

**Växelverkan mellan en fri  
elektron och en laserpuls  
vid relativistisk intensitet**

Kandidatarbete  
av Jonas Nilsson

*Lunds reports on Atomic Physics,  
LRAP-398, Lund, September 2008*

*Jonas Nilsson*

## **Free electron interaction with a laser pulse of relativistic intensity**

This thesis concerns the interaction between a laser pulse and a free electron. A laser pulse is electromagnetic radiation, carrying an electric and a magnetic field, orthogonal toward each other and toward the propagation of the laser pulse. An electron in a laser pulse will be forced into orbits decided by the Lorentz force equation. An electric field leads to electron oscillation orthogonal towards the propagation of the laser pulse. If this field gets stronger, then this oscillation makes the electron go faster. When the velocity of a charged particle increases, then the magnetic field gets a more important role. A strong magnetic affection forces the electron forward, in the laser pulse direction, due to the fact that the electron can not reach the speed of light. The magnetic field stops it from doing that. No matter if the intensity is strong or weak, the same mathematical system of equations will be valid. This system of equations seems simple, but contains Doppler shift, relativity, time and position. Straightforward numerical integration is possible, but it requires a lot of power from the computer to get a satisfying result. That is why researchers developed a mathematical tool, which made this easier for the computer. The method is discussed in this thesis.

When you use this program it will give you stunning results. When the laser pulse enters, the electron reaches velocities close to the speed of light, starting from rest, in a time less than 1 femtosecond<sup>1</sup>. When the pulse has passed, the electron is at rest again, but at another position.

Advisor: **Olle Lundh**

Degree project 15 credits in Physics, Autumn 2008

Department of physics, Section of Atomic physics, Lund University

---

<sup>1</sup> 1 femtosecond =  $10^{-15}$  s

*Jonas Nilsson*

## **En fri elektrons växelverkan med laserpuls vid relativistisk intensitet**

Den elektromagnetiska strålningen består av ett **E**-fält och ett **B**-fält, vinkelräta mot varandra och dessutom vinkelräta mot utbredningshastigheten. En elektron som befinner sig i detta fält kommer att tvingas till speciella banor enligt Lorentz kraftuttryck. Beroende på laserens intensitet kommer magnetfältets betydelse att variera. En stark magnetisk påverkan leder till att elektronen förs framåt i pulsens utbredningsriktning. Detta på grund av att elektronen inte kan nå ljusfarten, vilket inte är förbjudet enligt klassisk mekanik. En svagare påverkan leder endast till att elektronen oscillerar vinkelrätt mot denna riktning. Då är nästan bara **E**-fältet inblandat. Oavsett om intensiteten är stark eller svag kan kraftekvationen lösas med samma matematiska ekvationssystem förutsatt att man använder rätt uttryck för rörelsemängden. Detta ekvationssystem kan se enkelt ut men innehåller trots detta både dopplereffekt, relativitet, läge och tid. Detta kan direkt beräknas numeriskt med kända formler från fysiken, men för att ett godtagbart resultat så krävs väldigt mycket beräkningskapacitet från datorns sida. Därför utvecklade bland annat Buneman en metod för att göra det enklare för datorn.

Resultaten är, vid denna numeriska beräkning, förvånande. Bland annat kan man se att elektronen accelereras upp till farter nära ljusets på mindre än en femtosekund<sup>2</sup>. Detta för att, när pulsen passerat, återigen befinna sig i vilotillstånd under förutsättning att rörelsen under hela pulsen skett symmetriskt kring pulsens symmetriaxel! Allt som då tycks ha hänt är att elektronens position i vågens utbredningsriktning ändrats.

En intressant fråga för framtiden är om man skulle kunna använda denna metod för att accelerera elektroner.

Handledare: **Olle Lundh**

Examensarbete 15p i fysik /Ht 2008

Institutionen för fysik, Avdelningen för Atomfysik, Lunds universitet

---

<sup>2</sup> 1 femtosekund= $10^{-15}$  s

## Innehållsförteckning

<b>1 Inledning</b>	<b>1</b>
<b>2 Teori och metoder</b>	<b>3</b>
2.1 Lorentz kraftuttryck	3
2.2 Laserpulsen	5
2.3 Numerisk beräkning av en laddnings rörelse	5
2.4 Bunemans metod	6
2.5 Anpassning av Bunemans metod	10
<b>3 Resultat och diskussion</b>	<b>12</b>
<b>4 Avslutning</b>	<b>23</b>
<b>Appendix</b>	<b>25</b>
<b>Bibliografi</b>	<b>27</b>

# 1. Inledning

De laserpulser som ska diskuteras här, kommer från så kallade högeffektlasrar och har en topp effekt i intervallet mellan  $10^{12}$  W och  $10^{15}$  W.

Effekten,  $P$ , har enheten Joule per sekund och kan alltså skrivas

$$P = \frac{W}{T} \quad (1)$$

där  $W$  är energin och  $T$  är tiden, i vårt fall den så kallade pulslängden, som beskriver hur lång tid det tar för laserpulsen att passera en viss punkt. Desto kortare pulslängd, desto större effekt är innebörden av formeln om  $W$  hålls konstant.  $W$  kan i dessa fall vara på flera Joule. Pulslängderna som ska studeras är på 5 femtosekunder. En annan formel säger att

$$I = \frac{P}{A} \quad (2)$$

och beskriver intensiteten,  $I$ , som funktion av effekten och arean,  $A$ . Intensiteten bör vara så stor som möjligt, och kan så bli genom att göra arean,  $A$ , så liten som möjligt. Arean betyder i detta fall laserpulsens midja, och en sådan kan vara på några få  $\mu\text{m}$ .

Dagens teknik kan optimera dessa parametrar så att intensiteterna blir större än  $10^{19}$  W/cm<sup>2</sup>. Sambandet mellan intensitet och det elektriska fältet som bär vågen kan skrivas[1]

$$I = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \quad (3)$$

där  $\epsilon_0$  är kapacitiviteten i vakuum,  $c$  är ljusfarten i vakuum och  $E_0$  är den elektromagnetiska vågens elektriska fältstyrka. Insatta värden ger ett elektriskt fält i tera-Volt/m-området. Förhållandet i vakuum mellan det elektriska och det magnetiska fältet,  $\mathbf{B}$ , lyder

$$E = cB \quad (4)$$

vilket ger ett magnetiskt fält i en storleksordningen på ett tiotal kilo-Tesla.

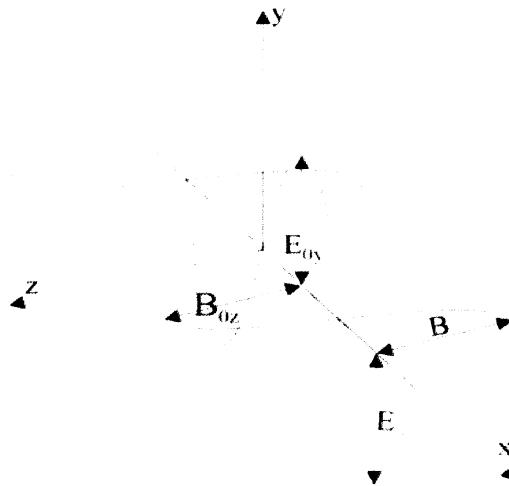
Så starka elektriska fält kommer att accelerera elektronen till väldigt stora hastigheter, och matematiken måste ta hänsyn till relativitetsteorins principer. Magnetfältets inverkan blir inte längre försumbar, utan kommer märkbart att tvinga elektronen i laserpulsens riktning.

Syftet med detta arbete är att, genom numeriska beräkningar, få en god förståelse om vad som sker då en elektron växelverkar med en laserpuls. Detta görs genom att titta på både det icke-relativistiska och det relativistiska fallet.

Kapitel 2 behandlar teori och metoder, nödvändiga för att kunna göra de numeriska beräkningarna. I kapitel 3 diskuteras resultaten och utseendet på de olika graferna, där två fall behandlar låga intensiteter och två fall behandlar höga. Avslutningsvis, i kapitel 4, diskuteras andra intressanta områden som genom utvidgning av arbetet skulle kunna utforskas.

## 2 Teori och metoder

Elektromagnetisk strålning består av ett elektriskt och ett magnetiskt fält, båda vinkelräta mot utbredningsriktningen och dessutom gentemot varandra, (se figur 2.1).



Figur 2.1. Sambandet mellan det elektriska och det magnetiska fältet i en elektromagnetisk våg. Vågen propagerar längs den positiva x-axeln.

En laddning som befinner sig i denna strålning påverkas därför av både det elektriska och det magnetiska fältet.

### 2.1 Lorentz kraftuttryck

Precis som annars då det handlar om elektromagnetism och hastighet gäller Lorentz kraftuttryck:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

Där  $\vec{F}$  är kraften,  $q$  elementarladdningen,  $\vec{v}$  den laddade partikelns hastighet och  $\vec{E}$  och  $\vec{B}$ , det elektriska respektive magnetiska fältet. Denna ekvation gäller för en positiv laddning. Önskas elektronen sätts  $q$  som negativ. Från den klassiska mekaniken ges sambandet

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{och} \quad m\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{p} \quad (2)$$

där  $m$  är den laddade partikelns massa, och  $\vec{a}$  är accelerationen.

