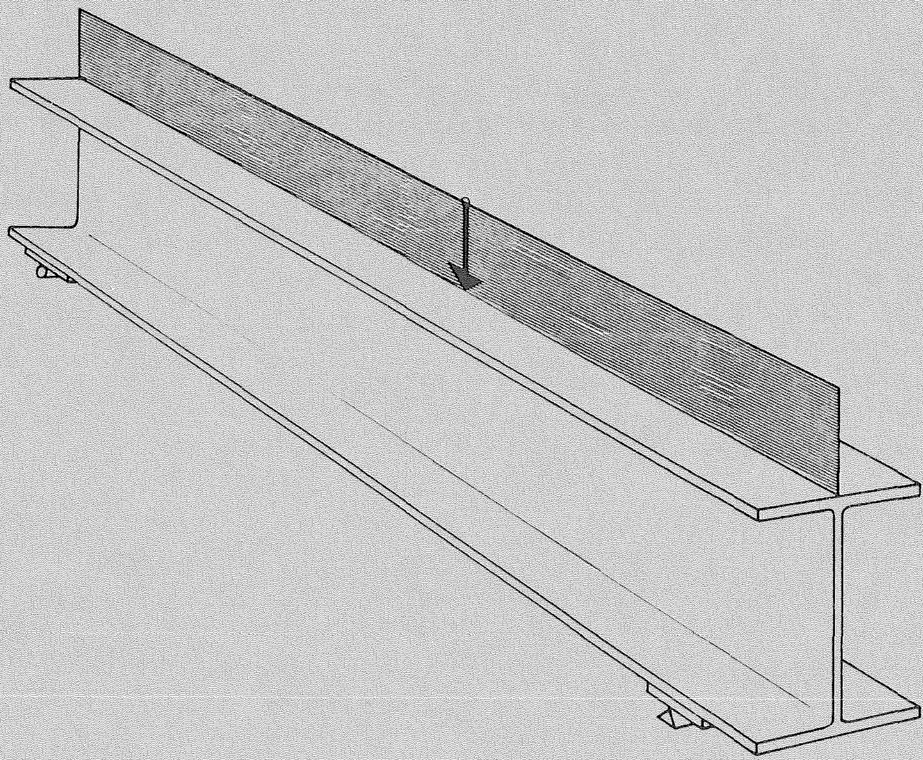
Avdelningen för Bärande Konstruktioner
Tekniska Högskolan i Lund



DEMONSTRATIONSPROGRAM
BELASTNING AV FRITT UPPLAGD BALK

EXAMENSARBETE
Handledare: Sture Åkerlund

LUND AUGUSTI 1986

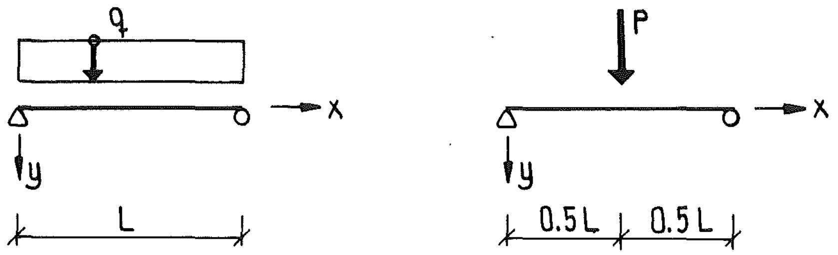
Christer Boklund

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

INLEDNING

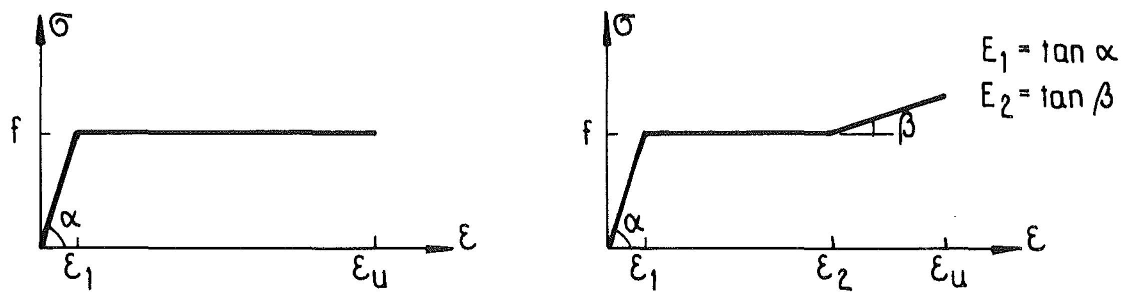
Målsättningen har varit att skapa ett program som visar hur spänningsfördelning, plasticeringszon och nedböjning förändras för en fritt upplagd balk då den belastas till brott och sedan avlastas.

