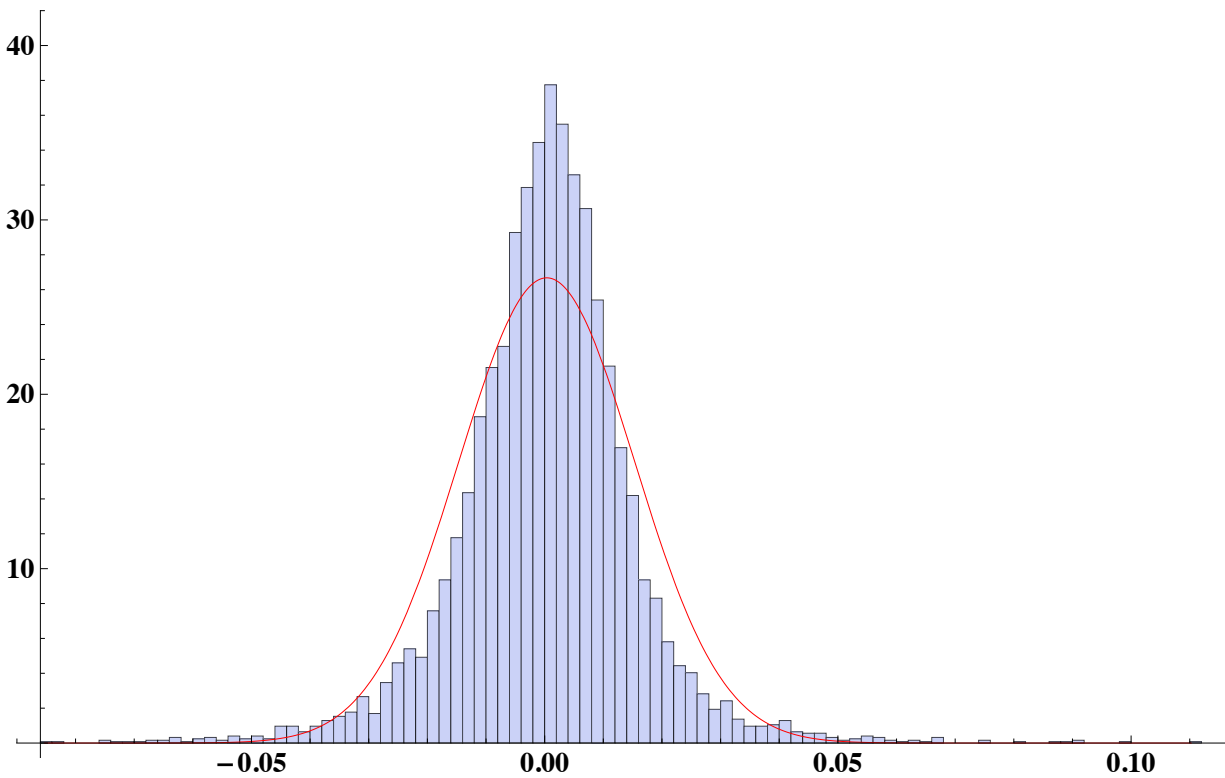
För att se om aktieprisernas dagliga rörelser verkligen följer en geometrisk Brownsk rörelse så uträknas de dagliga logaritmiska prisförändringarna,  $R_t$ , för OMXS30 från 1986-01-02 till 2011-06-17 i ekvation (4.1) och dessa har plottats i figur 4.2.

$$R_t = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1}) \quad (4.1)$$



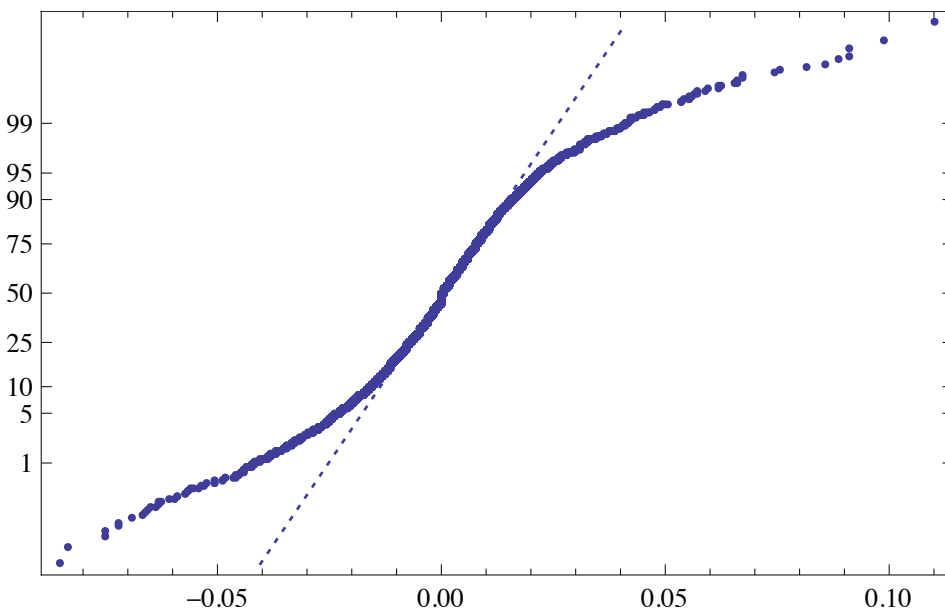
Figur 4. 2 – Daglig logaritmisk avkastning: OMXS30 1986-01-02 till 2011-06-17.

Nedan, i figur 4.3, följer ett histogram med förändringarna – i blått, och en normalfördelningskurva, med samma  $\mu$  och  $\sigma$  som de historiska förändringarna – i rött. Histogrammet är toppigare och med tjockare svansar än vad som vore fallet om förändringarna följde en geometrisk Brownsk rörelse.