Eftersom det elektriska fältet kan bli väldigt starkt och få hastigheten hos en laddad partikel att närma sig ljusets så är vi tvungna att räkna relativistiskt. Ekvation (1) kan då tillsammans med definitionen av  $\bar{F}$  skrivas enligt [2]

$$\frac{d}{dt} \frac{m\bar{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) \quad (3)$$

Då vi ska studera linjärpolariserad elektromagnetisk strålning, låter vi vågen propagera i  $x$ -riktningen,  $\mathbf{E}$ -fältet oscillerar i  $y$ -led och  $\mathbf{B}$ -fältet i  $z$ -led. Kryssprodukten i uttrycket ovan kan då skrivas som

$$\bar{v} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = v_y B_z \bar{e}_x - v_x B_z \bar{e}_y \quad (4)$$

Vi får då de 3 ekvationerna

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = qE_x + qv_y B_z = qv_y B_z \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = qE_y - qv_x B_z \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = q(E_z + 0) = 0 \quad (7)$$

$E_y$  är den enda termen vi har av  $\bar{E}$ , därför försvinner de andra.  $(1-v^2/c^2)^{-1/2}$  är den så kallade gammafaktorn,  $\gamma$ , där  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ . Hädanefter skrivs

$$\frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \text{ som } \frac{dp}{dt}$$

Relativitetsteorin säger också att

$$\bar{v} = \frac{1}{m} \frac{\bar{p}}{\gamma} = \frac{1}{m} \frac{\bar{p}}{\sqrt{1 + \frac{p_y^2 + p_x^2 + p_z^2}{m^2 c^2}}} \quad (8)$$



där ju  $p_z = 0$  eftersom denna är parallell med magnetfältet och vinkelrät mot det elektriska fältet.

Kvar blir alltså de två ekvationerna (5) och (6)

Eftersom  $B = E/c$  i vakuum så finner vi att för små farter  $v$ , att  $-qv_y B_z = -qv_y E_y/c$  i (5) går mot 0, och för (6) återstår i princip bara  $-qE_y$ . Magnetfältets inverkan är försumbart och laddningen kommer i princip bara att röra sig vinkelrätt mot vågens utbredning, dvs i  $y$ -riktningen. Detta är inte vad vi finner då farten blir stor.

## 2.2 Laserpulsen

Lasern skickar ut en kort, intensiv puls, med en pulslängd på några femtosekunder, vilket i längd motsvarar några mikrometer. Laserpulsen kan göras mycket energirik och vi kan idag vid fokusering få intensiteter på upp till  $10^{21}$  W/cm<sup>2</sup> [3]. I simuleringarna kommer vi utslutande att använda oss av våglängder på 800 nm, som är Ti:safir-laserns våglängd.

Laserpulsen, som beskrivs som en plan våg i vakuum, har följande matematiska formulering:

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx) e^{-\frac{(\omega t - kx)^2}{(\omega T)^2}} \quad (1)$$

där  $T$  är pulslängden. Relationen mellan intensiteten,  $I$ , och amplituden,  $E_0$ , är beskriven i (3) i kap1.

## 2.3 Numerisk beräkning av en laddnings rörelse

Vi går tillbaka till de tidigare formlerna:

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{qp_y B_z}{m\gamma} \quad (1)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = qE_y - \frac{qp_x B_z}{m\gamma} \quad (2)$$

Detta betyder egentligen inget annat än

$$dp_x = \frac{qp_y B_z}{m\gamma} dt \quad (3)$$

$$dp_y = \left( qE_y - \frac{qp_x B_z}{m\gamma} \right) dt \quad (4)$$

Som tidigare iakttagits är det endast första termen i (2) som spelar någon större roll då hastigheten är nära noll, vilket sker initialt då laserpulsen kommer insvepandes. Alltså bör det gå att göra en nästlad for-loop av det hela och summera  $dp_y$  och  $dp_x$  om vartannat.

Detta kommer dock visa sig vara mindre bra. dt måste vara mycket litet och tidsstegen måste i princip vara oändligt många för att ge ett tillförlitligt resultat.

Därför utvecklades i slutet på 60-talet en annan metod för att numeriskt kunna beräkna detta. Det var dock först 1973 som Buneman fick sista ordet i den metod som kommer att användas här[4].

## 2.4 Bunemans metod

Denna metod, som egentligen har sitt ursprung i flera andra, bygger på en komplicerad härledning. Vi kommer dock att gå igenom de grundläggande stegen som är hämtade i [4]. Vi börjar återigen med Lorentzuttrycket i det relativistiska fallet för positiv laddning.

$$\bar{F} = \frac{d}{dt} \frac{m\bar{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) \quad (1)$$

där hastigheten kan ersättas i relativitetsteorin enligt (2)

$$\bar{v} = \frac{\bar{p}}{m\gamma} \quad (3)$$

där

$$\gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{p^2}{m^2 c^2}\right)} \quad (4)$$

vilket också kan skrivas som

$$\frac{\bar{p}_{t+\Delta t/2} - \bar{p}_{t-\Delta t/2}}{\Delta t} = q\left(\bar{E} + \frac{1}{2m\gamma} (\bar{p}_{t+\Delta t/2} + \bar{p}_{t-\Delta t/2}) \times \bar{B}\right) \quad (5)$$

Metoden bygger på halva tidssteg,  $\Delta t/2$ , sett från tiden  $t$ .

En metod, gjord av Boris 1970[4], separerar det elektriska respektive det magnetiska fältet fullständigt. Byt ut

$$\bar{p}_{t-\Delta t/2} = \bar{p}^- - q\bar{E} \frac{\Delta t}{2} \quad (6)$$

$$\bar{p}_{t+\Delta t/2} = \bar{p}^+ + q\bar{E} \frac{\Delta t}{2} \quad (7)$$

i (5) så försvinner  $\bar{E}$  helt och kvar blir

$$\frac{\bar{p}^+ - \bar{p}^-}{\Delta t} = \frac{q}{2m\gamma} (\bar{p}^+ + \bar{p}^-) \times \bar{B} \quad (8)$$

Detta är en rotation. Principen är sedan som följer;

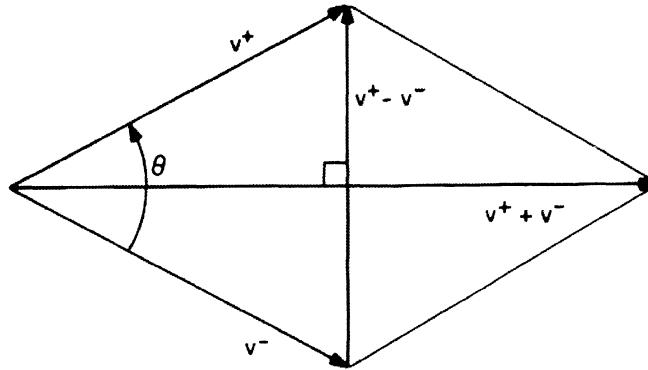
1. Addera halva den elektriska impulsen till  $\bar{p}_{t-\Delta t/2}$  genom att använda (6) för att få  $\bar{p}^-$ .
2. Roterar i enlighet med (8) för att få  $\bar{p}^+$ .
3. Addera den återstående hälften av den elektriska impulsen (7) för att få  $\bar{p}_{t+\Delta t/2}$ .

Vi ska studera rotationsvinkeln,  $\theta$ , vilken fås genom att studera figur 2.2. Från (8) ser vi då att

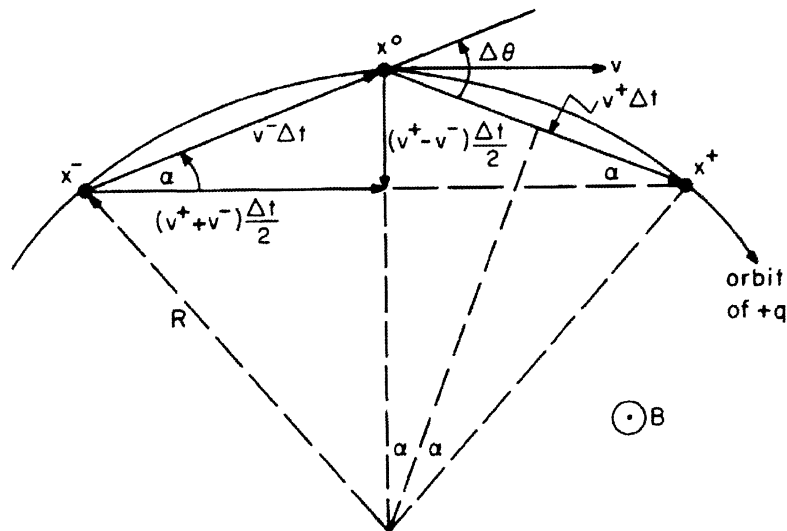
$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{|\bar{p}^+ - \bar{p}^-|}{|\bar{p}^+ + \bar{p}^-|} = \frac{qB \Delta t}{m\gamma} \frac{1}{2} = \frac{\omega_c \Delta t}{2} \quad (9)$$

där  $\omega_c \equiv \frac{qB}{m\gamma}$  är den så kallade cyklotronfrekvensen, hos en partikel med massan  $m$ , och

laddningen  $q$ . Gammas syfte är att kompensera för partikelns ökade rörelsemängd i det relativistiska fallet, som skiljer sig från den klassiska cyklotronfrekvensen genom att vara hastighetsberoende.



