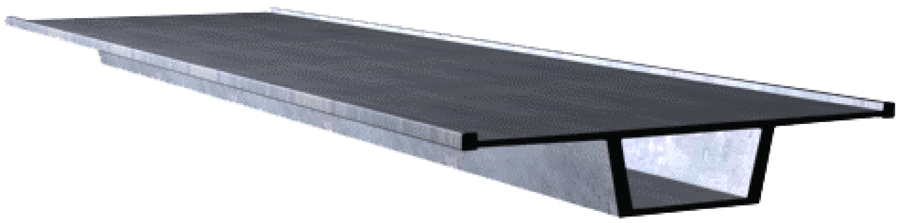
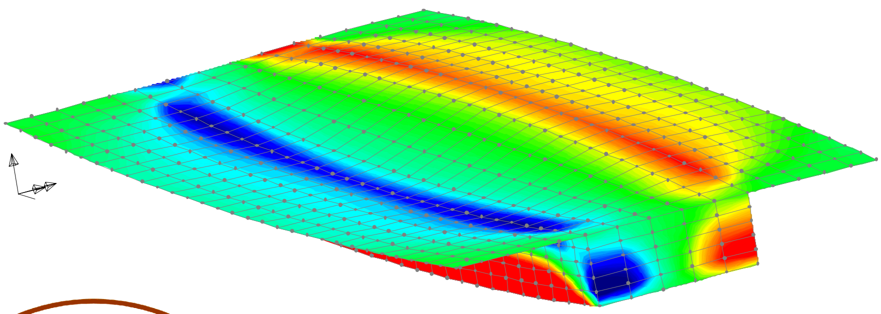
Avdelningen för Konstruktionsteknik
Avdelningen för Byggnadsmekanik
Lunds Tekniska Högskola, Lunds Universitet

Vridnings- och välvningsanalys av betongbrolådor

Jonas Kristensson
Kenth Lindell





Rapport TVBK-5111, TVSM-5114
Lund 2002

Lunds Tekniska Högskola
Avdelningen för Konstruktionsteknik
Avdelningen för Byggnadsmekanik
Box 118
221 00 Lund

Lund University
Division of Structural Engineering
Division of Structural Mechanics
Box 118
S-221 00 Lund
Sweden

Vridnings-och välvningsanalys av betongbrolådor

Torsion, distortion and warping analysis of box-girder bridges

Jonas Kristensson och Kenth Lindell

Rapport TVBK-5111, TVSM-5114
ISSN 0349-4969
ISRN: LUTVDG/TVBK 02/5111 96p+55p

Examensarbete
Handledare: Joakim Jeppson LTH, Erik Serrano LTH, Håkan Camper Skanska Teknik.
januari 2002

Förord

Detta examensarbete på 20 poäng har utförts på avdelningen för konstruktionsteknik och avdelningen för byggnadsmekanik vid Lunds Tekniska Högskola under hösten 2001.

Initiativtagare till arbetet är Joakim Jeppsson och Håkan Camper vid Skanska Teknik AB.

Ett stort tack riktas till våra handledare Joakim Jeppsson på avdelningen för konstruktionsteknik och Erik Serrano på avdelningen för byggnadsmekanik för rådgivning och stöd under arbetets fortskridande. Ytterligare vill vi tacka professor Sven Thelandersson vid avdelningen för konstruktionsteknik LTH och professor Lennart Elfgren vid avdelningen för konstruktionsteknik LTU för hjälp och råd.

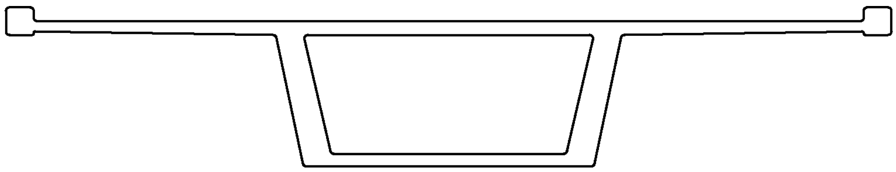
Lund, januari 2002

Jonas Kristensson

Kenth Lindell

Sammanfattning

Examensarbetet har som syfte att utreda betydelsen av påkänningar på grund av välvning och tvärsnittsdeformation orsakade av vridbelastning hos brolådekonstruktioner med farbanekonsoler, se figur nedan. Examensarbetet behandlar ett antal handberäkningsmetoder som jämförs med finita element beräkningar. Med handberäkningsmetoderna kan man bland annat beräkna hörnmoment och axiella spänningar. Vid jämförelser mellan handberäkningsmetoder och finita element modell har enkla lastfall och olika slankhet på tvärsnitten använts. Examensarbetet innehåller även ett avsnitt där laster enligt normen BRO94 applicerats på finita element modellen, detta för att undersöka vilka hörnmoment och axiella spänningar som uppkommer på grund av vridning i ett verkligt fall.



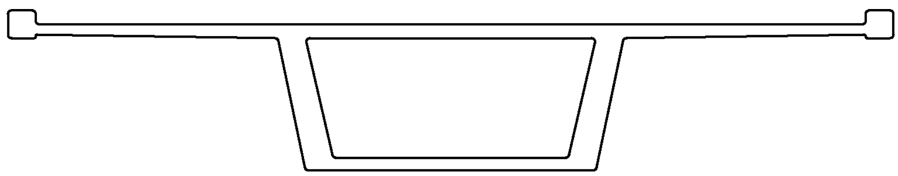
Tre olika handberäkningsmetoder har behandlats. Den första behandlar blandad vridning med delvis öppna och slutna odeformerbara tunnväggiga tvärsnitt, vilket är en modifiering av motsvarande teori för öppna tunnväggiga tvärsnitt. Den andra metoden används för att beräkna effekter av att tvärsnittet deformeras vid vridning. Den tredje metoden är en superponering av de två första.

Två finita element modeller har utförts, en enkel tvådimensionell modell för beräkningar av påkänningar orsakade av tvärsnittsdeformation, och en tredimensionell skalmodell. För skalmodellen har olika täthet av elementindelning använts för att undersöka dess effekt på resultatet.

Resultatet visar att handberäkningsmetoderna och FE-modellen stämmer väl överens för undersökta fall. Beräkning med laster enligt BRO 94 visar att man i vissa fall bör ta hänsyn till axiella spänningar uppkomna på grund av vridning. Resultaten visar också att man i samtliga fall bör ta hänsyn till uppkomna hörnmoment.

Summary

The purpose of this master thesis is to investigate effects of warping and distortion in thin-walled box-girder bridges, see figure below. The master thesis deals with a number of different analytic methods, which are compared to finite element models. Transverse distortional bending moments and direct stresses, caused by torsional and distortional warping, is determined by analytic methods. Simple load-cases and different wall-thickness have been used, when the methods have been compared. The master thesis also contains a chapter, which deals with load-cases according to the Swedish code, BRO 94. The load-cases according to BRO94 give realistic stresses.



Three different analytical methods have been investigated. The first analytical method considers the problem of mixed torsion, St Venant's and Vlasov's torsion, in thin-walled structural members with partly closed, partly open cross-sections. The second method considers the effects of distortion. The third metod deals with effects from both previous methods.

Two finite element models have been established, one simple two-dimensional model and one three-dimensional model based on shell elements. The two-dimensional model deals only with distortional effects. Different element meshes have been used to determine how the mesh density effects the result.

The analytical methods and finite element methods give similar results. The determined stresses, with load-cases according to BRO 94, show that in some cases the direct stresses should be considered. In the investigated cases the transverse bending moments have been significant and should not be neglected in design.

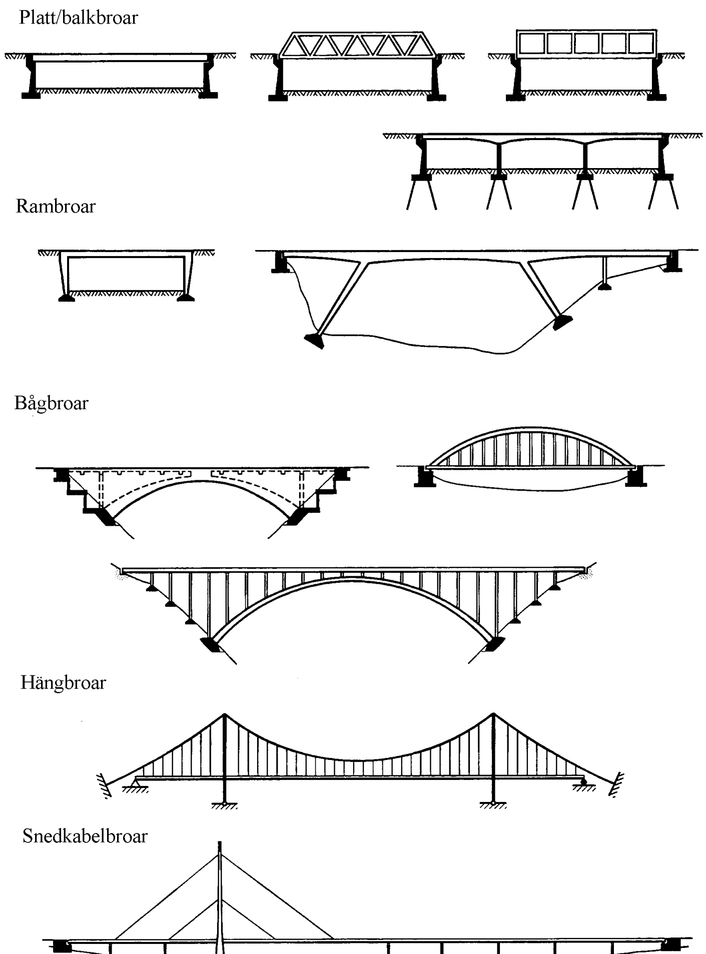
Innehållsförteckning

1 Inledning

En bro definieras som ett bärverk som transporterar någon form av trafik förbi eller över ett hinder. En specifik egenskap för broar är att huvudlasten består av en stor rörlig trafiklast. Detta medför att antalet lastfall/lastplaceringar blir betydligt fler än vid vanlig balkdimensionering i byggnader. Andra komplikationer är effekter som dynamiska laster och temperaturlaster.

Indelning av brotyper kan ske på olika sätt såsom användningsområde, storlek, statiskt system, byggmetoder med mera. Vanligen indelar man brotyperna efter deras statiska system av vilka några följer nedan:

- Platt- och balkbroar
- Rambroar
- Bågbroar
- Hängbroar
- Snedkabelbroar



Figur 1.1. *Olika typer av statiskt system för broar [Håkan Sundquist, "Infrastrukturkonstruktioner", Kungl. Tekniska högskolan, Rapport 13, Brobyggnad 1995, Utgåva 4].*

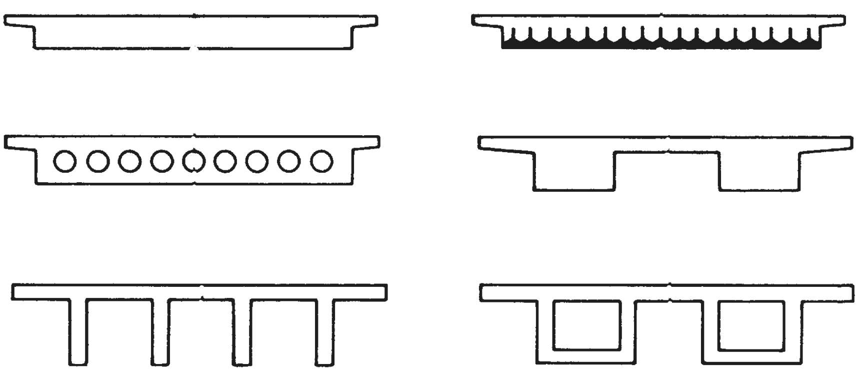
Till de vanligaste brotyperna hör platt- och balkbroar då de täcker de mest använda spännviddsområdena, 5-200 m, samt är ekonomiskt rimliga.

Det vanligaste byggnadsmaterialet för broar är betong som är ett relativt billigt material och det finns nästan inga begränsningar vad det gäller formgivning. Betong har hög tryckhållfasthet men ringa draghållfasthet, ca 1/10 av tryckhållfastheten. Det ställs därmed höga krav på armering i platt- och balkbroar. Vanligen spännarmeras betongbroar med spännvidder över 25 m.

Vid valet av statiskt system enligt ovan, beaktas ekonomiska aspekter, spännvidd, estetik med mera. Det statiska systemet måste väljas i ett tidigt projekteringsskede, varvid det krävs enkla överslagsberäkningar.

1.1 Platt- och balkbroar

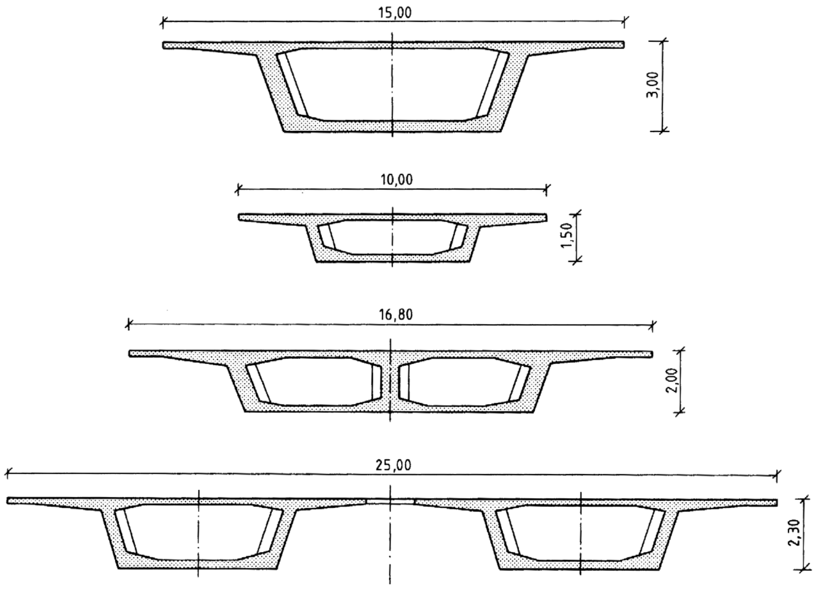
Med en balkbro menas en bro som får sin bärighet genom balkverkan. Den kan bestå av en eller flera balkar, en platta eller en låda. Vid val av tvärsnitt föreligger ofta restriktioner på tvärsnittets höjd samt krav på att tvärsnittets utformning inte bör vara för komplicerad. Egentyngden är en stor del av belastningen, varför man vill hålla vikten nere, lägre vikt innebär också mindre materialåtgång. Ett sätt att hålla vikten nere är att skapa ett tvärsnitt med så stort tröghetsmoment som möjligt vid given tvärsnittsarea.



Figur 1.2. *Olika typer av balkbrotvärsnitt.*

1.2 Betongbrolådor

Lådtvärsnitten är väl anpassade för stora spännvidder och komplicerade belastningar. Materialet utnyttjas maximalt då det är placerat långt från tyngdpunkten. Eftersom tvärsnittets utformning medger både stora positiva och negativa moment passar lådbroar utmärkt som flerstödsbroar. Ett utmärkande drag hos lådtvärsnitt är deras stora vridstyvhet. ***Figur 1.3*** nedan visar olika typer av lådtvärsnitt.



Figur 1.3. *Olika typer av lådtvärsnitt.*

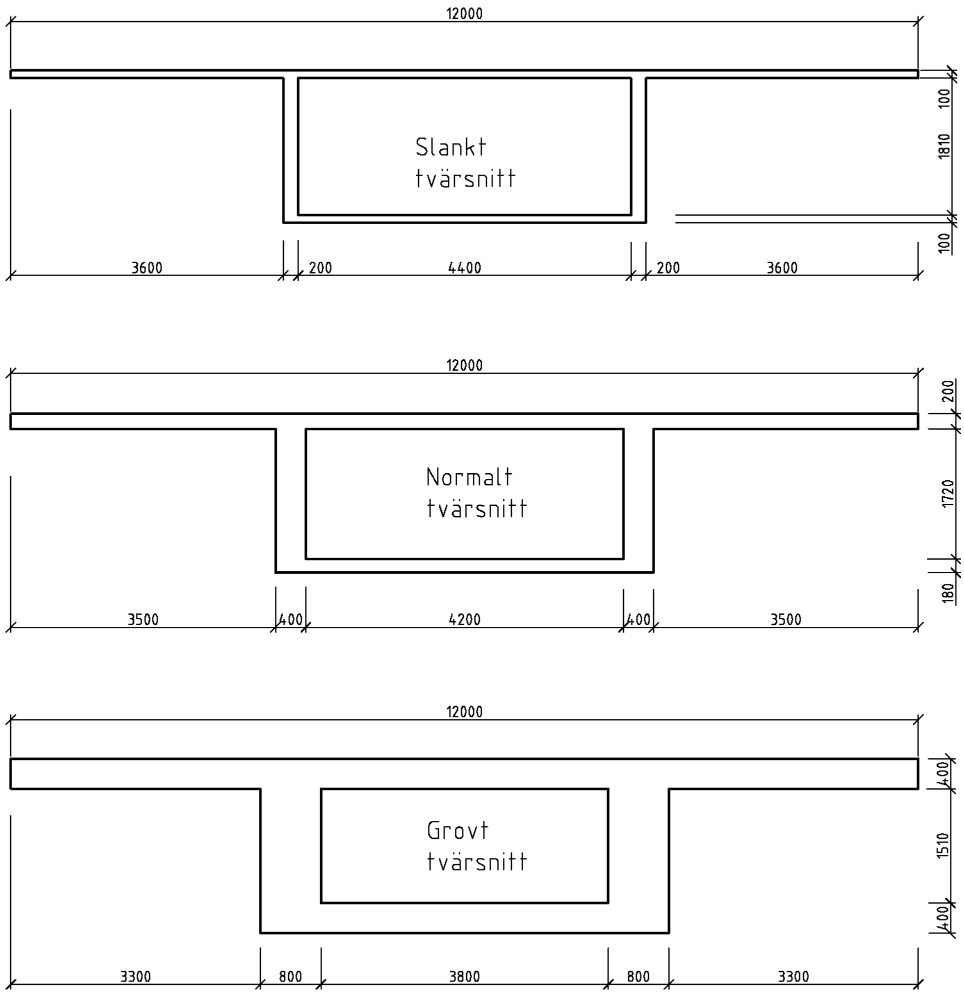
Eftersom materialet är placerat långt från tyngdpunkten blir konstruktionerna ofta mycket slanka. Detta medför att man bör ta hänsyn till effekter som välvning och tvärsnittsdeformation då bron utsätts för vridande moment. Förhindrad välvning ger ett tillskott till normalspänningar i tvärsnittet, och är speciellt uttalad för tunnväggiga öppna tvärsnitt. Slutna tvärsnitt välver mindre och i de flesta fall negligeras effekten av välvning för dessa typer av tvärsnitt. Då en betongbalk spännarmeras kan små tillskott till normalspänningar dock vara av stor betydelse eftersom det inte tillåts att betongen spricker vid armeringens nivå. Tvärsnittets deformation på grund av vridning medför att det uppkommer betydande tillskott till hörnmomenten och dessa måste därvid beaktas vid dimensionering av tvärsnittet i transversell led.

Trafiklaster utgör en stor del av belastningen vid dimensionering. Eftersom trafiklasterna är fria laster ska de placeras så att maximala spänningar uppkommer för de olika delarna av bron som ska dimensioneras. Trafiklasterna kan medföra att det uppkommer stora vridande moment, till exempel genom att endast en fil belastas. Dessutom kan bron vara konstruerad med horisontalkurva, vilket ökar vridmomentet.

Det finns ett flertal olika handberäkningsmetoder för att ta hänsyn till de nämnda effekterna på grund av vridning. I denna rapport jämförs olika handberäkningsmetoder och finita element modeller. Dessutom kontrolleras axiella spänningar och hörnmoment vid ett lastfall enligt BRO94.

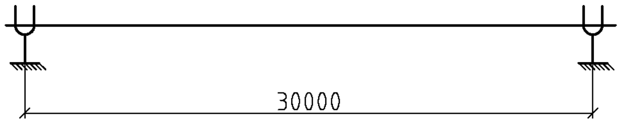
2 Förutsättningar

Tre olika tvärsnitt har valts, alla tvärsnitten är betongbrolådor med farbanekonsoler, se ***Figur 2.1***. Tvärsnitten har olika slankhet, detta för att undersöka slankhetens inverkan på de olika metoderna och axiella spänningarnas storlek. Det slankaste tvärsnittet är så pass slankt att det ej går att utföra i betong och är därför endast av teoretiskt intresse. Centrumavståndet mellan väggar och farbana/underplatta är samma för de olika tvärsnitten. Det normala tvärsnittet har baserats på en verklig bro [Bro N842 över Suseån] som Skanska Teknik AB konstruerat. Det har dock förenklats till att ha vertikala livväggar. Votning och kantbalkar har också ignorerats. Det bör observeras att det normala tvärsnittet ej har samma tjocklek på farbana och underplatta, vilket är fallet för de andra tvärsnitten.



Figur 2.1. *Geometri för tvärsnitt, slank, normal och grov, mått i millimeter.*

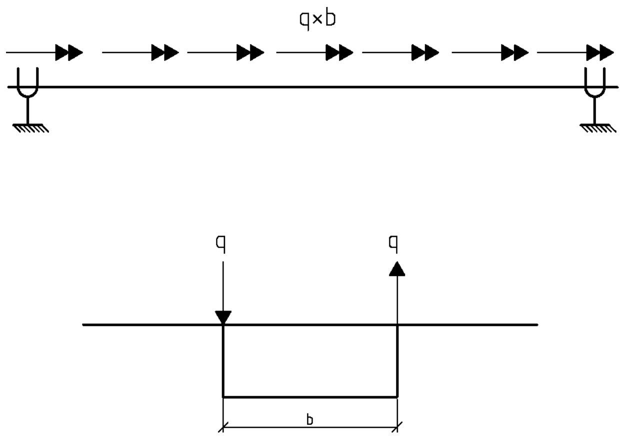
Bron antas vidare vara fritt upplagd och gaffellagrad med en spännvidd på 30m enligt nedan.



Figur 2.2. *Statiskt system.*

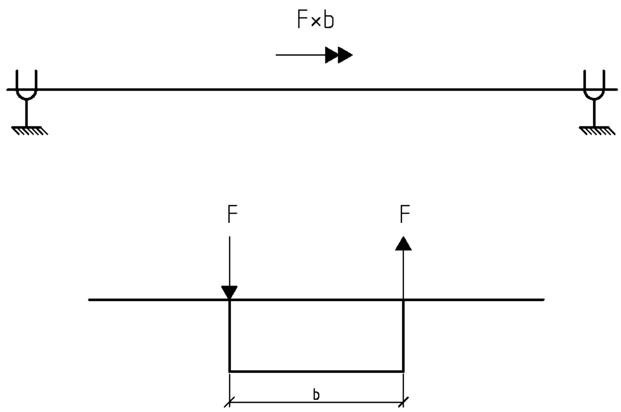
Gaffellagringen medför att tvärsnittet är förhindrat att rotera samtidigt som det välver fritt. Detta motsvaras i verkligheten närmast av ett ändtvärskott (förhindrar dock välvning något) i vardera balkände. Då endast effekter av vridning ska undersökas belastas bron endast av antisymmetriska laster. Två fall undersöks.

Utbredda antisymetriska laster angriper över vertikalväggarna enligt nedan.



Figur 2.3. *Utbredda antisymmetriska laster.*

Antisymmetriska punktlaster angriper över vertikalväggarna i mittsnitt enligt nedan.



Figur 2.4. *Antisymmetriska punktlaster.*

Storleken på de antisymmetriska punktlasterna kan anses motsvara en axellast enligt BRO 94 och sätts till 250kN. Storleken på de utbredda antisymmetriska lasterna har valts så att de ger samma vridmoment vid stöd som fallet med punktlaster, det vill säga ungefär 8kN/m.

Materialet är betong och anses fungera linjärelastiskt så länge det är osprucket. Då betongen spricker reduceras styvheten och beror av armeringsinnehållet. Detta fenomen beräknas till exempel med hjälp av olinjära FE-beräkningar. I denna rapport utförs ej beräkningar som tar hänsyn till att betongen spricker upp.

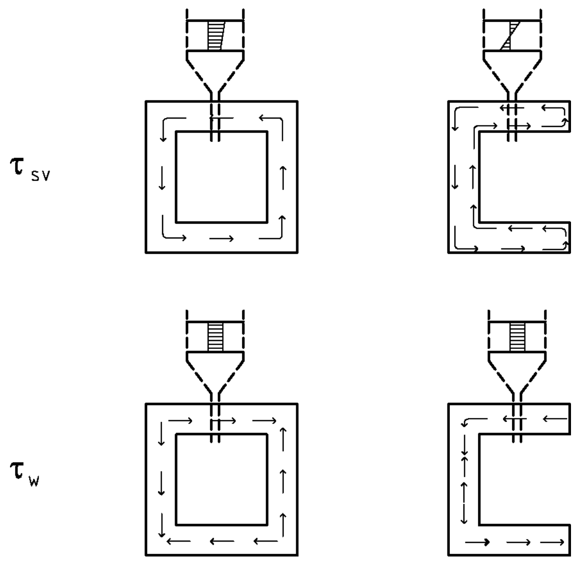
I alla beräkningar förutom avsnitt **9**, som behandlar laster med BRO 94, har karakteristisk E-modul på 30GPa använts. Denna E-modul motsvarar i stora drag kvalitéer från K30 till K45. I avsnitt **9** har karakteristisk E-modul på 33 GPa använts vilket motsvarar betongkvalitet K45.

3 Odeformerbara tvärsnitt med blandad vridning

3.1 Allmänna förutsättningar för blandad vridning

Med blandad vridning menas att vridmoment tas upp dels av Saint Venantsk, dels av Vlasovskt vridmoment. Förutsättningarna för balkteori med blandad vridning är att balkarna är prismatiska (tvärsnittskonstanter oberoende av x, där x-axeln är parallell med balkens längdriktning). Vidare antas materialet vara isotropt linjärelastiskt, vilket medför att spänningar kan superponeras. Tvärsnitten antas rotera stelt kring vridcentrum och rotationen är liten. För balkar med linjärelastiskt isotropt material sammanfaller vridcentrum och skjuvcentrum [Handboken bygg].

Balkteori för blandad vridning är främst tillämpbar för balkar med tunnväggiga öppna tvärsnitt. Detta hänger samman med att teorin förutsätter att skjuvdeformationer i balkväggarnas centrumlinje är försumbara. För alla sorters tvärsnitt uppträder Saint- Venatska skjuvspänningstrajektorier i slutna slingor. Detta innebär att för öppna tunnväggiga tvärsnitt är skjuvspänningen noll i balkväggarnas centrum, vilket ger att skjuvdeformationen är noll där. Därmed behövs endast skjuvdeformationer på grund av Vlasovska skjuvspänningar försummas.



Figur 3.1. *Skjuvspänningstrajektorier på grund av vridning av tvärsnitt enligt Saint Venatskt och enligt Vlasovsk teori.*

För tunnväggiga slutna tvärsnitt blir skjuvdeformationen på grund av Saint Venantska skjuvspänningar inte noll, vilket syns i ***Figur 3.1*** ovan. Detta medför att balkteori för blandad vridning inte är väl tillämpbar på slutna tunnväggiga tvärsnitt. Dock finns en approximativ balkteori för blandad vridning av slutna odeformerbara tunnväggiga tvärsnitt som är snarlik den för öppna, men som tar hänsyn till skjuvtöjning på grund av Saint Venantsk vridning.

3.2 Teori för tunnväggiga öppna tvärsnitt

Det totala vridmomentet tas upp av Saint- Venantskt och Vlasovskt vridmoment.

$$T = T_{sv} + T_w$$ **Ekv. 3.1**

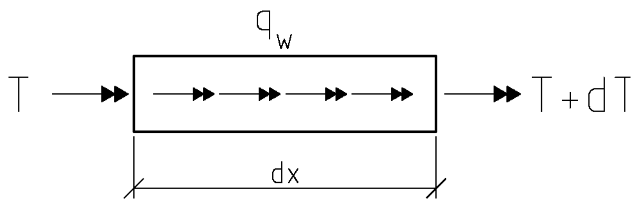
T_{sv} och T_w beror av vridningsvinkelns variation längs balken enligt nedan:

$$T_w(x) = -E \cdot K_w \cdot \frac{d^3\varphi}{dx^3}$$ **Ekv. 3.2**

$$T_{sv}(x) = G \cdot K_v \cdot \frac{d\varphi}{dx}$$ **Ekv. 3.3**

E = elasticitetsmodul
K_w = välvtröghetsmoment
G = skjuvmodul
K_v = vridstyvhetens tvärsnittsfaktor
φ = tvärsnittets vridningsvinkel

En jämviktsbetraktelse enligt ***Figur 3.2*** ger:



Figur 3.2. *Jämvikt för en infinitesimal del av balken.*

$$T + dT - T + q_\omega \cdot dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{dT}{dx} = q_\omega$$ **Ekv. 3.4**

$q_\omega = q \cdot b$ = konstant utbrett vridmoment

Ekvation ***Ekv. 3.1*** och ***Ekv. 3.4*** ger:

$$-\left(\frac{dT_w}{dx} + \frac{dT_{sv}}{dx}\right) = q_\omega$$ **Ekv. 3.5**

Derivering av ***Ekv. 3.2*** och ***Ekv. 3.3*** samt insättning i ***Ekv. 3.5*** ger:

$$E \cdot K_w \cdot \frac{d^4\varphi}{dx^4} - G \cdot K_v \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} = q_\omega$$ **Ekv. 3.6**

3.3 Teori för tunnväggiga slutna tvärsnitt

Teorin i avsnitt **3.2** kan modifieras för att approximativt även gälla för tunnväggiga slutna tvärsnitt [Åkesson, Handbok i analys av balkars vridning].

$$\rho \cdot E \cdot K_w \cdot \frac{d^4\varphi}{dx^4} - G \cdot K_v \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} = q_\omega$$ **Ekv. 3.7**

där ρ är en dimensionslös tvärsnittsfaktor.

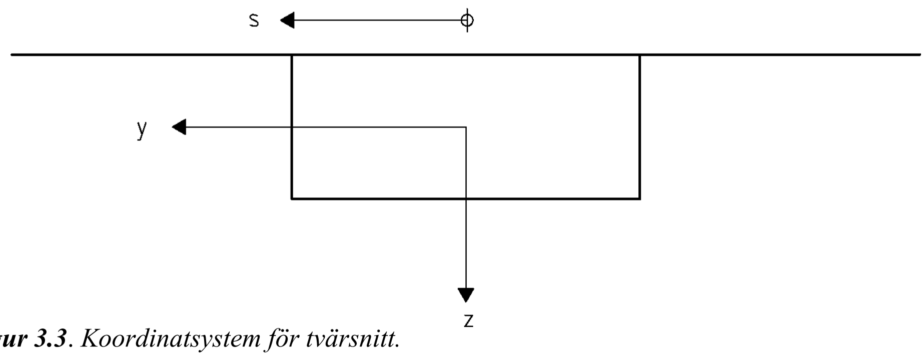
$$\rho = \frac{I_h}{I_h - K_v}$$ **Ekv. 3.8**

I_h = centrala tröghetsmomentet, se definition ***Ekv. 3.13***.

3.4 Tvärsnittskonstanter

Tvärsnittskonstanterna bestäms enligt nedan.

Koordinatsystemet, (yz), i tvärsnittets plan ersätts med axeln s. s-axeln följer balkväggarnas medellinjer, se ***Figur 3.3***. Där beteckning för kurvintegral används sker integration endast längs medellinjer, vilka bildar slutna kurvor. Övriga integraler gäller samtliga medellinjer.



Figur 3.3. *Koordinatsystem för tvärsnitt.*

$$K_v = \frac{4 \cdot A_c^2}{\oint \frac{1}{t(s)} \cdot ds}$$ **Ekv. 3.9**

A_c = arean mellan väggarnas medellinjer.

$$K_w = \int_A \omega(s)^2 \, dA = \int_s \omega(s)^2 \cdot t(s) \cdot ds$$ **Ekv. 3.10**

ω(s) är den normerade sektoriella koordinaten vilken ges av sektoriella koordinaten Ω(s) enligt nedan:

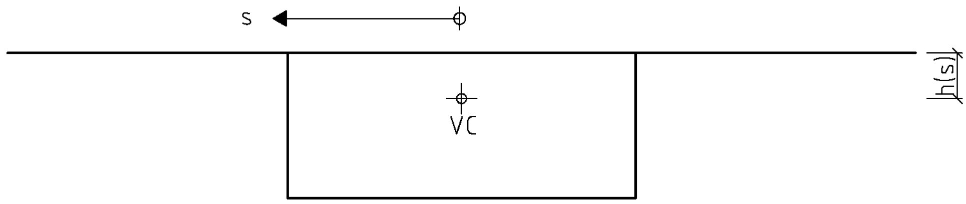
$$\omega(s) = \Omega(s) - \frac{\int_s \Omega(s) \cdot t(s) ds}{\int_s t(s) ds}$$ **Ekv. 3.11**

Den sektoriella koordinaten, för härledning se **appendix B**, för slutet tvärsnitt fås ur följande samband:

$$\Omega(s) = \int_{0-s} h(s) \cdot ds - \frac{2 \cdot A_c}{\oint \frac{1}{t(s)} ds} \cdot \oint_{0-s} \frac{1}{t(s)} ds$$ **Ekv. 3.12**

där h(s) är det vinkelräta avståndet mellan s- axelns tangent i punkten s och vridcentrum, se ***Figur 3.4*** nedan. Uttrycket Ω(s) för slutet tvärsnitt skiljer sig från motsvarande uttryck för öppet tvärsnitt med avseende på den sista termen i uttrycket ovan. Uttrycket Ω(s) är uppbyggt enligt följande:

Den första termen beräknas som om tvärsnittet vore öppet genom att man placerar ett tänkt längsgående snitt till exempel vid farbanans mitt. Med hjälp av den andra termen införs kompatibilitet vid det tänkta snittet, det vill säga välvförskjutningarna skall vara lika stora båda sidor om snittet, vilket reducerar välvförskjutningarna avsevärt. Den andra termen beräknas endast över den slutna delen av tvärsnittet.



Figur 3.4. *Definition av h(s).*

Det centrala tröghetsmomentet ges av:

$$I_h = \oint h^2(s) \cdot t(s) \cdot ds$$ **Ekv. 3.13**

3.5 Välvspänningarnas fördelning i tvärsnittet

Välvspänningarna ska vara i jämvikt över tvärsnittet vilket medför att följande tre jämviktsvillkor ska vara uppfyllda:

$$\int_A \sigma_w dA = 0$$ **Ekv. 3.14**

$$\int_A y \cdot \sigma_w dA = 0$$ **Ekv. 3.15**

$$\int_A z \cdot \sigma_w dA = 0$$ **Ekv. 3.16**

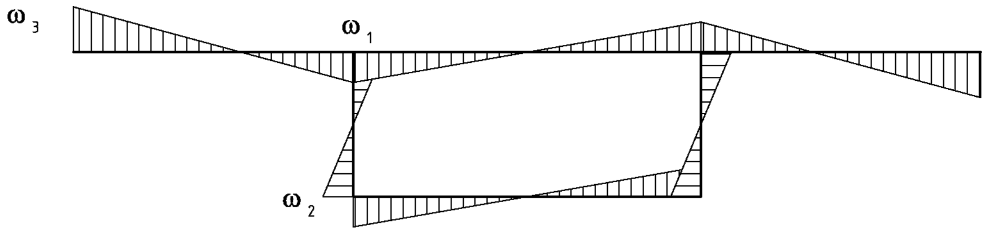
Välvspänningen antas ha samma fördelning i tvärsnittet oberoende av x, men dess storlek beror av x och kan skrivas enligt ***Ekv. 3.17***.

$$\sigma_w(x,y,z) = \sigma_w(x,s) = \frac{B(x)}{K_w} \cdot \omega(s)$$ **Ekv. 3.17**

$$B(x) = -\rho \cdot E \cdot K_w \left(\varphi''(x) + \frac{q_\omega}{G \cdot I_h} \right)$$ **Ekv. 3.18**

B(x) = bimoment

Den normerade sektoriella koordinaten beskriver alltså välvspänningsfördelningen i tvärsnittsplanet enligt ***Figur 3.5***.



Figur 3.5. *Normerad sektoriell koordinat ω(s) (välvspänningsfördelning).*

För aktuella tvärsnitt finns färdiga uttryck för beräkning av normerad sektoriell koordinat enligt följande [Handbok i analys av balkars vridning, Bengt Å Åkesson]:

$$\omega_1 = \frac{e \cdot b}{2} - \frac{K_v \cdot b}{4 \cdot A_c \cdot \delta_o}$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{b \cdot h}{2} - \frac{K_v \cdot h}{2 \cdot A_c \cdot \delta_v}$$

$$\omega_3 = \omega_1 + \frac{e \cdot d}{2}$$

e = vertikala avståndet mellan centrum farbana och vridcentrum (skjuvcentrum)
b = cc- avstånd vertikalväggar
δ_o = farbanans tjocklek
δ_v = vertikalväggens tjocklek
h = cc- avstånd mellan överplatta och underplatta
d = b_k -b = farbanekonsolernas sammanlagda bredd

3.6 Vridcentrums läge

Vridcentrums läge i y-led sammanfaller med tvärsnittets vertikala centrumlinje på grund av symmetri. Vridcentrums läge i z-led kan antingen beräknas med hjälp av villkoret att välvspänningarna skall vara i jämvikt över hela tvärsnittet eller genom att beräkna skjuvcentrums läge, vilket ej är helt enkelt för slutna enkelsymmetriska tvärsnitt, och utnyttja att skjuvcentrums och vridcentrums placering sammanfaller för isotropt linjärelastiskt material. I denna rapport beräknas vridcentrums läge enligt den först nämnda metoden. Jämviktsvillkoren som gäller för välvspänningarna gäller även för den normerade sektoriella koordinaten ty denna beskriver välvspänningarnas fördelning över tvärsnittet. Den normerade sektoriella koordinaten uttrycks som funktion av e, se avsnitt 3.5. Villkoret som ger vridcentrums vertikala läge, e, ges nedan.

$$\int_A y \cdot \omega(s,e)dA = \int_s y \cdot \omega(s,e) \cdot t(s)ds = 0$$

Beräkningarna finns detaljerat redovisade i **bilaga I** och resultaten finns i ***Tabell 3.1***.

3.7 Allmän lösning av diffrentialekvation

Den allmänna lösningen av differentialekvationen

$$\rho \cdot E \cdot K_w \cdot \frac{d^4\varphi}{dx^4} - G \cdot K_v \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} = q_\omega$$

ges av:

$$\varphi(x) = \varphi_h(x) + \varphi_p(x) = C_1 \cdot \cosh(c \cdot x) + C_2 \cdot \sinh(c \cdot x) + C_3 \cdot x + C_4 - \frac{q_\omega \cdot x^2}{2 \cdot G \cdot K_v}$$

$$c = \sqrt{\frac{G \cdot K_v}{\rho \cdot E \cdot K_w}}$$

$C_{1\text{-}4}$= konstanter vilka bestäms med hjälp av randvillkor

3.8 Randvillkor

För att bestämma konstanterna i den allmänna lösningen krävs fyra randvillkor, två i varje ände av balken. Gaffellagring innebär att tvärsnittet är förhindrat att rotera samtidigt som det välver fritt. Fri välvning innebär att bimomentet är noll, vilket innebär att även välvspännningarna är noll. Randvillkor för en gaffellagrad balk belastad med jämt utbrett vridmoment får därmed randvillkor enligt nedan.

$\varphi(0) = 0$ Gaffellagring förhindrar vridning.

$B(0) = 0 \Rightarrow \varphi''(0) = -\frac{q_\omega}{G \cdot I_h}$ Gaffellagring medger fri välvning.

$\varphi(L) = 0$

$B(L) = 0 \Rightarrow \varphi''(L) = -\frac{q_\omega}{G \cdot I_h}$

B(x) = bimoment, se ***Ekv. 3.18***

Randvillkor för en gaffellagrad balk belastad med punktvridmoment T, blir något mer komplicerade. Detta beror på att punktvridmomentet måste föras in som randvillkor, vilket medför att man ansätter en lösning för varje balkhalva. Vid bestämning av konstanterna hos lösningarna kan man utnyttja att vridningsvinkeln har gemensamma värden vid balkmitt, dock bör observeras att till exempel förvridningen ej är kontinuerlig över balkmitt. Om man ansätter en lösning för varje balkhalva får man åtta obekanta konstanter, det vill säga man behöver åtta randvillkor. Nedan ges förslag på randvillkor, där index 1 motsvarar första balkhalvan och index 2 andra balkhalvan.

Upplag vid x=0

$\varphi_1(0) = 0$ Gaffellagring förhindrar vridning.

$B_1(0) = 0 \Rightarrow \varphi_1''(0) = 0$ Fri välvning, observera att $q_\omega = 0$.

$T_{sv} + T_w = G \cdot K_v \cdot \varphi_1'(0) - E \cdot K_w \varphi_1'''(0) = \dfrac{F \cdot b}{2}$ Snittvridmoment vid upplag.

Balkmitt (x=L/2)

$$\varphi_1(L/2) = \varphi_2(L/2)$$
$$B_1(L/2) = B_2(L/2) \Rightarrow \varphi_1''(L/2) = \varphi_2''(L/2)$$

Upplag vid x=L

$$\varphi_2(L) = 0$$
$$B_2(L) = 0 \Rightarrow \varphi_2''(L) = 0$$
$$T_{sv} + T_w = G \cdot K_v \cdot \varphi_2'(L) - E \cdot K_w \varphi_2'''(L) = -\frac{F \cdot b}{2}$$

För att minska beräkningsarbetet något har istället endast ena balkhalvan studerats. Detta är möjligt på grund av att vridningsvinkeln samt förvridningen i mittsnittet är kända från elementarfall [Åkesson, Handbok i analys av balkars vridning].

$\varphi(0) = 0$ Gaffellagring förhindrar vridning.

$B(0) = 0 \Rightarrow \varphi''(0) = 0$ Fri välvning, observera att $q_\omega = 0$.

$$\varphi(L/2) = \frac{T \cdot L}{4 \cdot G \cdot K_v} \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho \cdot v} \cdot \tanh v\right)$$

$v = \dfrac{\pi \cdot \sqrt{-\alpha}}{2}$ där

$$\alpha = -\frac{G \cdot K_v \cdot L^2}{\pi^2 \cdot \rho \cdot E \cdot K_w}$$
$$\varphi'(L/2) = \frac{T}{2 \cdot G \cdot K_v} \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$$

Konstanterna blir relativt omfattande och finns redovisade i **bilaga VI**.

3.9 Resultat

3.9.1 Tvärsnittskonstanter

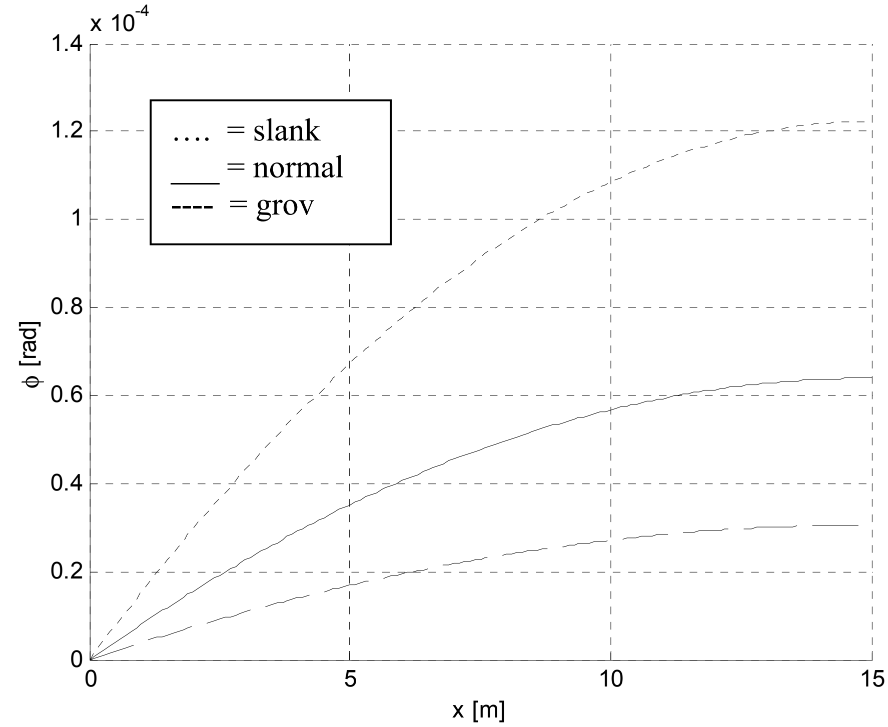
Tabell 3.1 nedan anger numeriska värden av tvärsnittskonstanterna för de olika tvärsnitten. För detaljerade uträkningar, se **bilaga I**.

Tabell 3.1. *Tvärsnittskonstanter.*

Tvärsnittskonstanter	Slank	Normal	Grov
A_c [m^2]	8.786	8.786	8.786
K_v [m^4]	2.779	5.314	11.117
K_w [m^6]	1.848	3.561	7.390
I_h [m^4]	4.887	9.684	19.547
ρ [dimensionslös]	2.319	2.216	2.319
e [m]	0.873	0.825	0.873
ω_1 [m^2]	-1.631	-1.581	-1.631
ω_2 [m^2]	1.252	1.368	1.252
ω_3 [m^2]	1.598	1.471	1.598

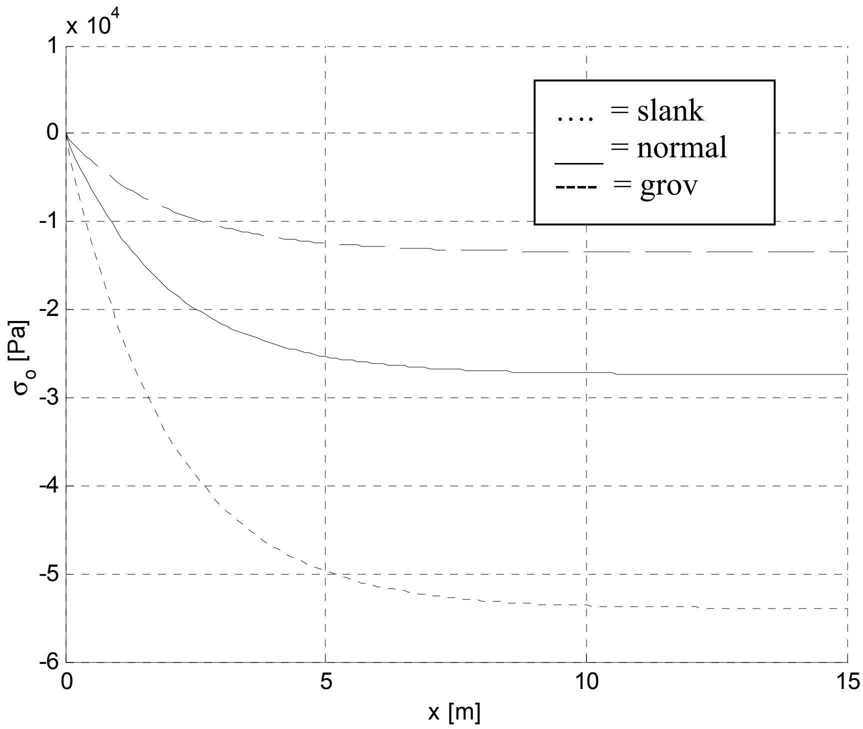
3.9.2 Utbrett vridmoment

Vridningsvinkel mellan x = 0 till x = L/2 på grund av utbrett vridmoment för de olika tvärsnitten ges i ***Figur 3.6*** nedan.