Figur 4.3 – Dagliga logaritiska avkastningarnas fördelning OMXS30 1986-01-02 till 2011-06-17.

I figur 4.4 har vi en normal probability plot, vilket visar att de observerade logprisförändringarna, både upp- och nedgångar, är större än vad som vore fallet om de följde en normalfördelning.



Figur 4.4 – Normal probability plot: daglig logaritisk avkastning OMXS30 1986-01-02 till 2011-06-17.

Min	-0.0852694
Max	0.110228
Medelvärde	0.000375125
Standardavvikelse (år)	0.23223
Toppighet	7.55363
Skevhet	0.0482257

Tabell 4.1 – Beskrivande statistik för de dagliga log-prisförändringarna.

Värdet på toppigheten är 7,554 – att jämföra med normalfördelningens 3 – vilket betyder att fördelningen är toppigare och har tjockare svansar än normalfördelningen, den är alltså leptokurtosisk. Skevheten är 0,048 – att jämföra med normalfördelningens 0. Toppigheten (även benämnt kurtosis) definieras som:

$$toppighet = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})^2\right)^2} \quad (4.2)$$

och skevheten (skewness) definieras som:

$$skevhet = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x})^2\right)^{3/2}} \quad (4.3)$$

Nedan följer en tabell med ett antal normalitetstester med dess teststatistika och p-värden:

	Statistic	P-Value
Anderson-Darling	69.8804	0.
Cramér-von Mises	11.9531	0.
Jarque-Bera ALM	5755.54	0.
Pearson $\chi^2$	1330.05	$2.86711 * 10^{-235}$

Tabell 4.2 – Normalitetstester

I tabell 4.2 har vi fyra stycken ”goodness-of-fit”-tester där nollhypotesen,  $H_0$ , är att våra data kommer från en normalfördelning, och alternativhypotesen,  $H_a$ , att de inte gör det.

Cramér-von Mises testar ”goodness-of-fit” för en sannolikhetsfördelning genom förväntat

värde av  $\left[ \left( \hat{F}(x) - F(x) \right)^2 \right]$ , där  $\hat{F}(x)$  är den givna empiriska kumulativa

distributionsfunktionen och  $F(x)$  är den kumulativa distributionsfunktionen av fördelningen vi testar för. I vårt fall testar vi för den kumulativa normalfördelningen, och då är  $F(x) =$

$\frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\mu - x}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right]$ , där  $\operatorname{erf}(z)$  är integralen till normalfördelningen,  $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$ .

Avståndet ges av:

$$\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \left( \hat{F}(x) - F(x) \right)^2 \right) dF(x) \quad (4.4)$$

Cramér-von Mises teststatistika ges av (Anderson, 1962):

$$n\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{2i-1}{2n} - F(x_i) \right)^2. \quad (4.5)$$

Anderson-Darling är enligt Stephens (1974) ett av de mest kraftfulla testen för att upptäcka avvikelser från normalitet. Precis som Cramér-von Mises tillhör Anderson-Darling klassen av test som kallas för kvadratiska EDF (empiriska distributionsfunktioner), vilka kan mätas som

avståndet mellan  $\hat{F}(x)$  och  $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \left( \hat{F}(x) - F(x) \right)^2 \right) w(x) dF(x)$ , där  $w(x)$  är en

vägningsfunktion. När  $w(x) = 1$  så får vi Cramér-von Mises test i ekvation (4.4). När  $w(x) = [F(x)(1 - F(x))]^{-1}$  så får vi avståndet (Anderson och Darling, 1954):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left( \hat{F}(x) - F(x) \right)^2}{F(x)(1 - F(x))} dF(x) \quad (4.6)$$

Alltså lägger Anderson-Darling större vikt vid fördelningens svansar än vad Cramér-von Mises gör. Anderson-Darlings teststatistika ges av:

$$A^2 = -n - \sum_{k=1}^n \left( \frac{2k-1}{n} \ln(1 - F(y_{n-k+1})) + \ln(F(y_k)) \right), \quad (4.7)$$

där  $y_1 < \dots < y_n$  är sorterad data.

Jarque-Bera adjusted Lagrange multiplier, JB ALM, jämför toppigheten och skevheten från våra data med dem från normalfördelningen. Jarque-Bera ALM teststatistika ges av (Würtz och Katzgraber, 2009):

$$\text{Jarque-Bera ALM} = n \left( \frac{\text{skevhet}^2}{c_1} + \frac{(\text{toppighet} - c_2)^2}{c_3} \right), \quad (4.8)$$

där  $c_i$  är korrektionsfaktorer för ändliga urval och ges av förväntat värde och varians av

skevheten och toppigheten,  $c_1 = \text{var}(\text{skevhet}) = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}$ ,  $c_2 = E(\text{toppighet}) =$

$3(n-1)/(n+1)$  och  $c_3 = \text{var}(\text{toppighet}) = 24n(n-2)/((n+1)^2(n+3)(n+5))$ .