Figur 2.2. Denna figur är hämtad från [4], där metoden behandlas klassiskt. I denna relativistiska modell byts hastigheterna  $v$  ut mot rörelsemängden  $p$ . Denna figur beskriver rotationen i (8), från vilken (9) fås ut.



Figur 2.3. Figuren visar en positiv laddnings cyklotronrörelse i ett magnetfält, där  $\vec{B}$  är parallell med z-axeln, x-axeln pekar åt höger och y-axeln uppåt. Återigen är figuren hämtad från [4] och behandlar den klassiska åskådningen, det vill säga att hastigheten  $v$  skall alltså vara rörelsemängden  $p$ .

Om vi använder definitionerna i figur 2.3 blir rotationen genom vinkeln  $\theta$  i x-y planet negativ för en positiv laddning, det vill säga

$$\tan \frac{\theta}{2} = -\frac{qB \Delta t}{m\gamma} \quad (15)$$

vilket är en mycket god approximation till rotationsvinkeln  $\theta$ , då  $\theta$  inte är alltför stor.

Vi låter

$$t = -\tan \frac{\theta}{2} \quad (16)$$

och

$$s \equiv -\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad (17)$$

Från trigonometrin har vi sambandet

$$\tan \frac{\theta}{2} \equiv \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \quad (18)$$

Detta leder till att vi får en ny konstant,  $d$ , sådan att

$$d = \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (19)$$

Med hänvisning till figur 2.3 så blir sedan schemat enligt följande:

Rotationen blir

$$p_x^+ = dp_x^- + sp_y^- \quad (20)$$

$$p_y^+ = -sp_x^- + dp_y^- \quad (21)$$

De båda ekvationerna förenklade Buneman genom att reducera det hela till

$$p_x' = p_x^- + p_y^- t \quad (22)$$

$$p_y^+ = p_y^- - p_x^- s \quad (23)$$

$$p_x^+ = p_x' + p_y^+ t \quad (24)$$

vilket kräver färre multipliceringar än (20) och (21)

## 2.5 Anpassning av Bunemans metod

Bunemans metod grundar sig på halva tidssteg, vilket Matlabs for-loopar inte klarar av, och av den anledningen är tidsstegen omgjorda till heltal.

Ekvationssystemet som kommer att användas är hämtat från [3] och ser då ut, efter heltalsinsättning, enligt

$$p_x^- = p_x^{n-1} \quad (1)$$

$$p_y^- = p_y^{n-1} - \frac{\Delta t}{2} E_y^n \quad (2)$$

$$\gamma^n = \left(1 + (p_x^-)^2 + (p_y^-)^2\right)^{1/2} \quad (3)$$

$$t = \frac{\Delta t B_z^n}{2 \gamma^n} \quad (4)$$

$$s = \frac{2t}{1+t^2} \quad (5)$$

$$p_x' = p_x^- + p_y^- t \quad (6)$$

$$p_y^+ = p_y^- - p_x' s \quad (7)$$

$$p_x^+ = p_x' + p_y^+ t \quad (8)$$

$$p_x^n = p_x^+ \quad (9)$$

$$p_y^n = p_y^+ + \frac{\Delta t}{2} E_y^n \quad (10)$$

Allting är normaliserat, det vill säga

$$t \rightarrow \omega t; x \rightarrow kx; v \rightarrow v/c; p \rightarrow p/mc; E \rightarrow qE/m\omega c; B \rightarrow qB/m\omega.$$

Här är  $\omega$  vinkelfrekvensen och  $k$  vågtalet för laserpulsen. E-fältets normalisering kan förklaras på följande vis

$$\frac{d}{dt} \bar{p} = q\bar{E} \cos(\omega t - kx) \Rightarrow \bar{p} = \frac{q\bar{E}}{\omega} \sin(\omega t - kx) \quad \text{och då } p \rightarrow \frac{p}{mc} \text{ följer att}$$

$$\frac{\bar{p}}{mc} = \frac{q\bar{E}}{mc\omega} \sin(\omega t - kx) \quad (11)$$

$p_x^{n-1}$  och  $p_y^{n-1}$  begynnelsevärden är redan bestämda, i vårt fall är båda noll.

Från detta kan både hastighet och läge beräknas, och det enligt följande

$$v_x^n = p_x^n / \gamma^n \quad (12)$$

$$v_y^n = p_y^n / \gamma^n \quad (13)$$

samt

$$x^n = x^{n-1} + v_x^n \Delta t \quad (14)$$

$$y^n = y^{n-1} + v_y^n \Delta t \quad (15)$$

där både  $x^{n-1}$  och  $y^{n-1}$  har begynnelsevärde noll.

I och med att vi har läget kan detta appliceras i formeln för laserpulsen

$$E^n = E_0 \cos(t - x(n-1)) e^{-\frac{(t-x(n-1))^2}{\tau^2}} \quad (16)$$

För varje loop förflyttas  $x$  en liten sträcka och rödförskjutningen från dopplereffekten kommer således in automatiskt. Att bara studera  $E^n$  innebär alltså då hur elektronen upplever fältet.

Den kinetiska energin kan enkelt erhållas genom att använda den normaliserade formeln

$$W_k^n = (\gamma^n - 1) \quad \text{där} \quad W_k^n \rightarrow \frac{W}{mc^2} \quad (17)$$

vilken kommer från Einsteins formel[3]

$$W_k = (\gamma - 1)mc^2 \quad (18)$$

Se även appendix för koden som användes i matlab.

### 3 Resultat och diskussion

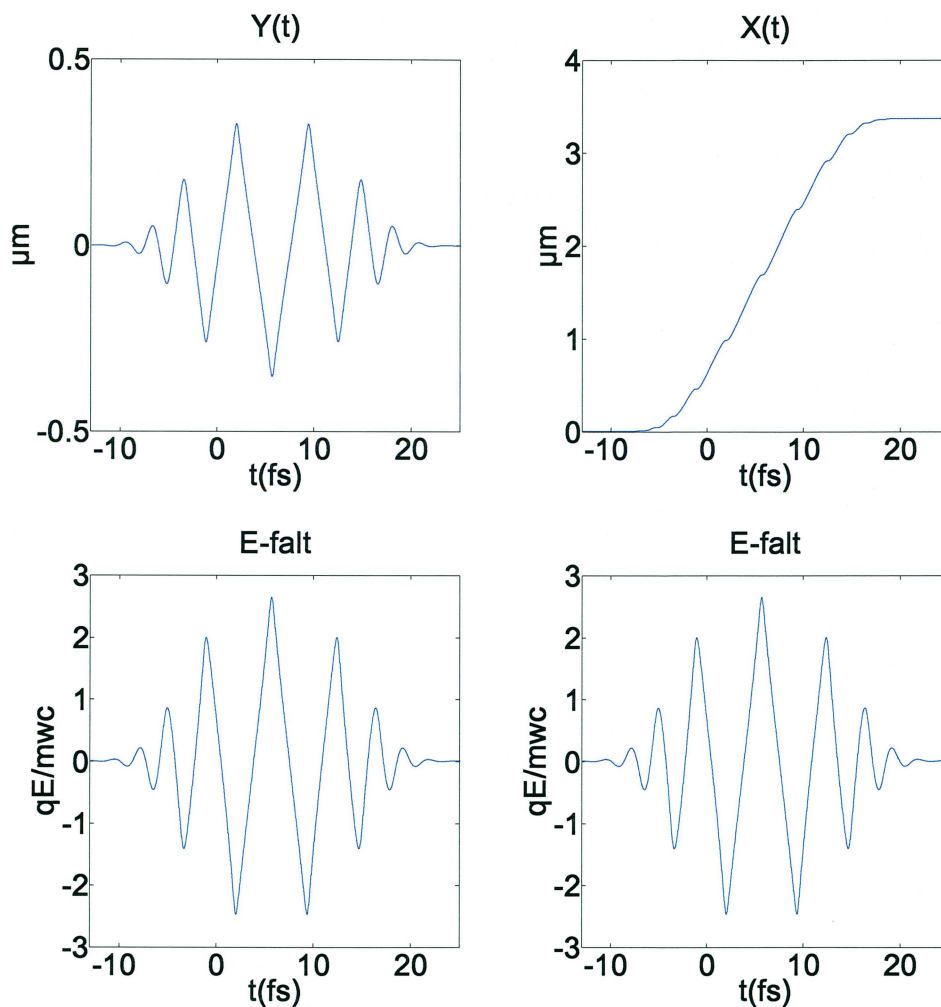
De fem första, av de kommande figurerna, är resultatet av simuleringar där alla parametrar är de samma. Laserpulsens, med  $I=1,5 \cdot 10^{23} \text{ W/m}^2$ , är från en titan:safir laser och har våglängden 800 nm. Pulslängden är på 5 fs och elektronen befinner sig i vila i origo när den plana, linjärpolariserade elektromagnetiska vågen når den. Figurerna beskriver elektronens läge, fart, rörelsemängd samt kinetiska energi. Detta jämförs med det elektriska fält som elektronen känner av. Simuleringen skedde med 10 000 tidssteg, och varje tidssteg var 0.01 fs.

