



LUNDS UNIVERSITET
Ekonomihögskolan

BEKK-MODELLENS EKONOMISKA VÄRDE I EN DYNAMISK PORTFÖLJSTRATEGI

David Grunditz

NEKM01 Examensarbete – magisternivå

Augusti 2011

Ekonomihögskolan
Lunds Universitet
Nationalekonomiska institutionen
Handledare: Hossein Asgharian

Abstract

This thesis will investigate the economic relationship between two multidimensional prediction models of the EWMA type and the BEKK type, which is a multivariate GARCH model.

The investigation is performed in a context of portfolio choices, where every model is connected to a dynamic portfolio strategy, which allocate the portfolio weights based on volatility timing. The EWMA model is straightforward to use, which is its main characteristic. The BEKK model is on the other hand complex in its compound, but GARCH models have several characteristics which are beneficial in financial contexts.

This investigation illustrates that the strategy using the BEKK model will present a higher Sharpe ratio than the EWMA based strategy. The economic value which an investor will give the BEKK model does not have to conform to the Sharpe ratio analysis, which this investigation also demonstrates. What is crucial for the economic value is the preferences the investor has to risk. If the investor has a low constant relative risk aversion, the BEKK model will present a positive economic value, which suggests that the BEKK model is the preferable one. In the opposite case, when the investor has a high constant relative risk aversion, the value presented by the BEKK model is negative, which then suggests that EWMA model is the preferable one.

Sammanfattning

Denna uppsats presenterar en utredning av det ekonomiska förhållande mellan två flerdimensionella prediktionsmodeller av typen EWMA och BEKK, som är en flerdimensionell GARCH-modell. Undersökningen görs i en portföljvalskontext där varje modell kopplas till en dynamisk portföljstrategi, som allokerar portföljvikterna utifrån volatility timing. EWMA-modellen är enkel att använda, vilket är dess stora styrka. BEKK-modellen är komplex att använda, men GARCH-modeller har egenskaper som är fördelaktiga i finansiella sammanhang. Undersökningen visar att strategin som använder BEKK-modellen får generellt högre Sharpe-kvot än den EWMA-baserade strategin. Undersökningen visar också att det ekonomiska värdet som en investerare ger BEKK-modellen inte behöver stämma överens med Sharpe-kvotsanalysen. Det avgörande för det ekonomiska värdet är investerarens förhållande till risk.

Har investeraren låg konstant relativ riskaversion får BEKK-modellen ett positivt ekonomiskt värde, vilket innebär att BEKK-modellen är bästa. Har i stället investeraren mycket hög konstant relativ riskaversion blir värdet negativt och BEKK-modellen är sämre än EWMA-modellen.

Definitioner

Δ	prediktionsmodellens ekonomiska värde	T	matristransponering
δ	investerarens absoluta riskaversion	$P_i(t)$	tillgångspris
γ	investerarens konstanta relativa riskaversion	\bar{R}_i	förväntad avkastning
$\eta(t)$	residual – avkastningen förändring mellan två tidsperioder	R_f	riskfri ränta
λ	EWMA-modellens decay rate	$R_i(t)$	nettoavkastning för tillgång i under period t
μ	matris med tillgångarnas förväntade avkastning	$\hat{R}_i(t)$	bruttoavkastning
σ_i^2, h_i^2	portföljvarians eller enskilda tillgångars varians.	SR_i	Sharpe-kvot
σ_{ij}	kovariansen mellan tillgång i och j	t	tidsperiod
$\Sigma(t), \mathbf{H}(t)$	varians-kovariansmatris	$U(W(t+1))$	investerarens nytta som en funktion av förmögenheten
ω	vektor med portföljvikter	$W(t)$	förmögenhet
ω	portföljvikt	$Z_p(t)$	överavkastning

Innehållsförteckning

1	INLEDNING	7
1.1.1	Mål, syfte och problembeskrivning	8
1.1.2	Genomförande	8
2	TEORI	11
2.1	Portföljvalsteori	11
2.1.1	Estimering av den optimala portföljen	14
2.2	Prediktion av varians-kovariansmatrisen	15
2.2.1	Flerdimensionell GARCH	16
2.2.2	BEKK-modellen	21
2.2.3	EWMA-modellen	24
2.3	Sharpe-kvoten	25
2.4	Nytta och det ekonomiska värdet av volatility timing	26
2.4.1	Den förväntade nyttan	26
2.4.2	Prediktionsmodellens värde	28
3	DEN EMPIRISKA UNDERSÖKNINGEN	30
3.1	Riskbärande tillgångar	30
3.1.1	Förväntad dagsavkastning	32
3.2	Risfri tillgång	32
3.3	Den empiriska studien	33
3.3.1	Antaganden och avgränsningar i den empiriska undersökningen	34
4	RESULTAT OCH ANALYS	36
4.1	De betingade varians-kovariansmatriserna	36

4.2	Portföljanslys	38
4.2.1	Avkastning	39
4.2.2	Volatilitet	41
4.2.3	Sharpe-kvoten	42
4.3	BEKK-modellens ekonomiska värde	43
4.4	Kuriosa	45
5	SLUTSATS OCH DISKUSSION	46
5.1	Diskussion	47
5.1.1	Flerdimensionell GARCH	48
5.1.2	Nettoavkastning och Bruttoavkastning	48
5.1.3	Prediktionsmodellerna	49
5.2	Framtida studier	50
APPENDIX A	DIAGRAM	51
APPENDIX B	MATLAB	54
B.1	Prediktion av den betingade varians-kovariansmatrisen	54
B.1.1	EWMA	54
B.1.2	BEKK som använder Kevin Shepards BEKK-implementation	55
B.2	Beräkning av portföljvikterna	56
B.3	Basis points – beräkning av den ekonomiska nyttan	57
APPENDIX C	REFERENSER	58

1 Inledning

För över 30 år sedan konstaterade Merton att det är svårt att prediktera tillgångars framtida avkastning men uppmuntrade till fortsatt forskning i ämnet [1]. Däremot anses det vara möjligt att prediktera tillgångars framtida volatilitet. I och med Engels lyckade ARCH-modell [2] i början 1980-talet, och Bollerslevs generalisering av den [3], har en uppsjö av volatilitetsmodeller och varianter utvecklats och idag finns ett stort spektrum av modeller.

I början av 1990-talet, ungefär tio år efter den ursprungliga ARCH-modellen, presenterades den första flerdimensionella ARCH/GARCH-modellen [4]. Flerdimensionella ARCH/GARCH-modeller är komplexa att använda och implementera i mjukvara med god matematisk precision, vilket kan vara en anledning till fortsatt forskning efter andra flerdimensionella volatilitetsmodeller. Därför har en investerare idag ett stort antal modeller att välja mellan.

Flerdimensionella prediktionsmodeller är användbara i portföljvalsstrategier som allokerar utifrån volatility timing, dvs. riskförändringar på marknaden. För att utvärdera portföljstrategier och prediktionsmodeller är det vanligt att använda statistiska analysverktyg, som utgår från portföljens statistiska egenskaper. Dessa verktyg tar inte hänsyn till investerarens preferenser och resultatet kan därmed avvika från dem. Ungefär samtidigt med den första flerdimensionella

ARCH/GARCH-modellen presenterade West, Edison och Cho [5] ett alternativ till statistisk utvärdering av prediktionsmodeller, som senare generaliserades av Fleming, Kirby och Ostdiek [6]. Metoden utvärderar prediktionsmodeller utifrån en investerares riskpreferenser och det ekonomiska värde som investeraren tillskriver prediktionsmodellerna. Flera olika studier [7, 8, 9, 10, 11, 12] har använt deras ramverk för att sätta ett ekonomisk värde på sina frågeställningar och modeller.

1.1.1 Mål, syfte och problembeskrivning

En investerare som har en dynamisk portföljstrategi, en strategi som tar hänsyn till volatilitetsförändringar över tid dvs. volatility timing, är beroende av en modell för att prediktera den betingade varians-kovariansmatrisen.

Fleming, Kirby och Ostdiek [6] konstaterade att det finns ett värde i att hänsyn tas till volatility timing med en flerdimensionell EWMA-modell för att prediktera den betingade varians-kovariansmatrisen. Men det anses att GARCH-modeller är speciellt lämpade att användas i finansiella sammanhang [13].

Vad innebär det att byta från en flerdimensionell EWMA-modell till en flerdimensionell GARCH-modell? Denna studie har som mål att undersöka om en flerdimensionell GARCH-modell, enligt BEKK, är bättre än en EWMA-modell i en portföljvalskontext med en dynamisk portföljstrategi. Erhålles en bättre Sharpe-kvot och överensstämmer den med det ekonomiska värde som en investerare med kvadratisk nytta värderar den till i förhållande den gamla modellen?

1.1.2 Genomförande

För att undersöka om BEKK-modellen är bättre än EWMA-modellen används Sharpe-kvoten samt den metod som West, Edison och Cho [5] och Fleming, Kirby och Ostdiek [6] utarbetat för att bestämma det ekonomiska värdet på en prediktionsmodell utifrån investerarens nyttofunktion. Alla beräkningar görs i MATLAB.

Undersökningen genomförs med portföljvalsteorin enligt mean-variance-teorin och det optimala portföljvalet. Studien använder verklig data som empiriskt underlag. De utgörs av två riskbärande tillgångar i form av två branschindex från OMX Stockholmsbörsen samt en STIBOR-ränta. På grund av BEKK-modellens komplexitet är studien avgränsad till endast två riskbärande tillgångar. Tillgångarnas tidsserier sträcker sig från 1998 till och med 2009.

Det praktiska genomförandet bygger på en riskavert investerare som står inför valet att eventuellt byta prediktionsmodell från EWMA-modellen till BEKK-modellen i sin portföljvalsstrategi. Portföljvalsstrategin är dynamisk, dvs. den tar löpande hänsyn till volatility timing. Strategins mål är att dagligen minimera portföljrisken i förhållande till en målavkastning. Målavkastning behövs för att investeraren inte enbart skall ha den riskfria tillgången i sin portfölj, när både blankning och belåning är tillåten. Strategin genomförs genom att predikterar morgondagens betingade varians-kovariansmatris, följt av att de optimala portföljvikterna bestäms inför nästa handelsdag. Efter nästa handelsdag beräknas avkastningsutfallet baserat på portföljvikterna. Denna procedur upprepas dagligen mellan 1999 och fram till och med 2009 för att skapa ett tillräckligt stort underlag för den fortsatta analysen. Eftersom det finns två prediktionsmodeller skapas två parallella avkastningsserier, en för varje prediktionsmodell enligt den ovan nämnda strategin.

Baserat på avkastningsserierna utvärderas prediktionsmodellerna genom Sharpe-kvoten och genom det ekonomiska värdet på BEKK-modellen i förhållande till EWMA-modellen. Detta värde är lika med den avgift en investerare är beredd att betala varje dag för att byta till BEKK-modellen från EWMA-modellen. Både Sharpe-kvoten och det ekonomiska värdet rapporteras per år och över hela perioden.

Uppsatsen är organiserad enligt följande: Kapitel två behandlar teorin för studien och bland annat prediktionsmodellerna samt hur en prediktionsmodells

ekonomiska värde beräknas. Kapitel tre redogör för den empiriska datan samt hur den empiriska undersökningen genomförts beträffande antaganden och avgränsningar. Kapitel fyra redogör för utfallet från den empiriska undersökningen. Det sista kapitlet behandlar undersökningens slutsatser samt efterföljande diskussion. I appendix finns extra diagram och väsentlig MATLAB-kod som använts i studien.

2 Teori

Ramverket som Fleming, Kirby och Ostdiek samt Chou och Liu [6, 12] använder innebär att varje prediktionsmodell för den betingade varians-kovariansmatrisen kopplas till var sin portfölj och investeringsstrategi. Investeringsstrategierna är adaptiva eller dynamiska och deras mål är att dagligen minimera portföljvariansen, σ_p^2 , i förhållande till en önskad dagsavkastning, $E[R_p] = \bar{R}_p$, inför nästa börsdag. Det innebär att den betingade varians-kovariansmatrisen, Σ_p , predikteras dagligen och att portföljvikterna, ω_p för den optimala portföljen beräknas. Den optimala portföljen är en optimal portfölj enligt mean-variance-kontexten.

Det som skiljer strategierna åt är modellerna som används för prediktion av den betingade varians-kovariansmatrisen. Den ena strategin använder sig av en EWMA-modell och den andra av en flerdimensionell GARCH-modell.

2.1 Portföljvalsteori

De enskilda tillgångarnas och portföljernas avkastning, $R_i(t)$, beräknas som den procentuella prisskillnaden mellan två på varandra följande handelsdagar enligt

$$R_i(t) = \frac{P_i(t)}{P_i(t-1)} - 1. \quad (2.1)$$

Antag en portfölj A bestående av N tillgångar och att portföljen är belägen på den effektiva fronten. Portföljens förväntade avkastning är

$$\bar{R}_A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i \bar{R}_i \quad (2.2)$$

där

$$\sum \omega_i = 1$$

och portföljvariansen

$$\sigma_A^2 = \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \quad \text{där } i \neq j. \quad (2.3)$$

Då inga restriktioner finns angående belåning införes en riskfri tillgång och genom att kombinera den med portfölj A skapas en ny portfölj P, vars avkastning blir

$$R_P = \omega_A R_A + (1 - \omega_A) R_f \quad (2.4)$$

och portföljvariansen blir

$$\sigma_P^2 = \omega_A^2 \sigma_A^2 + (1 - \omega_A)^2 \sigma_f^2 + 2\omega_A(1 - \omega_A) \sigma_A \sigma_f \rho_{Af} \quad (2.5)$$

Risikfria tillgångar har ingen risk, därav namnet, och därför är $\sigma_f^2 = 0$. Det innebär att portföljrisken σ_P^2 endast påverkas av portfölj A:s risk enligt

$$\sigma_P^2 = \omega_A^2 \sigma_A^2 \quad (2.6)$$

Genom att kombinera ekvation 2.4 och 2.6, och lösa ut portföljavkastningen, R_p , som en funktion av variansen fås

$$R_p = \frac{R_A - R_f}{\sigma_A} \sigma_P + R_f \quad (2.7)$$

Ekvation 2.7 visar tydligt att portföljavkastningen är en linjär funktion. Funktionen är portföljen P:s effektiva front och är en linje med lutningen

$$\frac{R_A - R_f}{\sigma_A} \quad (2.8)$$

vilken skär y-axeln i punkten $(0, R_f)$ och är tangent till portföljen A:s effektiva front. Finns portföljen, P, till vänster om portföljen A på P:s effektiva front innebär det ett sparande i den riskfria tillgången. Finns däremot P till höger om A innebär det belåning till den riskfria räntan R_f , se diagram 2.1.