För att begränsa uppgiften har två lastfall studerats. Dels balken belastad med en jämt utbredd last dels balken belstad med en punktlast på mitten (figur 1). Vad gäller balkprofil så har endast I-tvärsnitt behandlats. (Man kan trots det studera även rektangulära tvärsnitt genom att sätta livtjockleken lika med flänsbredden)



Figur 1. De två lastfall som behandlats

Beräkningarna är utformade så att det finns möjlighet att välja mellan två arbetskurvor. Den ena arbetskurvan är idealelastoplastisk (figur 2A). Den kan med någorlunda god säkerhet anses gälla för många stål och är därför en vanlig idealisering vid beräkning av stålkonstruktioner. Om man studerar en konstruktions verkningssätt då den belastas till brott är det inte alltid som den idealelastoplastiska arbetskurvan är en tillräckligt bra idealisering av verkligheten. Framför allt gäller detta



Figur 2 (A o B). A - Idealelastoplastisk arbetskurva
B - Arbetskurva med töjhärdning

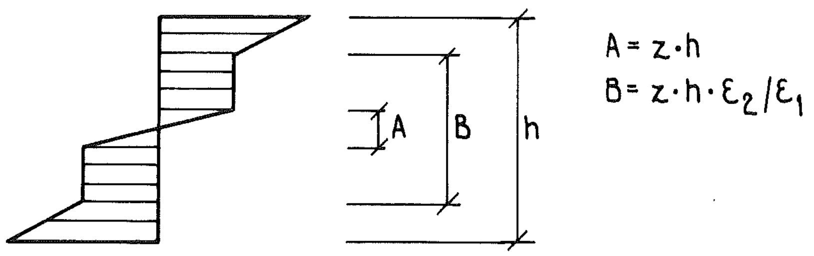
för vissa typer av material, t ex varmvalsat stål. Man måste då på ett bättre sätt försöka efterlikna formen på materialets arbetskurva. Ett i vissa fall bra sätt att göra detta på är att ta hänsyn till töjhärdning i materialet. Den andra arbetskurvan innefattar därför en töjhärdningsbit (figur 2B). Det innebär att efter det att flytgränsen uppnås och spänningen är konstant kommer, vid fortsatt belastning, spänningen så småningom åter att öka innan materialet slutligen går till brott.

För just varmvalsat stål brukar man räkna med att töjhärdningen börjar när töjningen(ε_2) är i storleksordningen tio gånger så stor som gränstöjningen(ε_1). Linjen för spänningens fortsatta tillväxt har en riktningskoefficient(E_2) på ungefär $0.02 * E_1$. Brott-töjningen(εu) varierar i stor utsträckning men är normalt någonstans på mellan 5 och 20 %. Denna töjning används i beräkningarna som brottkriterium.

TEORI SOM PROGRAMMET BYGGER PÅ

Snittmoment och spänningsfördelning

Om man utgår från en arbetskurva enligt figur 2B och förutsätter ett plant tvärsnitt kommer spänningsfördelningen vid töjhärdning att se ut enligt figur 3. För att kunna rita upp denna måste de i figuren markerade måtten (A o B) vara bestämda.



Figur 3.

För att förenkla beräkningarna införs en faktor, z, som anger hur stor del av höjden, h, som inte är plasticerad dvs A=z*h. Genom likformighet kan man sedan visa att $B=z*h*\epsilon_2/\epsilon_1$. (Definition av ϵ_1 och ϵ_2, se figur 2.)

När balken belastas tas z i de olika snitten fram genom att sätta yttre och inre moment lika. De yttre momenten beräknas därvid på vanligt sätt via jämviktsekvationer för balken. Uttryck för de inre momenten fås genom att ta jämvikt för snitten. Tyvärr blir dessa uttryck relativt stökiga. När yttre och inre moment sätts lika går det därför inte att explicit lösa ut z. I stället får ett iterativt förfaringssätt användas där man letar sig fram till vilket z som ger ett inre moment lika med det yttre.