Pearson  $\chi^2$  är ett test där man jämför ett histogram från våra empiriska data med ett teoretiskt histogram från den testade fördelningen. Pearsons (1900)  $\chi^2$  teststatistika ges av:

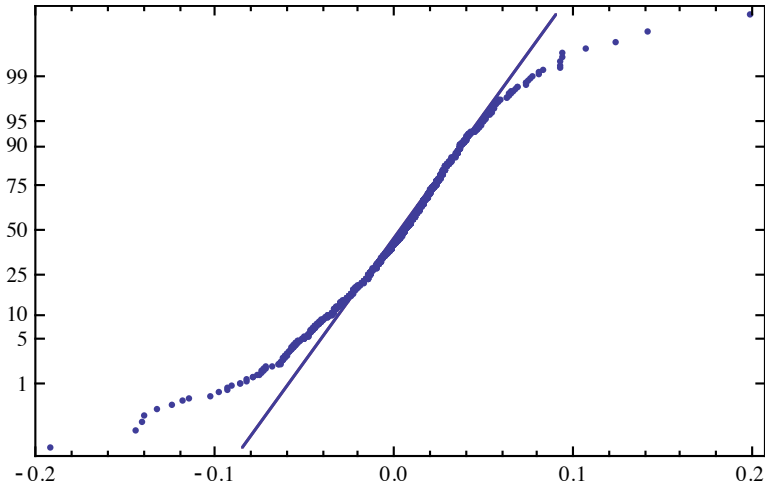
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}, \quad (4.9)$$

där  $o_i$  och  $e_i$  är de observerade respektive förväntade frekvenserna i den  $i$ :te stapeln i respektive histogram.

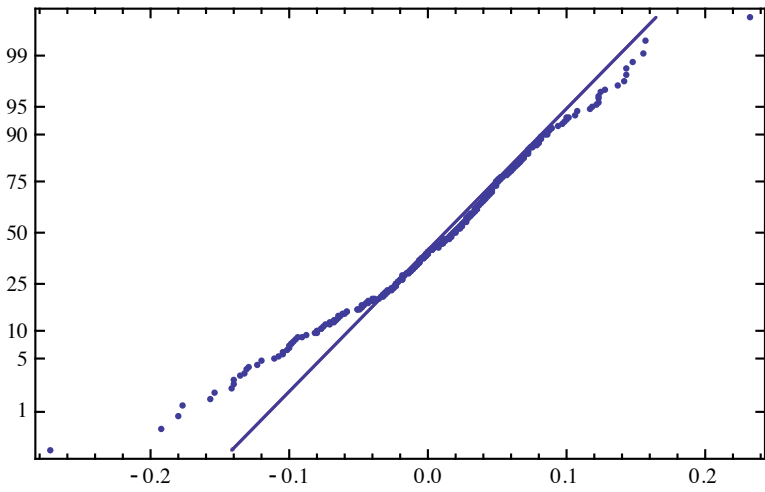
I tabell 4.2 ser vi att p-värdet är 0 eller extremt litet för alla normalitetstesten, och därmed kan  $H_0$  förkastas och slutsatsen dras att aktieindexprisernas dagliga logaritmiska förändringar inte är normalfördelade.

När vi ökar tidsspännet på förändringarna till veckor, månader och år så verkar de dock gradvis närma sig en normalfördelning.

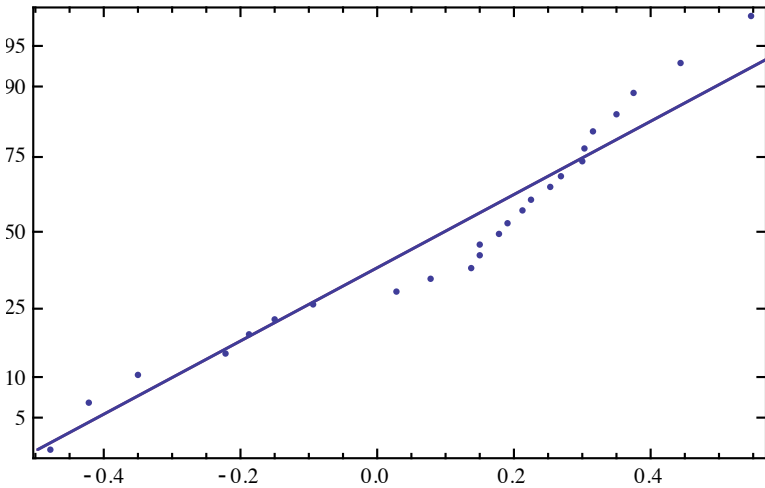




Figur 4.5 – Normal probability plot: veckovis logaritmisk avkastning OMXS30 1986-01-09 till 2011-06-16.



Figur 4.6 – Normal probability plot: månatlig logaritmisk avkastning OMXS30 januari 1986 till maj 2011.



Figur 4.7 – Normal probability plot: årlig logaritmisk avkastning OMXS30 1986 till 2010.

	Anderson – Darling	Cramér- von Mises	Jarque- Bera ALM	Pearson $\chi^2$
Dag	0.	0.	0.	$2.867112610347954 \times 10^{-235}$
Vecka	$8.484900729692688 \times 10^{-9}$	0.	0.	0.000001120426770899324
Månad	0.000006388242928445304	0.000009058795359290384	0.00047134795179216705	0.028173957315846054
År	0.048856017843855765	0.03190285639471462	0.17819588363739824	0.2455473612958271

Tabell 4.3 – P-värden för Anderson-Darling, Cramér-von Mises, Jarque-Bera ALM och Pearson  $\chi^2$ -test för olika tidsintervaller av logaritmiska förändringar. Tabellen visar tydligt att sannolikheten för att förändringarnas fördelning kommer ifrån en geometrisk Brownsk rörelse ökar när vi ökar tidslängden för log-förändringarna.

Mantegna och Stanley (1995) visar att log-förändringarna på tidsskalan 1 minut – i deras studie av S&P 500 från 1984-89 – istället följer en potenslagsfördelning, närmare bestämt en Lévy-stabil fördelning med  $\alpha = 1.40 \pm 0.05$ . Skalningsexponenten,  $\alpha$ , var enligt dem förvånansvärt stabil under de sex åren som studerades. Potenslagar har också föreslagits tidigare av bl. a. Mandelbrot (1963) i hans nu berömda bomullsprisstudie och enligt Mandelbrot (2004) så kan användandet av potenslagar till ekonomiska data spåras ända bak till 1800-talet då Vilfredo Pareto (1896) studerade inkomstfördelningar. Mantegna och Stanley (2000) menar att summan av oberoende identiskt fördelade stokastiska processer,  $\sum_{i=1}^n x_i$ , som karaktäriseras av en täthetsfunktion med potenslagssvansar,

$$P(x) \sim x^{-(1+\alpha)}, \quad (4.10)$$

kommer att konvergera till en Lévy-stabil fördelning med index  $\alpha$  när  $n$  går mot oändligheten.