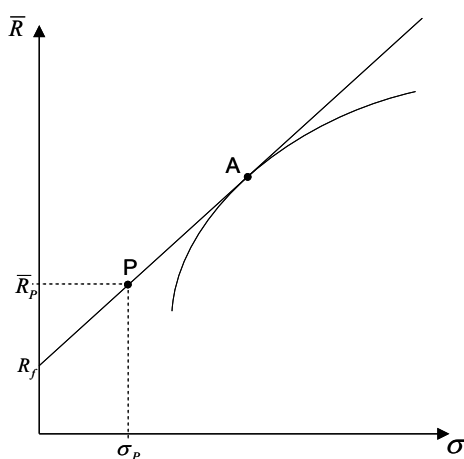


Diagram 2.1 Mean-Variance diagram. Diagrammet visar portfölj P:s effektiva front och hur denna front förhåller sig till den riskfria tillgången och portfölj A. Diagrammet visar även förhållande mellan den önskade förväntade avkastningen och portföljrisken.

Det är viktigt att notera, om en riskfri tillgång ingår i portföljen gäller att summan av alla riskbärande portföljvikter inte är lika med ett [14]. Däremot är summan ett om alla portföljvikterna adderas med den riskfria tillgångens vikt. Värt att notera är att oavsett vilka riskpreferenser investeraren har så kommer portföljen A alltid att ha samma portföljviktning.

2.1.1 Estimering av den optimala portföljen

Antag en riskavert investerare som har en önskad förväntad dagsavkastning, \bar{R}_p , som mål för sin investering. Som riskavert vill denne investerare ta minsta möjliga risk i förhållande till den önskade avkastningen. Matematiskt är det ett minimeringsproblem där det gäller att minimera σ_p^2 i förhållande till \bar{R}_p , enligt

$$\min_{\omega} \sigma_p^2 = \min_{\omega} \omega_p^T \Sigma \omega_p \quad (2.9)$$

i förhållande till

$$\omega_p^T \mu + (1 - \omega_p^T \mathbf{1}) R_f = \bar{R}_p \quad (2.10)$$

Där ω_p är en $N \times 1$ vektor med portföljvikter, μ är en vektor med tillgångarnas förväntade avkastning och Σ är den betingad varians-kovariansmatrisen. Målet med minimeringen är att finna den vektor, ω_p , som ger minsta möjliga portföljvarians i förhållande till den önskade avkastningen. Minimeringsproblemet löses genom att sätta in ekvation 2.9 och 2.10 i en Lagrange-funktion enligt

$$\zeta = \omega_p^T \Sigma \omega_p + \lambda (\bar{R}_p - \omega_p^T \mu - (1 - \omega_p^T \mathbf{1}) R_f) \quad (2.11)$$

och deriverar den med avseende på ω_p , samt sätta derivatan till noll [14]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \boldsymbol{\omega}_p} = 2\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}_p - \lambda(\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1}) = 0 \quad (2.12)$$

Genom att kombinera ekvation 2.12 med ekvation 2.10 i ett ekvationssystem och lösa ut $\boldsymbol{\omega}_p$ erhålles

$$\boldsymbol{\omega}_p = \frac{(\bar{R}_p - R_f)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1})}{(\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1})} \quad (2.13)$$

som är uttrycket för den optimala portföljens portföljvikter. Eftersom portföljstrategierna innebär att både portföljrisken minimeras och portföljvikterna justeras dagligen, blir $\boldsymbol{\omega}$ en funktion av tiden enligt

$$\boldsymbol{\omega}_p(t) = \frac{(\bar{R}_p - R_f(t))\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(t)(\boldsymbol{\mu} - R_f(t)\mathbf{1})}{(\boldsymbol{\mu} - R_f(t)\mathbf{1})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(t)(\boldsymbol{\mu} - R_f(t)\mathbf{1})} \quad (2.14)$$

För att slutligen bestämma den optimala portföljen, inför nästa handelsdag, skall den betingade varians-kovariansmatrisen bestämmas. Även vektorn med tillgångarnas förväntade avkastning måste bestämmas och den riskfria räntan finnas tillgänglig.

2.2 Prediktion av varians-kovariansmatrisen

I finansiella avkastningsserier varierar avkastningen över tiden. Hög positiv eller negativ avkastning, följs oftast av fortsatt liknande avkastning, vilket tyder på att finansiella avkastningsserier *bör* vara autokorrelerade [14]. Eftersom avkastningsserierna har denna egenskap innebär det att även volatiliteten kommer att vara högre under vissa perioder än under andra och dessa perioder kan ses som kluster med högre volatilitet. Klusterfenomenet benämns Volatility Clustering eller Volatility Pooling [13, 15].

Som tidigare nämnts finns flera olika modeller för att prediktera den betingade varians-kovariansmatrisen. Denna studie jämför två flerdimensionella modeller av typen GARCH (**G**eneralized **A**uto**R**egressive **C**onditional **H**eteroskedasticity) och EWMA (**E**xponentially **W**eighted **M**oving **A**verage). GARCH-modeller är speciellt lämpade att användas i samband med finansiella tidsserier [13] och har goda förutsättningar att hantera volatilitetskluster, då de tar hänsyn till både den långsiktiga såväl som den kortsiktiga varianstrenden samt den senaste informationsmängden på marknaden.

2.2.1 Flerdimensionell GARCH

Det finns flera olika typer av flerdimensionella GARCH-modeller (eller Multivariate GARCH) för att beräkna den betingade varians-kovariansmatrisen, $\mathbf{H}(t)$. Det är modeller som är en naturlig vidareutveckling av den endimensionella GARCH-modellen så som VECM och BEKK. Andra modeller är faktormodeller och modeller som är linjära och icke linjära kombinationer av endimensionell GARCH. Bauwens, Laurent och Rombouts [16], Kroner och Ng [17] samt Silvennoinen och Teräsvirta [18] analyserar och jämför flera olika kategorier av flerdimensionella GARCH-modeller i sina respektive artiklar. Artiklarna är läsvärda för den intresserade.

För att det skall vara lättare att förstå den flerdimensionell GARCH-modellen inleds teorin med den ursprungliga endimensionella GARCH-modellen, följd av teorin för den flerdimensionella modellen.

2.2.1.1 Endimensionell GARCH

Antag att avkastningen för period t kan beskrivas som en funktion av den förväntade avkastningen plus en stokastisk variabel, en residual, som representerar förändringarna i avkastningen. Det matematiska sambandet blir då

$$R(t) = \bar{R} + \eta(t) \tag{2.15}$$

Residualen är normalfördelad enligt

$$\eta(t) \in N(0, \sigma^2(t)) \quad (2.16)$$

Eftersom det rör sig om finansiella tidsserier är det troligt att det förekommer volatilitetskluster. Det innebär att residualen är autokorrelerad och därmed heteroskedastisk. Därför bör variansen modelleras utifrån detta förhållande. GARCH-modellen för den betingade variansen hanterar detta och modelleras enligt följande

$$\sigma^2(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \eta^2(t-1) + \beta_1 \sigma^2(t-1) \quad (2.17)$$

Modellen är en funktion av den långsiktiga genomsnittliga variansen, α_0 , föregående tidsperiods betingade varians, $\sigma^2(t-1)$, och den senaste informationsmängden $\eta(t-1)$ som till tillförts under den senaste perioden [13]. De tre parametrarna α_0 , α_1 och β_1 i ekvation 2.17 måste bestämmas innan GARCH-modellen går att använda. Estimeringen av dessa parametrar behandlas i avsnitt 2.4.1.1 nedan. GARCH-modellen har ett historiskt minne beträffande tidigare betingade varianser och det tydliggörs genom att i ekvation 2.17 utveckla $\sigma^2(t-1)$ termen

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= \alpha_0 + \alpha_1 \eta^2(t-1) + \beta_1 \sigma^2(t-1) \\ \sigma^2(t) &= \alpha_0 + \alpha_1 \eta^2(t-1) + \beta_1 (\alpha_0 + \alpha_1 \eta^2(t-2) + \beta_1 \sigma^2(t-2)) \\ \sigma^2(t) &= \alpha_0 + \alpha_1 \eta^2(t-1) + \beta_1 (\alpha_0 + \alpha_1 \eta^2(t-2) + \beta_1 (\alpha_0 + \alpha_1 \eta^2(t-3) + \beta_1 \sigma^2(t-3))) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Skrivs ovanstående uttryck om i summaform fås

$$\sigma^2(t) = \beta_1^3 \sigma^2(t-3) + \alpha_0 \sum_{i=1}^3 \beta_1^{i-1} + \alpha_1 \sum_{i=1}^3 \beta_1^{i-1} \eta^2(t-i) \quad (2.19)$$

och generaliseras uttrycket till de T senaste perioderna blir uttrycket

$$\sigma^2(t) = \beta_1^T \sigma^2(t-T) + \alpha_0 \sum_{i=1}^T \beta_1^{i-1} + \alpha_1 \sum_{i=1}^T \beta_1^{i-1} \eta^2(t-i) \quad (2.20)$$

Genom denna utveckling av ekvation 2.17 syns det även att äldre händelser får ett successivt minskat inflytande på den betingade variansen.

Ekvationen 2.17 betecknas GARCH(1, 1) och är den enklaste och vanligaste GARCH-funktionen. Ibland behövs det fler historiska residualer och betingade varianser för att få en bra skattning av den betingade variansen. Då är det *bara* att lägga till p tidigare residualer och q tidigare betingade varianser. Denna generella GARCH-modell betecknas GARCH(p, q), vilket står för en GARCH-funktionen med p laggade residualer och q laggade betingade varianser. Ekvationen blir

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= \alpha_0 + \alpha_1 \eta^2(t-1) + \dots + \alpha_q \eta^2(t-q) + \\ &+ \beta_1 \sigma^2(t-1) + \dots + \beta_p \sigma^2(t-p) = \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta^2(t-i) + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_i^2(t-i) \end{aligned} \quad (2.21)$$

GARCH-modellen har ingen borte gräns för hur många historiska residualer och betingade varianser som kan användas. Men med ökat antal historiska betingade varianser och residualer ökar GARCH-funktionens komplexitet och det medför ett ökat antal okända parametrar, som måste bestämmas innan GARCH-modellen går att använda. Med ökat antal okända parametrar blir estimeringen av dem tyngre.

2.2.1.2 Estimering av GARCH

Estimeringen av GARCH(p, q)-funktionens okända parametrar görs med maximum-likelihood-metoden. Det beror på att GARCH-modellens egenskaper omöjliggör vanlig OLS-estimering [15].

Antag ett stickprov, \mathbf{x} , med N värden som är beroende av ett antal parametrar. Dessa parametrar finns i vektorn $\boldsymbol{\theta}$. Täthetsfunktionen för x är $f(x; \boldsymbol{\theta})$. Är parametrarna, $\boldsymbol{\theta}$, okända måste de skattas, vilket görs genom att sätta upp en likelihood-funktion

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^N f(x_i; \boldsymbol{\theta}) = f(x_1; \boldsymbol{\theta}) \cdot f(x_2; \boldsymbol{\theta}) \cdot \dots \cdot f(x_N; \boldsymbol{\theta}) \quad (2.22)$$

och maximera den, med avseende på parametrarna, $\boldsymbol{\theta}$. Genom att maximera $L(\boldsymbol{\theta})$ med avseende på $\boldsymbol{\theta}$ erhålls de parametervärden som maximerar likelihood-funktionen. Parametrarna kallas för *ML-skattningen* av $\boldsymbol{\theta}$ och betecknas $\boldsymbol{\theta}^*$. ML-skattningen, $\boldsymbol{\theta}^*$, är de värden, som med högst sannolikhet, är de rätta värdena på de okända parametrarna i förhållande till det tagna stickprovet [19].

Det som står till buds för att finna de parametrar som maximerar likelihood-funktionen är i praktiken iterativa metoder. Det innebär att arbeta sig igenom parameterutrymmet efter den parameterkombination som maximerar likelihood-funktionen. Ett problem är, om likelihood-funktionen har lokala maximum, att det finns risk för förväxling mellan lokala maximum och funktionens maximum. Genom att använda första och andra derivatan, med avseende på $\boldsymbol{\theta}$, är det möjligt att finna och avgöra om det rör sig om funktionens maxvärde eller ett lokalt maxvärde.

För kända funktioner, t.ex. GARCH, som har okända parametrar som skall bestämmas med ML-skattning finns det program med färdiga funktioner som maximerar likelihood-funktionen och därmed bestämmer de okända parametrarna. Oftast behöves endast tidsseriedata och ett eventuellt initialvärde för att programmet skall finna parametrarna som maximerar likelihood-funktionen.

I ekonometriska sammanhang är det vanligt att logaritmera likelihood-funktionen 2.22, till en log-likelihood-funktion, $\ell(\boldsymbol{\theta})$,

$$\begin{aligned}\log L(\boldsymbol{\theta}) &= \log \prod_{i=1}^N f(x_i; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^N \log f(x_i; \boldsymbol{\theta}) = \\ &= \log f(x_1; \boldsymbol{\theta}) + \log f(x_2; \boldsymbol{\theta}) + \dots + \log f(x_N; \boldsymbol{\theta})\end{aligned}\quad (2.23)$$

och den maximeras på samma sätt som den vanliga likelihood-funktionen när parametrarna bestäms.