Figur 3.1 beskriver elektronens läge i  $y$ - respektive  $x$ -led. Detta, alltså för en laserpulsintensitet på  $1,5 \cdot 10^{23} \text{ W/m}^2$ . Positionen i  $y$ -led är vad vi kunnat förvänta oss. Den negativt laddade elektronen förs i motsatt riktning gentemot  $\mathbf{E}$ -fältet och följer vågen tills dess att elektronen återigen befinner sig i vila. Dopplereffekten är närvarande i både det elektriska fältet och i grafen om elektronens position i  $y$ -led. Detta uttrycker sig på så sätt att avståndet mellan topparna blir längre och längre, för att sedan bli kortare och kortare när pulsens topp passerat.

Det är dock inte någon av dessa faktorer som bidrar med dopplereffekten, utan effekten kommer på grund av elektronens lägesförflyttning i  $x$ -led. Här sker något intressant som kan förvåna vid första ögonkastet. Istället för att ta upp energi från laserpulsens och behålla den, så ger elektronen tillbaka den. Elektronen förflyttar sig i  $x$ -led på grund av det magnetiska fältet, men då laserpulsens topp passerat befinner sig elektronen återigen i vila. I laserpulsens första hälft kommer  $\bar{v} \times \bar{B}$ -kraften vara negativ lika många gånger som den är positiv, det vill säga hastigheten i  $y$ -led kommer att byta tecken om vartannat. Men eftersom den första delen av pulsen ges av en växande funktion så blir den summerade hastigheten positiv. I pulsens andra hälft råder motsatta förhållanden, och samma kraft kommer att få ner den erhållna hastigheten i  $x$ -led till noll. Detta kan också inses genom att integrera det elektriska fältet med avseende på tiden. Vid denna integration fås hastigheten, och denna blir noll sett över hela pulsen.

Figur 3.2 behandlar elektronens hastighet i  $y$ - respektive  $x$ -led. Elektronens hastighet är som högst vid  $\mathbf{E}$ -fältets noder. Men här är också magnetfältet som svagast. Så magnetfältet slår till mellan topp/dal och nod och tvingar elektronen i  $x$ -led. Detta, och det faktum att elektronen inte kan nå ljushastigheten, medför att hastigheten i  $y$ -led klingar av. Den "förlorade" hastigheten i  $y$ -led överförs till  $x$ -led vilket vi kan se i  $V_y(t)$ - grafen där topparna är "avbrutna" och dessutom konkava. Botten på denna konkava yta vittnar om en konstant hastighet, vilket beror på att elektronen inte utsätts för något magnetfält här. Denna position är en nod i laserpulsens. Efter denna botten ökar hastigheten i  $y$ -led på nytt, med magnetfältet som broms.





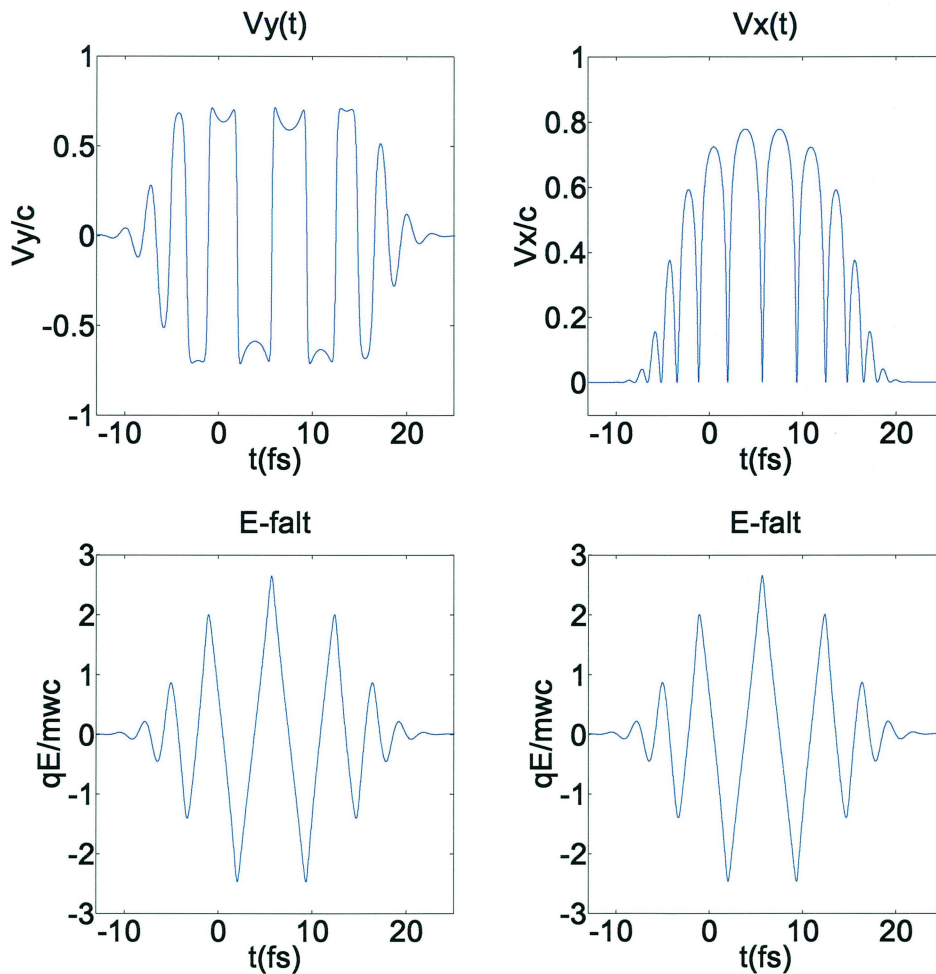
Figur 3.1 De två översta graferna beskriver läget i  $y$ -led respektive  $x$ -led som funktion av tiden. De två undre är det normaliserade elektriska fältet sett ur elektronens vilosystem. Dessa två är likadana och fungerar som referens till de övre.

Man skulle kunna säga att  $Vy/c$  är fäsförskjuten med  $\pi/2$  relativt det elektriska fältet vilket också är vad vi bör förvänta oss eftersom  $-\frac{d}{dt} \cos(t) = \sin(t)$  och hastigheten är tidsderivatan av läget. Elektronen följer det elektriska fältet och får således en liknande graf som det negativa elektriska fältet.

Gällande hastigheten i  $x$ -led så kommer den från  $\vec{v} \times \vec{B}$ -effekten. Vad vi kan se i grafen är att hastigheten i  $x$ -led är noll vid det elektriska fältets maxima och minima. Vid dessa punkter är ju också det magnetiska fältet som starkast, men eftersom elektronen ändrar hastighetsriktning i  $y$ -led här befinner sig den alltså så gott som i vila. Vid  $\mathbf{E}$ -fältets noder