#### 4.1.2 Konstant volatilitet?

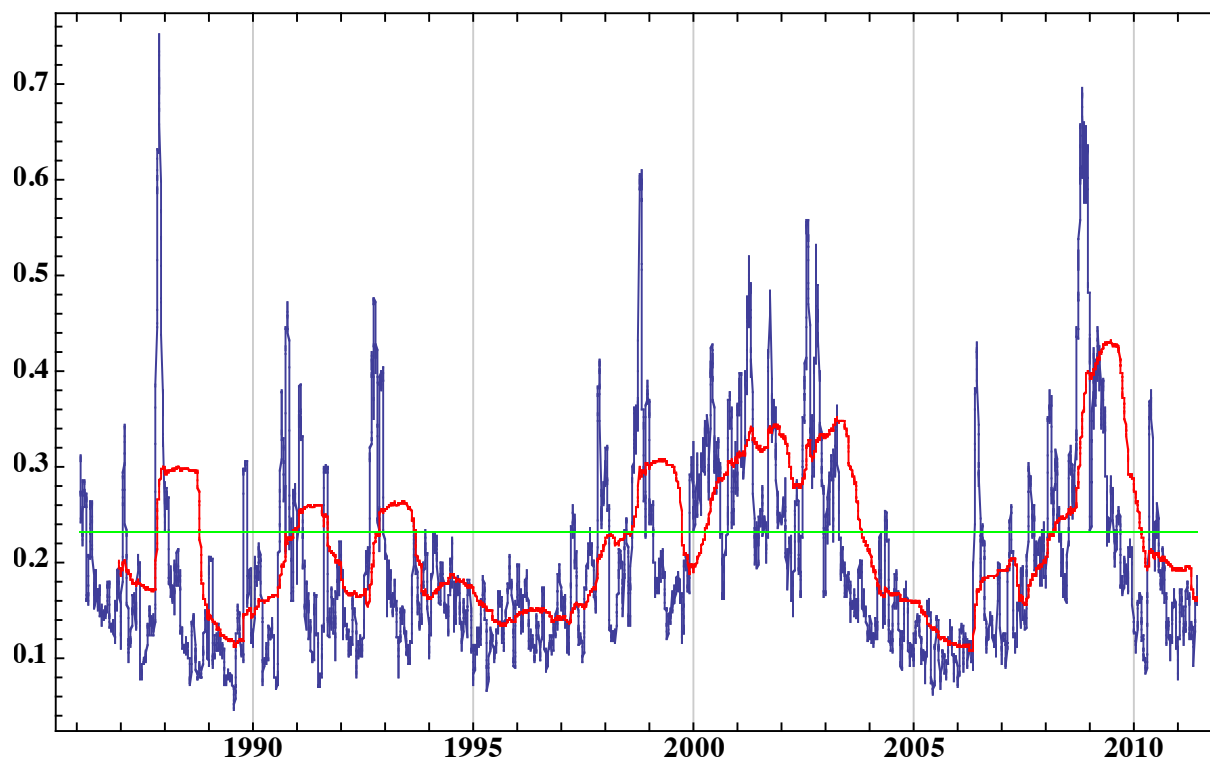
*”Suppose we use the standard deviation ... of possible future returns on a stock ... as a measure of its volatility. Is it reasonable to take that volatility as a constant over time? I think not.”*

— Fischer Black (1976)

En annan implikation av geometrisk Brownsk rörelse och en förutsättning för Black-Scholes-Merton-formeln är att volatiliteten är konstant. Men det visar sig att i verkliga finansiella marknader så är volatiliteten skiftande.

$$\text{Historisk volatilitet (på årsbasis)} = \sqrt{\frac{252}{T-1} \sum_{t=0}^{T-1} (R_t - \bar{R})^2}, \quad (4.11)$$

där  $R_t$  är den logaritmiska avkastningen, definierat som i ekvation (4.1).



Figur 4.8 – Månadsvis (i blått) och årsvis (i rött) rullande historisk volatilitet OMXS30 från februari 1986 till maj 2011. I grönt visas standardavvikelsen (år) för hela perioden.

Inte bara är volatiliteten inte konstant i verkliga marknader, även tidsperioden som den mäts i har avgörande betydelse. I Figur 4.8 visas månadsvis och årsvis rullande volatilitet. Det visar sig att på desto mindre skala vi mäter log-förändringarna så ökar volatiliteten (om man justerar alla till årsbasis). Volatiliteten från transaktion-till-transaktion-data kan vara mer än dubbelt så stor gentemot om man mäter den med dagliga log-förändringar (s. 106-107 i Taleb, 1997). Om log-förändringarna följer en Lévy-stabil fördelning vilket de verkade göra i Mantegna och Stanleys (1995) studie som nämndes tidigare, så är variansen oändlig om  $\alpha < 2$ , och i deras fall var ju  $\alpha$  som sagt 1,4.