Sedan tidigare är det känt att residualen är normalfördelad med en tidsberoende varians

$$\eta(t) \in N(0, \sigma^2(t, \boldsymbol{\theta})) \quad (2.24)$$

och eftersom variansen modelleras som en GARCH-funktion är variansen även beroende av ett antal parametrar, $(\alpha_0, \dots, \alpha_p)$ och $(\beta_1, \dots, \beta_q)$, som samlats i vektorn $\boldsymbol{\theta}$. Parametrar måste bestämmas genom maximum-likelihood-metoden. Residualens täthetsfunktion är [14]

$$f(\eta(t); \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma(\boldsymbol{\theta})\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\eta^2(t)}{2\sigma^2(t, \boldsymbol{\theta})}} \quad (2.25)$$

och efter logaritmering av $f(\eta(t); \boldsymbol{\theta})$ blir den logaritmerade täthetsfunktionen

$$\begin{aligned}\ell(\eta(t); \boldsymbol{\theta}) &= \ln f(\eta(t); \boldsymbol{\theta}) = \ln \left(\frac{1}{\sigma(t, \boldsymbol{\theta})\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\eta^2(t)}{2\sigma^2(t, \boldsymbol{\theta})}} \right) = \\ &= -\ln \sigma(t, \boldsymbol{\theta}) - \ln \sqrt{2\pi} - \frac{\eta^2(t)}{2\sigma^2(t, \boldsymbol{\theta})} =\end{aligned}\quad (2.26)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \sigma^2(t, \boldsymbol{\theta}) - \ln \sqrt{2\pi} - \frac{\eta^2(t)}{2\sigma^2(t, \boldsymbol{\theta})}$$

Log-likelihood-funktionen för att skatta parametrarna, $\boldsymbol{\theta}$, blir

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}) = \ell(\eta(1); \boldsymbol{\theta}) + \ell(\eta(2); \boldsymbol{\theta}) + \dots + \ell(\eta(T); \boldsymbol{\theta}) = \quad (2.27)$$

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln \sigma^2(t, \boldsymbol{\theta}) - T \ln \sqrt{2\pi} - \sum_{t=1}^T \frac{\eta^2(t)}{2\sigma^2(t, \boldsymbol{\theta})} \quad (2.28)$$

Slutligen är det *bara* att maximera log-likelihood-funktionen med avseende på $\boldsymbol{\theta}$, för att erhålla ML-skattningen, $\boldsymbol{\theta}^*$, och göra GARCH-modellen användbar så att den betingade variansen går att estimeras. I den praktiska tillämpningen används med fördel färdiga programverktyg för GARCH.

Residualens tidsserie bestäms genom att beräkna skillnaden mellan period t 's avkastning och den förväntade avkastningen enligt $\eta(t) = R(t) - \bar{R}$.

2.2.2 BEKK-modellen

En av de första flerdimensionella GARCH-modellerna är VECH-modellen av Bollerslev, Engle och Wooldridge [20]. Det är en generell och relativt lättförståelig modell för beräkning av den betingade varians-kovariansmatrisen, $\mathbf{H}(t)$, se ekvation 2.28.

$$\text{vech}(\mathbf{H}(t)) = \boldsymbol{\Omega} + \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i \text{vech}(\mathbf{e}(t-i)\mathbf{e}^T(t-i)) + \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_j \text{vech}(\mathbf{H}(t-j)) \quad (2.28)$$

Det stora problemet med VECH-modellen är att det inte kan garanteras att $\mathbf{H}(t)$ -matrisen blir positivt definit. Det innebär att det finns risk för negativa variansvärden, vilket variansen aldrig kan anta. Lösning blev Baba, Engle, Kraft

och Kroners modell, BEKK-modellen, som garanterar att $\mathbf{H}(t)$ -matrisen är positivt definit. Modellen är utvecklad av Baba, Engle, Kraft och Kroner (därav namnet) i början av 1990-talet, men presenterades slutligen av Engle och Kroner 1995 [4]. Modellen är enligt följande

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(t) = & \mathbf{C}_0^\top \mathbf{C}_0 + \sum_{k=1}^K \mathbf{C}_{1k}^\top \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^\top(t) \mathbf{C}_{1k} + \\ & + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_{ik}^\top \boldsymbol{\varepsilon}(t-i) \boldsymbol{\varepsilon}^\top(t-i) \mathbf{A}_{ik} + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^p \mathbf{G}_{ik}^\top \mathbf{H}(t-i) \mathbf{G}_{ik} \end{aligned} \quad (2.29)$$

där \mathbf{C}_0 , \mathbf{A}_{ik} , \mathbf{G}_{ik} och $\mathbf{H}(t)$ är $n \times n$ matriser och \mathbf{C}_{1k} är en $J \times n$ matris. \mathbf{C}_0 är dessutom en triangulär matris. Termen $\sum_{k=1}^K \mathbf{C}_{1k}^\top \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^\top(t) \mathbf{C}_{1k}$ representerar ett exogent inflytande på varians-kovariansmatrisen och kan tas bort om ett sådant inflytande inte önskas. K -variabeln bestämmer hur generell BEKK-modellen skall vara. Modellen i ekvation 2.29 kan betecknas BEKK(p, q, k) [16]. Som tidigare nämnts i det endimensionella fallet är GARCH(1, 1) oftast fullt tillräcklig. Tillåts inget exogent inflytande samt att K sätts till ett, blir ekvation 2.29 enligt följande

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{C}_0^\top \mathbf{C}_0 + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\varepsilon}(t-1) \boldsymbol{\varepsilon}^\top(t-1) \mathbf{A} + \mathbf{B}^\top \mathbf{H}(t-1) \mathbf{B} \quad (2.30)$$

Det är en betydligt enklare ekvation än 2.29 och det är denna representation av modellen som ofta återfinns i litteratur.

Om endast två tillgångar finns i portföljen och de enskilda tillgångarnas ekvationer plockas ut ur ekvation 2.30 blir det lättare att se och förstå BEKK-modellens uppbyggnad. I ekvationerna 2.31, 2.32 och 2.33 nedan syns det tydligt vad som tillkommit i den flerdimensionella kontexten i förhållande till den endimensionella GARCH-modellen i ekvation 2.17.

$$h_{11}(t) = c + a_{11}^2 \varepsilon_1^2(t-1) + 2a_{11}a_{12} \varepsilon_1(t-1)\varepsilon_2(t-1) + a_{21}^2 \varepsilon_2^2(t-1) + \quad (2.31)$$

$$+ b_{11}^2 h_{11}(t-1) + 2b_{11}b_{21} h_{12}(t-1) + b_{21}^2 h_{22}(t-1)$$

$$h_{22}(t) = c + a_{12}^2 \varepsilon_1^2(t-1) + 2a_{12}a_{22} \varepsilon_1(t-1)\varepsilon_2(t-1) + a_{22}^2 \varepsilon_2^2(t-1) + \quad (2.32)$$

$$+ b_{12}^2 h_{11}(t-1) + 2b_{12}b_{22} h_{21}(t-1) + b_{22}^2 h_{22}(t-1)$$

$$h_{12}(t) = c + a_{11}a_{12} \varepsilon_1^2(t-1) + a_{12}^2 \varepsilon_2(t-1)\varepsilon_1(t-1) + \quad (2.33)$$

$$+ a_{11}a_{22} \varepsilon_2(t-1)\varepsilon_1(t-1) + a_{12}a_{22} \varepsilon_2^2(t-1) +$$

$$+ b_{11}b_{12} h_{11}(t-1) + b_{12}^2 h_{21}(t-1) +$$

$$+ b_{11}b_{22} h_{12}(t-1) + b_{21}b_{22} h_{22}(t-1)$$

Det tydligaste är att en kovariansekvation tillkommit utöver den extra variansekvationen. Dessutom har två nya termer, $\varepsilon_i(t-1)\varepsilon_j(t-1)$ och $h_{ij}(t-1)$, tillkommit i alla ekvationer och de representerar spillover-effekter mellan portföljtillgångarna.

Precis som i det endimensionella fallet är varianserna och kovariansen en funktion av den långsiktiga trenden, den kortsiktiga trenden, och den senast tillkomna informationsmängden samt dessutom spillover mellan tillgångarna.

Genom övergång till det flerdimensionella fallet ökar GARCH-modellens komplexitet, och den ökar snabbt med ökat antal tillgångar.

2.2.2.1 Estimering av BEKK

Precis som i det endimensionella fallet måste ett antal parametrar skattas innan BEKK-modellen kan användas. Det görs med max-likelihood-metoden. De okända \mathbf{C} , \mathbf{A} och \mathbf{B} matriserna representeras av $\boldsymbol{\theta}$ och genom att sätta upp log-likelihood-funktionen, $\ln L(\boldsymbol{\theta})$, och maximera den i förhållande till $\boldsymbol{\theta}$ erhålles ML-skattningen, $\boldsymbol{\theta}^*$, vilket är de värden som med högst sannolikhet är de rätta värdena för \mathbf{C} , \mathbf{A} och \mathbf{B} . Den flerdimensionella logaritmerade täthetsfunktionen för residualerna är

$$\ell(\boldsymbol{\eta}(t; \boldsymbol{\theta})) = -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln |\mathbf{H}(t; \boldsymbol{\theta})| - \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^\top(t; \boldsymbol{\theta}) \mathbf{H}^{-1}(t; \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\eta}(t; \boldsymbol{\theta}) \quad (2.34)$$

och log-likelihood-funktionen för BEKK-modellen blir

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{T \cdot N}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{H}(t; \boldsymbol{\theta})| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\eta}^\top(t; \boldsymbol{\theta}) \mathbf{H}^{-1}(t; \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\eta}(t; \boldsymbol{\theta}) \quad (2.35)$$

Att maximera ekvation 2.35 och erhålla ML-skattningen i denna flerdimensionella kontext är inte enkelt. Enklast är att använda ett befintligt programpaket som erbjuder funktionalitet för flerdimensionell GARCH. Dessa paket är inte vanliga och det beror troligen på svårigheter med att implementera en effektiv och tillförlitlig algoritm för estimeringen. Den empiriska studien i MATLAB använder Kevin Sheppards [21] implementation av BEKK-modellen som återfinns i Kevin Sheppards UCSD Toolbox.

2.2.3 EWMA-modellen

En betydligt enklare modell än BEKK-modellen för att beräkna den betingade varians-kovariansmatrisen är EWMA-modellen (**E**xponentially **W**eighted **M**oving **A**verage). Modellen viktar varje sampel i tidsserien exponentiellt, så att nyare sampel får en högre vikt än äldre sampel. Det innebär att senare händelser får ett större inflytande på den betingade varians-kovariansmatrisen än vad äldre får.

Studien använder sig av Brooks [15] EWMA-modell som är enligt följande

$$\hat{\sigma}_{ij}^2(t) = \frac{1-\lambda}{\lambda} \sum_{k=0}^K \lambda^k \left((R_i(t-k) - \bar{R}_i) (R_j(t-k) - \bar{R}_j) \right) \quad (2.36)$$

där

$$\frac{1-\lambda}{\lambda} \lambda^k \quad (2.37)$$

är den exponentiella viktningen av samplena och decay raten, λ , representerar hur snabbt ett sampels inflytande på det slutliga resultatet avtar med tiden. λ kan estimeras separat, men Risk Metrics rekommenderar värdet 0.94. Dock antas avkastningens väntevärde vara noll [15].

Ekvation 2.36 är också prediktionen av alla framtida perioders betingade varians och kovarians [15] enligt

$$\hat{\sigma}_{ij}^2(t+l) = \hat{\sigma}_{ij}^2(t) \quad \text{för} \quad l = 1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (2.38)$$

2.3 Sharpe-kvoten

Förhållande mellan portföljers överavkastning och standaravvikelse kan användas för att ranka portföljer. Den portfölj med högst Sharpe-kvot är den som är *bäst* och skall väljas av en rationell investerare. Sharpe-kvoten mäter förhållandet mellan en portföljs genomsnittliga överavkastning och dess risk enligt

$$SR_p = \frac{E[R_p] - R_f}{\sigma_p} \quad (2.39)$$

Eftersom Sharpe-kvoten är lutningen på linjen som utgår från R_f och går genom portföljen P , så kommer därmed alla portföljer som ligger på denna linje att ha samma Sharpe-ratio, se diagram 2.1.

Överavkastningen, $Z_p(t)$, beräknas som differensen mellan portföljens avkastning och en referensavkastning [14]. Referensavkastningen är oftast den riskfria räntan. Den dagliga överavkastningen är

$$Z_p(t) = R_p(t) - R_f(t) \quad (2.40)$$

och den dagliga genomsnittliga överavkastningen blir därmed

$$\bar{Z}_p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z_p(k) \quad (2.41)$$

där N är antalet handelsdagar. Sharpe-kvoten blir därmed

$$SR_p = \frac{\bar{Z}_p}{\sigma_p} \quad (2.42)$$

2.4 Nyttan och det ekonomiska värdet av volatility timing

Ett alternativ till statistiska metoder, för utvärdering av prediktionsmodeller för varians, är att använda investerarens nyttofunktion och studera den erhållna nyttan och det ekonomiska värdet som olika prediktionsmodeller ger. Det finns en koppling mellan mean-variance-kontexten och kvadratisk nytta. Därför är det naturligt att utgå från detta samband. West, Edison och Cho var bland de första som utgick från mean-variance-teorin och kombinerade den med en investerarens kvadratiske nyttofunktion för att utvärdera prediktionsmodeller för varians [5, 12]. En central del i mean-variance-teorin är den betingade varians-kovariansmatrisen och därför är det lämpligt att kombinera den med kvadratisk nytta vid utvärdering ur ett nyttoperspektiv. Den prediktionsmodell som i genomsnitt ger högre förväntad nytta är bättre än de som ger mindre. Detta var grundtanken. Wests, Edisons och Chos metoden generaliserades av Fleming, Kirby och Ostdiek [6]. Denna generalisering och varianter av den, har sedan använts i olika artiklar inom prediktion och volatility timing [7, 8, 9, 10, 11, 12] och används även i denna studie enligt nedan.

