

Lamellerade balk- och bågkonstruktioner av trä

EXAMENSARBETE TVBK-5042

Handledare:

Anders Nilsson

Carl-Magnus Dolby

LUND SEPTEMBER 1989

PETER GUSTAVSSON
CHRISTOPH TIEDTKE

FÖRORD

Detta examensarbete behandlar laminerade balk- och bågkonstruktioner av trä, med spikplåtar som förband. Arbetet har initierats av Carl -Magnus Dolby vid Institutionen för Lantbrukets Byggt teknik (LBT) i Lund.

Examensarbetet har utförts vid avdelningen för Bärande Konstruktioner, sektion Väg- och vatten, Lunds Tekniska Högskola. Handledare för examensarbetet har varit redan nämnde Carl Magnus Dolby, forskningsledare vid LBT och Anders Nilsson vid Avdelningen för Bärande Konstruktioner, Lunds Tekniska Högskola. Dessa vill vi ge ett varmt tack för allt stöd samt för hjälp med idéer och nödvändigt material.

Examensarbetet, som utökades till sin omfattning, har ingått som en del av det projekt som omfattar "Sammansatta balkar och bågar av trälameller med spikplåtar som förbindare". Projektet bedrivs vid LBT under ledning av Dolby och finansieras av Styrelsen för Teknisk Utveckling (STU).

Förutom våra handledare vill vi tacka

- företaget Nordisk Kartro som tillhandahöll spikplåtar.
- Sven Thelandersson för viktiga synpunkter.
- Bertil Enqvist för goda råd inför de experimentella undersökningarna.
- personalen i verkstaden för all den nödvändiga hjälp vi fått i samband med uppbyggandet av bågprovningstrustningen.
- Per-Olof Rosenkvist som hjälpt oss med de experimentella undersökningarna och gett oss det stora förtroendet att själva få utnyttja skolans utrustning och lokaler under semestern. Dessutom tackar vi för att ha fått störa hans semesterfrid per telefon då vi har haft problem med mätutrustningen.
- Ingbritt Larsson för hjälp med layouten.

Lund 1989-08-31

Peter Gustavsson

Christoph Tiedtke

ABSTRACT

The present work deals with wooden laminated beams and arches joined with nail plates. Analysis methods for shorthand as well as computer calculations are presented.

A number of practical experiments have been performed as a validity check of the theory.

The economy for this type of construction compared with glued laminated timber is discussed.

Keywords are: wood, laminated beams, laminated arches, compounded constructions, nail plates.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING		sida
	SAMMANFATTNING	5
1.	INLEDNING	7
1.1	Bakgrund	7
1.2	Syfte	8
1.3	Problemställningar	8
1.4	Avgränsningar	8
2.	SAMMANSATTA TRÄKONSTRUKTIONER	9
2.1	Ingen samverkan	9
2.2	Fullständig samverkan	10
2.3	Delvis samverkan	10
2.4	Spikplåtar som fästdon	11
3.	MATERIAL	12
3.1	Trä	12
3.1.1	Träets uppbyggnad	12
3.1.1	Hållfasthetsegenskaper	12
3.1.2	Limträ	13
3.1.3	Lamellerade träkonstruktioner med spikplåtar	14
3.1.4	Dimensionerande hållfasthetsvärden	14
3.2	Spikplåtar	16
4.	BERÄKNINGSPRINCIPER	17
4.1	Analytisk beskrivning av problemet	17
4.1.1	Dubbelsymmetrisk balk med tre lameller	18
4.1.2	Dubbelsymmetrisk balk med n stycken lameller	21
4.1.3	Bågkonstruktioner med delvis samverkan	23
4.1.4	Ekvivalent balk	24
4.1.5	Ekvivalent last	24
4.2	Analytisk lösning av differentialekvation	27
4.3	Lösning med datormodell	29
5.	EXPERIMENTELLA UNDERSÖKNINGAR	32
5.1	Spikplåtsförband	33
5.1.1	Spikplåtarnas förskjutningsmodul	35
5.1.2	Slutsats	36

5.2	Tillverkning av balkar och bågar	37
5.3	Balkar	39
5.3.1	Provningstillfälle I	40
5.3.2	Provningstillfälle II	46
5.3.3	Summering av balkprovningen	50
5.4	Bågar	52
5.4.1	Provningssuppställning	52
5.4.2	Belastningsfall	53
5.4.3	Provningen	54
5.4.4	Provningsresultat	55
5.4.5	Egenspänningar	57
5.4.6	Egenspänningarnas inverkan på dimensionerande last	59
5.4.7	Erfarenheter	60
6.	DIMENSIONERING - balkar och bågar	61
7.	KOSTNADSJÄMFÖRELSE	63
8.	SLUTSATSER	65
	REFERENSLISTA	66
	BILAGA A	Härledning av grundekvation
	BILAGA B	Lösning av grundekvation
	BILAGA C	Ekvivalenta laster
	BILAGA D	Provuppställning
	BILAGA E	Dimensionering

SAMMANFATTNING

Bakgrund och syfte

Iden med spikplåtssammansatta trälamellkonstruktioner kommer ursprungligen ifrån Nya Zeeland. Konstruktionen har ännu inte prövats i Sverige, varför Inst för lantbrukets byggnadsteknik (LBT) i Lund initierade ett examensarbete på avdelningen för Bärande Konstruktioner, Tekniska Högskolan i Lund.

Arbetet bestod i att utföra teoretiska beräkningar, praktiska försök samt göra en enklare kostnadsjämförelse med limträ.

Teoretisk beskrivning

Den teoretiska beskrivningen har utförts dels med en analytisk modell, dels med en datormodell. För den analytiska modellen används teori för raka balkar med delvis samverkan, se t ex Larsen Riberholt /1/.

Experimentella undersökningar

För att verifiera de teoretiska resultaten har praktiska försök utförts i tre steg. Bestämning av spikplåtarnas förskjutningsmodul, provning av raka balkar samt provning av bågar.

Det teoretiska resultatet stämde för bågkonstruktionerna bra överens med de praktiska försöken. För balkarna stämde teori och verklighet sämre överens. Balkarna var styvare i verkligheten än enligt vad de teoretiska beräkningarna visade.

De praktiska försöken visade att en bågform med allt för kraftig krökning ej är att föredra. För att inte egen-spänningarna skall bli för stora bör

$$8 f / l^2 < 0.15 \quad \text{där } l = \text{bågens spännvidd} \\ f = \text{bågens pilhöjd}$$

Kostnadsanalys

För att utröna om konstruktionen är av ekonomiskt intresse har en enkel kostnadsjämförelse med limträ gjorts.

I figur 1 visas inom det streckade området marginalkostnaden. Marginalkostnaden är total limträkostnad minus materialkostnaderna för den spikplåtssammansatta bågen.

Om man bortser ifrån eventuella estetiska krav och där något större nedböjningar kan accepteras, vågar vi påstå att dessa konstruktioner kan konkurrera på marknaden. Fördelarna är att de är billiga och framförallt lätta att tillverka.

Fig.1. Kostnadsjämförelse med limträ

Dimensionering

Att handräkna en konstruktion med delvis samverkan är för arbetskrävande för att praktiskt kunna vara genomförbart.

För att dimensioneringen skall bli så enkel som möjligt, har vi valt att framställa en diagrammetod för bågar samt en tabellmetod för balkar.

I figur 2 visas ett utdrag ur diagrammetoden för bågkonstruktionen. Med hjälp av de givna förutsättningarna: spännvidd, pilhöjd, c/c avstånd bågar samt snözon, kan en erforderlig dimension plockas fram.

Fig.2. Dimensionering av båge

1. INLEDNING

1.1 BAKGRUND

De bågkonstruktioner i trä, som finns i Sverige, är vanligtvis utförda i limträ, dvs av laminerade krökta balkar med lim som förbindningsmedel.

Laminerade bågar med spikplåtar som förbindare har hittills inte prövats i Sverige, men i utlandet finns viss erfarenhet. De visar sig där vara billigare i tillverkning än motsvarande i limträ.

Idén med denna typ av stomkonstruktion kommer ursprungligen från Nya Zeeland. Där har företaget Econo Built Systems Ltd sedan 1982 praktiserat byggmetoden och genomfört ett antal projekt.

Då idén ännu ej lanserats i Sverige och Europa har Institutionen för Lantbrukets Byggnadsteknik vid Sveriges Lantbruksuniversitet initierat ett examensarbete vid Sektionen för Väg och Vatten på Tekniska Högskolan i Lund.

På Nya Zeeland har denna typ av stomkonstruktion främst använts vid byggande av hallbyggnader, flyghangarer, ridhallar samt olika typer av lantbruksbyggnader med spännvidder från 8 -70 m.

Fig.1.1 och 1.2 visas några av de på Nya Zeeland genomförda projekten.

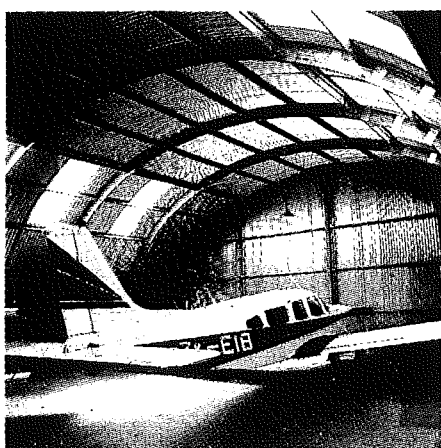


Fig.1.1 Flyghangar

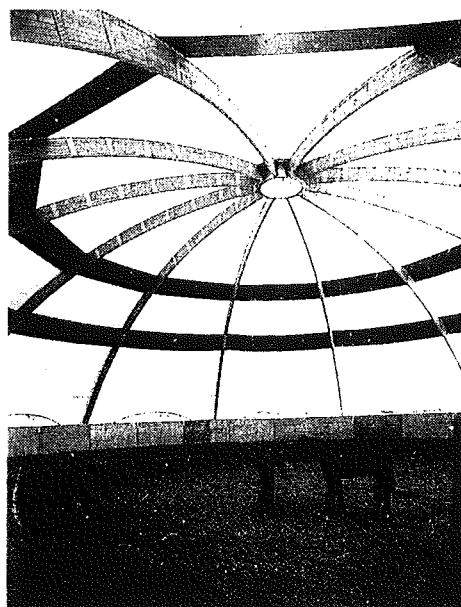


Fig.1.2 Ridhus

1.2 SYFTE

Vår uppgift, som omfattar sammansatta lamellerade träkonstruktioner med spikplåtsförband, är att ta fram beräkningsmetoder, utföra experimentella undersökningar samt att göra en kostnadsjämförelse med materialet limträ.

1.3 PROBLEMSTÄLLNINGAR

Följande frågeställningar är intressanta:

- Vilka prestanda har den med spikplåtar sammansatta balken i jämförelse med limträ?
- Vilken minsta krökningsradie är möjlig vid tillverkning av sammansatta träbågar?
- Går bågen att tillverka med små resurser?
- Är konstruktionen ekonomiskt intressant?

1.4 AVGRÄNSNINGAR

Inom ramen för detta examensarbete har hänsyn ej tagits till alla förekommande variabler.

De avgränsningar som här göres är:

- Bågform endast som parabel
- Vid experimentella undersökningar har hänsyn ej tagits till långtidslast och fuktpåverkan
- Samtliga experimentella undersökningar har utförts med virkeskvalitet T24
- Två spikplåtstyper har använts, nämligen Nordisk Kartros typ PTN och typ M
- Ingen hänsyn till brandteknisk dimensionering
- Stabilitetsproblem typ vippning har ej beaktats

2. SAMMANSATTA TRÄKONSTRUKTIONER

Metoden att bygga sammansatta balkar och bågkonstruktioner av trä har använts sedan lång tid tillbaka. Den idag dominerande metoden är användningen av limmade träkonstruktioner.

Förutom lim kan fästmedel typ spik, bult eller spikplåt användas som kraftöverförande förband.

2.1 INGEN SAMVERKAN

Då ett antal brädor, lameller, läggs fritt över varandra på två stöd och belastas, glider dessa i förhållande till varandra, se figur 2.1. I figuren visas även spänningsfördelningen över tvärsnittet.

Den relativa förskjutningen mellan lamellerna är noll i balkmitt och störst vid upplagen. Här råder det ingen samverkan, utan var och en av brädorna bär upp sin del av den påförda lasten.

Styvheten blir här:

$$EI_0 = En \frac{bh^3}{12} = En I_1$$

där E = E-modulen

n = antal lameller

b = lamellbredd

h = lamellhöjd

I_1 = tröghetsmoment
för en lamell

Konstruktionen får alltså i detta fall en styvhet, som är en lamells styvhet multiplicerat med antalet lameller.

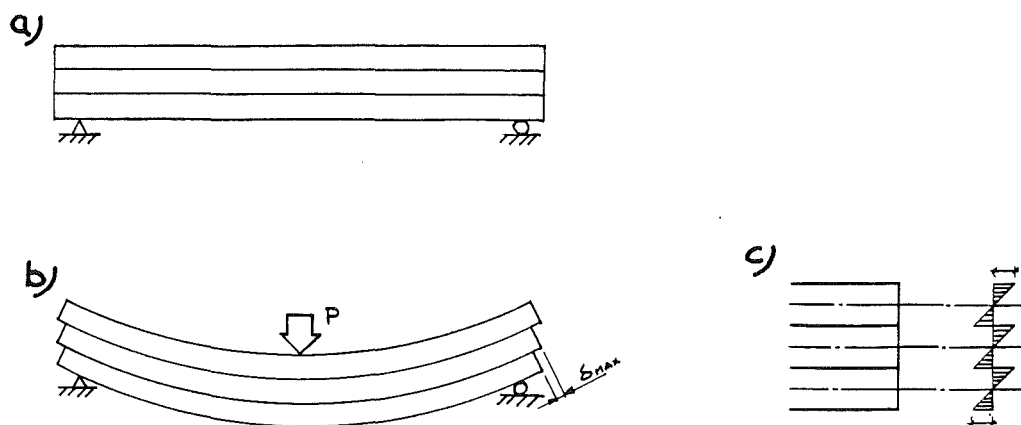


Fig.2.1 a) Obelastat tillstånd c) Spänningsfördelning
b) Belastat tillstånd

2.2 FULLSTÄNDIG SAMVERKAN

Förhindras glidningen helt genom att t ex limma ihop lamellerna erhålls fullständig samverkan mellan dessa. De skjuvkrifter som uppstår mellan lamellerna tas då helt upp av limmet. Styvheten blir densamma, som för ett homogent tvärsnitt, nämligen:

$$EI = E \frac{bH^3}{12}$$

där H = total höjd, dvs $n \cdot h$

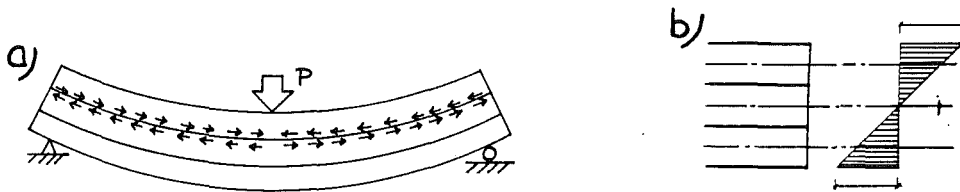


Fig.2.2 a) Limmat tvärsnitt med skjuvkrifter i limfogen.
b) Spänningsfördelning över tvärsnittet.

Förhållandet mellan de ovan nämnda styvheterna ger:

$$EI_0/EI = 1/n^2$$

Styvhetsförhållandet beror alltså på antalet lameller. För tex 3 lameller blir styvheten 9 ggr så stor vid fullständig samverkan jämfört med då ingen samverkan råder.

2.3 DELVIS SAMVERKAN

Ersätts limmet i fogen mellan lamellerna med fästdon typ spikar, bultar eller spikplåtar, erhålles ej full samverkan mellan lamellerna, eftersom fästdonen inte helt kan förhindra glidningen. Man erhåller då en konstruktion med delvis samverkan, se figur 2.3.

Spänningsfördelningen består dels av rena böjspänningar och dels av de tryck- resp dragspänningar som uppstår p g a att fästdonen vill förhindra glidningen mellan lamellerna. Ju tätare fästdonen placeras, desto större blir normalspänningen jämfört med böjspänningen.

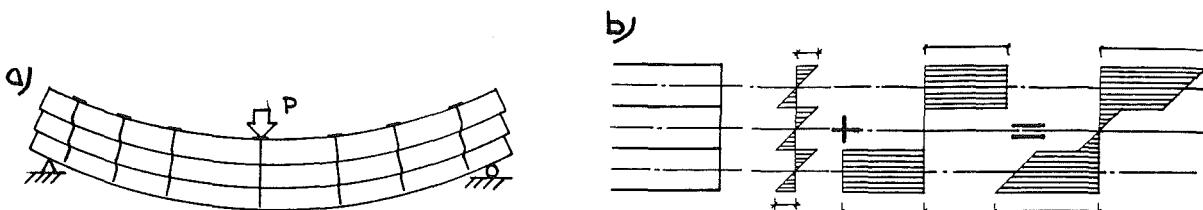


Fig.2.3 a) Delvis samverkan med spikar som förband.
b) Spänningsfördelning över tvärsnittet

Glidningens storlek beror på fästdonens förskjutningsmodul samt på hur tätt fästdonen placeras. Fästdonen bör lämpligen placeras tätare, där skjuvkrafterna och därmed glidningen är som störst.

En konstruktion med delvis samverkande har en styvhet, som ligger någonstans mellan en konstruktion med fullständig samverkan respektive då ingen samverkan råder. Se figur 2.4.

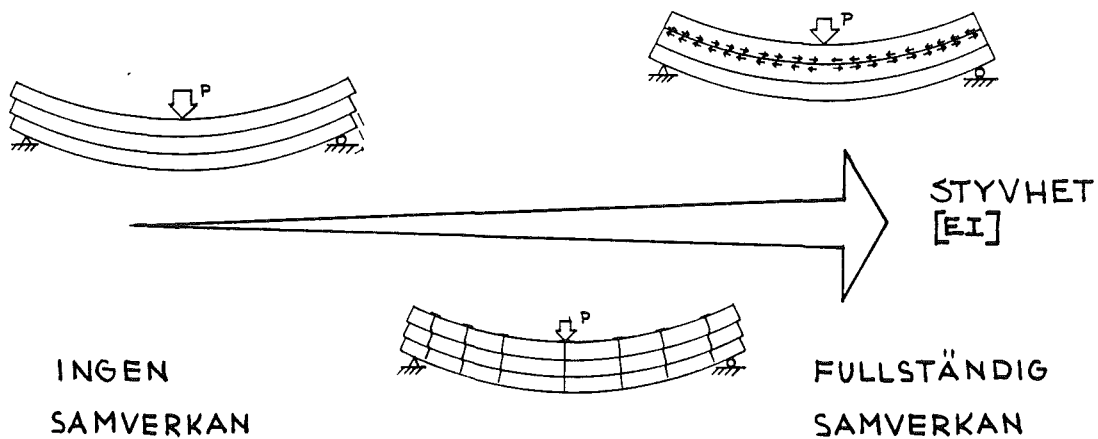


Fig.2.4 Styvhetsskala för samverkanskonstruktioner

2.4 SPIKPLÅTAR SOM FÄSTDON

En lamellerad bågkonstruktion med spikplåtar monterade på bägge sidor visas i figur 2.5. Denna konstruktion ger en styvhet som på styvhetsskalan enligt figur 2.4, ligger relativt nära den vid fullständig samverkan.

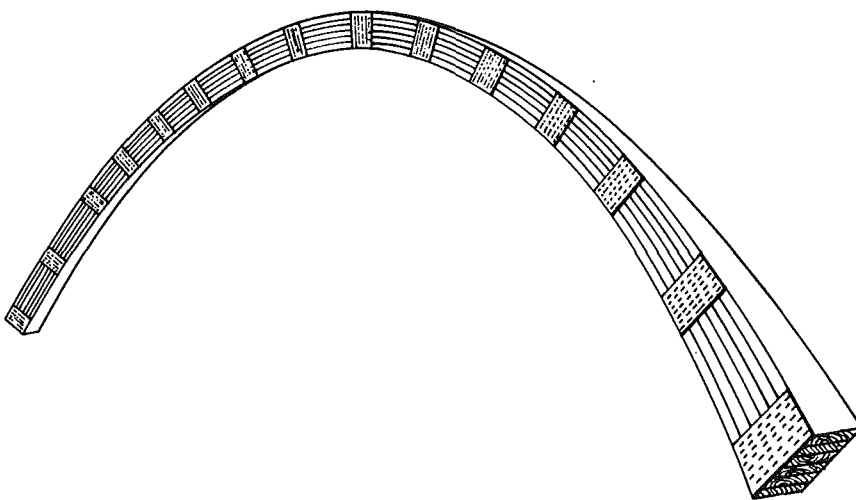


Fig.2.5 Lamellerad träbåge med fästdon av spikplåtar

3. MATERIAL

3.1 TRÄ

Materialiet trä har sedan länge varit ett mycket användbart byggnadsmaterial för bärande konstruktioner. Det är lätt att transportera och bearbeta med enkla verktyg. Kombinationen av dess låga egenvikt, höga hållfasthet samt goda isoleringsförmåga gör att trä intar en särställning jämfört med de konkurrerande materialen stål och betong.

Nackdelarna med trä är dess fuktkänslighet, risken för röta och insektsangrepp.

3.1.1 TRÄETS UPPBYGGNAD

Träet är uppbyggt av en mängd mikroskopiskt små rör av cellulosa (fibrer, vedceller), orienterade i stammens längdriktning och sinsemellan hopkittade med lignin /3/. Rören är av storleksordning några mm och dess tjocklek varierar med olika trädslag samt över tvärsnittet av en trädstam. För furu och gran är variationen regelbunden och synlig i form av årsringar.

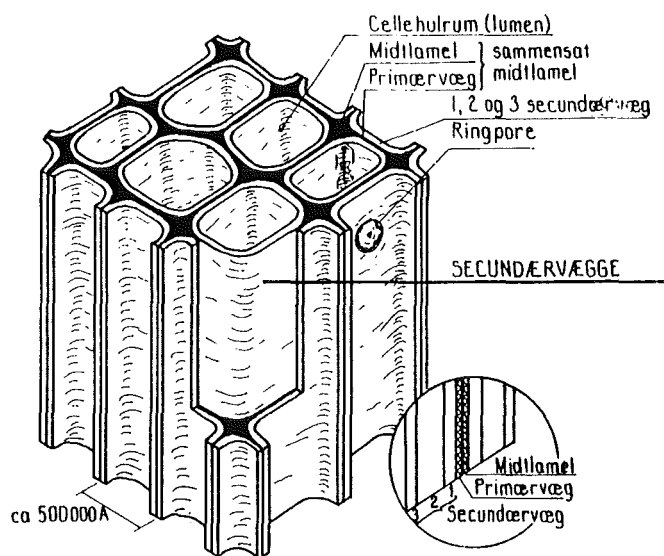


Fig.3.1 Träets uppbyggnad /3/.

3.1.2 HÅLLFASTHETSEGENSKAPER

Trä är ett anisotropt material, dvs dess egenskaper varierar i olika riktningar. Om man tänker sig trä som en bunt sugrör (cellulosafibrerna) som kittats ihop (med lignin) är det lätt att inse att hållfastheten blir olika om man utsätter rörbunten för belastning parallellt eller vinkelrät mot rören /3/.

Den största hållfastheten erhålls vid dragning i fibrernas riktning och den minsta vid dragning tvärs fibrerna. För små felfria provkroppar, som belastas med kortvarig last, uppnås brottvärden enligt figur 3.2.

Verkliga träkonstruktioner är långt ifrån felfria och innehåller felaktigheter som växtfel, kvistar samt snedfibrihet. Vidare är trä fuktkänsligt och vid långtidslast reduceras bärförmågan kraftigt. De verkliga brottlasterna blir därmed långt under de som gäller för små felfria provkroppar.

I figur 3.2 visas inom parentes de karakteristiska hållfasthetsvärdena för T24.

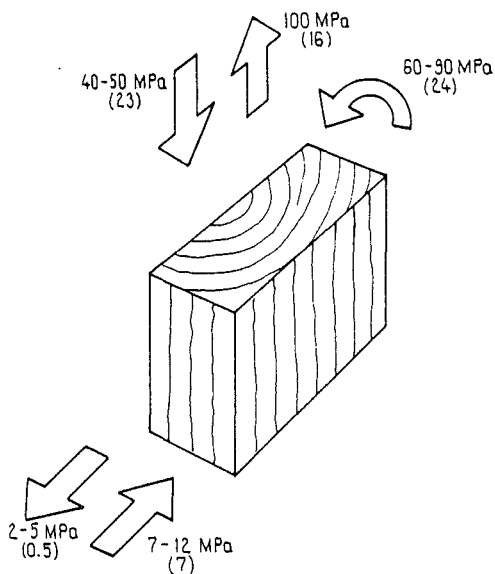


Fig.3.2 Brottvärden för felfri provkropp.

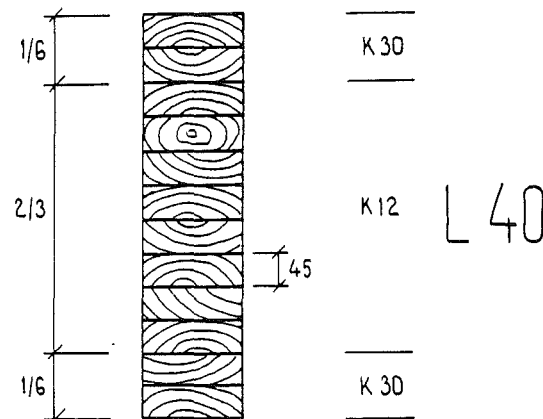


Fig.3.3 Limträns uppbyggnad.

3.1.3 LIMTRÄ

Limträ består av ett antal hoplimmade lameller med samma fiberriktning och fungerar som en statistiskt samverkande enhet. Ett limträelements uppbyggnad visas i figur 3.3.

Genom att använda lameller av högre kvalitet i de yttersta lagren kan tvärsnittets statistiska verkningssätt liknas vid en I-balk.

Eftersom defekterna i lamellerna fördelas på olika snitt i limträbalken, erhålls högre bärförmåga och mindre spridning än för vanligt konstruktionsvirke.