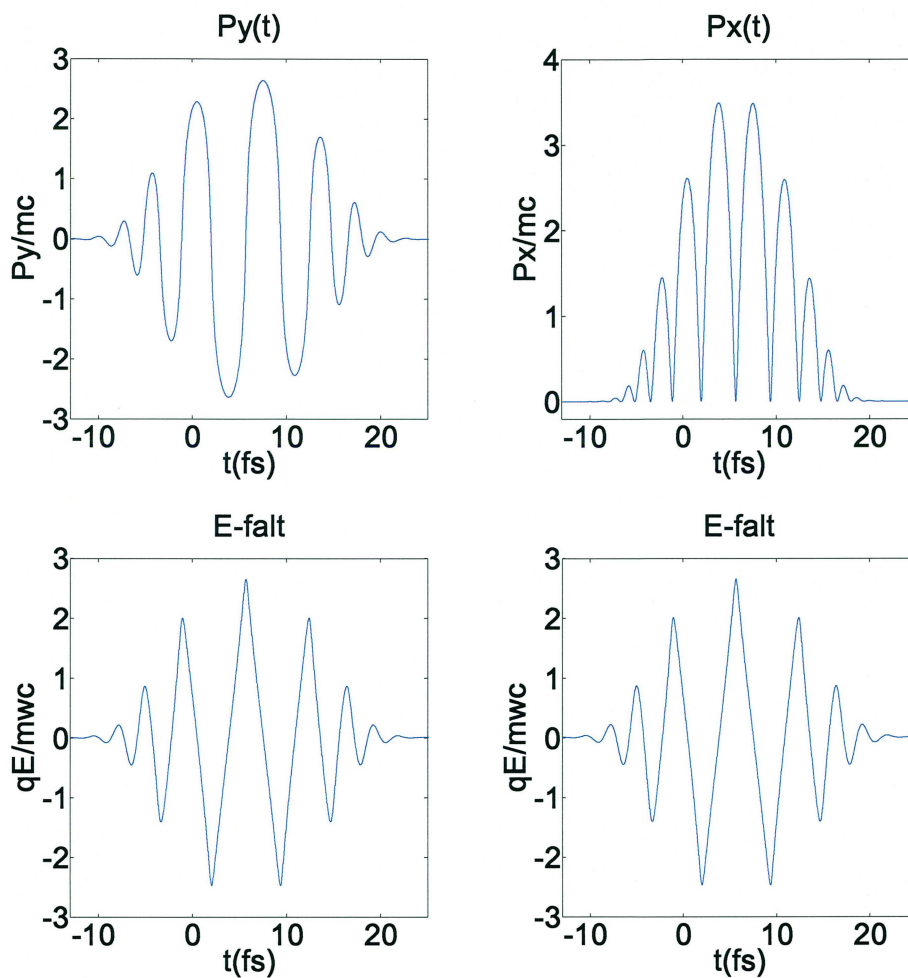
har hastigheten i  $x$ -led sina maxima. Detta beror inte på magnetfältet, som ju är noll här, utan denna hastighet är konstant sen ögonblicket tidigare. För varje period som hastigheten i  $y$ -led genomgår, fås två toppar i  $x$ -led. Detta på grund av att magnetfältet slår till två gånger under varje period, och således knuffar fram elektronen två gånger.

En annan viktig iakttagelse är de relativiska hastigheterna. Hastigheterna i  $x$ - och  $y$ -led överträffar ljushastigheten tillsammans. Dessa är enbart komponenter till den verkliga hastigheten, som kan skådas i figur 3.4.



Figur 3.2. De två övre graferna beskriver hastigheten i  $y$ - respektive  $x$ -led som funktion av tiden. Återigen jämförs de med det elektriska fältet så som elektronen känner av det.

Figur 3.3 handlar om elektronens rörelsemängd i  $y$ - respektive  $x$ -led. Dessa grafer påminner en del om graferna för hastigheten, med skillnaden att de inte är uppåt begränsade av gammafaktorn. Rörelsemängden är en uppåt obegränsad funktion, medan hastigheten är en uppåt begränsad funktion i enlighet med relativitetsteorin. Gränsen för hastigheten är givetvis  $c$ .

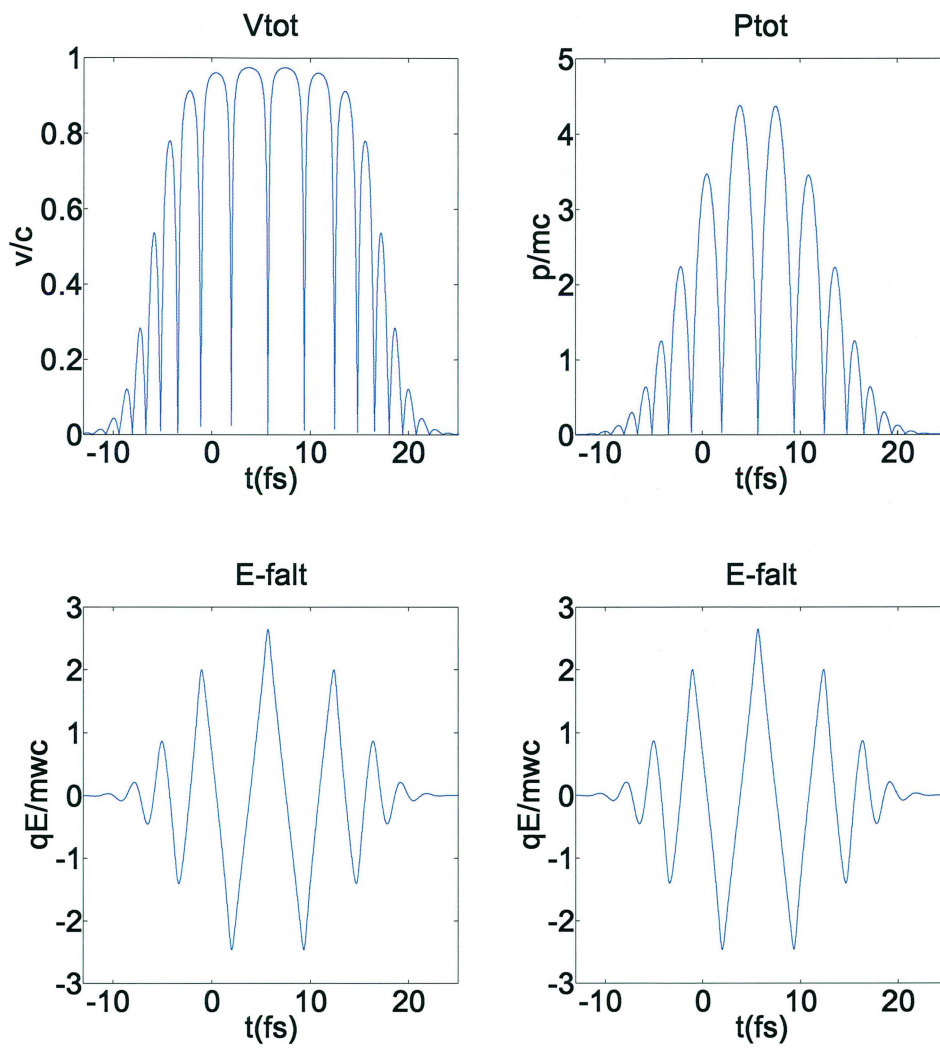


Figur 3.3. De två översta graferna behandlar rörelsemängden i  $y$ - och  $x$ -led och jämförs i vanlig ordning med det elektriska fältet.

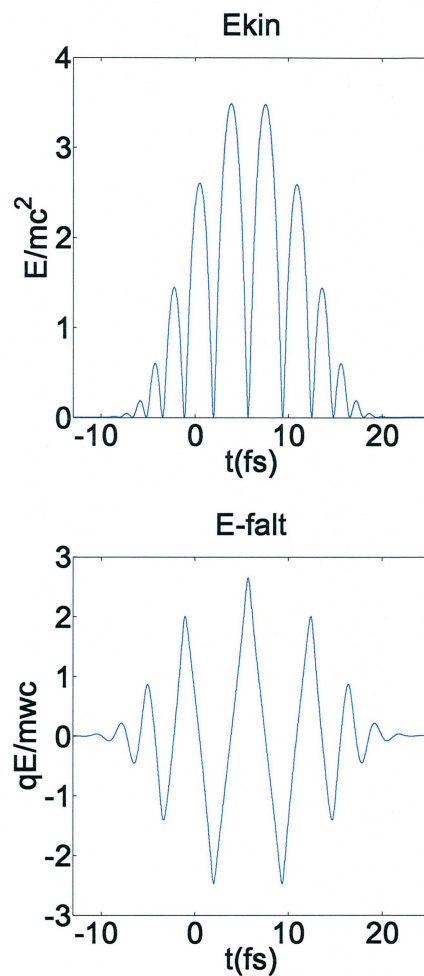
Figur 3.4 visar elektronens totala hastighet samt rörelsemängd, det vill säga den summerade hastigheten och rörelsemängden i  $x$ - och  $y$ -led.

Figur 3.5 beskriver elektronens kinetiska energi. Den kinetiska energin är givetvis som högst där hastigheten är som högst. Just i detta fall uppnår elektronen en kinetisk energi motsvarande ungefär 3,5 gånger sin egen viloenenergi. Den kinetiska energin är inte heller den uppåt begränsad.

Figur 3.1- 3.3 och 3.5 står också sammanställda i figur 3.8.



Figur 3.4. De övre graferna beskriver, oavsett riktning, den totala hastigheten samt den totala rörelsemängden.



Figur 3.5. Den övre grafen visar den kinetiska energin hos elektronen som funktion av tiden.

Samma parametrar har sedan använts i figur 3.6-3.9 med undantag för intensiteten. Vi väljer att studera konsekvenserna för 4 olika intensiteter, två i det klassiska området, samt två i det relativistiska. Det kan vara intressant att se vad en fördubbling av intensiteten medför i de olika områdena. Figurerna har vardera 11 grafer, sammansatta på samma sätt.

De tre graferna i översta raden beskriver elektronens läge, och första grafen behandlar läget i  $y$ -led som funktion av tiden, den andra behandlar läget i  $x$ -led som funktion av tiden. Observera att axlarna här är anpassade efter grafens utseende. Det är däremot inte i den tredje figuren. Både  $y$ - och  $x$ -axeln har här samma skala. Detta för att enkelt kunna se hur mycket i  $x$ -led elektronen förflyttat sig jämfört med i  $y$ -led.