Figur 3.6. *Vridningsvinkel för balk, utbrett vridmoment, odeformerbart tvärsnitt.*

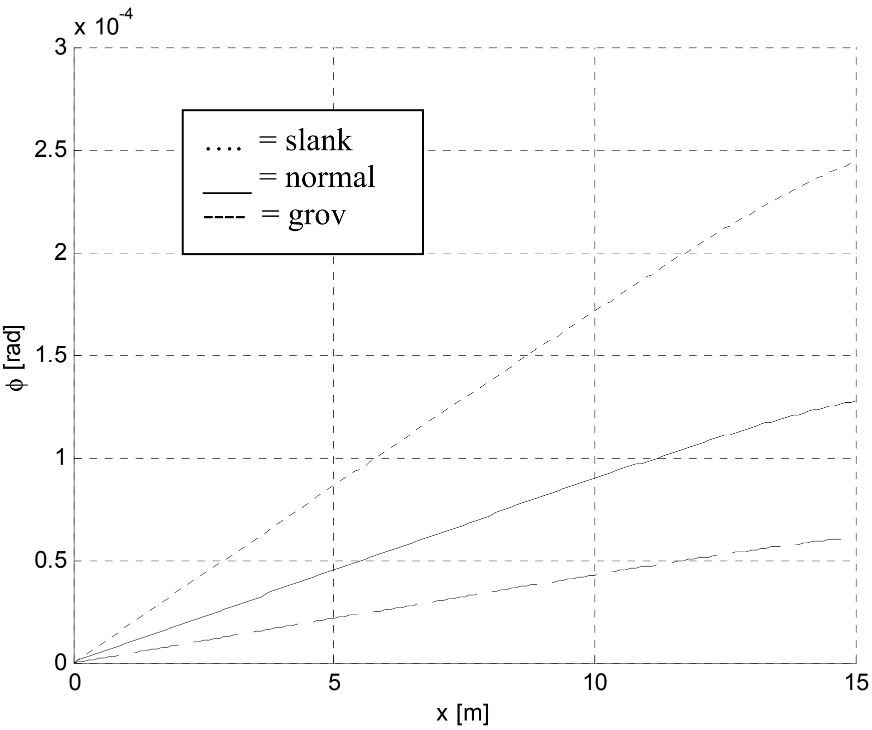
Välvspänningsfördelningen i hörnet där vertikalvägg ansluter till farbanan mellan x = 0 till x = L/2 på grund av utbrett vridmoment för de olika tvärsnitten ges i ***Figur 3.7*** nedan.



Figur 3.7. *Välvspänningsfördelning, utbrett vridmoment, odeformerbart tvärsnitt.*

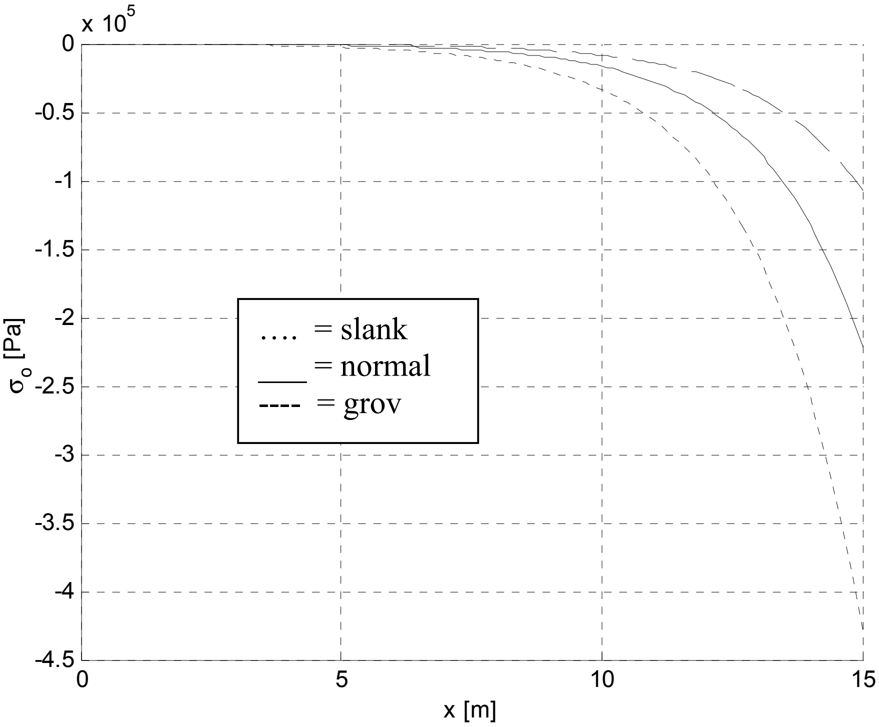
3.9.3 Punktvridmoment

Vridningsvinkel mellan x = 0 till x = L/2 på grund av punktvridmoment för de olika tvärsnitten ges i ***Figur 3.8*** nedan.



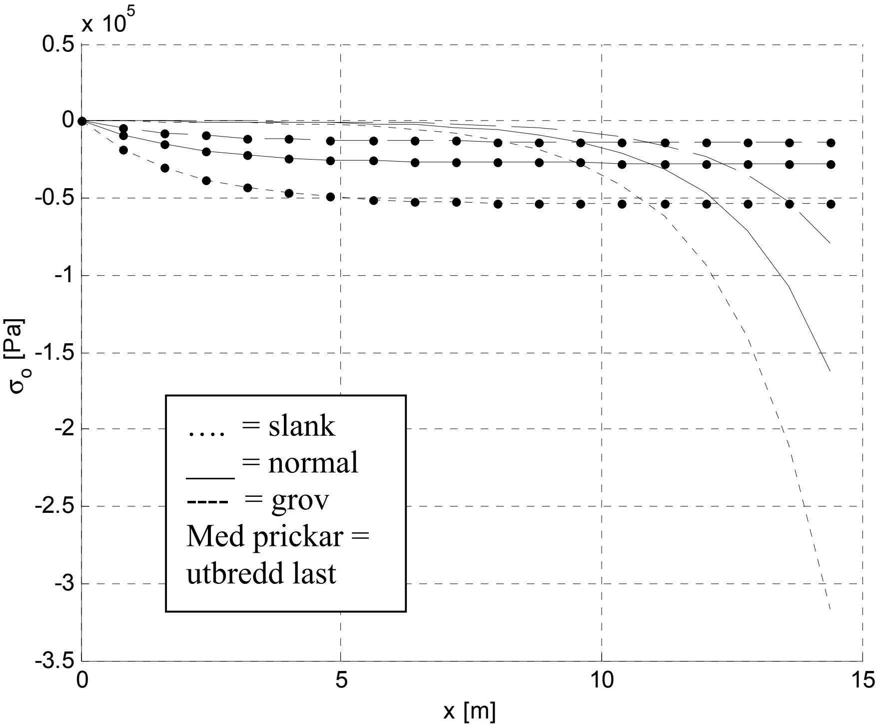
Figur 3.8. *Vridningsvinkel för balk, punktvridmoment, odeformerbart tvärsnitt.*

Välvspänningsfördelningen i hörnet där vertikalvägg ansluter till farbanan mellan x = 0 till x = L/2 på grund av punktvridmoment för de olika tvärsnitten ges i ***Figur 3.9*** nedan.



Figur 3.9. *Välvspänningsfördelning, punktvridmoment, odeformerbart tvärsnitt.*

Välvspänningar för de olika tvärsnitten och lastfallen plottade i samma diagram, se ***Figur 3.10*** nedan.



Figur 3.10. *Välvspänningsfördelning för olika tvärsnitt och lastfall, odeformerbart tvärsnitt.*

Man kan se i plottarna ovan att kurvornas form skiljer väsentligt mellan de olika lastfallen. Välvspänningarna på grund av punktvridmoment avtar relativt snabbt med avståndet från balkmitt. I fallet med utbrett vridmoment är välvspänningarna nästan konstanta i x-led och avtar inte förrän i närheten av upplagen. För lastfallet med punktvridmoment syns tydligt sambandet mellan krökningen hos kurvan över vridningsvinkeln och välvspänningens storlek, se ***Figur 3.8*** och ***Figur 3.9***. Där välvspänningen avtar övergår kurvan över vridningsvinkeln till att bli linjär. Motsvarande samband gäller inte för utbrett vridmoment, se **Ekv. 3.17** och **Ekv. 3.18**.

Att jämföra välvspänningarnas storlek för de olika lastfallen är svårt, ty då måste punktvridmomentet ha ekvivalent storlek med det utbredda vridmomentet. Att bestämma ekvivalensen mellan punktvridmoment och utbrett vridmoment kan göras på många olika sätt. I denna rapport har storleken hos punktvridmomentet och utbrett vridmoment valts så att ungefär samma snittmoment erhålls vid $x = 0$ och $x = L$. Utifrån denna ekvivalens kan man i aktuella fall konstatera att punktvridmoment ger betydligt större välvspänningar än utbrett vridmoment.

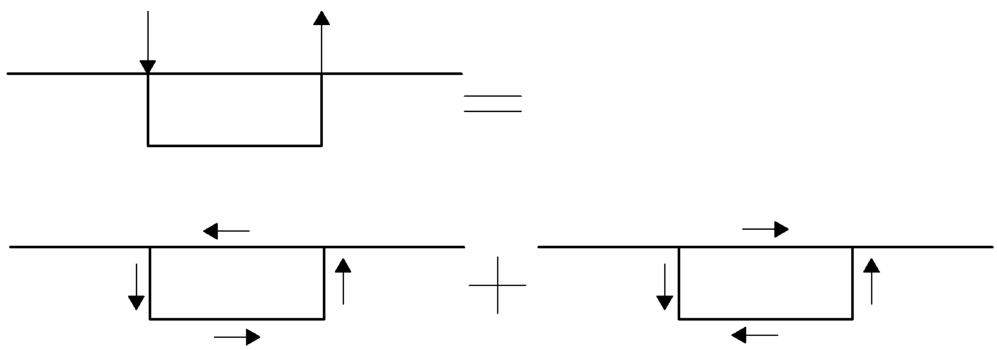
4 Deformerbara tvärsnitt

4.1 Förutsättningar

I detta avsnitt behandlas en beräkningsmetod som tar hänsyn till att tvärsnittet deformeras vid vridning enligt ***Figur 4.2*** nedan. Tvärsnitten förutsätts vara konstanta i längsled och enkelsymmetriska samt att materialet är homogent linjärelastiskt. Hörnen förblir vinkelräta vid deformation. Skjuvtöjningar vid böjning, både i längs och tvärled, försummas. Tvärsnittsdeformationerna antas vara små. Teorin bygger på att axiella spänningar uppstår på grund av tvärsnittets deformation och inte på grund av tvärsnittets rotation. Det bör påpekas att de axiella spänningarna i detta avsnitt och de i avsnittet om odeformerbara tvärsnitt beror av skilda orsaker. Verklighetens spänningar består förmodligen av en kombination av dessa två.

4.2 Allmän teori

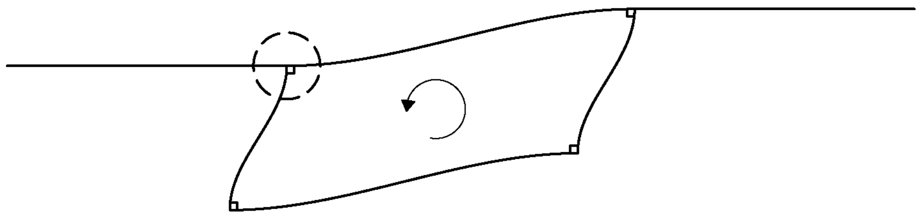
När ett tvärsnitt utsätts för ett vridmoment i form av antisymmetriska laster vill dessa deformera tvärsnittet. Storleken av tvärsnittets deformation beror på lasternas storlek och tvärsnittets transversella styvhet. De antisymmetriska lasterna kan delas upp i två delar, en som tar upp vridmomentet och en som deformerar tvärsnittet enligt figur nedan.



Figur 4.1. *Uppdelning av antisymmetriska laster.*

4.3 Differentialekvationer

Två kopplade differentialekvationer, **Ekv. 4.1** och **Ekv. 4.2**, härleds med hjälp av jämvikter, kinematiska och konstitutiva samband (se **appendix A**). Huvudfunktioner i differentialekvationssystemet är axiell spänning samt hörnböjmoment. Axiella spänningar och hörnböjmoment som används i differentialekvationer nedan uppträder i anslutning mellan farbana och vertikalväggar, se markering i ***Figur 4.2*** nedan.



Figur 4.2*. Deformation av tvärsnitt på grund av vridning.*

$$\frac{d^2\sigma_o}{dx^2}\cdot\frac{b\cdot h}{48\cdot(1+\beta)}\left((1+\alpha)\cdot A_v+\left(\frac{b_k}{b}\right)^2 A_o+\alpha\cdot A_u\right)-m_o=-\frac{q\ \cdot b}{4\cdot(1+\beta)}$$ **Ekv. 4.1**

$$\frac{d^2m_o}{dx^2}+\sigma_o\cdot\frac{24\cdot(1+\alpha)}{b\cdot h\cdot\left(\frac{b}{i_o}+\frac{h\cdot(2-\beta)}{i_v}\right)}=0$$ **Ekv. 4.2**

Genom derivering och insättning av ***Ekv. 4.1*** i ***Ekv. 4.2*** fås en homogen differentialekvation av fjärde ordningen, enligt nedan.

$$\frac{d^4\sigma_o}{dx^4}+4\cdot k^4\cdot\sigma_o=0$$ **Ekv. 4.3**

$$k=\sqrt[4]{\frac{288\cdot(1+\alpha)\cdot(1+\beta)}{(b\cdot h)^2\cdot\left((1+\alpha)\cdot A_v+A_o\cdot\left(\frac{b_k}{b}\right)^2+\alpha\cdot A_u\right)\cdot\left(\frac{b}{i_o}+\frac{h\cdot(2-\beta)}{i_v}\right)}}$$ **Ekv. 4.4**

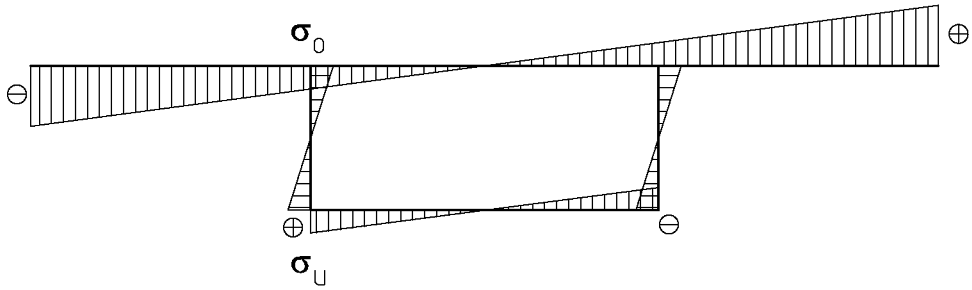
$$\alpha=\frac{3\cdot A_v+A_o\cdot\left(\frac{b_k}{b}\right)^2}{3\cdot A_v+A_u}=\frac{\sigma_u}{\sigma_o}$$ **Ekv. 4.5**

$$\beta=\frac{\frac{3\cdot h}{i_v}+\frac{b}{i_o}}{\frac{3\cdot h}{i_v}+\frac{b}{i_u}}=\frac{m_u}{m_o}$$ **Ekv. 4.6**

h = cc-avstånd mellan farbana och botten
b = cc-avstånd mellan vertikala väggar
b_k= farbanans bredd
A_v= tvärsnittsarean hos en vertikalvägg
A_o= tvärsnittsarean hos farbanan
A_u= tvärsnittsarean hos bottenplattan
i_v= tröghetsmoment per längd meter, x-led, hos vertikalvägg
i_o= tröghetsmoment per längd meter, x-led, hos farbana
i_u= tröghetsmoment per längd meter, x-led, hos bottenplatta
m_o= hörnmoment kring hörnet: vertikalvägg- farbana
m_u= hörnmoment kring hörnet: vertikalvägg- bottenplatta
σ_o= välvspänning vid hörnet: vertikalvägg- farbana
σ_u= välvspänning vid hörnet: vertikalvägg- bottenplatta

4.4 Axiella spänningars fördelning i tvärsnittet

Axiella spänningsfördelningen, se ***Figur 4.3*** nedan, bygger på de antaganden som gjorts i härledningen (se **appendix A**).



Figur 4.3*. Axiell spänningsfördelning för deformerbara tvärsnitt.*

4.5 Allmän lösning till differentialekvation

Den allmänna lösning till differentialekvationen ovan ges av:

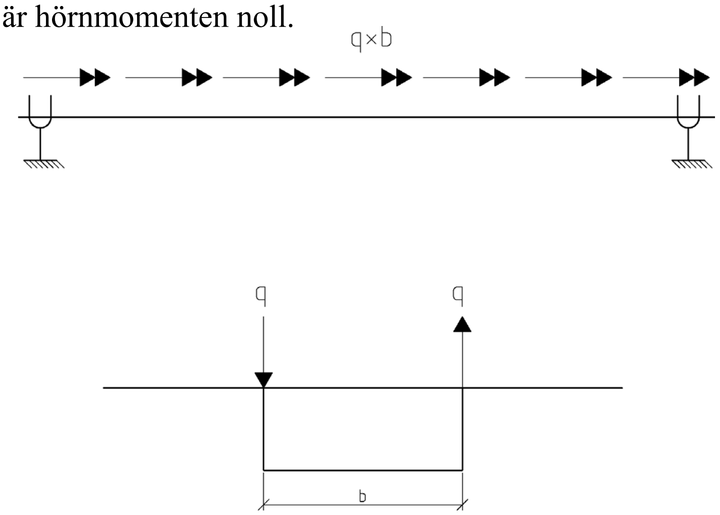
$$\sigma_o = C_1 \sinh(k\cdot x)\cdot\cos(k\cdot x) + C_2\cdot\cosh(k\cdot x)\cdot\cos(k\cdot x) + C_3\cosh(k\cdot x)\cdot\sin(k\cdot x) + \\ + C_4\sinh(k\cdot x)\cdot\sin(k\cdot x)$$

$C_{1\text{-}4}$= konstanter vilka bestäms med hjälp av randvillkor.

4.6 Randvillkor

För att bestämma konstanterna i den allmänna lösningen krävs fyra randvillkor, två i varje rand. För en fritt upplagd balk med ändtvärskott blir randvillkoren vid stöd enligt följande:

Axiella spänningarna blir noll eftersom balken är gaffellagrad. Ändtvärskotten förutsätts vara oändligt styva i sitt eget plan och oändligt veka transversellt sitt eget plan, vilket innebär att tvärsnittet är förhindrat att deformeras i sitt eget plan och därmed är hörnmomenten noll.

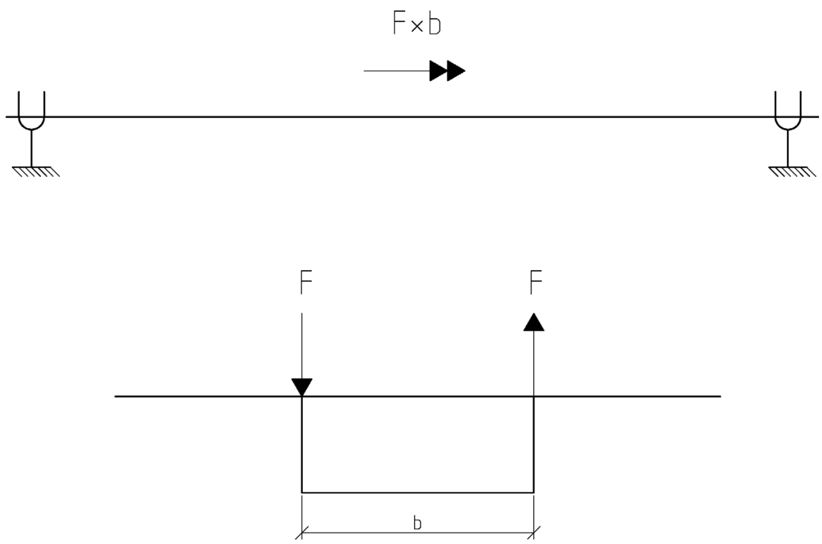


Figur 4.4*. Lastfall med jämt utbredd antisymmetrisk last.*

För fallet med jämnt utbredd antisymetrisk last och upplagsförhållanden enligt ***Figur 4.4*** ovan blir randvillkoren

$\sigma_o(0) = 0$
$m_o(0) = 0$
$\sigma_o(L) = 0$
$m_o(L) = 0$

Konstanterna $C_{1\text{-}4}$ finns redovisade i **bilaga VII**.



Figur 4.5. *Lastfall med antisymmetriska punktlaster.*

För fallet med antisymmetriska punktlaster och upplagsförhållanden enligt ***Figur 4.5*** ovan blir randvillkoren mer komplicerade. I likhet med fallet för odeformerat tvärsnitt studeras endast ena balkhalvan. Randvillkoren för x = 0 blir samma som i fallet för utbredd last. I det ena randvillkoret i mittsnittet utnyttjas att lastfallet är symmetriskt i längsled, vilket ger att hörnmomentets derivata vid L/2 är noll. Det andra randvillkoret i mittsnittet måste innehålla punktlasterna. För att föra in dessa måste man återgå till härledningen, se **appendix A**, och sätta upp jämvikt för tvärsnittet vid L/2. Denna jämviktsberäkning utföres ej i denna rapport. Istället används randvillkor enligt [Vridning och lastfördelning, Tage Petersson och Håkan Sundquist 1995].

$$\sigma_o'(L/2) = \frac{P}{2 \cdot Z \cdot \alpha}$$

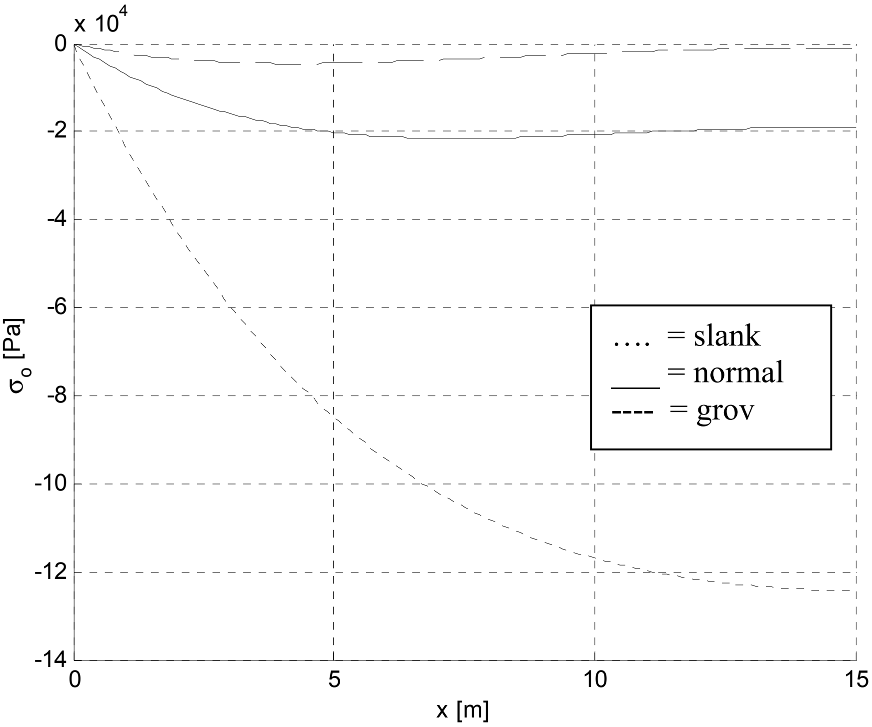
$$Z = h \cdot \left(A_u + \frac{12 \cdot \beta \cdot I_o}{b^2} + \frac{(1+\beta) \cdot A_v}{12} \right) / 12$$

I_o = farbanans tröghetsmoment med avseende på z- axel.

4.7 Resultat

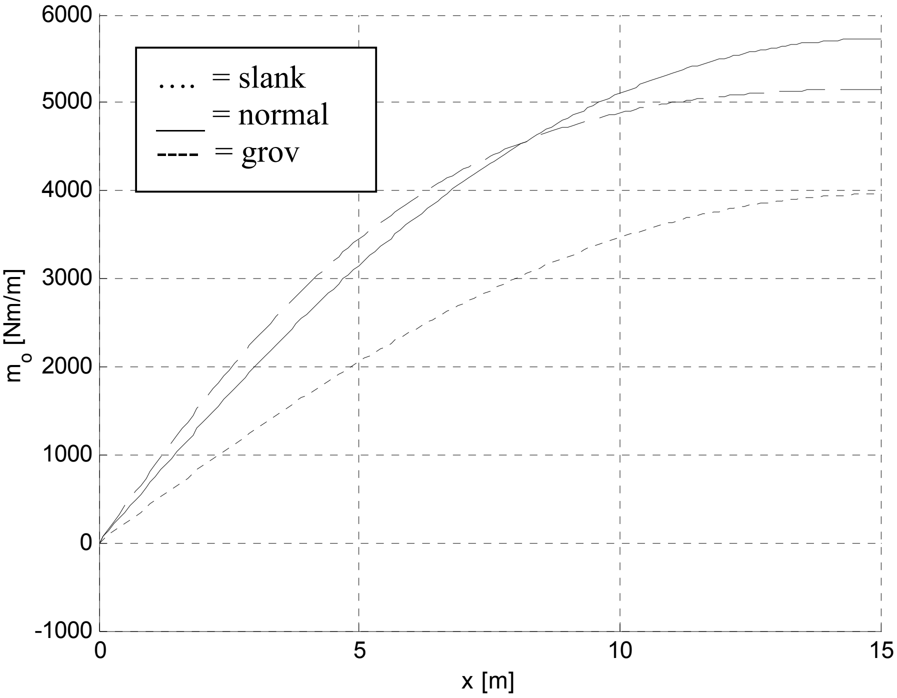
4.7.1 Utbredda antisymmetriska laster

Axiella spänningen i hörnet där vertikalvägg ansluter till farbanan mellan x = 0 till x = L/2 på grund av utbrett vridmoment för de olika tvärsnitten ges i ***Figur 4.6*** nedan.



Figur 4.6. *Axiella spänningar på grund av utbredda antisymmetriska laster, deformerbara tvärsnitt.*

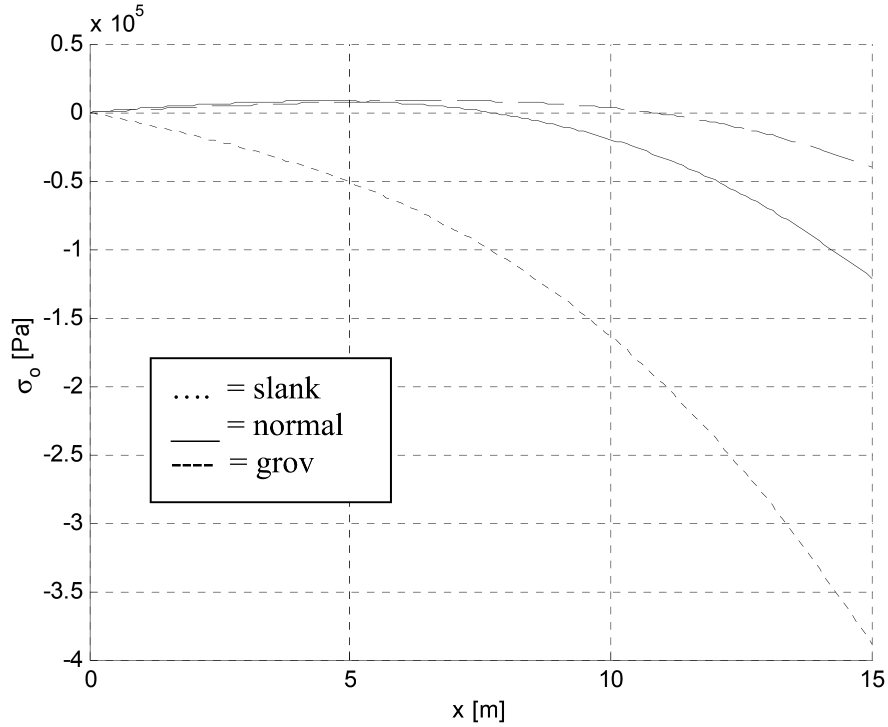
Hörnmoment kring hörnet vertikalvägg- farbana vid belastning av antisymmetrisk utbredd last, se ***Figur 4.7*** nedan.



Figur 4.7. *Hörnmoment, utbredd antisymmetrisk last, deformerbara tvärsnitt.*

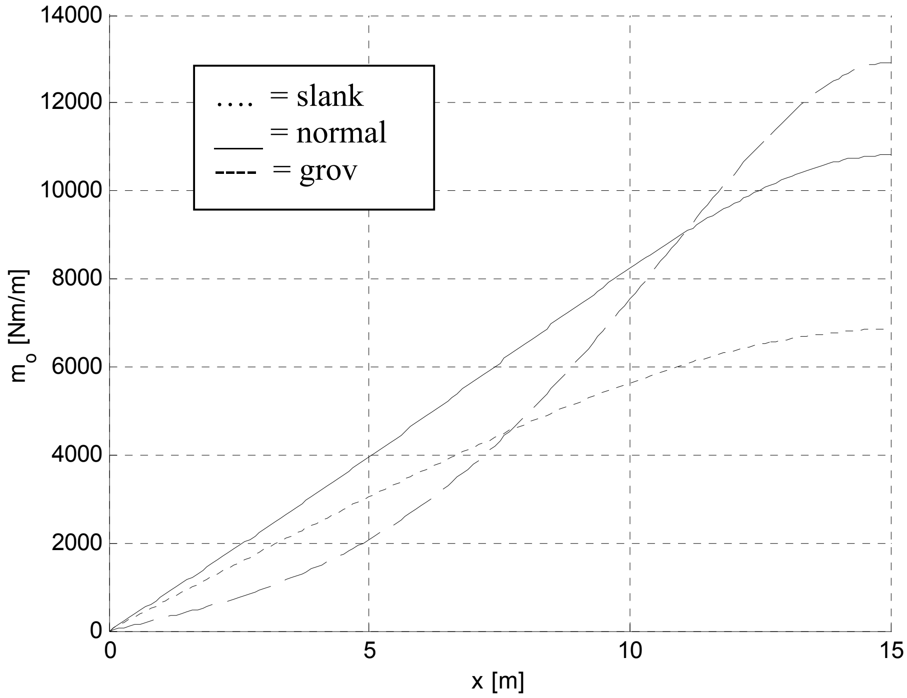
4.7.2 Antisymmetriska punktlaster

Axiell spänning i hörnet där vertikalvägg ansluter till farbanan mellan x = 0 till x = L/2 på grund av punktvridmoment för de olika tvärsnitten ges i ***Figur 4.8*** nedan.



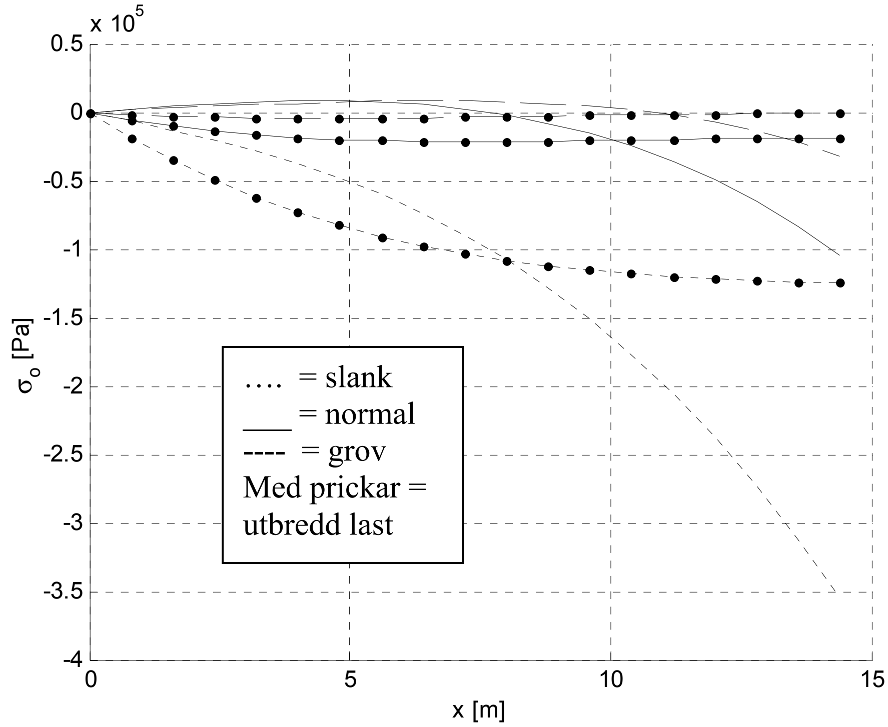
Figur 4.8. *Axiella spänningar på grund av antisymmetriska punktlaster, deformerbara tvärsnitt.*

Hörnmoment kring hörnet vertikalvägg-farbana vid belastning av antisymmetrisk punktlast, se ***Figur 4.9*** nedan.



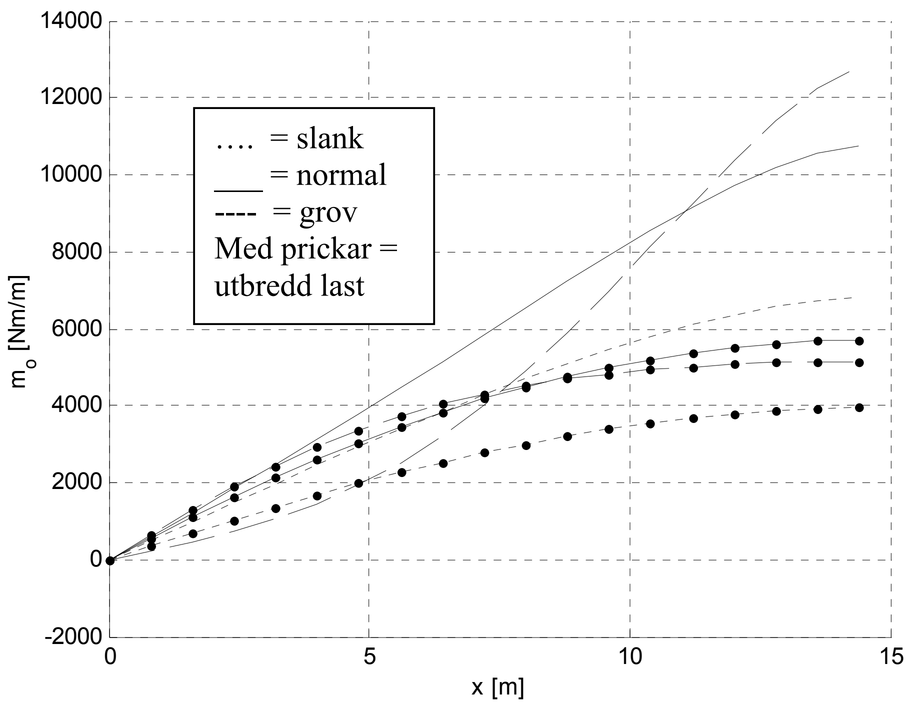
Figur 4.9. *Hörnmoment på grund av antisymmetriska punktlaster, deformerbara tvärsnitt.*

Axiella spänningar för de olika tvärsnitten och lastfallen plottade i samma diagram, se ***Figur 4.10*** nedan.



Figur 4.10. *Axiella spänningar för olika tvärsnitt och lastfall, deformerbara tvärsnitt.*

Hörnmoment för de olika tvärsnitten och lastfallen plottade i samma diagram, se ***Figur 4.11*** nedan.



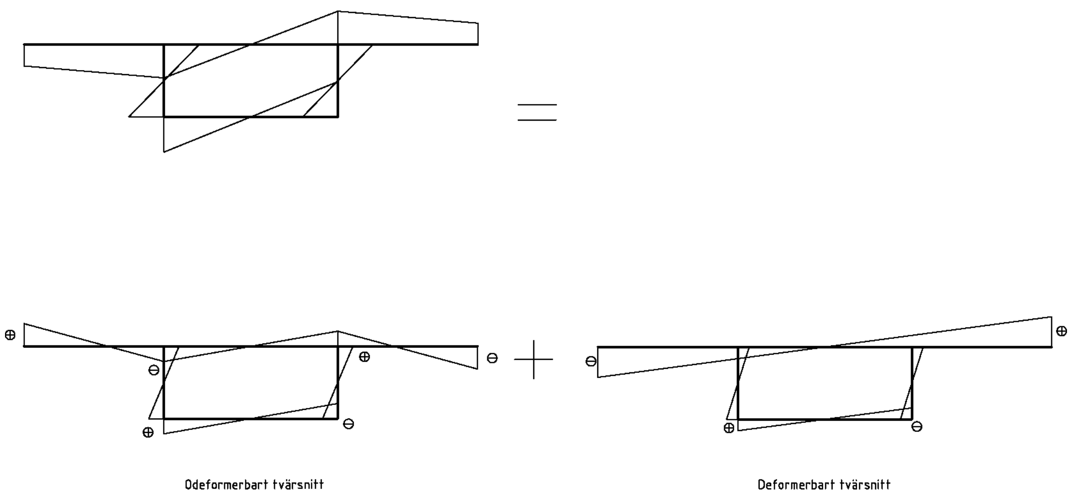
Figur 4.11 *Hörnmoment för olika tvärsnitt och lastfall, deformerbart tvärsnitt.*

Man kan konstatera att axiella spänningarna ökar med ökad slankhet. Detta är en direkt följd av att tvärsnittdeformationerna ökar då slankheten ökar.

5 Deformerbart tvärsnitt med blandad vridning

5.1 Allmänt

I detta avsnitt beskrivs en metod som medger kombination av metoder för odeformerbara och deformerbara tvärsnitt, [Zhang, Lyons, A thin-walled box beam finite element for curved bridge analysis; Boswell, Zhang, A box beam finite element for the elastic anlysis of thin-walled structures; Kermani, Waldron, Behavior of concrete box girder bridges of deformable cross-section]. Vid vridning av en lådbalk består vridmomentet av Saint Venantskt och Vlasovskt vridmoment. Dessutom kommer tvärsnittet att deformeras. Tvärsnittsdeformation och Vlasovsk vridning ger upphov till normalspänningar enligt figur nedan.



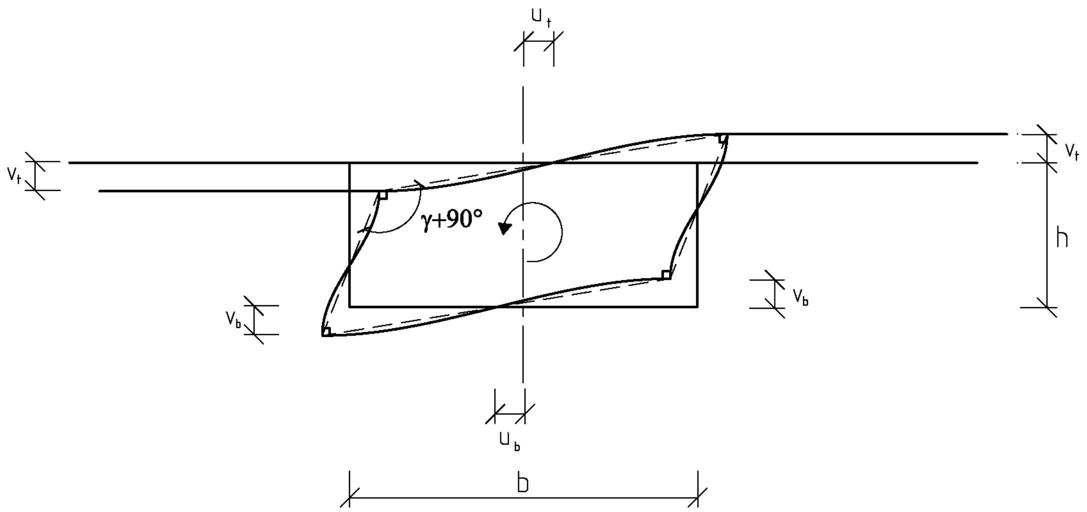
Figur 5.1. *Superponering av axiella spänngsfördelningar på grund av vridning.*

Differentialekvationerna nedan beskriver sambandet mellan vriddeformation och vridbelastning för odeformerbart och deformerbart tvärsnitt:

$$\rho \cdot E \cdot K_w \cdot \frac{d^4\varphi}{dx^4} - \xi \cdot G \cdot K_v \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} = q_\omega \qquad \text{(odeformerbart tvärsnitt)}$$

$$E \cdot K_{wII} \cdot \frac{d^4\gamma}{dx^4} + k \cdot \gamma = \frac{q_\omega}{2} \qquad \text{(deformerbart tvärsnitt)}$$

Tvärsnittsdeformationen (γ) orsakar en ökning av vridningsvinkeln φ, se ***Figur 5.2*** nedan [Zhang, The effect of distortion in thin-walled box-spine beams]. Detta medför att lösningen av differentialekvationen för odeformerbara tvärsnitt påverkas av lösningen av differentialekvationen för deformerbara tvärsnitt. För att ta hänsyn till denna effekt reduceras vridstyvheten i differentialekvationen för odeformerbara tvärsnitt enligt nedan.



Figur 5.2. *Tvärsnittsdeformationens påverkan av vridningsvinkeln.*

$$\xi = \frac{\varphi}{\varphi - 0.5 \cdot \gamma}$$ **Ekv. 5.1**

ξ kommer att variera med x, det vill säga vridstyvheten blir ej konstant längs x, vilket leder till att differentialekvationen för odeformerbart tvärsnitt blir väldigt svårlöst. Genom att lösa differentialekvationerna ovan numeriskt med hjälp av till exempel FEM, kan man dela in balken i flera element. Differentialekvationerna löses sedan iterativt. För varje iteration reduceras vridstyvheten i vart och ett av elementen. Iterationen avslutas när $\xi_n - \xi_{n+1}$ är tillräckligt litet. I denna rapport löses differentialekvationen endast med $\xi = 1$.

5.2 Differentialekvation för odeformerbart tvärsnitt

Se avsnitt **3**.

5.3 Differentialekvation för deformerbart tvärsnitt

Denna metod bygger på samma principer som avsnitt **4**, men framställs här på något annorlunda vis.

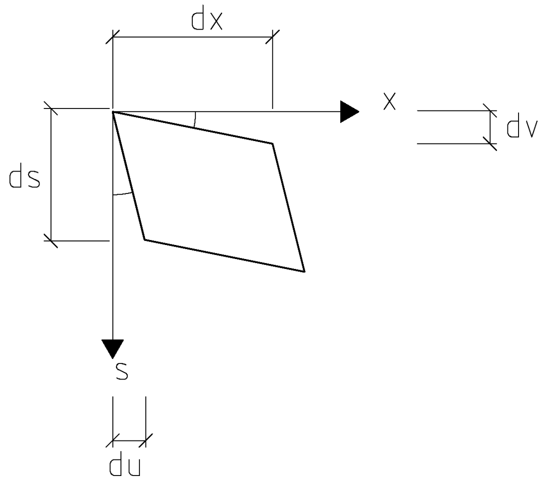
5.3.1 Definition av γ

$$\gamma = \frac{2 \cdot v_t}{b} + \frac{u_t + u_b}{h}$$ **Ekv. 5.2**

(beteckningar enligt figur ovan)

5.3.2 Välvspänningsfördelning

Precis som vid välvning av öppna tunnväggiga tvärsnitt försummas skjuvtöjningar för deformerat tvärsnitt. På detta sätt fås ett samband mellan γ och axiell förskjutning.



$$\gamma_{xs} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} = 0$$ **Ekv. 5.3**

Förskjutningen v som är parallell med s-axeln kan uttryckas enligt nedan:

$$v = v_s(s) \cdot \gamma(x)$$ **Ekv. 5.4**

s-axeln definieras som i avsnittet för odeformerat tvärsnitt.

Integration av **Ekv. 5.3** ger:

$$\int_0^s \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} ds = 0$$ **Ekv. 5.5**

Insättning av **Ekv. 5.4** och **Ekv. 5.5** ger:

$$\int_0^s \frac{\partial}{\partial x}\left(v_s(s) \cdot \gamma(x)\right) + \frac{\partial u}{\partial s} ds = 0$$ **Ekv. 5.6**

Vilket kan skrivas som:

$$-\int_0^s v_s(s) ds \cdot \frac{d\gamma}{dx} = u$$ **Ekv. 5.7**

Med hjälp av **Ekv. 5.7** definieras sektoriell koordinat för deformerat tvärsnitt enligt nedan:

$$\omega_{II}(s) = \int_0^s v_s(s) ds$$ **Ekv. 5.8**

Ekv. 5.7 kan nu skrivas enligt nedan:

$$u = -\omega_{II}(s) \cdot \frac{d\gamma}{dx}$$ **Ekv. 5.9**

Töjningen fås genom derivering av förskjutningen enligt nedan:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -\omega_{II}(s) \cdot \frac{d^2\gamma}{dx^2}$$ **Ekv. 5.10**

För linjärelastiska material fås axiella spänningen enligt nedan:

$$\sigma_{xII} = E \cdot \varepsilon_x = -E \cdot \omega_{II}(s) \cdot \frac{d^2\gamma}{dx^2}$$ **Ekv. 5.11**

Axiella spänningen kan också uttryckas med hjälp av bimoment för deformerat tvärsnitt där bimomentet definieras enligt nedan:

$$B_{II} = \int_A \sigma_{xII} \cdot \omega_{II}(s) dA = -E \cdot K_{wII} \cdot \frac{d^2\gamma}{dx^2}$$ **Ekv. 5.12**

$$K_{wII} = \int_A \omega_{II}^2(s) dA$$ **Ekv. 5.13**

K_{wII} är välvtröghetsmoment för deformerat tvärsnitt.

Genom att kombinera **Ekv. 5.11** och **Ekv. 5.12** kan axiella spännigen uttryckas enligt nedan:

$$\sigma_{xII} = \frac{B_{II}(x)}{K_{wII}} \cdot \omega_{II}(s)$$ **Ekv. 5.14**

5.3.2.1 Sektoriell koordinat för deformerbart tvärsnitt

Den sektoriella koordinaten beskriver den axiella spänningens fördelning i tvärsnittet. Den axiella spänningen är helt i jämvikt sett över hela tvärsnittet, vilket medför att följande tre villkor måste vara uppfyllda:

$$\int_A \sigma_{xII} dA = 0$$ **Ekv. 5.15**

$$\int_A y \cdot \sigma_{xII} dA = 0$$ **Ekv. 5.16**

$$\int_A z \cdot \sigma_{xII} dA = 0$$ **Ekv. 5.17**

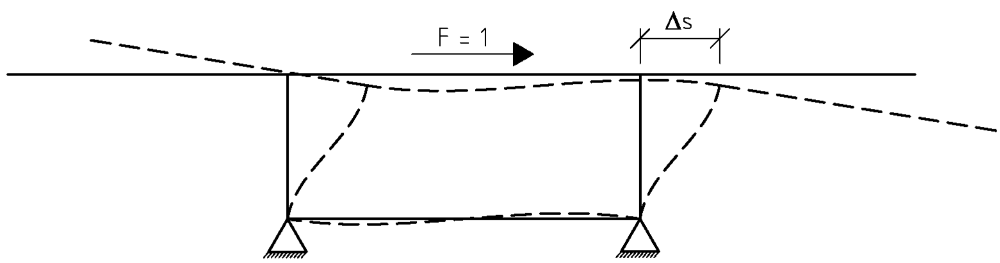
Ekv. 5.15 och **Ekv. 5.17** är uppfyllda då tvärsnittet minst är enkelsymmetriskt och axiella spänningen antisymmetrisk. **Ekv. 5.16** används för att bestämma förhållandet mellan sektoriell koordinat i ovan och underkant av vertikalvägg. Förhållandet resulterar i α enligt ***Ekv. 4.5*** avsnitt **4**. För att få fram värdet på den sektoriella koordinaten används skalteori enligt [H. R. Evans and K. C Rockey, A folded plate approach to the analysis of box girders]. I en skrift av Zhang [The effect of distorsion in thin walled box- spine beams] anges formler för beräkning av sektoriell koordinat för lådtvärsnitt. Formlerna är relativt generella då det kan finnas flera livväggar, vertikala eller lutande. Tvärsnittet ska dock vara minst enkelsymmetriskt. Nedan redovisas formeln för beräkning av sektoriella koordinatens värde i anslutning farbana/vertikalvägg för aktuella tvärsnitt.

$$\omega_{II} = -\frac{h \cdot b}{4 \cdot (\alpha + 1)}$$ **Ekv. 5.18**

När sektoriella koordinaten är känd i en punkt kan man beräkna värdet på sektoriella koordinaten för hela tvärsnittet eftersom förhållandet mellan sektoriell koordinat i ovankant och underkant i vertikalvägg är känd samt att sektoriella koordinaten varierar linjärt över tvärsnittet.