3.1.4 LAMELLERADE TRÄKONSTRUKTIONER MED SPIKPLÅTAR

Även denna typ av konstruktion är uppbyggd av ett antal lameller, där varje tvärsnitt bör vara så felfritt som möjligt. Liksom för limträ kan då även här erhållas högre bärförmåga och mindre spridning än för vanligt konstruktionsvirke. Dock krävs inte den noggranna tillverkningsprocedur och kontroll, som är nödvändig för limträ. Det enda som erfordras är en pressanordning för montering av spikplåtarna, eftersom dessa enligt svenska normer inte får hamras in i virket.

3.1.5 DIMENSIONERANDE HÅLLFASTHETSVÄRDEN

Karaktäristisk hållfasthet svarar för trämaterial, liksom för stål, mot 5 %-fraktilen, se figur 3.4. Diagrammet visar att limträ har högre hållfasthet och mindre spridning. Detta bör rimligtvis även gälla de sammansatta lamellerade konstruktionerna.

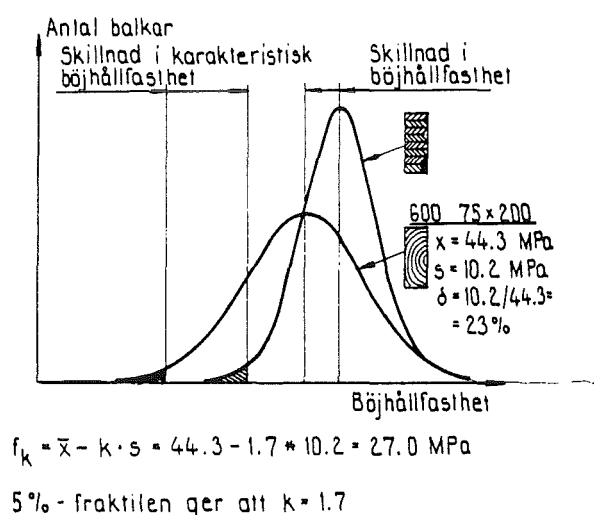


Fig 3.4 Normalfördelning av brotthållfasthet.

Som tidigare nämnts varierar träs hållfasthet med fuktkvoten och belastningstiden. Den nya normen tar hänsyn till detta genom att träkonstruktionerna indelas i fyra klimatklasser, samt beroende på lastens varaktighet indelas lasterna i fyra grupper.

Detta beskrivs mer utförligt i tränormen, som ingår i Nybyggnadsföreskrifter till Plan och Bygglagen /8/. Här nedan visas hur hållfasthetsvärdena i brott- resp brukgränstillståndet beräknas för träkonstruktioner.

Vid dimensionering i brottgränstillståndet gäller

$$f_d = \frac{k_r \cdot f_k}{\gamma_n (\gamma_m - \Delta\gamma_m)}$$

där f_d = dimensioneringsvärde

f_k = karaktäristiskt värde

k_r = faktor som tar hänsyn till inverkan av fukt och lastens varaktighet

γ_n = partialkoefficient beroende av säkerhetsklass
dvs 1.0 i säkerhetsklass 1
1.1 i säkerhetsklass 2
1.2 i säkerhetsklass 3

γ_m = partialkoefficient för material.
För träkonstruktioner i allmänhet är $\gamma_m = 1.3$.
Vid speciell beräknings- och tillverkningskontroll, t.ex limträ, är $\gamma_m = 1.2$.

$\Delta\gamma_m$ = faktor som tar hänsyn till andelen permanent last i förhållande till den totala dimensionerande lasten q

I bruksgränstillståndet, där konstruktionens deformationer är av intresse, gäller följande.

$$E_d = \frac{k_s \cdot E_k}{\gamma_m \cdot \eta}$$

där $\gamma_m = \eta = 1.0$

k_s = faktor som tar hänsyn till lastens varaktighet och klimatklass.

3.2 SPIKPLÅTAR

Det största användningsområdet för spikplåtar har hittills varit som förband för trätakstolar och balkskarvning. För lamellerade träkonstruktioner har spikplåtar ännu inte prövats som kraftöverförande förband i någon större omfattning.

En spikplåt består av korrosionsskyddad plåt, där en mängd små tänder har blivit utstansade i ett visst mönster. Denna är en vidareutveckling av spikningsplåtarna, vilka består av korrosionsskyddad plåt med förborrade småhål för spik. Se figur 3.5.

Spikplåten är det bästa mekaniska förbandet och har även god bärförmåga jämfört med limmet vilket, kan studeras i figur 3.6.

Det finns en mängd olika spikplåtstyper på marknaden idag. Det som främst skiljer dessa åt är spiktäthet, spiklängd samt plåtjocklek.

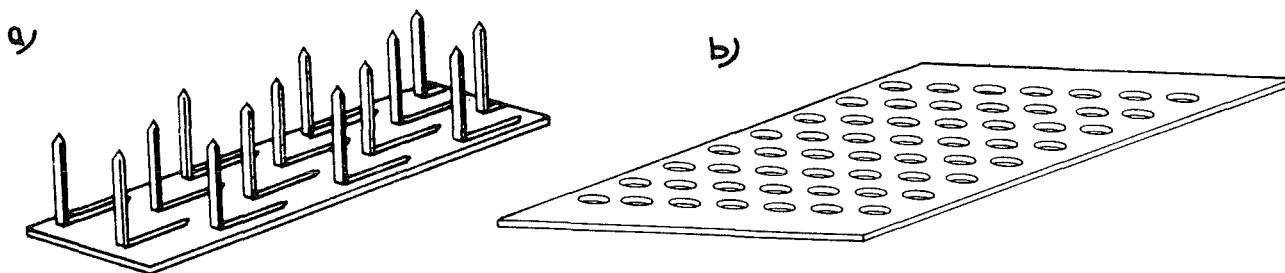
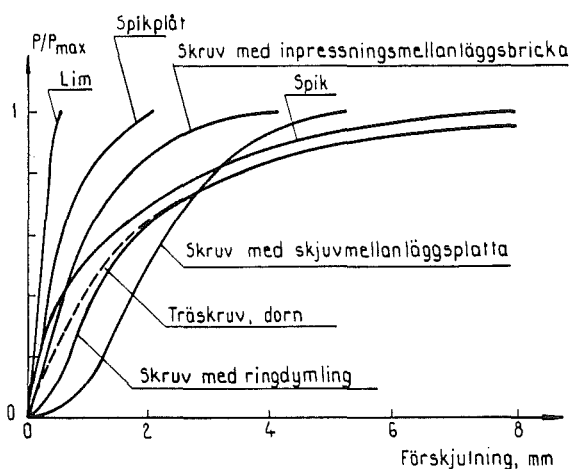


Fig.3.5 a) Spikplåt
b) Spikningsplåt



TAB 1. Bärförmåga per ytenhet

Förbandstyp	Bärförmåga, N/mm^2
Limning	0.8
Skruv	0.2-0.3
Skruv med mellanläggsbricka	0.4-0.6
Klen spik (d < 3 mm)	0.7-1.2
Grov spik (d > 3 mm)	0.5-0.9 ger ökning med
Spikplåtar	1.0-1.6 100-150%

Fig.3.6 Arbetskurvor och tabell för olika typer av förband

4. BERÄKNINGSPRINCIPER

De två beräkningsmodeller, som här använts för att teoretiskt beskriva problemet, är dels en analytisk modell dels en datormodell.

Tyngdpunkten är lagd på den analytiska modellen, vilken använts som underlag för framtagande av dimensioneringsmetoden. Datormodellen, där vi med hjälp av Finita Element Metodberäkningsprogram analyserat problemet, har främst använts för att kontrollera rimligheten av de lösningar, som den analytiska modellen givit.

4.1 ANALYTISK BESKRIVNING AV PROBLEMET

För den analytiska modellen används grundekvation 6.21 i Larsen/Riberholt /1/. Ekvationen gäller för balkar med delvis samverkan.

$$w^{(4)} - \left(\frac{D}{B}\right)^2 w'' - \frac{1}{EI_0} (q_z + D^2 M) = 0$$

Konstanterna D och B som ingår i grundekvationen har i Larsen/Riberholt endast framtagits för tvärsnitt med två eller tre tvärsnittsdelar typ T- och I-tvärsnitt.

För konstruktioner med ett stort antal lameller är vi tvungna att ta fram dessa konstanter. I bilaga (A) visas, genom en härledning av ovanstående ekvation, vad dessa konstanter blir för ett dubbelsymmetriskt tvärsnitt uppbyggt av ett större antal lameller.

Här nedan följer en kortfattad härledning av grundekvationen för ett dubbelsymmetriskt tvärsnitt uppbyggt av tre lameller.

Det förutsätts att läsaren är väl förtrogen med den klassiska balkteorin. Denna beskrivs annars utförligt i t.ex boken "Konstruktionsberäkningar med dator" /4/.

4.1.1 DUBBELSYMMETRISK BALK MED TRE LAMELLER

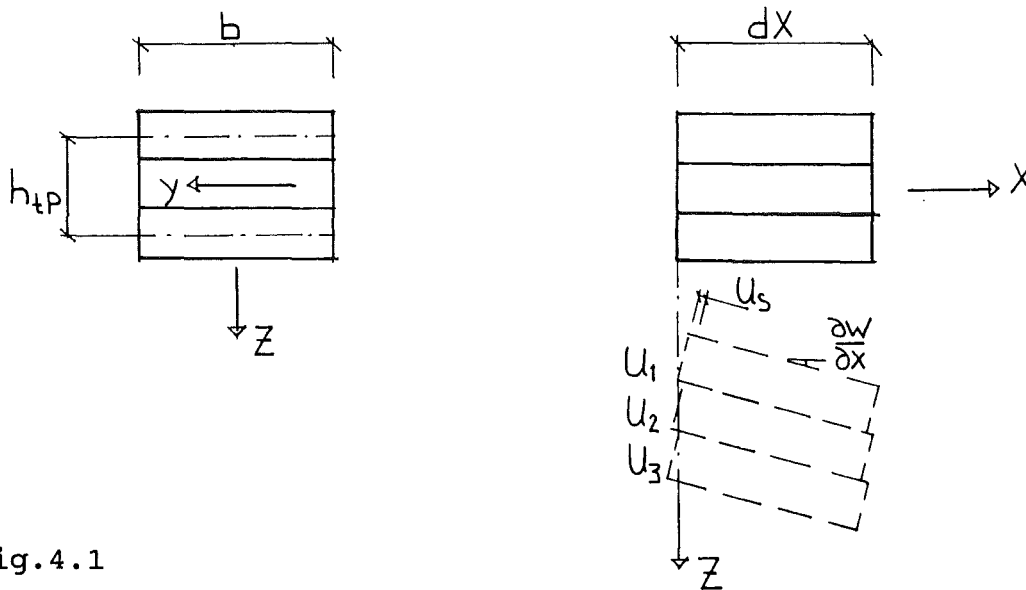


Fig.4.1

Följande definitioner införes:

n = antal tvärsnittsdelar

A_i = arean av en lamells tvärsnittsyta ($A_1=A_2=A_3$)

I_i = tröghetsmoment för en lamell ($I_1=I_2=I_3$)

I_0 = summan av lamellernas tröghetsmoment dvs $n \cdot I_1$

I = tröghetsmoment vid full samverkan

B^2 = styvhetsförhållandet mellan ingen- resp fullständig samverkan dvs

$$I_0/I = 1/n^2$$

H = skjuvflöde mellan tvärsnittsdelarna

u_s = relativ förskjutning mellan tvärsnittsdelarna

u_i = förskjutning av tyngdpunkten i x-led för del i ($i=1,2,3$)

$$D^2 = k/(EA_r a)$$

där k = spikplåtens förskjutningsmodul

a = spikplåtarnas centrumavstånd

$$A_r = (n-1)A_1/2$$

E = tvärsnittsdelarnas elasticitetsmodul

h_{tp} = centrumavstånd mellan de yttersta lamellerna

Följande antaganden göres:

- * Förskjutningen i tvärled är lika för alla lamellerna
($w_1 = \dots = w_n = w$)
- * Små deformationer, dvs $dw/dx \ll 1$
- * Den relativa förskjutningen u_s är lika stor mellan alla tvärsnittsdelar
- * Homogent material med samma E-modul i alla tvärsnittsdelar
- * Linjärt elastiskt material samt linjärt samband mellan skjuvflöde och relativförskjutning i fogen
- * Skjuvdeformationer inom respektive tvärsnittsdel försummas

För ett tvärsnitt utsatt för ren böjning gäller:

Dubbelsymmetrin medför att $u_2 = 0$, se fig 4.1, vilket ger att relativförskjutningen mellan delarna fås av

$$(1) \quad u_s(x) = -u_1 + \frac{1}{2} h_{tP} \frac{\partial w}{\partial x}$$

Skjuvflödet mellan delarna fås ur

$$(2) \quad H = \frac{k}{a} u_s \quad \text{där } k = \text{spikplåtens förskjutningsmodul} \\ a = \text{spikplåtarnas centrumavstånd}$$

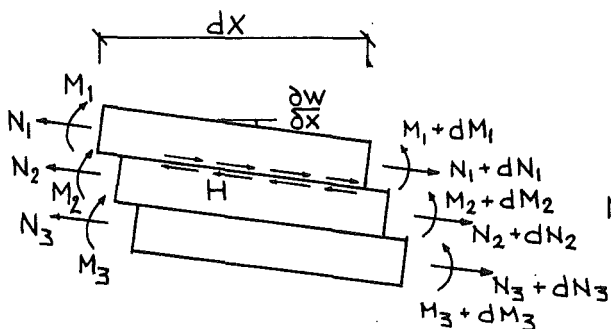


Fig. 4.2

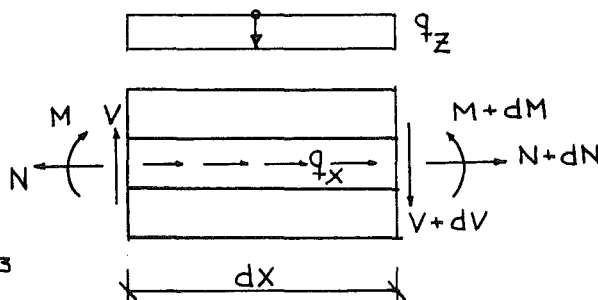


Fig. 4.3

Integration över resp. tvärsnittsdel i figur 4.2 ger

$$(3) \quad N_i = E A_i \frac{\partial u_i}{\partial x}$$

$$(4) \quad M_i = -E I_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Jämvikt för del 1 i figur 4.2 ger skjuvflödet

$$(5) \quad H = - \frac{\partial N_1}{\partial x}$$

Jämvikt för hela tvärsnittet i figur 4.3 ger

$$\frac{dN}{dX} = -q_x$$

$$(6) \quad \frac{dV}{dX} = -q_z$$

$$\frac{dM}{dX} = V$$

Snittstorheterna för hela tvärsnittet enligt figur 4.3 skall vara statistiskt ekvivalent med snittkrafterna i figur 4.2. Då normalkraften N är noll, dvs vid ren böjning, ger en kraftjämvikt

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 0$$

Detta ger då N_2 är noll

$$(7) \quad N_1 = -N_3 = EA_1 \frac{\partial u_1}{\partial X}$$

Momentjämvikt för tvärsnittet ger

$$(8) \quad M = M_1 + M_2 + M_3 - h_{tP} \cdot N_1$$

Vid insättning av ekv (3) och (4) i ekv (8) blir

$$(9) \quad M = -EI_0 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - EA_1 h_{tP} \frac{\partial u_1}{\partial X}$$

Derivering av ekv (1) insatt i ekv (9) ger efter förenkling

$$EA_1 h_{tP} \frac{\partial u_s}{\partial X} = M + E \left(I_0 + \frac{1}{2} A_1 h_{tP}^2 \right) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}$$

uttrycket inom parentesen känns igen som EI för fullständig samverkan dvs Steiners sats.

Detta ger

$$(10) \quad EA_1 h_{tP} \frac{\partial u_s}{\partial X} = M + EI \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}$$

Vid fullständig samverkan dvs $u_s = 0$ blir $M = -EI \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}$

Detta är, som vi ser, just den diff.ekv. som gäller vid fullständig samverkan.

Insättning av ekv (2) i (5) ger efter derivering

$$(11) \quad \frac{\partial u_s}{\partial X} = -\frac{a}{k} \frac{\partial^2 N_1}{\partial X^2}$$

Insättning av ekv (11) i (10) ger

$$(12) \quad -\frac{h_{tp}}{D^2} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} = M + EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

I ekv (12) införs definitionen

$$D^2 = \frac{k}{EA_r a}$$

Ekv (8) ger

$$(13) \quad N_1 = -\frac{1}{h_{tp}} \left(M + EI_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Derivering av ekv (13) två gånger insatt i ekv (12) med beaktande av ekv (6) ger

$$(14) \quad -\frac{h_{tp}}{D^2} \left[-\frac{1}{h_{tp}} \left(-q_z + EI_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \right] = M + EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

som efter förenklingar kan skrivas på formen

$$(15) \quad w^{(4)} - \left(\frac{D}{B} \right)^2 w'' - \frac{1}{EI_0} \left[q_z + D^2 M \right] = 0$$

$$D^2 = \frac{k}{EA_r a}$$

$$A_r = A_1$$

$$B^2 = 1/n^2$$

Ekvation (15) är problemets grundekvation vilken är identisk med ekvation 6.21 i Larsen/Riberholt /1/. Denna ekvation gäller även vid närvaro av normalkraft, förutsatt att q_x fördelas jämnt över samtliga delytor.

Ekvation (15) kan lösas direkt för statistiskt bestämda bärverk, då lasten och därmed momentet M är givet.

4.1.2 DUBBELSYMMETRISK BALK MED N STYCKEN LAMELLER

Efter att ha härlett fram grundekvation (15), utgående ifrån ett flertal olika antal lameller, anser vi oss kunna dra följande slutsats.

För dubbelsymmetriska raka balkar med n st lameller med samma tvärsnittsform gäller följande differentialekvation:

$$w^{(4)} - (D/B)^2 w'' - 1/(EI_0) [q_z + MD^2] = 0$$

$$D^2 = k/(EA_r a)$$

där k = spikplåtens förskjutningsmodul

a = spikplåtarnas centrumavstånd

E = tvärsnittsdelarnas elasticitetsmodul

$$A_r = (n-1)A_1/2$$

A_1 = en lamells tvärsnittsarea

n = antal lameller

$$B^2 = 1/n^2$$

M = momentfördelning längs balken för given last q_z

Med förskjutningsfunktionen $w(x)$ känd kan spänningarna beräknas i en lamell enligt

$$\nabla_b = \frac{M_i}{I_i} z_i \quad \text{böjspänningar}$$

$$\nabla_N = \frac{N_i}{A_i} \quad \text{tryck- resp dragspänningar}$$

Maximal spänning uppstår i den översta eller understa lamellen. För lamell 1 (den översta) gäller :

$$N_1 = N/n - 1/(ch_{tp}) [M + EI_0 w'']$$

$$M_1 = -EI_1 w''$$

där n = antal lameller

N = normalkraft av yttre last

$$h_{tp} = (n-1)h$$

h = lamelltjocklek

$$c = \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n/2} (2i-1)^2 \quad \text{gäller för jämnt antal lameller}$$

$$c = \frac{4}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{(n-1)/2} i^2 \quad \text{gäller för udda antal lameller}$$

Skjuvflödet i fogen blir

$$H = 1/(ch_{tp}) [V + EI_0 w''']$$

Relativförskjutningen mellan lamellerna blir

$$U_s = a/k H$$

4.1.3 BÅGKONSTRUKTIONER MED DELVIS SAMVERKAN

För bågar däremot kan man inte direkt tillämpa differentialekvation (15) (ekv 6.21 i Larsen/Riberholt)/1/. Att härleda fram en differentialekvation som gäller för krökta sammansatta konstruktioner med delvis samverkan är mycket svårt. Hur löses då detta problem?

Låt oss först studera hur spänningsfördelningen ser ut för en homogen krökt balk.

Enligt Popov /2/ är spänningsfördelningen för en krökt balk

$$\sigma = \frac{M}{I'} y \cdot \frac{1}{(1 - y/r)} - \frac{N}{A}$$

M = momentet

N = normalkraft

A = tvärsnittsarean

y = tyngdpunktsavståndet

$$I' = \int y^2 \cdot \frac{1}{(1 - y/r)} dA$$

$$\text{jmf } I = \int y^2 dA$$

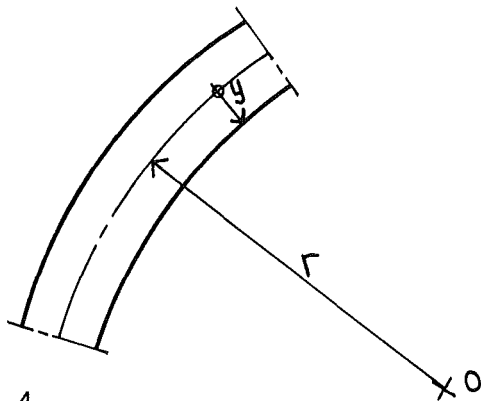


Fig.4.4

Eftersom tvärsnittets höjd är liten i förhållande till krökningsradien r för normala bågkonstruktioner, har krökningen liten inverkan på spänningsfördelningen. Dvs om

$$y \ll r \quad \Rightarrow \quad \sigma \approx \frac{M}{I} y - \frac{N}{A}$$

Alltså gäller ungefär samma spänningsfördelning för en krökt som för en rak balk.

Spänningsfördelningen vid en given momentfördelning är i stort sett oberoende av balkens krökning. Vid samma momentfördelning för en båge som för en rak balk får dessa nästan exakt samma spänningsfördelning.

För att återgå till frågeställningen ovan, betyder detta att den lamellerade bågkonstruktionen kan beräknas enligt samma princip som för den raka sammansatta balken. Den raka balken, en s k ekvivalent balk, belastas med en ekvivalent last, som ger samma momentfördelning som i bågen.

4.1.4 EKVIVALENT BALK

För en treledsbåge, som är statiskt bestämd, kan momentfördelningen med enkla beräkningsmetoder tas fram. Eftersom momentet är noll vid anfang och hjässa, får den raka balken (ekvivalentbalken) formen av en fritt upplagd tvåstödsbalk med spännvidden $L/2$, se figur 4.6.

Här förutsätts att hjässpunkten inte förskjuts vid belastning. Detta är naturligtvis en approximation, men eftersom nedböjningarna inte är så stora för små, relativt grova bågar, blir tillskottet av moment, på grund av andra ordningens effekter, försumbara.

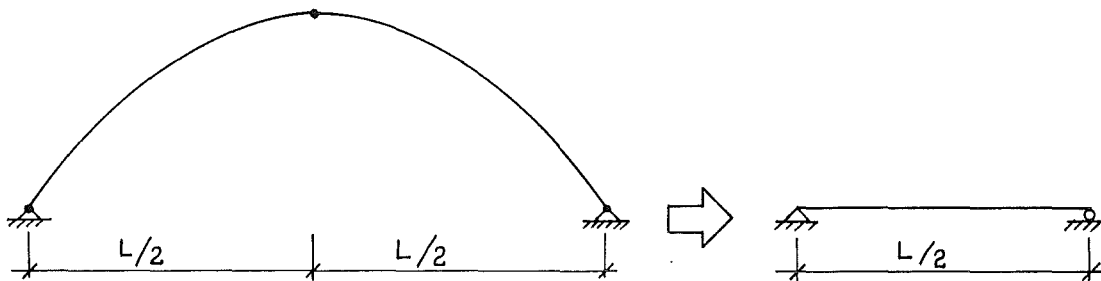
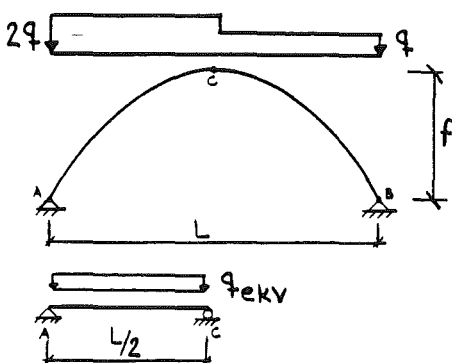


Fig.4.6 Treledsbåge samt rak ekvivalent balk

4.1.5 EKVIVALENT LAST

Vid ett lastfall på treledsbågen enligt figur 4.7, kan den ekvivalenta lasten för ekvivalentbalken beräknas fram enligt följande:

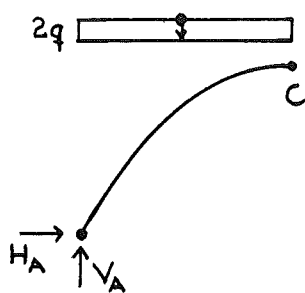


q = aktuell last på bågen

q_{ekv} = ekvivalent last på rak balk

Fig.4.7

För bågen gäller:

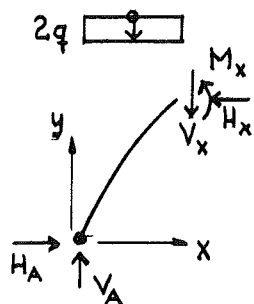


$$\overset{\curvearrowright}{B}: V_A \cdot L - 2q \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{3L}{4} - q \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} = 0$$

$$V_A = \frac{7}{8} qL$$

$$\overset{\curvearrowleft}{C}: \frac{7}{8} qL \cdot \frac{L}{2} - H_A \cdot f - 2q \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} = 0$$

$$H_A = \frac{3}{16} \frac{qL^2}{f}$$



$$\begin{cases} \uparrow: \frac{7}{8} qL - 2qx - V_x = 0 \\ \rightarrow: \frac{3qL^2}{16f} - H_x = 0 \\ \curvearrowright: \frac{7}{8} qLx - \frac{3qL^2}{16f} y - 2qx^2 \frac{1}{2} - M_x = 0 \end{cases}$$

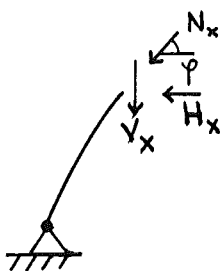
$$V_x = \frac{7}{8} qL - 2qx$$

$$H_x = \frac{3qL^2}{16f}$$

$$M_x = \frac{7}{8} qLx - \frac{3qL^2}{16f} y - qx^2$$

$$N_x = V_x \sin \varphi + H_x \cos \varphi$$

$$\varphi = \arctan \frac{\partial y}{\partial x}$$



Om bågen är en parabelbåge, dvs $y = \frac{4fx(L-x)}{L^2}$ /6/ gäller

$$V_x = \frac{7}{8} qL - 2qx$$

$$H_x = \frac{3qL^2}{16f}$$

$$M_x = \frac{1}{8} qx(L-2x)$$

$$N_x = q \left(\frac{7}{8} L - 2x \right) \sin \varphi + \frac{3qL^2}{16f} \cos \varphi$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{4f}{L} - \frac{8fx}{L^2} \right)$$

För den ekvivalenta balken gäller:

$$q_{\text{ekv}} = - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = \frac{1}{2} q$$

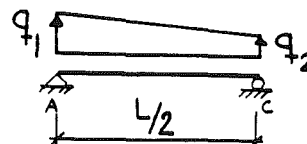
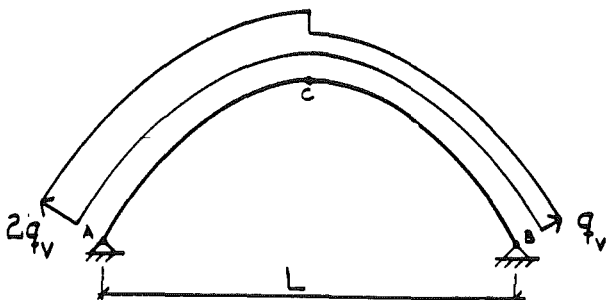
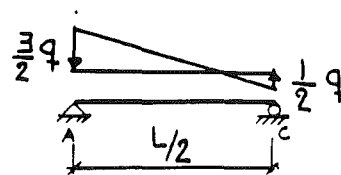
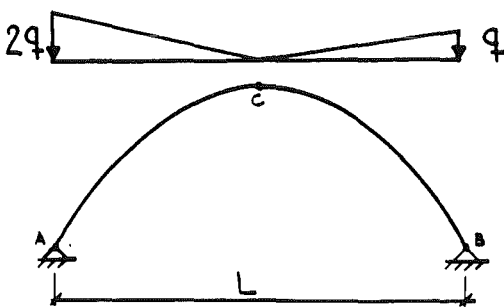
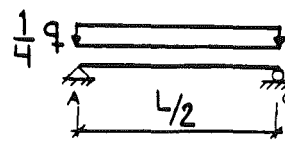
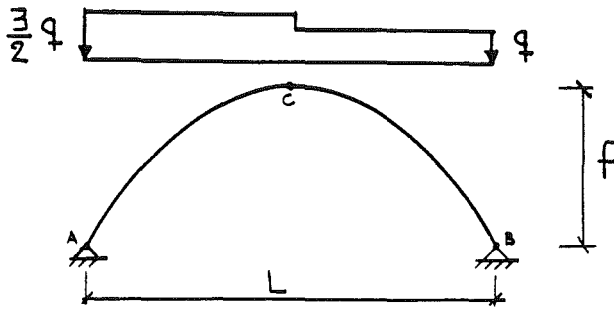
För att få samma momentfördelning i balken, som i bågen, skall alltså denna belastas med halva lasten q .