2.4.1 Den förväntade nyttan

Antag att en mean-variance investerare har en kvadratisk nyttofunktion enligt

$$U(W(t+1)) = W(t) \cdot \hat{R}_i(t+1) - \frac{\delta}{2} W^2(t) \cdot \hat{R}_i^2(t+1) \quad (2.43)$$

där $W(t+1)$ är investerarens förmögenhet vid tidpunkten t . δ är investerarens absoluta riskaversion och $\hat{R}_i(t+1)$ är portföljen i 's bruttoavkastning, dvs. $\hat{R}_i(t+1) = 1 + R_i(t+1)$ [5, 8]. Genom att låta $\delta \cdot W(t)$ vara konstant blir investerarens relativa riskaversion konstant

$$\gamma(t) = \frac{\delta \cdot W(t)}{1 - \delta \cdot W(t)} = \gamma \quad (2.44)$$

vilket gör det lätt att jämföra portföljer ur ett nyttoperspektiv [6]. Löses $\delta \cdot W(t)$ ut ur ekvation 2.44 erhålles

$$\delta \cdot W(t) = \frac{\gamma}{1 + \gamma}. \quad (2.45)$$

Sätts ekvation 2.45 in i ekvation 2.43 erhålles följande uttryck för den kvadratiska nyttofunktionen

$$U(W(t+1)) = W(t) \cdot \hat{R}_i(t+1) - \frac{\gamma}{2 \cdot (1 + \gamma)} W(t) \cdot \hat{R}_i^2(t+1) \quad (2.46)$$

Genom den genomsnittliga nyttan (average realized utility) är det möjligt att bestämma den förväntade nyttan (expected utility) baserad på en given initialförmögenhet W_0 [6] enligt

$$\bar{U}_i(\cdot) = \sum_{t=1}^T \left(\hat{R}_i(t+1) - \frac{\gamma}{2(1+\gamma)} \hat{R}_i^2(t+1) \right) \quad (2.47)$$

Ekvationen är den förväntade nyttan för portfölj i över T perioder. Observera att W_0 inte finns kvar i ekvationen eftersom initialförmögenheten, W_0 , antas vara ett.

Ekvation, 2.47, förekommer även som förväntad nytta per period och är då dividerad med T [7, 11].

2.4.2 Prediktionsmodellens värde

Det mest intuitiva sättet att utvärdera prediktionsmodeller är, att den modell som ger högst nytta är bättre än den som ger lägre nytta. Detta speglar inte det ekonomiska värdet mellan modellerna. West, Edison och Cho samt Fleming, Kirby och Ostdiek [5, 6] definierar det ekonomiska värdet som det värde en investerare är beredd att maximalt betala för att byta från en sämre prediktionsmodell till en bättre.

Antag att prediktionsmodell B ger högre nytta än prediktionsmodell A

$$\bar{U}_B(\cdot) > \bar{U}_A(\cdot) \quad (2.48)$$

Den maximala avgift, Δ , investeraren är beredd att betala för att använda modell B är den avgift som gör investeraren indifferent mellan prediktionsmodellerna. Avgiften kommer att belasta modell B:s portföljavgkastning genom att $\hat{R}_i(t+1)$ ersätts med $\hat{R}_i(t+1) - \Delta$ och därmed blir ekvationen enligt följande

$$\sum_{t=1}^T \left(\hat{R}_B(t+1) - \Delta - \frac{\gamma}{2(1+\gamma)} \cdot (\hat{R}_B(t+1) - \Delta)^2 \right) = \sum_{t=1}^T \left(\hat{R}_A(t+1) - \frac{\gamma}{2(1+\gamma)} \cdot \hat{R}_A^2(t+1) \right) = \bar{U}_A(\cdot) \quad (2.49)$$

Löses Δ ut ur ekvationen erhålls uttrycket, ekvation 2.50, för den maximala avgift en investerare är villig att betala för att byta till modell B

$$\Delta = \frac{2 \cdot a \sum_{t=1}^T [\hat{R}_B(t+1)] - T}{2aT} \pm \sqrt{\left(\frac{2 \cdot a \sum_{t=1}^T [\hat{R}_B(t+1)] - T}{2aT} \right)^2 + \frac{\bar{U}_B(\cdot) - \bar{U}_A(\cdot)}{aT}} \quad (2.50)$$

där

$$a = \frac{\gamma}{2(1+\gamma)} \quad (2.51)$$

Δ är den maximala avgift per dag eller tidsperiod som investeraren är beredd att betala för att byta till B. Avgiften är en andel av förmögenheten som investeras och anges som basis points [6]. Den maximala avgiften kan i teorin användas för att prissätta portföljtjänster som finansbolag erbjuder en investerare. Bolag med en bättre prediktionsmodell kan ta ut en högre avgift i förhållande till bolag med en sämre modell utan att investerarens nytta blir lägre.

3 Den empiriska undersökningen

Investeringsperioden är från 1 januari 1999 till och med 31 december 2009. Eftersom prediktionsmodellerna använder ett års historiskt minne vid prediktion av de betingade varians-kovariansmatriserna ingår också 1998. Därför sträcker sig tidsserierna från början av 1998 till slutet av 2009, dvs. 12 år. Det betyder att perioden inkluderar två kriser, IT-kraschen och subprime-krisen eller finanskrisen.

3.1 Riskbärande tillgångar

De riskbärande tillgångarna representeras, av praktiska skäl, av två sektorsindex från NASDAQ OMX Stockholmsbörsen. Indexen är OMX Stockholm Energy PI (SX1010PI) och OMX Stockholm Information Technology PI (SX45PI). De har ett flertal volatilitetskluster under perioden med högre volatilitet, se diagram A.1 A.2, A.3 och A.4. Tidsseriedatan är hämtad från NASDAQ OMX Stockholms börsens WEB-sida. Indexen är av prisindextyp, och för dem gäller att eventuell aktieutdelning från underliggande aktier inte återinvesteras. Det innebär att indexen endast återspeglar aktiernas kursrörelser [22]. Studien betraktar och hanterar indexen som om de vore vanliga aktier som handlas på en börs. Indexens genomsnittliga dagsavkastning, varians och korrelation varierar kraftigt mellan

åren, se tabell 3.1. Båda indexen har fem år (ej samma år) med negativ förväntad dagsavkastning.

NASDAQ OMX Stockholm	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Förväntad dagsavkastning [%]												
Energy PI, SX1010PI	-0,34	0,14	-0,06	0,40	-0,02	0,31	0,11	0,37	0,09	-0,04	-0,17	0,24
Information Technology PI, SX45PI	0,18	0,44	-0,04	-0,16	-0,51	0,29	0,19	0,12	0,02	-0,18	-0,08	0,08
Dagsavkastningens varians												
Energy PI, SX1010PI	15,46	9,49	12,14	16,34	6,30	5,56	5,14	3,49	6,53	2,66	14,23	7,08
Information Technology PI, SX45PI	10,07	6,10	13,02	18,36	22,18	9,85	6,10	1,75	2,45	4,39	10,02	4,54
Skewness												
Energy PI, SX1010PI	0,76	0,85	1,46	1,18	0,63	0,63	-0,07	0,17	0,51	-0,36	-0,34	0,19
Information Technology PI, SX45PI	0,37	0,59	-0,11	-0,02	0,32	0,33	0,52	-0,38	-0,15	-4,11	0,27	-0,01
Korrelation mellan Energy PI och Information Technology PI												
Korrelation	0,38	0,05	0,18	0,15	-0,01	0,15	-0,02	0,19	0,48	0,31	0,46	0,40

Tabell 3.1 Tabell över årsvis förväntad dagsavkastning, varians och korrelation.

Korrelationen är generellt svagt positiv, men under två år ligger den precis under nollnivån. Dessa år, 2002 och 2004 samt 1999 med en korrelation strax över noll, bör betraktas som år med obefintlig korrelation. Högst är korrelationen åren 2006 och 2008, med värden strax under 0.5, vilket inte räknas som stark korrelation, se tabell 3.1 och diagram 3.1.

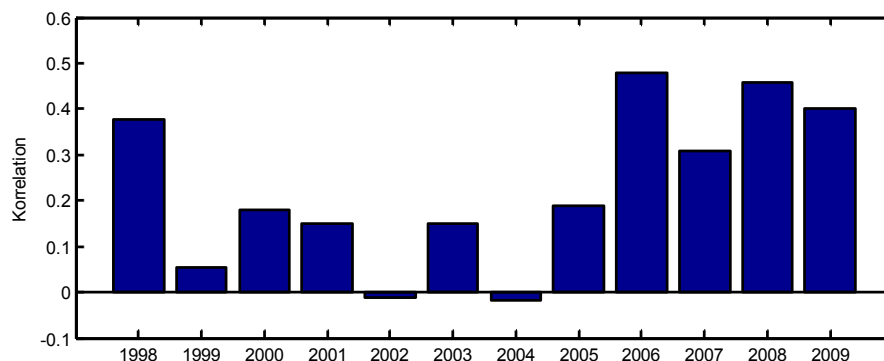


Diagram 3.1 Dagsavkastningens korrelation mellan NASDAQ OMX Stockholm Energy PI (SX1010PI) och Information Technology PI (SX45PI)

3.1.1 Förväntad dagsavkastning

Indexens förväntade dagsavkastning är 0.087 % respektive 0.030 %. Värdena är estimerade genom bootstrap-skattning av avkastningsseriernas medelvärden. Totalt har 100 000 bootstrap-skattningar genomförts och tabell 3.2 nedan visar resultatet inklusive konfidensintervallet. Dessa värden används i den empiriska undersökningen som tillgångarnas förväntade dagsavkastning för nästa handelsdag pga. att det är svårt att prediktera den betingade avkastningen.

NASDAQ OMX Stockholm	E[R]%	95% konfidensintervall
Energy PI (SX1010PI)	0,087	(-0,017; 0,193)
Information Technology PI (SX45PI)	0,030	(-0,078; 0,137)

Tabell 3.2 Indexens förväntad dagsavkastning skattat med bootstrapping.

3.2 Riskfri tillgång

Som riskfri tillgång används STIBOR T/N (Stockholm Interbank Offered Rate Tomorrow Next), se diagram 3.2. STIBOR-räntor är de räntor banker betalar vid lån mellan varandra och finns med olika löptid. Den kortaste, T/N, har en löptid om ett dygn, och den längsta en löptid om 12 månader. T/N har den speciella egenskapen att räntan gäller från och med i morgon till i över morgon. Därför är denna ränta speciellt lämpad i den empiriska undersökningen eftersom strategierna dagligen viktas om portföljerna och sedan låter dem vara intakta

under nästa handelsdag samtidig som T/N-räntan gäller. Efter denna handelsdags slut viktas portföljen åter om och en ny T/N-ränta tar vid.

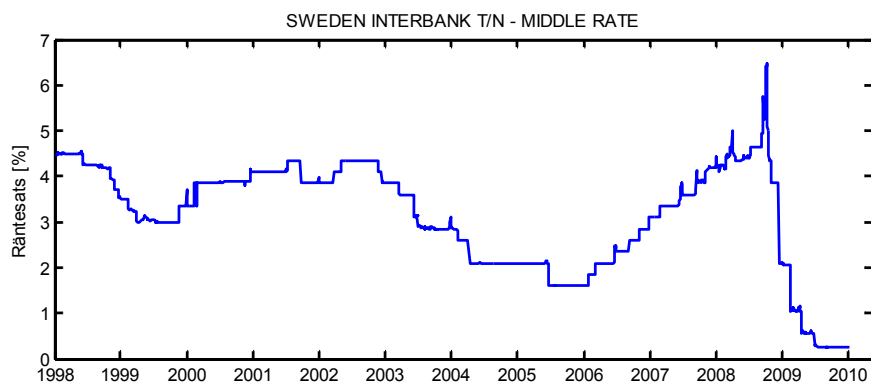


Diagram 3.2 Tidsserier för STIBOR T/N mellan 1998 och 2010.

Eftersom STIBOR räntor används mellan bankerna avviker den från Riksbankens reporänta beträffande stabilitet. Diagram 3.2 visar att räntesatsen ibland fluktuerar mellan dagarna, vilket inte Riksbankens reporänta gör. Fluktuationen speglar verkligheten då en ökad oro på marknaden tenderar att få räntesatserna att variera. I synnerhet mellan juli 2007 och juli 2009, två år under finanskrisen med hård press på de finansiella aktörerna, syns tydligt flera snabba räntespikar i räntekurvan, se diagram 3.2.

En marknadsaktör kan i praktiken inte komma åt stabila räntor som Riksbankens reporänta utan är hänvisad till de räntor som finns på marknaden. Därför är det lämpligt att använda STIBOR som den riskfria räntan i den empiriska undersökningen. Tidsserien för STIBOR T/N är hämtad från DATASTREAM och från NASDAQ OMX Stockholms börsens WEB-sida.

3.3 Den empiriska studien

Den empiriska studien görs i MATLAB (se Appendix B för MATLAB-kod) utifrån den teori som presenterats i kapitel 2. För att genomföra den empiriska studien definieras två strategier med tillhörande portföljer, en för varje volatilitetsmodell.

3.3.1 Antaganden och avgränsningar i den empiriska undersökningen

Alla transaktioner görs på en friktionsfri marknad, dvs. inga transaktionsavgifter eller skatter förekommer. Vidare antas det att investeraren inte har några restriktioner angående blankning och belåning.

3.3.1.1 Tillgångarnas förväntade dagsavkastning

Som tidigare nämnts, konstaterade Merton [1] att det finns svårigheter att prediktera en tillgångs framtida avkastning. Därför hanteras de icke riskfria tillgångarnas förväntade dagsavkastning som konstanter med samma värde över hela perioden. Konstanterna bestäms genom bootstrapping av avkastningsseriernas medelvärde, se även kapitel 3.1.1 ovan.

3.3.1.2 Förväntad portföljavkastning

Det ramverk, som studien utgår ifrån, bygger på en portfölj bestående av en riskfri tillgång och ett antal icke riskfria tillgångar. Det innebär att den effektiva fronten är en rät linje som utgår från den riskfria räntan och tangerar portföljen med de icke riskfria tillgångarna. För att det skall vara möjligt att minimera portföljvariansen i denna kontext måste en målavkastning för portföljernas årsavkastning definieras. Värdet sätts till 15 % per år, motsvarande 0.06 % per dag.