5.3.3 Tvärsnittets transversella styvhet

Storleken på tvärsnittsdeformationen beror på hur styvt tvärsnittet är transversellt längdaxeln. Material- och tvärsnittskonstanten **k** i differentialekvationen för deformerbart tvärsnitt är ett mått på denna styvhet. Styvheten k beräknas på ett brosegment med längden 1m enligt ***Figur 5.3*** nedan. Segmentet låses fast i vertikal och horisontell led i anslutning mellan bottenplatta och vertikalvägg och belastas med en horisontell enhetslast. **k** fås med hjälp av **Ekv. 5.19** nedan.



Figur 5.3. *Tvärsnittets transversella styvhet.*

$$k = \frac{1}{\Delta s}$$ **Ekv. 5.19**

För ett komplicerat tvärsnitt är det lämpligt att bestämma **k** med hjälp av FEM. Eftersom de aktuella tvärsnitten har relativt enkel geometri finns analytiska uttryck för **k**, [se R. Dabrowski, Gekrümmte dünnwandige Träger], vilket ges nedan.

$$k = \frac{24 \cdot E \cdot i_v}{\eta \cdot h}$$ **Ekv. 5.20**

$$\eta = 1 + \frac{2 \cdot \frac{b}{h} + 3 \frac{i_o + i_u}{i_v}}{\frac{i_o + i_u}{i_v} + 6 \cdot \frac{h \cdot i_o \cdot i_u}{b \cdot i_v^2}}$$

5.3.4 Hörnmoment på grund av tvärsnittsdeformation

Samband mellan hörmoment och tvärsnittsdeformation (γ) ges av formler nedan, [R. Dabrowski, Gekrümmte dünnwandige Träger].

$$m_o = \frac{k}{4} \cdot \left(1 + \frac{i_o - i_u}{i_o + i_u + 6 \cdot \frac{h \cdot i_o \cdot i_u}{b \cdot i_v}} \right) \cdot \gamma \qquad \textbf{Ekv. 5.21}$$

$$m_u = -\frac{k}{4} \cdot \left(1 + \frac{i_u - i_o}{i_o + i_u + 6 \cdot \frac{h \cdot i_o \cdot i_u}{b \cdot i_v}} \right) \cdot \gamma \qquad \textbf{Ekv. 5.22}$$

5.4 Lösning av differentialekvation, odeformerbart tvärsnitt

Se avsnitt **3 Odeformerbara tvärsnitt**.

5.5 Lösning av differentialekvation, deformerbart tvärsnitt

Den allmänna lösningen består av en homogen lösning och en partikulär lösning enligt nedan.

$$\gamma = \gamma_h + \gamma_p$$

$$\gamma_h = C_1 \cdot \sinh(\lambda \cdot x) \cdot \cos(\lambda \cdot x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda \cdot x) \cdot \cos(\lambda \cdot x) +$$
$$+ C_3 \cdot \cosh(\lambda \cdot x) \cdot \sin(\lambda \cdot x) + C_4 \cdot \sinh(\lambda \cdot x) \cdot \sin(\lambda \cdot x)$$

$$\gamma_p = \frac{q_\omega}{2 \cdot k}$$

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4 \cdot E \cdot K_{\omega II}}}$$

Differentialekvationen löses för utbredd last med följande randvillkor:

På grund av stela ändtvärskott vid balkens båda ändar förblir tvärsnittet odeformerat där, vilket ger:

$\gamma(0) = \gamma(L) = 0$

Eftersom balken kan välva fritt vid upplagen kommer de axiella spänningarna vara noll där. **Ekv. 5.11** ger:

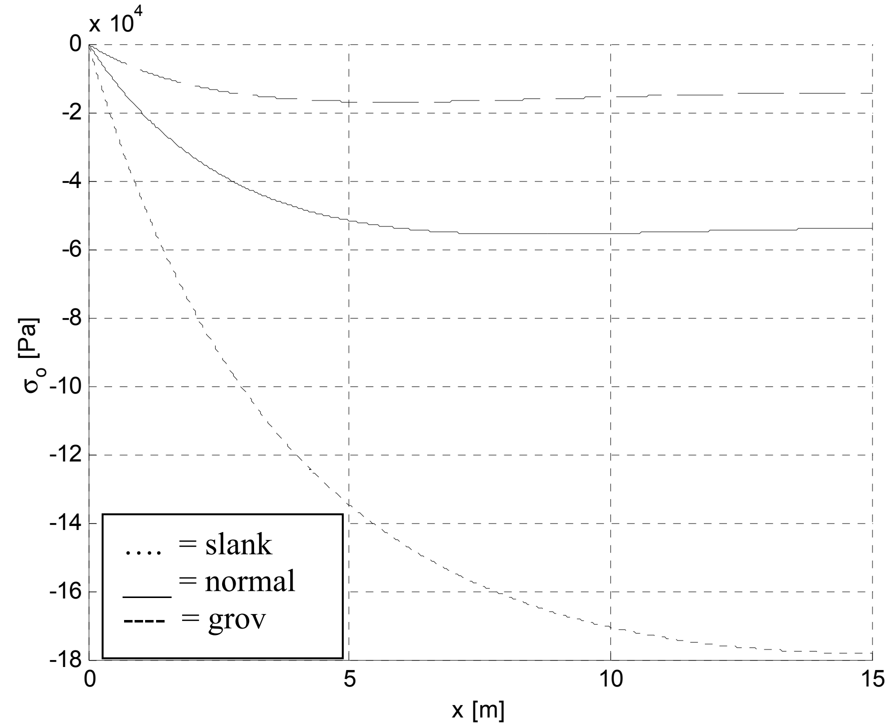
$\gamma''(0) = \gamma''(L) = 0$

Axiella spänningarnas storlek och fördelning på grund av tvärsnittets deformation blir samma som i avsnitt **4.7.1**.

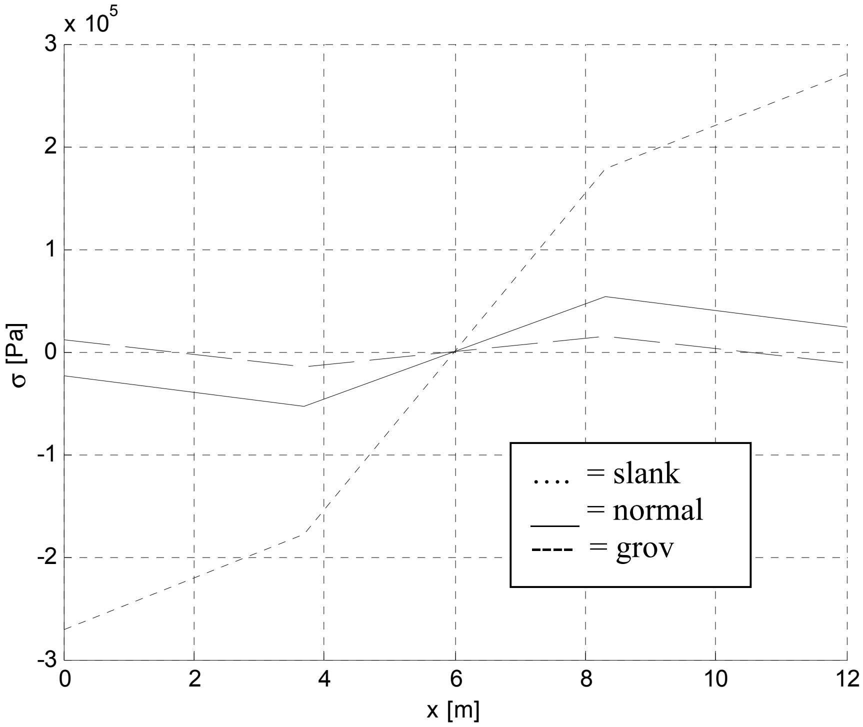
Randvillkor för punktlaster fås på samma sätt som i avsnitt **4**.

5.6 Resultat för utbredda antisymmetriska laster

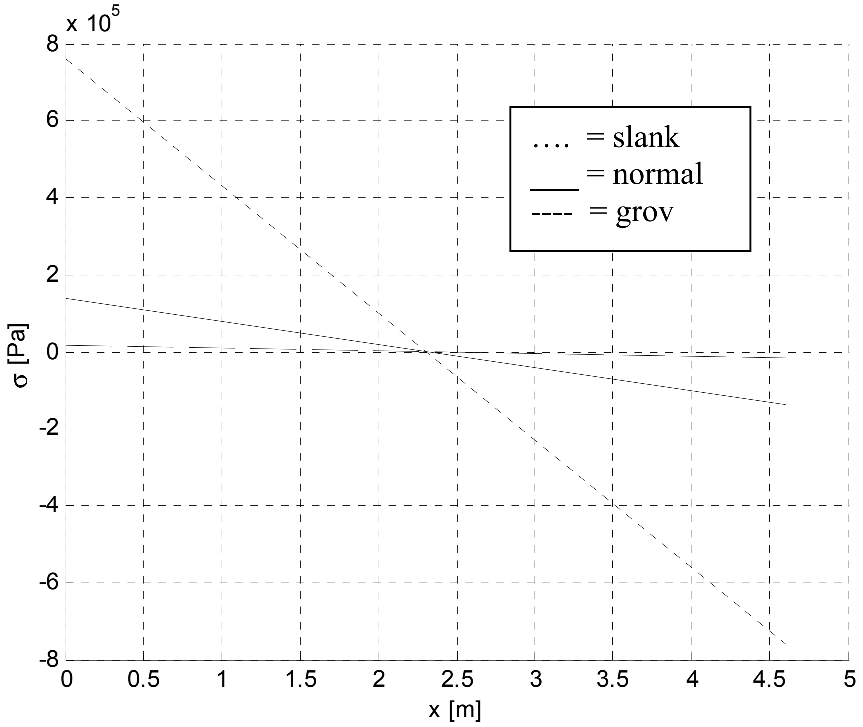
Genom att summera Vlasovska välvspänningar och axiella spänningar på grund av tvärsnittsdeformation fås resultat vid utbredda antisymmetriska laster enligt nedan.



Figur 5.4. *Axiella spänningar σ_o för de olika tvärsnitten, deformerbart tvärsnitt med blandad vridning, utbredda antisymmetriska laster.*



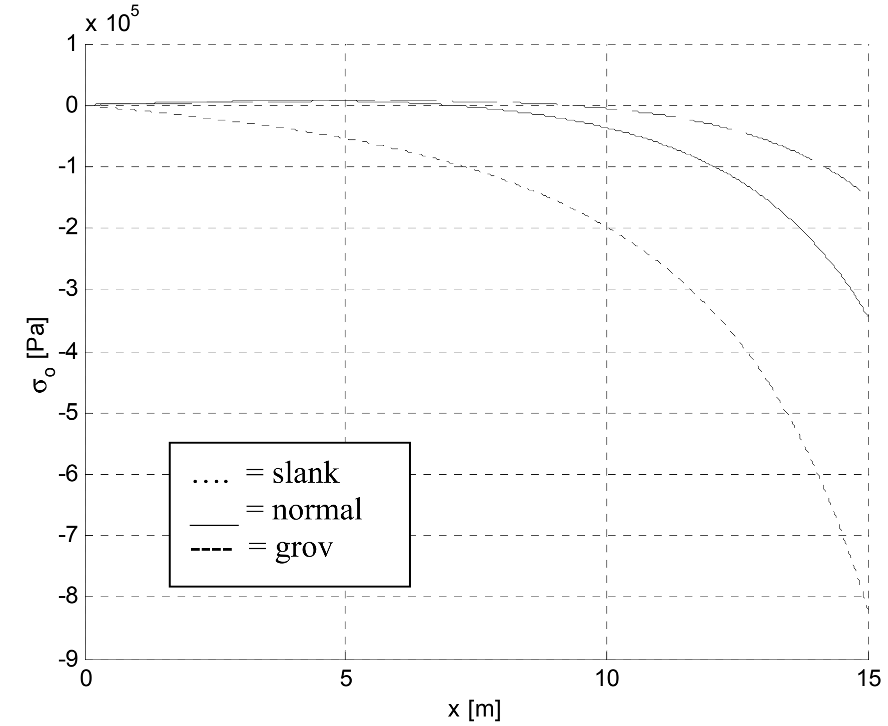
Figur 5.5. *Axiella spänningar tvärs farbana, deformerbart tvärsnitt med blandad vridning, utbredda antisymmetriska laster.*



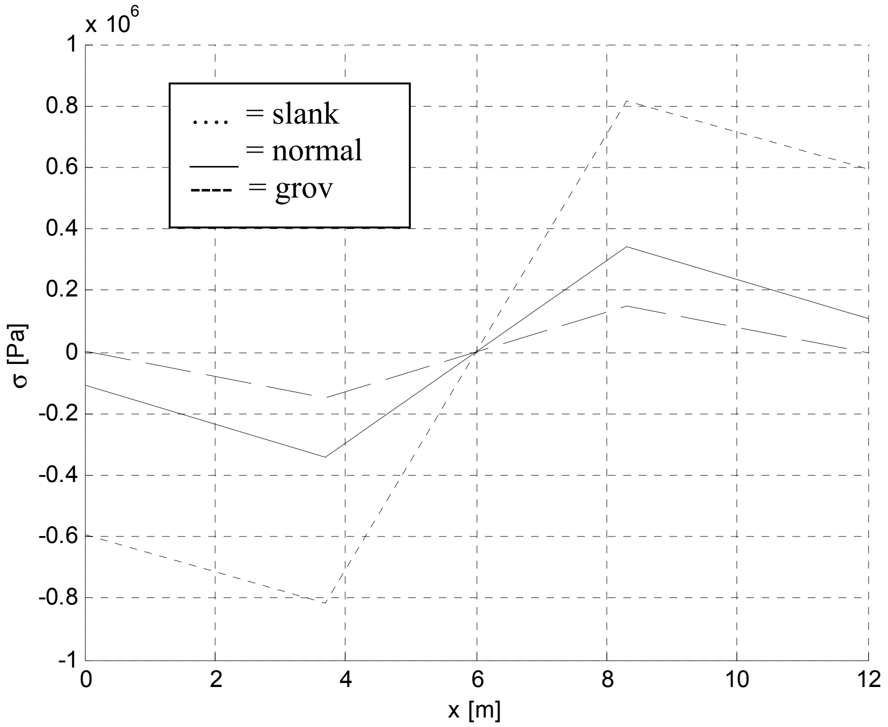
Figur 5.6. *Axiella spänningar tvärs underplatta, deformerbart tvärsnitt med blandad vridning, utbredda antisymmetriska laster.*

5.7 Resultat för antisymmetriska punktlaster

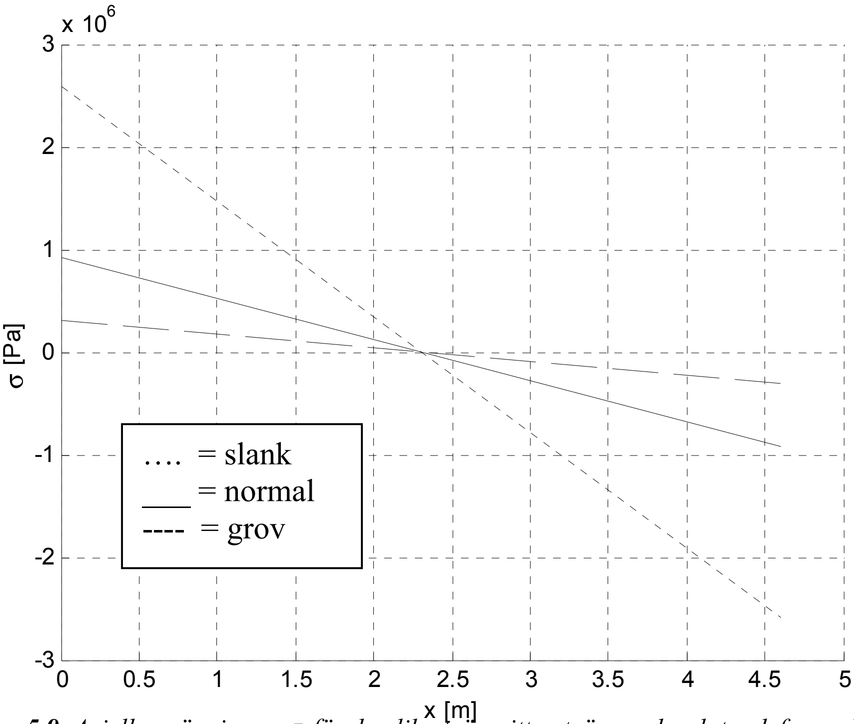
Genom att summera Vlasovska välvspänningar och axiella spänningar på grund av tvärsnittsdeformation fås resultat vid antisymmetriska punktlaster enligt nedan.



Figur 5.7. *Axiella spänningar σ_o för de olika tvärsnitten, deformerbart tvärsnitt med blandad vridning, antisymmetriska punktlaster.*



Figur 5.8. *Axiella spänningar σ för de olika tvärsnitten tvärs farbana, deformerbart tvärsnitt med blandad vridning, antisymmetriska punktlaster.*



Figur 5.9. *Axiella spänningar σ för de olika tvärsnitten tvärs underplata, deformerbart tvärsnitt med blandad vridning, antisymmetriska punktlaster.*

6 Enkel tvådimensionell FE-modell

6.1 Finita Element Metoden

I de flesta ingenjörssammanhang stöter man på fysiska problem som kan modelleras med differentialekvationer. Differentialekvationerna blir ofta komplicerade och analytiska lösningsmetoder för svåra. Finita element metoden är en numerisk lösningsmetod för generella differentialekvationer. Konstruktionen delas upp i noder och element. Elementen är ihopkopplade med gemensamma frihetsgrader, vilka befinner sig i nodpunkterna. För statiska strukturmekaniska problem skall varje nod vara i jämvikt med pålagd yttre last. Detta villkor används för att assemblera samman elementens styvhet till en styvhet för hela strukturen. Hela strukturens ekvationssystem kan skrivas i matris form enligt nedan.

$$K \cdot a = f$$

K = strukturens styvhetsmatris
a = förskjutningsvektor
f = lastvektor

Varje frihetsgrad i strukturen har antingen last eller förskjutning känd. Alla laster förutsätts angripa i noderna. Om man har utbredda laster måste dessa fördelas ut till frihetsgraderna i noderna, vilket lämpligast görs med hjälp av elementets formfunktioner.

6.2 Allmänt

Handberäkningsmetoden för deformerat tvärsnitt, som redovisats innan, blir väldigt komplicerad och arbetsintensiv då man har flera olika laster. FE-modell med skalelement är dels relativt arbetskrävande att modellera och post-processa, dels krävs god beräkningskapacitet. Med anledning av det ovan nämnda finns skäl att använda en enkel tvådimensionell FE-modell. I den tvådimensionella FE-modellen modelleras ena vertikalväggen som en balk på fjäderbädd. Fjäderbädden motsvarar kopplingen mellan vertikalväggen och övriga delar av balken. Tvärsnittskonstanter och ekvivalent bäddmodul finns redovisade i [C.Menn, Prestressed Concrete Bridges]. Den tvådimensionella modellen modelleras enkelt i till exempel Calfem, vilket också har gjorts.

6.3 Teori

Den grundläggande differentialekvationen för vertikalväggens nedböjning ges nedan.

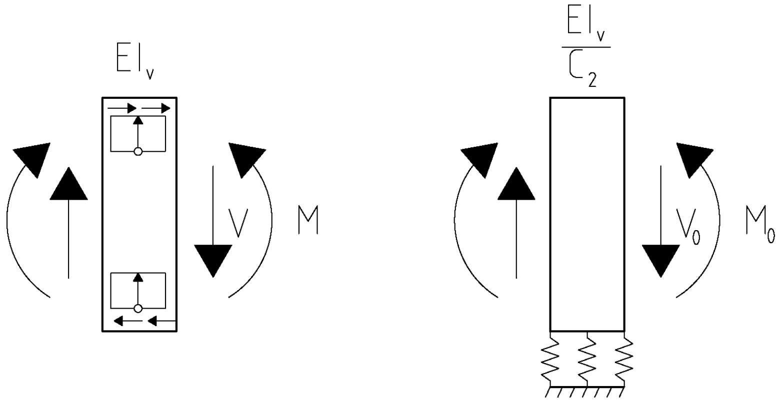
$$\frac{EI_v}{C_2} \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} + k_{ekv} w_v = q_{v,def}$$

E= elasticitetsmodul

$I_v = \frac{\delta_v h^3}{12}$ = vertikalväggens tröghetsmoment kring y-axeln

C_2= proportionalitetskonstant mellan verkligt moment och moment i balkmodell
w_v= vertikalväggens vertikala nedböjning
k_{ekv}= ekvivalent bäddmodul
$q_{v,def}$= kraft, som deformerar tvärsnittet, i vertikalvägg

Innebörden av C_2 illustreras i ord och bild enligt nedan.



Figur 6.1. *Analogi mellan balk på fjäderbädd och livvägg i lådtvärsnitt.*

M= C_2M_0 och V= V_0

C_2 är en geometrisk konstant enligt uttryck nedan.

$$C_2 = \frac{\frac{1}{3}\left(1+\frac{\delta_u}{\delta_o}\left(\frac{b}{b_k}\right)^3\right)+2\frac{h\delta_v}{b\delta_o}\left(\frac{b}{b_k}\right)^3}{\frac{1}{3}\frac{b\delta_u}{h\delta_v}+\frac{2}{3}\left(1+\frac{\delta_u}{\delta_o}\left(\frac{b}{b_k}\right)^3\right)+\frac{h\delta_v}{b\delta_o}\left(\frac{b}{b_k}\right)^3}$$

δ_u= bottenplattans tjocklek
δ_o= farbanans tjocklek
δ_v= vertikalväggens tjocklek
b= cc-avstånd mellan vertikalväggar
b_k= farbanans bredd
h= cc-avstånd mellan farbana och bottenplattta

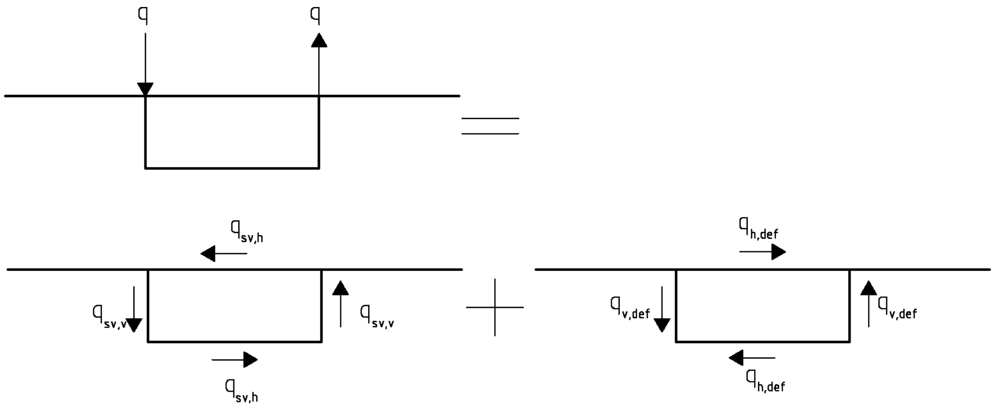
Den ekvivalenta bäddmodulen, $k_{ekv,}$ beräknas enligt formel nedan.

$$k_{ekv} = \frac{4E\delta_v^3}{C_1 hb} \qquad \text{där}$$

C_1 är en tvärsnittskonstant enligt formel nedan.

$$C_1 = \frac{2\left(\delta_o^3 + \delta_u^3 + \frac{b\delta_v^3}{2h}\right) + 3\frac{h}{b}\left(\frac{\delta_o\delta_u}{\delta_v}\right)^3}{\delta_o^3 + \delta_u^3 + 6\frac{h}{b}\left(\frac{\delta_o\delta_u}{\delta_v}\right)^3}$$

Belastningen, q_{def}, är den del av yttre last som deformerar tvärsnittet. De angripande antisymmetriska krafterna delas upp i vridande krafter och tvärsnittsdeformerande krafter. Metoden förutsätter att hela vridmomentet tas upp genom enbart Saint Venansk vridning. Antisymmetrisk belastning delas upp enligt ***Figur 6.2*** nedan.



Figur 6.2. *Uppdelning av antisymmetrisk last.*

Om det vridande momentet angriper som $q_{sv,v+h}$ skulle tvärsnitt inte deformeras, vilket kan åstadkommas med till exempel ett tvärskott. De Saint Venantska krafterna fås med hjälp av formlerna nedan.

$$q_{sv,v} = \frac{qbh}{2A_c} = \frac{qbh}{2bh} = \frac{q}{2}$$

$$q_{sv,h} = \frac{qbb}{2A_c} = \frac{qbb}{2bh} = \frac{qb}{2h}$$

De tvärsnittsdeformerande krafterna fås genom statisk ekvivalens mellan höger- och vänsterledet i ***Figur 6.2*** och ges i formler nedan.

$$q_{v,def} = \frac{q}{2}$$

$$q_{hdef} = \frac{qb}{2h}$$

För punktlaster sker samma uppdelning (det är bara att byta q mot Q).

6.4 Element beskrivning

För att modellera vertikalväggen används elementstyvheten för balk på winklerbädd, vilken redovisas nedan.

$K_w^e = K^e + K_k^e$ där

K^e = elementstyvhetsmatris för Bernoulli-Euler-balk
K_k^e = styvhetstillskott på grund av fjäderbädd
K_w^e = elementets totala styvhet

Elementstyvhetsmatrisen för vertikalvägg ser ut enligt matriser nedan.

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI_v}{C_2L^3} & \frac{6EI_v}{C_2L^2} & -\frac{12EI_v}{C_2L^3} & \frac{6EI_v}{C_2L^2} \\ \frac{6EI_v}{C_2L^2} & \frac{4EI_v}{C_2L} & -\frac{6EI_v}{C_2L^2} & \frac{2EI_v}{C_2L} \\ -\frac{12EI_v}{C_2L^3} & -\frac{6EI_v}{C_2L^2} & \frac{12EI_v}{C_2L^3} & -\frac{6EI_v}{C_2L^2} \\ \frac{6EI_v}{C_2L^2} & \frac{2EI_v}{C_2L} & -\frac{6EI_v}{C_2L^2} & \frac{4EI_v}{C_2L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 156k_{ekv} & 22k_{ekv}L & 54k_{ekv} & -13k_{ekv}L \\ 22k_{ekv}L & 4k_{ekv}L^2 & 13k_{ekv}L & -3k_{ekv}L^2 \\ 54k_{ekv} & 13k_{ekv}L & 156k_{ekv} & -22k_{ekv}L \\ -13k_{ekv}L & -3k_{ekv}L^2 & -22k_{ekv}L & 4k_{ekv}L^2 \end{bmatrix}$$

6.5 FE-modell

Elementet enligt ovan assembleras som vanliga balkelement. Randvillkor tolkas enligt ***Tabell 6.1*** nedan.

Tabell 6.1. *Randvillkor.*

fritt upplagd	ändtvärskott som är oändligt styvt i eget plan och helt vekt transversellt eget plan
fast inspänd	ändtvärskott som är oändligt styvt i alla riktningar

Tvärskott som har begränsad styvhet i sitt eget plan kan modelleras som en diskret vertikal fjäder. Motsvarande gäller tvärskottet som har begränsad styvhet transversellt sitt eget plan och modelleras då som en diskret rotationsfjäder. Tvärskott har vanligtvis stor styvhet i eget plan och betydligt mindre styvhet transversellt eget plan. Detta kan modelleras som om balken är fritt upplagd med en rotationsfjäder, vilken begränsar välvningen.

6.6 Axiella spänningar

Neutrala lagrets läge i vertikalväggen beräknas med nedanstående formel.

$$a = h\frac{1 + 3\frac{h\delta_v}{b\delta_u}}{1 + \frac{\delta_o}{\delta_u}\left(\frac{b_k}{b}\right)^3 + 6\frac{h\delta_v}{b\delta_u}} \quad \text{där}$$

a= cc-avståndet mellan neutrala lagret och farbanan

De axiella spänningarna beräknas med hjälp av formlerna nedan.

$$\sigma_o = \frac{Ma}{I_v} = \frac{C_2 M_0 a}{I_v}$$

$$\sigma_u = \frac{M(a-h)}{I_v} = \frac{C_2 M_0 (a-h)}{I_v}$$

6.7 Hörnmoment

Hörnmomenten är direkt proportionella mot reaktionen hos fjäderbädden enligt nedan.

$$m_o = C_3 k_{ekv} w_v(x)$$

C_3 är en tvärsnittskonstant enligt nedan.

$$C_3 = \frac{b}{2}\left(\frac{1 + 3\frac{h}{b}\left(\frac{\delta_u}{\delta_v}\right)^3}{1 + \left(\frac{\delta_u}{\delta o}\right)^3 + 6\frac{h}{b}\left(\frac{\delta_u}{\delta v}\right)^3} \right)$$

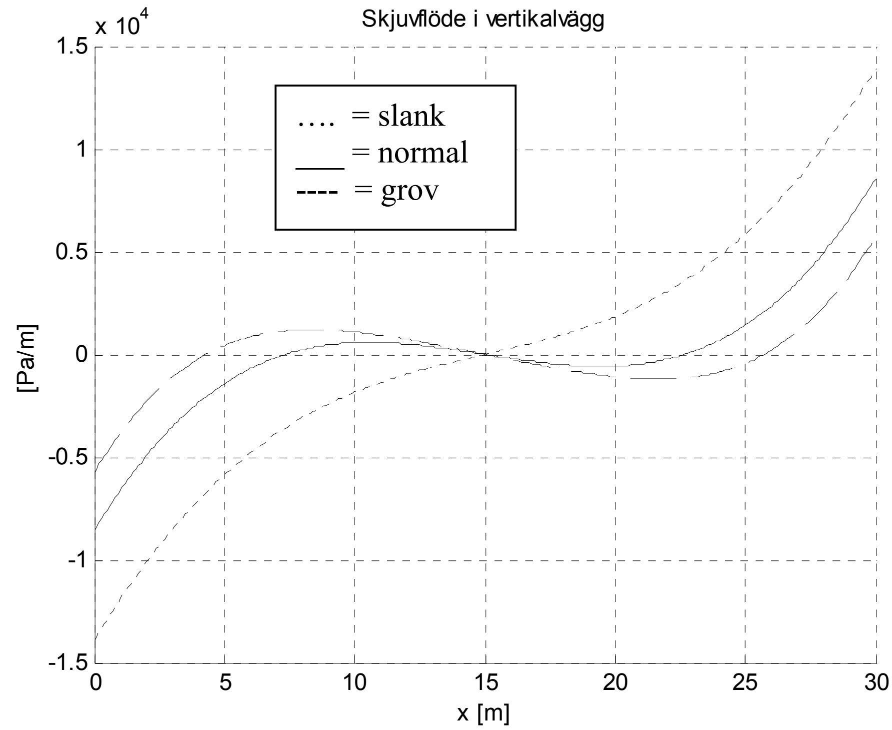
6.8 Beräkningar

Metoden som beskrivs ovan har applicerats på den högra vertikalväggen hos de tre tvärsnitten (slank, normal och grov). Axialspänningar och hörnmoment har bestämts för lastfallen; antisymmetrisk utbreddlast och antisymmetrisk punktlast. Randvillkor som använts är följande; $m_o(0) = m_o(L) = 0$ och $\sigma_o(0) = \sigma_o(L) = 0$, vilka motsvarar fritt upplagd balk. Modellen består av 300 balkelement, vilket medför 903 frihetsgrader. Vid mer komplicerade upplagsförhållanden, till exempel för balkar som är statiskt obestämda, kan man enkelt skapa influensdiagram med modellen. Beräkningarna är gjorda med hjälp av Calfem i MatLab och finns redovisade i **bilaga IV.**

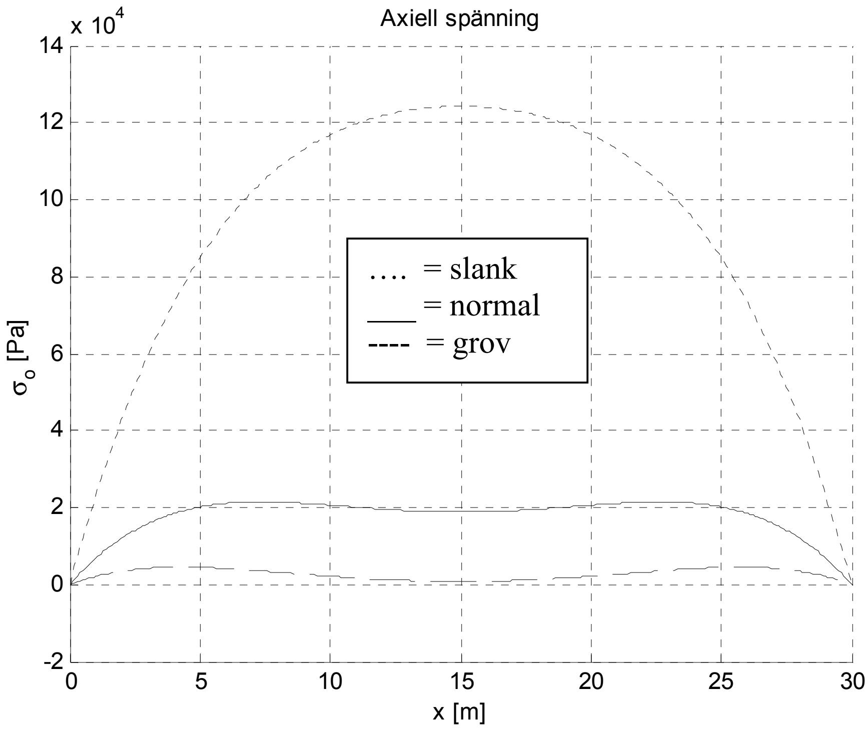
6.9 Resultat

6.9.1 Utbredd antisymmetrisk last

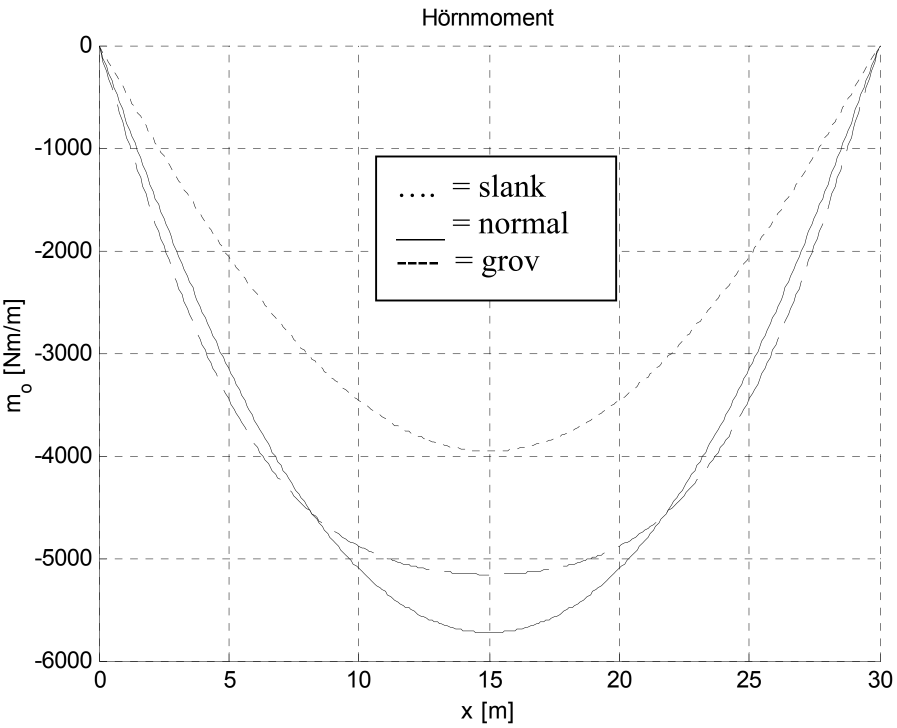
Tvärsnittsdeformerande skjuvflöde, axiella spänningar och hörnmoment redovisas i form av plottar enligt nedan. Redovisade axiella spänningar och hörnmoment uppträder där den högra vertikalväggen ansluter till farbanan.



Figur 6.3 *Tvärsnittsdeformerande skjuvflöde, antisymmetrisk utbredd last, balk- fjäder modell.*

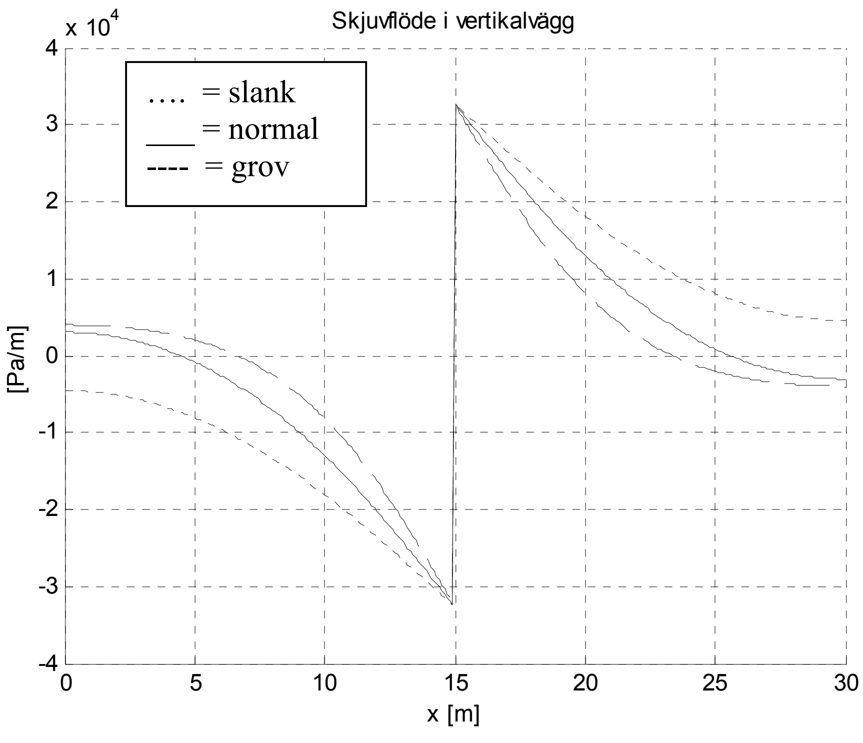


Figur 6.4 *Axiella spänningar, antisymmetrisk utbredd last, balk- fjäder modell.*

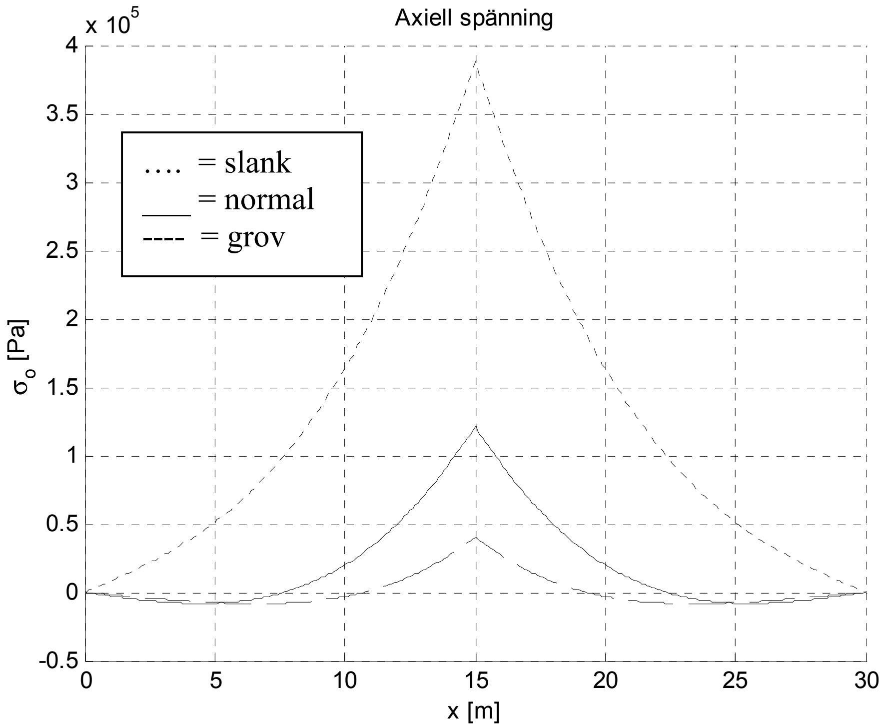


__Figur 6.5__ Hörnmoment, antisymmetrisk utbredd last, balk- fjäder modell.

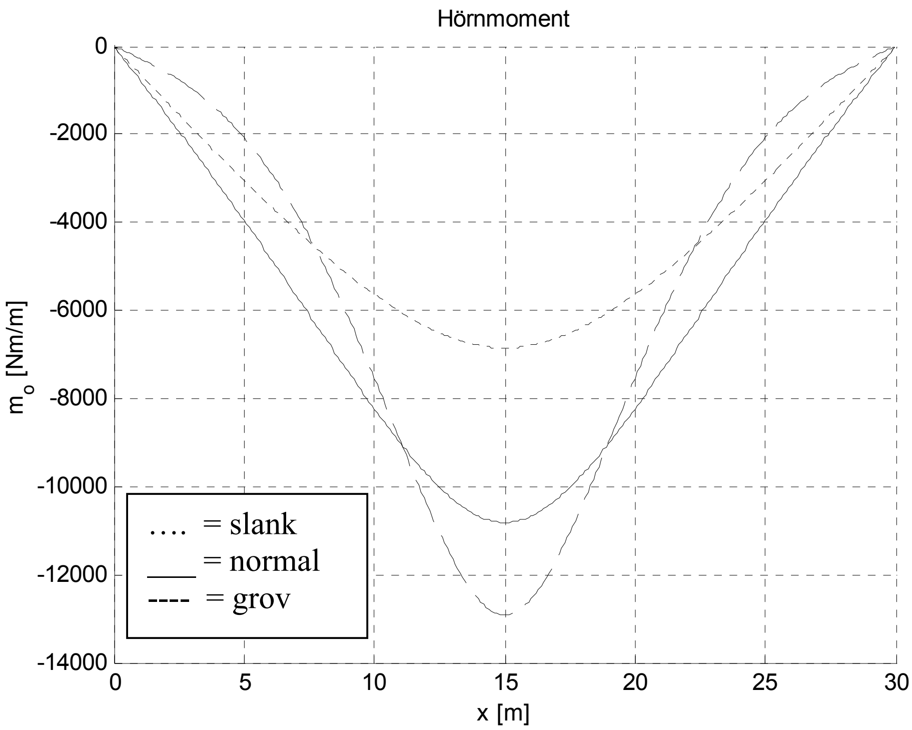
6.9.2 Antisymmetrisk punktlast



__Figur 6.6__ Tvärsnittsdeformerande skjuvflöde, antisymmetrisk punktlast, balk- fjäder modell.



Figur 6.7 *Axiella spänningar, antisymmetrisk punktlast, balk- fjäder modell.*



Figur 6.8 *Hörnmoment, antisymmetrisk punktlast, balk- fjäder modell.*

Resultatet ovan är näst intill identiskt med resultaten från avsnitt **4** och **5.3.**

7 Skalmodell

7.1 Allmänt om skalmodellering

Den enkla finita element modellen i föregående avsnitt tar ej hänsyn till tvärsnittets välvning. Ett sätt att ta hänsyn till effekter av välvning är att göra en skalmodell. En skalmodell kräver mer av programvaran och datorn som används då det ofta blir många frihetsgrader. Programvaran bör vara utrustad med en pre-processor som skapar och på ett grafiskt sätt åskådliggör geometrin. En post-processor bör även vara tillgänglig för att man ska kunna tolka resultatet från beräkningen.

Uppbyggnad av en skalmodell sker i tre dimensioner. Detta medför att modelleringen kan bli något mer komplicerad i jämförelse med till exempel balkelement i två dimensioner.

7.2 Programvara

Programvara som används vid modellering är **LUSAS Version 13.3-2**. Lusas är ett generellt finita element program anpassat för Windows miljö. Vid en finita element analys arbetar programmet i följande tre steg:

- Pre- Processor
- Lösning av ekvationssystem
- Post- Processor

I Pre- Processorn skapas en geometrisk representation (topologi) av modellen samt ansättning av material och geometri- egenskaper, laster, randvillkor med mera. Egenskaperna skrivs till en formaterad datafil (.dat), vilken LUSAS sedan kan behandla för vidare analys.

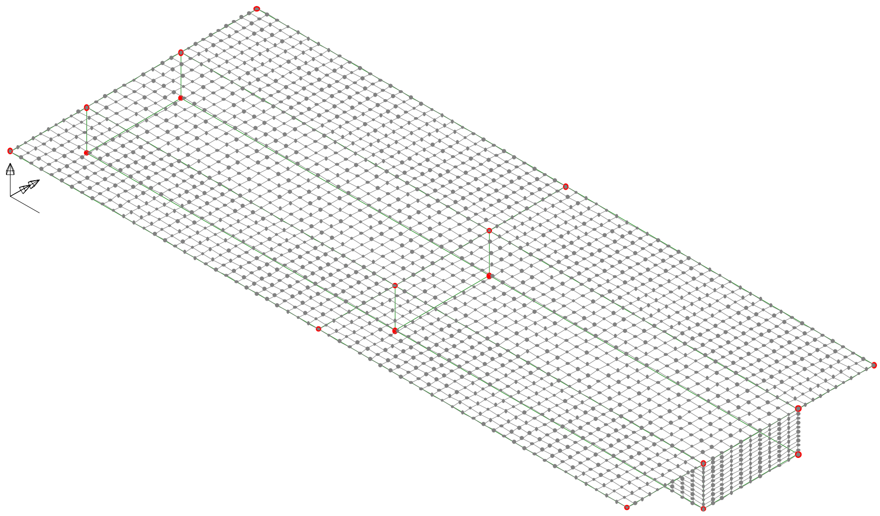
Vid lösning av ekvationssystemet erhålls de obekanta förskjutningarna, ur vilka spänningar, töjningar med mera kan tas fram. Erhållet resultat skrivs till en resultatfil.

I Post- Processorn kan man med olika verktyg redovisa resultatet. Detta kan göras till exempel i form av diagram och deformationsfigurer.

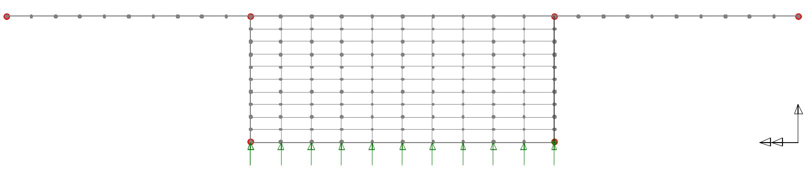
Det finns många insticksprogram till LUSAS varav ”bridge” är ett av dem. Insticksprogrammet bridge medger tillgång till olika bronormer och lastfall.

7.3 Modellering av problem

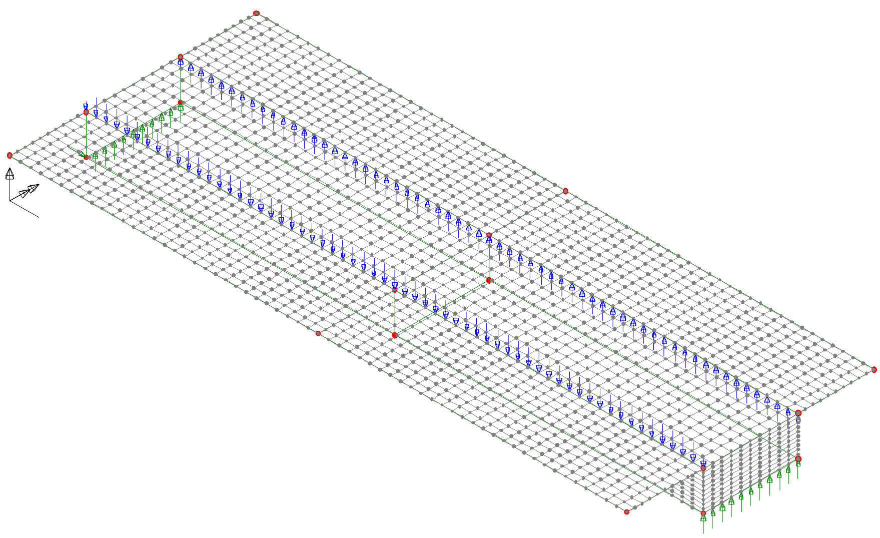
Vid modellering av lådbalken används tunna skalelement, vilka beskrivs i avsnitt **7.5** nedan. Upplagen modelleras enligt ***Figur 7.2*** där anslutning mellan tvärskott och bottenplatta låses i vertikalled och lådbalkens ändar förses med tvärskott. De vridande momenten läggs på som antisymmetriska laster enligt ***Figur 7.3*** och ***Figur 7.4***.