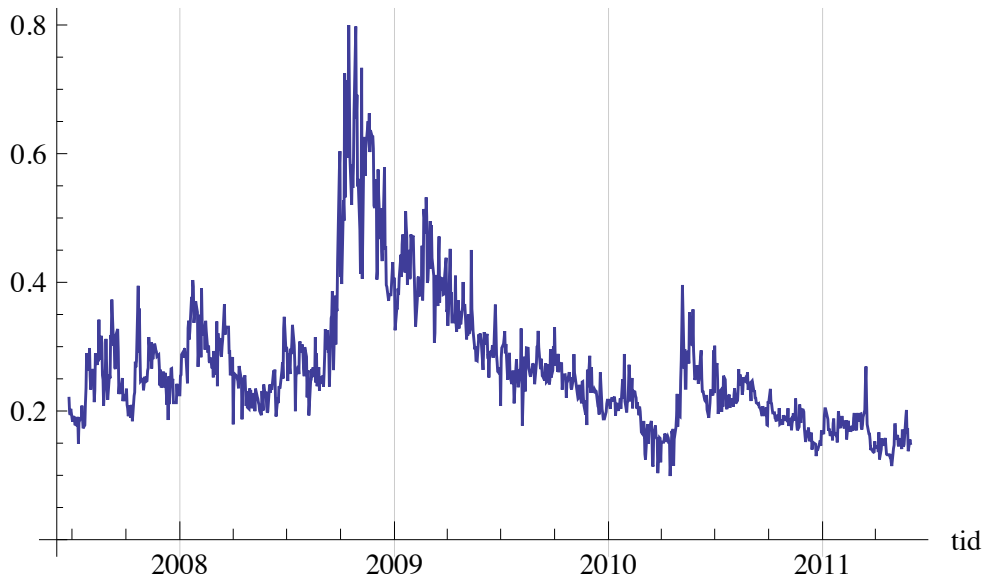
Det går att numeriskt lösa ut implicit volatilitet från Black-Scholes-Merton-formeln i ekvationerna (2.13) och (2.14) med hjälp av optionspriserna givna från marknaden (vilket är definitionen på implicit volatilitet). Detta kan göras exempelvis med Newton-Raphson<sup>9</sup>, eller så kan man använda sig av en inbyggd funktion i de flesta statistiska paketen. I Mathematica

<sup>9</sup> <http://mathworld.wolfram.com/NewtonsMethod.html>.

kan man använda den inbyggda symbolen FindRoot och i Excel kan man använda sig av solver eller goal seek.

I figur 4.9 är ett diagram över implicit volatilitet för köpoptioner med OMXS30 som underliggande. I figur 4.10 ser vi implicit volatilitet vid olika lösenpris. Datan är hämtad från Derivatinfo.com.

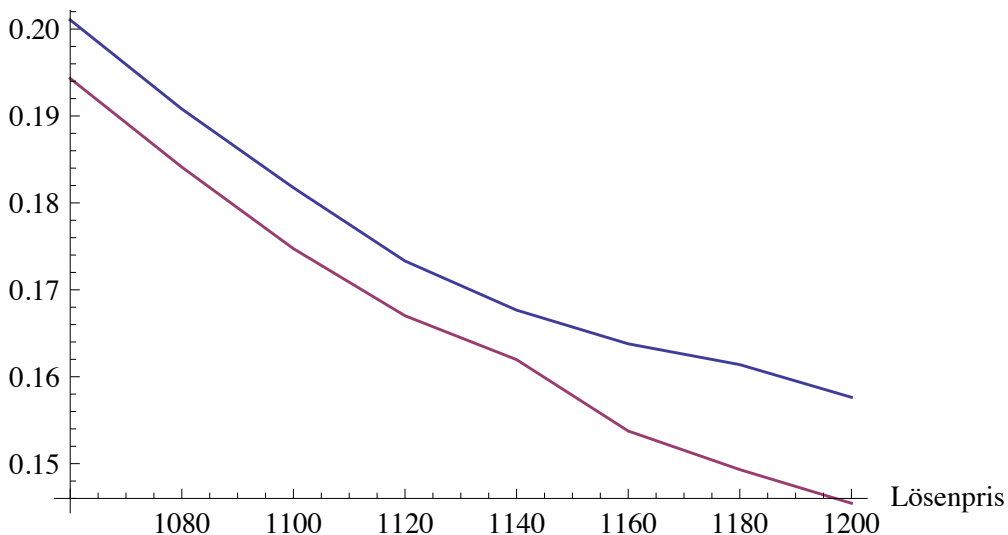
Implicit volatilitet



Figur 4.9 – Implicit volatilitet från OMXS30 köpoptioner, 2007-06-26 till 2011-05-31.

Marknadspriser från stängning 2011-07-29 (lösendag: 2011-09-16)

Implicit volatilitet



Figur 4.10 – Ett så kallat "volatility skew". Implicit volatilitet för olika lösenpris med samma lösendag för köpoptioner till OMXS30 2011-07-29. I blått har vi säljkursen och i lila köpkursen. Vi ser att det förekommer negativ skevhet.

Som figur 4.10 visar så ökar volatiliteten då lösenpriset minskas. Det kallas för ett ”volatility skew” och är även det inkompatibelt med Black-Scholes-Merton-antagandena. Det började enligt Hull (2009) först att uppträda på de amerikanska marknaderna efter kraschen 1987.