De tre graferna i andra raden behandlar elektronens hastighet. Den första beskriver hastigheten i  $y$ -led som funktion av tiden, den andra hastigheten i  $x$ -led som funktion av

tiden. Den tredje beskriver hastigheten i  $y$ -led som funktion av hastigheten i  $x$ -led. Alla axlar på denna rad är anpassade efter innehållet.

Graferna på tredje raden beskriver elektronens rörelsemängd med samma principer som hos andra raden,

Den understa raden beskriver elektronens kinetiska energi som funktion av tiden och det elektriska fältet som funktion av tiden så som elektronen uppfattar det. Det är viktigt att påpeka "så som elektronen uppfattar det", eftersom elektronens hastighet i  $x$ -led kommer att leda till att elektronen känner av en rödförskjutet laserpuls.

Figur 3.6 har intensiteten  $I = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ W/m}^2$ . Figur 3.7 har dubbelt så stor intensitet som figur 3.6, det vill säga  $I = 3 \cdot 10^{10} \text{ W/m}^2$ . Båda kan betraktas klassiskt.

I det klassiska fallet kan slutsatserna dras att  $y \propto \sqrt{I}$ ,  $x \propto I$  och  $E_{kin} \propto I$ .

Att  $y$  är proportionell mot  $\sqrt{I}$  kan visas med Lorentz ekvationen i  $y$ -led;

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{qE_y}{m} \cos(\omega t - kx) \rightarrow v_y = -\frac{qE_y}{m\omega} \sin(\omega t - kx)$$

Ytterligare en primitiv funktion på detta ger oss läget, det vill säga

$$y = \frac{qE}{m\omega^2} \cos(\omega t - kx) \text{ och då } E \propto \sqrt{I} \Rightarrow y \propto \sqrt{I}.$$

Samma sak gäller för hastigheten i  $y$ -led, eftersom  $E_y$  inte berörs av integreringen.

Att  $x \propto I$  visas på liknande sätt;

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{qv_y B_z}{m} = -\frac{q}{m} \cdot \frac{-qE_y}{m\omega} \sin(\omega t - kx) \frac{E_y}{c} \cos(\omega t - kx) = \frac{q^2 E_y^2}{m^2 \omega c} \frac{1}{2} \sin(2(\omega t - kx))$$

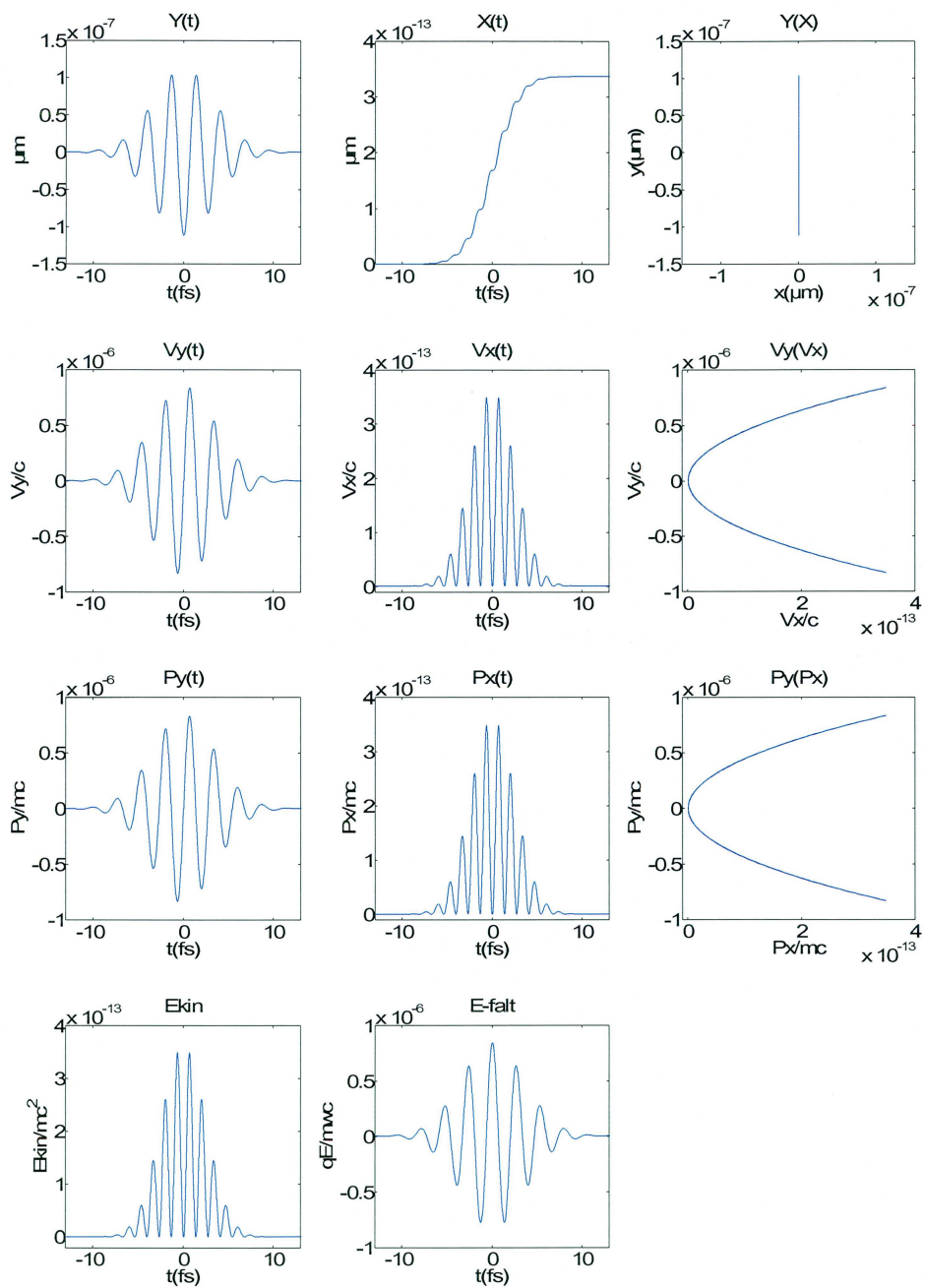
$$\Rightarrow v_x = -\frac{q^2 E_y^2}{m^2 \omega^2 c} \frac{1}{4} \cos(2(\omega t - kx)) \Rightarrow x = -\frac{q^2 E_y^2}{m^2 \omega^3 c} \frac{1}{8} \sin(2(\omega t - kx))$$

det vill säga,  $x \propto I$ . Detta gäller också för hastigheten  $v_x$ .

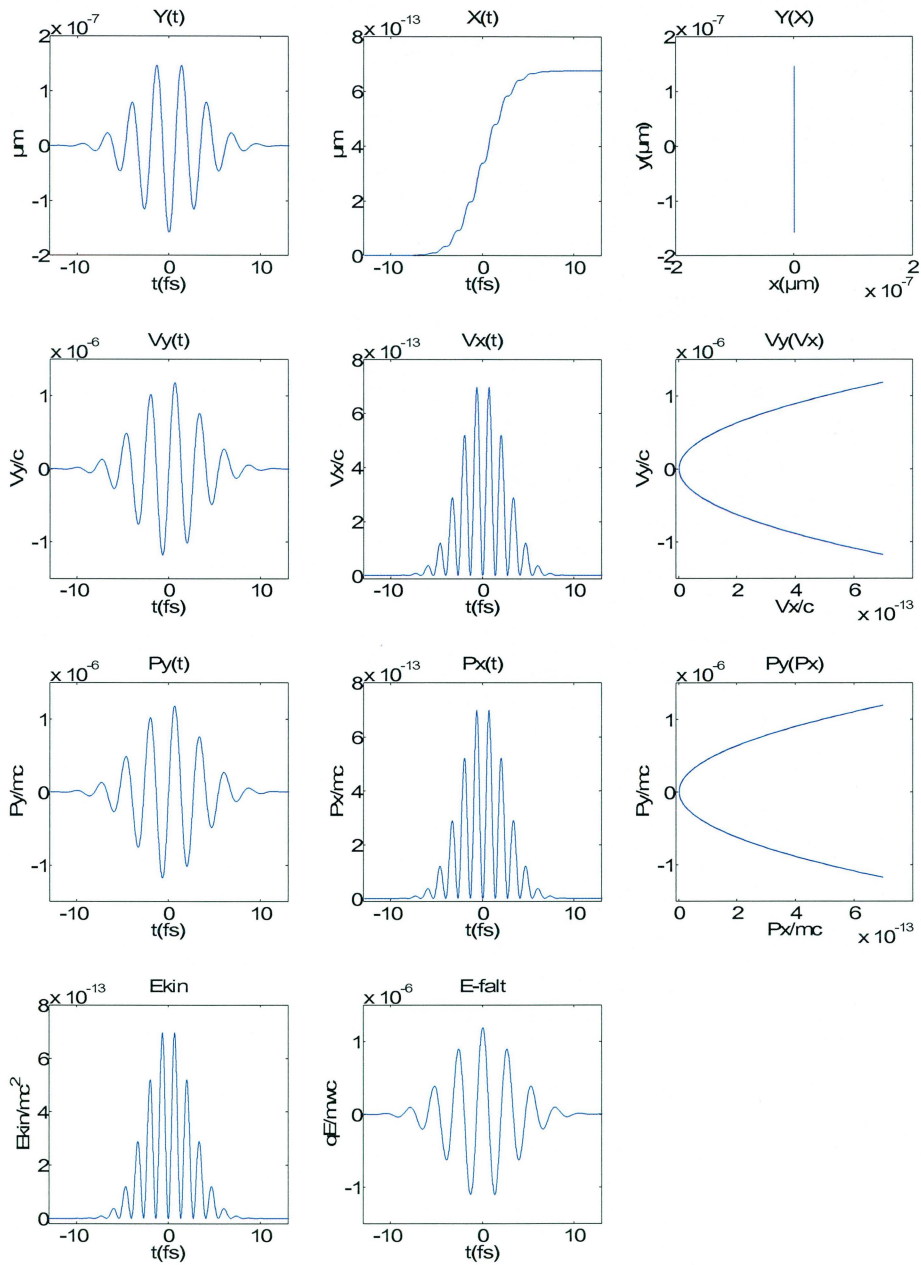
Den del av den kinetiska energin som beror av rörelsen i  $x$ -led är försumbar i det klassiska fallet. Vi har alltså