På liknande sätt, som visas i bilaga (C), kan den ekvivalenta lasten för övriga aktuella lastfall beräknas fram.

Nedanstående sammanställning visar den ekvivalenta lasten vid olika lastfall.

verkligt lastfall

ekvivalent last



$$q_1 = \frac{1}{2} + 21 \frac{f^2}{L^2}$$

$$q_2 = \frac{1}{2} - 3 \frac{f^2}{L^2}$$

4.2 ANALYTISKA LÖSNINGAR TILL DIFFERENTIALEKVATIONEN

Ekvation (15), ekvation 6.21 i Larsen/Riberholt /1/, kan, som nämnts tidigare, lösas direkt för statistiskt bestämda bärverk, då lasten och därmed momentfördelningen är given.

Den fullständiga beräkningsgången vid lösning av grund-
ekvationen för olika lastfall ges i bilaga (B).

Här nedan visas vad de slutliga lösningarna blir för en fritt
upplagd balk belastad med jämnt utbredd last, samt de
ekvivalenta lasterna för dimensionerande snölast resp vindlast.

Grundekv (15)

$$W^{(4)} - \lambda^2 W'' = \frac{1}{EI_0} [q_z + D^2 M]$$

Definitioner:

$$\lambda = D/B$$

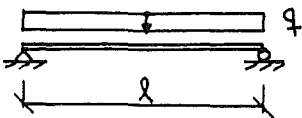
$$D = \sqrt{\frac{k}{EA_r a}}$$

$$A_r = (n-1)/2 \cdot A_1$$

$$B = 1/n$$

W_0 = nedböjningsfunktion vid fullständig samverkan

Jämnt utbredd last



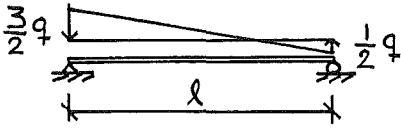
$$W_0 = \frac{q}{EI} \left(-\frac{1}{12} l x^3 + \frac{1}{24} x^4 + \frac{1}{24} l^3 x \right)$$

$$W = W_0 + \frac{q}{\lambda^2 EI} \left(\frac{B^2 - 1}{D^2} \right) \left[\left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} l x \right) \lambda^2 + 1 - \cosh \lambda x + \frac{\cosh \lambda l - 1}{\sinh \lambda l} \sinh \lambda x \right]$$

$$W'' = W_0'' + \frac{q}{EI} \left(\frac{B^2 - 1}{D^2} \right) \left[1 - \cosh \lambda x + \frac{\cosh \lambda l - 1}{\sinh \lambda l} \sinh \lambda x \right]$$

$$W''' = W_0''' + \frac{q}{EI} \lambda \left(\frac{B^2 - 1}{D^2} \right) \left[-\sinh \lambda x + \frac{\cosh \lambda l - 1}{\sinh \lambda l} \cosh \lambda x \right]$$

Ekvivalent last motsvarande snölast



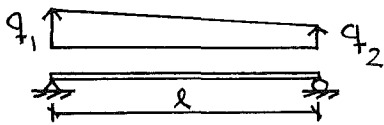
$$w_0 = \frac{q}{EI} \left(-\frac{x^5}{60l} + \frac{x^4}{16} - \frac{5l}{72} x^3 + \frac{17l^3}{720} x \right)$$

$$w = w_0 + \frac{3q}{2\lambda^2 EI} \left(\frac{B^2-1}{D^2} \right) \left[\left(-\frac{2}{9\lambda} x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{5l}{18} x \right) \lambda^2 - \frac{4}{3\lambda} x + 1 - \cosh \lambda x + \left(\frac{\cosh \lambda l + 1/3}{\sinh \lambda l} \right) \sinh \lambda x \right]$$

$$w'' = w_0'' + \frac{3q}{2EI} \left(\frac{B^2-1}{D^2} \right) \left[1 - \frac{4}{3\lambda} x - \cosh \lambda x + \left(\frac{\cosh \lambda l + 1/3}{\sinh \lambda l} \right) \sinh \lambda x \right]$$

$$w''' = w_0''' + \frac{3\lambda q}{2EI} \left(\frac{B^2-1}{D^2} \right) \left[-\frac{4}{\lambda 3\lambda} - \sinh \lambda x + \left(\frac{\cosh \lambda l + 1/3}{\sinh \lambda l} \right) \cosh \lambda x \right]$$

Ekvivalent last motsvarande vindlast



$$q_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{2lf^2}{4l^2} \right) q$$

$$q_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{3f^2}{4l^2} \right) q$$

$$w_0 = \frac{q}{EI} \left[-\frac{x^4}{48} - \frac{7f^2}{32l^2} x^4 + \frac{f^2}{20l^3} x^5 + \left(\frac{l}{24} + \frac{13f^2}{48l} \right) x^3 + \left(-\frac{l^3}{48} - \frac{49f^2 l}{480} \right) x \right]$$

$$G = \frac{6f^2}{l^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2lf^2}{4l^2} \right)}$$

$$w = w_0 + \frac{q}{\lambda^2 EI} \left(\frac{1}{2} + \frac{2lf^2}{4l^2} \right) \left(\frac{1-B^2}{D^2} \right) \left[\left(\frac{x^2}{2} - \frac{l}{2} x \right) \lambda^2 + 1 - \frac{G}{\lambda} x \left(1 - \frac{l^2}{6} \lambda^2 \right) - \frac{\lambda^2 G x^3}{6\lambda} - \cosh \lambda x + \left(\frac{\cosh \lambda l - 1 + G}{\sinh \lambda l} \right) \sinh \lambda x \right]$$

$$w'' = w_0'' + \frac{q}{EI} \left(\frac{1}{2} + \frac{2lf^2}{4l^2} \right) \left(\frac{1-B^2}{D^2} \right) \left[1 - \frac{G}{\lambda} x - \cosh \lambda x + \left(\frac{\cosh \lambda l - 1 + G}{\sinh \lambda l} \right) \sinh \lambda x \right]$$

$$w''' = w_0''' + \frac{\lambda q}{EI} \left(\frac{1}{2} + \frac{2lf^2}{4l^2} \right) \left(\frac{1-B^2}{D^2} \right) \left[-\frac{G}{\lambda} - \sinh \lambda x + \left(\frac{\cosh \lambda l - 1 + G}{\sinh \lambda l} \right) \cosh \lambda x \right]$$

4.3 BESKRIVNING AV PROBLEMET MED DATORMODELL

När datormodell för denna samverkanskonstruktion skulle väljas fick vi tänka på:

- vilka beräkningsprogram vi hade till förfogande.
- vilket resultat vi ville att modellen skulle ge, samt hur noggrann modellen behövde vara för att ge det erforderliga resultatet.
- hur de samverkande delarna kunde tänkas röra sig i förhållande till varandra vid belastning.

För den spikplåtssammansatta trälamellskonstruktionen behövs en relativt noggrann modell, vilket kan åstadkommas med ett Finita Element Metod- program.

Vi valde beräkningsprogrammet CALFEM som är ett av Tekniska Högskolan i Lund utvecklat program, vilket används i utbildningen. CALFEM är baserat på förskjutningsmetoden, i vilken förskjutningarna väljs som primära obekanta.

En närmare beskrivning av förskjutningsmetoden ges i boken "Konstruktionsberäkningar med dator" /4/.

Det finns många sätt att modellera denna delvis samverkande konstruktion. Huvudfrågan som måste besvaras är hur de samverkande delarna rör sig relativt varandra vid belastning. Svaret på frågan, som för övrigt diskuterades i kapitel 2, är att lamellerna glider mot varandra och att spikplåtarna delvis förhindrar denna glidning.

Figur 4.9 visar hur plåten beter sig då lamellerna förskjuts relativt varandra. I plåtens diagonala riktningar uppstår drag- respektive tryckpåkänningar.

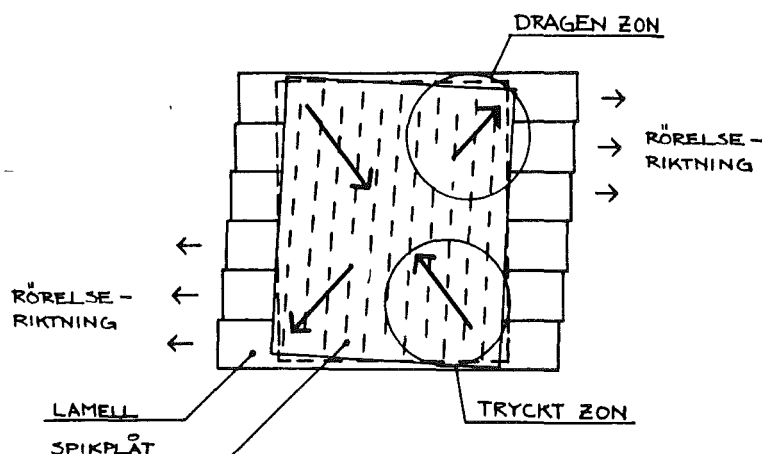


Fig.4.9 Verkningsätt mellan spikplåt och lameller

Vi antar därför, att lamellerna och spikplåtarna utgör någon form av fackverkskonstruktion, där diagonalerna motsvaras av spikplåtarnas verkningssätt. Spikplåtarna, som har en förskjutningsmodul, bör därför fungera i likhet med fjäderelement.

De elementtyper vi använt oss av i den framtagna modellen är stång- och balkelement. Lamellerna modelleras som balkelement med längden lika med centrumavståndet mellan spikplåtarna. För att behålla det fysiska avståndet mellan lamellerna, sammankopplas de med mycket styva stångelement, med längden lika med lamelltjockleken.

Fjäderelementen antas ha en styvhet motsvarande den i teorin framtagna förskjutningsmodulen k för ett lamellskär.

På detta sätt bygger man upp modellen till ett stort sammansatt fackverk, där varje nod har tre frihetsgrader.

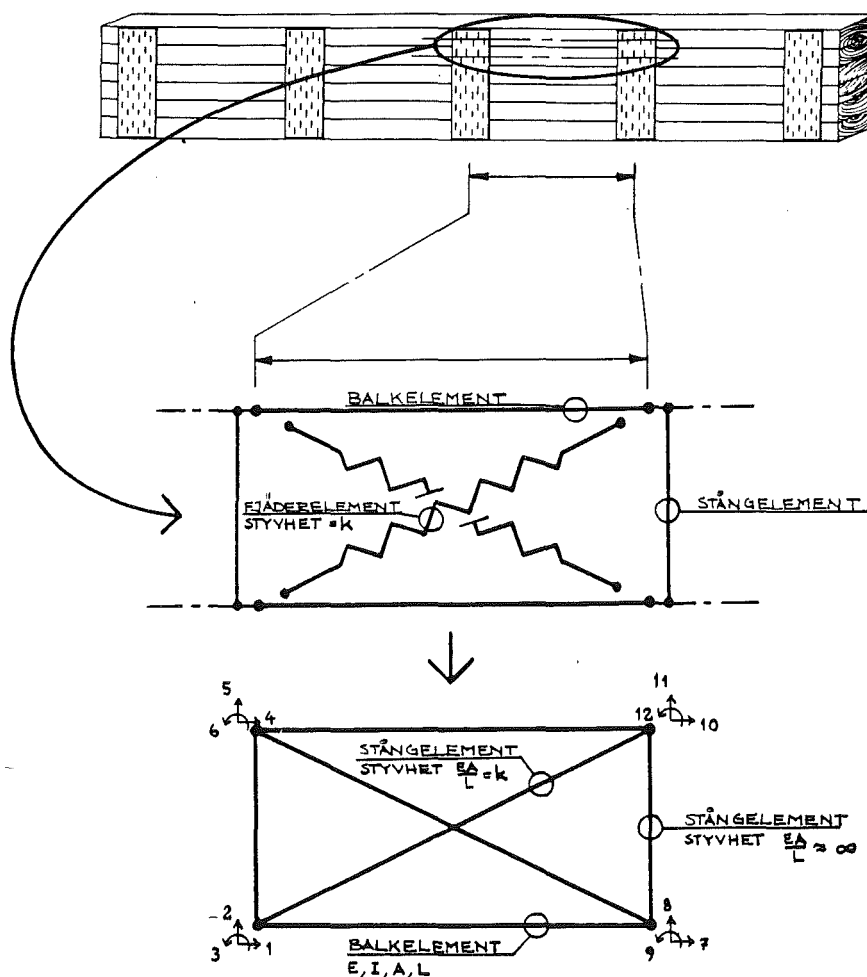


Fig.4.10 Datormodellens uppbyggnad

Då man normalt har konstruktioner med ett flertal lameller och spikplåtar, blir modellen mycket stor och tar därmed mycket av datorns minnesutrymme i anspråk. För att spara detta till beräkningsprocedurerna, kan konstruktionens eventuella symmetriegenskaper utnyttjas. Dessutom bör styvhetsmatrisens bandvidd reduceras till ett minimum genom lämplig nod-numreringsföljd /5/.

Vid de experimentella undersökningarna framkom det att de i balkändarna monterade spikplåtarnas bredd och därmed styvhet var avgörande för balkens utböjningsform. Detta medförde, att randvillkoren för fackverksmodellens ändar valdes med hänsyn till den verkliga konstruktionens utböjningsform.

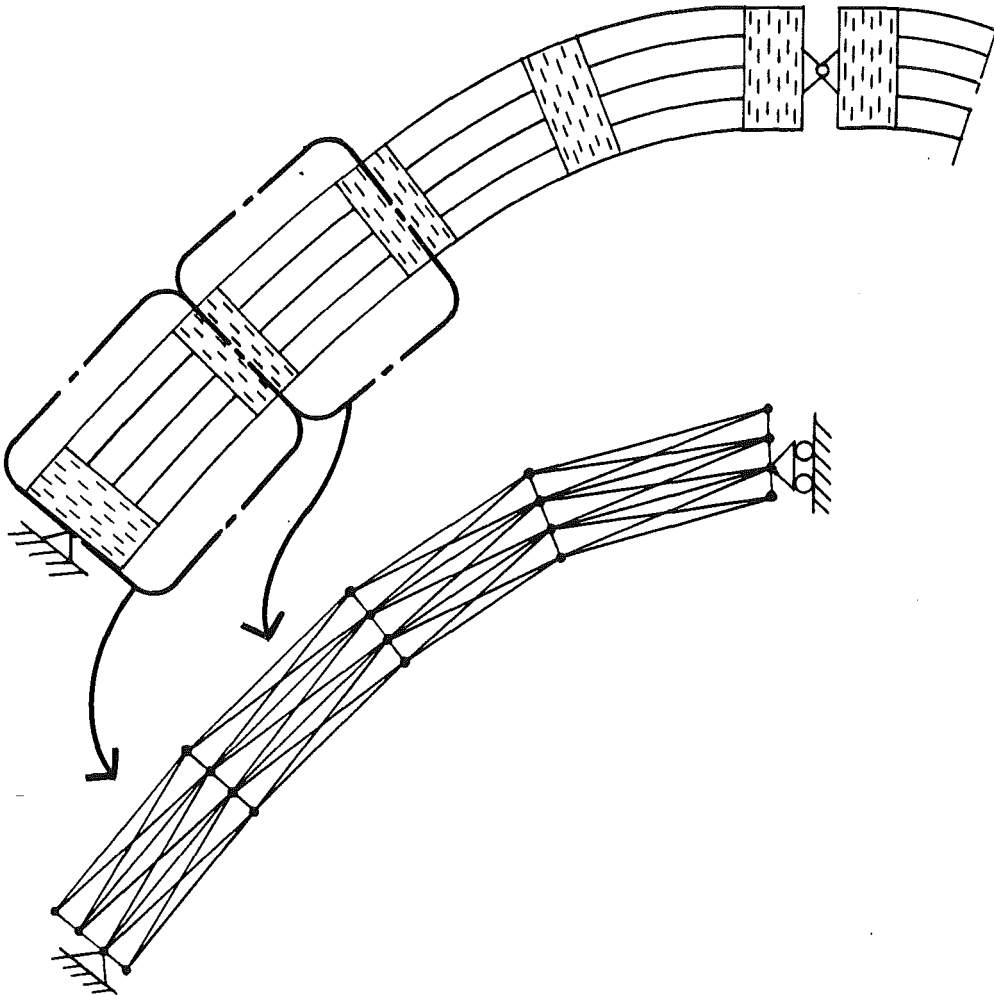


Fig.4.11 Modell av treledsbåge där symmetrin utnyttjats.
(gäller för symmetrisk last)

5. EXPERIMENTELLA UNDERSÖKNINGAR

För att undersöka om teorin stämmer överens med verkligheten krävs praktiska försök.

De experimentella undersökningarna har genomförts i tre steg. Provning av:

- spikplåtens förskjutningsmodul
- raka balkar
- bågar

Vid samtliga försök har virkeskvalitet av typ T24 använts. Virket har legat, minst två veckor innan provning, i klimatrums med 20°C och 65% relativ fuktighet.

Vid provning av spikplåtens förskjutningsmodul tillverkades provkroppar med virkesdimensionen 45x95 mm och vid balk- resp bågprovning tillverkades dessa med lameller 22x95 mm.

De två spikplåtstyper som har använts är Nordisk Kartos₂ typ M och PTN. Spikplåtstyp M har en spiktäthet på 8000 spik/m², spiklängd 14.4 mm och plåttjocklek 1.5 mm. Motsvarande för typ PTN är 12000 spik/m², 8.5 mm och 1 mm.

I figur 5.1 visas hur spikplåten monteras i förhållande till lamellernas längdriktning.

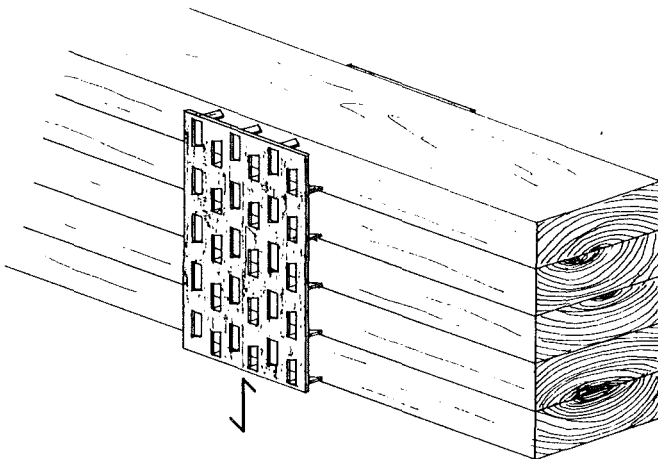


Fig.5.1 Spikplåtsmontering

5.1 SPIKPLÅTSFÖRBAND

En av de viktigaste parametrarna för att teoretiskt kunna beskriva delvis samverkande konstruktioner är fästdonens förskjutningsmodul. I den styrande differentialekvationen för delvis samverkan ingår spikplåtens förskjutningsmodul k i konstanten D .

$$w^{(4)} - (D/B)^2 w'' - 1/(EI_0)[q_z + MD^2] = 0$$

$$\text{där } D^2 = k / (EA_r a)$$

↑
förskjutningsmodul

Fig.5.2 Grundekvation för delvis samverkande konstruktioner

Fästdonen, i detta fall spikplåtarna, skall ta upp de krafter som uppstår p g a glidningen mellan lamellerna. Eftersom fästdonen överför skjuvkrafter, bör bestämningen av spikplåtens förskjutningsmodul utföras på ett sådant sätt att det efterliknar den verkliga konstruktionens verkningssätt.

Vi valde följande provuppställning som kan återfinnas i rapporten från Nordtest /10/. Se figur 5.3.

Den önskade glidningen mellan delarna erhöles genom att de två olika provkroppsdelarna tryckbelastades i förhållande till varandra. För att få så ren skjuvspänning som möjligt, är det viktigt att kraften F angriper mitt i skarven mellan provkroppsdelarna. För att eliminera friktionen mellan träytorna anbringades två lager teflonfilm.

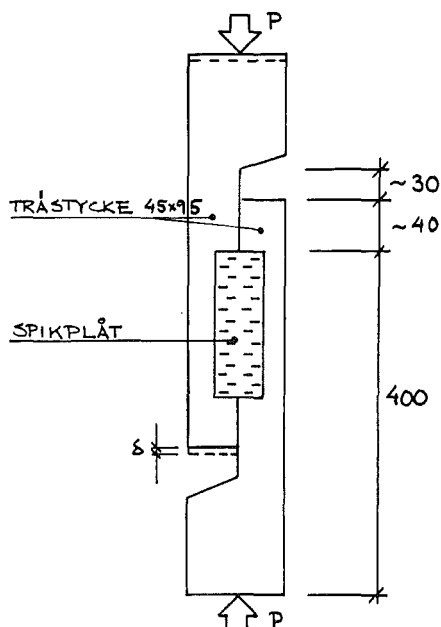


Fig.5.3 Uppställning för bestämning av spikplåts förskjutningsmodul enligt Nordtest nr 75 76 /10/.

Två provserier utfördes med sex respektive fyra provkroppar. Vid den första provserien, där spikplåtstyp M testades, kapades spikplåtbitar med 48 st spikplåtständer. Vid det andra försöket testades spikplåtstyp PTN och där kapades spikplåtbitar med 72 st spikplåtständer. Spikplåtbitarna pressades in på bägge sidor om provkropparna med en hydraulisk press. Det totala antalet verkande spikplåtständer för provkropparna var 96 resp 144 stycken.

I ett lamellskär i den verkliga konstruktionen, verkar hälften av det antal spik, som finns i lamellerna över respektive under lamellskäret. Antalet verkande tänder blir alltså det som finns i en lamell.

Genom att mäta den relativa förskjutningen mellan provkroppsdelarna erhålles ett samband mellan kraften F och förskjutningen d . Kraften mäts med en lastcell och den relativa förskjutningen mäts med en elektromagnetisk givare.

Resultatet av provningen visas i form av arbetskurvor. I figur 5.4 visas spikplåtstyp M och i figur 5.5 PTN. I figurerna visas även de idealiserade arbetskurvorna.