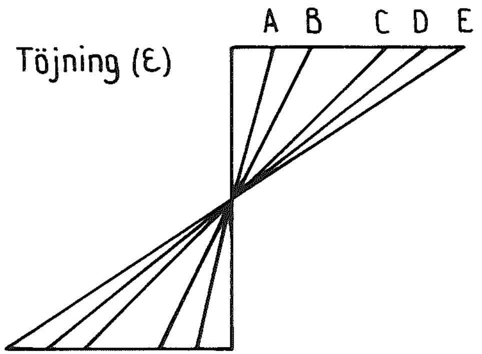
För en balk belastad med jämt utbredd last blir

M(yttre)=q*x*L/2-q*x*x/2

och motsvarande för punktlast på mitten.

M(yttre)=P*x/2

Uttrycken för de inre momenten blir olika beroende på i vilken utsträckning tvärsnittet är plasticerat och töjhärdat. För ett I-tvärsnitt behövs det totalt 5 olika uttryck för att beskriva inre momentets tillväxt från pålastning till brott. Ett av uttrycken måste dessutom delas upp i 2 delfall beroende på att töjhärdningen kan börja både innan och efter det att plasticeringen vandrat över i livet. Hela förloppet sammanfattas i figur 4 på nästa sida.



A $\varepsilon < \varepsilon_1$ Ingen plasticering

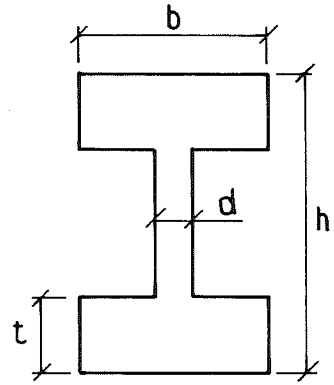
B $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ Plasticering endast i flänsen

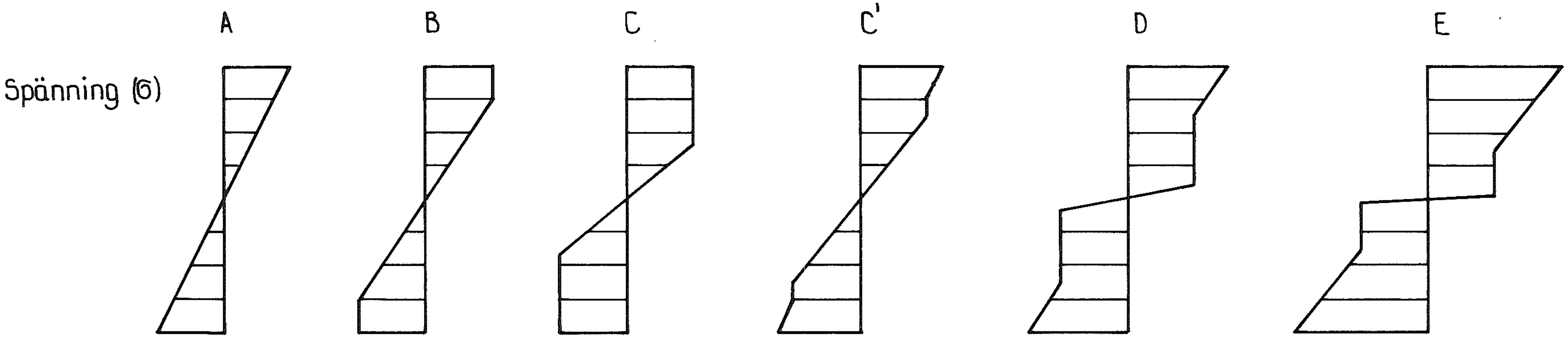
C $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ Plasticering i både fläns och liv

C' $\varepsilon > \varepsilon_2$ Töjhärdning i fläns

D $\varepsilon > \varepsilon_2$ Plasticering i liv och töjhärdning i fläns

E $\varepsilon > \varepsilon_2$ Töjhärdning i både fläns och liv





A $M(inre) = W*f$

B $M(inre) = \frac{f}{z(x)}*(W - \frac{b*h^2}{12}*(1-z(x))^2(2+z(x)))$

C $M(inre) = f*b*t*(h-t) + \frac{f*d}{4}(h-2t-z(x)*h)(h-2t+z(x)*h) + \frac{f*d}{6}*z(x)^2*h^2$