3.3.1.3 Handelsdagar och historiskt minne

Utifrån de empiriska data som används framgår att det i genomsnitt är 250 handelsdagar per år. Därför antas antalet handelsdagar vara 250 dagar per år. En komplikation i den empiriska undersökningen är att antalet handelsdagar på depositmarknaden motsvarar antalet kalenderdagar per år. För att det skall vara enkelt att genomföra en empirisk studie jämkas börshandelsdagar och depositmarknadens handelsdagar ihop genom att den riskfria räntan delas med 365 (dagar) för att erhålla dagslåneräntan. Sedan ignoreras helger och andra dagar

då aktiebörsen har stängt, vilket innebär att dagslåneräntan hanteras som om den endast handlas på 250 dagar.

I det teoretiska planet kan EWMA- och BEKK-modellen ha oändligt historiskt minne. I en verklig tillämpning är detta inte alltid möjligt. Därför begränsas det historiska minnet till ett år, dvs. 250 handelsdagar. Dock har 1998 endast 249 handelsdagar vilket betyder att första beräkningen av de betingade varians-kovariansmatriserna endast har ett historiskt minne på 249 dagar. För några enstaka dagar kan inte MATLAB hitta en lösning vid estimeringen av BEKK-modellen. Problemet löses genom att för dessa dagar ändra det historiska minnet till 249 dagar.

4 Resultat och analys

Resultatet från den empiriska undersökningen analyseras och delas upp på flera sätt. Analysen börjar med själva prediktionerna av de betingade varians-kovariansmatriserna, följt av portföljstrategiernas avkastning och volatilitet och avslutas med Sharpe-kvoten och BEKK-modellens ekonomiska värde.

4.1 De betingade varians-kovariansmatriserna

Prediktionerna av de betingade varians-kovariansmatriserna med EWMA och BEKK modellerna från 1999 till och med 2009 är trendmässigt lika, se diagrammen 4.1 och 4.2.

Diagrammen visar att tidsserierna för EWMA-modellens prediktion är *mjukare* och saknar den spikaktiga karaktär som BEKK-modellens predikterade tidsserier har. Orsaken är att BEKK-modellen reagerar snabbare än EWMA-modellen på portföljtillgångarnas riskförändringar. EWMA-modellens tröghet beror på att det finns en förhållandevis stor inbyggd filtereffekt. Den förhindrar att de senaste händelserna får samma stora inflytande på den betingade varians-kovariansmatrisen som händelserna har hos BEKK-modellen. En annan skillnad mellan modellerna är, att när portföljtillgångarnas risk stiger, predikterar BEKK-modellen ofta högre och ibland mycket högre risk än EWMA-modellen. Som exempel vid årsskiftet 2002 predikterar BEKK-modellen en varians för Energy PI

på 209 mot EWMA-modellens 60. Detta visar också att EWMA-modellen filtrerar senare händelser kraftigare än vad BEKK-modellen gör.

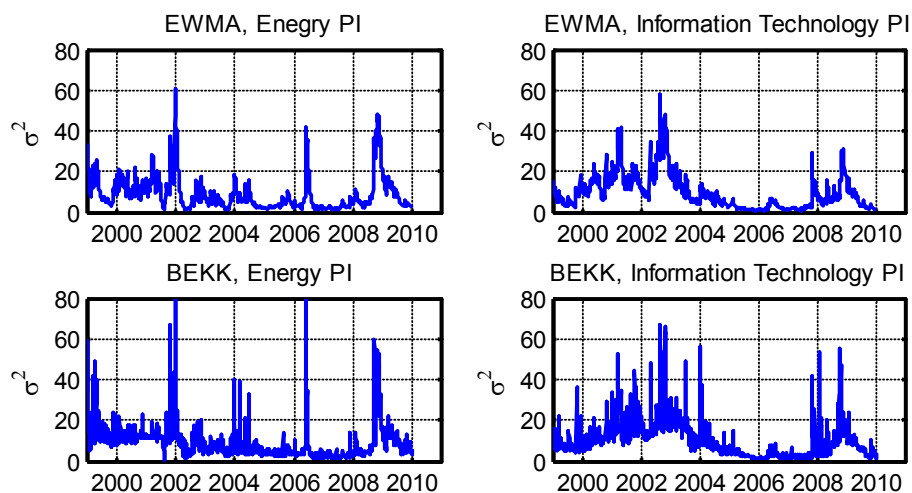


Diagram 4.1 Energy PI (SX1010P) och Information Technology PI (SX45PI) predikterad med EWMA och BEKK modellerna. Observera att vid årsskiftet 2001/2002 är BEKK Energy PI:s toppvärde 209. Diagrammen har maxvärdet 80 på y-axel för att underlätta jämförelse.

Värt att notera är att BEKK-modellen vid några enstaka tillfällen predikterar riskförhöjningar som inte EWMA-modellen predikterar. Detsamma gäller även för prediktionen av korrelationen. Den ena modellen registrerar ibland högre, både positiv och negativ korrelation, än vad den andra modellen gör. Som exempel kan nämnas början av 2002 då EWMA-modellen visar hög positiv korrelation mellan tillgångarna. Andra exempel är årsskiftet 2001/2002 samt 2003/2004 och hösten 2007 respektive 2009 då BEKK-modellen predikterar hög korrelation som EWMA-modellen knappt noterar.

Att det finns skillnader mellan modellernas prediktioner av de betingade varians-kovariansmatriserna syns tydligt. Men utifrån detta går det inte att dra någon slutsats om vilken som är bäst. Säkert däremot är att skillnaderna mellan modellernas prediktioner kommer att ha direkt påverkan på en mean-variance-investerares portföljallokering.

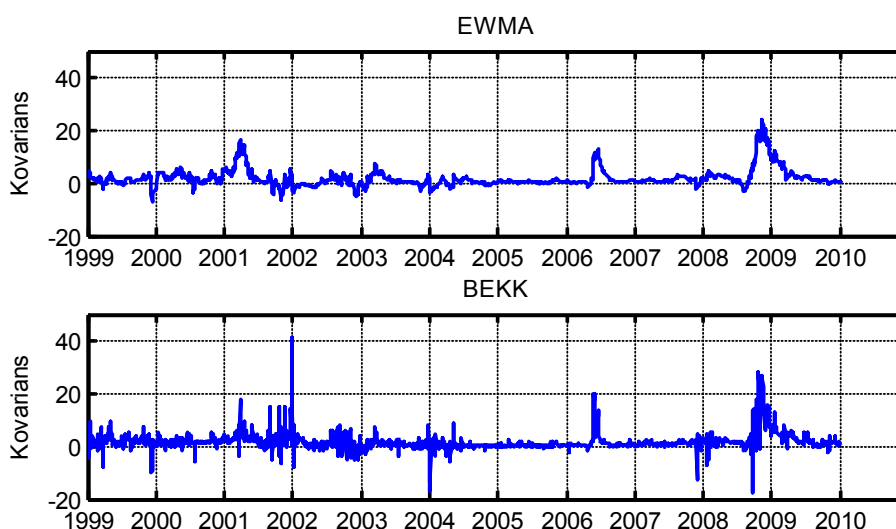


Diagram 4.2 Predikterad betingad kovarians mellan Energy PI (SX1010P) och Information Technology PI (SX45PI) predikterad med EWMA- respektive flerdimensionell GARACH-modell.

	Genomsnittlig dagsavkastning [%]		Standardavvikelse		Sharpe-ratio		Årsavkastning [%]	
	EWMA	BEKK	EWMA	BEKK	EWMA	BEKK	EWMA	BEKK
1999	0,132	0,190	1,966	2,026	0,063	0,090	32,9	53,4
2000	-0,050	-0,051	2,278	2,265	-0,027	-0,027	-17,3	-17,4
2001	0,323	0,289	2,507	2,563	0,124	0,108	107,3	89,9
2002	-0,079	-0,038	1,607	1,662	-0,056	-0,030	-20,5	-12,2
2003	0,179	0,204	1,535	1,539	0,111	0,127	51,6	61,3
2004	0,117	0,083	1,472	1,470	0,075	0,052	30,8	20,1
2005	0,243	0,244	1,194	1,205	0,199	0,198	81,5	81,8
2006	0,030	0,043	1,704	1,727	0,014	0,021	4,1	7,2
2007	-0,016	-0,010	1,074	1,084	-0,024	-0,018	-5,2	-3,8
2008	-0,108	-0,096	2,324	2,368	-0,052	-0,046	-28,6	-26,6
2009	0,104	0,155	1,779	1,767	0,057	0,087	24,9	42,2
Hela perioden	0,080	0,092	1,822	1,845	0,039	0,045	23,8 ¹	26,9 ¹

Tabell 4.1 Sammanställning över utfallet från portföljstrategierna för en investerare som investerar med ett dygns investeringshorisont. Upprepar investeraren sina kortsiktiga investeringar resulterar det i årsavkastningen. 1. Genomsnittlig årsavkastning

4.2 Portföljanslys

För att analysera och jämföra portföljers egenskaper finns det många verktyg att välja mellan. Denna studie väljer att fokusera på portföljernas avkastning, standardavvikelse och den viktigaste parametern; Sharpe-förhållandet. Den sistnämnda parametern anses vara en objektiv metod för att jämföra portföljer då

den genererar ett relativt värde mellan överavkastningen i förhållande till tagen risk för varje enskild portfölj.

4.2.1 Avkastning

Strategiernas genomsnittliga dagsavkastning över hela perioden, överstiger den dagliga målavkastningen på 0.06 % med god marginal. BEKK-strategin ger en genomsnittlig dagsavkastning på 0.093 % och EWMA-strategin 0.081 %. För en investerare med längre tidshorisont än ett dygn ger strategierna en genomsnittlig årsavkastning på 26.9 % respektive 23.8 %, vilket är mycket över den önskade årsavkastningen på 15 %.

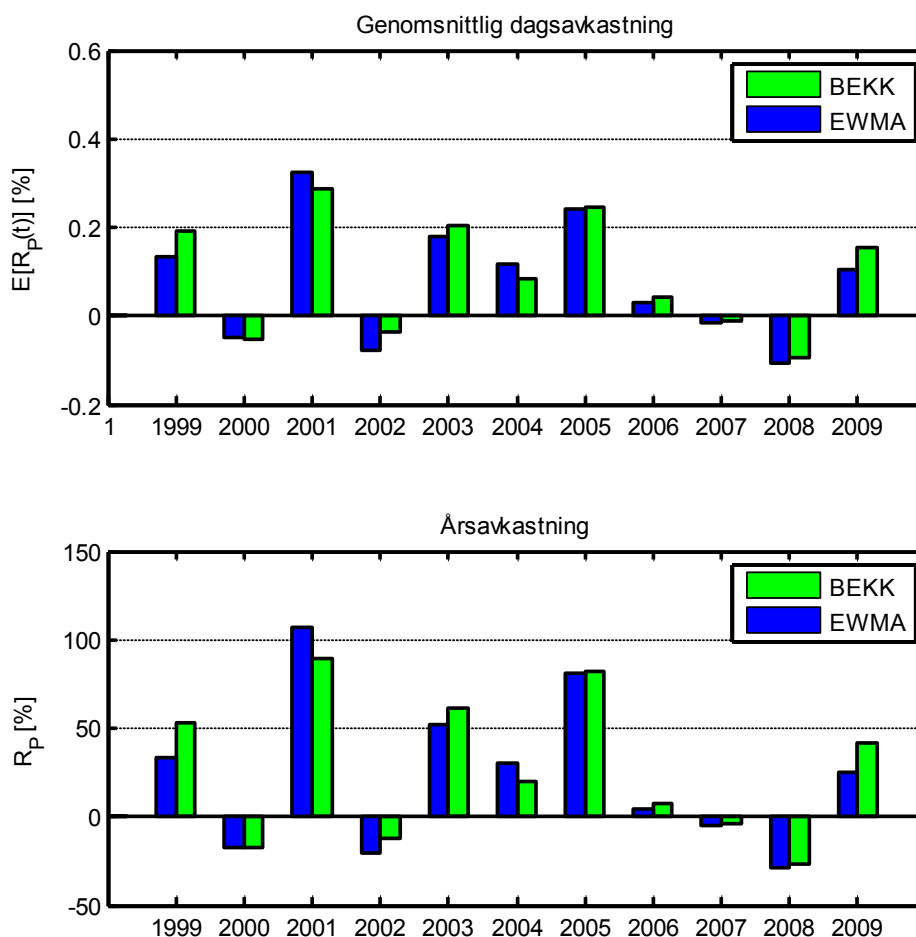


Diagram 4.3 Genomsnittlig daglig avkastning och årsavkastning för EWMA-portföljen och BEKK-portföljen.

Skillnaden mellan strategiernas dagsavkastning varierar mellan åren. Till exempel för 1999 är skillnaden mellan strategiernas genomsnittliga dagsavkastning 20 procentenheter, men för 2005 är skillnaden nästan noll, se tabell 4.1 och diagram 4.3. Trots denna spridning mellan åren, är den genomsnittliga skillnaden mellan portföljernas årsavkastning inte större än 3.1 procentenheter.

Diagram 4.4 visar tidsserierna för strategiernas dagsavkastning som glidande medelvärde. Tydligt framgår att strategiernas dagsavkastning följer samma avkastningsmönster, vilket är rimligt eftersom prediktionsmodellernas predikterade betingade varians-kovariansmatriser är trendmässigt lika.

Kurvorna är mycket lika, men genom att beräkna differensen mellan BEKK-strategins och EWMA-strategins tidsserier visar det sig att det finns perioder då den ena modellen systematiskt ger högre dagsavkastning än den andra.