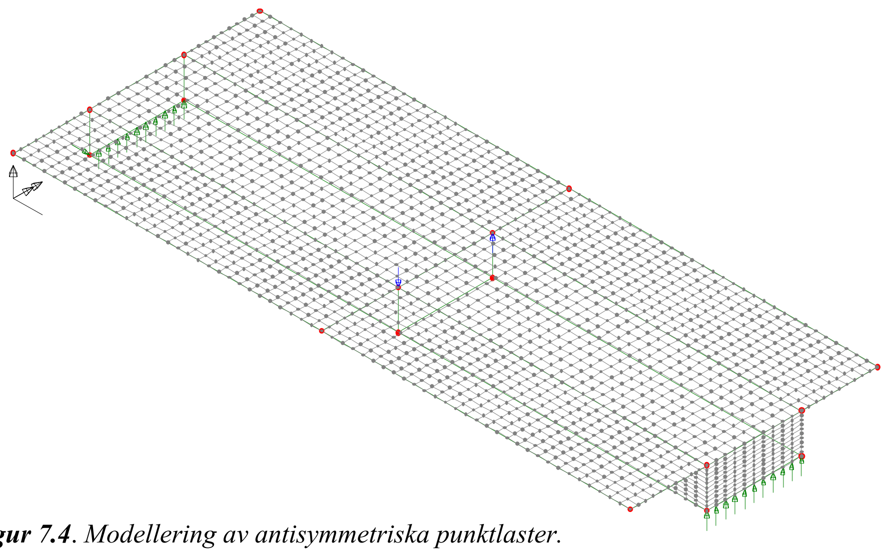
Figur 7.1. *Princip för elementindelning.*



Figur 7.2. *Modellering av upplag (ändtvärskott med gaffellagring).*



Figur 7.3. *Modellering av antisymmetrisk utbredd last.*



Figur 7.4. *Modellering av antisymmetriska punktlaster.*

7.4 Material och töjningsantagande

Materialet är linjärelastiskt isotropt. Eftersom konstruktionen består av tunna skal så är det lämpligt att anta plan spänning. Vid plan spänning är de enda spänningar som kan vara skilda från noll σ_{xx}, σ_{yy} och τ_{xy}, se ***Figur 7.5***. Det bör påpekas att vid plattverkan finns dessutom τ_{xz} och τ_{yz}. I analogi med Bernoulli- Euler balkar har man antagit för plattor, där tjockleken är väsentligt mindre än dess utbredning, att skjuvdeformationerna γ_{xz} och γ_{yz} är noll. τ_{xz} och τ_{yz} måste dock finnas för att uppfylla jämvikten.

Sambandet mellan spänning och töjning enligt linjärtelastiskt isotropt material ges av

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\cdot(1+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

ε_{zz} är i allmänhet skild från noll, men ger ingen spänning i z- led eftersom töjningen är oförhindrad. Genom att invertera materialmatrisen erhålls följande:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \qquad \text{vilket kan skrivas}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

7.5 Tunna skalelement

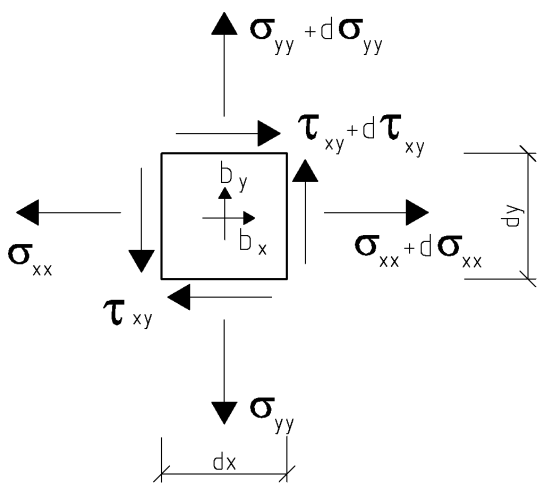
Skalelementen är en kombination av skiv- och plattelement analogt med stång och balkelement. Skiv- och plattverkan är helt okopplade vilket syns i uttrycket nedan:

$$\begin{bmatrix} K_{skiva} & 0 \\ 0 & K_{platta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{skiva} \\ a_{platta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{skiva} \\ f_{platta} \end{bmatrix}$$

Att skalelementen benämns tunna innebär att man försummat skjuvdeformationerna γ_{xz} och γ_{yz},, det vill säga plan spänning.

7.6 Skivelement

Skivelementet bygger på följande differentialekvationer



Figur 7.5. *Jämvikt för infinit litet element.*

Jämvikt horisontalled:

$$d\sigma_{xx} \cdot dy + b_x \cdot dy \cdot dx + d\tau_{xy} \cdot dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dx} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} + b_x = 0$$

Jämvikt vertikalled:

$$\frac{d\sigma_{yy}}{dy} + \frac{d\tau_{xy}}{dx} + b_y = 0$$

b_x= utbredd last per enhetsarea i x-led
b_y= utbredd last per enhetsarea i y-led

7.7 Plattelement

Differentialekvationen för ett plattelement ges av:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{12 \cdot (1-\nu^2)}{E \cdot t^3} \cdot q$$

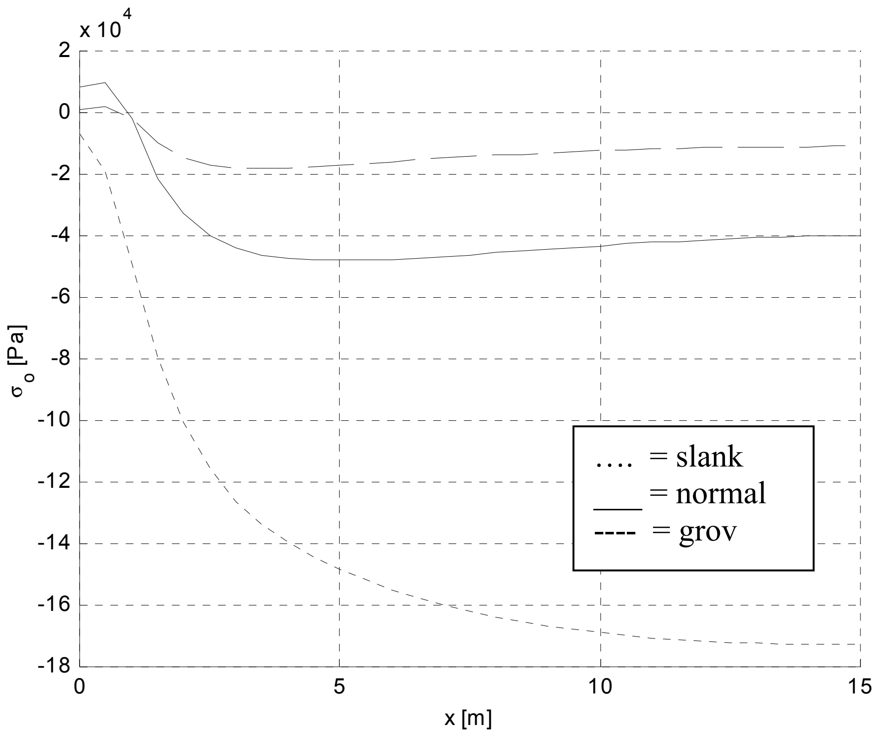
w = utböjning vinkelrätt xy- plan (utböjningarna förutsätts vara små)
t = plattans tjocklek
q = utbredd last/ enhetsarea vinkelrätt xy- plan

7.8 Resultat

Handberäkningsmetoderna bygger på tunnväggig teori, det vill säga man tar ingen hänsyn till att spänningarna varierar över tvärsnittsväggarnas tjocklek. För att kunna jämföra FE-modellen med handberäkningsmodellen redovisas därför spänningar i skalelementens mittplan. Detta innebär att det kan uppträda större spänningar vid skalelementens ytor än vad som redovisas nedan.

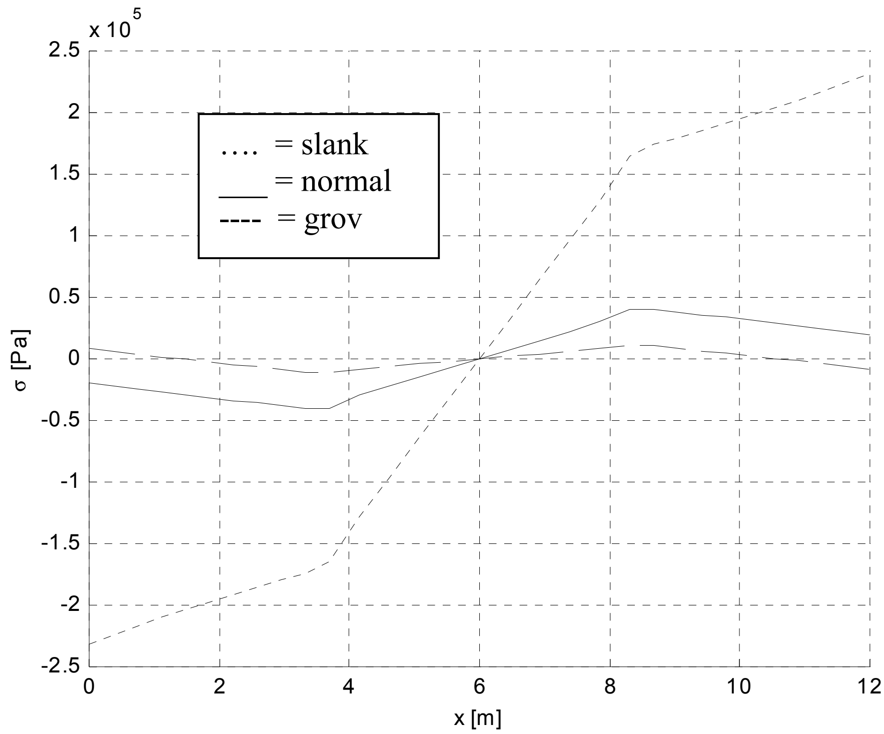
7.8.1 Utbredda antisymmetriska laster

Axiella spänningen i hörnet där vertikalvägg ansluter till farbanan mellan x = 0 till x = L/2 på grund av utbrett vridmoment för de olika tvärsnitten ges i ***Figur 7.6*** nedan.

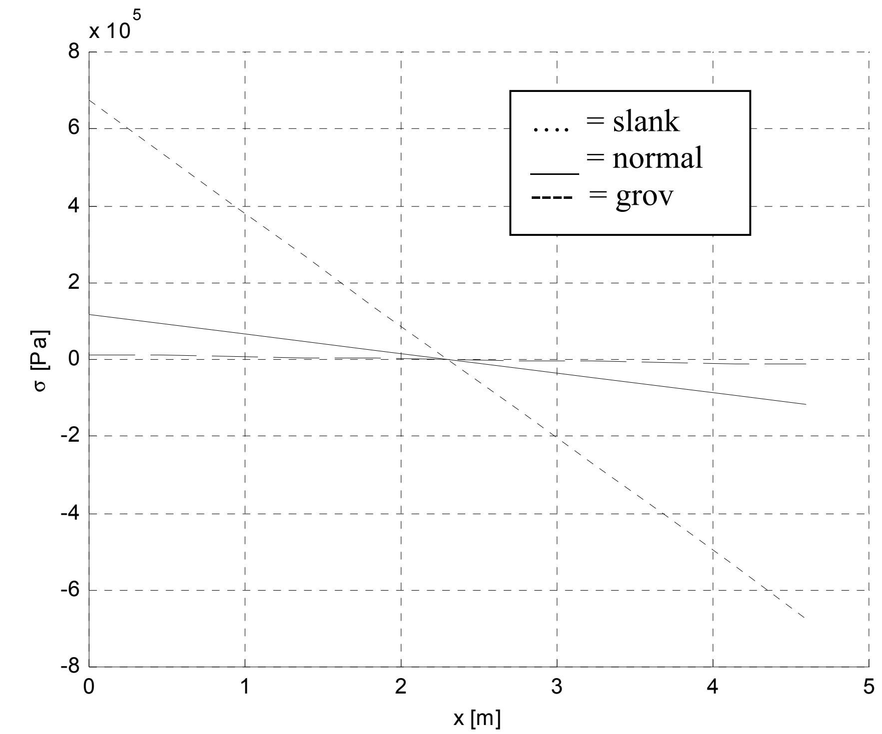


Figur 7.6. *Axiella spänningar längs lådbalk (0<x<L/2), utbredda antisymmetriska laster.*

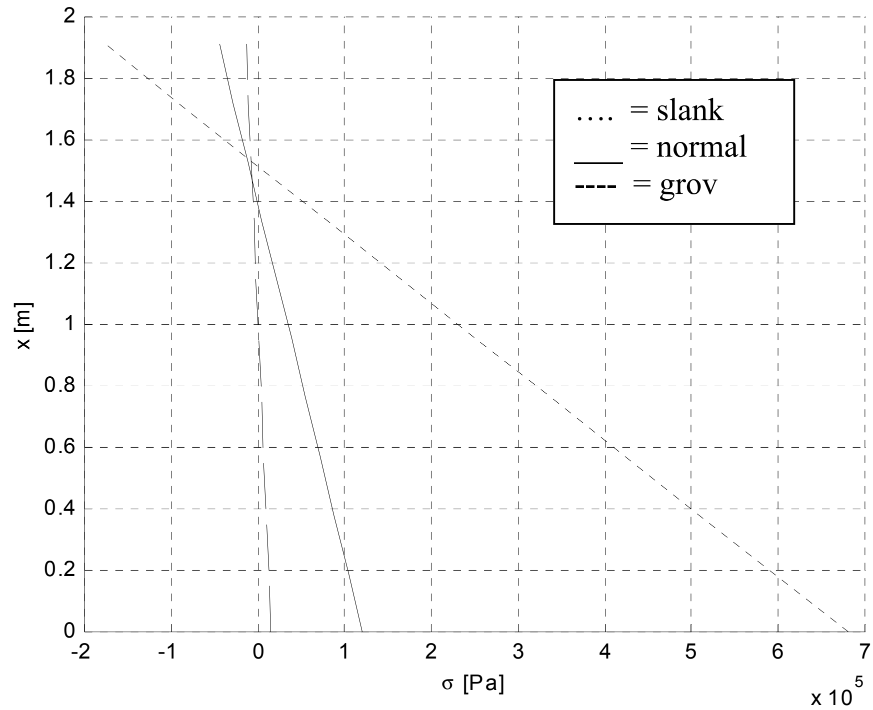
Axiella spänningen över tvärsnittets olika delar vid x = L/2 ges av ***Figur 7.7***, ***Figur 7.8*** och ***Figur 7.9*** nedan.



Figur 7.7. *Axiella spänningsfördelningen i överplatta, utredda antisymmetriska laster.*

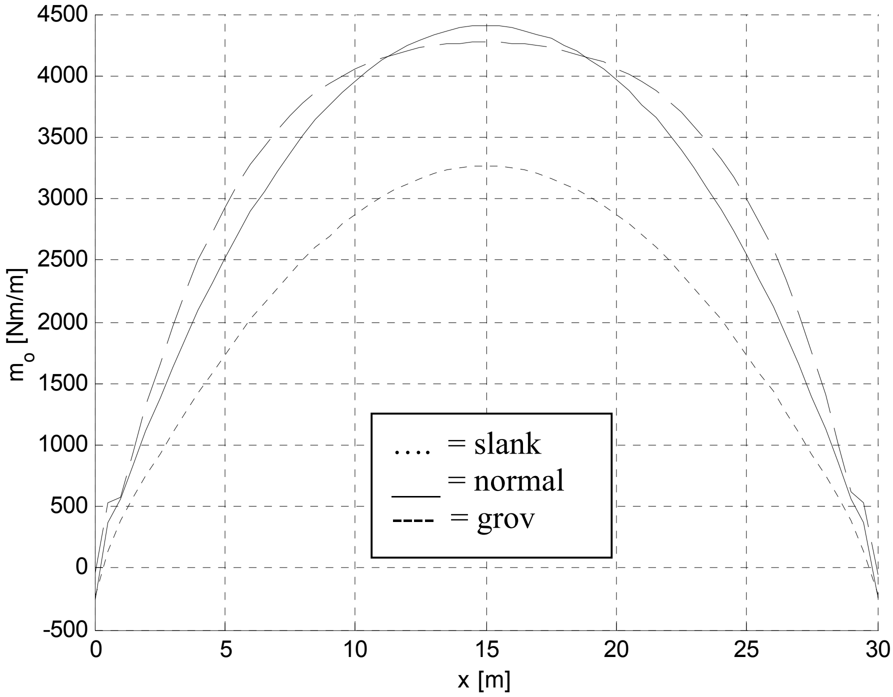


Figur 7.8. *Axiella spänningsfördelningen i underplatta, utbredda antisymmetriska laster.*



***Figur 7.9**. Axiella spänningsfördelningen i vertikalvägg, utbredda antisymmetriska laster.*

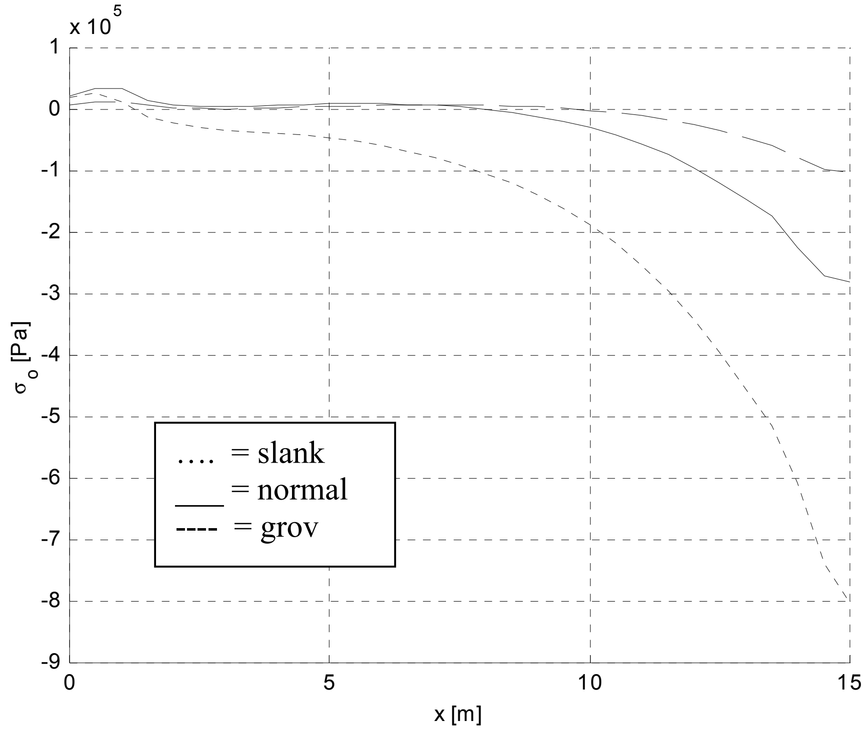
Axilella spänningsfördelningen tvärs farbanan enligt ***Figur 7.7*** verkar vara en superponering av axiella spänningar på grund av Vlasovska välvspänningar samt axiella spänningar orsakade av tvärsnittets deformation, se ***Figur 5.1***. Axiella spänningarna minskar då tvärsnittets slankhet minskar vilket beror på att andelen Saint Vernanskt vridmoment ökar. Man kan även se att dominansen av axiella spänningar på grund av tvärsnittsdeformation minskar då tvärsnittets slankhet minskar. Denna effekt kan även fås genom att förstärka hörnen genom till exempel mer armering eller votning.



Figur 7.10. *Hörnmoment, m_o, utbredda antisymmetriska laster.*

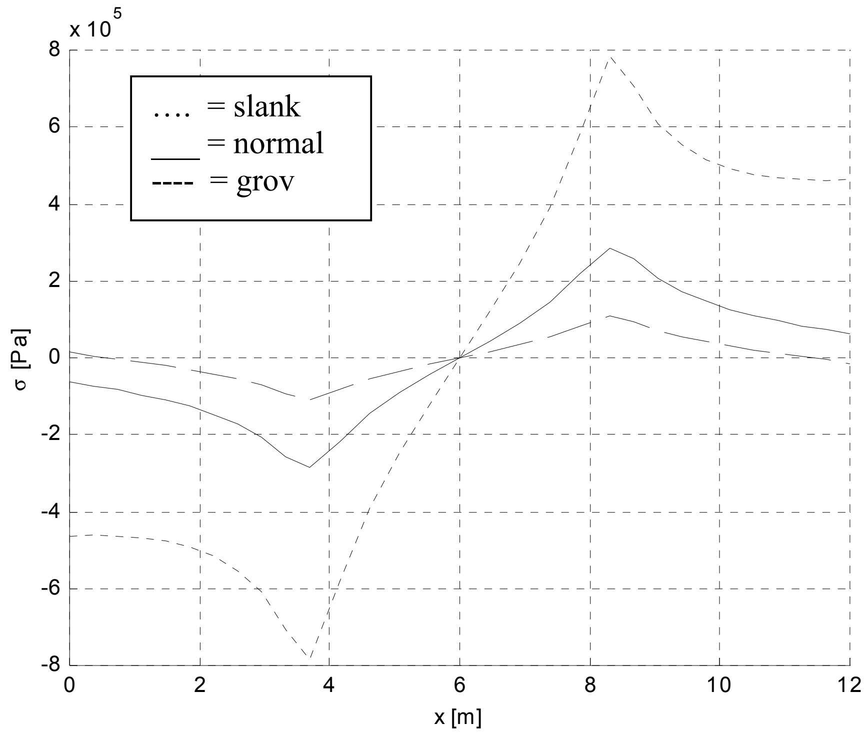
7.8.2 Antisymmetriska punktlaster

Axiella spänningen i hörnet där vertikalvägg ansluter till farbanan mellan x = 0 till x = L/2 på grund av punktvridmoment för de olika tvärsnitten ges i ***Figur 7.11*** nedan.

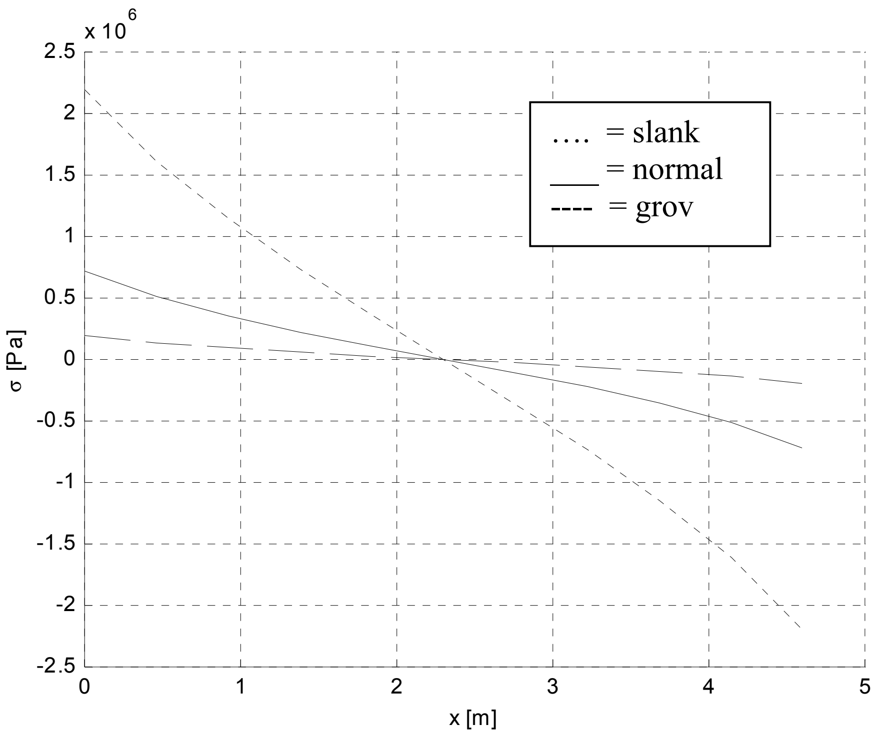


Figur 7.11. *Axiell spänningsfördelning längs lådbalken ($0<x<L/2$), antisymmetriska punktlaster.*

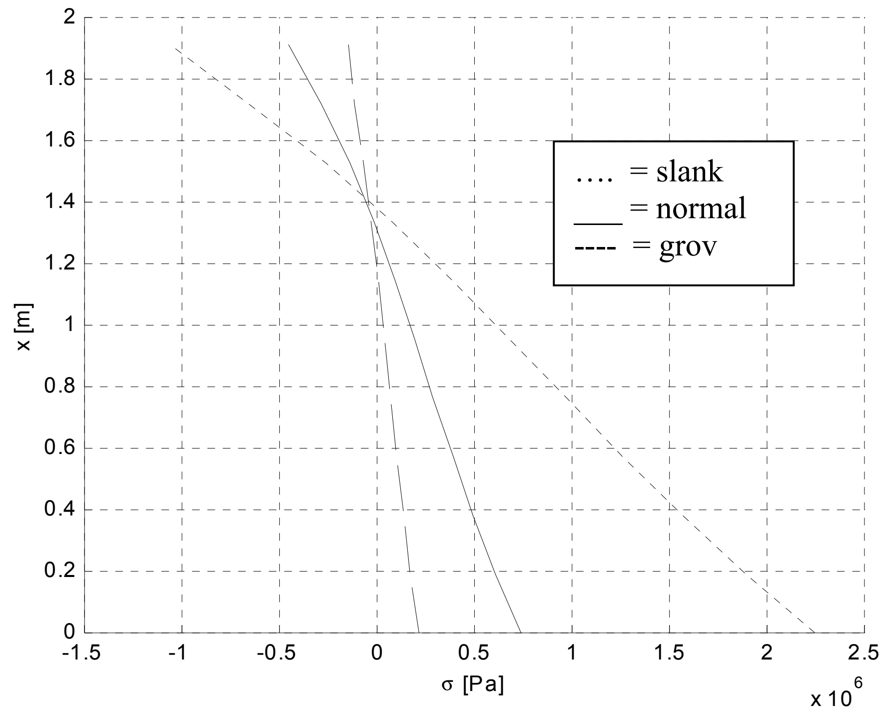
Axiella spänningsfördelningen över tvärsnittets olika delar ges av ***Figur 7.12***, ***Figur 7.13*** och ***Figur 7.14*** nedan.



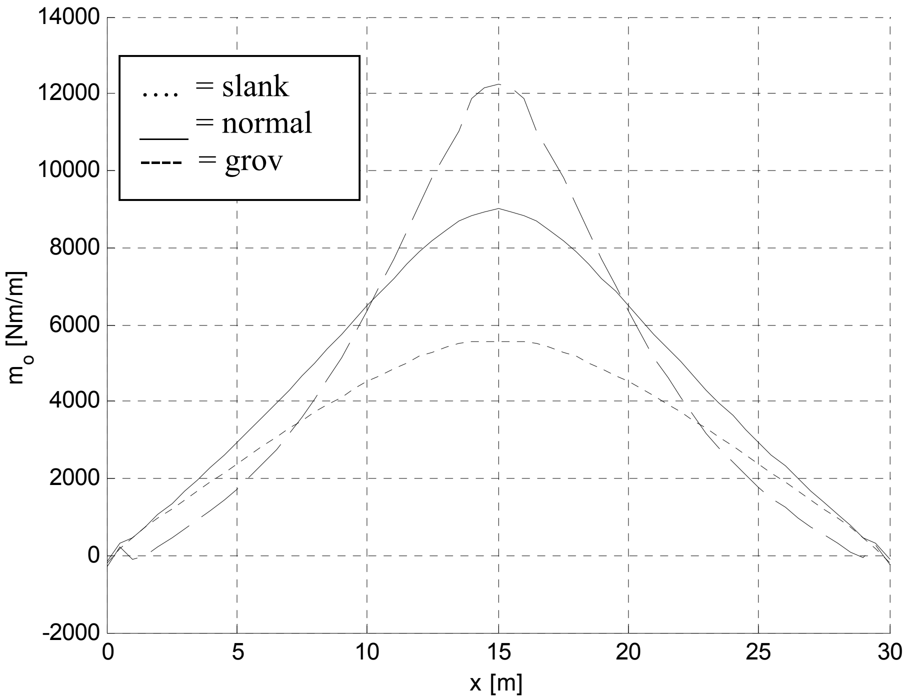
Figur 7.12. *Axiella spänningsfördelningen i överplatta, antisymmetriska punktlaster.*



Figur 7.13. *Axiella spänningsfördelningen i underplatta, antisymmetriska punktlaster.*



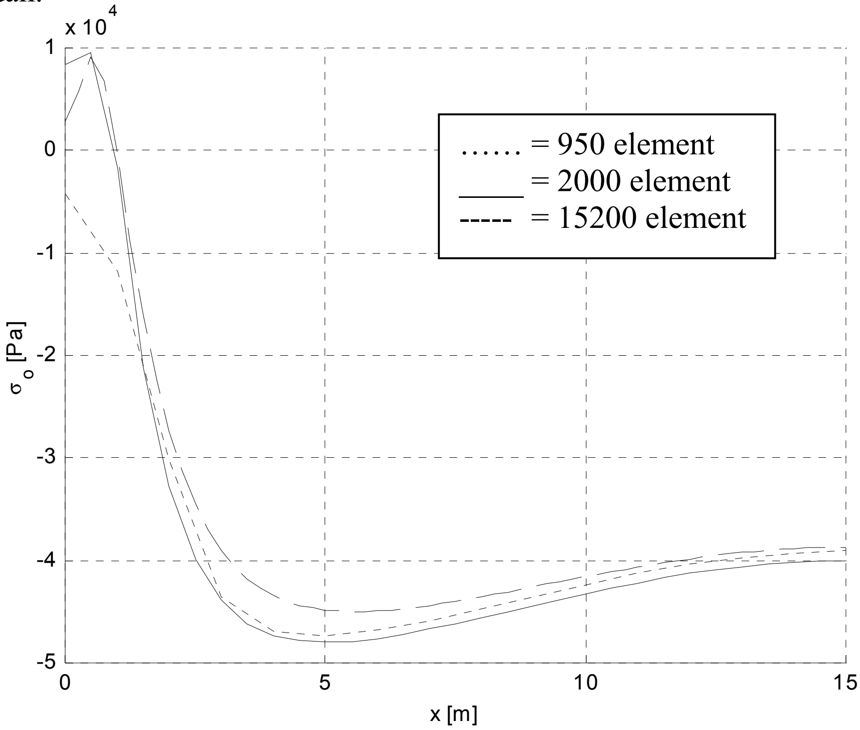
Figur 7.14. *Axiella spänningsfördelningen i vertikalvägg, antisymmetriska punktlaster.*



Figur 7.15. *Hörnmoment, m_o, antisymmetriska punktlaster.*

7.9 Elementindelning

För de flesta finita element beräkningar gäller att resultatets noggrannhet ökar vid finare elementindelning. För att kontrollera att tillräckligt fin elementindelning använts vid beräkningarna ovan, utförs beräkningar dels med färre och dels med fler element för fallet jämt utbredd antisymmetrisk last. Resultatet redovisas i ***Figur 7.16*** nedan.



Figur 7.16. *Skillnader i axiell spänning vid olika elementindelning.*

Som figuren visar föreligger inga stora skillnader i resultatet mellan de olika elementindelningarna.

Skalelementen har 24 frihetsgrader. Det medför att antalet ekvationer som datorn måste lösa är antal element · 24. Detta medför att det går åt väsentligt mer datorkraft vid finare elementindelningar.

8 Sammanställning av metoder

I detta avsnitt diskuteras skillnader mellan de olika beräkningsmetoderna, hur enkelt det är att utföra beräkningar med metoden för olika lastfall samt hur arbetskrävande de är. De analytiska beräkningsmetoderna består av två olika teorier, en för odeformerbart tvärsnitt och en för deformerbart tvärsnitt. Dessa metoder superponeras och jämförs med en tredimensionell finita element modellering uppbyggd av tunna skalelement.

8.1 Odeformerbart tvärsnitt

Med denna metod kan fördelningen mellan Saint Venatskt och Vlasovskt vridmoment beräknas längs balken. Metoden ger bland annat vridningsvinkel, skjuvspännings och välvspänningsfördelning. För att kunna få fram detta krävs att man räknar ut en hel del tvärsnittkonstanter vilket är relativt arbetskrävande. Ofta kan de flesta tvärsnittskonstanter tas fram för öppna tvärsnitt med hjälp av något kommersiellt datorprogram, men eftersom det är ovanligt att man räknar med blandad vridning för tvärsnitt som består av både öppna och slutna delar finns det få program som klarar av att räkna fram tvärsnittskonstanter för dessa. Då tvärsnittskonstanter och sektoriella koordinater är framtagna kan spänningar beräknas med hjälp av tabellfall [Handbok i analys av balkars vridning, Bengt Å Åkesson] för enkla lastfall och upplagsförhållanden. Då man har mer komplicerade lastfall och upplagsförhållanden måste konstanterna till lösningen av differentialekvationen bestämmas med hjälp av lämpliga randvillkor, vilket ofta leder till omfattande beräkningsarbete.

8.2 Deformerbart tvärsnitt

Med metoden för deformerbart tvärsnitt kan hörnmoment och axiella spänningar på grund av tvärsnittets deformation beräknas. För enkla lastfall och upplagsförhållanden kan spänningar och hörnmoment tas fram med hjälp av tabellfall [Vridning och lastfördelning, Tage Pettersson och Håkan Sundquist. Fenomenet kan beskrivas och härledas på en mängd olika sätt men har det gemensamt att den slutliga differentialekvationen är av fjärde ordningen. I denna rapport redovisas tre olika framställningar enligt avsnitt **4**, **5.3** och **6**, varav den tredje löses med hjälp av finita element. De två handberäkningsmetoderna ger samma resultat vilket även gäller den tredje om en tillräckligt fin elementindelning väljs, se ***Tabell 8.1*** - ***Tabell 8.6***. Vid generella lastfall och upplagsförhållanden lämpar sig den tredje metoden mycket väl, dels på grund av att modellen är väldigt enkel och dels på att den inte kräver någon större datakapacitet. Metoden för deformerbart tvärsnitt ger begränsade axiella spänningar medan hörnmomenten kan vara av större betydelse.

8.3 Superponering av metoder i avsnitt 8.1 och 8.2

För ett verkligt tvärsnitt uppträder båda fenomenen ovan och skall därför superponeras. Eftersom tvärsnittsdeformationen påverkar vridningsvinkeln, se avsnitt **5**, kommer de Vlasovska välvspänningarna att vara beroende av tvärsnittets transversella styvhet, vilket leder till komplicerade beräkningar. Vid en jämförelse mellan resultaten av superponering av axiella spänningar, utan hänsyn till kopplingen mellan Vlasovska välvspänningar och tvärsnittets transversella styvhet, och den tredimensionella finita element modellen kan man konstatera att de stämmer relativt bra överens.

8.4 Tredimensionell finita element modell

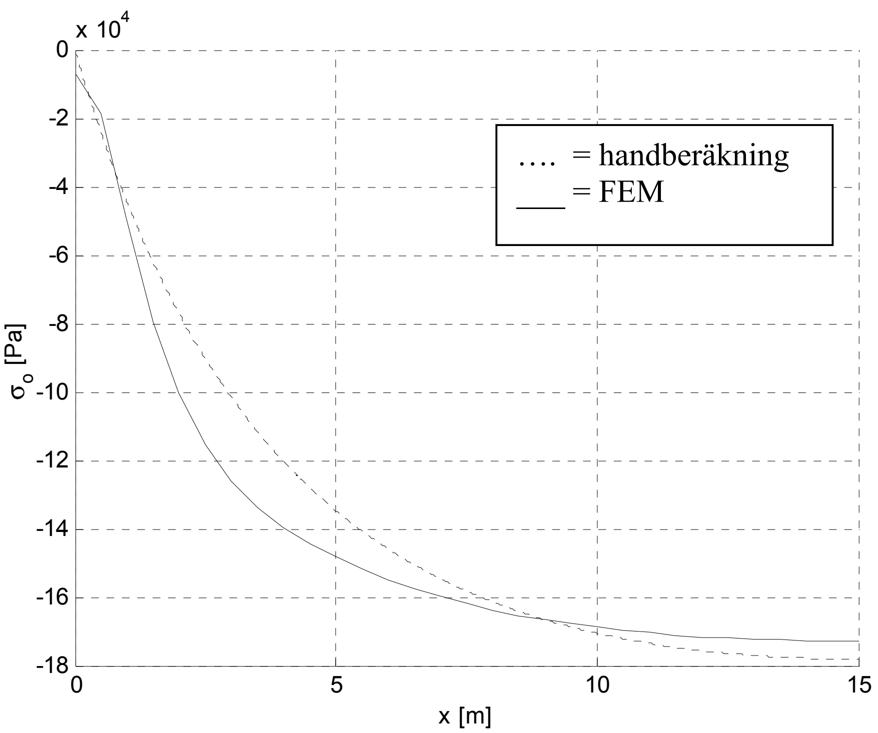
Denna metod är den mest generella var det gäller placering av laster, modellering av upplagsförhållanden samt framtagning av olika påkänningar och deformationer. Trots att modellen är tredimensionell och består av relativt många element modelleras den enkelt i LUSAS. Efter beräkning kan reaktioner, inre krafter och deformationer redovisas numeriskt eller grafiskt.

8.5 Jämförelse mellan handberäkningsmetod och tredimensionell FE-modell

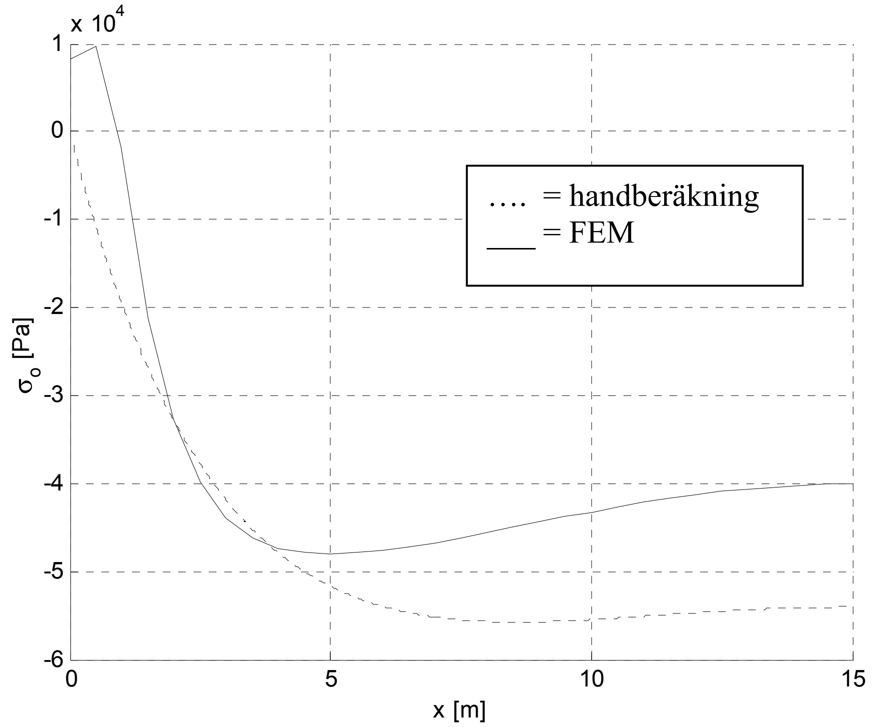
Nedan följer en grafisk representation av skillnader mellan handberäkningsmetoderna och den tredimensionella FE-modellen, både för antisymmetriska punktlaster och för utbredda antisymmetriska laster. Vid jämförelse av axiella spänningar är värdena från handberäkningsmetoderna en superponering av värden från oderformerbart respektive deformerbart tvärsnitt. Vid jämförelse av momenten är det likgiltigt vilken av de deformerade metoderna som används då de ger samma värde. Superponering har ingen inverkan på hörnmomenten.

8.5.1 Utbredda antisymmetriska laster

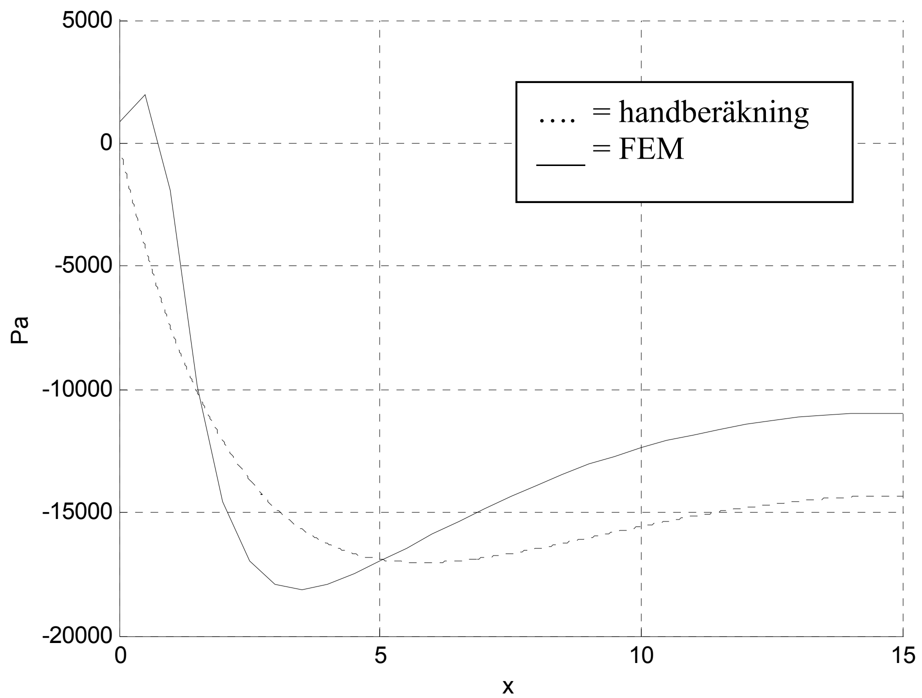
Figur 8.1-Figur 8.3 nedan visar axiella spänningen σ_o (anslutning vertiklavägg / farbana) vid utbredda antisymmetriska laster längs lådbalken för de olika tvärsnitten vid utbredda antisymmetriska laster.



Figur 8.1. *Axiella spänningar på grund av utbredda antisymmetriska laster, finita element modell och handberäkningsmodell, slankt tvärsnitt.*



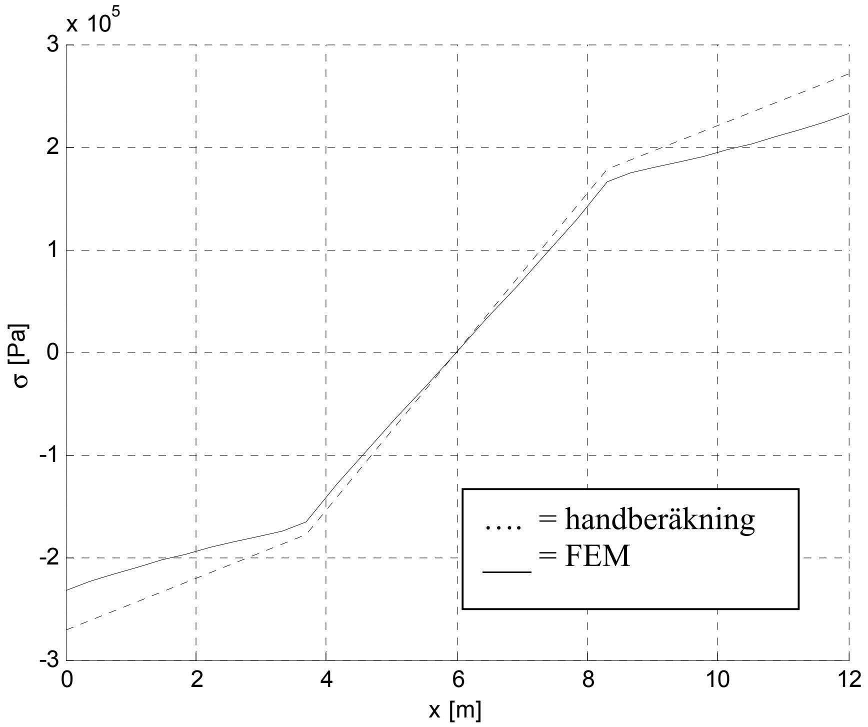
Figur 8.2. Axiella spänningar på grund av utbredda antisymmetriska laster, finita element modell och handberäkningsmodell, normalt tvärsnitt.



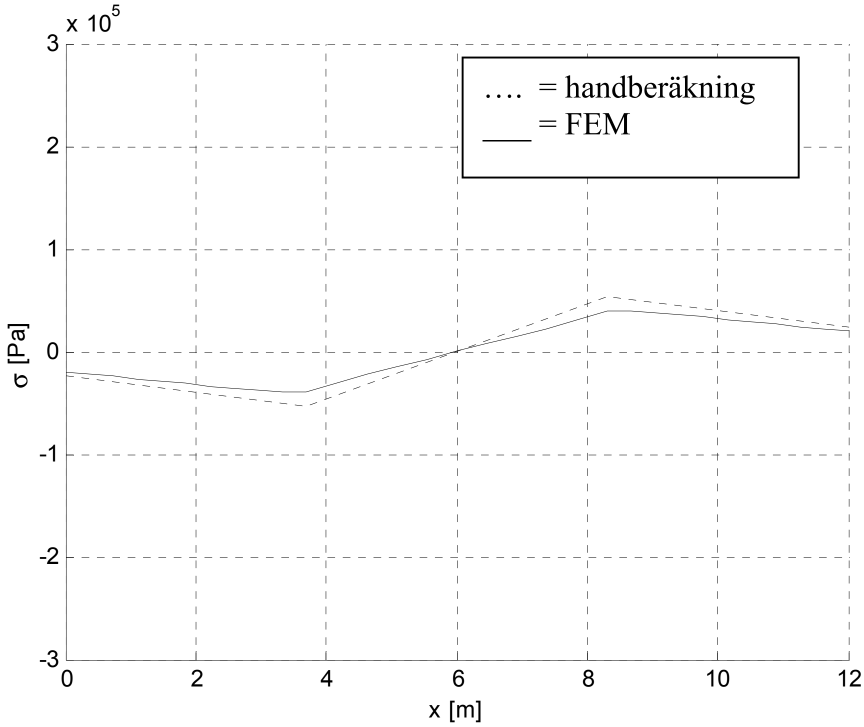
Figur 8.3. Axiella spänningar på grund av utbredda antisymmetriska laster, finita element modell och handberäkningsmodell, grovt tvärsnitt.

Man ser i plottarna att resultaten med FE-modellen skiljer sig något från handberäkningsmetoden vilket kan bero på en mängd faktorer. Handberäkningsmetoden bygger på teori för tunnväggiga tvärsnitt varför handberäkningsmetoden stämmer bäst överens med FE-modellen för det slanka tvärsnittet. En annan faktor är att randvillkoren vid handberäkningsmetoden bygger på att man har ett ändtvärskott som är oändligt styvt i sitt eget plan medan det är oändligt vekt transversellt detta. Ett sådant ändtvärskott finns av naturliga skäl inte i verkligheten. Ändtvärskott i FE-modellen och i verkligheten har styvhet även transversellt sitt eget plan vilket leder till att balkens ände blir delvis välvningsförhindrad. Detta syns i plottarna genom att axiella spänningarna för FE-modellen ej är noll vid x = 0.

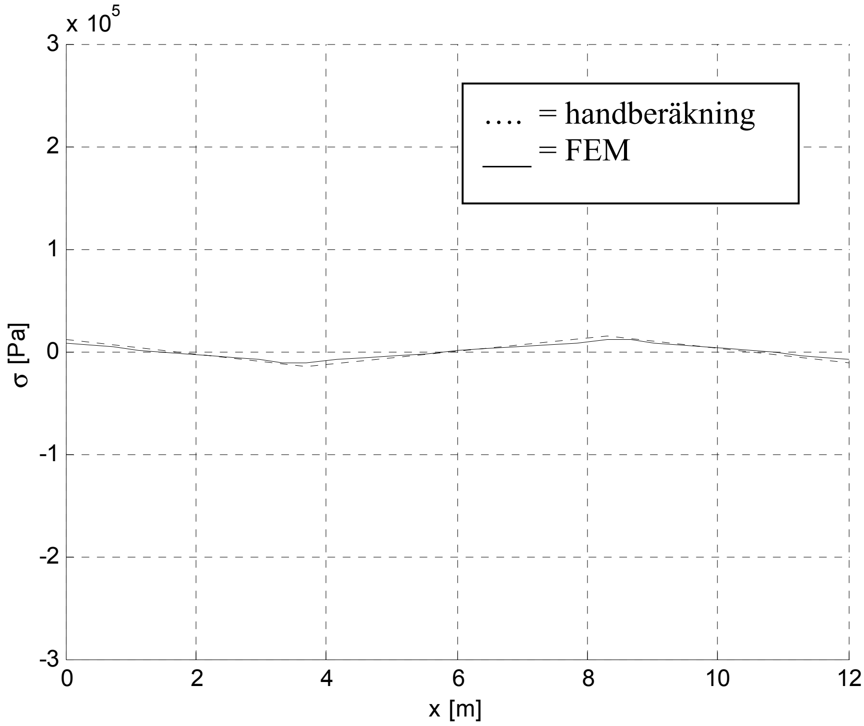
Figur 8.4-Figur 8.9 nedan redovisar axiella spänningen σ tvärs farbana och underplatta för handberäkningsmetod och FE-modell i mittsnittet på balken vid utbredda antisymmetriska laster.