C' $M(inre) = \frac{f}{z(x)}*(W - \frac{b*h^2}{12}*(1-z(x))^2(2+z(x))) + E_2*\frac{b*h^2}{12}*(\frac{\varepsilon_1}{z(x)} - \varepsilon_2)(1-z(x)\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1})*(2+z(x)\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1})$

D $M(inre) = f*b*t*(h-t) + \frac{f*d}{4}(h-2t-z(x)*h)(h-2t+z(x)*h) + \frac{f*d}{6}*z(x)^2*h^2 + E_2*\frac{b*h^2}{12}*(\frac{\varepsilon_2}{z(x)} - \varepsilon_2)(1-z(x)\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1})(2+z(x)\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1})$

E $M(inre) = f*b*t*(h-t) + \frac{f*d}{4}(h-2t-z(x)*h)(h-2t+z(x)*h) + \frac{f*d}{6}*z(x)^2*h^2 + E_2(h - \frac{2}{3}t)*\frac{t^2*b*\varepsilon_1}{h*z(x)} + E_2*\frac{d}{12}(\frac{\varepsilon_1}{z(x)}*\frac{h-2t}{h} - \varepsilon_2)(h*(1-z(x)\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1})-2t)(h*(2+z(x)\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1})-4t) + E_2(\frac{\varepsilon_1}{z(x)}*\frac{h-2t}{h} - \varepsilon_2)*b*t*(h-t)$

Figur 4.

Nedböjning

Så länge balken befinner sig i elastiskt stadium kan nedböjningen längs balken erhållas ur de välkända sambanden från Bygg. (Definition av riktningar, se figur 1)

(EKV1) $y(x)=q*l^3*x*(1-2*x^2/l^2+x^3/l^3)/(24*EI) \quad (0\leq x\leq l)$

för jämt utbredd last

(EKV2) $y(x)=P*l^2*x*(3-4*x^2/l^2)/(48*EI) \quad (0\leq x\leq l/2)$

för punktlast på mitten

När materialet börjar att platiceras gäller inte dessa samband längre. Man skulle då kunna utnyttja att nedböjningen, y, kan skrivas

(EKV3) $y(x)=\int_0^x y'\ dx$

För att lösa denna integral numeriskt behövs det ett ingångsvärde, y'(0). Eftersom balken är fritt upplagd är dock y'(0) obekant. Om man nu utnyttjar att balken förutsätts symmetriskt belastad är det emellertid möjligt att komma vidare genom att först räkna ut mittnedböjningen och sedan stega sig tillbaka. För halva balken gäller då (här $0\leq x\leq l/2$)

(EKV4) $y(x_1)=y(mitt)-\int_{x_1}^{l/2} y'\ dx \quad$ där $y(mitt)=\int_0^{l/2} y'\ dx$

Uttrycket för y(mitt) kan genom partiell integration och utnyttjande av de passande randvillkoren omformas till följande.

(EKV5) $y(mitt)=\int_0^{l/2} y'\ dx = [x*y']_0^{l/2} - \int_0^{l/2} x*y''\ dx =$

$=-\int_0^{l/2} x*y''\ dx$

Ty då $x=l/2$ är $y'=0$

Genom insättning i det tidigare sambandet (EKV4) fås

(EKV6) $$y(x_1)=-\int_0^{1/2} x*y''\,dx - \int_{x_1}^{1/2} y'\,dx$$

Balken indelas i n stycken element och integralerna löses numeriskt. För att kunna göra detta behövs värden på y'' och y'.

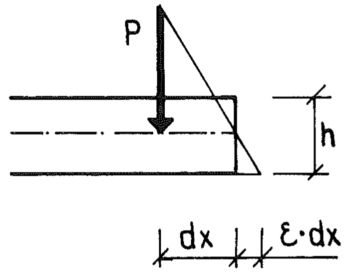
y'' erhålls genom att titta på sambandet mellan krökning och töjning (figur 5)

$$dx/\rho = \varepsilon*dx/(0.5*h)$$

$$1/\rho = 2*\varepsilon/h$$

Men $1/\rho = -y''$

(EKV7) $$y''= -2*\varepsilon/h$$



Figur 5.