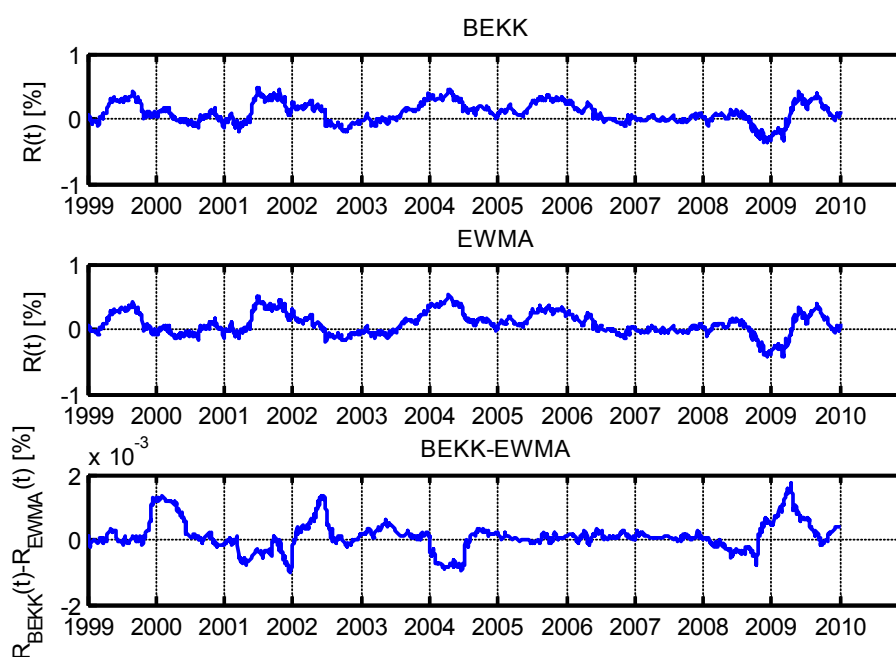


Diagram 4.4 Portföljavkastning som glidande medelvärde, 125 dagar. Nedersta diagrammet visar differensen mellan BEKK-portföljens och EWMA-portföljens avkastning.

4.2.2 Volatilitet

Båda strategiernas portföljrisk eller varians följer varandra på samma sätt och av samma orsak som den genomsnittliga dagsavkastningen, se diagram 4.5. Det är endast genom att beräkna skillnaden mellan BEKK-strategins och EWMA-strategins volatilitet som det är möjligt att se skillnaden mellan strategiernas varians. Differensen är positiv under större delen av perioden, vilket visar att BEKK-modellen generellt ger högre portföljvariens än EWMA-modellen, se diagram 4.5. Det är endast under några få perioder som det omvända gäller.

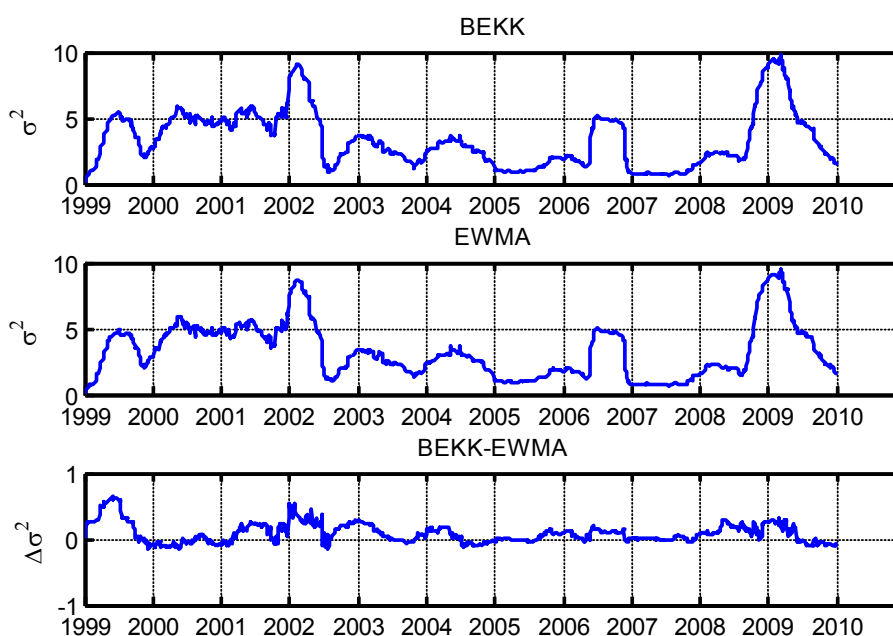


Diagram 4.5 Portföljvariansen för EWMA- och BEKK-portföljen och differensen mellan BEKK- och EWMA-portföljen. Diagrammen är beräknade med 125 dagars glidande varians.

Mellan åren varierar dagsavkastningens standardavvikelse, tabell 4.1 samt diagram 4.6. Skillnaden mellan portföljstrategierna är små och under några år är skillnaden nästintill obefintlig. Men det är BEKK-portföljen som har flest år med högst standardavvikelse. Över hela perioden ger EWMA-strategin en standardavvikelse på 1.822 och BEKK-strategin 1.845. En skillnad på 0.023 enheter. Detta visar att BEKK-modellen ger högre portföljrisk under perioden.

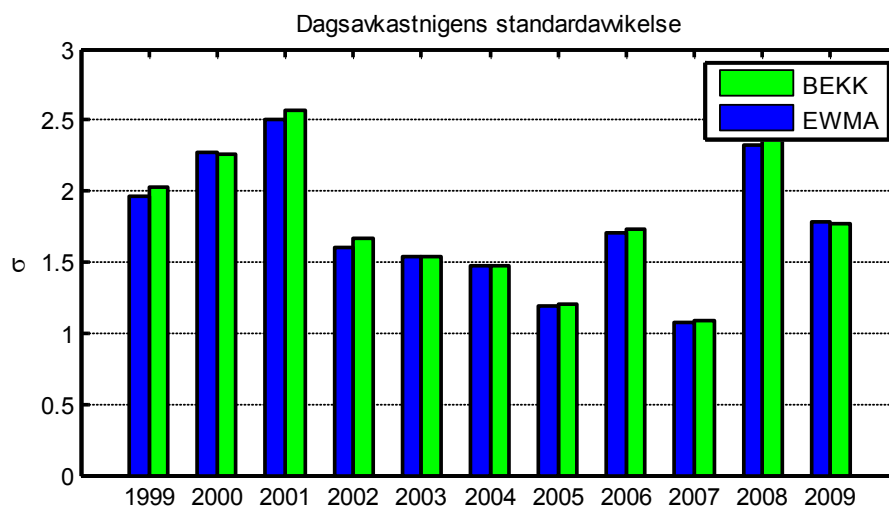


Diagram 4.6 Dagsavkastningens standardavvikelse per år

4.2.3 Sharpe-kvoten

Sharpe-kvoterna för prediktionsmodellerna varierar mycket mellan modellerna, och mellan åren, se tabell 4.1 och diagram 4.7. Båda prediktionsmodellerna ger kvoter nära 0.2 som högst och under -0.04 som lägst.

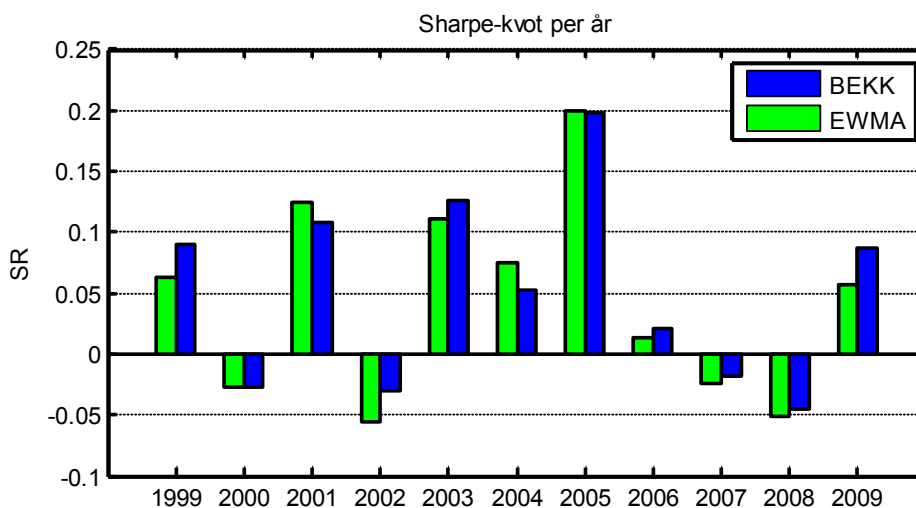


Diagram 4.7 Portföljernas Sharpe-kvot per år

Högst Sharpe-kvot ger BEKK-modellen under sju år, EWMA-modellen under två år och nästintill samma Sharpe-kvot under 2005. Över hela perioden är BEKK-modellens kvot också högst med 0.046 i förhållande till EWMA-modellens 0.039.

Sharpe-kvotsanalysen av prediktionsmodellerna pekar på att BEKK-modellen är bäst på att prediktera den betingade varians-kovariansmatrisen eftersom den ger högst Sharpe-kvot under flest år. Men för några enskilda år ger EWMA-modellen bättre kvotvärde än BEKK-modellen och frågan är varför. Det gäller till exempel för 2001. Kan orsaken vara att BEKK-modellen ibland reagerar *för* snabbt på riskförändringar och därmed missar väsentligt information som leder till en icke fördelaktig portföljviktning.

4.3 BEKK-modellens ekonomiska värde

Tabell 4.2 visar en sammanställning av det ekonomiska värdet, Δ , som BEKK-modellen har i förhållande till EWMA-modellen. Värdet utgör den maximala avgift som en investerare är beredd att betala varje dag för att byta från EWMA-modellen till BEKK-modellen. Avgiften anges som en procentuell andel av investerarens initialförmögenhet.

	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 1$	$\gamma = 10$	$\gamma = 29$	$\gamma = 30$	$\gamma = 50$
1999	0,0575	0,0569	0,0461	0,0220	0,0207	-0,0068
2000	-0,0007	-0,0005	0,0022	0,0079	0,0082	0,0141
2001	-0,0346	-0,0353	-0,0483	-0,0790	-0,0807	-0,1194
2002	0,0404	0,0399	0,0319	0,0151	0,0142	-0,0032
2003	0,0250	0,0250	0,0244	0,0232	0,0231	0,0216
2004	-0,0337	-0,0336	-0,0335	-0,0331	-0,0330	-0,0326
2005	0,0007	0,0007	-0,0006	-0,0035	-0,0036	-0,0070
2006	0,0120	0,0118	0,0083	0,0009	0,0005	-0,0075
2007	0,0059	0,0059	0,0049	0,0027	0,0026	0,0003
2008	0,0114	0,0109	0,0017	-0,0173	-0,0183	-0,0377
2009	0,0512	0,0513	0,0533	0,0576	0,0578	0,0625
Hela perioden	0,0123	0,0121	0,0083	0,0001	-0,0003	-0,0094

Tabell 4.2 BEKK-modellens ekonomiska värde i förhållande till EWMA-modellen för olika värden på investerarens relativa riskaversion. Värdet motsvarar den maximala avgift en investerare vill betala för att byta från EWMA-modellen till BEKK-modellen. Värdet är angivet i procent, som en andel av investerarens initialförmögenhet

I tabellen och i diagram 4.8 framgår det att värdet på BEKK-modellen i förhållande till EWMA-modellen minskar med ökande värde på den konstanta relativa riskaversionsfaktorn γ . Investerare med hög konstant riskaversion sätter

mindre värde på BEKK-modellen och vid riktigt höga värden på γ vill investeraren istället ha betalt för att byta till BEKK-modellen.

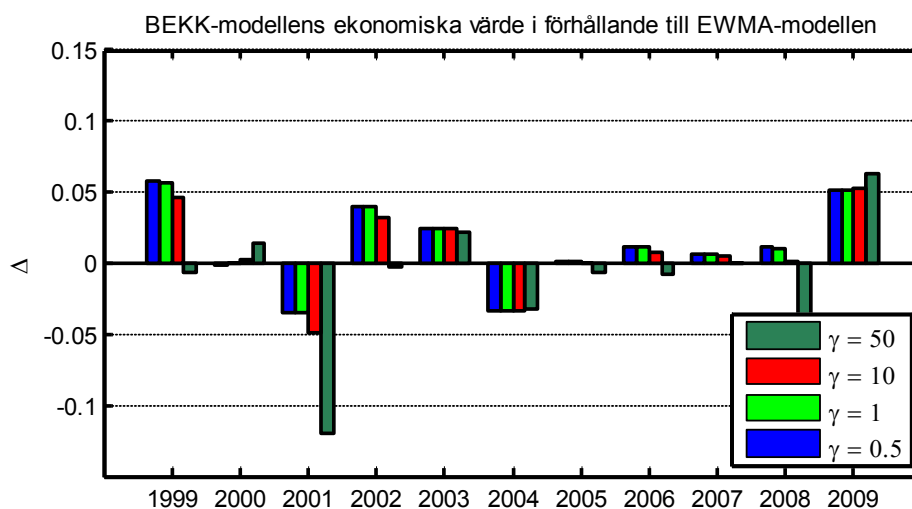


Diagram 4.8 BEKK-modellens ekonomiska värde i förhållande till EWMA-modellen för olika värden på investerarens relativa riskaversion. Värdet motsvarar den maximala avgift en investerare vill betala för att byta från EWMA-modellen till BEKK-modellen. Värdet är angivet i procent, som en andel av investerarens initialförmögenhet.

För de tre lägsta nivåerna på den konstanta relativa riskaversionen (0.5, 1, 10) har BEKK-modellen ett positivt ekonomiskt värde under flest enskilda år samt över hela perioden. Men för en konstant relativ riskaversion på 50 är det ekonomiska värdet negativt på BEKK-modellen under flest år och totalt under hela perioden. Det ligger i linje med strategiernas avkastning och risk, där BEKK-modellen ger något högre portföljrisk än EWMA-modellen. När risken kommer i fokus genom högre konstant relativ riskaversion minskar det ekonomiska värdet på BEKK-modellen för att till sist bli negativt.

Det betyder att BEKK-modellen är den bästa modellen, om investeraren har låg konstant relativ riskaversion, men är den sämsta för en investerare med hög konstant relativ riskaversion.

Att BEKK-modellens värde sjunker med ökande värde på den konstanta relativa riskaversionsfaktorn ligger i den kvadratiska nyttofunktionens natur. Termen längst till höger i ekvation 2.47, vilken representerar risk, får ett större negativ inflytande på nyttan med större värden på γ och minskar därmed den vänstra termens inflytande vilken representerar avkastning.