$$E_{kin} = \frac{mv_y^2}{2} = \frac{m}{2} \left( -\frac{qE_y}{m\omega} \sin(\omega t - kx) \right)^2 = \frac{q^2 E_y^2}{2m\omega^2} \sin^2(\omega t - kx)$$

vilket betyder att  $E_{kin} \propto I$ .



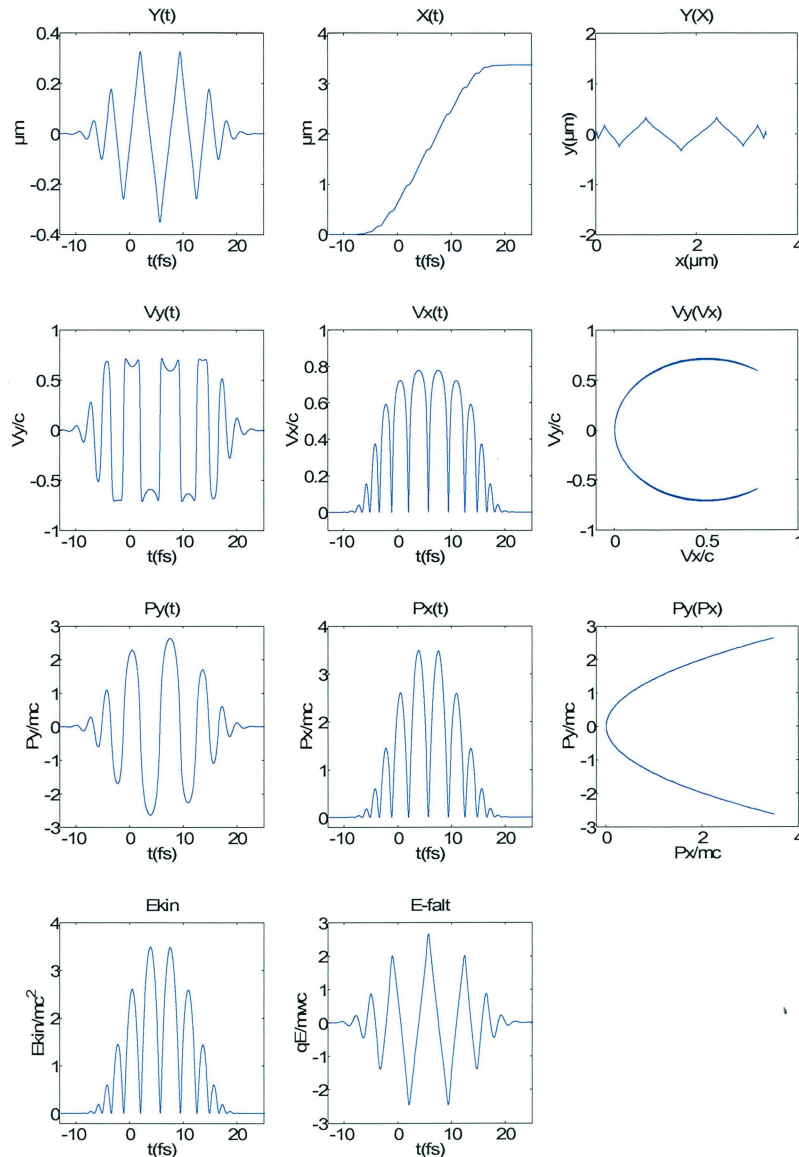
Figur 3.6.  $I = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ W/m}^2$ . Elektronen beter sig klassiskt. Magnetfältets inverkan kan visserligen skådas i  $X(t)$ , men observera axlarna! I  $Y(X)$  syns tydligt att elektronen i princip bara rör sig i  $y$ -led.



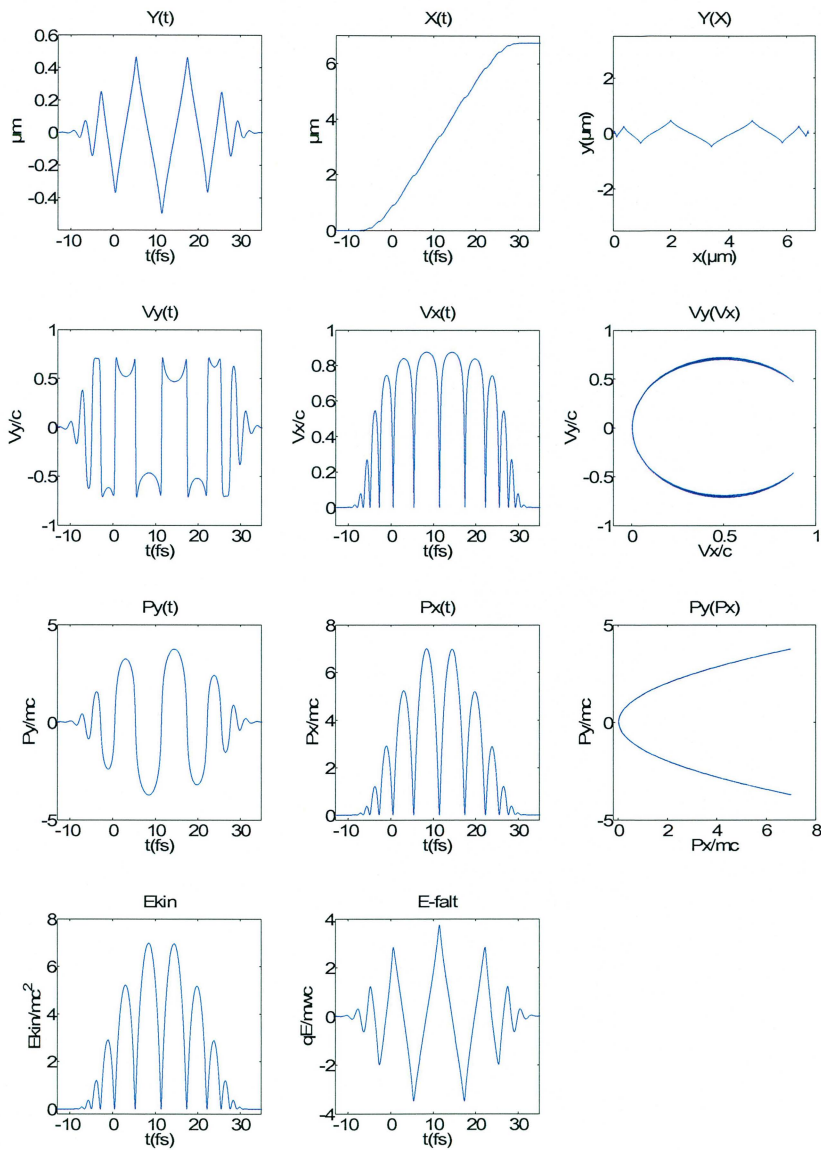
Figur 3.7.  $I = 3 \cdot 10^{10} \text{ W/m}^2$ . Graferna skiljer sig inte alltför mycket från Figur 3.6. Det intressanta här är att jämföra de olika amplituderna mellan figur 3.6 och denna figur. Tidigare har visats att  $v_y$  och  $y$  är proportionella mot  $\sqrt{I}$ , samt  $v_x$ ,  $x$  och  $E_{kin}$  mot  $I$  vilket verkar stämma vid jämförelse.



Vi kommer nu gå in i fallen där intensiteten har relativistisk karaktär. Figur 3.8 har ca  $10^{13}$  gånger så stor intensitet som de föregående,  $I=1,5 \cdot 10^{23} \text{W/m}^2$  och figur 3.9 har dubbla denna intensitet,  $I=3 \cdot 10^{23} \text{W/m}^2$ .