y' fås genom att utnyttja att

$$dy'/dx = y''$$

(EKV8) $$y'=\Sigma\, y''*dx$$

En sammanställning av ekvation 6, 7 och 8 ger till slut

$$y(x_1)=-\int_0^{1/2} x*y''\,dx - \int_{x_1}^{1/2} y'\,dx$$

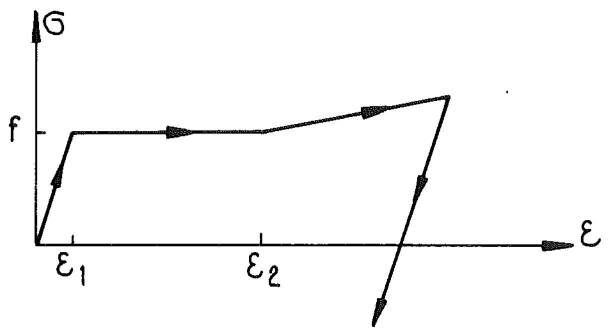
$$y''= -2*\varepsilon/h$$

$$y'(x)= y'(x_1)+\Sigma\, y''dx = y'(x_1)-\Sigma(2*\varepsilon*dx/h)$$

Nedböjningen längs balken kan nu beräknas. Visserligen saknas ett ingångsvärde på y' i punkten x_1 men detta problem kan man gå runt genom att vända på integrationsgränserna för den andra integralen. Som ingångsvärde blir det då istället y' i x=l/2 och eftersom balken förutsätts symmetriskt belastad är y'(l/2)=0.

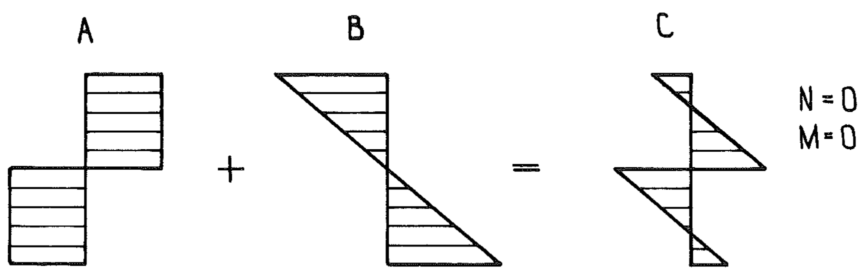
Avlastning

Vid avlastning återgår de elastiska deformationerna. Arbetskurvan som styr förfarandet ser ut enligt figur 6.



Figur 6. Arbetskurva

Spänningsfördelningen förändras på så sätt att en reduktion motsvarande avlastningens storlek kommer att äga rum. Denna reduktion har en helt elastisk fördelning. Efter fullständig avlastning kan som en kontroll, tvärsnittets jämvikt studeras. Såväl moment som normalkraft skall då vara noll (figur 7).



Figur 7. Spänningsfördelning efter pålastning (A), av negativ last (B) och efter avlastning (C)

För att underlätta förståelsen kan man tänka sig avlastningen som en negativ last, dvs den verkar underifrån. Materialet fungerar helt elastiskt med avseende på den negativa lasten. Efter fullständig avlastning är, om balken dessförinnan belastats till brott, den negativa lasten lika med brottlasten och balken följdaktligen obelastad.

Ovanstående resonemang är till god hjälp även då det gäller att ta reda på hur nedböjningen förändras. Den ursprungliga nedböjningen reduceras helt enkelt med en elastisk nedböjning motsvarande den negativa lastens storlek.

MANUAL

Programmet behöver indatauppgifter för att definiera arbetskurvan och balkens utseende. Dessa indata hämtas från redan excisterande textfiler. Någon av de två olika lasttyperna skall dessutom väljas. Enheterna är genomgående N och mm.

'Ange typ av arbetskurva (UT eller MT)'

UT - medför att arbetskurvan blir idealelastoplastisk
MT - medför att arbetskurvan innehåller töjhärdning

'Ange typ av tvärsnitt (I eller R)'

I - innebär att balken får ett I-tvärsnitt
R - innebär att balken får ett rektangulärt tvärsnitt

'Välj lasttyp, (q eller P)'

q - innebär jämt utbredd last
P - innebär punktlast på mitten

De hämtade indatauppgifterna skrivs ut på skärmen och kan nu, om så önskas, ändras.