Figur 8.4. *Axiella spänningar tvärs farbana på grund av utbredda antisymmetriska laster, finita element modell och handberäkningsmodell, slankt tvärsnitt.*

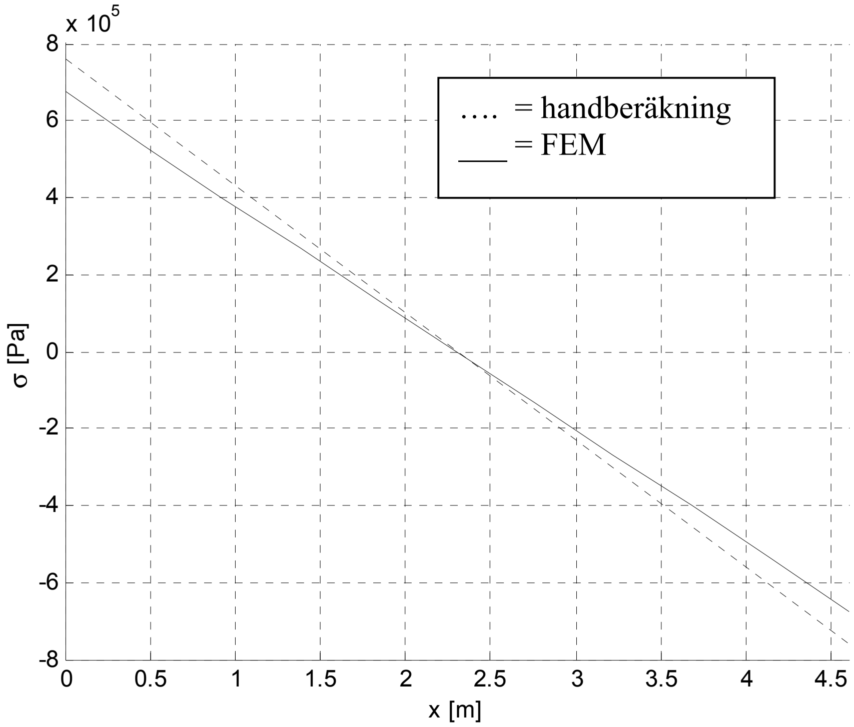


Figur 8.5. *Axiella spänningar tvärs farbana på grund av utbredda antisymmetriska laster, finita element modell och handberäkningsmodell, normalt tvärsnitt.*

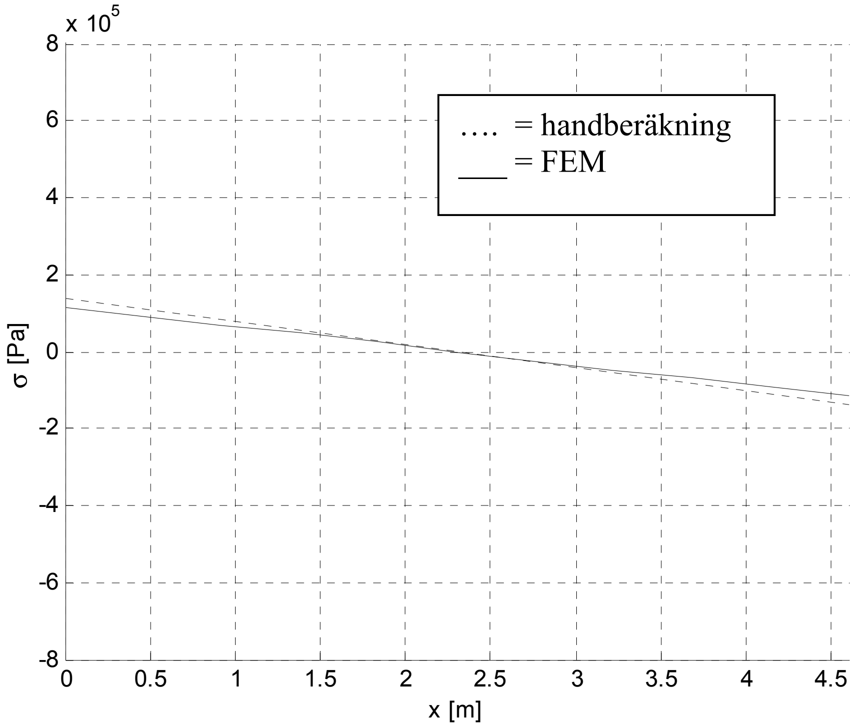


Figur 8.6. *Axiella spänningar tvärs farbana på grund av utbredda antisymmetriska laster, finita element modell och handberäkningsmodell, grovt tvärsnitt.*

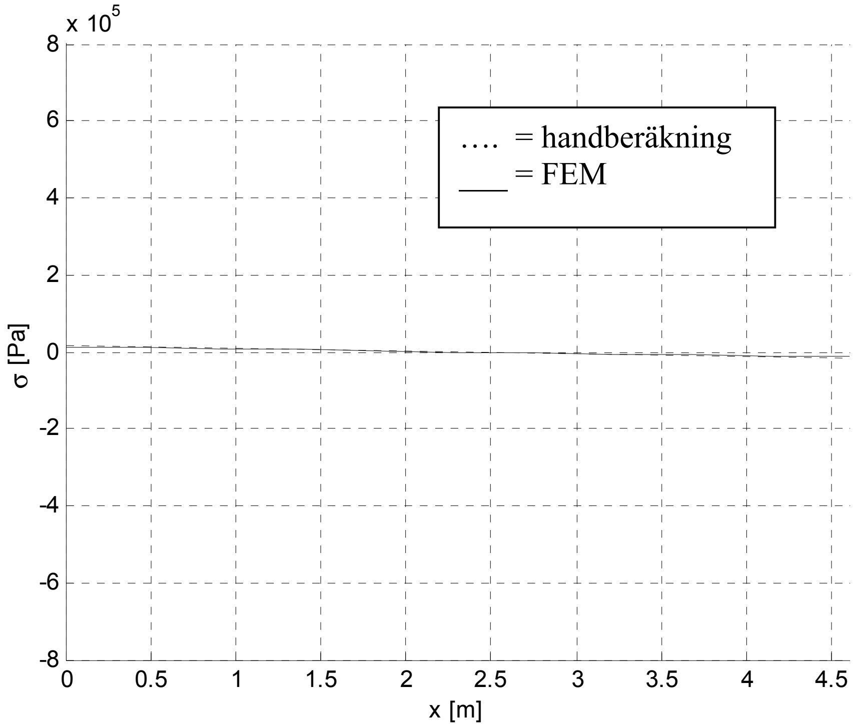
Man ser i ***Figur 8.4 - Figur 8.6*** ovan att dominansen av axiella spänningar på grund av tvärsnittsdeformation minskar då tvärsnittets slankhet minskar, vilket är naturligt då tvärsnittets transversella styvhet ökar.



Figur 8.7. *Axiella spänningar tvärs underplatta på grund av utbredda antisymmetriska laster, finita element modell och handberäkningsmodell, slankt tvärsnitt.*



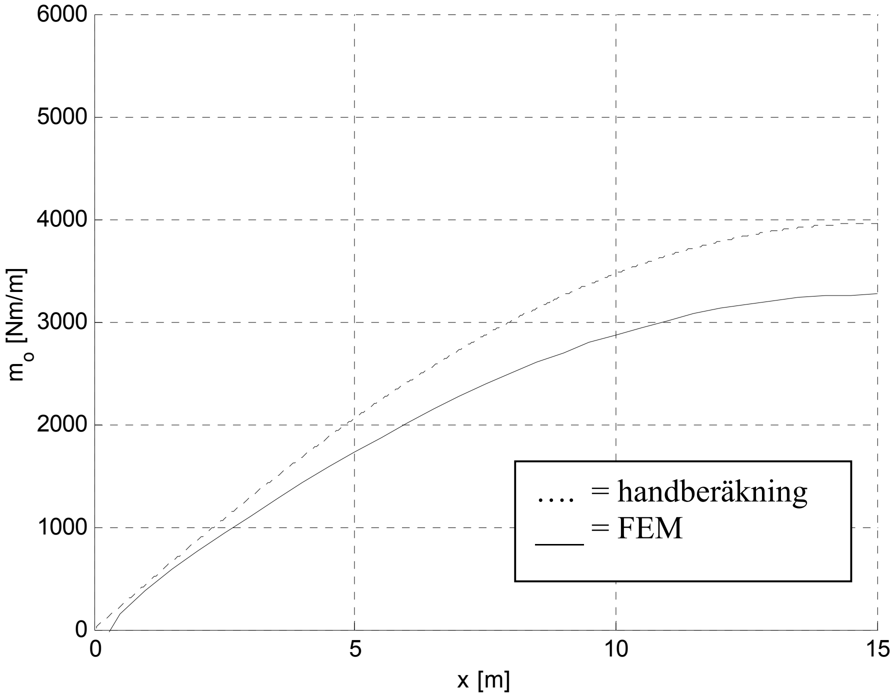
Figur 8.8. *Axiella spänningar tvärs underplatta på grund av utbredda antisymmetriska laster, finita element modell och handberäkningsmodell, normalt tvärsnitt.*



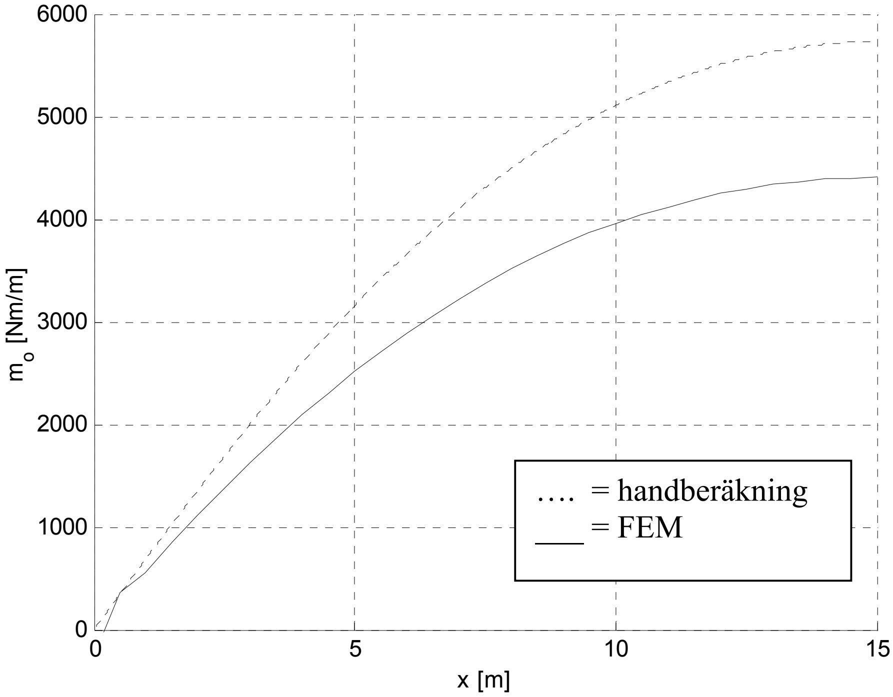
Figur 8.9. *Axiella spänningar tvärs underplatta på grund av utbredda antisymmetriska laster, finita element modell och handberäkningsmodell, grovt tvärsnitt.*

För slankt och normalt tvärsnitt så är de axiella spänningarna betydligt större i underplatta än i farbana. Detta beror på att spänningsfördelningen för deformerat tvärsnitt ger cirka fem gånger större spänning i underplatta än i överplatta. I det grova tvärsnittet dominerar odeformerad spänningsfördelning varpå spänningarna är ungefär lika stora i farbana som i underplatta.

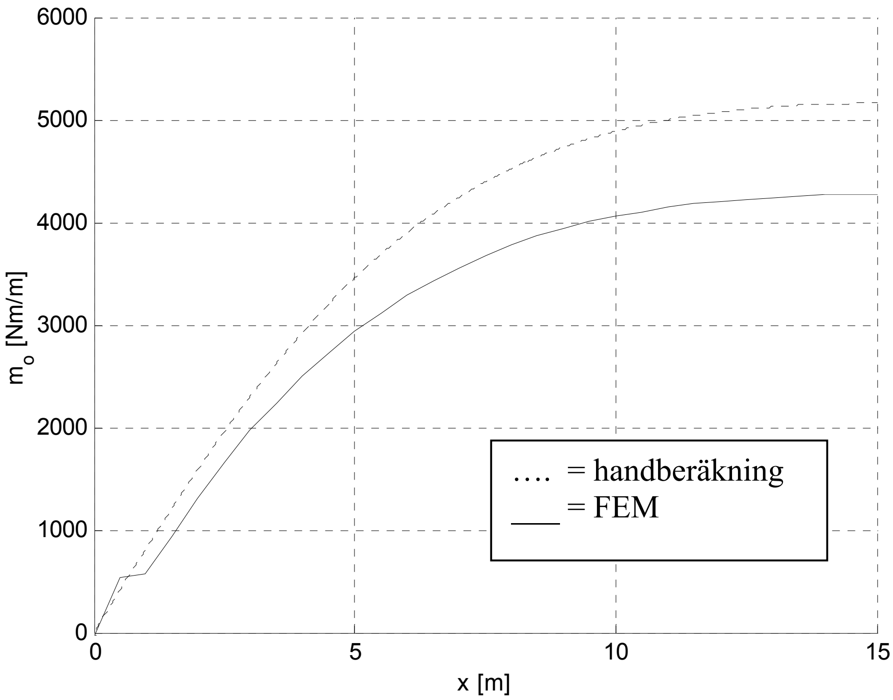
Figur 8.10 - Figur 8.12 nedan visar hörnmomenten m_o (anslutning vertiklavägg / farbana) längs lådbalken för de olika tvärsnitten vid utbredda antisymmetriska laster.



Figur 8.10. *Hörnmoment längs lådbalk på grund av utbredda antisymmetriska laster, finita element modell och handberäkningsmodell, slankt tvärsnitt.*



Figur 8.11. *Hörnmoment längs lådbalk på grund av utbredda antisymmetriska laster, finita element modell och handberäkningsmodell, normalt tvärsnitt.*

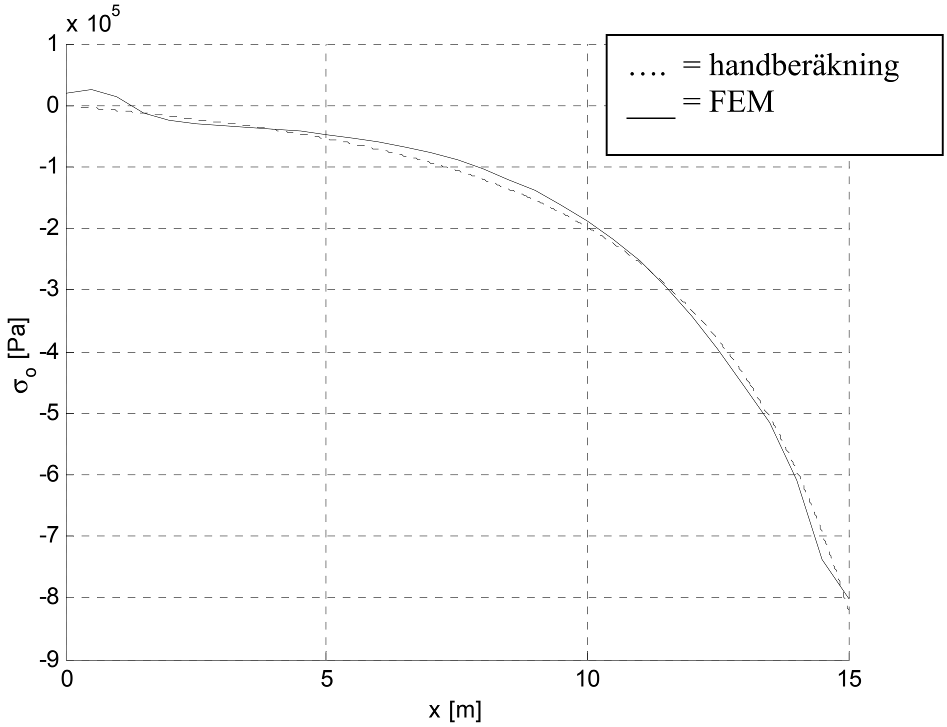


Figur 8.12. *Hörnmoment längs lådbalk på grund av utbredda antisymmetriska laster, finita element modell och handberäkningsmodell, grovt tvärsnitt.*

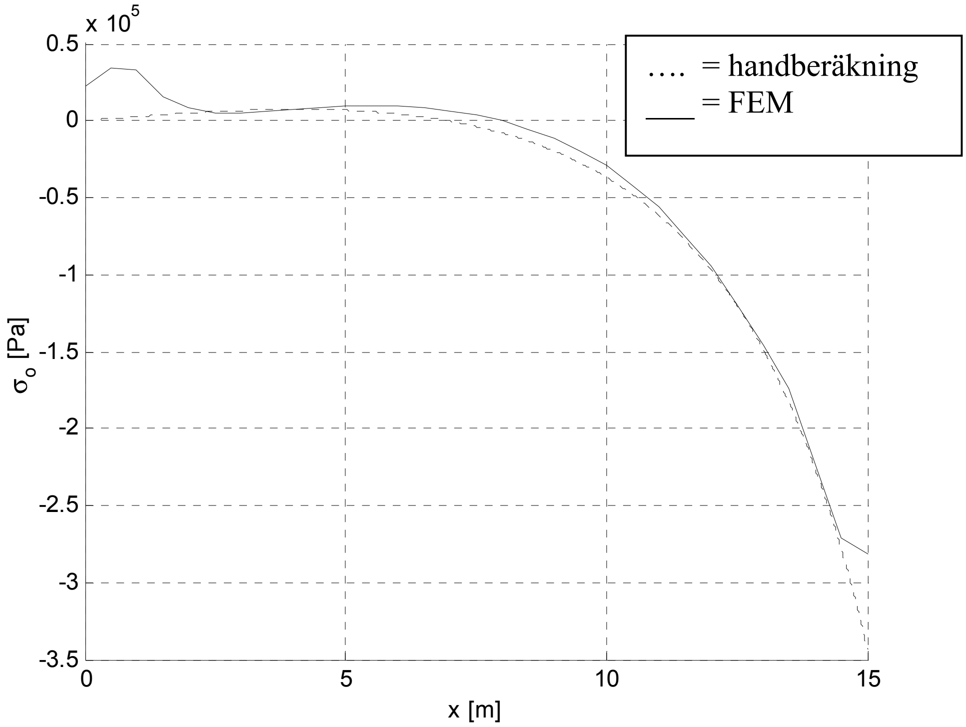
FE-modellens hörnmoment skiljer sig i vissa fall från noll vid upplag vilket förmodligen beror på att ändtvärskottet ej är modellerat oändligt styvt. I samtliga fall överskattas hörnmomenten av handberäkningsmetoden jämfört med FE-modellen.

8.5.2 Antisymmetriska punktlaster

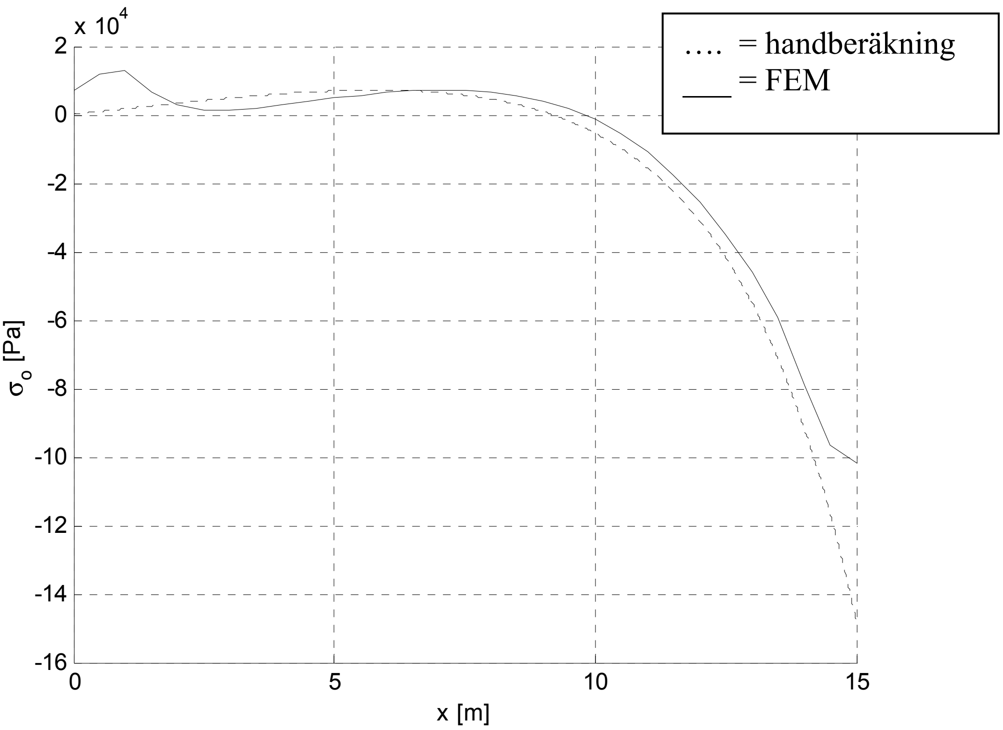
Figur 8.13 - Figur 8.15 nedan visar axiella spänningen σ_o (anslutning vertiklavägg / farbana) vid antisymmetriska punktlaster längs lådbalken för de olika tvärsnitten.



Figur 8.13. *Axiella spänningar på grund av antisymmetriska punktlaster, finita element modell och handberäkningsmodell, slankt tvärsnitt.*



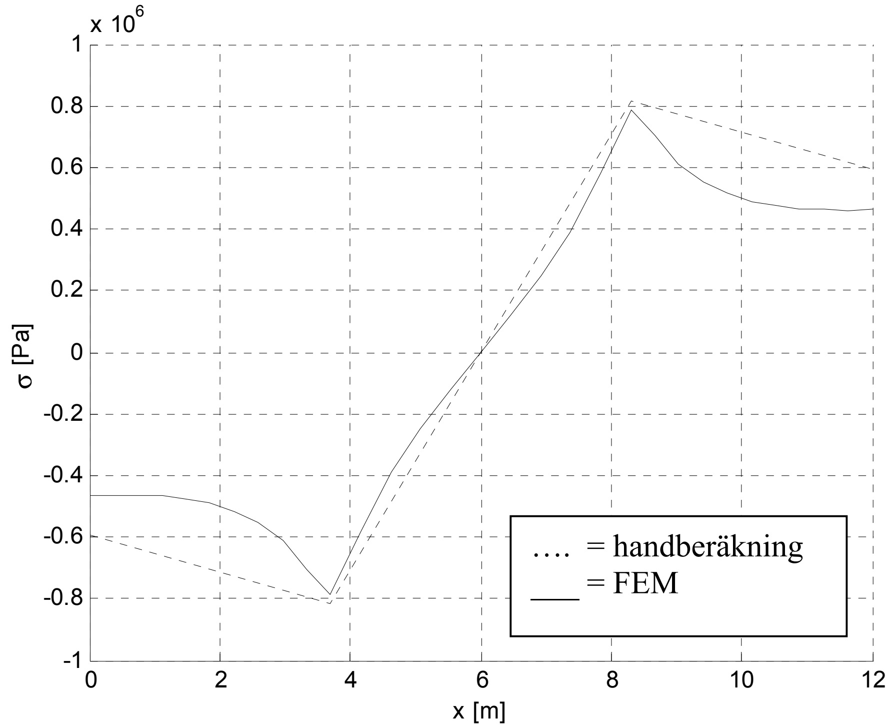
Figur 8.14. *Axiella spänningar på grund av antisymmetriska punktlaster, finita element modell och handberäkningsmodell, normalt tvärsnitt.*



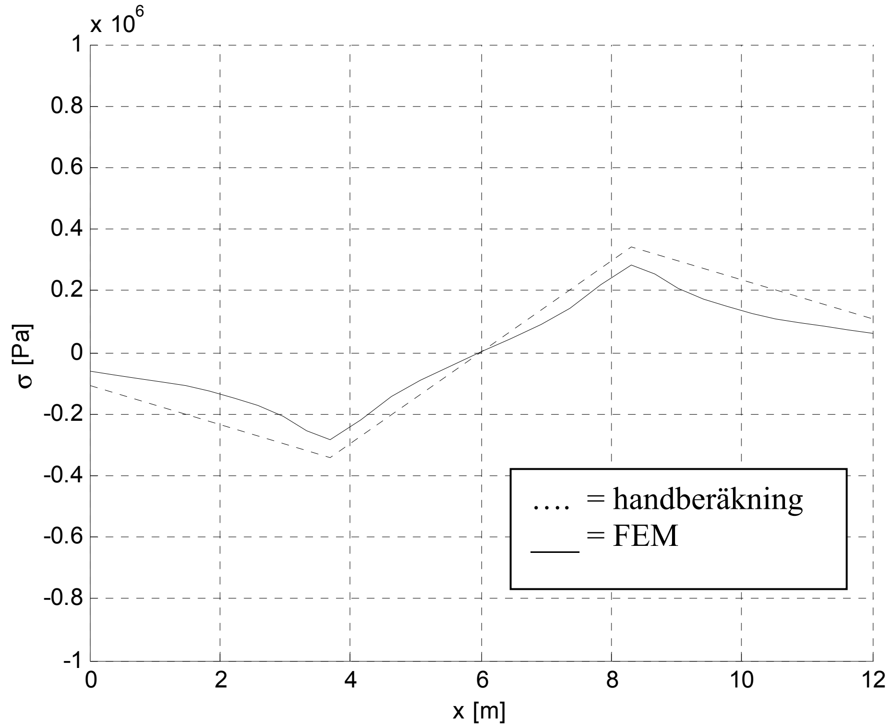
Figur 8.15. *Axiella spänningar på grund av antisymmetriska punktlaster, finita element modell och handberäkningsmodell, grovt tvärsnitt.*

Förutom de lokala effekter hos FE-modellen i närhet av punktlast och ändtvärskott stämmer resultatet från FE-modellen väl överens med resultatet från handberäkningsmodellen.

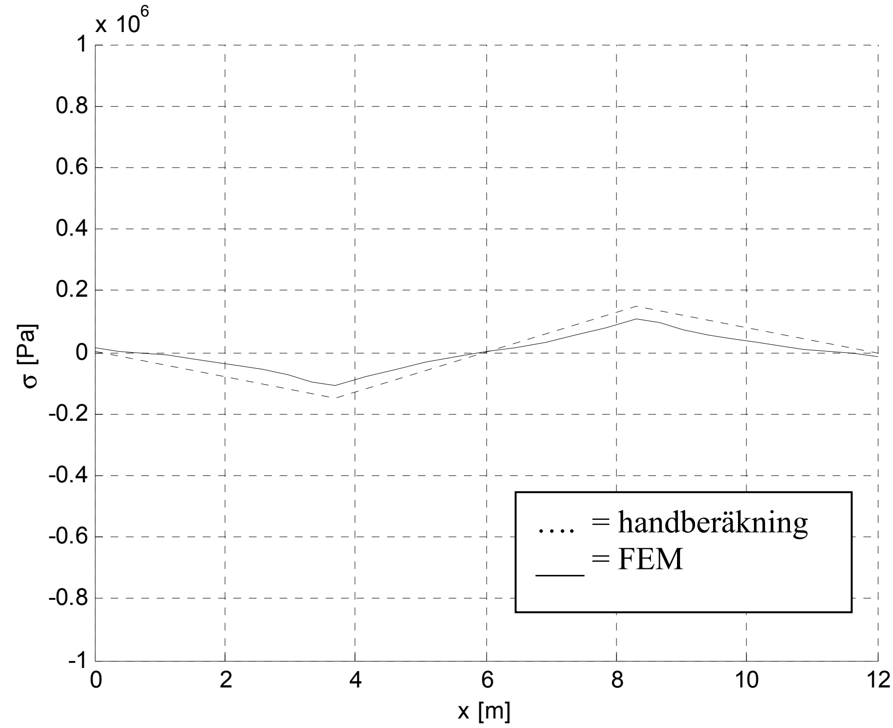
Figur 8.16 - Figur 8.22 nedan redovisar axiella spänningen σ tvärs farbana och underplatta för handberäkningsmetod och FE-modell i mittsnittet på balken vid belastning av antisymmetriska punktlaster.



Figur 8.16. *Axiella spänningar tvärs farbana på grund av antisymmetriska punktlaster, finita element modell och handberäkningsmodell, slankt tvärsnitt.*

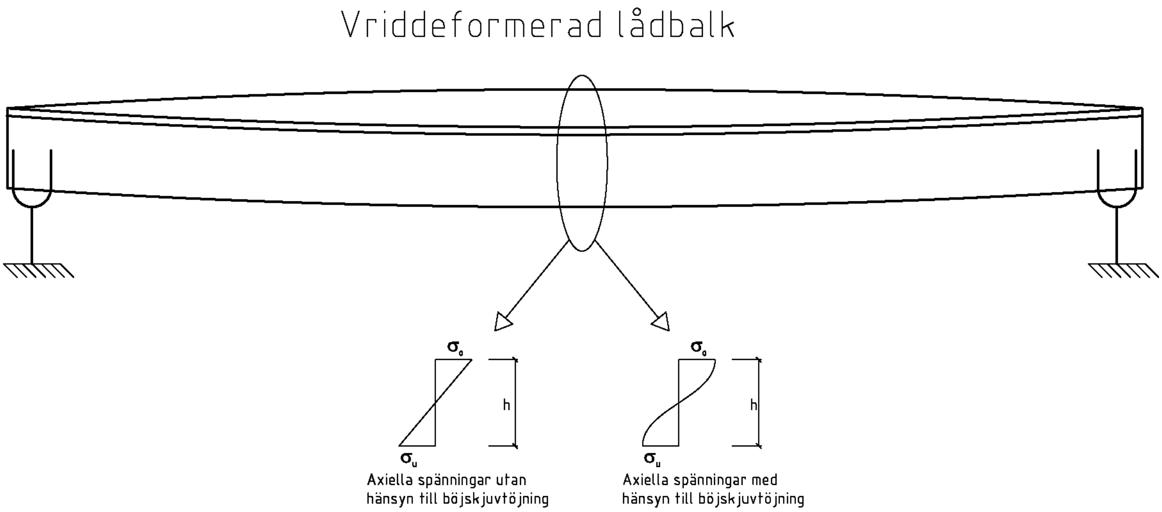


Figur 8.17. *Axiella spänningar tvärs farbana på grund av antisymmetriska punktlaster, finita element modell och handberäkningsmodell, normalt tvärsnitt.*

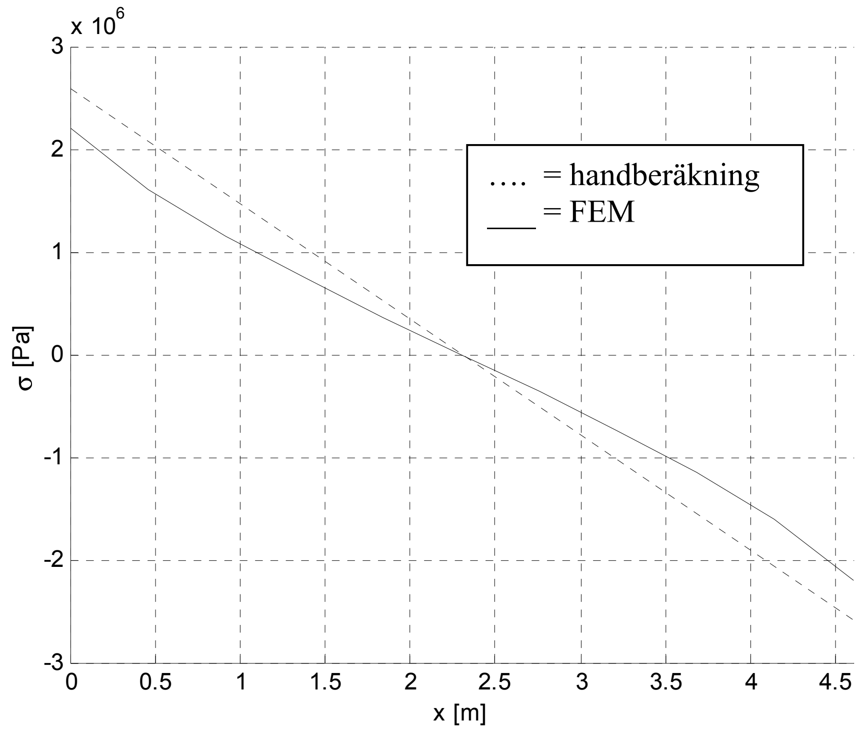


Figur 8.18. *Axiella spänningar tvärs farbana på grund av antisymmetriska punktlaster, finita element modell och handberäkningsmodell, grovt tvärsnitt.*

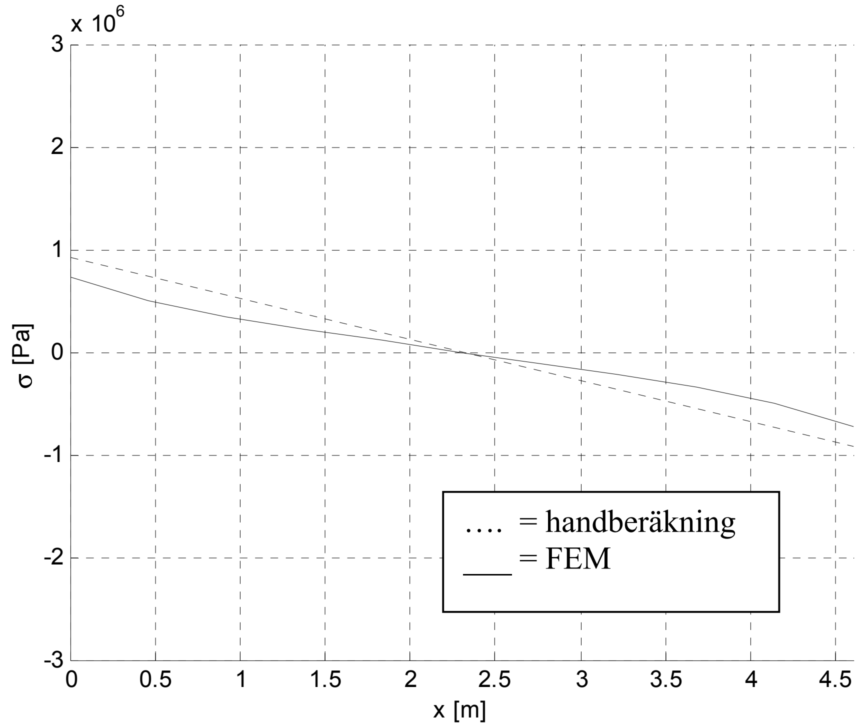
Som synes i plottarna ovan ger FE-modellen ej linjär spänningsfördelning över tvärsnittet. Detta beror förmodligen på skjuvdeformationer i tvärsnittets väggar, vilket handberäkningsmetoden ej tar hänsyn till. Figuren nedan visar axiell spänningsfördelning med och utan hänsyn tagen till skjuvdeformationer.



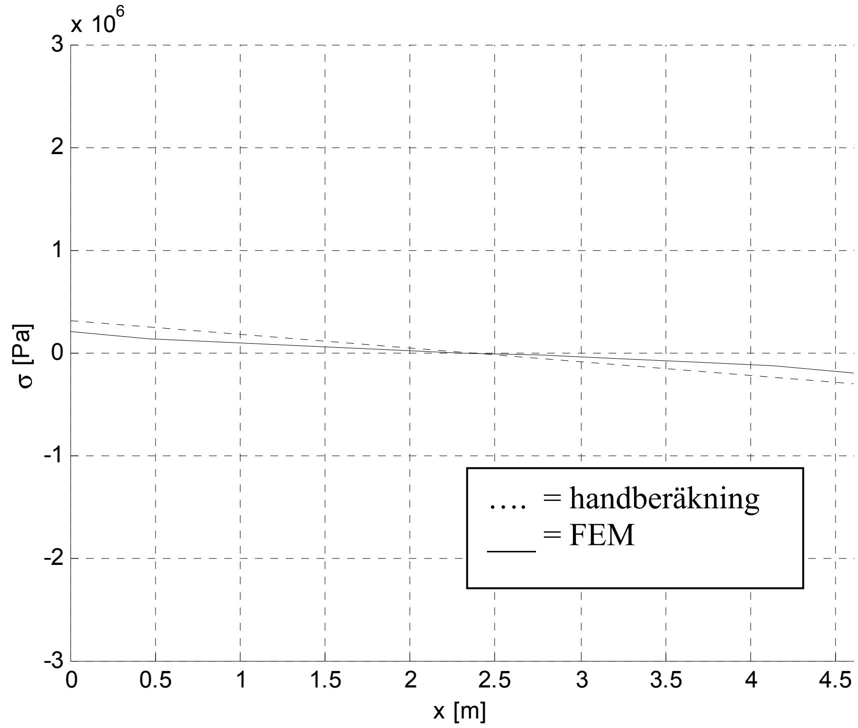
Figur 8.19. *Axiell spänningsfördelning i balk med och utan hänsyn tagen till skjuvdeformationer.*



Figur 8.20. *Axiella spänningar tvärs underplatta på grund av antisymmetriska punktlaster, finita element modell och handberäkningsmodell, slankt tvärsnitt.*



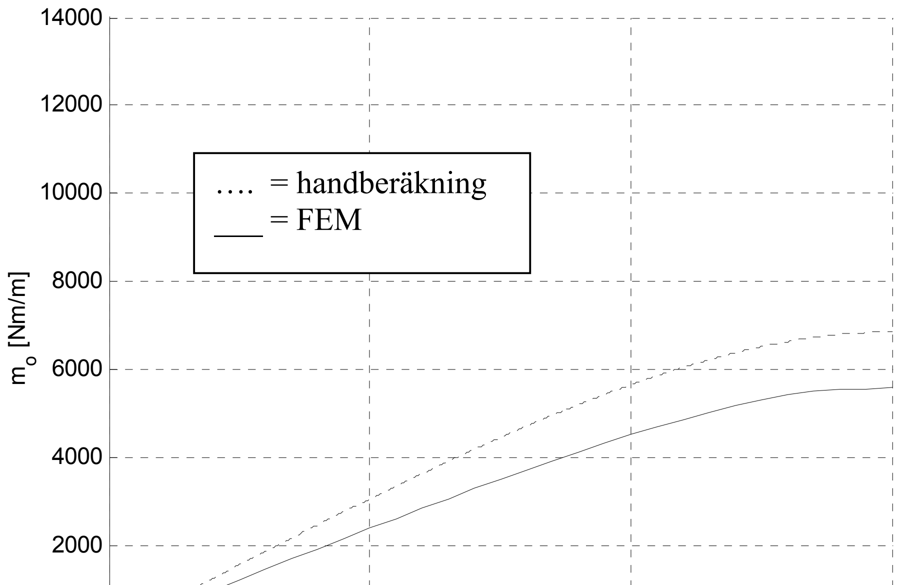
Figur 8.21. *Axiella spänningar tvärs underplatta på grund av antisymmetriska punktlaster, finita element modell och handberäkningsmodell, normalt tvärsnitt.*



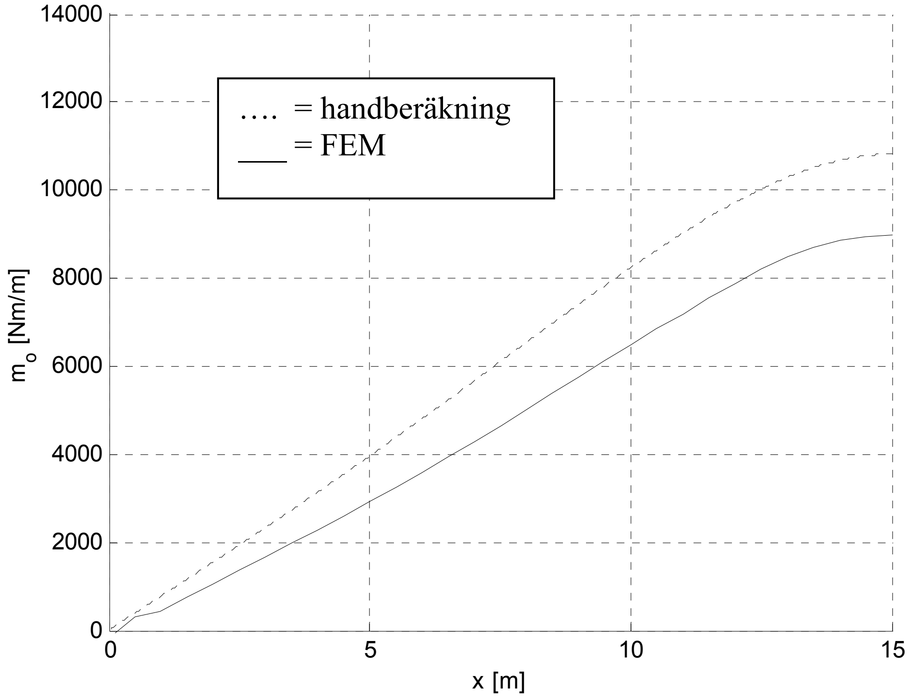
Figur 8.22. *Axiella spänningar tvärs underplatta på grund av antisymmetriska punktlaster, finita element modell och handberäkningsmodell, grovt tvärsnitt.*

Även i plottarna för axiella spänningar tvärs underplatta gör sig skjuvdeformationerna påminda.

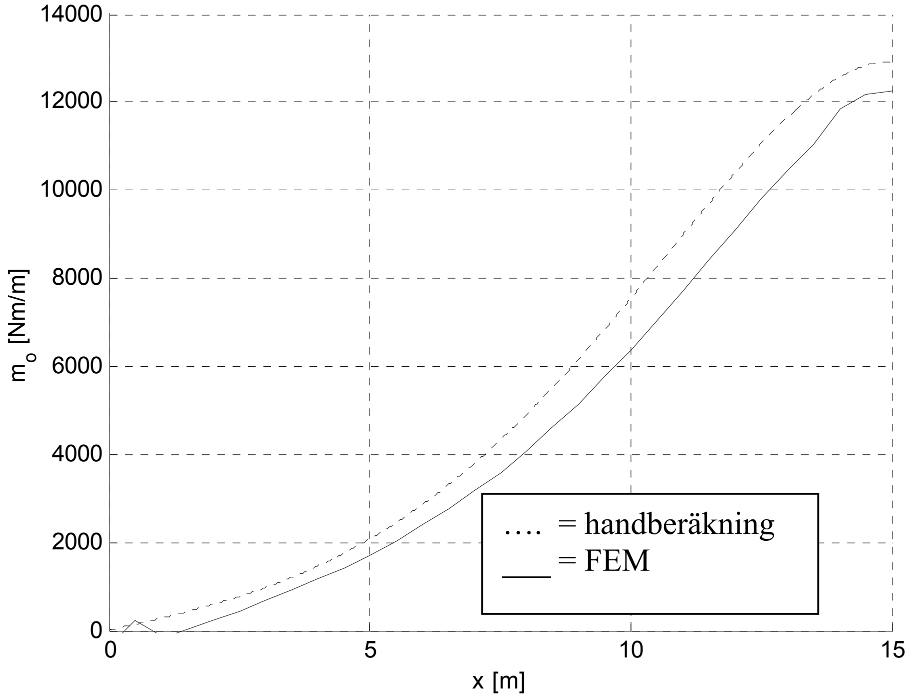
Figur 8.23 - Figur 8.25 nedan visar hörnmomenten m_o (anslutning vertiklavägg / farbana) längs lådbalken för de olika tvärsnitten vid antisymmetriska punktlaster.



Figur 8.23. *Hörnmoment längs lådbalk på grund av antisymmetriska punktlaster, finita element modell och handberäkningsmodell, slankt tvärsnitt.*



Figur 8.24. *Hörnmoment längs lådbalk på grund av antisymmetriska punktlaster, finita element modell och handberäkningsmodell, normalt tvärsnitt.*



Figur 8.25. *Hörnmoment längs lådbalk på grund av antisymmetriska punktlaster, finita element modell och handberäkningsmodell, grovt tvärsnitt.*

Hörnmomenten för de olika metoderna vid antisymmetriska punktlaster stämmer något bättre än vid utbredda antisymmetriska laster, men FE-modellens värden är fortfarande något lägre än de beräknade med handberäkningsmodellen.

I båda lastfallen kan man se att hörmomentet ökar då tvärsnittets slankhet minskar. Armeringsmängden beror dels på hörnmomentens storlek och dels på väggarnas tjocklek, vilket medför att man inte direkt kan avgöra vilket av tvärsnitten som kräver störst armeringsmängd.

8.6 Slutsatser

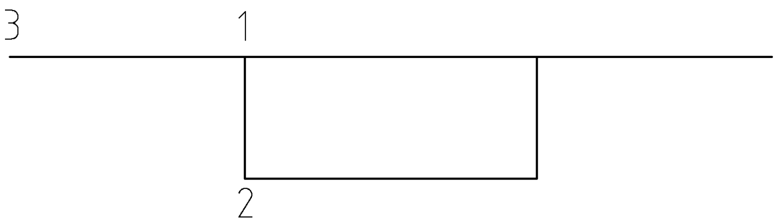
Handberäkningsmetoden enligt avsnitt **5** stämmer relativt väl överens med FE-modellen. FE-modellen är inte gjord för att i första hand efterlikna handberäkningsmetoderna, utan för att likna en verklig balk. Ett exempel på detta är ändtvärskottet vilket är modellerat som ett skal för att efterlikna verkligheten. För att efterlikna handberäkningsmodellen kunde istället ändtvärskotten ha modellerats som korslagda stänger, vilka hade medgivit friare välvning. Det har visat sig att lastfallet med antisymmetriska punktlaster ger bättre överensstämmelse, med avseende på relativa fel, mellan FE-modell och handberäkningsmodell i jämförelse med utbredda antisymmetriska laster. Vad det gäller hörnmomenten överskattas dessa med handberäkningsmetoden i jämförelse med FE-modellen för alla i denna rapport undersökta fall. Det bör noteras att det uppstår tvåaxiellt spänningstillstånd på grund av hörnmoment och axiella spänningar.

Handberäkningsmetoden lämpar sig endast för enkla upplagsförhållanden och lastfall, då mer komplicerade lastfall och upplagsförhållanden medför att beräkningsarbetet för att lösa differentialekvationen blir mycket omfattande.

Då lasternas placering skiljer sig från elementarfall, samt då man vill få mer verklighetstrogna randvillkor och balkgeometri rekommenderas en tredimensionell FE-modell uppbyggd av skalelement. Då väl FE-modellen är skapad går den att använda för att beräkna påkänningar av en mängd olika lastfall

8.7 Resultattabeller

Nedan redovisas axiella spänningar för de olika tvärsnitten vid x= L/4 och x = L/2 i tabellform. Spänningarna i tre olika punkter i tvärsnittets plan, se figur nedan, redovisas både för antisymmetriska punktlaster och för utbredda antisymmetriska laster.