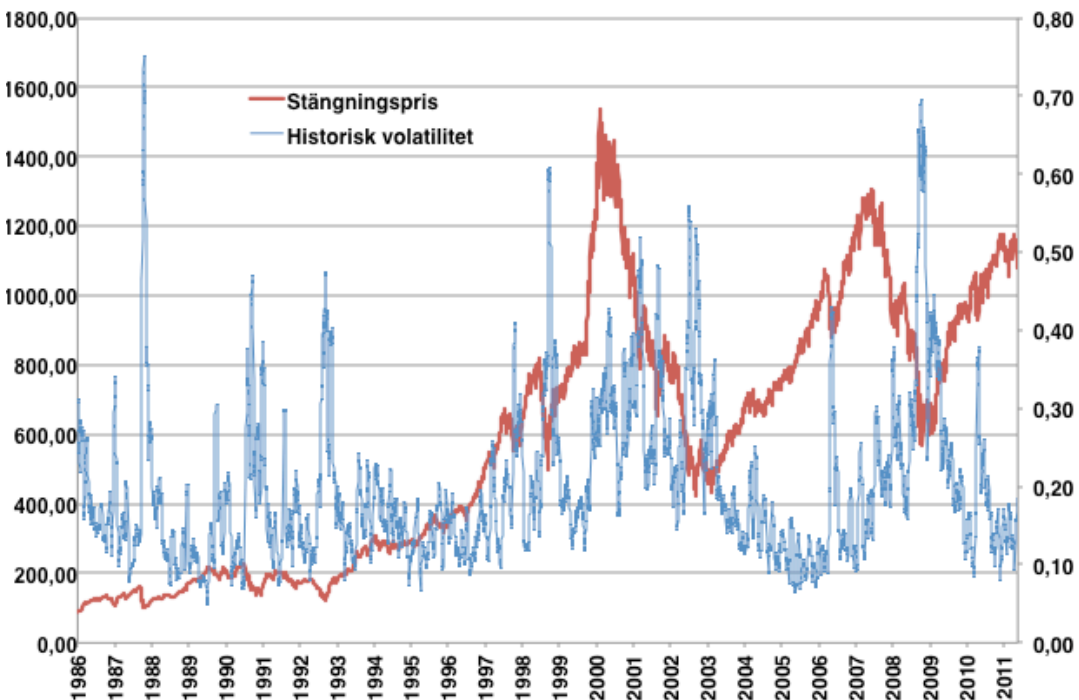
Vilken volatilitet man ska använda – historisk (även kallad faktisk) eller implicit – är fallberoende. Om man använder historisk volatilitet så måste man även avgöra vilken tidslängd man ska välja på log-förändringarna. Som vi såg i avsnitt 3 om grekerna så menar Haug (2003a) att historisk volatilitet är mer lämpad för  $D\gamma Dvol$  och i (2003b) menar han att implicit volatilitet är mest lämpad för  $Dvega Dvol$ .

# 5. Modeller med nivåberoende volatilitet

Vi har sett att volatiliteten i verkligheten inte är konstant, utan kan variera ganska kraftigt. Därmed håller inte Black-Scholes-Merton-modellen och vi måste försöka hitta något sätt att modellera volatilitetsförändringar. Ett tillvägagångssätt är att anta att volatiliteten  $\sigma$  är nivåberoende av - eller en funktion av - det underliggande priset. Det ger oss följande process:

$$dS = \mu S dt + \sigma(S) S dW \quad (5.1)$$

## 5.1 Constant elasticity of variance



Figur 15.1 – Stängningspris (i rött) och månadsvis rullande volatilitet (i blått) för OMXS30 från februari 1986 till maj 2011. Diagrammet är skapat i Excel med datan som användes i figur 4.1 och figur 4.8.

Constant Elasticity of Variance (CEV), är en diffusionsmodell som först härleddes av Cox (1975) och Cox och Ross (1976). Den bygger på idén att volatiliteten ofta varierar med negativ korrelation med priset på aktier, med andra ord att volatiliteten ökar då aktiepriset sjunker och vice versa. Volatiliteten  $\sigma(S)$  antas vara  $\sigma_0 S^{\alpha-1}$ .

Den risk-neutrala processen hos CEV beskrivs som:

$$dS = S(r - q)dt + \frac{\sigma}{S^{1-\alpha}} SdW \quad (5.2)$$

Där  $S$  är det underliggande priset,  $r$  är den riskfria räntan,  $q$  är utdelningsyielden,  $W$  är en Wienerprocess och  $\alpha$  är en volatilitetsparameter  $> 0$ , som kalibreras från marknadens data.

CEV-prissättningsformeln för europeiska köp- och säljoptioner (Hull, 2009) om  $0 < \alpha < 1$ :

$$C = S_0 e^{-qT} [1 - \chi^2(a, b + 2, c)] - Ke^{-rT} \chi^2(c, b, a) \quad (5.3)$$

$$P = Ke^{-rT} [1 - \chi^2(c, b, a)] - S_0 e^{-qT} \chi^2(a, b + 2, c) \quad (5.4)$$

Om  $\alpha > 1$ :

$$C = S_0 e^{-qT} [1 - \chi^2(c, -b, a)] - Ke^{-rT} \chi^2(a, 2 - b, c) \quad (5.5)$$

$$P = Ke^{-rT} [1 - \chi^2(a, 2 - b, c)] - S_0 e^{-qT} \chi^2(c, -b, a) \quad (5.6)$$

med

$$a = \frac{[Ke^{-(r-q)T}]^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2 v}, \quad b = \frac{1}{1-\alpha}, \quad c = \frac{S^2(1-\alpha)}{(1-\alpha)^2 v}$$

och där

$$v = \frac{\sigma^2}{2(r-q)(\alpha-1)} [e^{2(r-q)(\alpha-1)T} - 1]$$

och  $\chi^2(z, k, v)$  är den kumulativa sannolikheten att en variabel med en icke-central  $\chi^2$ -fördelning med icke-centralitetsparametern  $v$  och  $k$  frihetsgrader är mindre än  $z$ . För att räkna ut  $\chi^2(z, k, v)$  se Hull (2011).

Några specialfall är:

- Om  $\alpha = 0$  så blir den underliggande tillgångens pris normalfördelat.
- Om  $\alpha = 0.5$  så har vi specialmodellen Square Root Constant Elasticity of Variance (SRCEV), där volatiliteten varierar som den inversa kvadratroten av det underliggande priset. Processen tar då följande form:

$$dS = S(r - q)dt + S \frac{\sigma}{\sqrt{S}} dW \quad (5.7)$$

- Om  $\alpha = 1$  så blir processen en geometrisk Brownsk rörelse och den PDE vi får är Black-Scholes-Merton.