'Tryck C om du vill ändra något värde - annars vagnretur (cr)'

C - medför att det följer frågor för ändring av något värde. Aktuella indatauppgifter skrivs sedan på nytt ut på skärmen med möjlighet till ytterligare ändringar.

Programmet beräknar sedan nedböjning, spänningsfördelning och plasticeringszonens utbredning för olika laster. Beräkningarna börjar med den last som ger flytning och fortsätter sedan i steg upp till brottlasten. Efter varje laststeg uppritas resultatet och beräkningarna fortsätter efter tryckning på vagnretur (cr).

Efter det att resultatet vid brottlasten är uppritat är det dags att avlasta balken. Avlastningen kan ske i ett eller flera steg.

'Ange till vilken last som balken skall avlastas'

Den angivna lasten måste givetvis vara mindre än aktuell last på balken.

Programmet beräknar nu nedböjning och spänningsfördelning för den last som balken avlastats till. Resultatet ritas upp och efter det kan man antingen lämna programmet eller fortsätta avlastningen, om den ej är avslutad.

'Skriv E om du vill lämna programmet - annars vagnretur (cr)'

Väljer man vagnretur (cr) får man ange en ny last som balken skall avlastas till

E - medför att man lämnar programmet

Programmet är utformat på sådant sätt att det ej klarar av att ta hand om "extrema indata" även om dessa ibland kan vara teoretiskt möjliga. Med "extrema indata" menas här sådana som ger brott redan innan plasticering och töjhärdning vandrat över i livet vilket kan bli fallet genom olämplig definition av antingen arbetskurva eller tvärsnitt.

För ett vanligt I-tvärsnitt innebär detta att brotttöjningen måste vara minst 20% större än den töjning som medför töjhärdning. Omvänt gäller att med en normal arbetskurva så får inte den sammanlagda flänstjockleken vara större än 70% av tvärsnittets totala höjd. Om programmet fått indata som det ej klarar avbryts körningen.

RESULTAT

Programmet är framtaget som ett demonstrationsprogram för att underlätta och öka förståelsen för vad som händer när man lämnar det elastiska området och går över till det plastiska. Avsikten har framför allt varit att ge en möjlighet att jämföra två olika idealiseringar av ett materials arbetskurva med varandra - dels den idealelastoplastiska dels den där hänsyn är tagen till töjhärdning. Om man jobbar med programmet finner man snart att de två betraktelsesätten ger tydliga och grundläggande skillnader i balkens beteende vid belastning till brott.

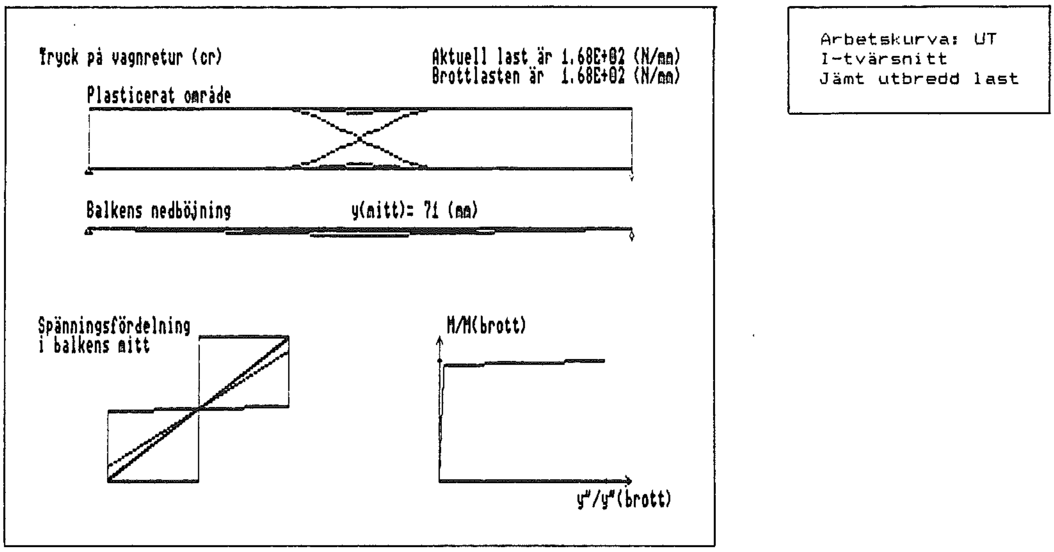
Brottlasten blir naturligtvis större om man istället för en idealelastoplastisk arbetskurva utgår från en arbetskurva med töjhärdning. Ökningen är i storleksordningen 40 till 70 % beroende på tvärsnittsform och lasttyp. Ett material som töjhärdas kommer vid brott att ha en väl utbredd plasticeringszon. Detta medför att deformationerna blir stora. Jämför man, på samma sätt som med brottlasten, finner man att nedböjningen ökar med 400, ibland ända upptill 800 %. De elastiska deformationerna blir i sammanhanget nästan alltid försumbara. I vissa fall är de endast 1 % av de plastiska. Även efter fullständig avlastning kommer balken därför att vara kraftigt deformerad. På nästa sida finns några utdrag från körningar av programmet.