Figur 8.26. *Punkter i tvärsnitt där axiell spänning redovisas i tabeller nedan.*

Tabell 8.1. Axiella spänningar i MPa för punkt 1 , utbredda antisymmetriska laster.

	x = L/4			x = L/2		
	Slank	Normal	Grov	Slank	Normal	Grov
Odeformerat tvärsnitt med blandad vridning						
Avsnitt 3	-0.0528	-0.0268	-0.0132	-0.0539	-0.0273	-0.0135
Deformerat tvärsnitt						
Avsnitt 4	-0.1053	-0.0215	-0.0035	-0.1243	-0.0189	-0.0008
Avsnitt 5.3	-0.1053	-0.0215	-0.0035	-0.1243	-0.0189	-0.0008
Avsnitt 6	-0.1053	-0.0215	-0.0035	-0.1243	-0.0189	-0.0008
Deformerat tvärsnitt med blandad vridning						
Avsnitt 5	-0.1581	-0.0483	-0.0167	-0.1782	-0.0462	-0.0143
Avsnitt 7	-0.1603	-0.0473	-0.0149	-0.1651	-0.0400	-0.0115

Tabell 8.2. Axiella spänningar i MPa för punkt 2 , utbredda antisymmetriska laster.

	x = L/4			x = L/2		
	Slank	Normal	Grov	Slank	Normal	Grov
Odeformerat tvärsnitt med blandad vridning						
Avsnitt 3	0.0405	0.0232	0.0101	0.0414	0.0237	0.0104
Deformerat tvärsnitt						
Avsnitt 4	0.6108	0.1283	0.0201	0.7205	0.1127	0.0049
Avsnitt 5.3	0.6108	0.1283	0.0201	0.7205	0.1127	0.0049
Avsnitt 6	0.6108	0.1283	0.0201	0.7205	0.1127	0.0049
Deformerat tvärsnitt med blandad vridning						
Avsnitt 5	0.6513	0.1515	0.0302	0.7619	0.1364	0.0153
Avsnitt 7	0.5934	0.1307	0.0233	0.6738	0.1164	0.0136

Tabell 8.3. Axiella spänningar i MPa för punkt 3 , utbredda antisymmetriska laster.

	x = L/4			x = L/2		
	Slank	Normal	Grov	Slank	Normal	Grov
Odeformerat tvärsnitt med blandad vridning						
Avsnitt 3	0.0517	0.0249	0.0129	0.0529	0.0254	0.0132
Deformerat tvärsnitt						
Avsnitt 4	-0.2748	-0.0561	-0.0090	-0.3242	-0.0492	-0.0022
Avsnitt 5.3	-0.2748	-0.0561	-0.0090	-0.3242	-0.0492	-0.0022
Avsnitt 6	-0.2748	-0.0561	-0.0090	-0.3242	-0.0492	-0.0022
Deformerat tvärsnitt med blandad vridning						
Avsnitt 5	-0.2231	-0.0312	0.0039	-0.2713	-0.0238	0.0110
Avsnitt 7	-0.1848	-0.0204	0.0058	-0.2320	-0.0195	0.0083

Tabell 8.4. Axiella spänningar i MPa för punkt 1, antisymmetriska punktlaster.

	x = L/4			x = L/2		
	Slank	Normal	Grov	Slank	Normal	Grov
Odeformerat tvärsnitt med blandad vridning						
Avsnitt 3	-0.0094	-0.0045	-0.0023	-0.4296	-0.2220	-0.1074
Deformerat tvärsnitt						
Avsnitt 4	-0.0962	0.0009	0.0081	-0.3887	-0.1211	-0.0402
Avsnitt 5.3	-0.0962	0.0009	0.0081	-0.3887	-0.1211	-0.0402
Avsnitt 6	-0.0962	0.0009	0.0081	-0.3887	-0.1211	-0.0402
Deformerat tvärsnitt med blandad vridning						
Avsnitt 5	-0.1056	-0.0036	0.0058	-0.8183	-0.3431	-0.1476
Avsnitt 7	-0.0718	0.0110	0.0094	-0.7838	-0.2853	-0.1100

Tabell 8.5. Axiella spänningar i MPa för punkt 2, antisymmetriska punktlaster.

	x = L/4			x = L/2		
	Slank	Normal	Grov	Slank	Normal	Grov
Odeformerat tvärsnitt med blandad vridning						
Avsnitt 3	0.0072	0.0039	0.0018	0.3299	0.1920	0.0825
Deformerat tvärsnitt						
Avsnitt 4	0.5581	-0.0054	-0.0470	2.2539	0.7229	0.2329
Avsnitt 5.3	0.5581	-0.0054	-0.0470	2.2539	0.7229	0.2329
Avsnitt 6	0.5581	-0.0054	-0.0470	2.2539	0.7229	0.2329
Deformerat tvärsnitt med blandad vridning						
Avsnitt 5	0.5653	-0.0015	-0.0452	2.5838	0.9149	0.3154
Avsnitt 7	0.5113	0.0022	-0.0311	2.1970	0.7253	0.1950

Tabell 8.6. Axiella spänningar i MPa för punkt 3, antisymmetriska punktlaster.

	x = L/4			x = L/2		
	Slank	Normal	Grov	Slank	Normal	Grov
Odeformerat tvärsnitt med blandad vridning						
Avsnitt 3	0.0092	0.0042	0.0020	0.4211	0.2065	0.1053
Deformerat tvärsnitt						
Avsnitt 4	-0.2511	0.0023	0.0212	-1.0140	-0.3159	-0.1048
Avsnitt 5.3	-0.2511	0.0023	0.0212	-1.0140	-0.3159	-0.1048
Avsnitt 6	-0.2511	0.0023	0.0212	-1.0140	-0.3159	-0.1048
Deformerat tvärsnitt med blandad vridning						
Avsnitt 5	-0.2419	0.0065	0.0232	-0.5929	-0.1094	-0.0005
Avsnitt 7	-0.2405	-0.0112	0.0107	-0.4631	-0.0615	0.0145

9 BRO 94

9.1 Inledning

Föregående avsnitt avser endast att kartlägga skillnader mellan olika beräkningsmodeller vad det gäller vridning. I följande avsnitt tillämpas normen BRO 94 i FE- modellen.

Som nämnt i avsnitt **1** är det vanligt att broar spännarmeras. På grund av spännarmeringen tillkommer speciella krav enligt BRO 94, vilka nämns nedan.

Eftersom det endast är hörnmoment och tillskott till normalspänningar på grund av vridning som undersöks, tas i detta avsnitt endast upp sådana krav som är relevanta för detta område.

9.2 Materialparametrar

Resultatet i detta avsnitt jämförs med dimensionerande värden för betongkvalitet K45 enligt ***Tabell 9.1*** nedan.

Tabell 9.1 *Hållfasthetsvärden för betong K45.*

	Bruksgränstillstånd	**Brottgränstillstånd**
f_{ct}	2.10 MPa	1.17 MPa
f_{cc}	33.0 MPa	17.8 MPa
E_{cd}	33.0 GPa	22.9 GPa

9.3 Brottgränstillstånd

När det gäller brottgränstillståndet är det hörnmomenten som primärt påverkar dimensioneringen. Som nämnt i tidigare avsnitt uppkommer hörnmoment på grund av att tvärsnittet deformeras vid vridning. Negligeras tillskott till hörnmoment på grund av vridning kan det hända att brolådekonstruktionen spricker i hörnen, vilket påverkar beständigheten.

9.4 Bruksgränstillstånd

BRO 94 anger i avsnitt 42.31 följande begränsningar av påkänningar:

42.311 För laster enligt lastkombination 5:B godtas inte beräkningsmässig dragpåkänning i betongen på armeringens nivå för korrosionskänslig armering.

42.312 En spännbetongkonstruktion ska i nivå med den korrosionskänsliga armeringen, vid belastning enligt lastkombination 5:A, visas vara osprucken enligt BBK 94, avsnitt 4.5.3.

Med ”i nivå med” menas i detta fall ett område med diametern 200mm centriskt placerat kring varje korrosionskänslig armeringsenhet.

9.5 BRO 94 lastfall

I normen finns tre huvudlastgrupper med undertyper, av vilka några följer nedan:

- Permanenta laster
  - egentyngd
  - beläggning och överfyllnad
  - stödförskjutningar
  - krympning
  - spännkraft

- Variabla laster
  - trafiklast
  - snölast
  - vindlast
  - temperaturlast

- Olyckslaster
  - påkörningskraft av fordon
  - brott i kabel i spännbetongbro

De enda laster i en rak bro som bidrar till ett vridande moment är de orsakade av trafik. Vertikala trafiklaster av fordon inklusive dynamiska effekter delas in i fem typer av ekvivalentlast. Varje konstruktionsdel ska beräknas för den last som ger ogynnsammast inverkan. För broar med spännvidder som understiger 200m behöver ekvivalentlasttyp 5 ej beaktas.

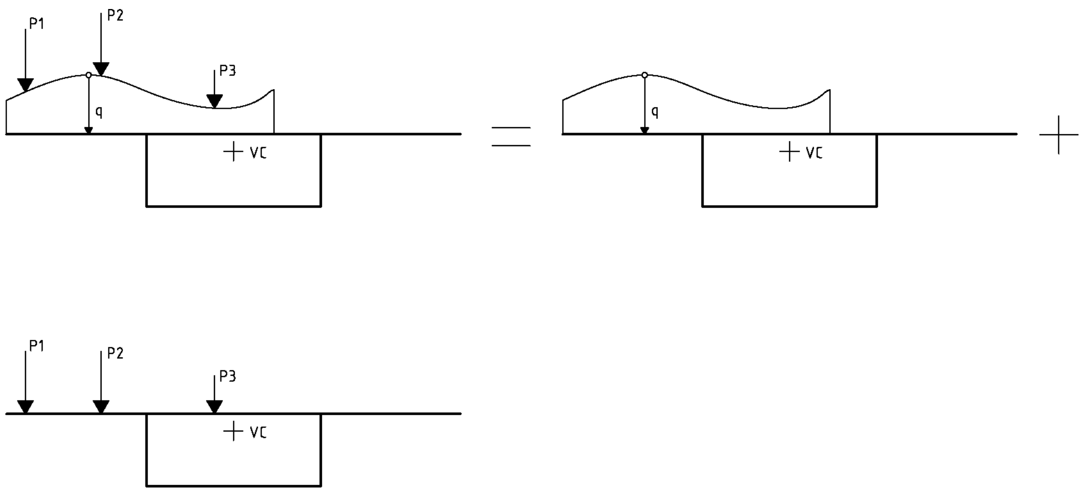
Ekvivalentlast av typ 1, 2 och 5 ska förutsättas belasta med körbanans längdriktning parallella ytor, kallade lastfält, vardera med bredden 3.0m.

Lastfältens antal och placering ska väljas så att ogynnsammaste inverkan erhålls. Antalet lastfält är högst lika med det antal lastfält som ryms inom det område som är tillgängligt för trafik, det vill säga körbana plus väggren.

Lastfälten ska placeras på ogynnsammaste sätt i brons tvär- och längdriktning. I denna undersökning innebär det placering som medger maximalt vridmoment.

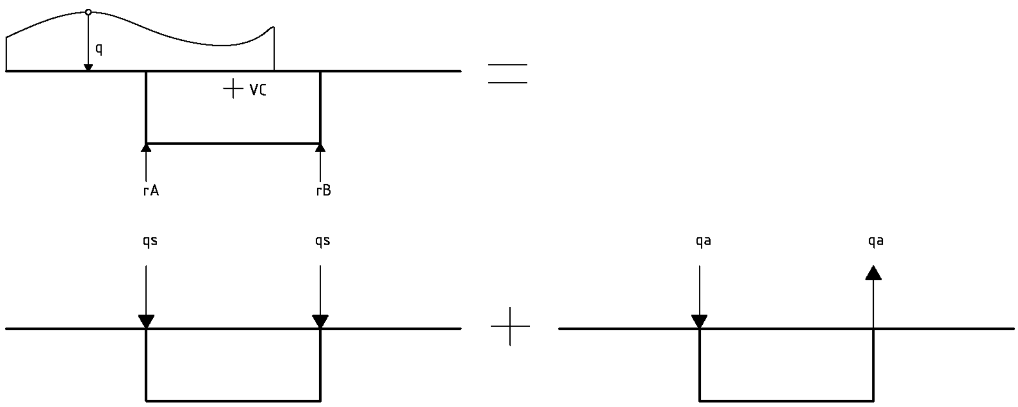
9.6 Symmetri och antisymmetri

Då effekter av vridning ska undersökas, delas lasten in i ett symmetriskt (vilket i dessa beräkningar ej tas hänsyn till) och ett antisymmetriskt lastfall (vilket ger ren vridning). Principen för uppdelning av punktlaster och utbredda laster sker enligt ***Figur 9.1*** nedan.



Figur 9.1 *Uppdelning av punktlaster och utbredda laster.*

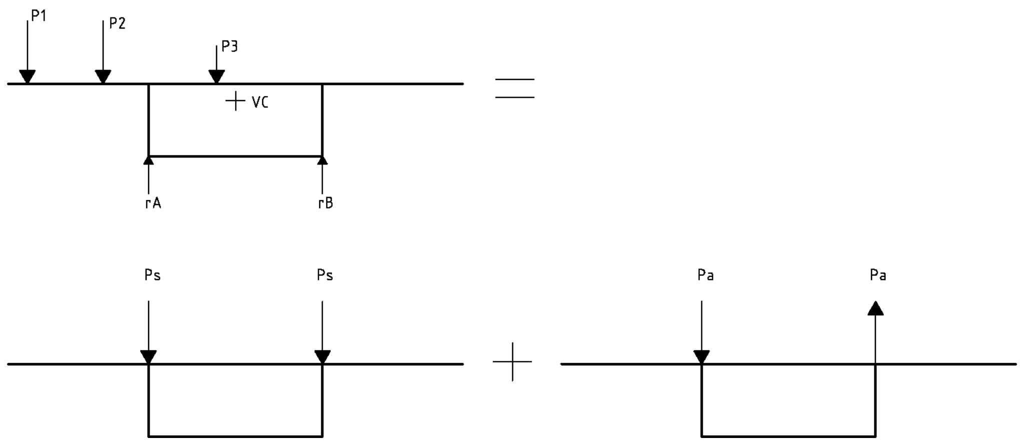
De båda lastfallen ovan delas in i ett symmetriskt och ett antisymmetrikst lastfall enligt ***Figur 9.2*** och ***Figur 9.3*** nedan. Uppdelningar fås genom jämviktsbetraktelser.



Figur 9.2 *Symmetriskt och antisymmetriskt lastfall för utbredd last.*

$$q_s = \frac{r_A + r_B}{2}$$

$$q_a = \frac{r_A - r_B}{2}$$



Figur 9.3. Symmetriskt och antisymmetriskt lastfall för punktlaster.

$$P_s = \frac{r_A + r_B}{2}$$

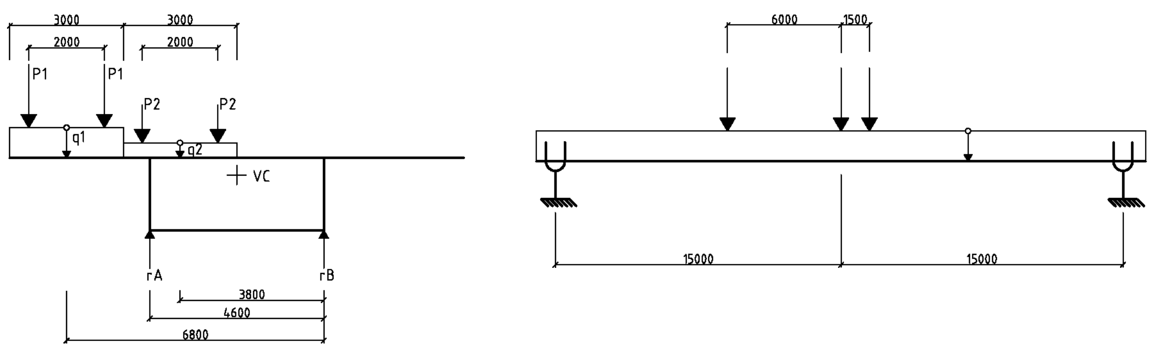
$$P_a = \frac{r_A - r_B}{2}$$

9.7 Ekvivalentlasttyp 1

Ekvivalentlasttyp 1 består av en jämnt fördelad last, q kN/m och en lastgrupp bestående av tre axellaster om P kN med axelavstånden ≥ 1.5m och ≥ 6.0m. P är för ett lastfält 250kN och för det andra 170kN. Lasten q är jämnt fördelad över lastfältets bredd och är för ett lastfält 12kN/m i vardera körriktning, 9kN/m för ett körfält i vardera riktning och 6kN/m i övriga körfält.

Axellasten består av två punktlaster om P/2kN med ett centrumavstånd av 2.0m och de är placerade symmetriskt i lastfältet, se ***Figur 9.4***. Högst två lastfält belastas med lastgrupper,

Den ogynnsammaste placeringen av laster med avseende på vridning ges i ***Figur 9.4***.



Figur 9.4. Placering av laster för maximalt vridmoment vid ekvivalentlasttyp 1.

$P_1 = 125\text{kN}$
$P_2 = 85\text{kN}$
$q_1 = 4\text{kN}/\text{m}^2$
$q_2 = 3\text{kN}/\text{m}^2$

9.7.1 Punktlaster

Vertikaljämvikt ger:

$$r_A + r_B - 250 - 170 = 0$$

Momentjämvikt vid r_B ger:

$$250 \cdot 6.8 + 170 \cdot 3.8 - r_A \cdot 4.6 = 0$$

Ovanstående ger stödreaktionerna:

$$r_A = 510\text{kN}$$
$$r_B = -90\text{kN}$$

De symmetriska och antisymmetriska lasterna blir:

$$P_s = \frac{510-90}{2} = 210\text{kN}$$
$$P_a = \frac{510+90}{2} = 300\text{kN}$$

9.7.2 Utbredda laster

Vertikaljämvikt ger:

$$r_A + r_B - 12 - 9 = 0$$

Momentjämvikt vid r_B ger:

$$12 \cdot 6.8 + 9 \cdot 3.8 - r_A \cdot 4.6 = 0$$

Ovanstående ger stödreaktionerna:

$$r_A = 25\text{kN}/\text{m}$$
$$r_B = -4\text{kN}/\text{m}$$

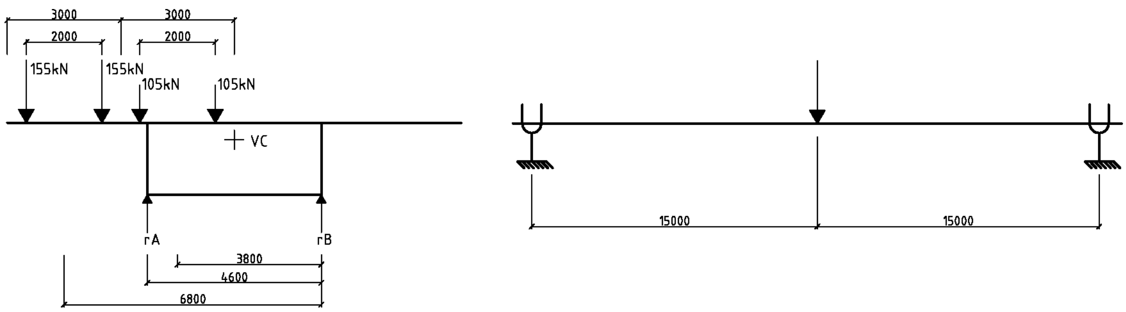
De symmetriska och antisymmetriska lasterna blir:

$$q_s = \frac{25-4}{2} = 10.5\text{kN/m}$$
$$q_a = \frac{25+4}{2} = 14.5\text{kN/m}$$

9.8 Ekvivalentlasttyp 2

Ekvivalentlasttyp 2 består av en axellast om PkN. Axellasten består av två punktlaster om P/2kN med centrumavståndet 2.0m. P är för ett lastfält 310kN och för det andra 210kN. Punktlasterna är placerade symmetrisk i lastfältet enligt ***Figur 9.5***.

Högst två lastfält belastas med lastgrupper. Den ogynnsammaste placeringen av laster med avseende på vridning ges i ***Figur 9.5***.



Figur 9.5. *Placering av laster för maximalt vridmoment vid ekvivalentlasttyp 2.*

Vertikaljämvikt ger:

$$r_A + r_B - 310 - 210 = 0$$

Momentjämvikt vid r_B ger:

$$310 \cdot 6.8 + 210 \cdot 3.8 - r_A \cdot 4.6 = 0$$

Ovanstående ger stödreaktionerna:

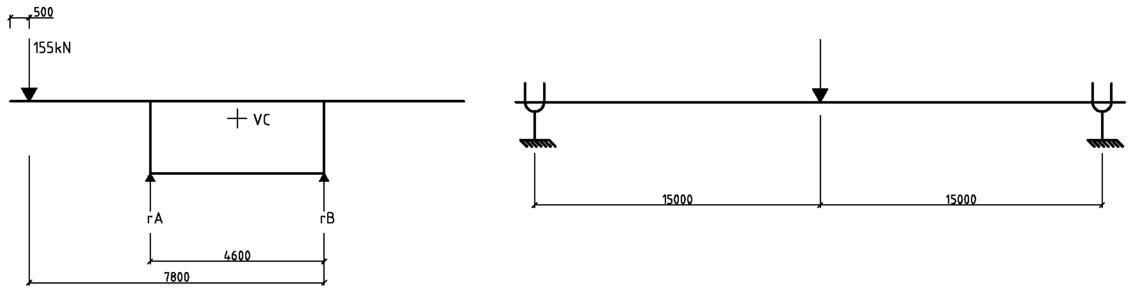
$$r_A = 632\text{kN}$$
$$r_B = -112\text{kN}$$

De symmetriska och antisymmetriska lasterna blir:

$$P_s = \frac{632-112}{2} = 260\text{kN}$$
$$P_a = \frac{632+112}{2} = 372\text{kN}$$

9.9 Ekvivalentlasttyp 3

Ekvivalentlasttyp 3 består av en enstaka punktlast om 155kN. Punktlasten ska placeras godtyckligt i körbanans tvärriktning. Minsta avstånd till räcke eller annan begränsning ska sättas till 0.5m, se ***Figur 9.6*** nedan.

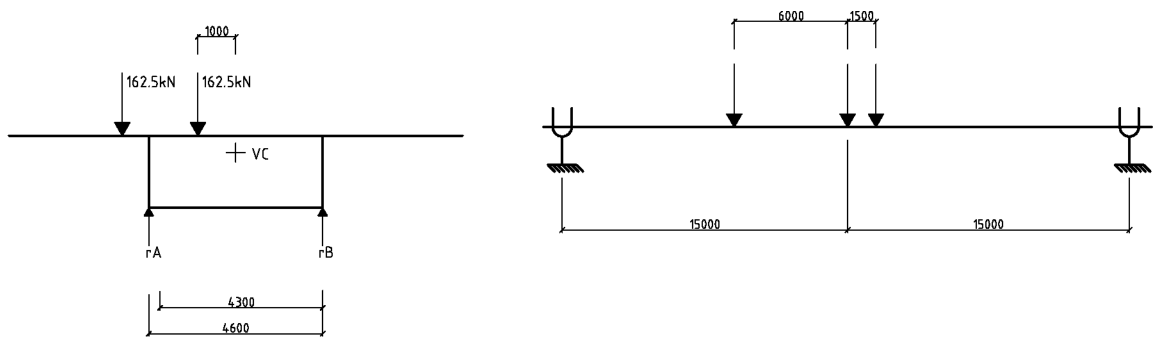


Figur 9.6*. Placering av laster för maximalt vridmoment vid ekvivalentlasttyp 3.*

Genom att studera ***Figur 9.5*** och ***Figur 9.6*** inses att ekvivalentlastfall 3 ger ett mindre ogynnsamt vridmoment än ekvivalentlastfall 2, varvid den inte behandlas vidare.

9.10 Ekvivalentlastfall 4

Ekvivalentlastfall 4 består av en enda lastgrupp enligt ekvivalentlasttyp 1 med P lika med 325kN. Lastgruppen ska förutsättas placerad på körbanan med en sidoförskjutning av högst 1.0m från körbanans centrumlinje enligt ***Figur 9.7*** nedan.



Figur 9.7*. Placering av laster för maximalt vridmoment vid ekvivalentlasttyp 4.*

Vertikaljämvikt ger:

$$r_A + r_B - 325 = 0$$

Momentjämvikt vid r_B ger:

$$325 \cdot 4.3 - r_A \cdot 4.6 = 0$$

Ovanstående ger stödreaktionerna:

$$r_A = 304\text{kN}$$
$$r_B = 21\text{kN}$$

De symmetriska och antisymmetriska lasterna blir:

$$P_s = \frac{304 + 21}{2} = 162.5\text{kN}$$
$$P_a = \frac{304 - 21}{2} = 141.5\text{kN}$$

Genom att studera resultatet av P_a för ekvivalentlasttyp 1 inses att ekvivalentlasttyp 4 ger ett mindre vridmoment, varvid den inte behandlas vidare.

9.11 BRO 94 Lastkombinationer

Lastkombinationer används för att kombinera laster så att de kan anses motsvara verkligheten. Eftersom endast trafiklast ingår i undersökningen sätts denna som huvudlast.

I normen finns 9 olika lastkombinationer, varav 4 och 5 är kombinationer för brottgräns respektive bruksgränskontroller. Övriga kombinationer avser överhöjning, utmattning, byggnadsskede med mera och behandlas ej här.

9.11.1 Lastkombination 4

Lastkombination 4 är uppdelad i två dellastkombinationer, A och B, där B avser inverkan av dominerande permanenta laster och negligeras därmed i denna undersökning. Lastkombination 4A är huvudbelastningsfallet i brottgränstillståndet.

Eftersom det är hörnmomenten man är intresserad av i brottgränstillståndet, används lastkombination 4A vid beräkningar av dessa. Välvspänningarnas storlek kontrolleras även för detta lastfall.

Vid lastkombination 4A är lastkoefficienten $\psi\gamma$ 1.5 för ekvivalentlast 1-5. Det medför att dimensionerande laster i lastkombination 4A blir:

Ekvivalentlasttyp 1:

$$P_a = 300 \cdot 1.5 = 450\text{kN}$$
$$q_a = 14.5 \cdot 1.5 = 22\text{kN}$$

Ekvivalentlasttyp 2:

$$P_a = 372 \cdot 1.5 = 558\text{kN}$$

9.11.2 Lastkombination 5

Denna lastkombination är uppdelad i tre dellastkombinationer, A, B och C, där C utgör grund för deformationsberäkningar och behandlas ej vidare här.

A utgör huvudbelastningsfall i bruksgränstillståndet. Den använd bland annat för att kontrollera att betongen dragspänningskapacitet inte överskrids i nivå med spännarmeringen. Den är därmed relevant för beräkning av normalspänningstillskott på grund av vridning. Vid lastkombination 5A är lastkoefficienten $\psi\gamma$ 1.0 för ekvivalentlast 1-5. Det medför att dimensionerande laster i lastkombination 5A blir:

Ekvivalentlasttyp 1:

$$P_a = 300 \cdot 1.0 = 300\text{kN}$$
$$q_a = 14.5 \cdot 1.0 = 14.5\text{kN}$$

Ekvivalentlasttyp 2:

$$P_a = 372 \cdot 1.0 = 372\text{kN}$$

B utgör grund för beräkning av sprickbredder i bruksgränstillståndet. Den används bland annat för att kontrollera att det inte förekommer några beräkningsmässiga dragspänningar i nivå med spännarmeringen. Den är därmed relevant för beräkning av normalspänningstilskott på grund av vridning. Vid lastkombination 5B är lastkoefficienten $\psi\gamma$ 0.3 för ekvivalentlast 1-5. Det medför att dimensionerande laster i lastkombination 5B blir:

Ekvivalentlasttyp 1:

$$P_a = 300 \cdot 0.3 = 90\text{kN}$$
$$q_a = 14.5 \cdot 0.3 = 4\text{kN}$$

Ekvivalentlasttyp 2:

$$P_a = 372 \cdot 0.3 = 112\text{kN}$$

9.12 Resultat

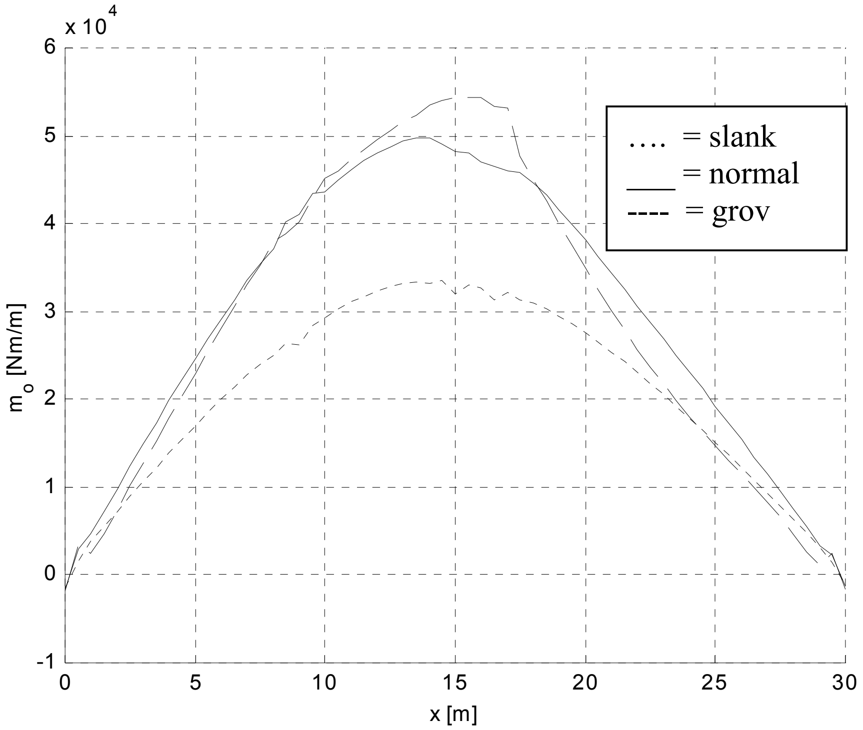
Resultaten av FEM- körningen för de olika tvärsnitten, lasttyperna och lastkombinationerna visas i avsnitten som följer. Maxvärden redovisas i tabeller. Lasternas placering är enligt avsnitt ovan.

9.12.1 Hörnmoment lastkombination 4A

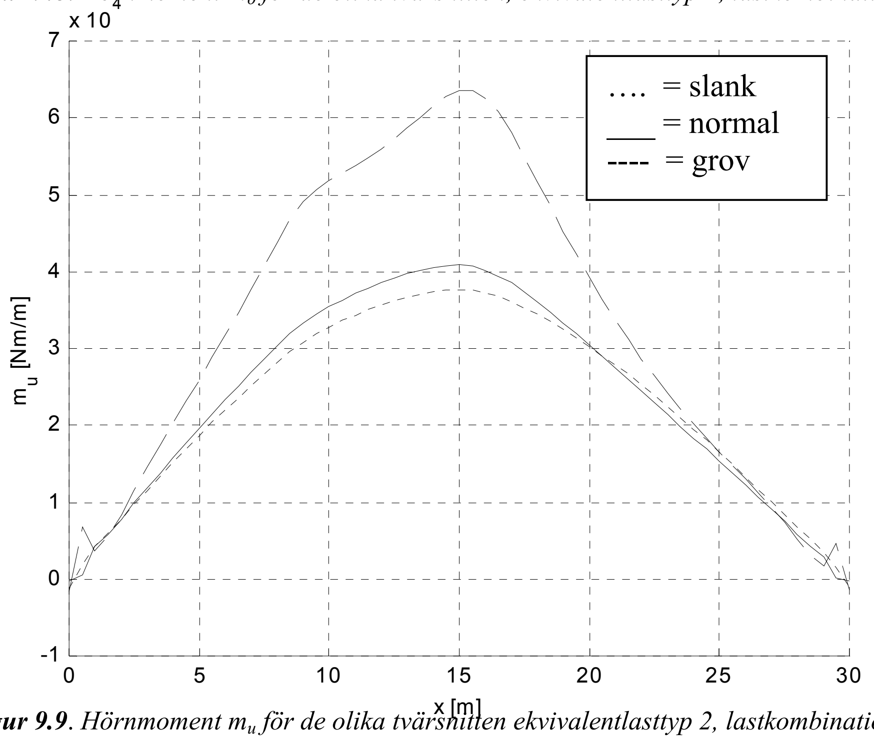
De maximala hörnmomenten för lastkombination 4A, ekvivalentlast 1 och 2, redovisas i ***Tabell 9.2***. Hörnmomentens fördelning längs x- axeln redovisas i figurer.

***Tabell 9.2**. Maximala hörnmoment för lastkombination 4A.*

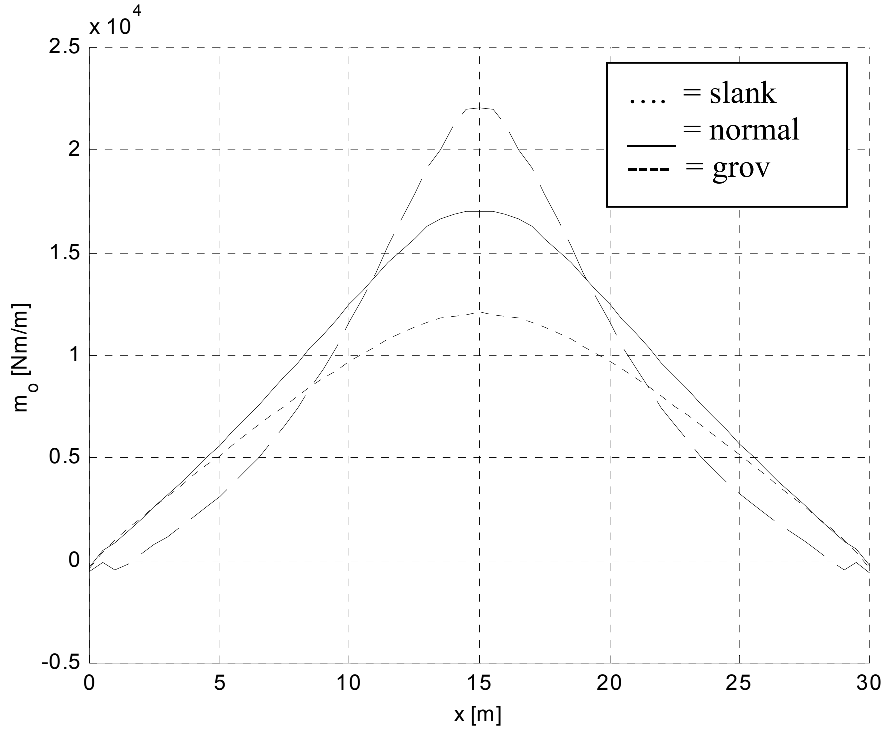
	Slankt tvärsnitt	Normalt tvärsnitt	Grovt tvärsnitt
Ekvivalentlasttyp 1			
m_o [kNm/m]	33.4	49.8	54.4
m_u [kNm/m]	37.6	40.8	63.5
Ekvivalentlasttyp 2			
m_o [kNm/m]	12.1	17.1	22.1
m_u [kNm/m]	13.2	15.4	28.3



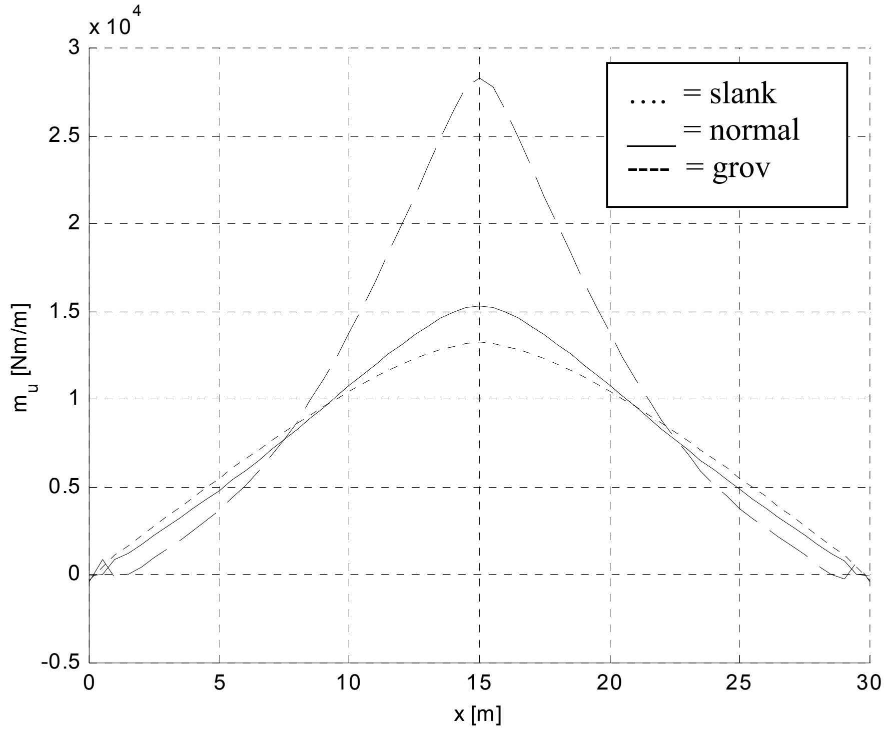
***Figur 9.8**. Hörnmoment m_o för de olika tvärsnitten, ekvivalentlasttyp 1, lastkombination 4A.*



***Figur 9.9**. Hörnmoment m_u för de olika tvärsnitten ekvivalentlasttyp 2, lastkombination 4A.*



Figur 9.10. *Hörnmoment m_o för de olika tvärsnitten, ekvivalentlasttyp 2 , lastkombination 4A.*



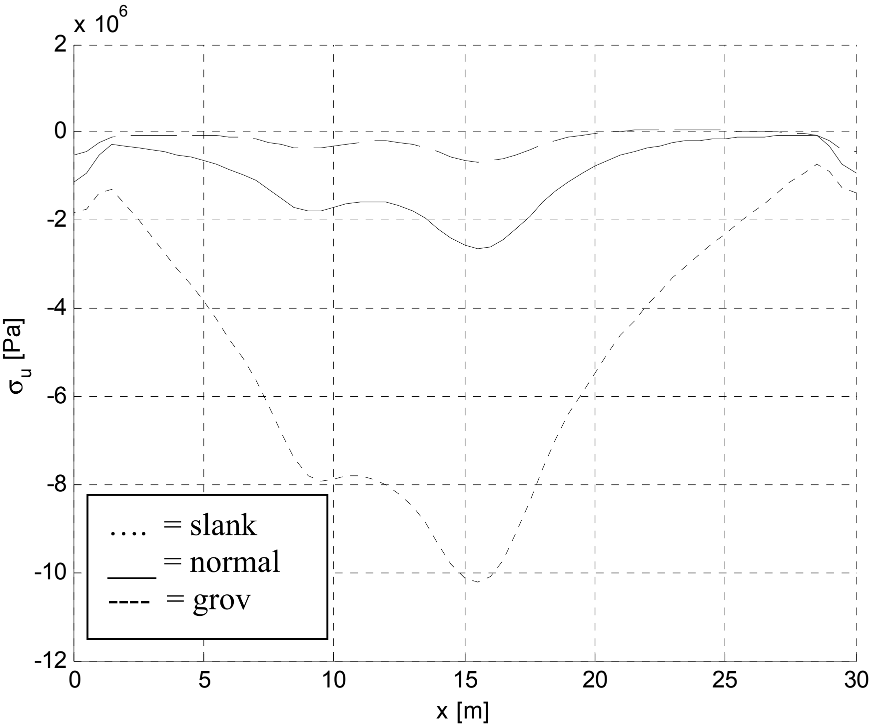
Figur 9.11. *Hörnmoment m_u för de olika tvärsnitten, ekvivalentlasttyp 2, lastkombination 4A.*

9.12.2 Axiella spänningar lastkombination 4A

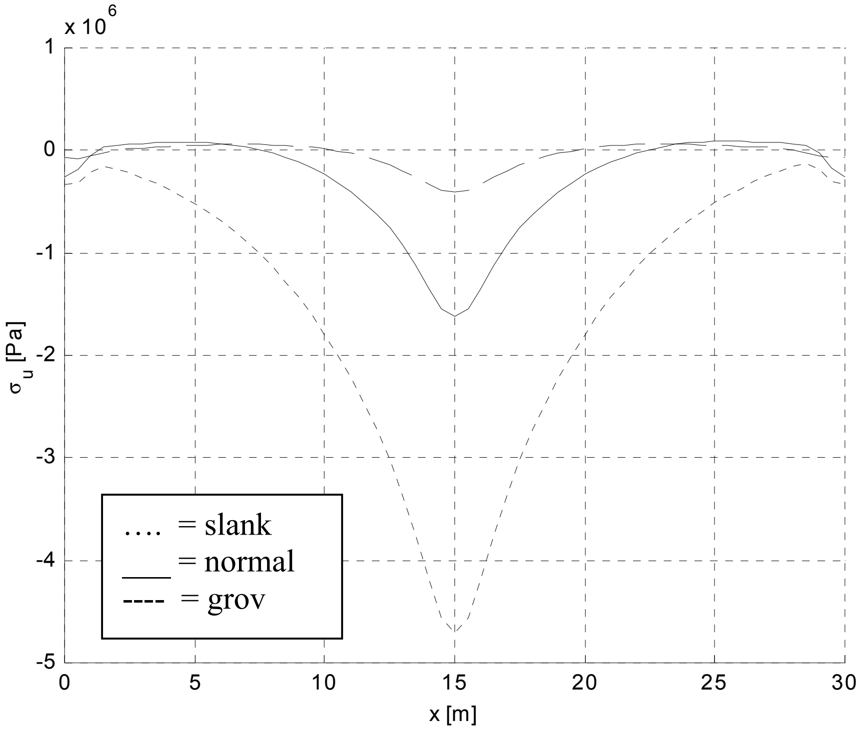
De maximala axiella spänningarna för lastkombination 4A, ekvivalentlast 1 och 2, redovisas i ***Tabell 9.3.*** Axiella spänningarnas fördelning längs x- axeln redovisas i figurer.

Tabell 9.3. *Maximala axiella spänningar för lastkombination 4A.*

	Slankt tvärsnitt	**Normalt tvärsnitt**	**Grovt tvärsnitt**
Ekvivalentlasttyp 1			
σ_u [MPa]	10.23	2.65	0.66
Ekvivalentlasttyp 2			
σ_u [MPa]	4.71	1.63	0.41



Figur 9.12. *Axiella spänningar σ_u för de olika tvärsnitten, ekvivalentlasttyp 1, lastkombination 4A.*



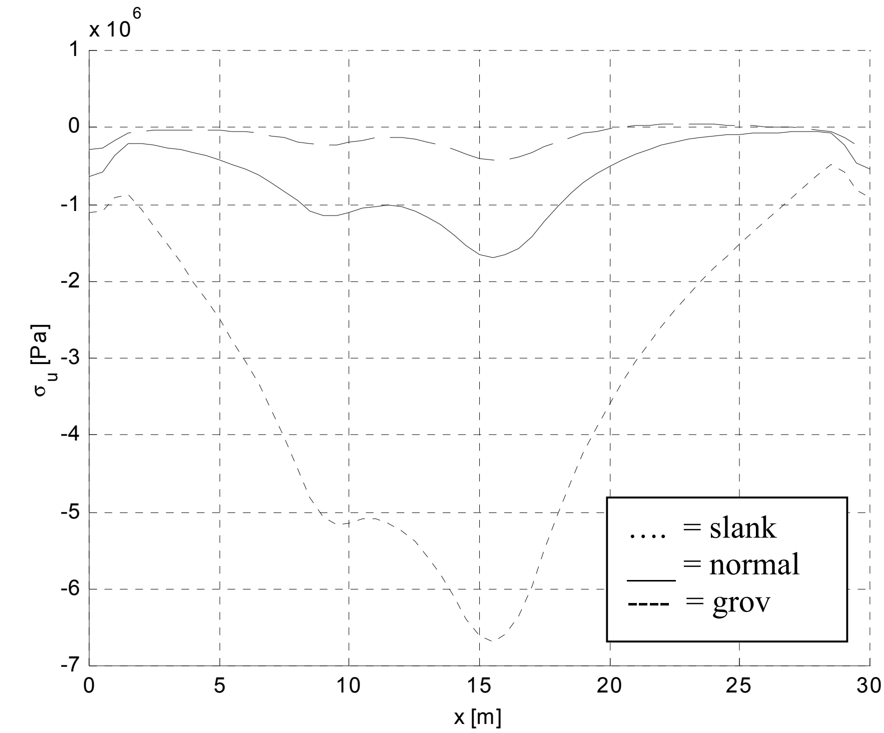
Figur 9.13. *Axiella spänningar σ_u för de olika tvärsnitten, ekvivalentlasttyp 2, lastkombination 4A.*

9.12.3 Axiella spänningar lastkombination 5A

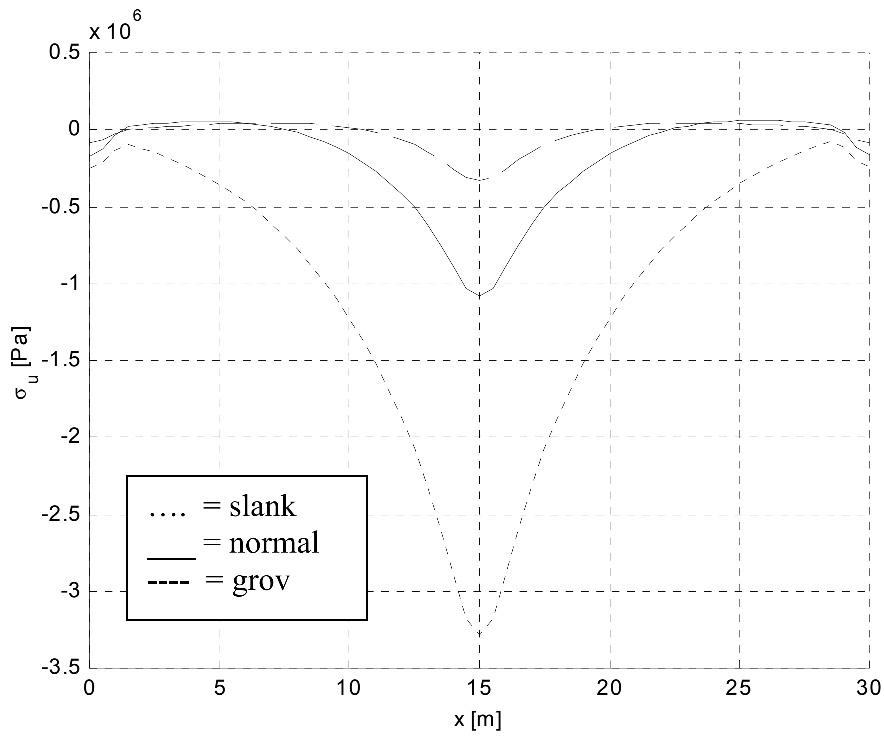
De maximala axiella spänningarna för lastkombination 5A, ekvivalentlast 1 och 2, redovisas i ***Tabell 9.4***. De axiella spänningarnas fördelning längs x- axeln redovisas i figurer.