Om  $\alpha < 1$  så ökar volatiliteten då det underliggande priset sjunker. Enligt Hull (2009) så skapar detta en fördelning med en tjock vänster-svans och mindre tjock höger-svans och är liknande den som observeras hos aktier. Om  $\alpha > 1$  så ökar volatiliteten då det underliggande priset stiger. Detta ger enligt Hull (2009) en fördelning med tjock höger-svans och mindre tjock vänster-svans, vilket kan liknas vid det ”volatility smile” som uppstår om implicit volatilitet är en ökande funktion av det underliggande priset, vilket ibland kan observeras hos terminsoptioner.



# 6. Avslutning

---

## 6.1 Slutsats

När Stockholmsbörsens aktieindex undersöks så verkar det inte som att Black och Scholes antagande om geometrisk Brownsk rörelse uppfylls, eftersom normalitetstesterna pekar på en icke-normal fördelning för log-prisförändringarna och volatiliteten ej är konstant. Detta gör dock inte Black-Scholes-Merton-modellen oanvändbar, men man måste vara medveten om dess brister. Antagandet om konstant volatilitet kan förändras till att vara nivåberoende som i CEV eller så kan man använda sig av vegahedging för att minska på volatilitetsrisken.

## 6.2 Fortsatt forskning

Sedan Black och Scholes (1973) och Merton (1973) publicerades har det härletts en uppsjö av förlängningar och nya modeller. Problemet med volatil volatilitet har man försökt lösa på flertalet sätt, bl. a. genom nivåberoende volatilitet, som refererats till i denna uppsats. Andra lösningar som har presenterats inkluderar lokal volatilitet, stokastisk volatilitet (med eller utan hopp) samt rena hopp-modeller. Det har även börjats forska på filtreringsmodeller (se Javaheri, 2005) som försöker ge ett generellt och systematiskt sätt att kalibrera parametriska stokastiska volatilitetsmodeller till tidsserier. Javaheri föreslår att ny forskning kan göras på filtreringsmodeller under ett Bayesianskt ramverk samt även på icke-parametriska ansatser.

# Bibliografi

---

Anderson, T.W. (1962), "On the Distribution of the Two-Sample Cramer–von Mises Criterion", *The Annals of Mathematical Statistics*, årg. 33 nr. 3, s. 1148–1159, [http://projecteuclid.org/DPubS/Repository/1.0/Disseminate?view=body&id=pdf\\_1&handle=euclid.aoms/1177704477](http://projecteuclid.org/DPubS/Repository/1.0/Disseminate?view=body&id=pdf_1&handle=euclid.aoms/1177704477).

Anderson, T.W. & Darling, D.A. (1954). "A Test of Goodness-of-Fit", *Journal of the American Statistical Association*, nr 49, s. 765–769.

Andreason, J., Jensen, B. & Poulsen, R. (1998). "Eight Valuation Methods in Financial Mathematics: The Black–Scholes Formula as an Example". *Math. Scientist*. nr. 23, s.18–40.

Aristoteles. *Politiken*. Project Gutenberg: <http://www.gutenberg.org/files/6762/6762-h/6762-h.htm>. Läst 2011-05-07.

Bachelier, L. (1900). "Théorie de la spéculation", [fil. dok. avhandling i matematik], *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, s. III–17, 21–85. Återtryckt (i engelsk översättning) i *The Random Character of the Stock Market* (1964), MIT Press, Cambridge, MA, USA.

Björk, T. (2004), *Arbitrage Theory in Continuous Time*, andra upplagan, Oxford Scholarship Online (publicerad online oktober 2005), <http://www.oxfordscholarship.com.ludwig.lub.lu.se/oso/public/content/economicsfinance/9780199271269/toc.html> (gratis med STIL-konto). Läst 2011-08-09.

Black, F. (1976), "The Pricing of Commodity Contracts", *Journal of Financial Economics*.

Black, F. (1990). "Living Up to the Model". *Risk Magazine*, årg. 3, nr. 3, s. 11-13.

Black, F. & Scholes, M. (1973). "The pricing of options and corporate liabilities". *Journal of Political Economy*, årg. 81, nr. 3, s. 637-654. The University of Chicago Press.

Boness, A. (1964), "Elements of the Theory of Stock-Option Value", *Journal of Political Economy*, nr. 8, s. 259-282.

CBOE History, <http://www.cboe.com/AboutCBOE/History.aspx>. Läst 2011-08-03.

Chalamandaris, G. & Malliaris, A. G. (2008), "Itô's Calculus and the Derivation of the Black-Scholes Option-Pricing Model", working paper, finns tillgänglig online på SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1022386>.

Courtault, J., et al. (2000), "Louis Bachelier on the centenary of Théorie de la spéculation". *Mathematical Finance*, årg.10, nr.3 (July 2000), s. 341–353.

Cox, J. C. (1975), "Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions", publicerad artikel, Stanford University. Senare tryckt i Cox (1996).

Cox, J. C. (1996), "The Constant Elasticity of Variance Option Pricing Model", *Journal of Portfolio Management*, 22, s. 15-17.

Cox, J. C. & Ross, S. (1976), "The Valuation of Options for Alternative Stochastic processes", *Journal of Financial Economic*, nr. 3, s. 145-166.

de La Vega, J. (1688), *Confusión de Confusiones*. Återtryckt i Fridson, M (red.)(1996), *Extraordinary Popular Delusions and the Madness of Crowds & Confusión de Confusiones*, John Wiley & Sons, Inc, New York, USA.