Ett examensarbete som detta skall i tid motsvara ungefär två månaders heltidsarbete. Det kan tyckas som en lång tid men för många av oss visar sig detta vara helt felaktigt. När man väl gett sig i kast med uppgiften rinner tiden ofta iväg på ett obehagligt snabbt sätt. För att någotsånär hålla tidsramarna blir man ibland tvungen att göra begränsningar. Så har skett även här. Just därför känns det motiverat att nämna något om vad som ligger närmast till hands att göra vid en eventuell utvidgning av uppgiften.

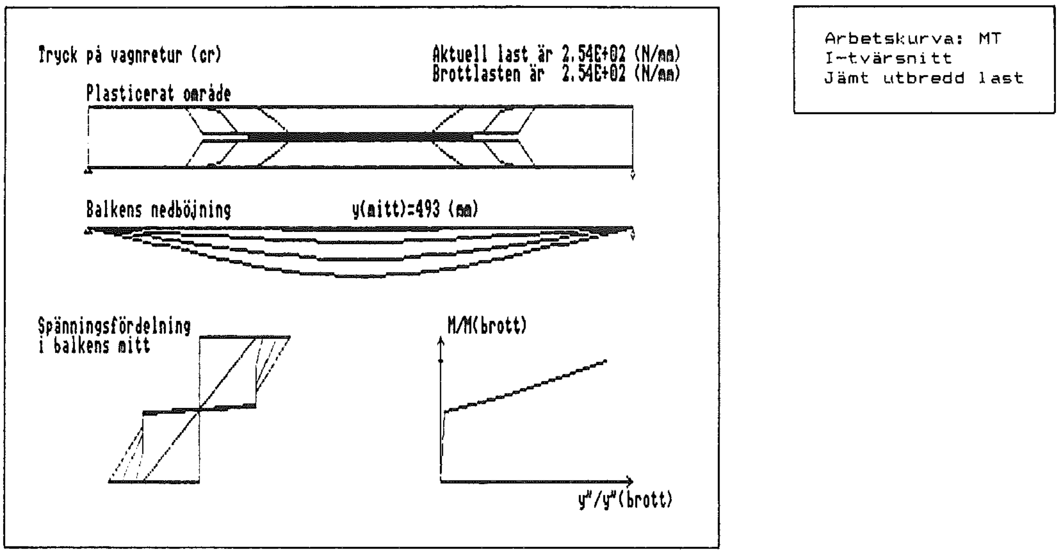
Det hade varit bra om det funnits ytterligare typer av arbetskurvor att välja på. En generell trilinjär arbetskurva hade till exempel gjort det möjligt att bättre approximera många material.

Vidare har det i beräkningarna förutsatts att balken är symmetriskt belastad och därför har vinkeln y'=0 på mitten. Detta har varit till stor hjälp vid lösningen av de integraler som förekommer vid beräkning av nedböjningen. Ett tillvägagångssätt som inte förutsätter symmetrisk belastning av balken hade givetvis varit att föredra.

Slutligen kan nämnas att det även i samband med avlastningen skulle vara intressant att kunna se plasticeringszonens utbredning. För ett material som töjhärdas kommer nämligen, i motsats till ett idealelastoplastiskt material, en del av tvärsnittet att förbli plasticerat under en stor del av avlastningen.



Figur 8. Programutdrag - material utan töjhärdning. Om balken avlastas fullständigt kommer resterande mittnedböjning att vara 55 mm.



Figur 9. Programutdrag - material med töjhärdning. Om balken avlastas fullständigt kommer resterande mittnedböjning att vara 470 mm.