Figur 3.8.  $I=1,5 \cdot 10^{23} \text{W/m}^2$ . Här styr relativiteten. Lägesförflyttningen i x-led blir markant. I  $V_y(V_x)$  kan tydligt ses hur hastigheten i y-led viker av på grund av konsekvenser från relativiteten och magnetfältet. Detta syns inte i  $P_y(P_x)$ , just därför att rörelsemängden inte är uppåt begränsad.



Figur 3.9.  $I=3 \cdot 10^{23} \text{W}/\text{m}^2$ . Intressant att återigen jämföra amplituderna med figur 7. Då det gäller lägesgraferna, kan vi återigen se att positionen i  $y$ -led inte är linjärt växande, medan den tycks vara det i  $x$ -led. Hastigheten är givetvis inte linjärt växande i någon riktning. I så fall skulle ljusfarten passeras! Då det gäller rörelsemängden så tycks den återigen vara linjärt växande i  $x$ -led, men fortfarande inte i  $y$ -led. Även den kinetiska energin tycks vara linjärt växande.

## 4 Avslutning

Det här arbetet har riktat in sig på det mest grundläggande inom den elektromagnetiska strålningens påverkan på laddningar och kvar finns många intressanta områden att bygga vidare på. Elektromagnetisk strålning med annan polarisation är ett område som nog kan ge intressanta resultat.

För till exempel cirkulär polarisation kan följande implementeras. Det elektriska och det magnetiska fältet svänger i  $y$ - $z$ -planet och vågen propagerar i  $x$ -led. Lorentzuttrycket ges då för en elektron av

$$\frac{d}{dt} \frac{m\bar{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$$

där

$$\bar{v} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & B_y & B_z \end{vmatrix} = v_y B_z \bar{e}_x - v_z B_y \bar{e}_x - v_x B_z \bar{e}_y + v_x B_y \bar{e}_z$$

vilket leder till

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -q(v_y B_z - v_z B_y)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -q(E_y - v_x B_z)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -q(E_z + v_x B_y)$$

Placeras en horisontell  $z$ -axeln och en vertikal  $y$ -axel på enhetscirkeln, och genom att låta det elektriska fältet riktas i positivt  $y$ -led, vid  $t=x=0$ , så kommer det magnetiska fältet att riktas i positivt  $z$ -led. Använd vinkeln  $\theta$  i detta plan med en början vid positiv  $z$ -axel. Vi vet att resultanten,  $E$ , av  $E_z$  och  $E_y$  är konstant.

Då kan vi använda Pytagoras sats enligt

$$E^2 = E_z^2 + E_y^2$$

Där  $E_y = E \cos \theta$  och  $E_z = E \sin \theta$

Detta leder då till att

$$E_y = E\sqrt{1 - \sin^2 \theta} \quad \text{och} \quad E_z = E\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

Med samma resonemang kan sedan det magnetiska fältets komponenter plockas ut.

$$B_y = B\sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad \text{och} \quad B_z = B\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

Vinkeln  $\theta$  kommer fortsättningsvis att ha betydelsen  $\omega t - kx$ , eventuellt då med en fasförskjutning som villkor för begynnelsevärdet. Att överföra detta till Bunemans metod skulle kunna vara intressant.

I takt med att tekniken ger oss allt starkare lasrar kan detta komma att bli en allvarlig konkurrent till de stora och dyra partikelacceleratorerna, i vartfall inom experiment som inte kräver alltför stora energier. Detta område har en potentiell framtid.

Idag sker mycket av denna forskning i plasmor, där även hänsyn måste tas till många olika laddningars interna växelverkan. Simuleringar i plasmor måste alltså innehålla statistiska beräkningar och kan ge upphov till avancerade beräkningar.

Hur laddningar påverkas av sfärisk vågutbredning är ett område jag själv skulle finna mycket intressant, dels för att det beskriver naturen på bästa sätt, men också för att det är användbart inom många tekniska sammanhang, som till exempel kommunikation via radio. Strålning från något som kan betraktas som en punktkälla, utbreder sig alltid sfäriskt. Exempelvis en elektron eller en avlägsen antenn.

## Appendix

Koden som användes till simuleringen i Matlab hade följande utseende;

```
I=1.5*10^23 %intensiteten, W/m^2
T=5*10^-15 %laserpulsens varaktighet, s
L=800*10^-9 %våglängden, m
e=8.854188*10^-12 %kapacitansen i vakuum
c=299792458 %ljushastigheten i vakuum
q=1.602177*10^-19 %elementarladdningen
m=9.1093897*10^-31 %elektronens massa, kg
k=2*pi/L %vågtalet
w=2*pi*c/L %vinkelfrekvensen
E0=sqrt(2*I/(e*c))*q/(m*w*c) %E-fältet i pulsen, normaliserat.
D=T*w/500; %tidsteget, normerat

r=[]; v=[]; f=[]; h=[]; i=[]; j=[]; l=[]; o=[]; p=[]; z=[];

X(1)=0; %begynneläse i x-led
Y(1)=0; %begynneläse i y-led
Px(1)=0; %begynnelserörelsemängden i x-led
Py(1)=0; %begynnelserörelsemängden i y-led

for n=2:10002;
t=(T*(n-2)/500-5*T)*w; %normalisering, intervall mellan
% -5T och 15T

E(n)=E0*cos(t-X(n-1))*exp(-(t-X(n-1))^2/(T*w)^2); %Laserpulsen

pmx(n)=Px(n-1); %Buneman pusher
pmy(n)=Py(n-1)+D/2*E(n);

g(n)=(1+pmx(n).^2+pmy(n).^2).^(1/2);
u=D/2*E(n)./g(n); %eg t, men redan
% upptagen

s=2*u./(1+u.^2);

ptx=pmx(n)+pmy(n).*u;
ppy=pmy(n)-ptx.*s;
ppx=ptx+ppy.*u;

Px(n)=ppx; %Rörelsemängd i x-led
Py(n)=ppy+D/2*E(n); %Rörelsemängd i y-led

vx(n)=Px(n)./(g(n)); %hastighet i x-led
vy(n)=Py(n)./(g(n)); %hastighet i y-led

X(n)=X(n-1)+vx(n)*D; %läge i x-led
Y(n)=Y(n-1)+vy(n)*D; %läge i y-led
```

```

Ek=g(n)-1; %Kinetisk energi, normaliserad

r=[r t*10^15/w];
v=[v Y(n)*10^6/k];
f=[f X(n)*10^6/k];
h=[h vy(n)];
i=[i vx(n)];
j=[j Py(n)];
l=[l Px(n)];
o=[o E(n)];
p=[p Ek];

end

[r; v]'

subplot(4,3,1); plot(r,v); axis('square'); axis([-30 60 -3 3]);
title('Y(t)'); xlabel('t(fs)'); ylabel('μm');
subplot(4,3,2); plot(r,f); axis('square'); axis([-30 60 0 30]);
title('X(t)'); xlabel('t(fs)'); ylabel('μm');
subplot(4,3,3); plot(f,v); axis('square'); axis([0 30 -3 3]);
title('Y(X)'); xlabel('x(μm)'); ylabel('y(μm)');
subplot(4,3,4); plot(r,h); axis('square'); axis([-30 60 -1 1]);
title('Vy(t)'); xlabel('t(fs)'); ylabel('Vy/c');
subplot(4,3,5); plot(r,i); axis('square'); axis([-30 60 -0.1 1]);
title('Vx(t)'); xlabel('t(fs)'); ylabel('Vx/c');
subplot(4,3,6); plot(i,h); axis('square'); axis([-0.1 1 -1 1]);
title('Vy(Vx)'); xlabel('Vx/c'); ylabel('Vy/c');
subplot(4,3,7); plot(r,j); axis('square'); axis([-30 60 -3 3]);
title('Py(t)'); xlabel('t(fs)'); ylabel('Py(mc)');
subplot(4,3,8); plot(r,l); axis('square'); axis([-30 60 -0.2 4]);
title('Px(t)'); xlabel('t(fs)'); ylabel('Px(mc)');
subplot(4,3,9); plot(l,j); axis('square'); axis([-0.2 4 -3 3]);
title('Py(Px)'); xlabel('Px(mc)'); ylabel('Py(mc)');
subplot(4,3,10); plot(r,o); axis('square'); axis([-30 60 -3 3]);
title('E-falt'); xlabel('t(fs)'); ylabel('E');
subplot(4,3,11); plot(r,p); axis('square'); axis([-30 60 -0.2 4]);
title('Ekin'); xlabel('t(fs)'); ylabel('E(mc^2)');

```

## Bibliografi

- [1]. Göran Johansson, Våglära och optik, Teach support, Lund (1991)
- [2]. A.L Galkin, V.V. Korobkin, M. Yu. Romanovsky, and O.B Shiryaev, Dynamics of an electron driven by relativistically intense laser radiation. *Physics of plasmas* **15**, 023104 (2008)
- [3]. Paul Gibbon, Short pulse laser interaction with matter, Imperial college press, London (2007)
- [4]. Charles K. Birdsall and A. Bruce Langdon, Plasma physics via computer simulation, McGraw-Hill Book Company, Singapore (1985)