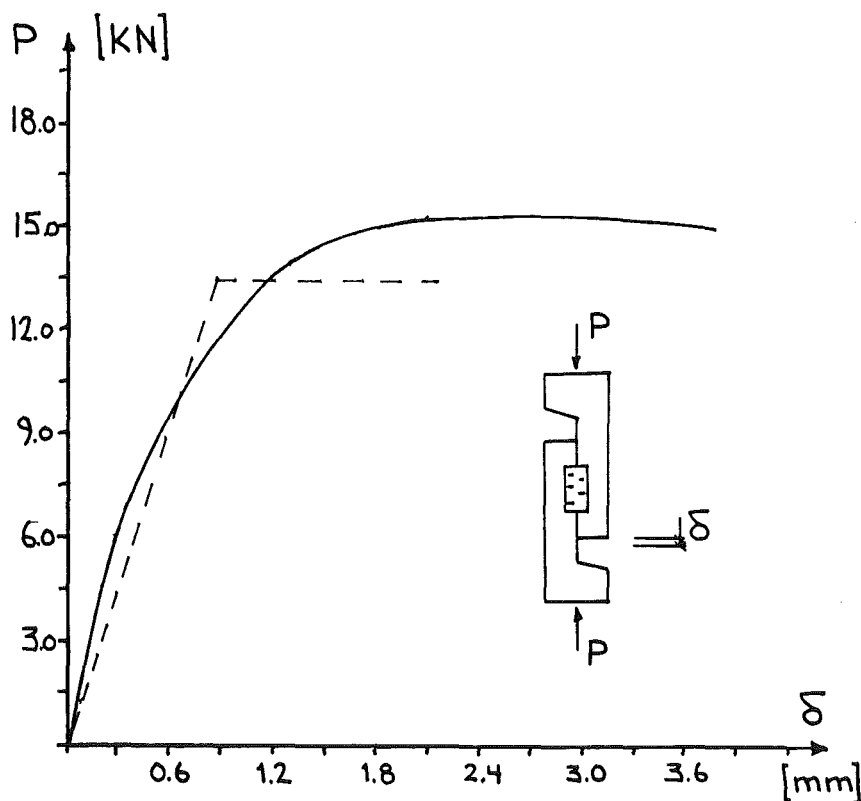


Fig 5.4 Arbetskurva för M

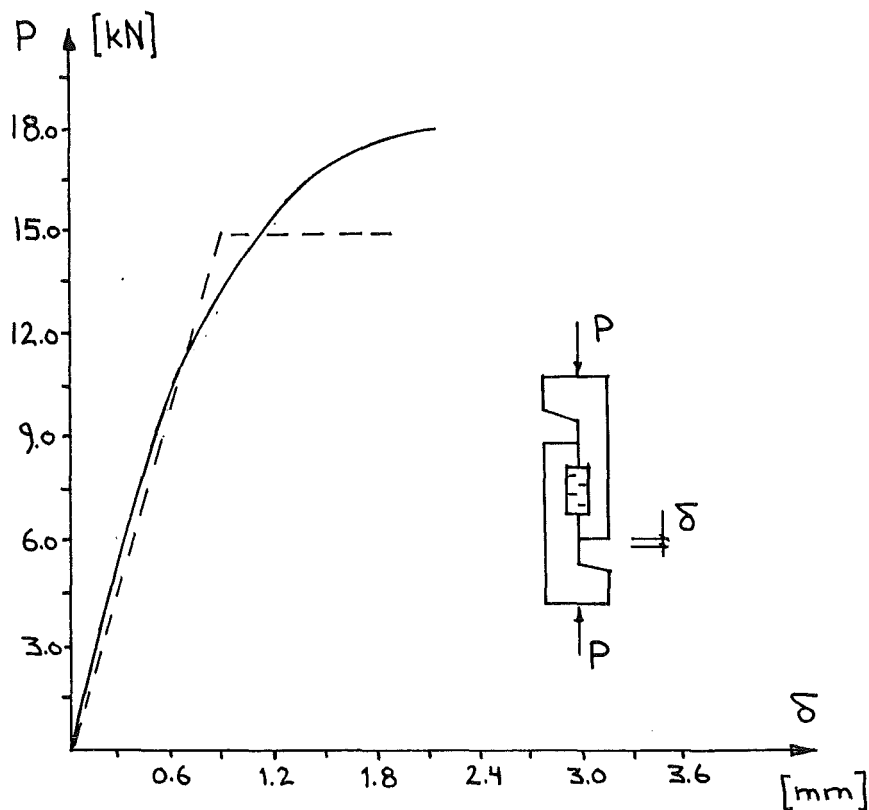


Fig.5.5 Arbetskurva för PTN

5.1.1 SPIKPLÅTARNAS FÖRSKJUTNINGSMODUL

Lutningen av den idealiserade arbetskurvan i figur 5.4 resp 5.5, dividerat med för provkropparna antal verkande spikplåtständer, ger förskjutningsmodulen för en spikplåtstand.

I den verkliga konstruktionen beräknas det genomsnittliga antalet spikplåtständer, som verkar i en lamell. Detta antal multipliceras sedan med förskjutningsmodulen för en tand, varvid man får den för teorin användbara förskjutningsmodulen k .

Förskjutningsmodulen k för resp spikplåtstyp ges av följande data.

Spikplåtstyp	M	PTN	
Den idealiserade arbetskurvan för resp typ har lutningen	15	17	kN/mm
Antal verkande spikplåtständer för provkroppen	96	144	st.
Förskjutningsmodulen per spik	0.16	0.12	kN/mm
Det genomsnittliga verkliga antalet verkande spik	48	72	st.
Förskjutningsmodulen k	7500	8600	kN/m

SLUTSATS

Spikplåtstyp PTN uppvisade nästan ända upp till brott ett linjärt förhållande mellan kraft och deformation. Arbetskurvan påminner här om den som gäller för limförband. Brottet var dessutom mer sprött, d v s när väl spikplåtständerna hade börjat släppa, fick brottet ett snabbt förlopp.

För spikplåtstyp M avtar arbetskurvan kraftigare och kraftigare vid ökande deformation, vilket gör att denna får en sämre förskjutningsmodul vid dimensionerande last. Spikplåtstyp M uppvisade däremot ett mer segt förlopp, vilket kan studeras i figur 5.4. Spikplåtständerna för spikplåtstyp M släpper alltså inte lika lätt ifrån virket, som de gör för PTN.

5.2 TILLVERKNING - BALKAR OCH BÅGAR

En av grundtankarna med en spikplåtssammansatt träbalk- eller bågkonstruktion är att tillverkningen skall vara snabb och enkel. Den skall kunna tillverkas av den händige lekmannen själv lika lätt som i en fabrik.

Balken och bågen tillverkas i princip på samma sätt. Den enda skillnaden är att lamellerna kröks vid tillverkning av bågen. Den metod vi valde för att tillverka bågen visas här nedan.

Först byggs en mall, som skall ge den önskade bågformen för den ena båghalvan. Vi valde att svetsa ihop en parabelformad stål-mall av valsad I-profil.

Erforderligt antal lameller paras ihop till önskad längd, där lamellerna skarvas med spikplåtar. Lamellerna sorteras så att skarvar och knaggar fördelas inbördes på ett sådant sätt att varje snitt i bågen blir så felfritt som möjligt.

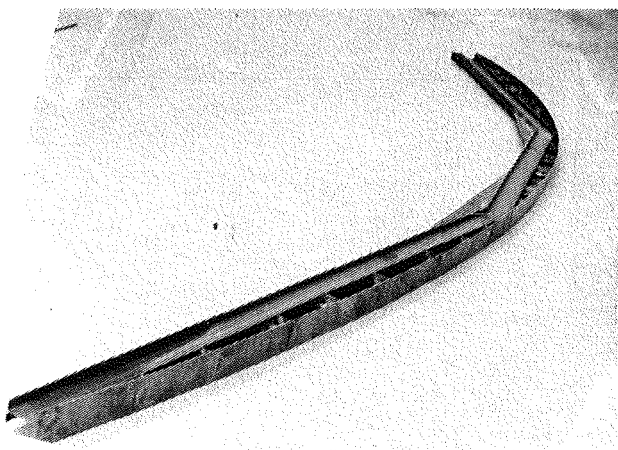


Fig.5.6 Mall för parabelbågform

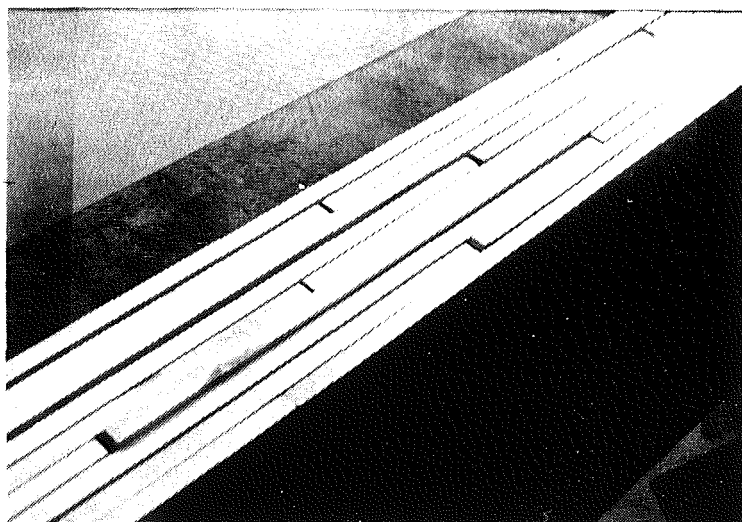


Fig.5.7 Lamellsortering

Alla lamellerna spänns fast i ena änden av mallen med kraftiga skruvtvingar, där bågkrökningen är som störst. Därefter dras lamellerna in en efter en och fästes mot mallen med skruvtvingar.

När alla lamellerna är ihopdragna mot mallen, monteras spikplåtarna på båda sidor om konstruktionen med en hydraulisk press. Spikplåtarna placeras på ett visst erforderligt centrumavstånd.

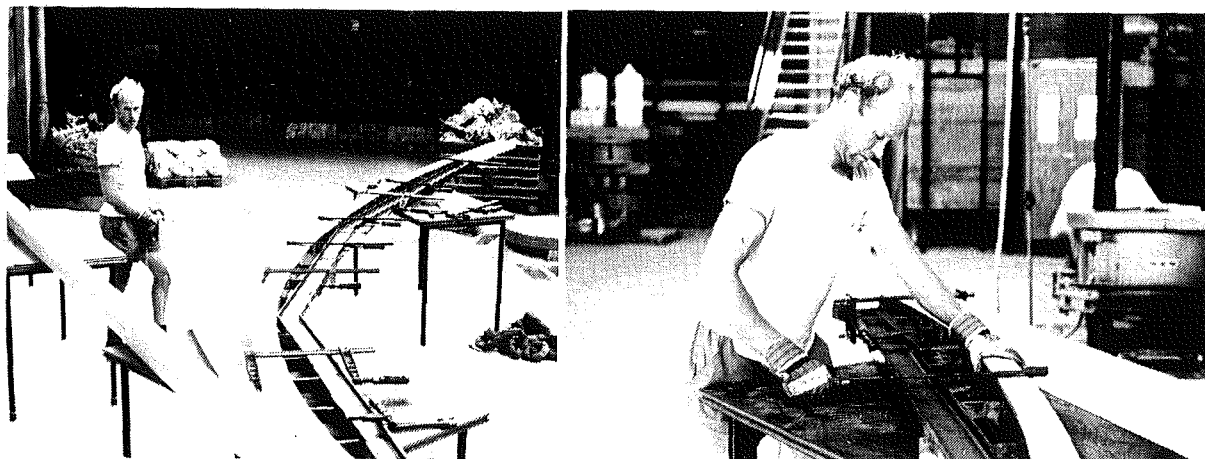


Fig.5.8 Lamellinfästning mot mall

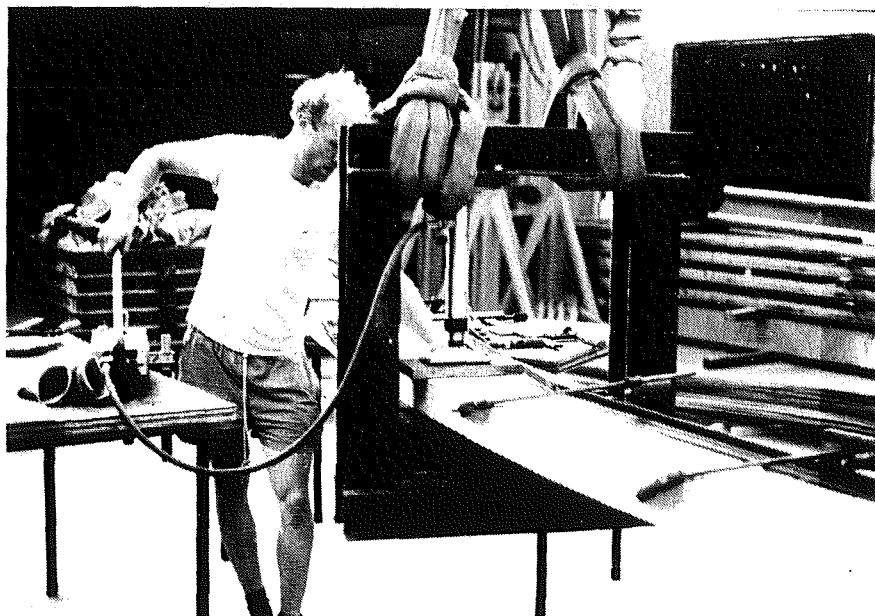


Fig.5.9 Spikplåtsmontering

5.3 BALKAR

Vilka prestanda har en rak spikplåtsslamellerad balk jämfört med limträ? För att kunna besvara detta har två olika provserier med vardera tre balkar utförts.

Vid det första provningstillfället testades balkarna med två olika centrumavstånd mellan spikplåtarna.

Vid det andra provningstillfället monterades spikplåtar på olika sätt, dels med jämnt samt dels med varierande centrumavstånd. Idén var att med samma antal spikplåtständer variera fördelningen över varje balk för att se hur balkens styvhet förändrades. På så sätt skulle en "optimal" spikplåtsfördelning kunna erhållas.

Balkförsöken föregicks med bestämning av elasticitetsmodulen på det virke som skulle användas för försöken. Anledningen till detta var att jämförelsen mellan teori och verklighet skulle vara möjlig.

Ur varje virkesleverans utvaldes slumpmässigt tre brädor av vilka provkroppar sågades ut. Testet utfördes enligt nedanstående figur 5.10.

Genom att mäta mittnedböjningen vid den påförda lasten kan så verkets elasticitetsmodul beräknas enligt följande:

$$y_{\text{mitt}} = PL^3/(48EI) \quad \Rightarrow \quad E = PL^3/(48E_{y_{\text{mitt}}})$$

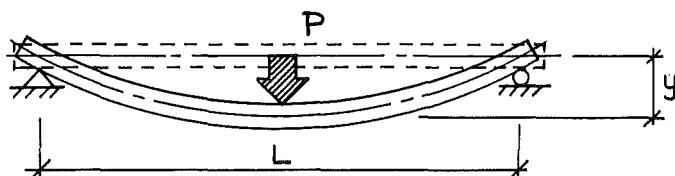


Fig.5.10 Test av E-modul

Skillnaden mellan de olika virkesleveransernas elasticitetmodul var obetydlig. Som ett medelvärde kunde elasticitetsmodulen $E = 16000 \text{ MPa}$ väljas.

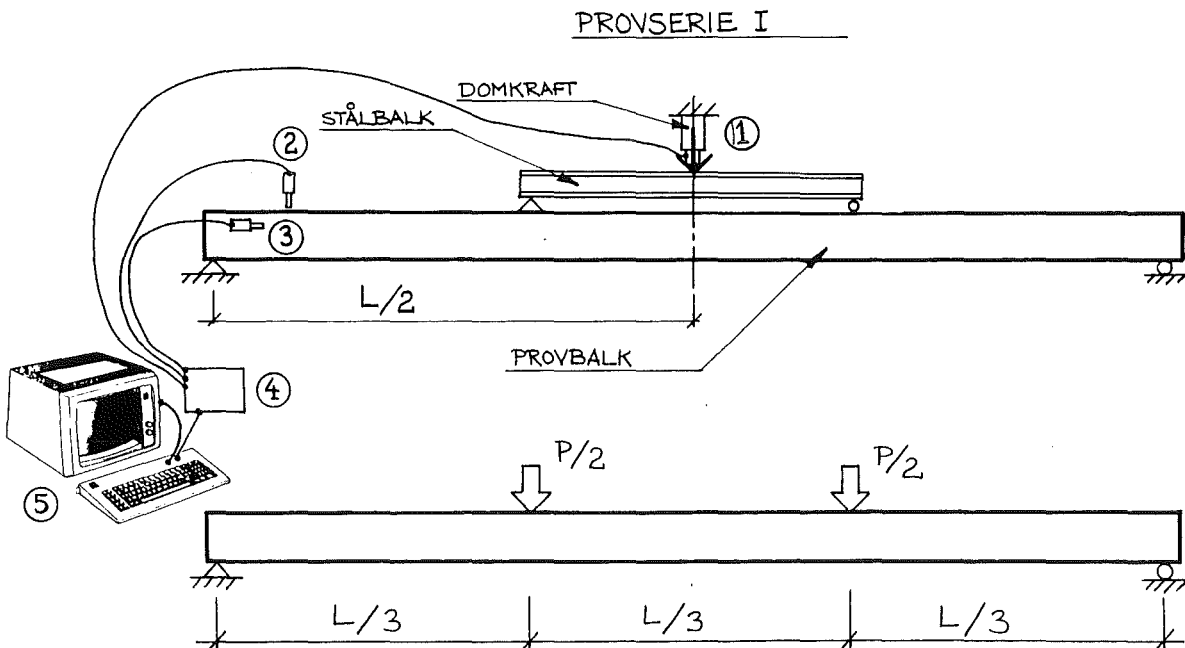
5.3.1 PROVNINGSTILLFÄLLE I

Två balkar tillverkades med centrumavståndet 0.665 m mellan spikplåtarna, balk 1 och balk 2, samt en med halva centrumavståndet 0.33 m, balk 3. Balkarnas längd var 4 m och de var uppbyggda av 9 st lameller (22 × 95 mm). Spikplåtarna var av Nordisk Kartro typ M.

Provuppställning

Provingen utfördes som ett s k fyrapunktsprov, dvs balkarna belastades med punktlaster i tredjedelspunkterna.

Förskjutningsmätare placerades på lämpliga ställen längs balken. Dessa mätte lamellernas relativa förskjutning samt balkens nedböjning.



1. Lastcell.
2. Nedböjningsmätare.
3. Givare för mätning av lamellförskjutning
4. Kopplingsdosa.
5. Dator (PC).

Fig.5.11 Försöksuppställning provningstillfälle I

Intressanta upptäckter under belastning

Genom att successivt öka belastningen, kunde olika fenomen studeras såsom utböjningsform, spikplåtarnas deformation och balkens brottstadium.

Utböjningsform

Balkarna erhöll en utböjningsform, som om de vore fast inspända vid upplagen, se fig 5.12. Senare försök med smalare spikplåtar i balkändarna gav balken en utböjningsform, som mer liknade den som gäller för fritt upplagda balkar.

På grund av utböjningsformen blev förskjutningarna mellan lamellerna i balkändarna mycket liten. Denna blev i stället större ett stycke in på balken, där krökningen var som störst.

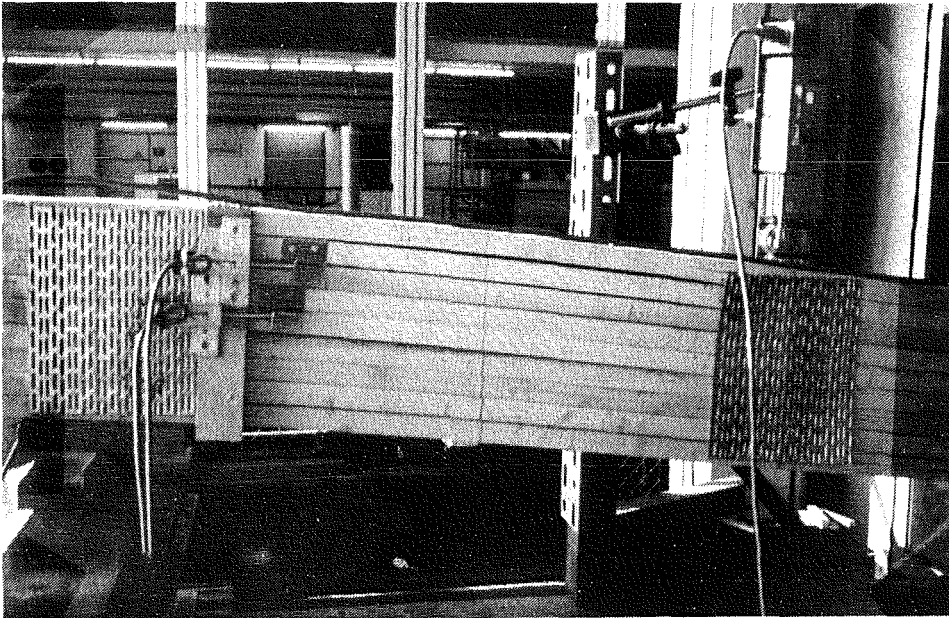


Fig.5.12 Balkens utböjningsform.

Spikplåtarnas deformation

Nästa intressanta upptäckt var på vilket sätt spikplåtarna deformerades.

När relativförskjutningen mellan lamellerna uppgick till ungefär 0.8 mm, började spikplåtarnas hörntänder krypa ur träet. Se figur 5.13.

Detta fenomen inträffade för de hörnor, där spikplåten var utsatt för dragpåkänningar. Verkningsättet kan liknas vid det bucklingsfenomen som uppstår, då en tunn plåt utsätts för skjuvkrafter, se figur 5.14.

De spikplåtar, som först började deformeras var de, som monterats där balkens utböjningsform hade störst krökning.

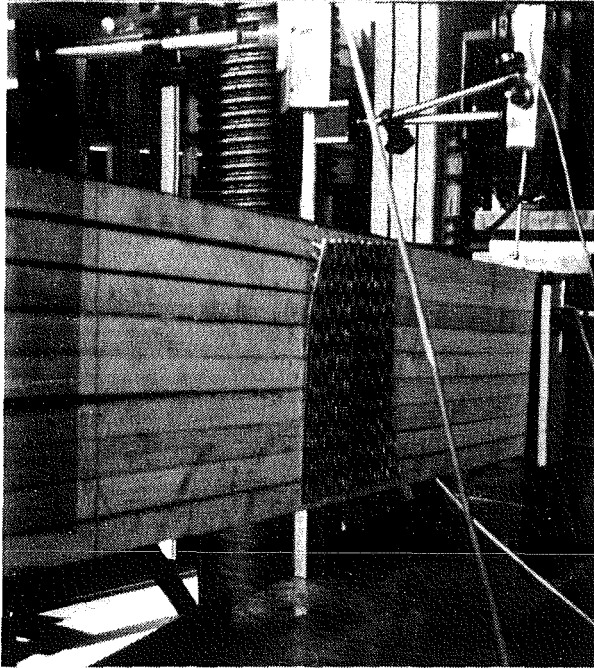


Fig.5.13 Spikplåtsdeformation

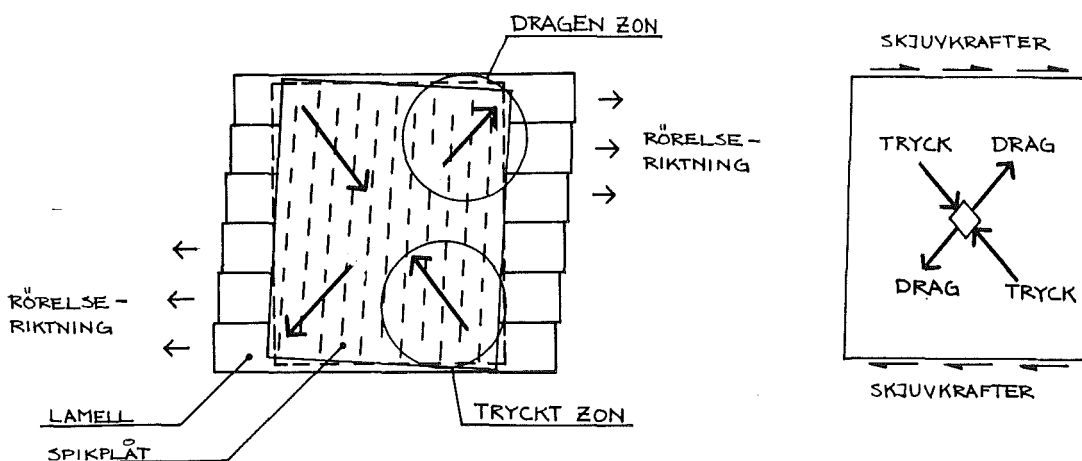


Fig.5.14 Spikplåtsdeformation jämfört med buckling av tunn plåt

Brottstadium

Den svaga länken i konstruktionen var spikplåtarnas kapacitet att förhindra förskjutningen mellan lamellerna. Något egentligt träbrott uppstod inte, då spänningarna i lamellerna aldrig hann bli så stora.

Det slutliga balkbrottet uppstod genom att spikplåtarnas hörntänder fortsatte att krypa ut ur lamellerna. Belastningstrycket minskade trots att nedböjningen ökade kraftigt.

PROVNINGSRESULTAT

Från de utförda försöken erhöles en arbetskurva för var och en av balkarna, vilka sedan jämfördes med resultaten från teori- och CALFEM-beräkningen.

Figurerna 5.15 och 5.16 visar mittnedböjningen som funktion av den påförda lasten P . I figur 5.17 visas förskjutningen mellan lamellerna, där denna är som störst, som funktion av lasten.

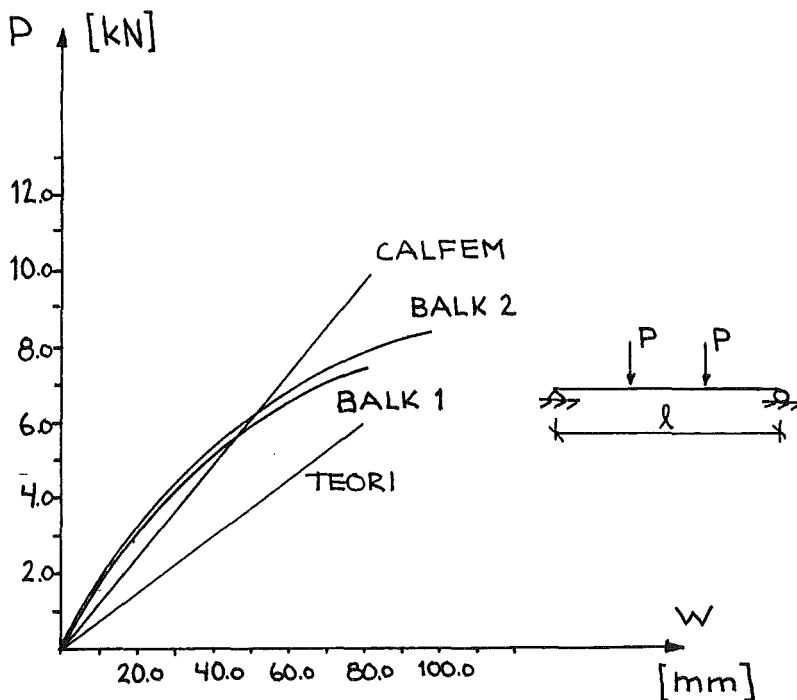


Fig.5.15 Arbetskurva för balk 1 och 2.