Tabell 9.4. *Maximala axiella spänningar för lastkombination 5A.*

	Slankt tvärsnitt	**Normalt tvärsnitt**	**Grovt tvärsnitt**
Ekvivalentlasttyp 1			
σ_u [MPa]	6.68	1.69	0.42
Ekvivalentlasttyp 2			
σ_u [MPa]	3.29	1.08	0.33



Figur 9.14. *Axiella spänningar σ_u för de olika tvärsnitten, ekvivalentlasttyp 1, lastkombination 5A.*



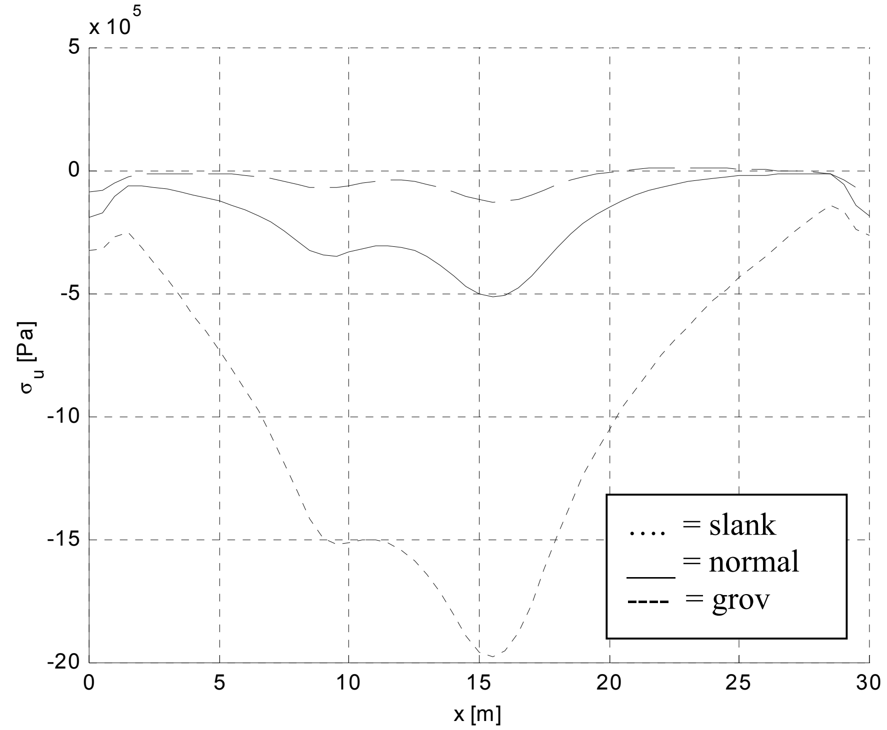
Figur 9.15 *Axiella spänningar σ_u för de olika tvärsnitten, ekvivalentlasttyp 2, lastkombination 5A.*

9.12.4 Axiella spänningar lastkombination 5B

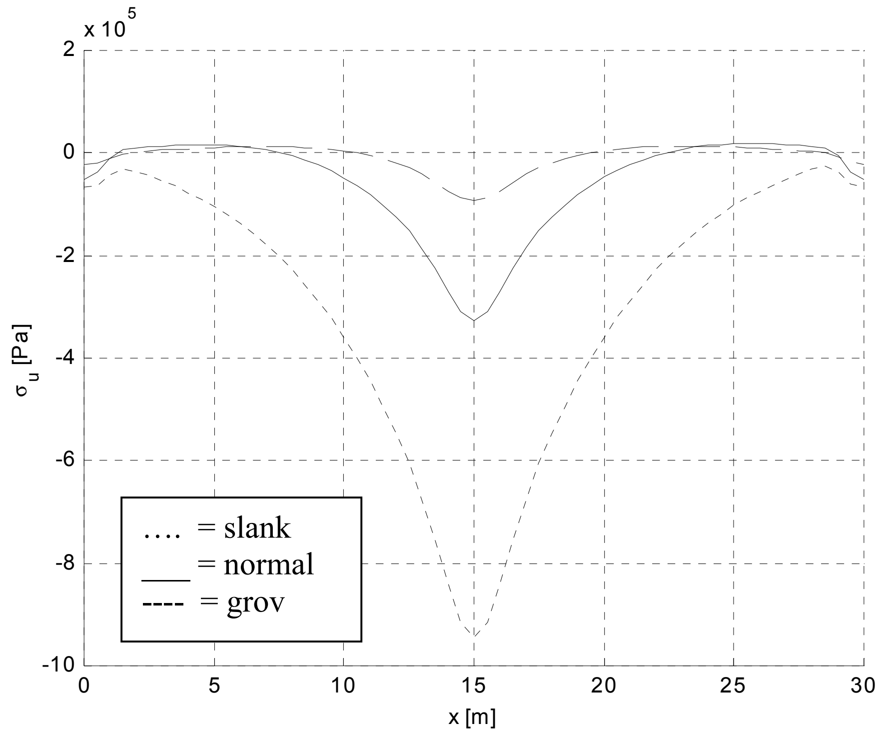
De maximala axiella spänningarna för lastkombination 5A, ekvivalentlast 1 och 2, redovisas i ***Tabell 9.5***. De axiella spänningarnas fördelning längs x- axeln redovisas i figurer.

Tabell 9.5. *Maximala axiella spänningar för lastkombination 5B.*

	Slankt tvärsnitt	Normalt tvärsnitt	Grovt tvärsnitt
Ekvivalentlasttyp 1			
σ_u [MPa]	1.98	0.51	0.13
Ekvivalentlasttyp 2			
σ_u [MPa]	0.94	0.32	0.09



Figur 9.16. *Axiella spänningar σ_u för de olika tvärsnitten, ekvivalentlasttyp 1, lastkombination 5B.*



Figur 9.17. *Axiella spänningar σ_u för de olika tvärsnitten, ekvivalentlasttyp 2, lastkombination 5B.*

9.13 Slutsatser

Vid dimensionering av en spännbetongbro utgår man i första hand från bruksgränstillståndet. De ovan nämnda dimensioneringskraven i bruksgränstillståndet avgör antalet spännkablar och kabellinjeföring. Ofta är det spickkriterier som är avgörande vid bestämning av antalet kablar. För få kablar medför sprickor vid kablar, vilket ej tillåts i bruksgränstillståndet. För många kablar medför att tvärsnittet kan komma att spricka på motsatt sida kablar på grund av uppspänningsmoment. Då man inte tar hänsyn till axiella spänningar på grund av vridning så är det böjmomenten som är den huvudsakliga källan till uppkomsten av axiella spänningar i brotvärsnittet. De är från dessa axiella spänningar man utgår vid bestämning av antal spännkablar. För att avgöra om man behöver ta hänsyn till axiella spänningar uppkomna av vridning jämförs betongens tillåtna dragspänningspåkänning i bruksgränstillstånd med den dragspänningspåkänning som uppkommer vid vridning. Detta på grund av att en ökning av normalspänningar i denna storleksordning kan orsaka att betongen spricker upp och att man inte klarar normen (se avsnitt **9.4**). I tabellen nedan redovisas de olika lastkombinationernas maxvärden.

Tabell 9.6. *Maxvärden för axiella spänningar i MPa, lastkombination 5A och 5B.*

	Slankt tvärsnitt	**Normalt tvärsnitt**	**Grovt tvärsnitt**
Lastkombination 5A, ekvivalentlast 1			
σ_u [MPa]	6.68	1.69	0.42
Lastkombination 5B, ekvivalentlast 1			
σ_u [MPa]	1.98	0.51	0.13

För det slanka tvärsnittet uppkommer relativt höga axiella spänningar på grund av vridning varvid man bör ta hänsyn till denna effekt. Det är dock så att tvärsnitt med denna slankhet inte kan konstrueras med tanke på att spännarmeringen måste få plats i väggarna. Vidare tillåter inte BRO94 mindre tjocklek på farbanan än 170mm (för det slanka tvärsnittet är tjockleken 100mm). För det normala tvärsnittet är de axiella spänningarna i den storleksordning att de inte är helt betydelselösa. Om man vid en dimensionering utan hänsyn tagen till axiella spänningar på grund av vridning hamnar nära gränsvärdet, bör hänsyn tagas till effekter av vridning. För det grova tvärsnittet är de axiella spänningarna så pass låga att de har ringa betydelse. För att på ett lätt sätt kunna avgöra om hänsyn till effekter av vridning behöver uppmärksammas, skulle man möjligen kunna utveckla en metod där man beräknar tvärsnittets slankhet och därefter jämför med något gränsvärde.

Det är även av vikt att kontrollera om ifall uppkomna hörnmoment på grund av vridning är av betydelse vid dimensionering. Svagt armerade hörn i betongbrolådor kan medföra att det uppkommer sprickbildning vilket i sin tur medför att beständigheten minskar. ***Tabell 9.2*** redovisar maximala hörnmomenten i brottgränstillståndet (lastkombination 4A). För att avgöra om de har betydelse översätts värdena till antal armeringsenheter (ϕ12 Ks40) per meter för de olika tvärsnitten enligt formler nedan.

$$A_s = \frac{M}{f_{st} \cdot d \cdot \left(1 - \frac{\omega}{2}\right)}$$

$$\omega_{bal} = 0.8 \cdot \frac{\varepsilon_{cu} \cdot E_s}{f_{st} + \varepsilon_{cu} \cdot E_s}$$

$$\omega = 1 - \sqrt{1 - 2\overline{m}}$$

För underarmerat tvärsnitt gäller att $\omega < \omega_{bal.}$

$$\overline{m} = \frac{M}{b \cdot d^2 \cdot f_{cc}}$$

$\varepsilon_{cu} = 3.5 \cdot 10^{-3}$

För Ks40 gäller:

E_s = 159GPa (sk3)
f_{st} = 297MPa (sk3)
A = $\pi \cdot 0.012^2 / 4 = 1.131 \cdot 10^{-4}$ m^2 (Area/järn)

Betongparametrar hänvisas till ***Tabell 9.1***.

Täckskikt = 35 med mera (BRO94, miljöklass A3, livslängdsklss L1)

I tabellen nedan redovisas hörnmomentens inverkan på armeringsmängden. Som nämnt tidigare är det slanka tvärsnittet endast av teoretiskt intresse då det är för slankt för att armera. Härav finns det ej med i tabellen nedan.

Tabell 9.7. *Armeringsmängd i hörn för moment uppkomna av tvärsnittsdeformation.*

	Normal	**Grov**
d [m]	0.165	0.365
$\bar{m}$	0.103	0.027
ω_{bal}	0.522	0.522
ω	0.109	0.027
A_s [m^2]	$1.075 \cdot 10^{-3}$	$5.938 \cdot 10^{-4}$
n = antal järn/m	10	6

Man kan konstatera att hörnmomentens tillskott på grund av vridning har stor betydelse för armeringsmängden för samtliga tvärsnitt varvid denna effekt alltid bör beaktas.

Referenser

BBK 94

BRO 94

L. F. Boswell, S. H. Zhang

“A box finite element for the elastic analysis of thin-walled structures“, 1983

R Dabrowski

”Gekrümmte dünnwandige Träger“, Springer-Verlag Berlin/ Heidelberg/ New York 1968

9.14 Department of Mechanics and Materials, Lund University

”CALFEM A finite element toolbox to MATLAB Version 3.3”, Lund 1999

Lennart Elfgren, Inge Karlsson

”Vridning av betongkonstruktioner, en litteraturöversikt”, Chalmers tekniska högskola, Rapport 69:2, 1969

B. Kermani, P Waldron

“Behaviour of concrete box girder bridges of deformable cross-section”, 1993

Bengt Langesten

“Byggnadsstatik”, ISBN 91-24-35469-4, Första upplagan, Almqvist & Wiksell Tryckeri, Uppsala 1989

F. Laudiero, M. Savoia

”Shear strain effects in flexure an torsion of thin-walled beams with open or closed cross-section”, 1989

C. Menn

”Prestressed concrete bridges” Springer-Verlag, Wien 1986

P. E. Mondorf

“Betongbroer, plade- og bjaelkebroer”, bind1, 1981

Niels Ottosen, Hans Petersson

“Introduction to the Finite Element Method”, Prentice Hall 1992

Handboken Bygg

Håkan Sundquist

”Infrastrukturkonstruktioner” Kungl. tekniska högskolan, Rapport 13, Brobyggnad 1995, Utgåva 4

Sven Thelandersson

”Konstruktionsberäkningar med dator“, andra upplagan, Studentlitteratur, Lund 1990

N. S. Trahair and M. A. Bradford

“The behaviour and Design of Steel Structures”, ISBN 0 419 16060 4, London 1998

Vägverket

“BRO 94” Publ 1994:2

P. Waldron

”Sectorial properties of straight thin-walled beams”, Department of civil engineering, University of Bristol, Bristol 1986

P. Waldron

“Sectorial properties of straight thin-walled beams”, 1986

9.15 S. H. Zhang, L. P. R. Lyons

“A thin walled box beam finite element for curved bridge analysis” 1984

9.15.1 O. C. Zienkiewicz and R. Taylor

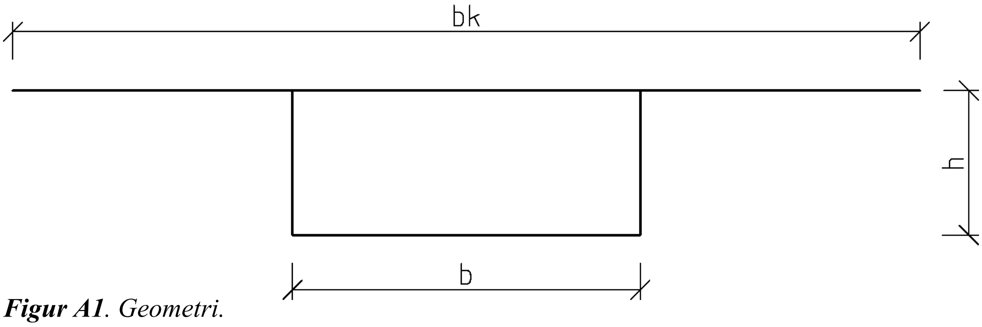
“The Finit Element Method”, volume 1 + volume 2, fourth edition, 1989

Bengt Å Åkesson

”Handbok i analys av balkars vridning, del 1+del 2”, Chalmers tekniska högskola, publikation 70:1 1970

A Appendix Deformerat tvärsnitt

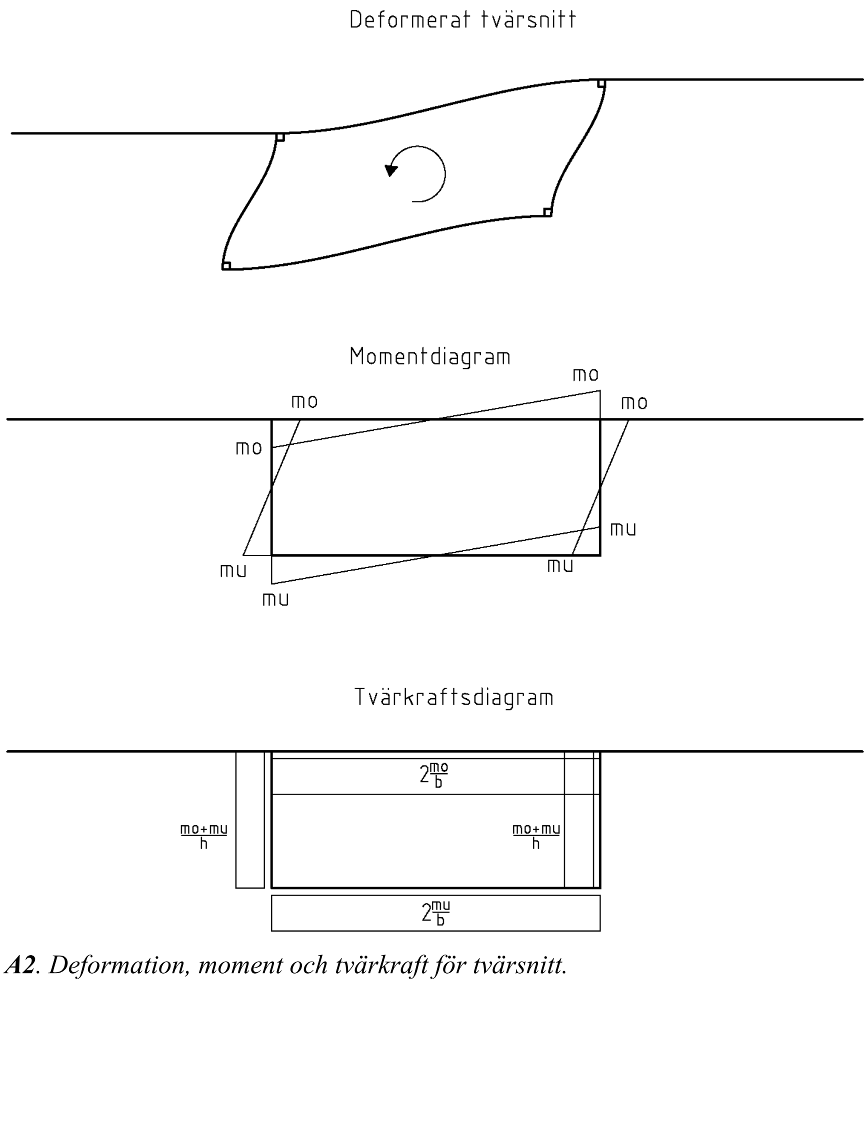
I detta avsnitt härleds en beräkningsmetod som tar hänsyn till att tvärsnittet deformeras. Härledningen bygger på en rapport av Lennart Elfgren och Inge Karlsson, [Vridning av betongkonstruktioner, En litteraturöversikt av Lennart Elfgren och Inge Karlsson]. En differentialekvation tas fram med hjälp av jämvikter, kinematiska och konstitutiva antaganden. Geometrin som används till härledningen visas i ***figur A1*** nedan.



Figur A1. *Geometri.*

A.1 Deformation av tvärsnitt

Tvärsnittet antas deformeras enligt ***figur A2***. Hörnen antas förbli rätvinkliga och roterar ej. På grund av deformationer uppstår moment och tvärkrafter.



Figur A2. *Deformation, moment och tvärkraft för tvärsnitt.*

A.2 Jämvikt för sidovägg

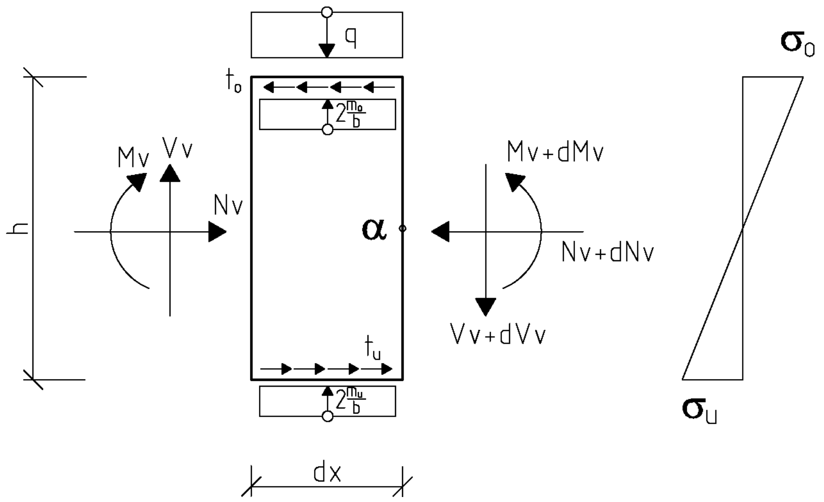


FigurA3. *Jämvikt sidovägg.*

Horisontell jämvikt:

$$\rightarrow: N_v + t_u \cdot dx - t_o \cdot dx - (N_v + dN_v) = 0 \Leftrightarrow \frac{dN_v}{dx} = t_u - t_o \qquad \textbf{[A1]}$$

Vertikal jämvikt:

$$\uparrow: V_v - (V_v + dV_v) + \frac{2m_o}{b} \cdot dx + \frac{2m_u}{b} \cdot dx - q \cdot dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{dV_v}{dx} = \frac{2}{b}(m_u + m_o) - q \qquad \textbf{[A2]}$$

Momentjämvikt kring punkten α:

$$M_v + dM_v - M_v + q\frac{dx^2}{2} - \frac{2}{b} \cdot (m_u + m_o) \cdot \frac{dx^2}{2} - V_v \cdot dx + t_o \cdot \frac{h}{2} + t_u \cdot \frac{h}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{dM_v}{dx} = V_v - \frac{h}{2} \cdot (t_o + t_u) \qquad \textbf{[A3]}$$

Derivering av **[A3]** ger:

$$\frac{d^2M_v}{dx^2} = \frac{dV_v}{dx} - \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{dt_o}{dx} + \frac{dt_u}{dx}\right) \qquad \textbf{[A4]}$$

[A2] insatt i **[A4]** ger:

$$\frac{d^2M_v}{dx^2} = \frac{2}{b}\cdot(m_u + m_o) - q - \frac{h}{2}\cdot\left(\frac{dt_o}{dx} + \frac{dt_u}{dx}\right) \qquad \textbf{[A5]}$$

Samband mellan välvspänningar och välvsnittkrafter:

$$\sigma_o = \left|\frac{N_v}{A_v} + \frac{M_v}{W_v}\right| \qquad \text{(Naviers formler)} \qquad \textbf{[A6]}$$

$$\sigma_u = \left|-\frac{N_v}{A_v} + \frac{M_v}{W_v}\right| \qquad \textbf{[A7]}$$

A_v = Area vertikalvägg
W_v = Böjmotstånd vertikalvägg

Kombinering av **[A6]** och **[A7]** ger:

$$M_v = \frac{1}{12}\cdot(\sigma_o + \sigma_u)\cdot A_v \cdot h \qquad \textbf{[A8]}$$

$$N_v = \frac{1}{2}\cdot(\sigma_o - \sigma_u)\cdot A_v \qquad \textbf{[A9]}$$

Derivering av **[A8]** två gånger ger:

$$\frac{d^2M_v}{dx^2} = \left(\frac{d^2\sigma_o}{dx^2} + \frac{d^2\sigma_u}{dx^2}\right)\cdot\frac{A_v \cdot h}{12} \qquad \textbf{[A10]}$$

[A10] insatt i **[A5]** ger:

$$\left(\frac{d^2\sigma_o}{dx^2} + \frac{d^2\sigma_u}{dx^2}\right)\cdot\frac{A_v}{12} + \left(\frac{dt_o}{dx} + \frac{dt_u}{dx}\right)\cdot\frac{1}{2} - \frac{2(m_o + m_u)}{b\cdot h} + \frac{q}{h} = 0 \qquad \textbf{[A11]}$$

Derivering av **[A9]** två gånger ger:

$$\frac{d^2N_v}{dx^2} = \left(\frac{d^2\sigma_o}{dx^2} - \frac{d^2\sigma_u}{dx^2}\right)\cdot\frac{A_v}{2} \qquad \textbf{[A12]}$$

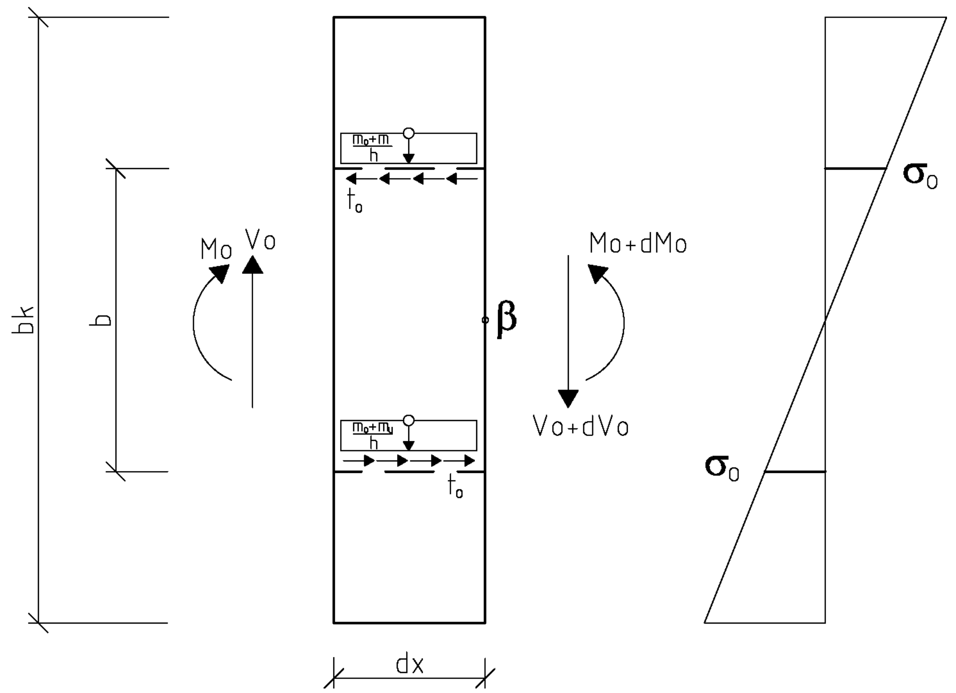
Derivering av **[A1]** en gång ger:

$$\frac{d^2N_v}{dx^2} = \frac{dt_u}{dx} - \frac{dt_o}{dx} \qquad \textbf{[A13]}$$

[A12] insatt i **[A13]** ger:

$$\left(\frac{d^2\sigma_o}{dx^2} - \frac{d^2\sigma_u}{dx^2}\right)\cdot\frac{A_v}{12} + \left(\frac{dt_o}{dx} - \frac{dt_u}{dx}\right) = 0 \qquad \textbf{[A14]}$$

A.3 Jämvikt för överplatta



Figur A4. *Jämvikt överplatta.*

Jämvikt tvärled:

$$\uparrow: V_o + dV_o - V_o - \frac{2 \cdot (m_u + m_o)}{h} \cdot dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{dV_o}{dx} = \frac{2}{h}(m_u + m_o) \qquad \textbf{[A15]}$$

Momentjämvikt kring punkten β:

$$M_o - (M_o + dM_o) + V_o \cdot dx + \frac{2 \cdot (m_o + m_u)}{h} \cdot \frac{dx^2}{2} + t_o \cdot b \cdot dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$V_o = \frac{dM_o}{dx} - t_o \cdot b \qquad \textbf{[A16]}$$

Derivering av **[A16]** ger:

$$\frac{dV_o}{dx} = \frac{d^2M_o}{dx^2} - \frac{d}{dx} \cdot t_o \cdot b \qquad \textbf{[A17]}$$

Insättning av **[A15]** i **[A17]** ger:

$$\frac{d^2M_o}{dx^2} = \frac{2}{h}(m_u + m_o) + \frac{d}{dx} \cdot t_o \cdot b \qquad \textbf{[A18]}$$

Välvspänningar i hörnpunkter:

$$\sigma_o = \frac{M_o \cdot 6 \cdot b}{A_o \cdot b_k^{\ 2}} \qquad \textbf{[A19]}$$

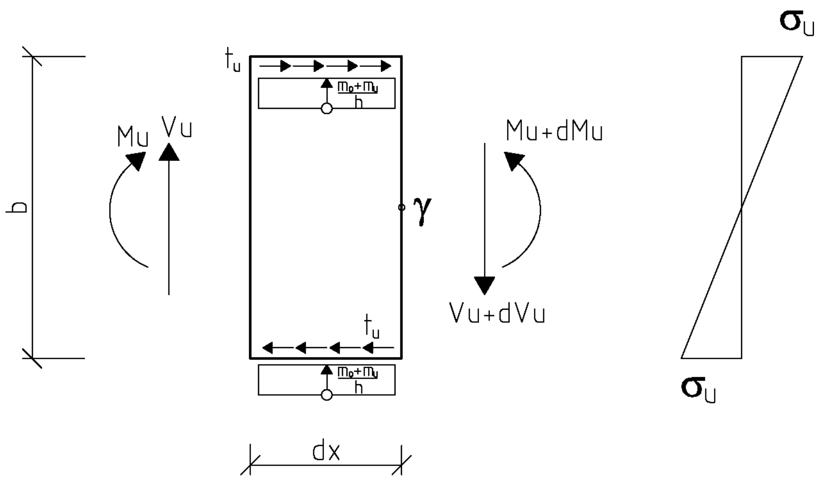
Derivering av **[A19]** två gånger ger:

$$\frac{d^2\sigma_o}{dx^2} = \frac{d^2M_o}{dx^2} \cdot \frac{6 \cdot b}{A_o \cdot b_k^{\ 2}} \qquad \textbf{[A20]}$$

Kombinering av **[A18]** och **[A20]** ger:

$$\frac{dt_o}{dx} = \frac{d^2\sigma_o}{dx^2} \cdot \frac{A_o \cdot b_k^{\ 2}}{6 \cdot b^2} - \frac{2}{h \cdot b}\left(m_u + m_o\right) \qquad \textbf{[A21]}$$

A.4 Jämvikt underplatta



Figur A5. *Jämvikt underplatta.*

Jämvikt tvärled:

$$\uparrow: V_u - \left(dV_u + V_u\right) + \frac{2 \cdot \left(m_u + m_o\right)}{h} \cdot dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{dV_u}{dx} = \frac{2}{h}\left(m_u + m_o\right) \qquad \textbf{[A22]}$$

Momentjämvikt kring punkten γ:

$$M_u + dM_u - M_u - V_u \cdot dx - \frac{2 \cdot \left(m_o + m_u\right)}{h} \cdot \frac{dx^2}{2} - t_u \cdot b \cdot dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$V_u = \frac{dM_u}{dx} - t_u \cdot b$$ **[A23]**

Derivering av **[A23]** ger:

$$\frac{dV_u}{dx} = \frac{d^2M_u}{dx^2} - \frac{d}{dx} \cdot t_u \cdot b$$ **[A24]**

Kombinering av **[A22]** och **[A24]** ger:

$$\frac{d^2M_u}{dx^2} = \frac{d}{dx} \cdot t_u \cdot b + \frac{2}{h}(m_u + m_o)$$ **[A25]**

<u>Välvspänningar i hörnpunkter:</u>

$$\sigma_u = \frac{6 \cdot M_u}{A_u \cdot b}$$ **[A26]**

Derivering av **[A26]** två gånger ger:

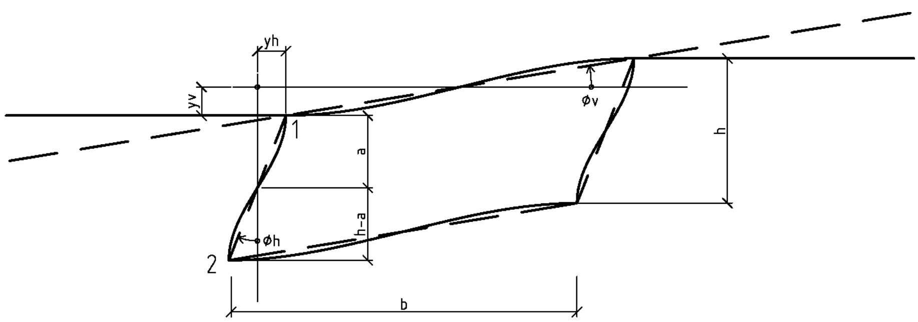
$$\frac{d^2\sigma_u}{dx^2} = \frac{d^2M_u}{dx^2} \cdot \frac{6}{A_u \cdot b}$$ **[A27]**

Kombination av **[A25]** och **[A27]** ger:

$$\frac{dt_u}{dx} = \frac{d^2\sigma_u}{dx^2} \cdot \frac{A_u}{6} - \frac{2}{h \cdot b}(m_u + m_o)$$ **[A28]**

A.5 Samband mellan hörnmoment och krökning i sidovägg

Tvärsnittet deformeras enligt ***figur A6*** nedan. Avståndet mellan vertikalskivans ovankant och väggens inflektionspunkt betecknas a. Väggskivans vertikala translation betecknas y_v och den horisontella y_h. Alla deformationer antas vara små.



Figur A6. *Deformation av tvärsnitt.*

Eftersom deformationsantagandet är förenklat till att hörnen förblir 90° och ej roterar blir a=h/2 om den vertikala väggen har konstant styvhet.
Samband mellan moment och krökning enligt elastiska linjen ger:

$$\frac{d^2y_v}{dx^2} = -\frac{M_v(x)}{E \cdot I_v} = \frac{M_v(x) \cdot 12}{E \cdot A_v \cdot h^2}$$

Med hjälp av **[A8]** fås:

$$\frac{d^2y_v}{dx^2} = -\frac{\sigma_o + \sigma_u}{h \cdot E} \qquad \textbf{[A29]}$$

<u>Uttryck för vinkeländring:</u>

$$\phi_v = \frac{2 \cdot y_v}{b} \qquad \textbf{[A30]}$$

Derivering av **[A30]** två gånger ger:

$$\frac{d^2\phi_v}{dx^2} = \frac{d^2y_v}{dx^2} \cdot \frac{2}{b} \qquad \textbf{[A31]}$$

[A29] i **[A31]** ger:

$$\frac{d^2\phi_v}{dx^2} = -\frac{\sigma_o + \sigma_u}{h \cdot E} \cdot \frac{2}{b} \qquad \textbf{[A32]}$$

A.6 Samband mellan hörnmoment och krökning i överplatta

På samma sätt som för vertikalvägg fås följande samband:

$$\frac{d^2y_h}{dx^2} = -\frac{2 \cdot \sigma_o}{E \cdot b} \qquad \textbf{[A33]}$$

<u>Uttryck för vinkeländring:</u>

$$\phi_h = \frac{y_h}{a} \qquad \textbf{[A34]}$$

Derivering av **[A34]** två gånger och insättning av **[A33]** ger:

$$\frac{d^2\phi_h}{dx^2} = -\frac{2 \cdot \sigma_o}{E \cdot a \cdot b} \qquad \textbf{[A35]}$$

A.7 Samband mellan hörnmoment och krökning i underplatta

På samma sätt som för vertikalvägg fås följande samband:

$$\frac{d^2 y_h}{dx^2} = -\frac{2 \cdot \sigma_u}{E \cdot b} \qquad \textbf{[A36]}$$

<u>Uttryck för vinkeländring:</u>

$$\phi_h = \frac{y_h}{h - a} \qquad \textbf{[A37]}$$

Derivering av **[A37]** två gånger och insättning av **[A36]** ger:

$$\frac{d^2 \phi_h}{dx^2} = -\frac{2 \cdot \sigma_u}{E \cdot (h - a) \cdot b} \qquad \textbf{[A38]}$$

Kombinering av **[A35]** och **[A38]** ger:

$$\frac{d^2 \phi_h}{dx^2} = -\frac{2 \cdot (\sigma_o + \sigma_u)}{E \cdot b \cdot h} \qquad \textbf{[A39]}$$

Jämförelse mellan **[A32]** och **[A39]** ger:

$$\frac{d^2 \phi_h}{dx^2} = \frac{d^2 \phi_v}{dx^2}$$

A.8 Koppling av upprättade samband

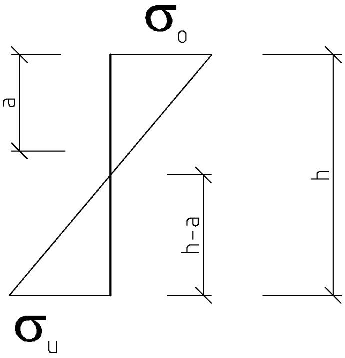
Insättning av **[A21]** och **[A28]** i **[A14]** ger:

$$\frac{d^2 \sigma_u}{dx^2} \cdot (3 \cdot A_v + A_u) = \frac{d^2 \sigma_o}{dx^2} \cdot \left(3 \cdot A_v + A_o \cdot \left(\frac{b_k}{b} \right)^2 \right) \qquad \textbf{[A40]}$$

Med samma randvillkor för spänningarna och deras andraderivator erhålls:

$$\sigma_u = \sigma_o \cdot \frac{3 \cdot A_v + A_o \cdot \left(\frac{b_k}{b} \right)^2}{3 \cdot A_v + A_u} = \alpha \cdot \sigma_o \qquad \textbf{[A41]}$$

Detta på grund av följande:



$$\frac{\sigma_o}{\sigma_u} = \frac{a}{h-a} = \alpha$$
$$\sigma_o = \alpha \cdot \sigma_u$$
$$\sigma_o' = \alpha \cdot \sigma_u'$$
$$\sigma_o'' = \alpha \cdot \sigma_u''$$
$$\text{ty } \alpha(x) = \text{konstant}$$

Insättning av **[A41]**, **[A21]** och **[A28]** i **[A11]** ger:

$$\frac{d^2\sigma_o}{dx^2} \cdot \left((1+\alpha) \cdot A_v + A_o \cdot \left(\frac{b_k}{b} \right)^2 + \alpha \cdot A_u \right) - \frac{48 \cdot (m_o + m_u)}{b \cdot h} + \frac{12 \cdot q}{h} = 0 \qquad \textbf{[A42]}$$

Ett samband mellan m_o och m_u söks nu. ***Figur A6*** ovan ger kordornas lägen efter deformation. Den totala vinkeländringen i knut 1 är lika med den totala vinkeländringen i knut 2. Detta ger med hjälp av elementarfall:

$$\frac{m_o \cdot b}{3 \cdot E \cdot i_o} - \frac{m_o \cdot b}{6 \cdot E \cdot i_o} + \frac{m_o \cdot h}{3 \cdot E \cdot i_v} - \frac{m_u \cdot h}{6 \cdot E \cdot i_v} = \frac{m_u \cdot h}{3 \cdot E \cdot i_v} - \frac{m_o \cdot h}{6 \cdot E \cdot i_v} + \frac{m_u \cdot b}{3 \cdot E \cdot i_u} - \frac{m_u \cdot b}{6 \cdot E \cdot i_u} \Leftrightarrow$$

$$m_u = m_o \cdot \frac{\frac{3 \cdot h}{i_v} + \frac{b}{i_o}}{\frac{3 \cdot h}{i_v} + \frac{b}{i_u}} = m_o \cdot \beta \qquad \textbf{[A43]}$$

i_v = vertikalväggens tröghetsmoment/m kring x- axel
i_o = överplattans tröghetsmoment/m kring x- axel
i_u = underplattans tröghetsmoment/m kring x- axel

Vinkeländringen i knut 1 tecknas:

$$\phi_h + \phi_v = \frac{m_o \cdot b}{3 \cdot E \cdot i_o} - \frac{m_o \cdot b}{6 \cdot E \cdot i_o} + \frac{m_o \cdot h}{3 \cdot E \cdot i_v} - \frac{\beta \cdot m_o \cdot h}{6 \cdot E \cdot i_v}$$

Förenkling, derivering och användning av **[A39]** ger:

$$-\frac{4 \cdot (\sigma_o + \sigma_u)}{E \cdot b \cdot h} = \frac{d^2 m_o}{dx^2} \cdot \frac{b}{6 \cdot E \cdot i_o} + \frac{d^2 m_o}{dx^2} \cdot \frac{h}{3 \cdot E \cdot i_v} - \frac{d^2 m_o}{dx^2} \cdot \frac{\beta \cdot h}{6 \cdot E \cdot i_v} \qquad \textbf{[A44]}$$

Insättning av **[A41]** i **[A44]** ger:

$$\frac{24 \cdot \sigma_o \cdot (1+\alpha)}{b \cdot h} + \frac{d^2 m_o}{dx^2} \cdot \left(\frac{b}{i_o} + \frac{h \cdot (2-\beta)}{i_v} \right) = 0 \qquad \textbf{[A45]}$$

Efter omformning erhålls:

$$\frac{d^2 m_o}{dx^2} + \sigma_o \cdot \frac{24 \cdot (1+\alpha)}{b \cdot h \cdot \left(\frac{b}{i_o} + \frac{h \cdot (2-\beta)}{i_v} \right)} = 0 \qquad \textbf{[A46]}$$

Insättning av **[A43]** i **[A42]** ger:

$$m_o = \frac{q \cdot b}{4 \cdot (1+\beta)} + \frac{d^2 \sigma_o}{dx^2} \cdot \frac{b \cdot h}{48 \cdot (1+\beta)} \cdot \left((1+\alpha) \cdot A_v + A_o \cdot \left(\frac{b_k}{b} \right)^2 + \alpha \cdot A_u \right) \qquad \textbf{[A47]}$$

Ekvationerna **[A46]** och **[A47]** bildar det sökta differentialekvationssystemet med m_o och σ_o som huvudvariabler.

Derivering av **[A47]** två gånger och insättning i **[A46]** ger:

$$\frac{d^4 \sigma_o}{dx^4} + 4 \cdot k^4 \cdot \sigma_o = 0 \qquad \textbf{[A48]}$$

där

$$k = \sqrt[4]{\frac{288 \cdot (1+\alpha) \cdot (1+\beta)}{(b \cdot h)^2 \cdot \left((1+\alpha) \cdot A_v + A_o \cdot \left(\frac{b_k}{b} \right)^2 + \alpha \cdot A_u \right) \cdot \left(\frac{b}{i_o} + \frac{h \cdot (2-\beta)}{i_v} \right)}}$$

A.9 Allmänna lösningen till differentialekvationen [A48]

Den allmänna lösningen ges av:

$$\sigma_o = C_1 \cdot \sinh(k \cdot x) \cdot \cos(k \cdot x) + C_2 \cdot \cosh(k \cdot x) \cdot \cos(k \cdot x) + C_3 \cdot \cosh(k \cdot x) \cdot \sin(k \cdot x) + \\ + C_4 \cdot \sinh(k \cdot x) \cdot \sin(k \cdot x)$$

Konstanterna, $C_{1\text{-}4}$, löses ut med hjälp av randvillkor.

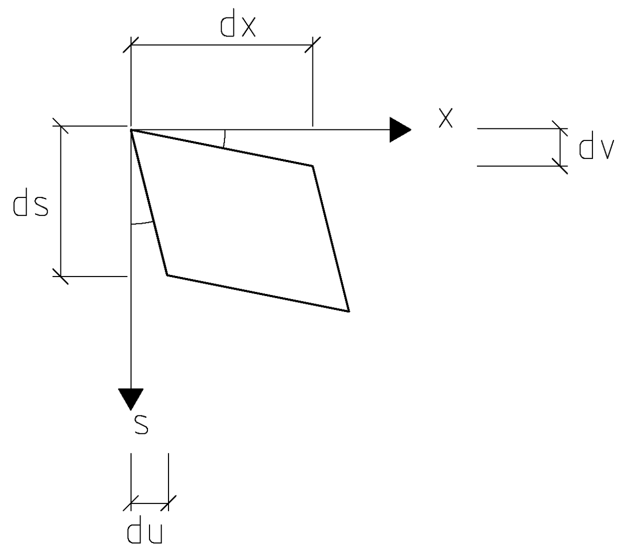
B Appendix. Odeformerat tvärsnitt

I detta appendix härleds normerad sektoriell koordinat för ett tvärsnitt med både slutna och öppna delar. Appendix förtydligar även uttrycken för bimoment, välvspänningar och välvfunktion.

B.1 Sektoriell koordinat

B.1.1 Skjuvtöjning

Skjuvtöjning för ett infinit litet element enligt ***figur B1*** kan uttryckas enligt ekvation **[B1]**.



Figur B1. *Infinitesimalt element.*

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \qquad \textbf{[B1]}$$

B.1.2 Öppna tunnväggiga tvärsnittsdelar

Enligt tidigare kapitel kan skjuvtöjningar för öppna tvärsnittsdelar försummas.

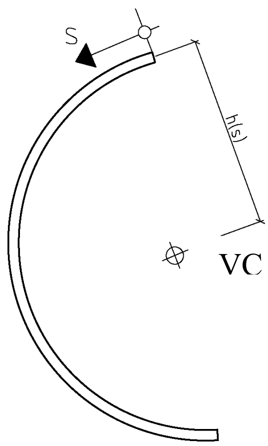
$$\gamma_{xs} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \qquad \textbf{[B2]}$$

Förskjutningen v är parallell med s-axeln och kan skrivas enligt **[B3]**.

$$v(x,s) = h(s) \cdot \varphi(x) \qquad \textbf{[B3]}$$

h(s) = vinkelräta avståndet mellan s-axelns tangent i punkten s och vridcentrum, se ***figur B2*** nedan.
φ(x) = tvärsnittets vridningsvinkel

Ekvation **[B3]** insatt i **[B1]** samt integrerat över intervallet s_0 till s.



Figur B2. Definition av h(s).

$$\int_{s_0}^{s} \frac{\partial u}{\partial s} ds + \int_{s_0}^{s} \frac{\partial (h(s) \cdot \varphi(x))}{\partial x} ds \Leftrightarrow u(x,s) - u(x,s_0) + \int_{s_0}^{s} h(s) ds \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} = 0$$

Välvförskjutningen blir:

$$u(x,s) = u(x,s_0) - \int_{s_0}^{s} h(s) ds \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

B.1.3 Slutna tunnväggiga tvärsnittsdelar

Enligt tidigare kapitel kan inte skjuvtöjningarna försummas för slutna tunnväggiga tvärsnitt. Skjuvspänningen i tvärsnittet är summan av Saint Venantska och Vlasovska skjuvspänningar. Skjuvtöjning på grund av Vlasovska skjuvspännigar försummas men skjuvtöjning på grund av Saint Venantska skjuvspänningar försummas ej. Skjuvtöjningen blir därmed enligt uttryck **[B4]**.

$$\gamma_{xs} = \frac{\tau_{xs}}{G} \qquad \textbf{[B4]}$$

τ_{xs} beräknas enligt teori för ren Saint Venantsk vridning.

$$\tau_{xs} = \frac{T_{sv}(x)}{2 \cdot A_c \cdot t(s)} \qquad \textbf{[B5]}$$

A_c= är arean mellan väggarnas medellinjer

Genom att sätta in **[B5]** i **[B4]** fås:

$$\gamma_{xs} = \frac{T_{sv}(x)}{2 \cdot A_c \cdot t(s) \cdot G}$$

Sambandet kan skrivas enligt nedan.

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{T_{sv}(x)}{2\cdot A_c\cdot t(s)\cdot G} \qquad \textbf{[B6]}$$

Integrera **[B6]** över intervallet s_0 till s.

$$\int_{s_0}^{s}\frac{\partial u}{\partial s}ds+\int_{s_0}^{s}\frac{\partial v}{\partial x}ds=\int_{s_0}^{s}\frac{T_{sv}(x)}{2\cdot A_c\cdot t(s)\cdot G}ds \Leftrightarrow$$

$$u(x,s)-u(x,s_0)+\int_{s_0}^{s}h(s)ds\frac{d\varphi(x)}{dx}=\int_{s_0}^{s}\frac{T_{sv}(x)}{2\cdot A_c\cdot t(s)\cdot G}ds \qquad \textbf{[B7]}$$

$$T_{sv}(x)=G\cdot K_v\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx}\ \text{(snittvridmoment)}$$

$$K_v=\frac{4\cdot A_c^2}{\oint\frac{1}{t(s)}ds}$$

$T_{sv}(x)$ och K_v insatt i **[B7]** ger:

$$u(x,s)=u(x,s_0)-\frac{d\varphi(x)}{dx}\left(\int_{s_0}^{s}h(s)ds-\frac{2\cdot A_c}{\oint\frac{1}{t(s)}ds}\cdot\oint_{s_0-s}\frac{1}{t(s)}ds\right)$$

B.1.4 Sektoriella koordinaten

Välvspänningen är proportionell mot den axiella töjningen, vilken är:

$$\frac{du(x,s)}{dx}$$

Den sektoriella koordinaten beskriver välvspänningsfördelningen i tvärsnittet och blir enligt nedan:

Öppna tvärsnittsdelar: $\Omega(s)=\int_{s_0}^{s}h(s)ds$

Slutna tvärsnittsdelar: $\Omega(s)=\int_{s_0}^{s}h(s)ds-\frac{2\cdot A_c}{\oint\frac{1}{t(s)}ds}\oint_{s_0-s}\frac{1}{t(s)}ds$

För att normera den sektoriella koordinaten placeras s-axelns nollpunkt i ett symmetrisnitt och s_0=0. Om tvärsnittet ej är belastat med normalkraft är u(x,0)=0, vilket betyder att även den sektoriella koordinaten är noll vid s=0.

Normerad sektoriell koordinat för ett tunnväggigt tvärsnitt med öppna och slutna tvärsnittsdelar blir därmed enligt nedan:

$$\omega(s) = \int_0^s h(s)ds - \frac{2 \cdot A_c}{\oint \frac{1}{t(s)} ds} \oint_{0-s} \frac{1}{t(s)} ds = \int_0^s h(s)ds - \frac{K_v}{2 \cdot A_c} \oint_{0-s} \frac{1}{t(s)} ds$$

Där den första termen appliceras på hela tvärsnittet och den andra termen endast på slutna tvärsnittsdelar.