4.4 Kuriosa

Som kuriosa är det intressant att titta på hur portföljstrategierna utvecklats över hela perioden, eftersom det är dessa kurvor som ofta används i affärspress.

EWMA-strategins värde har under investeringsperioden ökat sex gånger och BEKK-strategins åtta gånger.

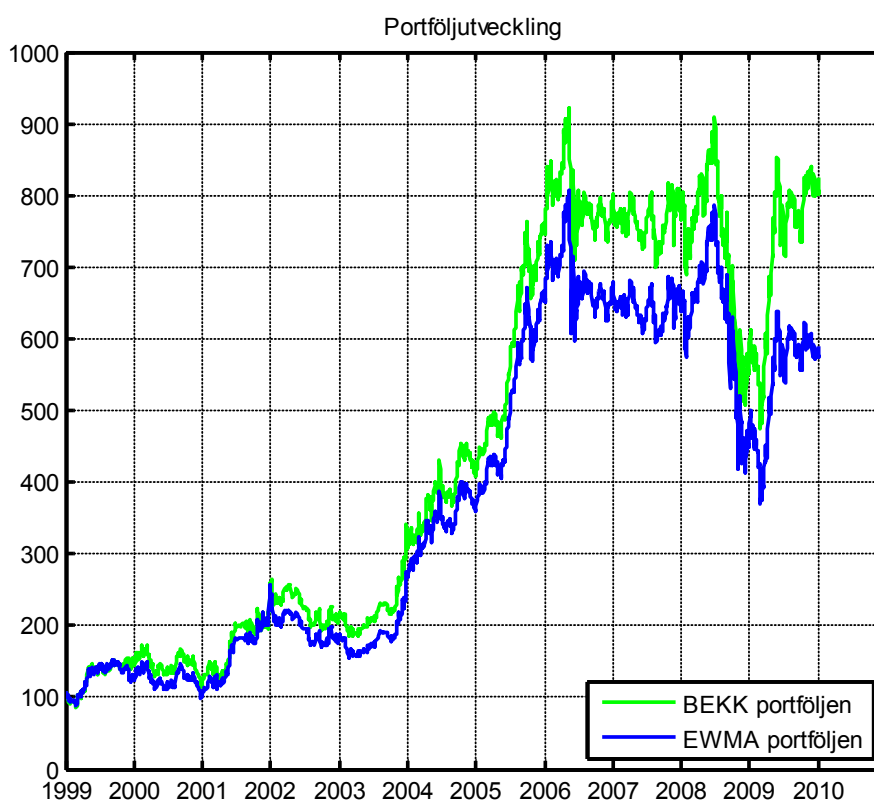


Diagram 4.9 Portföljutveckling över investeringsperioden, mellan 1999 och 2010. Basår 1999.

5 Slutsats och diskussion

Genom att använda BEKK-modellen för att prediktera den betingade varians-kovariansmatrisen i en dynamisk portföljstrategi blir dagsavkastningen generellt bättre än om EWMA-modellen används. Däremot blir portföljrisken något högre vid användningen av BEKK-modellen. Sharpe-kvoten, baserad på dagsavkastningen, ger stöd för att BEKK-modellen är den bästa modellen eftersom riskökningen kompenseras mer än väl av högre avkastning, dvs. förhållandet mellan avkastning och risk blir bättre än för EWMA-modellen.

En modell med högre Sharpe-kvot bör ha ett högre ekonomiskt värde för en investerare än en modell med lägre Sharpe-kvot. Detta tycks självklart, men undersökningen visar att BEKK-modellens ekonomiska värde avgörs av investerarens förhållande till risk och avkastning. Därför kan rankingen av prediktionsmodeller med Sharpe-kvoten respektive rankingen utifrån ekonomiskt värde ge olika resultat. Om en investerare har en kvadratisk nyttofunktion och låg riskavertitet får BEKK-modellen högre ekonomiskt värde i förhållande till EWMA-modellen än vad den skulle få om riskavertiteten är hög. I extremfallet med en mycket riskavert investerare vill denne ha betalt för att byta från EWMA- till BEKK-modellen.

Det ekonomiska värdet, som uppstår mellan BEKK-modellen och EWMA-modellen och som motsvarar den avgift en investerare är villig att betala för ett byta från EWMA-modellen till BEKK-modellen, kan användas som hjälpmedel vid prissättning av investeringstjänster.

En firma skulle kunna prissätta sin BEKK-baserade tjänst så, att nyttan för investeraren blir något högre än nyttan från en EWMA-baserad tjänst, för att locka till ett byte. Resten av nyttskillnaden mellan modellerna skulle hamna hos firman.

Sammanfattningsvis visar, i denna kontext, Sharpe-kvoten och den ekonomiska analysen att BEKK-modellen är bättre än EWMA-modellen i dynamiska portföljstrategier där man vill ta hänsyn till volatility timing. Det förutsätter att investeraren inte är *extremt* riskavert, för då divergerar resultaten. Även om Sharpe-kvoten pekar ut den bästa prediktionsmodellen är det inte självklart att den är den optimala för en investerare ur dennes riskpreferenser.

5.1 Diskussion

En undersökning innehåller alltid kompromisser. En modell är ett försök att komma så nära verkligheten som möjligt, men den innehåller alltid någon form av antagande för att den skall vara användbar. Antagandena, om t.ex. antalet handelsdagar för aktier och räntor och begränsningar i prediktionsmodellernas minne eller investerarens kvadratiska nytta, gör att undersökningen ligger nära verkligheten men representerar inte verkligheten utan modellerar den endast. Därför finns risken att resultaten avviker från en verklig investerare och dennes investeringssituation.

Från portföljvalsteorin [23] är det känt att med ökande antal tillgångar i en portfölj minskar portföljrisken och den minskar snabbast då antalet tillgångar går från ett till tio i portföljen. Därefter planar riskminskningen ut med ökat antal tillgångar. Undersökningen använder, av praktiska skäl, endast två icke riskfria tillgångar i portföljallokeringen på grund av att BEKK-modellen är beräkningskrävande.

Därför finns risken att det erhållna resultatet kan avvika när antalet portföljtillgångar blir minst tio eller fler.

Med få tillgångar finns risken att de valda tillgångarna har egenskaper som är optimala eller katastrofala för den ena eller andra prediktionsmodellen och därmed riskeras att resultatet snedvrids.

För att få ett mer neutralt resultat borde simuleringar genomföras med konstruerade avkastningsserier, som innehåller karakteristiska egenskaper för finansiella tidsserier. Detta skulle rimligtvis ge ett mer neutralt resultat beträffande ranking av prediktionsmodeller.

5.1.1 Flerdimensionell GARCH

Endimensionella GARCH-modeller är vanligt förekommande i olika programpaket men inte flerdimensionella GARCH-modeller. Ett problem med flerdimensionella GARCH-modeller är att det är svårt att implementera dem i datorer. Två olika implementationer av samma flerdimensionella GARCH-modell kan ge olika resultat trots att inget fel föreligger. Orsaken ligger troligtvis i hur olika datorsystem hanterar matematiska operationer. Därför är det möjligt att resultatet från denna undersökning skulle kunna avvika om en annan BEKK-implementation används.

5.1.2 Nettoavkastning och Bruttoavkastning

Nyttofunktionen 2.43 innehåller senaste tidsperiodens portföljavkastning. Några av artiklarna, som använts [5, 7, 9], menar att avkastningen skall vara bruttoavkastning, medan Fleming, Kirby och Ostdiek [6] i deras generalisering inte nämner huruvida det är netto- eller bruttoavkastning som skall användas. Det blir stora skillnader på resultatet om man väljer netto- eller brutto avkastning. Om man väljer att använda nettoavkastning påverkas knappt BEKK-modellens värde i förhållande till EWMA-modellen då den konstanta relativa riskaversionen γ ökar. Vid genomförandet av undersökningen används bruttoavkastningen, eftersom West, Edison och Cho [5] anger detta i sin artikel.

5.1.3 Prediktionsmodellerna

Den stora skillnaden mellan prediktionsmodellerna är deras matematiska komplexitet som får en direkt påverkan på själva simuleringen. Det mest markanta är den stora skillnaden tidsmässigt mellan modellerna för att beräkna den betingade varians-kovariansmatrisen. Med EWMA-modellen tar beräkningen, över hela perioden, något mer än en sekund, och med BEKK-modellen nästan sju och en halv timme. För att beräkna morgondagens betingade varians-kovariansmatris tar i genomsnitt 0.4 millisekunder för EWMA-modellen och 9.7 sekunder för BEKK-modellen.

	Genomsnittlig tid [sek]	Totalt tid [sek]
EWMA-modellen	4.0269e-004	1.1122
BEKK-modellen	9.7	2.6827e+004

Tabell 5.1 Genomsnittlig exekveringstid för att beräkna den betingade varians-kovariansmatrisen för respektive modell på en dator med en Intel Core 2 Duo T7300 processor (2 GHz). Tiderna är från endast en simulering av investeringsperioden.

Handlar prediktionen endast om att predikterar morgondagens betingade varians-kovariansmatris med två tillgångar är 9.7 sekunder inte särskilt lång tid, men när antalet tillgångar ökar kommer beräkningstiden att öka och bli en kritisk faktor. I portföljer med ett större antal tillgångar finns det risk att investeraren kommer att välja, eller till och med tvingas välja, modell utifrån den tid som krävs för att genomföra prediktionen av den betingade varians-kovariansmatrisen, i stället för hur bra modellerna modellerar den betingade varians-kovariansmatrisen. I den implementation i MATLAB av BEKK-modellen som används finns en kommentar om att det tog 12 timmar att beräkna den betingade varians-kovariansmatrisen (endast en matris) på en dator med en Pentium III-700 processor då antalet tillgångar var 10 stycken [21]. Ökande krav ställs på datorns beräkningskapacitet och därmed riskeras att fokus flyttas från modellernas förmåga att estimerar varianser och kovarianser till tidsåtgången.

5.2 Framtida studier

En intressant fråga att studera är hur en icke friktionsfri miljö, med courtage, depåavgift och skatt, påverkar en investerares nytta och hur denne värderar BEKK-modellen i förhållande till EWMA-modellen. Det finns många olika sätt att ta ut courtage på, t.ex. en grundavgift plus en procentuell avgift. Sammankopplas courtaget med hur portföljsammansättningen förändras mellan perioderna, dvs. avyttras hela portföljen för att sedan köpa en ny eller är det endast nettoförändringen mellan perioderna vilken omsätts? Detta är frågeställningar som är intressanta att undersöka ur ett nyttoperspektiv med olika nivåer av konstant relativ riskaversion.

Appendix A Diagram

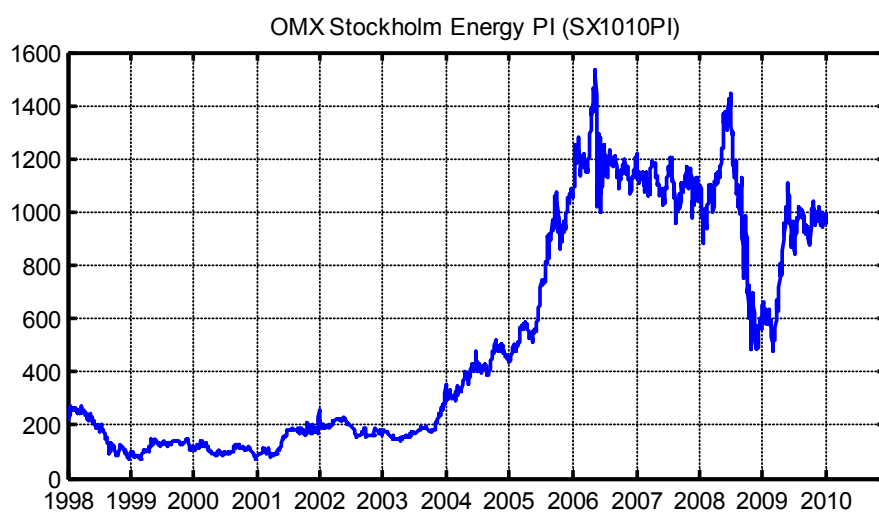


Diagram A.1 OMX Stockholm Energy PI (SX1010PI). Basdatum: 31 december 1995.

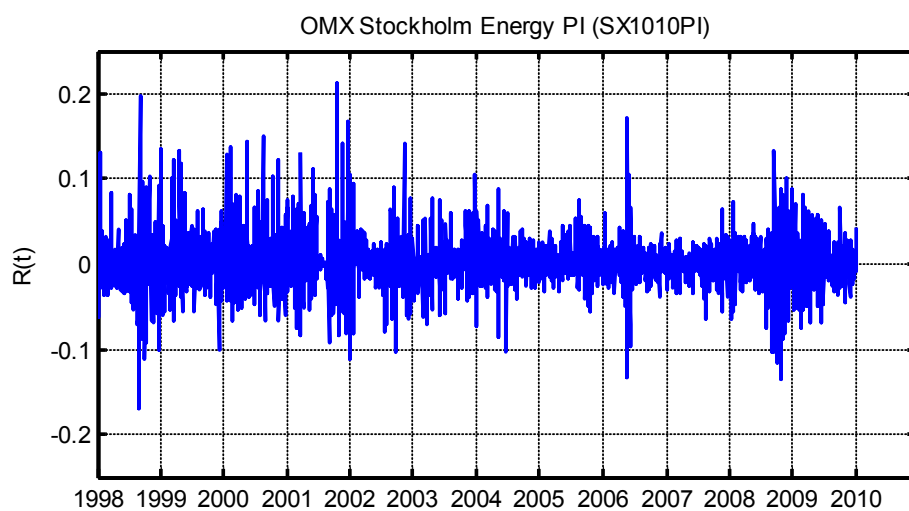


Diagram A.2 OMX Stockholm Energy PI (SX1010PI):s avkastningsserie.