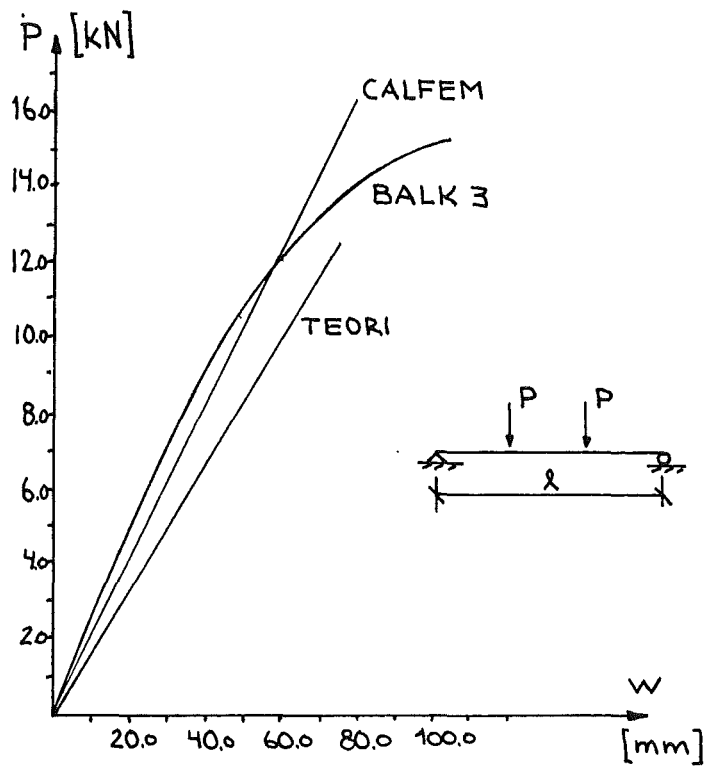


Fig.5.16 Arbetskurva för balk 3.

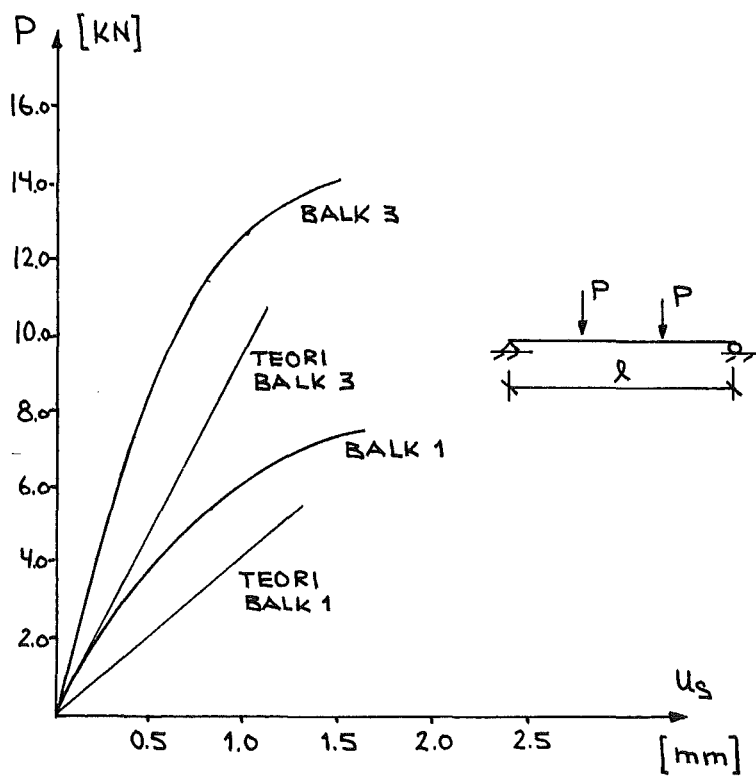


Fig.5.17 Arbetskurvor för lamellernas relativförskjutning.

KOMMENTAR TILL PROVNINGSRESULTATET

Anledningen till att teorin inte helt stämmer överens med provresultatet, beror på den utböjningsform, som balkarna antog. I teorin räknade vi med fri uppläggning, vilket ger en större nedböjning än om balken vore fast inspänd vid upplagen.

I CALFEM-modellen har vi genom randvillkor tagit hänsyn till den verkliga nedböjningsformen, varför denna modell stämmer bättre överens med verkligheten.

Ur arbetskurvorna i figur 5.17 ser man att när förskjutningen mellan lamellerna närmar sig 0.8 mm, d v s vid $P = 5.5$ resp 11.5 kN, börjar kurvorna kraftigt att avta. Spikplåtständerna har vid denna tidpunkt börjat krypa ut ur lamellerna. Arbetskurvorna i figur 5.15 resp 5.16, visar att vid dessa laster börjar balkens styvhet att minska snabbare.

5.3.2 PROVNINGSTILLFÄLLE II

Tre balkar, där alla hade samma totala antal spikplåtständer, tillverkades. Idén var här att se hur mycket styvheten förändrades genom att fördela spikplåtarna olika längs balken.

Samtliga balkar hade längden 4 m och var sammansatta av 9 st lameller (22×95 mm). Spikplåtstypen var PTN.

Balkarnas spikplåtspacering visas i fig.5.18.

Balk nummer :

- I. monterades med 150 mm breda spikplåtar med centrumavstånd 0.665 m.
- II. monterades med 100 mm breda spikplåtar med centrumavståndet 0.4 m.
- III. monterades med både smala och breda spikplåtar med ett varierande spikplåtsavstånd.

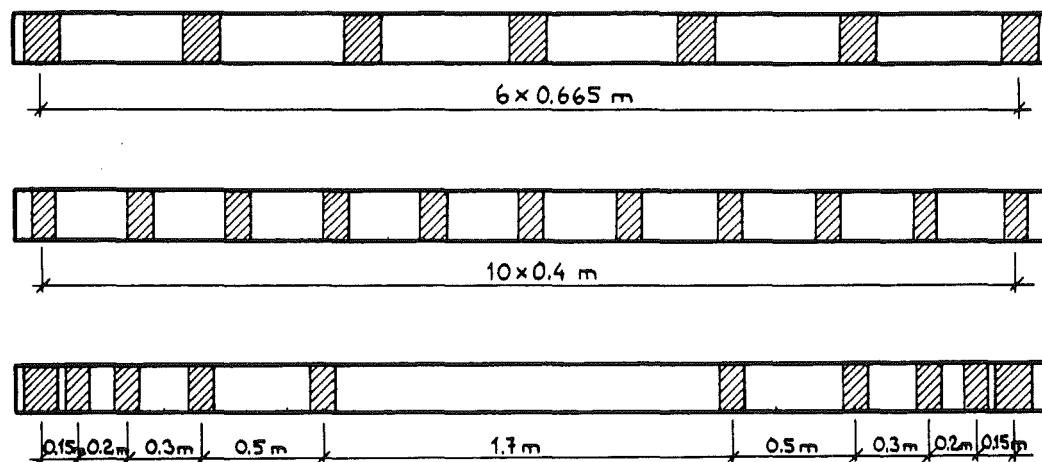
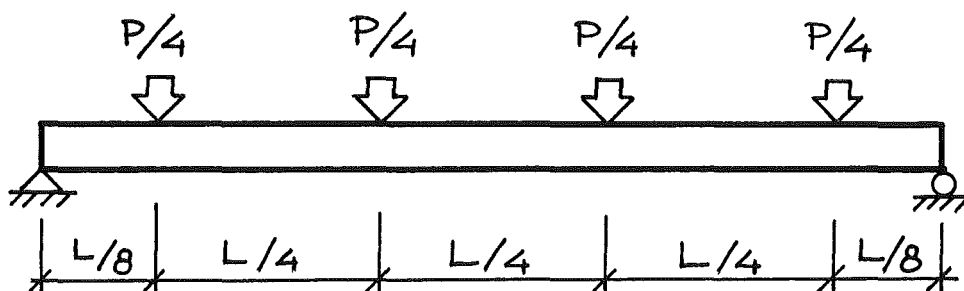
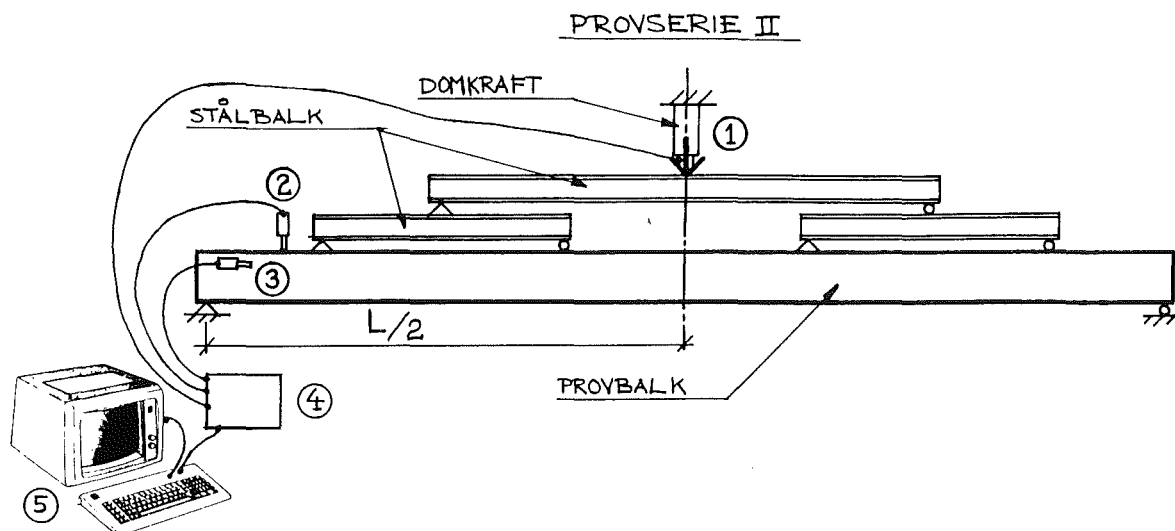


Fig.5.18 Spikplåtarnas placering för provningsserie II

Provuppställning

Denna provserie belastades med fyra punktlaster, vilka placerades så att de gav en momentfördelning motsvarande den för jämnt utbredd last. Se provuppställning figur 5.19.

Nedböjning samt förskjutningarna mellan lamellerna mättes på lämpliga ställen längs balken.



$P = \text{BELASTNING FRÅN DOMKRAFT}$

1. Lastcell
2. Nedböjningsmätare
3. Givare för mätning av lamellförskjutning
4. Kopplingsdosa.
5. Dator (PC).

Fig.5.19 Försökuppställning för provningsserie II.

PROVNINGSRESULTAT

De olika balkarna erhöill helt skilda utböjningsformer. Se figur 5.20. Vid en jämförelse av de två första balkarna hade balk nummer två med den smala spikplåtstypen en utböjningsform mer lik den som gäller för fri upplägning.

Den tredje balken, den s k optimala, fick en utböjningsform, som om den vore mycket kraftigt inspänd vid upplag. Ett stycke in på balken, där spikplåtarna var mer glest placerade, ökade nedböjningen kraftigt.

I figur 5.21 visas för de olika balkarna mittnedböjningen som funktion av den påförda lasten och fig 5.22 visar lamellförskjutningen som funktion av lasten. I figurerna visas även de teoretiskt framtagna resultaten.

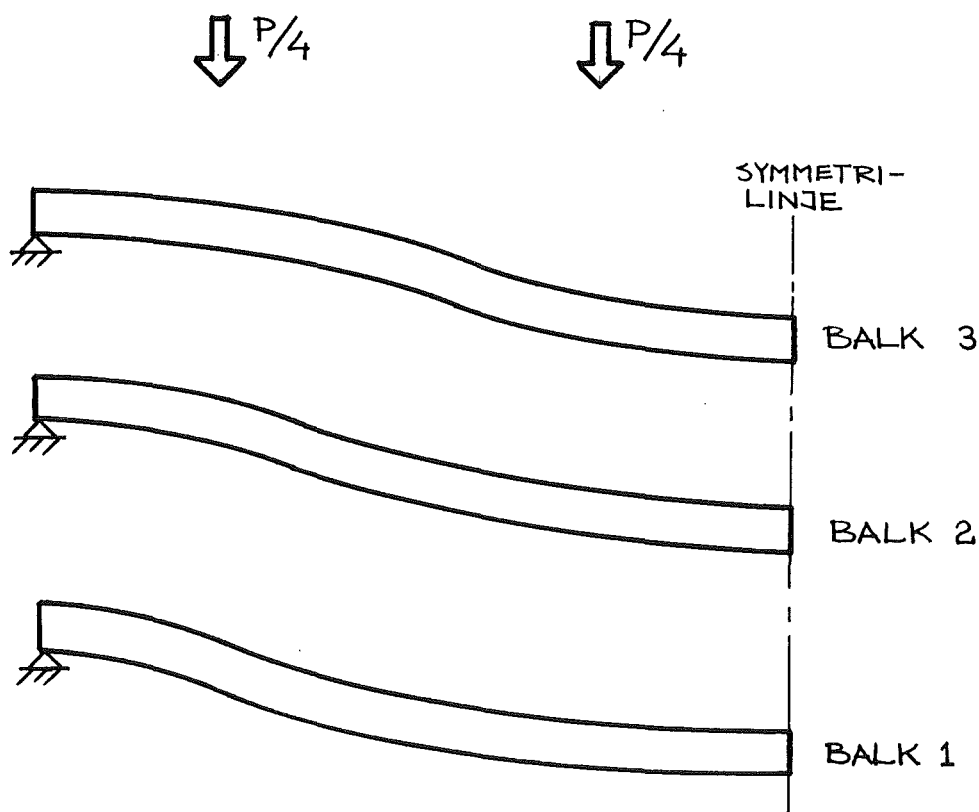


Fig.5.20 De tre balkarnas utböjningsform

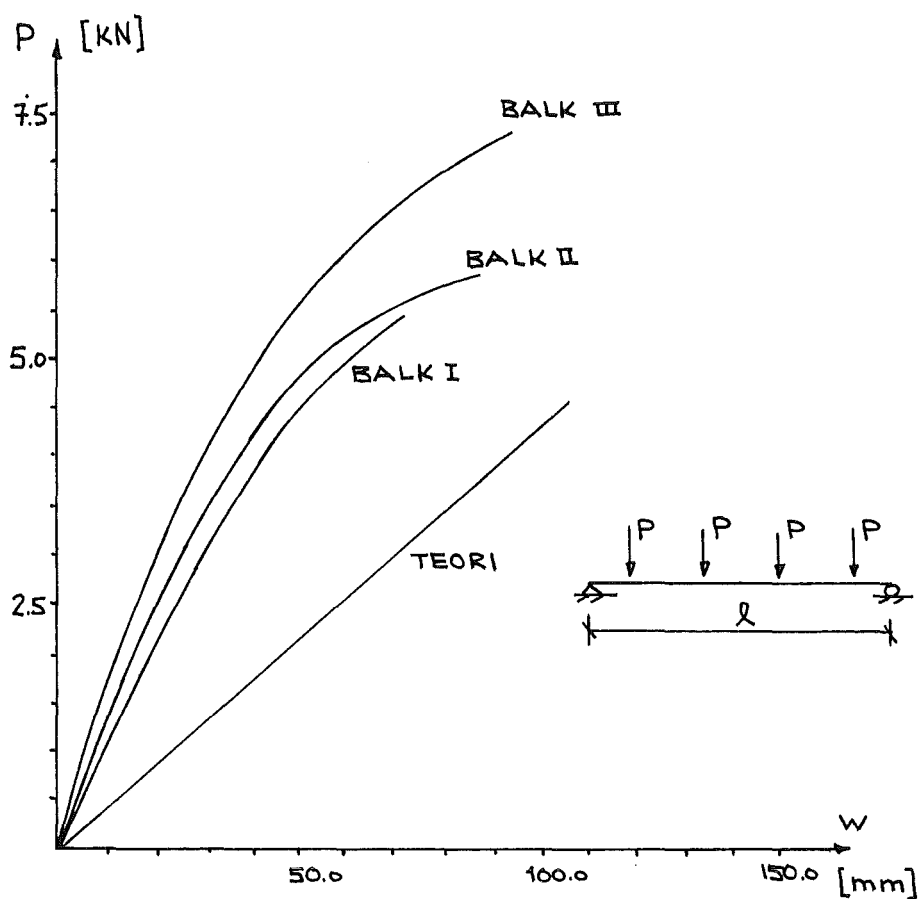


Fig.5.21 Mittnedböjning som funktion av lasten för de tre olika balkarna.

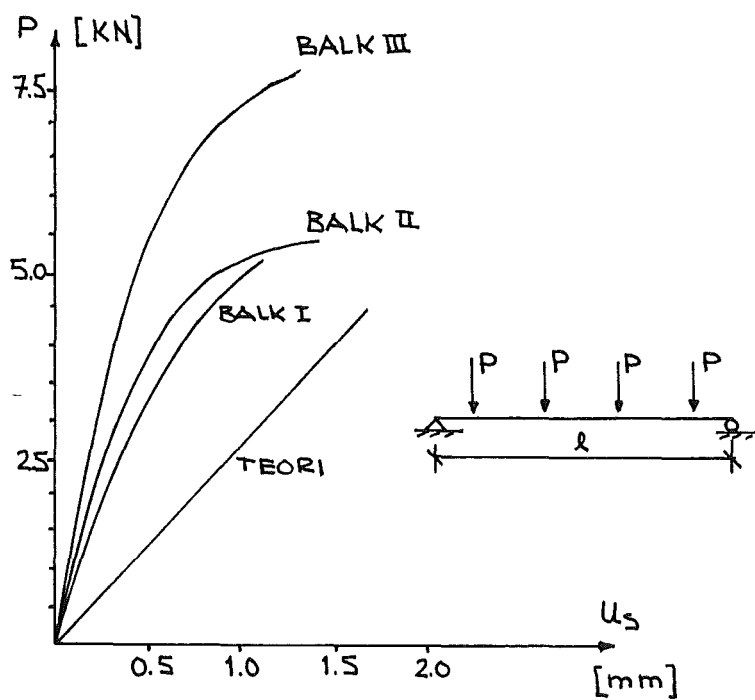


Fig.5.22 Lamellernas relativförskjutning som funktion av lasten.

5.3.3 SUMMERING AV BALKPROVNINGEN

Ju tätare centrumavstånd mellan spikplåtarna, desto styvare blir den sammansatta konstruktionen. Placeras även spikplåtarna tätare närmare upplagen, ökas styvheten ytterligare.

Om detta kommer att räcka för att kunna konkurrera med limträ, beror kostnadsmässigt på hur tätt spikplåtarna kan placeras, se sid 63. Nedan redovisas en styrkemässig jämförelse med limträ för olika sammansatta balk-typer.

Den första provomgången visade att vid en halvering av spikplåtarnas centrumavstånd, minskade mittnedböjningen till ungefär hälften. Detta stämmer även enligt de teoretiska beräkningarna.

Provomgång två visade att genom en tätare placering av spikplåtarna vid upplagen erhöles en styvare balk. Exakt hur mycket styvare är svårt att uttala sig om, då bara en balk provades på detta sätt. Enligt resultatet, se fig 5.21, ökade balkens styvhet med ca 30 %.

Utböjningsformen

En orsak till den speciella utböjningsform som balkarna antog kan bero på att spikplåtarna är så styva att krökningen är konstant inom spikplåtens bredd. Detta medför att krökningen är noll från upplagen och en bit in vid balkens ändar. Formen på utböjningen blir därmed den som gäller för fast inspänning.

Försök som tidigare utförts vid LBT i Lund med spikplåtar monterade längs hela balken gav en styvhet som var större än vid fullständig samverkan. Detta resultat verifierar vårt antagande ytterligare.

Balkens verkningssätt kan liknas vid den i figur 5.23, där balken får ett styvhetstillskott vid varje spikplåt.

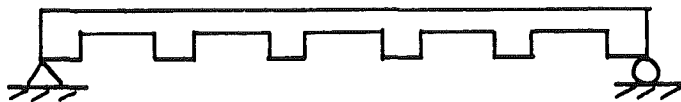


Fig.5.23

Reduktion av styvhet

Då teorin avviker kraftigt ifrån verkligheten, beroende på utböjningsformen, blir vi tvungna att reducera den i teorin framtagna nedböjningen. Vi har valt att utföra denna reduktion genom att beräkna en ekvivalent styvhet.

Den ekvivalenta styvheten beräknas fram genom att den teoretiska styvheten ökas, tills teori och verklighet stämmer överens. Denna jämförelse är gjord vid ett skede då relativförskjutningen mellan lamellerna är 0.6 mm.

Hur stor reduktionen av styvheten blir kan studeras i figurerna 5.21 och 5.22. Lamellförskjutningen 0.6 mm motsvarar lasten $P=40$ kN. Vid denna last skall teoretiska styvheten multipliceras med 2 resp 3, för att ge samma resultat som för balk 1 resp balk 3.

Då ej tillräckligt med balkförsök har utförts är det svårt att uttala sig om hur teori och verklighet stämmer för balkar med större spännvidder. Fler balkförsök måste därför utföras för att verifiera vår antagna beräkningsmodell.

I figur 5.24 jämförs olika sammansatta balkar styrkemässigt med limträ. I figuren motsvarar limträ fullständig samverkan med en elasticitetsmodul $E=16000$ MPa.

Balkarna har spännvidden 4 m, dimensionen 95×198 (9 lameller $a = 22 \times 95$) och är monterade med spikplåtstyp PTN.

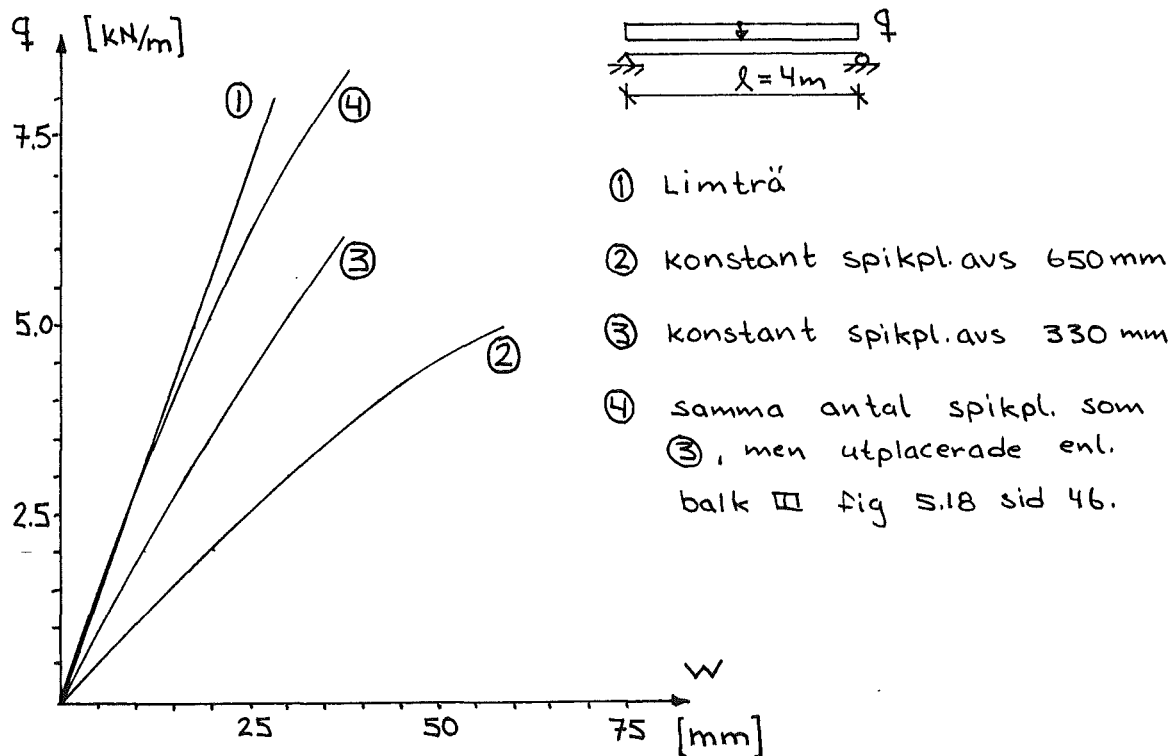


Fig.5.24 Jämförelse mellan olika sammansatta balkar och limträ.

5.4 BÅGPROVNINGARNA

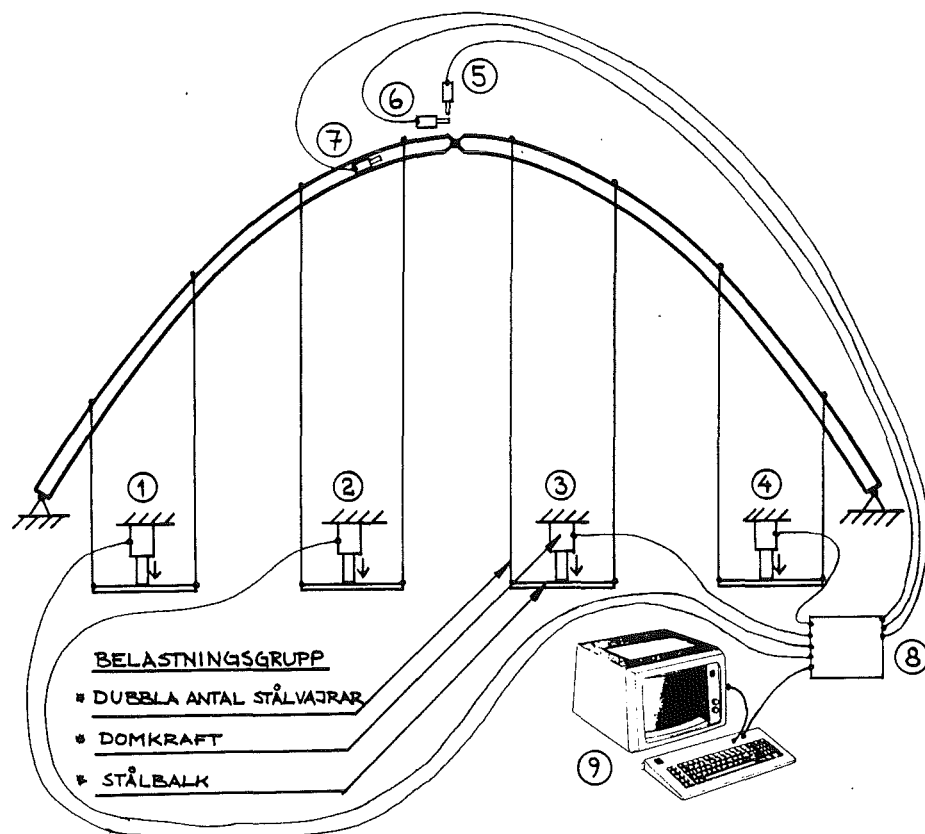
Den slutliga delen av de experimentella undersökningarna utgjordes av bågprovningen. Genom denna provning skulle flera av de intressanta frågeställningarna kunna besvaras.

Tre bågprovningar utfördes, varvid samtliga bågkonstruktioner hade parabelform med spännvidden $L=10$ m och pilhöjden $f=4$ m.