Derman, E. & Taleb, N.N. (2005), "The illusions of dynamic replication", *Quantitative Finance*, årg. 5, nr. 4, augusti 2005, s. 323–326. Taylor & Francis.

Duffie, D. (2001), *Dynamic Asset Pricing*, tredje upplagan. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA.

Haug, E. (2003a), "The Collector: Know Your Weapon – Part 1", s. 23-41. Återtryckt i Wilmott, P. (red.)(2005), *The Best of Wilmott volume 2*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, Storbritannien.

Haug, E. (2003b), "The Collector: Know Your Weapon – Part 2", s. 43-57. Återtryckt i Wilmott, P. (red.)(2005), *The Best of Wilmott volume 2*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, Storbritannien.

Haug, E. (2006), *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*, andra utgåvan. McGraw-Hill, New York, USA.

Haug, E. (2007), *Derivatives: Models on Models*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, Storbritannien.

Haug, E. & Taleb, N.N. (2009), "Option Traders Use (Very) Sophisticated Heuristics, Never the Black-Scholes-Merton Formula", *Journal of Economic Behavior and Organization*, årg. 77, nr. 2, 2011.

Hull, J. C. (2009), *Options, Futures, and Other Derivatives*, sjunde utgåvan, internationell upplaga. Pearson Education North Asia Ltd., Hongkong. Första utgåvan publicerades 1988.

Hull, J. C. (2011), "The Calculation of the Cumulative Non-Central Chi Square Distribution", <http://www.rotman.utoronto.ca/%7Ehull/TechnicalNotes/TechnicalNote12.pdf>. Läst 2011-07-28.

Itô, K. (1951), "On stochastic differential equations", *Mem. Amer. Math. Soc.*, nr. 4, s. 1-51.

Javaheri, A. (2005), *Inside Volatility Arbitrage*. John Wiley & Sons, Inc.

Knoll, M. (2004), "Ancient Roots of Modern Financial Innovation: The Early History of Regulatory Arbitrage", working paper 49, University of Pennsylvania Law School.

Kungl. Vetenskapsakademien. *Pressmeddelande: Sveriges Riksbanks pris i ekonomisk vetenskap till Alfred Nobels minne (1997)*, [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/economics/laureates/1997/press-sv.html](http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1997/press-sv.html). Läst 2011-05-08.

Mangano, S. (2010). *Mathematica Cookbook*, O'Reilly Media, Inc., Sebastopol, CA, USA.

Mandelbrot, B. (1963). "The Variation of Certain Speculative Prices", *The Journal of Business*, årg. 36, nr. 4 (oktober 1963), s. 394-419.

Mandelbrot, B & Hudson, R. (2004), *The (Mis)behaviour of Markets*. Basic Books, USA.

Mantegna, R.C. & Stanley, H.E. (1995), "Scaling Behavior in the Dynamics of an Economic Index", *Nature*, nr. 376, s. 46-49.

Mantegna, R.C. & Stanley, H.E. (2000), *An introduction to Econophysics*. Cambridge University Press, Cambridge, Storbritannien.

Merton, R. C. (1973), "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science*, årg. 4, nr. 1, s. 141-183. The RAND Corporation.

Merton, R. C. (1977), "On the Pricing of Contingent Claims and the Modigliani-Miller Theorem", *Journal of Financial Economics*, årg. 5, nr. 2, s. 241-249. Finns tillgänglig på: <http://ideas.repec.org/a/eee/jfinec/v5y1977i2p241-249.html>.

Neftci, S. (2000), *Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press.

Neftci, S. (2008), *Principles of Financial Engineering*, andra upplagan, Academic Press.

Pareto, V. (1896), "Cours d'économie politique". Återtryckt i *Oeuvres Complètes* (1966), nr. I, Geneve, Schweiz.

Pearson (1900). "On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling", *Philosophical Magazine Series 5*, årg. 50, nr 302), s. 157–175.

Rosu, I & Stroock, D. (2004), "On the Derivation of the Black-Scholes Formula", *Seminaire de Probabilites*, nr. 37, s. 399-414. Finns tillgänglig på SSRN: <http://ssrn.com/abstract=710842>.

Samuelson, P. (1965), "Rational Theory of Warrant Pricing", *Industrial Management Review*, nr. 6, s. 13-31.

Shaw, W. T. (1998). *Modelling Financial Derivatives with Mathematica*. Cambridge University Press, Cambridge, Storbritannien.

Sprengle, H. (1961), "Warrant Prices as Indicators of Expectations and Preferences", *Yale Economics Essays*, nr. 1, s. 178-231. Finns även återtryckt i *The Random Character of the Stock Market* (1964), MIT Press, Cambridge, MA, USA.

Stephens, M. A. (1974), "EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons". *Journal of the American Statistical Association*, nr. 69, s. 730–737.

Taleb, N.N. (1997). *Dynamic Hedging: Managing Vanilla and Exotic Options*. John Wiley & Sons, Ltd, New York, USA.

Thorp, E. (1969), "Optimal Gambling Systems for Favorable Games", *Review of the International Statistics Institute*, nr. 37.

Thorp, E. & Kassouf, S. T. (1967), *Beat the Market*, Random House, New York, USA.

Wilmott, P. (2006). *Paul Wilmott On Quantitative Finance*, andra upplagan. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, Storbritannien.

Wilmott, P. (2007a). *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, Storbritannien.

Wilmott, P. (2007b). *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*, andra upplagan. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, Storbritannien.

Würtz, D. & Katzgraber, H. (2009), "Precise finite-sample quantiles of the Jarque-Bera adjusted Lagrange multiplier test", *Munich Personal RePEc Archive*, nr. 19155, <http://mpa.ub.uni-muenchen.de/19155>, Swiss Federal Institute of Technology, Zürich, Schweiz.