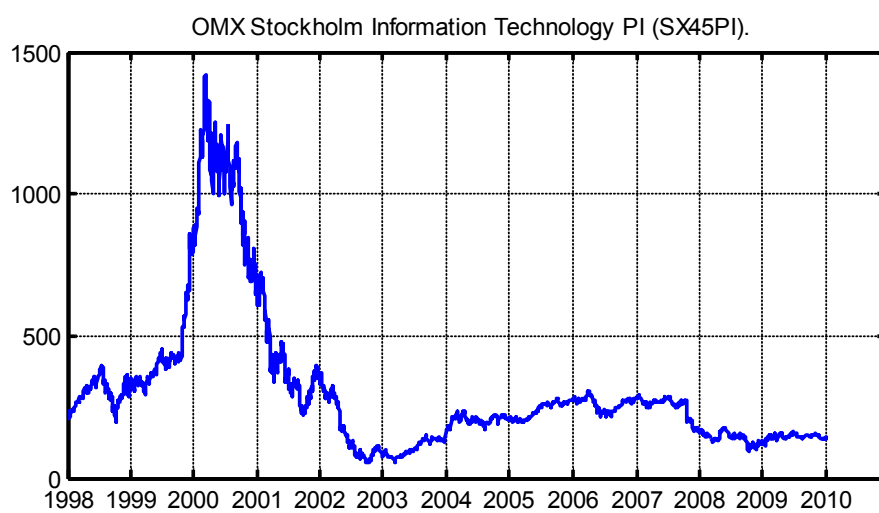


Diagram A.3 OMX Stockholm Information Technology PI (SX45PI). Basdatum: 31 december 1995.

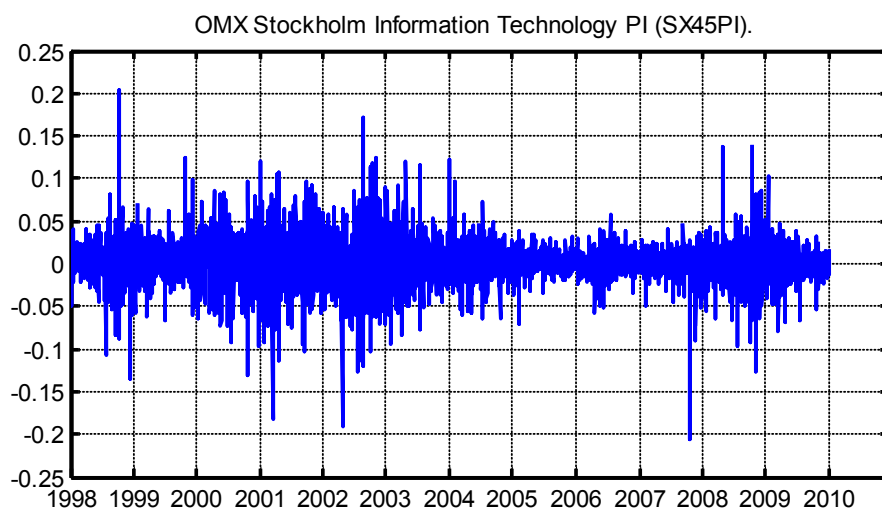


Diagram A.4 OMX Stockholm Information Technology PI (SX45PI):s avkastningsserie.

Appendix B MATLAB

Appendix B innehåller endast väsentliga och intressanta delar av den MATLAB-kod som använts i studien. Nedan finns koden för prediktion av både EWMA-modellens och BEKK-modellens matriser och koden för beräkning av portföljvikter samt koden för beräkning av BEKK-modellens ekonomiska värde.

B.1 Prediktion av den betingade varians-kovariansmatrisen

B.1.1 EWMA

```
% Initiering
% -----
startYear = 1999;      % Investeringsperiodens startår
year0     = 1998;      % tidsserierns startår

lag       = 249;       % antalet historiska dagar i minnet
days    = 250;       % antalet börsdagar

% Hämtar avkastningsserier och tillgångarnas väntevärde från fil
% -----
[R Rf date] = getReturns();

load('expectedReturn.mat');

% Plockar ut årens föra positioner ur tidsseriern
% -----
i = 1;
x = strmatch(num2str(year0), date);
while x
    year(i,1) = year0;
    year(i,2) = x(1);
    year0 = year0 + 1;
    x = strmatch(num2str(year0), date);
    i = i + 1;
```

```

end

% Beräknar varians-kovariansmatrisen för period t, vilket även är
% prediktionen av period t + 1, dvs i morgon
% -----
lg = 248;
for t = year(2,2) - 1: 1: year(end,2)-1
    sigma(:,t) = EWMA(0.94, R((t-lg) : t,:), mean(R((t-lg) : t,:)));
    lg = lag;
end

% Sparar prediktionen av varians-kovariansmatrisen
% -----
save('sigmaEWMA.mat','sigma');

```

B.1.1.1 EWMA-funktionen

```

% -----
%
% EWMA
% Exponential weighted moving average model for variance-covariansmatrix
% Copyright (c) 2008, 2009 David Grunditz
%
% -----

function [sigma] = EWMA(lamda, r, r_mean)

N = size(r);

sigma = zeros(N(2)); % preallocation

for i = 1: 1: N(2)
    for j = 1: 1: N(2)
        for n = 0: 1: N(1) - 1
            sigma(i,j) = sigma(i,j) + (1 - lamda) * lamda^(n - 1) *...
                (r(N(1) - n, i) - r_mean(i)) *...
                (r(N(1) - n, j) - r_mean(j));
        end
    end
end
end

end

```

B.1.2 BEKK som använder Kevin Shepards BEKK-implementation

```

% Initiering
% -----
year0      = 1998;          % tidsseriernas startår
lag        = 249;          % antalet historiska dagar i minnet

% Hämtar avkastningsserier från fil -----
[R Rf date] = getReturns();
load('expectedReturn.mat');

% Plockar ut år samt årens första position -----
i = 1;
x = strmatch(num2str(year0), date);
while x
    year(i, 1) = year0;
    year(i, 2) = x(1);
    year0 = year0 + 1;
    x = strmatch(num2str(year0), date);
    i = i + 1;
end

% Beräknar residualerna
% (Dagsavkastningen beräknas genom: r(t) = mean(r) - e(t))
% -----

```

```

e = ones(size(R));
e = [e(:, 1)*R_mean(1) e(:, 2)*R_mean(2)] - R;

% Beräknar varians-kovariansmatrisen, Sigma
% -----
sigma = zeros(2, 2, year(end,2)); % Allokerar minne

lg = lag-1;
for t = year(2, 2) - 1: 1: year(end, 2) - 1

    % Korregerar lag-längden, dvs. det historiska minnet eftersom den
    % den vanliga längden stoppar predikteringen av matrien
    % -----
    if t == 258 || t == 378 || t == 396 || t == 569 || t == 596 || t == 2458
        lg = 248;
    end

    % Beräknar BEKK för period t med Kevin Sheppards BEKK -----
    [x1 x2 x3] = full_bekk_mvgaarch( e(t - lg: t, :), 1, 1);
    sigma(:, :, t) = x3(:, :, end);
    lg = lag;

end

% Sparar prediktionen av varians-kovariansmatrisen
% -----
save('sigmaBEKK.mat','sigma');

```

B.2 Beräkning av portföljvikterna

```

% Initiering
% -----
startYear = 1999; % Investeringsperiodens startår
year0 = 1998; % tidsserierns startår

days = 250; % antalet börsdagar

Rp = 0.15; % Önskad årsavkastning
Rp = Rp / days; % Önskad dagsavkastning

% Hämtar avkastningsserier, förväntad avkastning och
% varians-kovariansmatrisen från fil
% -----
[R Rf date] = getReturns();

load('expectedReturn.mat'); % R_mean

load('sigmaBEKK.mat');
%load('sigmaEWMA.mat'); % Alternativ kod för att hämta EWMA-matriserna

% Plockar ut årens föra positioner ur tidsseriern
% -----
i = 1;
x = strmatch(num2str(year0), date);
while x
    year(i,1) = year0;
    year(i,2) = x(1);
    year0 = year0 + 1;
    x = strmatch(num2str(year0), date);
    i = i + 1;
end

% Transponerar matriser
R = R';
R_mean = R_mean';

% Beräknar portföljvikterna
% -----
for t = year(2,2) - 1: 1: year(end,2)-1
    w(:,t) = (Rp-Rf(t)) * (inv(sigma(:, :, t)) * (R_mean - Rf(t))) /...
        ((R_mean - Rf(t))' * inv(sigma(:, :, t)) * (R_mean - Rf(t)));
end

```



```

% Beräknar det faktiska avkastningsutfallet för nästa handelsdag
% -----
for t = year(2,2) - 1: 1: year(end,2)-1
    Rpp(t+1) = w(:,t)' * R(:, t+1) + ( 1 - sum(w(:,t)) ) * Rf(t);
end

% Beräknar portföljens glidande statistiska egenskaper med 125 dagars minne
% -----
for t = year(2,2): 1: year(end,2)
    PortfolioVar(t) = var(Rpp(t - 125: t));
    PortfolioMean(t) = mean(Rpp(t - 125: t));
end

% Beräknar portföljutvecklingen
% -----
Pw = ones(size(Rpp))*100;
for t = year(2,2): 1 : year(end,2)
    Pw(t) = ( 1 + Rpp(t) ) * Pw(t - 1);
end

% Sparar portföljdata
% -----
save('BEKKPortfolio.mat', 'w', 'Rpp', 'Pw', 'sigma',...
     'PortfolioVar', 'PortfolioMean', 'year');

%save('EWMAPortfolio.mat', 'w', 'Rpp', 'Pw', 'sigma',...
     'PortfolioVar', 'PortfolioMean', 'year');

```

B.3 Basis points – beräkning av den ekonomiska nyttan

```

function [delta1 delta2] = basisPoints(R_b, R_a, gamma)

    if size(R_b) == size(R_a)

        T = size(R_b,1);

        % Beräknar den konstanta relativa riskaversionen
        % -----
        a = gamma / ( 2 * (1 + gamma));

        % Beräknar förväntad nytta
        % -----
        EU_bekk = sum(R_b) - a * sum(R_b.^2);
        EU_ewma = sum(R_a) - a * sum(R_a.^2);

        % Beräknar andragsgradsekvationen som ger det ekonomiska värdet på
        % modell B i förhållande till modell A

        p = -(2 * a * sum(R_b) - T) / (a * T);
        q = -(EU_bekk - EU_ewma)/(a*T);

        delta1 = -p/2 + sqrt( (p/2)^2 - q);
        delta2 = -p/2 - sqrt( (p/2)^2 - q);

    else
        delta1 = -1;
        delta2 = -1;
    end;
end;

```

Appendix C Referenser

- [1] Robert C. Merton. On estimating the expected return on the market - an exploratory investigation. *Journal of Financial Economics*, 8:323–361, 1980.
- [2] Robert Engle. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4):987–1007, 1982.
- [3] Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31:307–327, 1986.
- [4] Robert F. Engle and Kenneth F. Kroner. Multivariate simultaneous generalized arch. *Econometric Theory*, 11:122–150, 1995.
- [5] Kenneth D. West, Hali J. Edison, and Dongchul Cho. A utility-based comparison of some models of exchange rate volatility. *Journal of International Economics*, 35:23–45, 1993.
- [6] Jeff Fleming, Chris Kirby, and Barbara Ostdiek. The economic value of volatility timing. *The Journal of Finance*, LVI:329–352, 2001.
- [7] Pasquale Della Corte, Lucio Sarno, and Giorgio Valente. A century of equity premium predictability and the consumption–wealth ratio: An international perspective. *Journal of Empirical Finance*, 17:313–331, 2010.

- [8] Pasquale Della Corte, Lucio Sarno, and Ilias Tsiakas. An economic evaluation of empirical exchange rate models. *The Review of Financial Studies*, 22, 2009.
- [9] Pasquale Della Corte, Lucio Sarno, and Daniel L. Thornton. The expectation hypothesis of the term structure of very short-term rates: Statistical tests and economic value. *Journal of Economics*, 89:158–174, 2008.
- [10] Jeff Fleming, Chris Kirby, and Barbara Ostdiek. The economic value of volatility timing using “realized” volatility. *Journal of Financial Economics*, 67:473–509, 2003.
- [11] Wessel Marquering and Marno Verbeek. The economic value of predicting stock index returns and volatility. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 39(2):407–429, June 2004.
- [12] Ray Yeutien Chou and Nathan Liu. The economic value of volatility timing using a range-based volatility model. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 34:2288–2301, 2010.
- [13] Robert Engle. Garch 101: The use of arch/garch models in applied econometrics. *Journal of Economic Perspectives*, 15(4):157–168, 2001.
- [14] John Y. Campbell, Andrew W. Lo, and A. Craig MacKinlay. *The econometrics of financial markets*. Princeton University Press, 1997.
- [15] Chris Brooks. *Introductory econometrics for finance*. Cambridge University Press, 2002.
- [16] Luc Bauwens, Sébastien Laurent, and Jeroen Rombouts. Multivariate garch models: A survey. *Journal of Applied Econometrics*, 21:79–109, 2006.
- [17] Kenneth Kroner and Victor Ng. Modeling asymmetric comovements of asset returns. *The Review of Financial Studies*, 11(4):817–844, 1998.
- [18] Annastiina Silvennoinen and Timo Teräsvirta. Multivariate garch models. *SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance*, 669, 2008.
- [19] Gunnar Blom. *Statistikteori med tillämpningar*. Studentlitteratur, 2 edition, 1970, 1984.

- [20] Tim Bollerslev, Robert F. Engle, and Jeffrey M. Wooldridge. A capital asset pricing model with time-varying covariances. *The Journal of Political Economy*, 96(1):116–131, 1988.
- [21] Kevin Sheppard. UCSD Toolbox. URL:
http://www.kevinsheppard.com/wiki/UCSD_GARCH
Verifierad: 2011-08-25
- [22] NASDAQ OMX Group, Inc.: OMX Indexfamilj. NASDAQ OMX Group, Inc. URL:
http://omxnordicexchange.com/produkter/index/OMX_index/OMX_Index_family
Verifierad: 2010-08-16
- [23] Edwin J. Elton, Martin J. Gruber, Stephen J. Brown, and William N. Goetzmann. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 6 edition, 2003.