Den första bågen bestod av nio lameller och tillverkades med spikplåtstyp M. De två andra, som tillverkades med spikplåtstyp PTN, hade nio respektive sju lameller. Spikplåtarnas centrumavstånd var för samtliga bågar 0.65 m.

5.4.1 PROVNINGSUPPSTÄLLNING

På grund av bågkonstruktionens storlek bestämdes att provningen skulle utföras med bågen liggande på golvet. Bågen var upplagd på en träregelkonstruktion, som även förhindrade eventuell vippning. Se provuppställning figur 5.25.



- 1 - 4. Lastcell.
5. Utböjningsmätare i y-led.
6. Dito i x-led.
7. Givare för mätning av lamellförskjutning.
8. Kopplingsdosa samt dator (PC).

Fig.5.25 Provuppställning för bågprovning.

Domkrafter, placerade i fyra grupper, belastade konstruktionen med hjälp av totalt 16 stycken stålvajrar. Vajrarna, som i ena ändan var fastsatta mot bågen, var ihopkopplade med stålbalkar, vilka fritt kunde glida i den träregelkonstruktion som utgjorde varje belastningsgrupp. Utböjningsformen mättes i punkter längs bågen både i x- och y-led, och lamellernas relativförskjutning mättes på lämpliga ställen längs bågen.

5.4.2 BELASTNINGSFALL

De laster, som bågarna testades för, motsvarade egentygnd och snölast. Konstruktionen belastades med fyra punktlaster på vardera båghalvan. Genom att belasta domkrafterna på olika sätt kunde osymmetriska lastfall erhållas.

I figur 5.26 visas det belastningsfall som användes. Belastningsfallet är en kombination av egentygnd och snö, varför ett lastförhållande på 1:1.5 mellan båghalvorna kan anses vara rimligt.

Enligt normen har dimensionerande snölast visserligen en triangulär fördelning /8/, men den rektangulära ger dock för bågen ungefär samma momentfördelning.

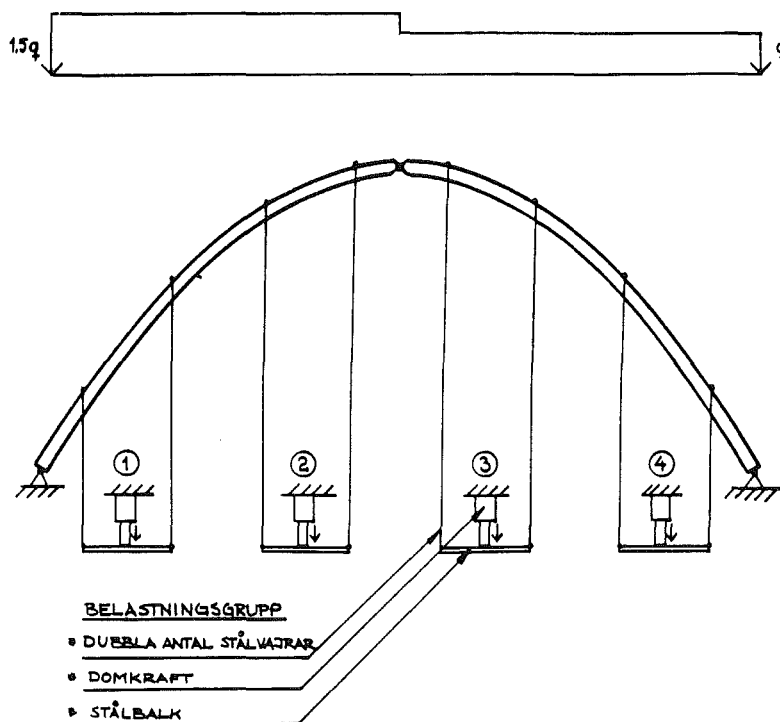


Fig.5.26 Osymmetrisk last där domkrafterna 3 och 4 belastas med kraften F , och domkrafterna 1 och 2 med $1.5F$.

5.4.3 PROVNINGEN

Innan bågarna slutligen belastades till brott, utfördes flera belastningsförsök med ökande belastning. Genom detta fick vi en kontroll på att allt fungerade och en chans att analysera de olika mätresultaten, innan den slutliga provningen utfördes.

För provningen upprättades ett lastschema, så förhållandet mellan trycket i domkrafterna kunde bibehållas under hela provningen.

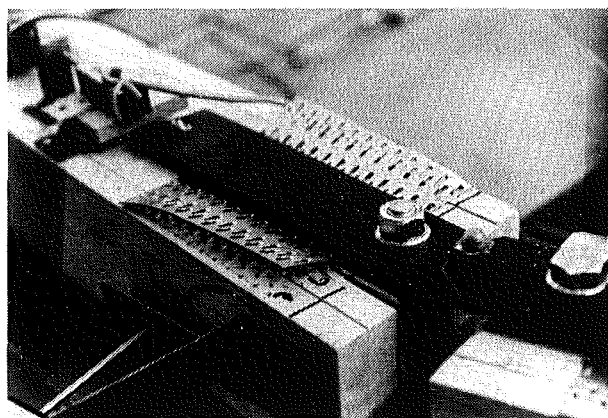
Spikplåtarnas deformation

Den relativa förskjutningen mellan lamellerna var störst vid bågtoppen. Vid upplagen var förskjutningen mellan lamellerna däremot mycket liten. Spikplåtarna deformerades alltså först vid bågtoppen för den båghalva som hade störst last.

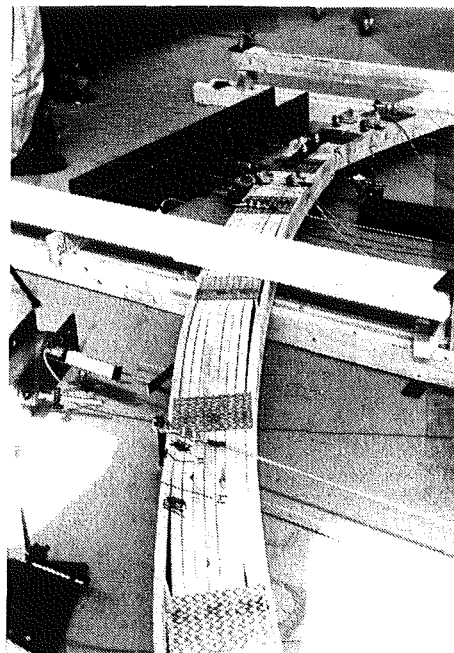
Brottstadium

Det slutliga brottet uppstod genom att den första spikplåten vid bågtoppen deformerades mer och mer. Den övriga delen av bågkonstruktionen var då fortfarande helt intakt. Den svaga länken var alltså för bågkonstruktionen de första spikplåtarna vid bågtoppen. Se figur 5.27a.

Detta förutsätter emellertid att bågen är felfri i övrigt. Figur 5.27b visar hur de yttersta lamellerna slits loss ifrån spikplåtarna för båge 1. Detta berodde på att spikplåtarna ej täckte de yttersta lamellerna tillräckligt.



a)



b)

Fig.5.27 a) Brottstadium för båge 3
b) Brottstadium för båge 1

5.4.4 PROVNINGSRESULTAT

Den utböjningsform som bågarna antog visas i figur 5.28. Relativförskjutningen mellan lamellerna som funktion av lasten visas för samtliga bågar i figur 5.29. I figur 5.30 visas, för båge 1 och 2, den mest belastade båghalvans mittnedböjning som funktion av lasten. I figur 5.31 visas motsvarande för båge 3. I figurerna ges även de teoretiskt framtagna resultaten.

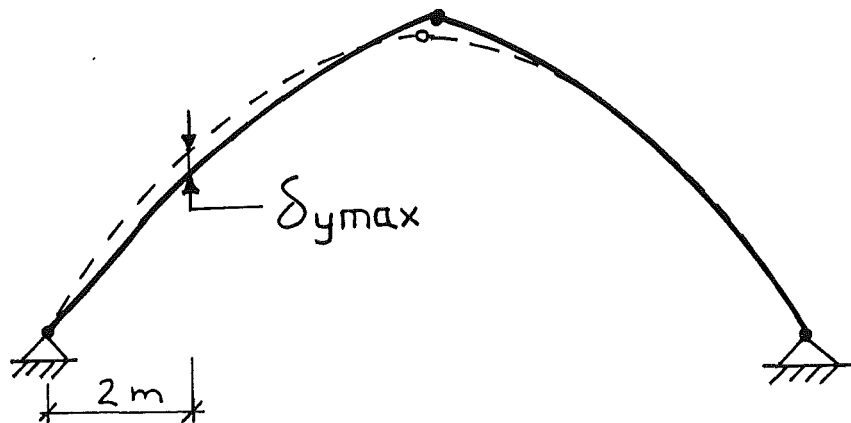


Fig.5.28 Utböjningsform för bågkonstruktionen

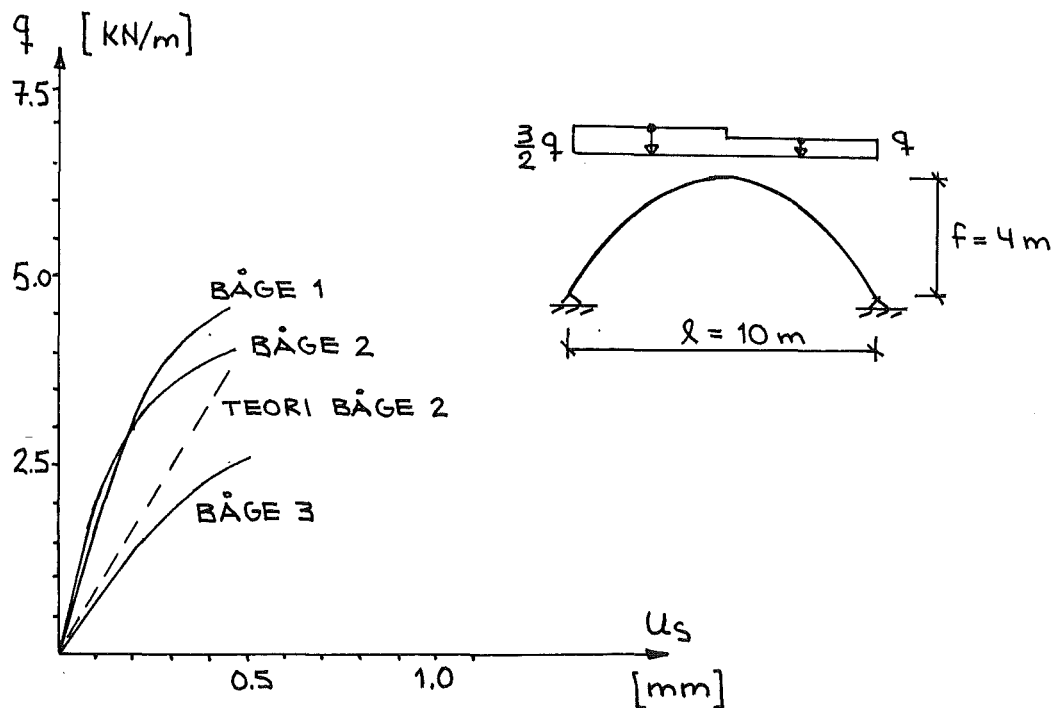


Fig.5.29 Relativförskjutning mellan lamellerna vid bågtoppen, för samtliga bågar.

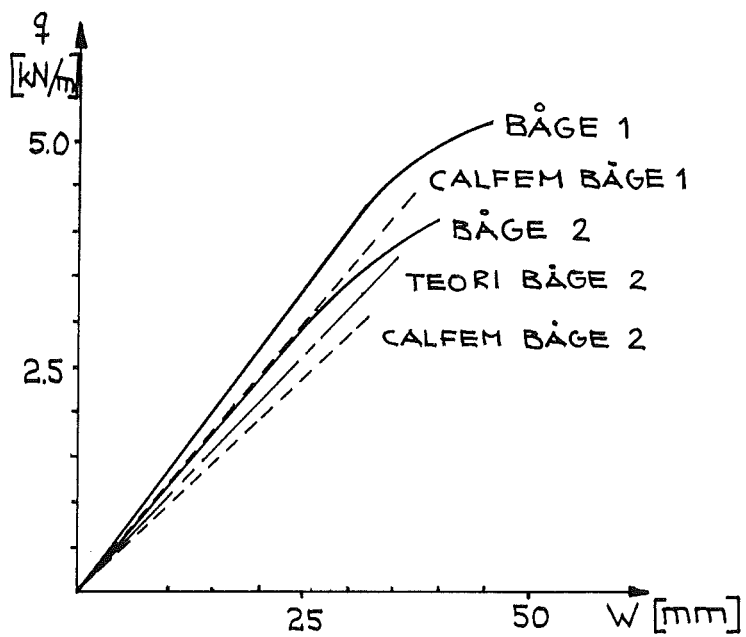


Fig.5.30 Nedböjning som funktion av lasten q för båge 1 och 2.

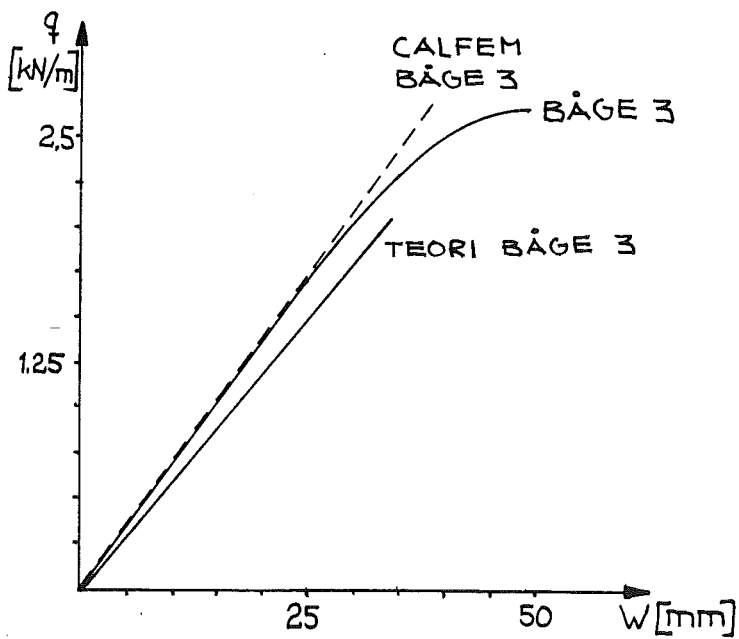


Fig.5.31 Nedböjning som funktion av lasten q för båge 3.

Kommentar till provresultat

Lägg märke till i figur 5.29, att vid en förskjutning mellan lamellerna av omkring 0.3 mm, börjar förskjutningen öka snabbare. För balkprovningarna var motsvarande förskjutning 0.8 mm. Se provresultat fig.5.17 sidan 44.

Spikplåtarna börjar alltså redan deformeras vid en relativ-förskjutning av 0.3 mm. Den återstående förskjutningen mellan lamellerna har redan gått åt vid den återfjädring som sker, då den tillverkade båghalvan släpps loss från mallen.

5.4.5 EGENSPÄNNINGAR

När man ger den spikplåtssammansatta trälamellkonstruktionen en bågform uppstår det s k egenspanningar i lamellerna och spikplåtsförbanden. Orsaken till detta är att spikplåtarna motverkar lamellernas vilja att återfå ursprunglig form. Spänningarnas storlek beror på lamellernas styvhet samt på hur stor krökningen är.

För mindre parabelbågar där krökningen är stor blir egenspanningarna så pass stora att de måste beaktas vid dimensioneringen.

De spänningar, som uppstår i en lamell, med elasticitetsmodulen E och tjockleken t , då den kröks med en krökningsradie r , blir

$$\sigma = E t / (2 r) \quad /1/$$

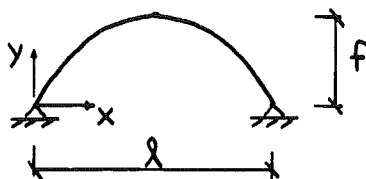
För en parabelbåge är krökningsradien $r = 8 * f / l^2$ vid bågtoppen, vilket ger spänningen

$$\sigma = 8 f E t / (2 l^2)$$

Dessa spänningar avtar emellertid med tiden genom att E-modulen reduceras. Vilken E-modul som då skall väljas är därför inte helt självklart.

Sannolikheten för att den s k femtioårslasten skall inträffa innan träet har hunnit relaxera är mycket liten. Vi antar därför att E-modulen har "relaxerats" med 50 % . Ett vanligt värde på E-modulen för trä är 12000 MPa /7/, varför ett rimligt värde på E-modulen vid egenspanningsberäkning då bör bli 8000 MPa.

Följande exempel visar hur stora egenspanningarna blir för parabelbågar med olika spannvidder.



E-modul = 8000 MPa
lamelltjocklek $t = 0.022$ m

λ	f	∇ [MPa]		
		$x=0$	$x=\lambda/4$	$x=\lambda/2$
10	4	4.2	10.7	28.2
18	4	3.6	6.4	8.7
30	8	2.0	4.0	6.3

Fig.5.32 Egenspanningens storlek vid krökning av lamellerna

Då karaktäristiskt värde på böjspänningen är 24 MPa för T24, inses att parabelbågar med för kraftig krökning ej är att föredra.

Även spikplåtarna blir hårt belastade vid dessa höga egenspanningar. För båge nr 2 började spikplåtarna vid bågtoppen att deformeras redan innan belastningen påfördes. Förskjutningen mellan lamellerna var då av storleksordningen 0.6 - 0.8 mm på grund av återfjädringen.

För båge nr 3, uppbyggd av sju lameller, var motsvarande återfjädring 0.3 mm.

För att få kontroll på egenspanningarna bör krökningen inte överstiga 0.15, vilket motsvarar en krökningsradie av 6.7 m. För parabelbågen gäller då att krökningen

$$8f/L^2 < 0.15 \quad \text{där } L = \text{bågens spannvidd} \\ f = \text{bågens pilhöjd}$$

För bågkonstruktioner med mindre krökningsradier, bör tunnare lameller eller en cirkelformad båge väljas. Spikplåtarna bör desutom placeras tätare vid bågtoppen, där krökningen är som störst.

5.4.6 Egenspänningarnas inverkan på dimensionerande last

Brott kan antingen ske genom träbrott i lamellerna eller genom att spikplåtsförbandens bärförmåga minskar. En intressant fråga att besvara är då, hur dimensioneringen vid lasttyperna snö och vind påverkas av egenspänningarna i den spikplåtssammansatta trälamellbågen.

Lamellerna i denna typ av konstruktioner blir i huvudsak utsatta för rena tryck- eller dragspänningar. De böjspänningar som uppstår p g a att lamellerna kröks vid belastning är mycket små.

Då egenspänningarna är rena böjspänningar, uppstår i någon del av konstruktionen högre spänningar både vid snö- och vindlast. För båda lastfallen skall alltså egenspänningarna adderas.

Hur spikplåtarna deformerar vid snö- resp vindlast jämfört med de av egenspänningarna orsakade deformationen, kan visas genom att studera hur utböjningsformen ser ut för de olika lastfallen.

De utböjningsformer som bågen antar vid återfjädringen, samt vid belastning av snö eller vind, visas i figur 5.33.

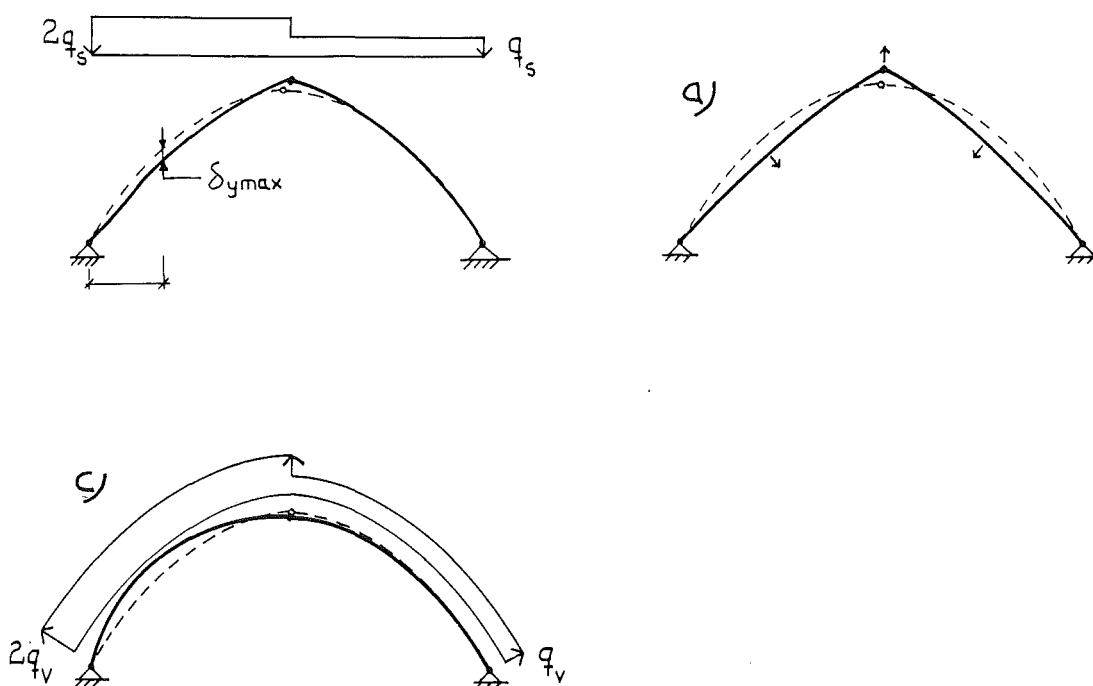


Fig. 5.33 a) utböjningsform vid återfjädring
b) utböjningsform av snölast
c) utböjningsform av vindlast

Snölast, vilken vi simulerade i bågprovningen, ger en utböjningsform som medverkar till lamellernas vilja att erhålla ursprunglig form, d v s är ogynnsam för spikplåtsförbanden. Den relativa förskjutningen mellan lamellerna som uppstår vid återfjädringen resp belastning av snölast skall alltså adderas.

Vindlast ger däremot en utböjningsform som ökar lamellernas krökning och därmed minskar påkänningarna i spikplåtsförbanden. Här blir alltså den totala relativa förskjutningen lika med den vid återfjädringen minus den förskjutning som uppstår p g a vindbelastning.

5.4.7 ERFARENHETER

Det är viktigt att spikplåtarna täcker hela balktvärsnittets sida så att de yttersta lamellerna får tillräckligt med spikplåtständer. Annars kan de yttersta lamellerna fläka ut, se brottstadium för båge 1 figur 5.27 sidan 54.

De yttersta lamellerna bör skarvas på både över- och undersidan då spikplåt används.

Upplag vid hjässa och anfang bör konstrueras på ett sådant sätt att fläkbrott p g a tvärkraften inte uppstår. Med fläkbrott menas att lamellerna slits loss ifrån spikplåtarna vinkelrätt sin längsriktning.

Egenspänningarna begränsar allt för kraftig krökning av bågen.

Den svaga länken för bågkonstruktionen var spikplåtarna vid bågtoppen. När dessa spikplåtar var helt deformerade var bågen för övrigt helt intakt. För att förhindra att spikplåtens tänder kryper ut ur lamellerna, kan upplaget utformas på ett sådant sätt att detta förhindras. Man kan ju fundera hur mycket en vanlig kamspik inslagen i de hörnor av spikplåten som släpper, skulle innebära för hela konstruktionens styvhet.

6 DIMENSIONERING - BALKAR OCH BÅGAR

Att handräkna en konstruktion med delvis samverkan är för arbetskrävande för att kunna vara praktiskt genomförbart.

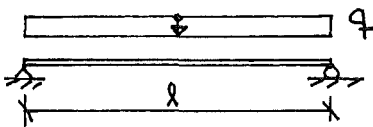
För att dimensioneringen skall bli lätt, har vi valt att framställa en diagrammetod för bågar samt en tabellmetod för balkar. Detta har gjorts med hjälp av ett eget framtaget datorprogram.

Från tabellerna och diagrammen kan man sedan med givna förutsättningar plocka ut en lämplig dimension.

Tabeller och diagram, samt vilka förutsättningar som gäller vid dimensioneringen, visas i bilaga (E).

Här nedan visas ett exempel på hur dimensioneringen kan gå till för en balk resp båge.

6.1 DIMENSIONERINGSEXEMPEL FÖR BALK



q_{brott} = last i brottgränstillstånd

q_{bruk} = last i brukgränstillstånd

Förutsättningar : $l = 5 \text{ m}$

$q_{\text{brott}} = 3 \text{ kN/m}$

$q_{\text{bruk}} / q_{\text{brott}} < 2/3$

L [m]	DIMENSION $b \times H / a$ [mm]			
	$q_{\text{brott}} = 2 \text{ kN}$	3 kN	4 kN	
3	70 × 154 / 600	70 × 198 / 600	70 × 220 / 600	70
4	70 × 198 / 700	70 × 242 / 700	95 × 264 / 700	95
5	70 × 220 / 600	95 × 264 / 600	95 × 308 / 600	95
6	95 × 242 / 600	95 × 286 / 500	95 × 352 / 450	95

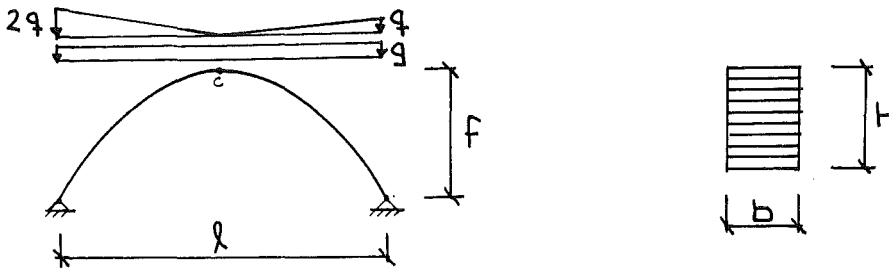
tvärsnittsbredd

tvärsnittshöjd

centrumavstånd spikplåtar

Erforderlig dimension är 95×264 med ett konstant spikplåtsavstånd 600 mm.

6.2 DIMENSIONERINGSEXEMPEL FÖR BÅGE



Förutsättningar: $l = 20$ m
 $f = 5$ m
 snözon 1
 säkerhetsklass 3
 klimatklass 2
 c/c-bågar = 4 m

$f/l > 0.15$
 $8f/l^2 < 0.15$

Ur diagram 1 kan för, aktuell spannvidd och c/c-bågar, erforderlig tvärsnittshöjd erhållas.

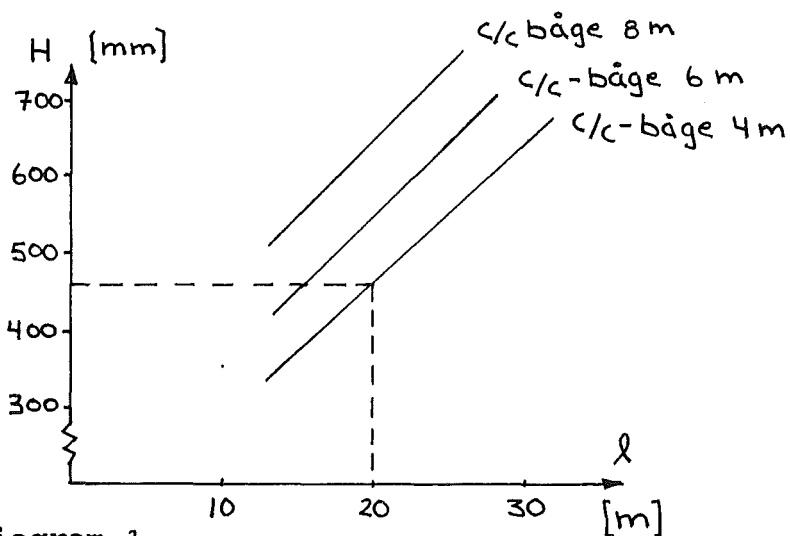


Diagram 1.

Erforderlig tvärsnittsbredd samt spikplåtarnas centrumavstånd (a) vid aktuell tvärsnittshöjd erhålles ur tabell 1.

H	b	a [mm]
< 330	95	600
330 - 550	120	750
> 550	145	900

Tabell 1.

Erforderlig dimension är 120×460 med spikplåtsavståndet 750 mm.

7. KOSTNADSJÄMFÖRELSE

Är den spikplåtssammansatta trälamellkonstruktionen ekonomiskt intressant? För att kunna besvara den frågan gör vi här en jämförelse med limträ.

Eftersom den här typen av konstruktioner är ny på marknaden, kan en fullständig kostnadsjämförelse inte låta sig göras, då vi inte vet storleken av tillverkningskostnader mm. För att få en uppfattning om produktens förutsättningar tar vi här fram en så kallad marginalkostnad.

Marginalkostnaden är här skillnaden mellan den marknadsmässiga kostnaden för limträ och materialkostnaderna för den spikplåtssammansatta trälamellkonstruktionen. Denna kostnad får sedan ligga till grund för bedömningen, om produkten kan vara av ekonomiskt intresse.

Kostnadsberäkningen är utförd under följande förutsättningar:

Limträ	balkar	4000 kr/m ³
	bågar	5000 kr/m ³
Konstruktionsvirke T24		2000 kr/m ³
Spikplåtar	typ PTN	130 kr/m ²

Balkkonstruktioner

Nedan visas marginalkostnaden för de olika balktyperna i figur 5.24 sidan 51.

Bågkonstruktioner

I figur 7.2 visas inom det streckade området marginalkostnaden vid olika spännvidder för snözon 1.

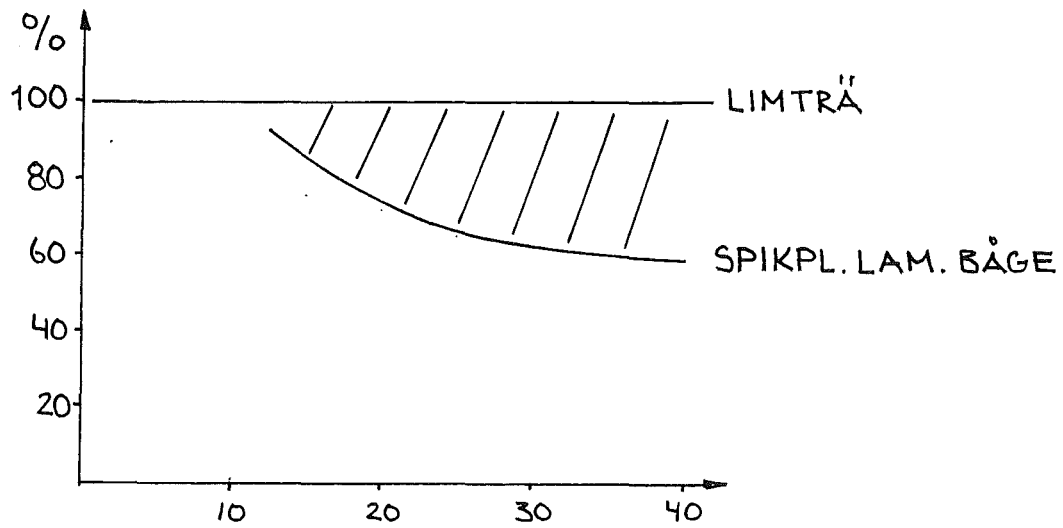


Fig.7.2 Kostnadskurva för bågar.

8. SLUTSATSER

De praktiska försöken visade, att för den sammansatta bågen stämde teori och verklighet bra överens. Vi anser oss därför ha funnit en lämplig beräkningsmodell för dessa.

För de raka sammansatta balkarna var det svårt att finna en lämplig beräkningsmodell. Teori och verklighet stämde dåligt överens. Den verkliga konstruktionen var mycket styvare än den teoretiskt beräknade.

För att finna en lämplig beräkningsmodell, behöver fler försök med framför allt längre spännvidder utföras.

För konstruktioner där något större nedböjningar kan accepteras, vågar vi påstå att även den raka sammansatta balken kan användas.

Intressanta frågeställningar att besvara vid fortsatt forskning inom detta område är:

- Kan ytterligare balkprovningar verifiera vår antagna beräkningsmodell?
- Hur mycket ändras konstruktionens styvhet, om en vanlig kamspik slås in i de hörnor av spikplåten som deformeras?
- Är cirkelformad bågform lämpligare för små spännvidder?
- Ger en kombination av spikplåtstyp M och PTN en bättre bågkonstruktion?
- Vilken krökning av bågen är möjlig med tanke på de egenspanningar som påverkar spikplåtarna?
- Kan t ex andra lamelltjocklekar ge bättre resultat?
- Finns bättre spikplåtstyper för dessa konstruktioner?
- Vilka brandegenskaper har konstruktionen?

REFERENSLISTA

- /1/ H.J.Larsen, H.Riberholt, Träkonstruktioner beräkningar statens byggforskningsinstitut 1983
- /2/ Egor P.Popov Mechanics of materials second edition Prentice/Hall
- /3/ Kurskompendium Bärande konstruktioner Fk 2, stål och trä, Lund 1988.
- /4/ Sven Thelandersson, Konstruktionsberäkningar med dator studentlitteratur Lund 1984.
- /5/ CALFEM manual
- /6/ Johannesson Langesten Vretblad, Bärverk Läroböcker för konstruktion B, Norstedts tryckeri Stockholm 1978.
- /7/ Kurskompendium Byggnadsmateriallära Ak del 2 Lund 1983
- /8/ Nybyggnadsföreskrifter NYB
- /9/ Limträhandboken
- /10/ Nordtest nr 75 76

BILAGA A

Härledning av Grundekvation

BALKAR MED DELVIS SAMVERKAN

Dubbelsymmetrisk balk med n st lameller

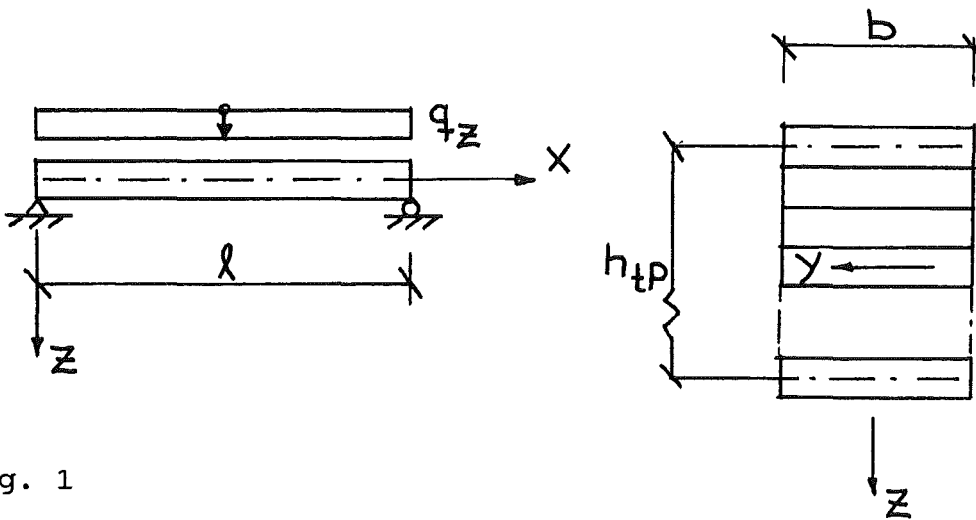


Fig. 1

Följande definitioner införes:

n = antal tvärsnittsdelar

A_i = arean av en lamells tvärsnittsytta ($A_1 = A_2 = \dots = A_n$)

I_i = tröghetsmoment för en lamell ($I_1 = I_2 = \dots = I_n$)

I = tröghetsmoment vid full samverkan

I_0 = summan av lamellernas tröghetsmoment dvs $n \cdot I_1$

B^2 = styvhetsförhållandet mellan ofullständigt- resp fullständig samverkan dvs

$$I_0/I = 1/n^2 \quad \text{där} \quad I_0 = n \frac{bh^3}{12}$$

$$I = \frac{b(n \cdot h)^3}{12}$$

$$D^2 = \frac{k}{E \cdot A_r \cdot a}$$

där k = spikplåtens förskjutningsmodul

a = spikplåtarnas centrumavstånd

$$A_r = \frac{n-1}{2} A_1$$

E = tvärsnittsdelarnas elasticitetsmodul

$$C = \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n/2} (2i-1)^2$$

jämnt antal lameller

$$C = \frac{4}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{(n-1)/2} i^2$$

udda antal lameller

H = skjuvflödet mellan tvärsnittsdelarna

U_s = relativa förskjutningen mellan tvärsnittsdelarna

h_{tp} = centrumavståndet mellan de yttersta lamellerna

Följande antaganden göres:

- * Förskjutningen i tvärled är lika för alla lamellerna
($w_1 = \dots = w_n = w$)
- * Små deformationer d v s $dw/dx \ll 1$
- * Den relativa förskjutningen U_s är lika stor mellan alla tvärsnittsdelarna
- * Homogent material med samma E-modul i alla tvärsnittsdelar
- * Linjärt elastiskt material samt linjärt samband mellan skjuvflöde och relativförskjutning i fogen
- * Skjuvdeformationer inom respektive tvärsnittsdela försummas

Kinematik

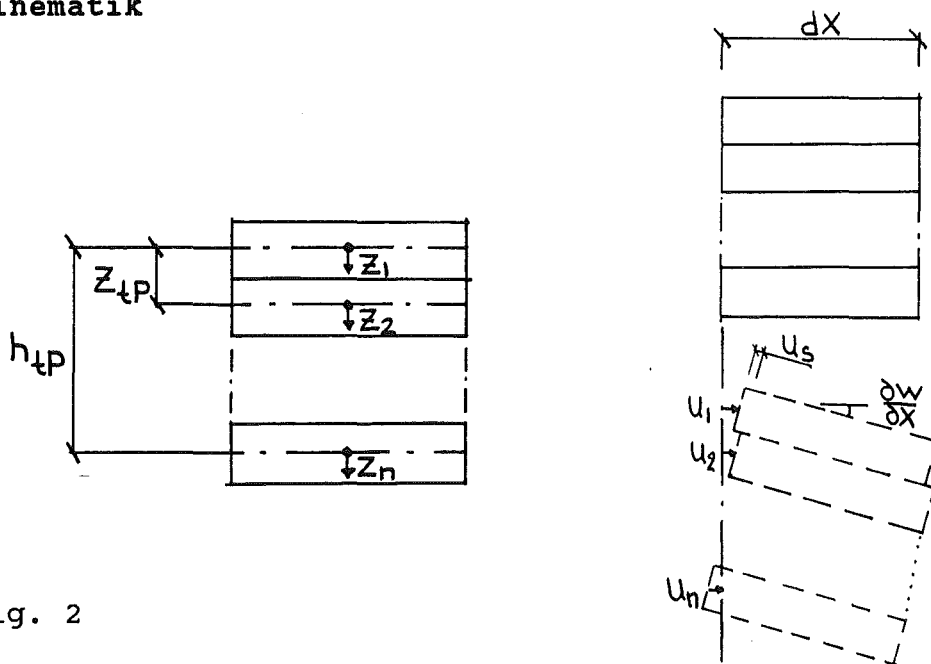


Fig. 2

Följande förskjutningsfunktioner införes:

$u_i(x, z_i)$ = förskjutning i x-led av punkt (x, z_i)
för del i ($i = 1, 2, 3$)

$u_i(x)$ = förskjutning i x-led av tyngdpunkten för del i

Förskjutningen i x-led av en godtycklig punkt för tvärsnittsdelen i kan skrivas

$$(1) \quad \bar{u}_i(x, z_i) = u_1(x) - z_i \frac{\partial w}{\partial x}$$

Det antages att den relativa förskjutningen U_s är lika mellan samtliga tvärsnittsdelen.

Relativförskjutningen mellan delarna erhålles av

$$U_s(x) = u_2 - u_1 + z_{tP} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$U_s(x) = u_3 - u_2 + z_{tP} \frac{\partial w}{\partial x}$$

OSV.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 = \frac{n-3}{n-1} u_1 \\ z_{tP} = \frac{1}{n-1} h_{tP} \end{array} \right. \Rightarrow$$

där $n = \text{antal lameller}$

$$U_s(x) = \frac{n-3}{n-1} u_1 - u_1 + \frac{1}{n-1} h_{tP} \frac{\partial w}{\partial x}$$

som efter föränkning leder till

$$(2) \quad U_s(x) = -\frac{2}{n-1} u_1 + \frac{1}{n-1} h_{tP} \frac{\partial w}{\partial x}$$

Töjningarna i tvärsnittsdelen blir

$$(3) \quad \epsilon_{xi}(x, z_i) = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x} = \frac{\partial u_i}{\partial x} - z_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Konstruktiva samband

Spänningarna i x-led för tvärsnittsdelen blir

$$(4) \quad \sigma_{xi} = E \frac{\partial u_i}{\partial x} - z_i E \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Det förutsätts att fästdonen sitter med ett konstant avstånd a längs hela balken. Det antages att kraften F på varje fästdon verkar jämnt över avståndet a .

Detta medför att sambandet mellan F , a och skjuvflödet H kan skrivas

$$(5) \quad F = H \cdot a$$

För fästdonen gäller

$$(6) \quad F = k \cdot u_s \quad \text{där } k = \text{spikpåtens förskjutningsmodul}$$

Ekv (5) och (6) ger skjuvflödet mellan delarna vilket kan skrivas

$$(7) \quad H = \frac{k}{a} u_s$$

Snittstorheter

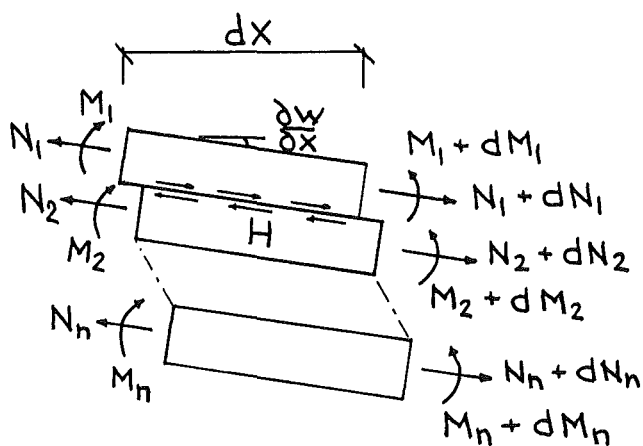


Fig. 4

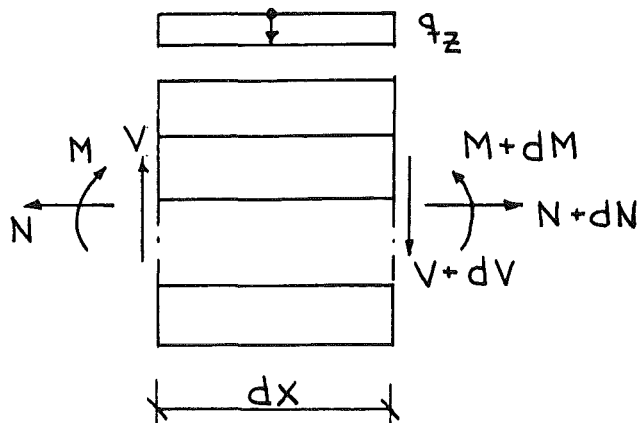


Fig. 5

Integration över resp tvärsnittsdel ger

$$(8) \quad N_i = \int_{A_i} \sigma_{xi} dA_i = E A_i \frac{\partial u_i}{\partial x}$$

$$(9) \quad M_i = \int_{A_i} z_i \sigma_{xi} dA_i = - E I_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Snittstorheterna för hela tvärsnittet enligt figur 5 skall vara statistiskt ekvivalent med snittkrafterna i figur 4.

En kraftjämvikt ger

$$(10) \quad N = N_1 + N_2 + \dots + N_n$$

Vid ren böjning, dvs då normalkraften N är noll, gäller

$$\begin{aligned} N_1 &= -N_n \\ N_2 &= -N_{n-1} \\ &\vdots \\ N_{(n+1)/2} &= 0 && \text{jäller udda antal lameller} \\ &\text{OSV...} \end{aligned}$$

Detta ger att

$$(11) \quad N = N_1 + N_2 + \dots - N_2 - N_1 = 0$$

Momentjämvikt för tvärsnittet ger

$$(12) \quad M = M_1 + M_2 + \dots + M_n - N_1 \cdot h_{tP} - N_2 \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot h_{tP} - \dots$$

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{n-3}{n-1} N_1 \\ N_3 &= \frac{n-5}{n-1} N_1 \\ &\vdots \\ N_{(n-1)/2} &= \frac{2}{n-1} && \text{jäller udda antal lameller} \end{aligned}$$

$$(13) \quad M = M_1 + M_2 + \dots + M_n - \left(1 + \left(\frac{n-3}{n-1} \right)^2 + \left(\frac{n-5}{n-1} \right)^2 + \dots \right) N_1 \cdot h_{tP}$$

Här införes definitionen

$$C = \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n/2} (2i-1)^2 \quad \text{jäller udda antal lameller}$$

$$C = \frac{4}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{(n-1)/2} i^2 \quad \text{jäller jämnt antal lameller}$$

detta ger

$$(14) \quad M = M_1 + M_2 + \dots + M_n - C \cdot N_1 h_{tP}$$

Insättning av ekv (8) och (9) i ekv (14) ger

$$(15) \quad M = -EI_0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - C E A_1 h_{tP} \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

Derivering av ekv (2) ger

$$(16) \quad \frac{\partial u_s}{\partial x} = - \left(\frac{2}{n-1} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{n-1} h_{tP} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

$$(17) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = - \left(\frac{n-1}{2} \right) \frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{1}{2} h_{tP} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

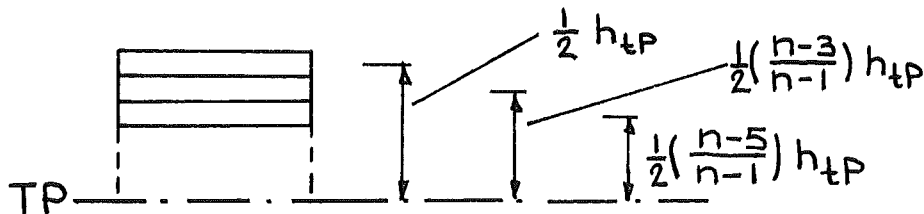
Insättning av ekv (17) i ekv (15) ger

$$(18) \quad M = -EI_0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - C E A_1 h_{tP} \left(- \left(\frac{n-1}{2} \right) \frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{1}{2} h_{tP} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)$$

vilket kan skrivas

$$(19) \quad C \left(\frac{n-1}{2} \right) E A_1 h_{tP} \frac{\partial u_s}{\partial x} = M + \underbrace{\left(EI_0 + \frac{1}{2} C E A_1 h_{tP}^2 \right)}_{**} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

Vid fullständig samverkan gäller (Steiners sats)



$$I = I_0 + 2 A_1 \left(\left(\frac{1}{2} h_{tP} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{n-3}{n-1} \right) h_{tP} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{n-5}{n-1} \right) h_{tP} \right)^2 + \dots \right)$$

$$I = I_0 + \frac{1}{2} A_1 h_{tP}^2 \left(1 + \left(\frac{n-3}{n-1} \right)^2 + \left(\frac{n-5}{n-1} \right)^2 + \dots \right)$$

uttrycket inom parantesen är identiskt med vår definition c, vilket betyder att uttrycket ** är lika med EI för fullständig samverkan

Detta ger att ekv (19) kan skrivas

$$(20) \quad C \left(\frac{n-1}{2} \right) E A_1 h_{tP} \frac{\partial u_s}{\partial x} = M + EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

Vid fullständig samverkan dvs $U_s = 0$ blir $M = -EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$

Detta är, som vi ser, just den diff.ekv som gäller vid fullständig samverkan.

Jämviktssamband

Jämvikt för hela tvärsnittet i figur 4 ger

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= -q_z \\ (21) \quad \frac{dN}{dx} &= -q_x \\ \frac{dM}{dx} &= V \end{aligned}$$

Jämvikt för del 1 i figur 4 ger

$$(22) \quad H = -\frac{\partial N_1}{\partial x} - q_{1x}$$

där q_{1x} är den andel av q_x som angriper i del 1

Vi antar att q_x fördelar sig lika på samtliga lameller vilket i detta fall gör

$$(23) \quad H = -\frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{1}{n} q_x$$

Ekv (7) och ekv (23) ger efter derivering

$$(24) \quad \frac{\partial U_s}{\partial x} = -\frac{a}{k} \left(\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} + \frac{1}{n} \frac{\partial q_x}{\partial x} \right)$$

Insättning av ekv (24) i ekv (20) ger

$$(25) \quad -c \left(\frac{n-1}{2} \right) EA_1 h_{tP} \frac{a}{k} \left(\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} + \frac{1}{n} \frac{\partial q_x}{\partial x} \right) = M + EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

Här införes definitionen $D^2 = \frac{k}{EA_1 a}$

$$A_1 = \left(\frac{n-1}{2} \right) \cdot A_1$$

Detta ger att ekv (25) kan skrivas

$$(26) \quad \frac{c}{D^2} h_{tP} \left(\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} - \frac{1}{n} \frac{\partial q_x}{\partial x} \right) = M + EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

Ekv (14) ger

$$(27) \quad N_1 = - \left(M + EI_0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \frac{1}{C h_{tP}}$$

Vid böjning med samtidig normalkraft N blir

$$(28) \quad N_1 = \frac{N}{n} - \left(M + EI_0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \frac{1}{C h_{tP}}$$

Derivering av ekv (28) två gånger ger

$$(29) \quad \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} = \frac{1}{n} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + EI_0 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right) \frac{1}{C h_{tP}}$$

Insättning av ekv (29) i ekv (26) ger

$$(30) \quad - \frac{C}{D^2} h_{tP} \left[\frac{1}{n} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + EI_0 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right) \frac{1}{C h_{tP}} - \frac{1}{n} \frac{\partial q_x}{\partial x} \right] = M + EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

Med beaktande av ekv (21) kan ekv (30) skrivas

$$\begin{aligned} - \frac{C}{D^2} h_{tP} \left(q_z - EI_0 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right) \frac{1}{C h_{tP}} &= M + EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ - q_z + EI_0 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} &= D^2 \left(M + EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \\ EI_0 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - D^2 EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= q_z + D^2 M \end{aligned}$$

som slutligen leder till

$$(31) \quad \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \left(\frac{D}{B} \right)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{1}{EI_0} \left[q_z + D^2 M \right]$$

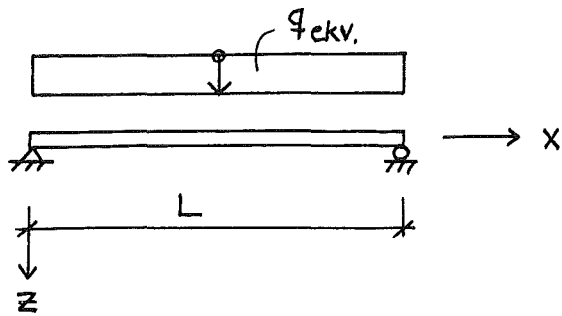
$$D^2 = \frac{k}{EA_r a}$$

$$A_r = A_1$$

$$B^2 = 1/n^2$$

BILAGA B

Lösning av grundekvation



VID FULLSTÄNDIG SAMVERKAN GÄLLER

$$w^{(IV)} = q$$

$$w''' = qx + A$$

$$w'' = q \frac{x^2}{2} + Ax + B$$

$$w' = q \frac{x^3}{6} + A \frac{x^2}{2} + Bx + C$$

$$w = q \frac{x^4}{24} + A \frac{x^3}{6} + B \frac{x^2}{2} + Cx + D$$

SOM RANDVILLKOR GÄLLER

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0$$

$$w''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$w''(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad q \frac{L^2}{2} + AL = 0 \Rightarrow A = -q \frac{L}{2}$$

$$w(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad q \frac{L^4}{24} - q \frac{L^4}{12} + CL = 0 \Rightarrow C = q \frac{L^3}{24}$$

VARVID

$$w'' = q \frac{x^2}{2} - q \frac{L}{2} x$$

$$M = -EI w'' \quad \Rightarrow \quad w'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{q}{2EI} [Lx - x^2]$$

VID DELVIS SAMVERKAN GÄLLER

$$W^{(IV)} - \lambda^2 W'' = \frac{1}{EI_0} [q + MD^2]$$

$$\text{DÄR } \lambda = \frac{D}{B}$$

$$q = q_0 = \text{KONSTANT}$$

$$M = q_0 \frac{L}{2} x - q_0 \frac{x^2}{2}$$

DETTA GER

$$W^{(IV)} - \lambda^2 W'' = \frac{1}{EI_0} [q_0 + D^2 [q_0 \frac{L}{2} x - q_0 \frac{x^2}{2}]]$$

HOMOGEN LÖSNING: $W^{(IV)} - \lambda^2 W'' = 0$ KAN SKRIVAS $r^4 - \lambda^2 r^2 = 0$

DET KARAKTÄRISTISKA POLYNOMET GER

$$w_h'' = C_1 \cosh \lambda x + C_2 \sinh \lambda x$$

PARTIKULÄR LÖSNING: ANSÄTTNING AV $w_p'' = Ax^2 + Bx + C$

$$w_p^{(IV)} = 2A$$

INSÄTTNING GER

$$2A - \lambda^2 [Ax^2 + Bx + C] = \frac{q_0}{EI_0} [1 + \frac{D^2}{2} [Lx - x^2]]$$

$$-\lambda^2 A = -\frac{q_0}{EI_0} \cdot \frac{D^2}{2}$$

$$-\lambda^2 B = \frac{q_0}{EI_0} \cdot \frac{D^2}{2} \cdot L$$

$$2A - \lambda^2 C = \frac{q_0}{EI_0}$$

$$A = \frac{q_0 D^2}{2\lambda^2 EI_0}$$

$$B = -\frac{q_0 D^2 L}{2\lambda^2 EI_0}$$

$$C = -\frac{q_0}{\lambda^2 EI_0} + \frac{q_0 D^2}{\lambda^4 EI_0}$$

$$w_p'' = \frac{q_0}{EI_0} \left[\frac{D^2}{2\lambda^2} x^2 - \frac{D^2 L}{2\lambda^2} x - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{D^2}{\lambda^4} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{D}{B} \\ B^2 &= \frac{I_0}{I} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$w_p'' = \frac{q_0}{EI_0} \left[\frac{D^2}{2 \frac{D^2}{B^2}} x^2 - \frac{D^2 L}{2 \frac{D^2}{B^2}} x - \frac{1}{\frac{D^2}{B^2}} + \frac{D^2}{\frac{D^4}{B^4}} \right] = \frac{q_0}{EI_0} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{L}{2} x - \frac{1}{D^2} + \frac{B^2}{D^2} \right]$$

$$w'' = C_1 \cosh \lambda x + C_2 \sinh \lambda x + \frac{q_0}{EI} \left[\frac{B^2 - 1}{D^2} - \frac{L}{2} x + \frac{x^2}{2} \right]$$

SOM RANDVILLKOR GÄLLER

$$w''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{q_0}{EI} \left[\frac{B^2 - 1}{D^2} \right]$$

$$w''(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{q_0}{EI} \left[\frac{B^2 - 1}{D^2} \right] \cosh \lambda L + C_2 \sinh \lambda L + \frac{q_0}{EI} \left[\frac{B^2 - 1}{D^2} \right] = 0$$

$$C_2 = \frac{q_0}{EI} \left[\frac{B^2 - 1}{D^2} \right] \left[\frac{\cosh \lambda L - 1}{\sinh \lambda L} \right]$$

$$w'' = \frac{q_0}{EI} \left[\frac{B^2 - 1}{D^2} \right] \left[1 - \cosh \lambda x + \frac{\cosh \lambda L - 1}{\sinh \lambda L} \cdot \sinh \lambda x \right] - \frac{q_0}{2EI} [Lx - x^2]$$

DEN SISTA TERMEN I DETTA UTTRYCK ÄR IDENTISKT MED

$-w_0''$, DVS KRÖKNINGEN FÖR MOTSVARANDE BALK MED

FULLSTÄNDIG SAMVERKAN.

$$w''' = \frac{q_0}{EI} \left[\frac{B^2 - 1}{D^2} \right] \frac{D}{B} \left[-\sinh \lambda x + \frac{\cosh \lambda L - 1}{\sinh \lambda L} \cdot \cosh \lambda x \right] - \frac{q_0}{EI} \left[\frac{L}{2} - x \right]$$

$$w = \frac{q_0}{\lambda^2 EI} \left[\frac{B^2 - 1}{D^2} \right] \left[\frac{x^2}{2} \lambda^2 - \cosh \lambda x + \frac{\cosh \lambda L - 1}{\sinh \lambda L} \cdot \sinh \lambda x \right]$$

$$- \frac{q_0}{2EI} \left[\frac{L}{6} x^3 - \frac{x^4}{12} \right] + Ax + B$$

SOM RANDVILLKOR GÄLLER

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{q_0}{\lambda^2 EI} \left[\frac{B^2 - 1}{D^2} \right]$$

$$w(L) = 0 \Rightarrow \frac{q_0}{\lambda^2 EI} \left[\frac{B^2 - 1}{D^2} \right] \left[\frac{L^2}{2} \lambda^2 - 1 \right] - \frac{q_0}{2EI} \cdot \frac{L^4}{12} + AL + \frac{q_0}{\lambda^2 EI} \left[\frac{B^2 - 1}{D^2} \right] = 0$$

$$A = - \frac{q_0}{\lambda^2 EI} \left[\frac{B^2 - 1}{D^2} \right] \frac{L}{2} \lambda^2 + \frac{q_0 L^3}{24EI}$$

$$w = \frac{q_0 B^2}{EI D^2} \left[\frac{B^2 - 1}{D^2} \right] \left[\left[\frac{x^2}{2} - \frac{L}{2} x \right] \frac{D^2}{B^2} + 1 - \cosh \lambda x + \frac{\cosh \lambda L - 1}{\sinh \lambda L} \cdot \sinh \lambda x \right] - \underbrace{\frac{q_0}{2EI} \left[\frac{L}{6} x^3 - \frac{x^4}{12} - \frac{L^3}{12} x \right]}_{-w_0}$$

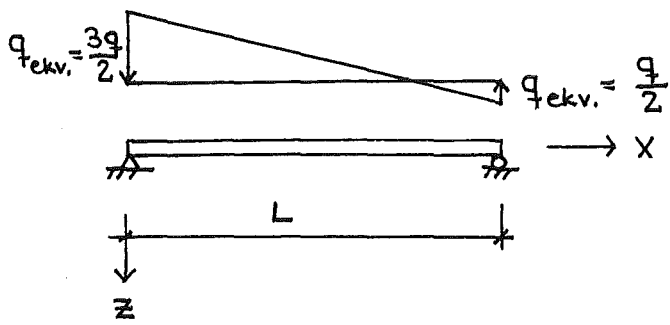
$$w(L/2) = w_0(L/2) + \frac{q_0 B^2}{EI D^2} \left[\frac{B^2 - 1}{D^2} \right] \left[1 - \frac{L^2 D^2}{8 B^2} - \frac{1}{\cosh \lambda \frac{L}{2}} \right]$$

$$w = w_0 + \frac{q_0 B^2}{EI D^2} \left[\frac{B^2 - 1}{D^2} \right] \left[\left[\frac{x^2}{2} - \frac{L}{2} x \right] \frac{D^2}{B^2} + 1 - \cosh \lambda x + \frac{\cosh \lambda L - 1}{\sinh \lambda L} \cdot \sinh \lambda x \right]$$

$$w'' = w_0'' + \frac{q_0}{EI} \left[\frac{B^2 - 1}{D^2} \right] \left[1 - \cosh \lambda x + \frac{\cosh \lambda L - 1}{\sinh \lambda L} \cdot \sinh \lambda x \right]$$

$$\frac{w''(L/2)}{w_0''(L/2)} = 1 + \frac{8}{L^2} \left[\frac{B^2 - 1}{D^2} \right] \left[1 - \frac{1}{\cosh \lambda \frac{L}{2}} \right]$$

$$w''' = w_0''' + \frac{q_0 D}{EI B} \left[\frac{B^2 - 1}{D^2} \right] \left[-\sinh \lambda x + \frac{\cosh \lambda L - 1}{\sinh \lambda L} \cdot \cosh \lambda x \right]$$



VID FULLSTÄNDIG SAMVERKAN GÄLLER

$$w^{(IV)} = \left[\frac{3}{2} - \frac{2x}{L} \right] q$$

$$w''' = \left[\frac{3}{2} - \frac{2x}{L} \right] q + A$$

$$w'' = \left[\frac{3}{4}x^2 - \frac{x^3}{3L} \right] q + Ax + B$$

$$w' = \left[\frac{3}{12}x^3 - \frac{x^4}{12L} \right] q + A\frac{x^2}{2} + Bx + C$$

$$w = \left[\frac{3}{48}x^4 - \frac{x^5}{60L} \right] q + A\frac{x^3}{6} + B\frac{x^2}{2} + Cx + D$$

SOM RANDVILLKOR GÄLLER

$$w''(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$w''(L) = 0 \Rightarrow \left[\frac{3}{4}L^2 - \frac{L^2}{3} \right] q + AL = 0 \quad A = -\frac{5}{12}qL$$

$$w(0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$w(L) = 0 \Rightarrow \left[\frac{L^4}{16} - \frac{L^4}{60} \right] q - \frac{5}{72}L^4 + CL = 0 \quad C = \frac{17}{720}qL^3$$

$$w'' = \left[\frac{3}{4}x^2 - \frac{x^3}{3L} - \frac{5}{12}Lx \right] q$$

$$M = -EIw'' \Rightarrow w'' = -\frac{q}{EI} \left[\frac{x^3}{3L} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{12}Lx \right]$$

VID DELVIS SAMVERKAN GÄLLER

$$W^{(IV)} - \lambda^2 W'' = \frac{1}{EI_0} [q_0 + MD^2]$$

$$\text{DÄR } \lambda = \frac{D}{B}$$

$$q_0 = \left[\frac{3}{2} - \frac{2x}{L} \right] q$$

$$M = \left[\frac{x^3}{3L} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{12}Lx \right] q$$

DETTA GER

$$W^{(IV)} - \lambda^2 W'' = \frac{q}{EI_0} \left[\left[\frac{3}{2} - \frac{2x}{L} \right] + D^2 \left[\frac{x^3}{3L} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{12}Lx \right] \right]$$

$$W_h'' = C_1 \cosh \lambda x + C_2 \sinh \lambda x$$

$$W_p'' = (\text{ANSÄTT}) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$$W_p^{(IV)} = 6Ax + 2B$$

INSÄTTNING GER

$$6Ax + 2B - \lambda^2 [Ax^3 + Bx^2 + Cx + D] = \frac{q}{EI_0} \left[\left[\frac{3}{2} - \frac{2x}{L} \right] + D^2 \left[\frac{x^3}{3L} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{12}Lx \right] \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda^2 A \\ \quad -\lambda^2 B \\ 6A \quad -\lambda^2 C \\ \quad 2B \quad -\lambda^2 D \end{array} \right. = \begin{array}{l} \frac{q \cdot D^2}{EI_0 \cdot 3L} \\ -\frac{3q \cdot D^2}{4EI_0} \\ -\frac{2q}{EI_0 L} + \frac{5q \cdot D^2 L}{12EI_0} \\ \frac{3q}{2EI_0} \end{array}$$

$$A = -\frac{qD^2}{3L\lambda^2 EI_0}$$

$$B = \frac{3qD^2}{4\lambda^2 EI_0}$$

$$C = \frac{2q}{L\lambda^2 EI_0} - \frac{5qD^2 L}{12\lambda^2 EI_0} - \frac{2qD^2}{L\lambda^4 EI_0}$$

$$D = -\frac{3q}{2\lambda^2 EI_0} + \frac{3qD^2}{2\lambda^4 EI_0}$$

$$w_p'' = \frac{q}{EI_0} \left[-\frac{D^2}{3\lambda^2} x^3 + \frac{3D^2}{4\lambda^2} x^2 \left[\frac{2}{L\lambda^2} - \frac{5LD^2}{12\lambda^2} - \frac{2D^2}{L\lambda^4} \right] x - \frac{3}{2\lambda^2} + \frac{3D^2}{2\lambda^4} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{D}{B} \\ B^2 &= \frac{I_0}{I} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$w_p'' = \frac{q}{EI} \left[-\frac{x^3}{3L} + \frac{3}{4} x^2 - \frac{5}{12} Lx + \frac{2}{LD^2} x - \frac{2B^2}{LD^2} x - \frac{3}{2D^2} + \frac{3B^2}{2D^2} \right]$$

$$w'' = C_1 \cosh \lambda x + C_2 \sinh \lambda x + \frac{q}{EI} \left[\frac{3B^2-3}{2D^2} - \frac{x^3}{3L} + \frac{3}{4} x^2 - \frac{5}{12} Lx + \frac{2}{LD^2} x - \frac{2B^2}{LD^2} x \right]$$

SOM RANDVILLKOR GÄLLER

$$w''(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{q}{EI} \left[\frac{3B^2-3}{2D^2} \right]$$

$$w''(L) = 0 \Rightarrow -\frac{q}{EI} \left[\frac{3B^2-3}{2D^2} \right] \cosh \lambda L + C_2 \sinh \lambda L + \frac{q}{EI} \left[\frac{3B^2-3}{2D^2} + \frac{2}{D^2} \frac{2B^2}{D^2} \right]$$

$$C_2 = \frac{q}{EI} \left[\frac{3B^2-3}{2D^2} \right] \left[\frac{\cosh \lambda L - 1}{\sinh \lambda L} \right] + \frac{q}{EI} \left[\frac{2B^2-2}{D^2} \right] \cdot \frac{1}{\sinh \lambda L}$$

$$w'' = \frac{q}{EI} \left[\frac{3B^2-3}{2D^2} \right] \left[1 - \cosh \lambda x + \frac{\cosh \lambda L - 1}{\sinh \lambda L} \sinh \lambda x \right] +$$

$$+ \frac{q}{EI} \left[\frac{2B^2-2}{D^2} \right] \frac{\sinh \lambda x}{\sinh \lambda L} - \frac{q}{EI} \left[\frac{x^3}{3L} - \frac{3}{4} x^2 + \frac{5}{12} Lx \right] - \frac{q}{EI} \left[\frac{2B^2-2}{LD^2} \right] x$$

$$w'' = \frac{q}{EI} \left[\frac{3B^2-3}{2D^2} \right] \left[1 - \cosh \lambda x + \left[\frac{\cosh \lambda L - 1 - \frac{4}{3}}{\sinh \lambda L} \right] \sinh \lambda x - \frac{4}{3L} x \right]$$

$$- \underbrace{\frac{q}{EI} \left[\frac{x^3}{3L} - \frac{3}{4} x^2 + \frac{5}{12} Lx \right]}_{-w_0''}$$

$$w''' = \frac{qD}{EIB} \left[\frac{3B^2-3}{2D^2} \right] \left[-\sinh \lambda x + \left[\frac{\cosh \lambda L + \frac{1}{3}}{\sinh \lambda L} \right] \cosh \lambda x - \frac{4}{3L} \right]$$

$$- \frac{q}{EI} \left[\frac{x^2}{L} + \frac{3}{2} x + \frac{5}{12} L \right]$$

$$w = \frac{q}{\lambda^2 EI} \left[\frac{3B^2 - 3}{2D^2} \right] \left[\frac{x^2}{2} \lambda^2 - \cosh \lambda x + \left[\frac{\cosh \lambda L + \frac{1}{3}}{\sinh \lambda L} \right] \sinh \lambda x - \frac{2}{9L} x^3 \lambda^2 \right] - \frac{q}{EI} \left[\frac{x^5}{60L} - \frac{x^4}{16} + \frac{5}{72} L x^3 \right] + Ax + B$$

SOM RANDVILLKOR GÄLLER

$$w(0) = 0 \Rightarrow B = \frac{q}{\lambda^2 EI} \left[\frac{3B^2 - 3}{2D^2} \right]$$

$$w(L) = 0 \Rightarrow A = -\frac{q}{\lambda^2 EI} \left[\frac{3B^2 - 3}{2D^2} \right] \left[\frac{5}{18} L \lambda^2 + \frac{4}{3L} \right] + \frac{17}{720} \frac{q}{EI} L^3$$

$$w = \frac{qB^2}{EID^2} \left[\frac{3B^2 - 3}{2D^2} \right] \left[-\frac{2}{9L} x \frac{D^2}{B^2} + \frac{x^2}{2} \frac{D^2}{B^2} - \left[\frac{5}{18} L \frac{D^2}{B^2} + \frac{4}{3L} \right] x + 1 - \cosh \lambda x + \left[\frac{\cosh \lambda L + \frac{1}{3}}{\sinh \lambda L} \right] \sinh \lambda x \right] - \frac{q}{EI} \left[\frac{x^5}{60L} - \frac{x^4}{16} + \frac{5L}{72} x^3 - \frac{17}{720} L^3 x \right]$$

$$w = w_0 + \frac{qB^2}{EID^2} \left[\frac{3B^2 - 3}{2D^2} \right] \left[\left[-\frac{2}{9L} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{5}{18} L x \right] \frac{D^2}{B^2} - \frac{4}{3L} x + 1 - \cosh \lambda x + \left[\frac{\cosh \lambda L + \frac{1}{3}}{\sinh \lambda L} \right] \sinh \lambda x \right]$$

$$\text{DÄR } w_0 = -\frac{q}{EI} \left[\frac{x^5}{60L} - \frac{x^4}{16} + \frac{5L}{72} x^3 - \frac{17}{720} L^3 x \right]$$

$$w'' = w_0'' + \frac{q}{EI} \left[\frac{3B^2 - 3}{2D^2} \right] \left[1 - \cosh \lambda x + \left[\frac{\cosh \lambda L + \frac{1}{3}}{\sinh \lambda L} \right] \sinh \lambda x - \frac{4x}{3L} \right]$$

$$\text{DÄR } w_0'' = -\frac{q}{EI} \left[\frac{x^3}{3L} - \frac{3x^2}{4} + \frac{5}{12} L x \right]$$

$$w''' = w_0''' + \frac{qD}{EIB} \left[\frac{3B^2 - 3}{2D^2} \right] \left[-\sinh \lambda x + \left[\frac{\cosh \lambda L + \frac{1}{3}}{\sinh \lambda L} \right] \cosh \lambda x - \frac{4B}{3LD} \right]$$

$$\text{DÄR } w_0''' = -\frac{q}{EI} \left[\frac{x^2}{L} - \frac{3x}{2} + \frac{5L}{12} \right]$$

HÄRLEDNING FÖR EKVIVALENT VINDLAST

$$W^{(IV)} - \lambda^2 W'' = \frac{1}{EI_0} [q_0 + MD^2]$$

$$\text{DÄR } q_0 = \left[-\frac{1}{2} - \frac{21f^2}{4L^2} + 6 \frac{f^2}{L^3} x \right] q$$

$$M = \left[-\left[\frac{L}{4} + \frac{13f^2}{8L} \right] x + \left[\frac{1}{4} + \frac{21f^2}{8L^2} \right] x^2 - \frac{f^2}{L^3} x^3 \right] q$$

$$W_h'' = C_1 \cosh \lambda x + C_2 \sinh \lambda x$$

$$W_p'' = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$$W_p^{(IV)} = 6Ax + 2B$$

INSÄTTNING GER

$$6Ax + 2B - \lambda^2 [Ax^3 + Bx^2 + Cx + D] = \frac{q}{EI_0} \left[-\frac{1}{2} - \frac{21f^2}{4L^2} + \frac{6f^2}{L^3} x \right] +$$

$$D^2 \left[\left[\frac{L}{4} + \frac{13f^2}{8L} \right] x - \left[\frac{1}{4} + \frac{21f^2}{8L^2} \right] x^2 + \frac{f^2}{L^3} x^3 \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda^2 A \\ -\lambda^2 B \\ 6A - \lambda^2 C \\ 2B - \lambda^2 D \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{q f^2 D^2}{L^3 EI_0} \\ \frac{q D^2}{EI_0} \left[\frac{1}{4} + \frac{21f^2}{8L^2} \right] \\ \frac{6q f^2}{L^3 EI_0} - \frac{D^2 q}{EI_0} \left[\frac{L}{4} + \frac{13f^2}{8L} \right] \\ -\frac{q}{EI_0} \left[\frac{1}{2} + \frac{21f^2}{4L^2} \right] \end{array} \right.$$

$$A = \frac{q f^2 D^2}{\lambda^2 L^3 EI_0}$$

$$B = -\frac{q D^2}{\lambda^2 EI_0} \left[\frac{1}{4} + \frac{21f^2}{8L^2} \right]$$

$$C = -\frac{6q f^2}{\lambda^2 L^3 EI_0} + \frac{D^2 q}{\lambda^2 EI_0} \left[\frac{L}{4} + \frac{13f^2}{8L} \right] + \frac{6q f^2 D^2}{\lambda^4 L^3 EI_0}$$

$$D = \frac{q}{\lambda^2 EI_0} \left[\frac{1}{2} + \frac{21f^2}{4L^2} \right] - \frac{2q D^2}{\lambda^4 EI_0} \left[\frac{1}{4} + \frac{21f^2}{8L^2} \right]$$

$$W''_P = \frac{q}{EI_0} \left[\frac{D^2 f^2}{\lambda^2 L^3} x^3 - \frac{D^2}{\lambda^2} \left[\frac{1}{4} + \frac{21 f^2}{8 L^2} \right] x^2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{6 f^2}{\lambda^2 L^3} \left[\frac{D^2}{\lambda^2} - 1 \right] + \frac{D^2}{\lambda^2} \left[\frac{L}{4} + \frac{13 f^2}{8 L} \right] \right] x \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{21 f^2}{4 L^2} \right] \left[\frac{D^2}{\lambda^2} - 1 \right] \right]$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{D^2}{B^2} \\ B^2 &= \frac{I_0}{I} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$W''_P = \frac{q}{EI} \left[\frac{f^2}{L^3} x^3 - \left[\frac{1}{4} + \frac{21 f^2}{8 L^2} \right] x^2 + \frac{6 f^2}{D^2 L^3} [B^2 - 1] x + \right. \\ \left. + \left[\frac{L}{4} + \frac{13 f^2}{8 L} \right] x - \frac{1}{D^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{21 f^2}{4 L^2} \right] [B^2 - 1] \right]$$

SOM RANDVILLKOR GÄLLER

$$W''(0) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{q}{D^2 EI} \left[\frac{1}{2} + \frac{21 f^2}{4 L^2} \right] [B^2 - 1]$$

$$W''(L) = 0 \Rightarrow C_2 = - \frac{q}{EI D^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{21 f^2}{4 L^2} \right] [B^2 - 1] \left[\frac{\cosh \lambda L - 1}{\sinh \lambda L} \right] \\ - \frac{q}{EI} \cdot \frac{6 f^2}{D^2 L^2} [B^2 - 1] \cdot \frac{1}{\sinh \lambda L}$$

$$W'' = \frac{q}{EI} \left[\frac{1}{2} + \frac{21 f^2}{4 L^2} \right] \left[\frac{1 - B^2}{D^2} \right] \left[1 - \cosh \lambda x + \frac{\cosh \lambda L - 1}{\sinh \lambda L} \cdot \sinh \lambda x \right. \\ \left. + \frac{6 f^2}{L^2} \cdot \frac{1}{\left[\frac{1}{2} + \frac{21 f^2}{4 L^2} \right]} \cdot \frac{\sinh \lambda x}{\sinh \lambda L} - \frac{6 f^2}{L^3} x \cdot \frac{1}{\left[\frac{1}{2} + \frac{21 f^2}{4 L^2} \right]} \right] - W''_0$$

$$W'' = \frac{q}{EI} \left[\frac{1}{2} + \frac{21 f^2}{4 L^2} \right] \left[\frac{1 - B^2}{D^2} \right] \left[1 - \cosh \lambda x + \frac{\cosh \lambda L - 1 + G}{\sinh \lambda L} \cdot \sinh \lambda x \right. \\ \left. - \frac{6 f^2}{L^3} \cdot \frac{x}{\left[\frac{1}{2} + \frac{21 f^2}{4 L^2} \right]} \right] - W''_0$$

$$\text{DÄR } G = \frac{6 f^2}{L^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{21 f^2}{4 L^2} \right]}$$

$$W''' = \frac{q}{EI} \cdot \frac{D}{B} \left[\frac{1}{2} + \frac{21f^2}{4L^2} \right] \left[\frac{1-B^2}{D^2} \right] \left[-\sinh \lambda x + \frac{\cosh \lambda L - 1 + G}{\sinh \lambda L} \cosh \lambda x - \frac{6f^2 B}{L^3 D} \cdot \frac{1}{\left[\frac{1}{2} + \frac{21f^2}{4L^2} \right]} \right] - W_0''$$

$$W = \frac{q}{EI} \cdot \frac{B^2}{D^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{21f^2}{4L^2} \right] \left[\frac{1-B^2}{D^2} \right] \left[\frac{1}{2} \frac{D^2}{B^2} x^2 - \cosh \lambda x + \frac{\cosh \lambda L - 1 + G}{\sinh \lambda L} \cdot \sinh \lambda x - \frac{f^2 D^2}{L^3 B^2} \cdot \frac{x^3}{\left[\frac{1}{2} + \frac{21f^2}{4L^2} \right]} \right] - W_0 + Ax + B$$

SOM RANDVILLKOR GÄLLER

$$W(0) = 0 \Rightarrow B = \frac{q B^2}{EI D^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{21f^2}{4L^2} \right] \left[\frac{1+B^2}{D^2} \right]$$

$$W(L) = 0 \Rightarrow A = - \frac{q B^2}{EI D^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{21f^2}{4L^2} \right] \left[\frac{1-B^2}{D^2} \right] \left[\frac{D^2 L}{2 B^2} + \frac{G}{L} \left[1 - \frac{L^2 D^2}{6 B^2} \right] \right]$$

$$W = W_0 + \frac{q B^2}{EI D^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{21f^2}{4L^2} \right] \left[\frac{1-B^2}{D^2} \right] \left[\left[\frac{x^2}{2} - \frac{Lx}{2} \right] \frac{D^2}{B^2} - \cosh \lambda x + \frac{\cosh \lambda L - 1 + G}{\sinh \lambda L} \cdot \sinh \lambda x + 1 - G \frac{x}{L} \left[1 - \frac{L^2 D^2}{6 B^2} \right] - \frac{f^2 D^2}{L^3 L^2} \cdot \frac{x^2}{\left[\frac{1}{2} + \frac{21f^2}{4L^2} \right]} \right]$$

$$\text{DÄR } G = \frac{6f^2}{L^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{21f^2}{4L^2} \right]}$$

$$W_0 = \frac{q}{EI} \left[-\frac{x^4}{48} - \frac{7f^2}{32L^2} x^4 + \frac{f^2}{20L^3} x^5 + \left[\frac{L}{24} + \frac{13f^2}{48L} \right] x^3 + \left[-\frac{L^3}{48} - \frac{49}{480} f^2 L \right] x \right]$$