B.2 Välvfunktion

Profilen är i sig själv välvförhindrad på grund av att den delvis är sluten. Detta medför att man måste införa en välvfunktion enligt **[B8]**.

$$f'(x) = \frac{T(x)}{G \cdot I_c} \cdot \rho - \rho \frac{d\varphi(x)}{dx} \qquad \textbf{[B8]}$$

Om balken är belastad med ett konstant utbrett vridmoment, q_ω, gäller följande:

$$q_\omega = -\frac{dT(x)}{dx}$$

Välvfunktionens andraderivata kan då skrivas enligt **[B9]**.

$$f''(x) = -\frac{q_\omega}{G \cdot I_c} \cdot \rho - \rho \cdot \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\rho\left(\frac{q_\omega}{G \cdot I_c} + \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\right) \qquad \textbf{[B9]}$$

B.3 Välvspänning

$$\sigma_\omega = E \cdot \varepsilon(x) \qquad \textbf{[B10]}$$

ε(x) är töjningen i x-led och kan skrivas enligt nedan.

$$\varepsilon(x) = -\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \cdot \left(\int_0^s h(s)ds - \frac{2 \cdot A_c}{\oint \frac{1}{t(s)} ds} \oint_{0-s} \frac{1}{t(s)} ds \right) = -\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \cdot \omega(s) \qquad \textbf{[B11]}$$

Välvspänningen kan därmed skrivas:

$$\sigma_\omega = -E \cdot \omega(s) \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \qquad \textbf{[B12]}$$

B.4 Bimoment

Med hjälp av normerad sektoriell koordinat och välvspänning definieras bimomentet.

$$B(x) = \int_A \omega(s) \cdot \sigma_\omega dA = -E \cdot \int_A (\omega(s))^2 dA \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \qquad \textbf{[B13]}$$

B(x)= bimoment
A= tvärsnittets area

$$K_w = \int_A \omega^2 dA = \text{välvtröghetsmoment} \qquad \textbf{[B14]}$$

Med **[B14]** och **[B9]** insatt i **[B13]** blir bimomntet enligt nedan.

$$B(x) = E \cdot K_w \rho \cdot \left(\frac{q_\omega}{G \cdot I_c} + \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right) \qquad \textbf{[B15]}$$

Samband mellan välvspänning och bimoment fås med hjälp av ekv **[B12]** och **[B13]**.

$$\frac{B(x)}{K_w} = \frac{\sigma_\omega}{\omega(s)} \Leftrightarrow \sigma(x,s) = \frac{B(x) \cdot \omega(s)}{K_w}$$

I Bilaga tvärsnittskonstanter

I.1 Slankt tvärsnitt

```
> restart;
Sektoriella koordinaten pkt 1,2 och 3.

> w1:=unapply(e*b/2-Kv*b/(2*Ac*2*tjo),e):
> w2:=unapply(w1(e)+b*h/2-Kv*h/(2*Ac*tjv),e):
> w3:=unapply(w1(e)+e*3.7,e):
Integration enligt villkor: sektoriellkoordinat*y*dA=0
> w1s:=unapply(w1(e)/2.3*s,s):
> w2s:=unapply((w3(e)-w1(e))/3.7*s+w1(e),s):
> w3s:=unapply((w2(e)-w1(e))/1.91*s+w1(e),s):
> :w4s:=unapply(-w2(e)/2.3*s+w2(e),s):
> del1:=unapply(int(w1s(s)*s*tjo,s=0..2.3),e):
> del2:=unapply(int((w2s(s))*(2.3+s)*tjo,s=0..3.7),e):
> del3:=unapply(int((w3s(s))*b/2*tjv,s=0..1.91),e):
> del4:=unapply(int((w4s(s))*s*tju,s=0..2.3),e):
> sumdel:=unapply(del1(e)+del2(e)+del3(e)+del4(e),e):

Tvärsnittskonstanter

> b:=4.6:
> h:=1.91:
> Ac:=b*h:
> tjo:=0.1:
> tjv:=0.2:
> tju:=0.1:
> Kv:=4*Ac^2/(b/tjo+2*h/tjv+b/tju):
> sumdel(e):
> e:=solve(sumdel(e)=0,e):
Kw:=2*(tjo*(int((w1s(s))^2,s=0..2.3)+int((w2s(s))^2,s=0..3.7))+tjv*int((w3s(s))^2,s
=0..1.91)+tju*int((w4s(s))^2,s=0..2.3)):
> w1(e):
> w2(e):
> w3(e):

Centrala tröghetsmomentet

> Ih:=b*tjo*e^2+b*tju*(h-e)^2+2*tjv*(b/2)^2*h:
> rho:=Ih/(Ih-Kv):
```

I.2 Normalt tvärsnitt

```
> restart;
Sektoriellakoordinaten pkt 1,2 och 3.
> w1:=unapply(e*b/2-Kv*b/(2*Ac*2*tjo),e):
> w2:=unapply(w1(e)+b*h/2-Kv*h/(2*Ac*tjv),e):
> w3:=unapply(w1(e)+e*3.7,e):
```

Integration enligt villkor: sektoriellkoordinat*y*dA=0

```
> w1s:=unapply(w1(e)/2.3*s,s):
> w2s:=unapply((w3(e)-w1(e))/3.7*s+w1(e),s):
> w3s:=unapply((w2(e)-w1(e))/1.91*s+w1(e),s):
> w4s:=unapply(-w2(e)/2.3*s+w2(e),s):
> del1:=unapply(int(w1s(s)*s*tjo,s=0..2.3),e):
> del2:=unapply(int((w2s(s))*(2.3+s)*tjo,s=0..3.7),e):
> del3:=unapply(int((w3s(s))*b/2*tjv,s=0..1.91),e):
> del4:=unapply(int((w4s(s))*s*tju,s=0..2.3),e):
> sumdel:=unapply(del1(e)+del2(e)+del3(e)+del4(e),e):
```

Tvärsnittskonstanter

```
> E:=30e9:
> G:=0.4*E:
> q:=4.6*8e3:
> L:=30:
> b:=4.6:
> h:=1.91:
> Ac:=b*h:
> tjo:=0.2:
> tjv:=0.4:
> tju:=0.18:
> Kv:=4*Ac^2/(b/tjo+2*h/tjv+b/tju):
> sumdel(e):
> e:=solve(sumdel(e)=0,e):
Kw:=2*(tjo*(int((w1s(s))^2,s=0..2.3)+int((w2s(s))^2,s=0..3.7))+tjv*int((w3s(s))^2,s
=0..1.91)+tju*int((w4s(s))^2,s=0..2.3)):
> w1(e):
> w2(e):
> w3(e):
```

Centrala tröghetsmomentet

```
> Ih:=b*tjo*e^2+b*tju*(h-e)^2+2*tjv*(b/2)^2*h:
> rho:=Ih/(Ih-Kv):
```

I.3 Grovt tvärsnitt

```
> restart;
```

Sektoriellakoordinaten pkt 1,2 och 3.

```
> w1:=unapply(e*b/2-Kv*b/(2*Ac*2*tjo),e):
> w2:=unapply(w1(e)+b*h/2-Kv*h/(2*Ac*tjv),e):
> w3:=unapply(w1(e)+e*3.7,e):
```

Integration enligt villkor: sektoriellkoordinat*y*dA=0

```
> w1s:=unapply(w1(e)/2.3*s,s):
> w2s:=unapply((w3(e)-w1(e))/3.7*s+w1(e),s):
```

```
> w3s:=unapply((w2(e)-w1(e))/1.91*s+w1(e),s):
> w4s:=unapply(-w2(e)/2.3*s+w2(e),s):
> del1:=unapply(int(w1s(s)*s*tjo,s=0..2.3),e):
> del2:=unapply(int((w2s(s))*(2.3+s)*tjo,s=0..3.7),e):
> del3:=unapply(int((w3s(s))*b/2*tjv,s=0..1.91),e):
> del4:=unapply(int((w4s(s))*s*tju,s=0..2.3),e):

> sumdel:=unapply(del1(e)+del2(e)+del3(e)+del4(e),e):
>
```

Tvärsnittskonstanter

```
> b:=4.6:
> h:=1.91:
> Ac:=b*h:
> tjo:=0.4:
> tjv:=0.8:
> tju:=0.4:
> Kv:=4*Ac^2/(b/tjo+2*h/tjv+b/tju):
> sumdel(e):
> e:=solve(sumdel(e)=0,e):
Kw:=2*(tjo*(int((w1s(s))^2,s=0..2.3)+int((w2s(s))^2,s=0..3.7))+tjv*int((w3s(s))^2,s
=0..1.91)+tju*int((w4s(s))^2,s=0..2.3)):
> w1(e):
> w2(e):
> w3(e):
```

Centralatröghetsmomentet

```
> Ih:=b*tjo*e^2+b*tju*(h-e)^2+2*tjv*(b/2)^2*h:
> rho:=Ih/(Ih-Kv):
>
```

II Bilaga odeformerbart tvärsnitt med blandad vridning

II.1 Generellt uttryck för differentialekvation

Vridningsvinkel för balk som funktion av x. Konstanter A, B, C och D bestäms med hjälp av randvillkor.

```
> restart;
```

Ansättning av vridningsvinkelns funktion:

```
> fi1:=unapply(C1*cosh(c*x)+C2*sinh(c*x)+C3*x+C4-
q*x^2/(2*G*Kv),x,C1,C2,C3,C4):
> fi1prim:=unapply(diff(fi1(x,C1,C2,C3,C4),x),x):
> fi1bis:=unapply(diff(fi1prim(x),x),x):
> fi1tris:=unapply(diff(fi1bis(x),x),x):
> fi1fyr:=unapply(diff(fi1tris(x),x),x):
> c:=sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw)):
```

II.2 Randvillkor för utbredda antisymmetriska laster

Vridningsvinkeln är noll vid x=0 och x=L ty gaffellagring. Fri välvning innebär att bimomentet är noll vid x=0 och x=L vilket medför att φ´´ är noll.

```
> fi1(0,C1,C2,C3,C4):
> fi1bis(0):
> fi1(L,C1,C2,C3,C4):
> fi1bis(L):
```

II.3 Randvillkor för antisymmetriska punktlaster

Vridningsvinkeln är noll vid x=0 ty gaffellagring. Fri välvning innebär att bimomentet är noll vid x=0 vilket medför att φ´´ är noll. Vid x=L/2 ges randvillkoren av elementarfall.

```
> fi1(0,C1,C2,C3,C4):
> fi1bis(0):
> fi1(L/2,C1,C2,C3,C4):
> fi1prim(L/2):
> alpha:=-G*Kv/(Pi^2*rho*E*Kw/L^2):
> v:=Pi*sqrt(-alpha)/2:
```

II.4 Generell lösning av ekvationssystem, utbredda antisymmetriska laster

Diffekvationssystemet som fås med randvillkoren ovan skrivs på matrisform och konstanterna löses ut (AB=C).

```
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected
```

```
>A:=array([[1,0,0,1],[G*Kv/(rho*E*Kw),0,0,0],[cosh(sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*L),sinh(sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*L),L,1],[cosh(sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*L)*G*Kv/(rho*E*Kw),sinh(sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*L)*G*Kv/(rho*E*Kw),0,0]]):
> C:=array([[0],[q/(G*Kv)-q/(G*Ih)],[1/2*q*L^2/(G*Kv)],[q/(G*Kv)-q/(G*Ih)]]):
> invA:=inverse(A):
> B:=multiply(invA,C):
> fi1x:=unapply(fi1(x,B[1,1],B[2,1],B[3,1],B[4,1]),x):
```

II.5 Generell lösning av ekvationssystem, antisymmetriska punktlaster

Diffekvationssystemet som fås med randvillkoren ovan skrivs på matrisform och konstanterna löses ut (AB=C).

```
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

>A:=array([[1,0,0,1],[G*Kv/(rho*E*Kw),0,0,0],[cosh(1/2*sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*L),sinh(1/2*sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*L),L/2,1],[sinh(1/2*sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*L)*sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw)),cosh(1/2*sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*L)*sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw)),1,0]]):
> C:=array([[0],[0],[T*L*(1-tanh(v)/(rho*v))/(4*G*Kv)],[T*(1-1/rho)/(2*G*Kv)]]):
> invA:=inverse(A):
> B:=multiply(invA,C):
> fi1x:=unapply(fi1(x,B[1,1],B[2,1],B[3,1],B[4,1]),x):
```

II.6 Slankt tvärsnitt

II.6.1 Utbredda antisymmetriska laster

```
> rho := 2.318679668:
> Kv := 2.779254582:
> L:=30:
> q:=36800:
> Kw := 1.847532576:
> G:=0.4*30*10^9:
> E:=30*10^9:
> Ih:=4.886858612:
> plot(fi1x(x),x=0..15):
> fi1x(x):
> fi1xprim:=unapply(diff(fi1x(x),x),x):
> fi1xbis:=unapply(diff(fi1xprim(x),x),x):
> w1 :=-1.630621326:
> sigmao:=unapply(-rho*E*(fi1xbis(x)+q/(G*Ih))*w1,x):
> w2:=1.251914227:
> w3:=1.598266444:
```

Välvspänningar i hörnpkt.

```
> plot(sigmao(x),x=0..15):
```

Spänningar i punkt 1

```
> sigmao(x):
> sigmao(15):
> sigmao(7.5):
```

Spänningar i punkt 2

```
> sigmao2:=unapply(-rho*E*(fi1xbis(x)+q/(G*Ih))*w2,x):
> sigmao2(15):
> sigmao2(7.5):
```

Spänningar i punkt 3

```
> sigmao3:=unapply(-rho*E*(fi1xbis(x)+q/(G*Ih))*w3,x):
> sigmao3(15):
> sigmao3(7.5):
```

II.6.2 Antisymmetriska punktlaster

```
> rho :=2.318679668:
> Kv :=2.779254582:
> L:=30:
> T:=250000*4.6:
> Kw :=1.847532576:
> G:=0.4*30*10^9:
> E:=30*10^9:
> plot(fi1x(x),x=0..15):
> fi1x(x):
> fi1xprim:=unapply(diff(fi1x(x),x),x):
> fi1xbis:=unapply(diff(fi1xprim(x),x),x):
> w1 :=-1.630621326:
> sigmao:=unapply(-rho*E*fi1xbis(x)*w1,x):
> w3:=1.598266444:
> w2:=1.251914227:
```

Välvspänningar i hörnpkt.

```
> plot(sigmao(x),x=0..15):
```

Spänningar i punkt 1

```
> sigmao(15):
> sigmao(7.5):
```

Spänningar i punkt 2

```
> sigmao2:=unapply(-rho*E*fi1xbis(x)*w2,x):
> sigmao2(15):
> sigmao2(7.5):
```

Spänningar i punkt 3

```
> sigmao3:=unapply(-rho*E*fi1xbis(x)*w3,x):
> sigmao3(15):
> sigmao3(7.5):
```

II.7 Normalt tvärsnitt

II.7.1 Utbredda antisymmetriska laster

```
> rho := 2.216008757:
> Kv := 5.314038924:
> L:=30:
> q:=36800:
> Kw := 3.560604734:
> G:=0.4*30*10^9:
> E:=30*10^9:
> Ih:=9.684105252:
> plot(fi1x(x),x=0..15):
> fi1x(x):
> fi1xprim:=unapply(diff(fi1x(x),x),x):
> fi1xbis:=unapply(diff(fi1xprim(x),x),x):
> w1 := -1.580833974:
> sigmao:=unapply(-rho*E*(fi1xbis(x)+q/(G*Ih))*w1,x):
> w2:=1.368133711:
> w3:=1.470765463:
```

Välvspnningar i hörnpkt.

```
> plot(sigmao(x),x=0..15):
> sigmao(x):
> svar:=fi1fyr(x)-(G*Kv/(rho*E*Kw))*fi1bis(x)-q/(rho*E*Kw):
> fi1fyr(10):
```

Spänningar i punkt 1

```
> sigmao(15):
> sigmao(7.5):
```

Spänningar i punkt 2

```
> sigmao2:=unapply(-rho*E*(fi1xbis(x)+q/(G*Ih))*w2,x):
> sigmao2(15):
> sigmao2(7.5):
```

Spänningar i punkt 3

```
> sigmao3:=unapply(-rho*E*(fi1xbis(x)+q/(G*Ih))*w3,x):
> sigmao3(15):
> sigmao3(7.5):
```

II.7.2 Antisymmetriska punktlaster

```
> rho := 2.216008757:
> Kv := 5.314038924:
> L:=30:
> T:=250000*4.6:
> Kw := 3.560604734:
> G:=0.4*30*10^9:
> E:=30*10^9:
> plot(fi1x(x),x=0..15):
> fi1x(x):
> fi1xprim:=unapply(diff(fi1x(x),x),x):
> fi1xbis:=unapply(diff(fi1xprim(x),x),x):
> w1 := -1.580833974:
> sigmao:=unapply(-rho*E*fi1xbis(x)*w1,x):
> w3:=1.470765463:
> w2:=1.368133711:
```

Välvspänningar i hörnpkt.

```
> plot(sigmao(x),x=0..15):
```

Spänningar i punkt 1

```
> sigmao(15):
> sigmao(7.5):
```

Spänningar i punkt 2

```
> sigmao2:=unapply(-rho*E*fi1xbis(x)*w2,x):
> sigmao2(15):
> sigmao2(7.5):
```

Spänningar i punkt 3

```
> sigmao3:=unapply(-rho*E*fi1xbis(x)*w3,x):
> sigmao3(15):
> sigmao3(7.5):
```

II.8 Grovt tvärsnitt

II.8.1 Utbredda antisymmetriska laster

```
> rho :=2.318679667 :
> Kv :=11.11701832 :
> L:=30:
> q:=36800:
> Kw :=7.390130304 :
> G:=0.4*30*10^9:
> E:=30*10^9:
```

```
> Ih:=19.54743444:
> plot(fi1x(x),x=0..15):
> fi1x(x):
> fi1xprim:=unapply(diff(fi1x(x),x),x):
> fi1xbis:=unapply(diff(fi1xprim(x),x),x):
> w1 := -1.630621325:
> sigmao:=unapply(-rho*E*(fi1xbis(x)+q/(G*Ih))*w1,x):
> w2:=1.251914229:
> w3:=1.598266442:
```

Välvspänningar i hörnpkt.

```
> plot(sigmao(x),x=0..15):
```

Spänningar i punkt 1

```
> sigmao(x):
> sigmao(15):
> sigmao(7.5):
```

Spänningar i punkt 2

```
> sigmao2:=unapply(-rho*E*(fi1xbis(x)+q/(G*Ih))*w2,x):
> sigmao2(15):
> sigmao2(7.5):
```

Spänningar i punkt 3

```
> sigmao3:=unapply(-rho*E*(fi1xbis(x)+q/(G*Ih))*w3,x):
> sigmao3(15):
> sigmao3(7.5):
```

II.8.2 Antisymmetriska punktlaster

```
> rho := 2.318679667:
> Kv := 11.11701832:
> L:=30:
> T:=250000*4.6:
> Kw :=7.390130304:
> G:=0.4*30*10^9:
> E:=30*10^9:
> plot(fi1x(x),x=0..15):
> fi1x(x):
> fi1xprim:=unapply(diff(fi1x(x),x),x):
> fi1xbis:=unapply(diff(fi1xprim(x),x),x):
> w1 :=-1.630621325:
> sigmao:=unapply(-rho*E*fi1xbis(x)*w1,x):
> w3:=1.598266442:
> w2:=1.251914229:
```

Välvspänningar i hörnpkt.

```
> plot(sigmao(x),x=0..15):
```

Spänningar i punkt 1

```
> sigmao(15):
> sigmao(7.5):
```

Spänningar i punkt 2

```
> sigmao2:=unapply(-rho*E*fi1xbis(x)*w2,x):
> sigmao2(15):
> sigmao2(7.5):
```

Spänningar i punkt 3

```
> sigmao3:=unapply(-rho*E*fi1xbis(x)*w3,x):
> sigmao3(15):
> sigmao3(7.2):
>
```

III Bilaga deformerbart tvärsnitt

Denna bilaga innehåller Maple- kod för beräkningar av hörnmoment och välvspänningar för deformerbart tvärsnitt, jämt utbredda antisymmetriska laster och antisymmetriska punktlaster.

III.1 Generellt uttryck för differentialekvation

```
> restart;
```

Välvspänningar i sidoväggens ovankant som funktion av x. Konstanter A, B, C och D bestäms med hjälp av randvillkor.

```
> sigmao :=
unapply(A*sinh(k*x)*cos(k*x)+B*cosh(k*x)*cos(k*x)+C*cosh(k*x)*sin(k*x)+D*
sinh(k*x)*sin(k*x),x,A,B,C,D,k):
> sigmaoprim:=unapply(diff(sigmao(x,A,B,C,D,k),x),x,A,B,C,D,k):
> sigmaobis:=unapply(diff(sigmaoprim(x,A,B,C,D,k),x),x,A,B,C,D,k):
```

Med hjälp av välvspänningens andraderivata och diffekvationssystemet fås hörnmomentet i sidoväggens ovankant som funktion av x.

```
>mo:=unapply(q*b/(4*(1+beta))+sigmaobis(x,A,B,C,D,k)*b*h/(48*(1+beta))*((1+a
lpha)*Av+Ao*(bk/b)^2+alpha*Au),x,A,B,C,D,k):
> moprim:=unapply(diff(mo(x,A,B,C,D,k),x),x,A,B,C,D,k):
```

III.2 Randvillkor för utbredda antisymmetriska laster

Randvillkor för att bestämma konstantern A, B, C och D. I: Välvspänningen vid x=0, x=L är 0 ty gaffellagring. II:Hörnmoment vid x=0, x=L är 0 ty tvärskott över stöd.

```
> sigmao(0,A,B,C,D,k):
> mo(0,A,B,C,D,k):
> sigmao(L,A,B,C,D,k):
> mo(L,A,B,C,D,k):
```

III.3 Randvillkor för antisymmetriska punktlaster

Randvillkor enligt avsnitt **4.**

```
> sigmao(0,A,B,C,D,k):
> mo(0,A,0,C,D,k):
> sigmaoprim(L/2,A,0,C,D,k):
> moprim(L/2,A,0,C,D,k):
```

III.4 Generell lösning av ekvationssystem, utbredda antisymmetriska laster

```
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected
```

Diffekvationssystemet som fås med randvillkoren ovan skrivs på matrisform och konstanterna löses ut (MP=N).

```
>M:=array([[0,1,0,0],[0,0,0,2*k^2*b*h*((1+alpha)*Av+Ao*bk^2/(b^2)+alpha*Au)/
(48+48*beta)],[sinh(k*L)*cos(k*L),0,cosh(k*L)*sin(k*L),sinh(k*L)*sin(k*L)],[(-
2*cosh(k*L)*k^2*sin(k*L))*b*h*((1+alpha)*Av+Ao*bk^2/(b^2)+alpha*Au)/(48+4
8*beta),cosh(k*L)*cos(k*L),2*sinh(k*L)*k^2*cos(k*L)*b*h*((1+alpha)*Av+Ao*b
k^2/(b^2)+alpha*Au)/(48+48*beta),2*cosh(k*L)*k^2*cos(k*L)*b*h*((1+alpha)*A
v+Ao*bk^2/(b^2)+alpha*Au)/(48+48*beta)]]):
> N:=array([[0],[-q*b/(4+4*beta)],[0],[-q*b/(4+4*beta)]]):
> invM:=inverse(M):
> P:=simplify(multiply(invM,N)):
>sigmaox:=unapply(sigmao(x,P[1,1],P[2,1],P[3,1],P[4,1],k),x,b,k,L,q,h,Av,alpha,Ao
,bk,Au,beta):
> simplify(P):
```

III.5 Generell lösning av ekvationssystem, antisymmetriska punktlaster

```
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected
```

Diffekvationssystemet som fås med randvillkoren ovan skrivs på matrisform och konstanterna löses ut (MP=N).

```
>M:=array([[0,0,2*k^2*b*h*((1+alpha)*Av+Ao*bk^2/(b^2)+alpha*Au)/(48+48*be
ta)],[cosh(1/2*k*L)*k*cos(1/2*k*L)-
sinh(1/2*k*L)*sin(1/2*k*L)*k,sinh(1/2*k*L)*k*sin(1/2*k*L)+cosh(1/2*k*L)*cos(
1/2*k*L)*k,cosh(1/2*k*L)*k*sin(1/2*k*L)+sinh(1/2*k*L)*cos(1/2*k*L)*k],[(-
2*sinh(1/2*k*L)*k^3*sin(1/2*k*L)-
2*cosh(1/2*k*L)*k^3*cos(1/2*k*L))*b*h*((1+alpha)*Av+Ao*bk^2/(b^2)+alpha*
Au)/(48+48*beta),(2*cosh(1/2*k*L)*k^3*cos(1/2*k*L)-
2*sinh(1/2*k*L)*k^3*sin(1/2*k*L))*b*h*((1+alpha)*Av+Ao*bk^2/(b^2)+alpha*A
u)/(48+48*beta),(2*sinh(1/2*k*L)*k^3*cos(1/2*k*L)-
2*cosh(1/2*k*L)*k^3*sin(1/2*k*L))*b*h*((1+alpha)*Av+Ao*bk^2/(b^2)+alpha*A
u)/(48+48*beta)]]):
> N:=array([[-q*b/(4+4*beta)],[F/(2*Z*alpha)],[0]]):
> invM:=inverse(M):
> P:=multiply(invM,N):
>sigmaox:=unapply(sigmao(x,P[1,1],0,P[2,1],P[3,1],k),x,b,k,L,q,h,Av,alpha,Ao,bk,
Au,beta,F):
```

III.6 Slankt tvärsnitt

III.6.1 Utbredda antisymmetriska laster

Värden för aktuellt tvärsnitt

```
> b:=4.6:
> bk:=12:
```

```
> h:=1.91:
> Av:=h*0.2:
> Au:=b*0.1:
> Ao:=bk*0.1:
> alpha:=(3*Av+Ao*(bk/b)^2)/(3*Av+Au):
> iv:=0.2^3/12:
> io:=0.1^3/12:
> iu:=0.1^3/12:
> beta:=(3*h/iv+b/io)/(3*h/iv+b/iu):
> L:=30:
> q:=8000:
>k:=((288*(1+alpha)*(1+beta))/((b*h)^2*((1+alpha)*Av+Ao*(bk/b)^2+Au*alpha)*
(b/io+h*(2-beta)/iv)))^(1/4):
```

Välvspänningen och hörnmomentet som funktion av x i intervallet 0<x<L/2.

```
> plot(sigmaox(x,b,k,L,q,h,Av,alpha,Ao,bk,Au,beta), x=0..30):
> mox:=unapply(mo(x,P[1,1],P[2,1],P[3,1],P[4,1],k),x):
> plot(mox(x),x=0..30):
>
```

III.6.2 Antisymmetriska punktlaster

Värden för aktuellt tvärsnitt.

```
> b:=4.6:
> bk:=12:
> h:=1.91:
> Av:=h*0.2:
> Au:=b*0.1:
> Ao:=bk*0.1:
> alpha:=(3*Av+Ao*(bk/b)^2)/(3*Av+Au):
> iv:=0.2^3/12:
> io:=0.1^3/12:
> iu:=0.1^3/12:
> beta:=(3*h/iv+b/io)/(3*h/iv+b/iu):
> L:=30:
> q:=0:
> F:=250000:
> Io:=Ao*bk^2/12:
> Z:=h*(Au+12*alpha^(-1)*Io/b^2+(1+alpha^(-1))*Av)/12:
>k:=((288*(1+alpha)*(1+beta))/((b*h)^2*((1+alpha)*Av+Ao*(bk/b)^2+Au*alpha)*
(b/io+h*(2-beta)/iv)))^(1/4):
```

Välvspänningen och hörnmomentet som funktion av x i intervallet 0<x<L/2.

```
> plot(sigmaox(x,b,k,L,q,h,Av,alpha,Ao,bk,Au,beta,F), x=0..15):
> mox:=unapply(mo(x,P[1,1],0,P[2,1],P[3,1],k),x):
> plot(mox(x),x=0..15):
>
```

III.7 Normalt tvärsnitt

III.7.1 Utbredda antisymmetriska laster

Värden för aktuellt tvärsnitt.

```
> b:=4.6:
> bk:=12:
> h:=1.91:
> Av:=h*0.4:
> Au:=b*0.18:
> Ao:=bk*0.2:
> alpha:=(3*Av+Ao*(bk/b)^2)/(3*Av+Au):
> iv:=0.4^3/12:
> io:=0.2^3/12:
> iu:=0.18^3/12:
> beta:=(3*h/iv+b/io)/(3*h/iv+b/iu):
> L:=30:
> q:=8000:
>k:=((288*(1+alpha)*(1+beta))/((b*h)^2*((1+alpha)*Av+Ao*(bk/b)^2+Au*alpha)*
(b/io+h*(2-beta)/iv)))^(1/4):
```

Välvspänningen och hörnmoment som funktion av x i intervallet 0<x<L/2.

```
> plot(sigmaox(x,b,k,L,q,h,Av,alpha,Ao,bk,Au,beta), x=0..30):
> mox:=unapply(mo(x,P[1,1],P[2,1],P[3,1],P[4,1],k),x):
> plot(mox(x),x=0..30):
>
```

III.7.2 Antisymmetriska punktlaster

```
> b:=4.6:
> bk:=12:
> h:=1.91:
> Av:=h*0.4:
> Au:=b*0.18:
> Ao:=bk*0.2:
> alpha:=(3*Av+Ao*(bk/b)^2)/(3*Av+Au):
> iv:=0.4^3/12:
> io:=0.2^3/12:
> iu:=0.18^3/12:
> beta:=(3*h/iv+b/io)/(3*h/iv+b/iu):
> L:=30:
> q:=0:
> F:=250000:
> Io:=Ao*bk^2/12:
> Z:=h*(Au+12*alpha^(-1)*Io/b^2+(1+alpha^(-1))*Av)/12:
>k:=((288*(1+alpha)*(1+beta))/((b*h)^2*((1+alpha)*Av+Ao*(bk/b)^2+Au*alpha)*
(b/io+h*(2-beta)/iv)))^(1/4):
```

Välvspänningen och hörnmoment som funktion av x i intervallet 0<x<L/2.

```
> plot(sigmaox(x,b,k,L,q,h,Av,alpha,Ao,bk,Au,beta,F,Z), x=0..15):
> mox:=unapply(mo(x,P[1,1],0,P[2,1],P[3,1],k),x):
> plot(mox(x),x=0..15):
> sigmaomax:=simplify(sigmaox(L/2,b,k,L,q,h,Av,alpha,Ao,bk,Au,beta,F,Z)):
```

III.8 Grovt tvärsnitt

III.8.1 Utbredda antisymmetriska laster

Värden för aktuellt tvärsnitt.

```
> b:=4.6:
> bk:=12:
> h:=1.91:
> Av:=h*0.8:
> Au:=b*0.4:
> Ao:=bk*0.4:
> alpha:=(3*Av+Ao*(bk/b)^2)/(3*Av+Au):
> iv:=0.8^3/12:
> io:=0.4^3/12:
> iu:=0.4^3/12:
> beta:=(3*h/iv+b/io)/(3*h/iv+b/iu):
> L:=30:
> q:=8000:
>k:=((288*(1+alpha)*(1+beta))/((b*h)^2*((1+alpha)*Av+Ao*(bk/b)^2+Au*alpha)*
(b/io+h*(2-beta)/iv)))^(1/4):
```

Välvspänningen och hörnmoment som funktion av x i intervallet 0<x<L/2.

```
> plot(sigmaox(x,b,k,L,q,h,Av,alpha,Ao,bk,Au,beta), x=0..30):
> mox:=unapply(mo(x,P[1,1],P[2,1],P[3,1],P[4,1],k),x):
> plot(mox(x),x=0..30):
>
```

III.8.2 Antisymmetriska punktlaster

Värden för aktuellt tvärsnitt.

```
> b:=4.6:
> bk:=12:
> h:=1.91:
> Av:=h*0.8:
> Au:=b*0.4:
> Ao:=bk*0.4:
> alpha:=(3*Av+Ao*(bk/b)^2)/(3*Av+Au):
> iv:=0.8^3/12:
> io:=0.4^3/12:
> iu:=0.4^3/12:
```

```
> beta:=(3*h/iv+b/io)/(3*h/iv+b/iu):
> L:=30:
> q:=0:
> F:=250000:
> Io:=Ao*bk^2/12:
> Z:=h*(Au+12*alpha^(-1)*Io/b^2+(1+alpha^(-1))*Av)/12:
>k:=((288*(1+alpha)*(1+beta))/((b*h)^2*((1+alpha)*Av+Ao*(bk/b)^2+Au*alpha)*
(b/io+h*(2-beta)/iv)))^(1/4):
```

Välvspänningen och hörnmoment som funktion av x i intervallet 0<x<L/2.

```
> plot(sigmaox(x,b,k,L,q,h,Av,alpha,Ao,bk,Au,beta,F), x=0..15):
> mox:=unapply(mo(x,P[1,1],0,P[2,1],P[3,1],k),x):
> plot(mox(x),x=0..15):
```

IV Bilaga Deformerbart tvärsnitt med blandad vridning

IV.1 Slankt tvärsnitt

```
> restart;
```

Lösning till differentialekvation

```
> lambda:=(k/(4*E*KwII))^(0.25):
> gammadef:=
unapply(qw/(2*k)+A*sinh(lambda*x)*cos(lambda*x)+B*cosh(lambda*x)*cos(lam
bda*x)+C*cosh(lambda*x)*sin(lambda*x)+D*sinh(lambda*x)*sin(lambda*x),x,A,
B,C,D):
> gprim:=unapply(diff(gammadef(x,A,B,C,D),x),x,A,B,C,D):
> gbis:=simplify(unapply(diff(gprim(x,A,B,C,D),x),x,A,B,C,D)):
> gtris:=simplify(unapply(diff(gbis(x,A,B,C,D),x),x,A,B,C,D)):
> gfyr:=simplify(unapply(diff(gtris(x,A,B,C,D),x),x,A,B,C,D)):
```

Kontroll av ansats

```
> Test:=gfyr(x,A,B,C,D)+k/(E*KwII)*gammadef(x,A,B,C,D):
> simplify(Test)
```

Randvillkor: x=0, x=L, gamma=0, gammabis=0:

```
> gammadef(0,A,B,C,D):
> gammadef(L,A,B,C,D):
> gbis(0,A,B,C,D):
> gbis(L,A,B,C,D):
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected
```

```
>
M:=array([[0,1,0,0],[sinh(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L)*cos(.7071067812*(k/
(E*KwII))^.25*L),cosh(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L)*cos(.7071067812*(k/(E
*KwII))^.25*L),cosh(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L)*sin(.7071067812*(k/(E*
KwII))^.25*L),sinh(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L)*sin(.7071067812*(k/(E*K
wII))^.25*L)],[0,0,0,(k/(E*KwII))^.50],[-
1.000000000*cosh(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L)*(k/(E*KwII))^.50*sin(.7071
067812*(k/(E*KwII))^.25*L),-
1.000000000*sinh(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L)*(k/(E*KwII))^.50*sin(.7071
067812*(k/(E*KwII))^.25*L),1.000000000*sinh(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L
)*(k/(E*KwII))^.50*cos(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L),1.000000000*cosh(.70
71067812*(k/(E*KwII))^.25*L)*(k/(E*KwII))^.50*cos(.7071067812*(k/(E*KwII))
^.25*L)]]):
> N:=array([[-1/2*qw/k],[-1/2*qw/k],[0],[0]]):
> invM:=inverse(M):
> P:=simplify(multiply(invM,N)):
> gammax:=unapply(gammadef(x,P[1,1],P[2,1],P[3,1],P[4,1]),x):
> gammabisx:=unapply(gbis(x,P[1,1],P[2,1],P[3,1],P[4,1]),x):
```

Tvärsnittskonstanter, materialkonstanter, deformerbart tvärsnitt

```
> E:=30e9:
> L:=30:
> qw:=4.6*8e3:
> b:=4.6:
> bk:=12:
> h:=1.91:
> tjo:=0.1:
> tjv:=0.2:
> tju:=0.1:
> Av:=h*tjv:
> Au:=b*tju:
> Ao:=bk*tjo:
> alpha:=(3*Av+Ao*(bk/b)^2)/(3*Av+Au):
```

Sektoriell koordinat och välvtröghetsmoment

```
> omegaII1:=-h*b/(4*(alpha+1)):
> omegaII2:=-alpha*omegaII1:
> omegaII3:=6*omegaII1/2.3:
> KwII:=2*(tjo*int((omegaII3/6*x)^2,x=0..6)+tjv*int(((-
omegaII1+omegaII2)/h*x+omegaII1)^2,x=0..h)+tju*int((-
omegaII2/2.3*x+omegaII2)^2,x=0..2.3)):
```

Transversell fjäderstyvhet, k

```
> iv:=tjv^3/12:
> io:=tjo^3/12:
> iu:=tju^3/12:
> n:=1+(2*b/h+3*(io+iu)/iv)/((io+iu)/iv+6*h*io*iu/(b*iv^2)):
> k:=24*E*iv/(n*h):
> axsp:=unapply(-E*omegaII1*gammabisx(x),x):

> sigmaoodef:=unapply(-rho*E*(fi1xbis(x)+q/(G*Ih))*w1,x):
> fi1x:=unapply(rho*E*Kw*(q/(G*Kv)-
q/(G*Ih))*cosh(sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*x)/(G*Kv)+(-
cosh(sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*L)*rho*E*Kw*(q/(G*Kv)-
q/(G*Ih))/(G*Kv*sinh(sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*L))+rho*E*Kw*(q/(G*Kv)-
q/(G*Ih))/(G*Kv*sinh(sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*L)))*sinh(sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))
*x)+1/2*L*q*x/(G*Kv)-rho*E*Kw*(q/(G*Kv)-q/(G*Ih))/(G*Kv)-
1/2*q*x^2/(G*Kv),x):

> fi1xprim:=unapply(diff(fi1x(x),x),x):
> fi1xbis:=unapply(diff(fi1xprim(x),x),x):
> rho := 2.318679668:
> Kv :=2.779254582:
> q:=36800:
> Kw := 1.847532576:
> G:=0.4*30*10^9:
```

```
> Ih:=4.886858612:
> w1 := -1.630621326:
> w2:=1.251914227:
> w3:=1.598266444:

>
> plot(axsp(x)+sigmaoodef(x),x=0..30):
> gammabisx:=unapply(gbis(x,P[1,1],P[2,1],P[3,1],P[4,1]),x):
> axsp(15):
> axsp(15)+sigmaoodef(15):
> sigmaoodef(15):
```

Fjärdedelspunkter

```
> axsp(7.5):
> axsp(7.5)+sigmaoodef(7.5):
> sigmaoodef(7.5):
> sigmaoodef(x):
> axsp3:=unapply(-E*omegaII3*gammabisx(x),x):
> sigmaoodef3:=unapply(-rho*E*(fi1xbis(x)+q/(G*Ih))*w3,x):
> axsp3(15)+sigmaoodef3(15):
> axsp3(7.5)+sigmaoodef3(7.5):
> axsp3(15):
> axsp3(7.5):
> axsp2:=unapply(-E*omegaII2*gammabisx(x),x):
> sigmaoodef2:=unapply(-rho*E*(fi1xbis(x)+q/(G*Ih))*w2,x):
> axsp2(15)+sigmaoodef2(15):
> axsp2(7.5)+sigmaoodef2(7.5):
> axsp2(15):
> axsp2(7.5):
```

IV.2 Normalt tvärsnitt

```
> restart;
>
```

Lösning till differentialekvation

```
> lambdanorm:=(knorm/(4*E*KwIInorm))^(0.25):
> gammanorm:=
unapply(qw/(2*knorm)+A*sinh(lambdanorm*x)*cos(lambdanorm*x)+B*cosh(lambdanorm*x)*cos(lambdanorm*x)+C*cosh(lambdanorm*x)*sin(lambdanorm*x)+D*sinh(lambdanorm*x)*sin(lambdanorm*x),x,A,B,C,D):
> gprim:=unapply(diff(gammanorm(x,A,B,C,D),x),x,A,B,C,D):

> gbis:=simplify(unapply(diff(gprim(x,A,B,C,D),x),x,A,B,C,D)):
>
> gtris:=simplify(unapply(diff(gbis(x,A,B,C,D),x),x,A,B,C,D)):
> gfyr:=simplify(unapply(diff(gtris(x,A,B,C,D),x),x,A,B,C,D)):
```

Kontroll av ansats

```
> Test:=gfyr(x,A,B,C,D)+knorm/(E*KwIInorm)*gammanorm(x,A,B,C,D):
> simplify(Test):
```

Randvillkor: x=0, x=L, gamma=0, gammabis=0:

```
> gammanorm(0,A,B,C,D):
> gammanorm(L,A,B,C,D):
> gbis(0,A,B,C,D):
> gbis(L,A,B,C,D):
> with(linalg):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

```
>
M:=array([[0,1,0,0],[sinh(.7071067812*(knorm/(E*KwIInorm))^.25*L)*cos(.70710
67812*(knorm/(E*KwIInorm))^.25*L),cosh(.7071067812*(knorm/(E*KwIInorm))^
.25*L)*cos(.7071067812*(knorm/(E*KwIInorm))^.25*L),cosh(.7071067812*(knor
m/(E*KwIInorm))^.25*L)*sin(.7071067812*(knorm/(E*KwIInorm))^.25*L),sinh(.7
071067812*(knorm/(E*KwIInorm))^.25*L)*sin(.7071067812*(knorm/(E*KwIInor
m))^.25*L)],[0,0,0,(knorm/(E*KwIInorm))^.50],[-
1.000000000*cosh(.7071067812*(knorm/(E*KwIInorm))^.25*L)*(knorm/(E*KwII
norm))^.50*sin(.7071067812*(knorm/(E*KwIInorm))^.25*L),-
1.000000000*sinh(.7071067812*(knorm/(E*KwIInorm))^.25*L)*(knorm/(E*KwIIn
orm))^.50*sin(.7071067812*(knorm/(E*KwIInorm))^.25*L),1.000000000*sinh(.70
71067812*(knorm/(E*KwIInorm))^.25*L)*(knorm/(E*KwIInorm))^.50*cos(.70710
67812*(knorm/(E*KwIInorm))^.25*L),1.000000000*cosh(.7071067812*(knorm/(E
*KwIInorm))^.25*L)*(knorm/(E*KwIInorm))^.50*cos(.7071067812*(knorm/(E*K
wIInorm))^.25*L)]]):
> N:=array([[-1/2*qw/knorm],[-1/2*qw/knorm],[0],[0]]):
> invM:=inverse(M):
> P:=simplify(multiply(invM,N)):
> gammaxnorm:=unapply(gammanorm(x,P[1,1],P[2,1],P[3,1],P[4,1]),x):
> gammabisxnorm:=unapply(gbis(x,P[1,1],P[2,1],P[3,1],P[4,1]),x):
```

Tvrsnittskonstanter, materialkonstanter, deformerbart tvrsnitt

```
> E:=30e9:
> L:=30:
> qw:=4.6*8e3:
> b:=4.6:
> bk:=12:
> h:=1.91:
> tjonorm:=0.2:
> tjvnorm:=0.4:
> tjunorm:=0.18:
> Avnorm:=h*tjvnorm:
> Aunorm:=b*tjunorm:
> Aonorm:=bk*tjonorm:
> alphanorm:=(3*Avnorm+Aonorm*(bk/b)^2)/(3*Avnorm+Aunorm):
```

Sektoriell koordinat och vlvtröghetsmoment

```
> omegaIInorm1:=-h*b/(4*(alphanorm+1)):
> omegaIInorm2:=-alphanorm*omegaIInorm1:
```

```
> omegaIInorm3:=6*omegaIInorm1/2.3:
> KwIInorm:=2*(tjonorm*int((omegaIInorm3/6*x)^2,x=0..6)+tjvnorm*int(((-omegaIInorm1+omegaIInorm2)/h*x+omegaIInorm1)^2,x=0..h)+tjunorm*int((-omegaIInorm2/2.3*x+omegaIInorm2)^2,x=0..2.3)):
```

Transversell fjderstyvhet, k

```
> ivnorm:=tjvnorm^3/12:
> ionorm:=tjonorm^3/12:
> iunorm:=tjunorm^3/12:
> nnorm:=1+(2*b/h+3*(ionorm+iunorm)/ivnorm)/((ionorm+iunorm)/ivnorm+6*h*ionorm*iunorm/(b*ivnorm^2)):
> knorm:=24*E*ivnorm/(nnorm*h):
> axspnorm:=unapply(-E*omegaIInorm1*gammabisxnorm(x),x):

> sigmaoodefnorm:=unapply(-rho*E*(fi1xbis(x)+q/(G*Ih))*w1,x):
> fi1x:=unapply(rho*E*Kw*(q/(G*Kv)-q/(G*Ih))*cosh(sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*x)/(G*Kv)+(-cosh(sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*L)*rho*E*Kw*(q/(G*Kv)-q/(G*Ih))/(G*Kv*sinh(sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*L))+rho*E*Kw*(q/(G*Kv)-q/(G*Ih))/(G*Kv*sinh(sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*L)))*sinh(sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*x)+1/2*L*q*x/(G*Kv)-rho*E*Kw*(q/(G*Kv)-q/(G*Ih))/(G*Kv)-1/2*q*x^2/(G*Kv),x):

> fi1xprim:=unapply(diff(fi1x(x),x),x):
> fi1xbis:=unapply(diff(fi1xprim(x),x),x):
> rho := 2.182388901:
> Kv :=5.314038924:
> q:=36800:
> Kw := 4.897244960:
> G:=0.4*30*10^9:
> Ih:=9.808363015:
> w1 := -2.037100095:
> w2:=1.368133711:
> w3:=1.470765463:

>
> plot(axspnorm(x)+sigmaoodefnorm(x),x=0..30):
> axspnorm(15):
> axspnorm(15)+sigmaoodefnorm(15):
> sigmaoodefnorm(15):
```

Fjärdedelspunkter

```
> axspnorm(7.5):
> axspnorm(7.5)+sigmaoodefnorm(7.5):
> sigmaoodefnorm(7.5):
> sigmaoodefnorm(x):
> axsp3:=unapply(-E*omegaIInorm3*gammabisxnorm(x),x):
> sigmaoodef3:=unapply(-rho*E*(fi1xbis(x)+q/(G*Ih))*w3,x):
> axsp3(15)+sigmaoodef3(15):
```

> axsp3(15):
> axsp3(7.5):
> axsp2:=unapply(-E*omegaIInorm2*gammabisxnorm(x),x):
> sigmaoodef2:=unapply(-rho*E*(fi1xbis(x)+q/(G*Ih))*w2,x):
> axsp2(15)+sigmaoodef2(15):
> axsp2(15):
> axsp2(7.5):

IV.3 Grovt tvärsnitt

> restart;
>
Lösning till differentialekvation

> lambda:=(k/(4*E*KwII))^(0.25):
> gammadef:=
unapply(qw/(2*k)+A*sinh(lambda*x)*cos(lambda*x)+B*cosh(lambda*x)*cos(lambda*x)+C*cosh(lambda*x)*sin(lambda*x)+D*sinh(lambda*x)*sin(lambda*x),x,A,B,C,D):
> gprim:=unapply(diff(gammadef(x,A,B,C,D),x),x,A,B,C,D):
> gbis:=simplify(unapply(diff(gprim(x,A,B,C,D),x),x,A,B,C,D)):
> gtris:=simplify(unapply(diff(gbis(x,A,B,C,D),x),x,A,B,C,D)):
> gfyr:=simplify(unapply(diff(gtris(x,A,B,C,D),x),x,A,B,C,D)):

Kontroll av ansats

> Test:=gfyr(x,A,B,C,D)+k/(E*KwII)*gammadef(x,A,B,C,D):
> simplify(Test):
Randvillkor: x=0, x=L, gamma=0, gammabis=0:

> gammadef(0,A,B,C,D):
> gammadef(L,A,B,C,D):
> gbis(0,A,B,C,D):
> gbis(L,A,B,C,D):
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

>
M:=array([[0,1,0,0],[sinh(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L)*cos(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L),cosh(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L)*cos(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L),cosh(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L)*sin(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L),sinh(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L)*sin(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L)],[0,0,0,(k/(E*KwII))^.50],[-1.000000000*cosh(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L)*(k/(E*KwII))^.50*sin(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L),-1.000000000*sinh(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L)*(k/(E*KwII))^.50*sin(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L),1.000000000*sinh(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L)*(k/(E*KwII))^.50*cos(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L),1.000000000*cosh(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L)*(k/(E*KwII))^.50*cos(.7071067812*(k/(E*KwII))^.25*L)]]):

```
> N:=array([[-1/2*qw/k],[-1/2*qw/k],[0],[0]]):
> invM:=inverse(M):
> P:=simplify(multiply(invM,N)):
> gammax:=unapply(gammadef(x,P[1,1],P[2,1],P[3,1],P[4,1]),x):
> gammabisx:=unapply(gbis(x,P[1,1],P[2,1],P[3,1],P[4,1]),x):
```

Tvrsnittskonstanter, materialkonstanter, deformerbart tvrsnitt

```
> E:=30e9:
> L:=30:
> qw:=4.6*8e3:
> b:=4.6:
> bk:=12:
> h:=1.91:
> tjo:=0.4:
> tjv:=0.8:
> tju:=0.4:
> Av:=h*tjv:
> Au:=b*tju:
> Ao:=bk*tjo:
> alpha:=(3*Av+Ao*(bk/b)^2)/(3*Av+Au):
```

Sektoriell koordinat och vlvtröghetsmoment

```
> omegaII1:=-h*b/(4*(alpha+1)):
> omegaII2:=-alpha*omegaII1:
> omegaII3:=6*omegaII1/2.3:
> KwII:=2*(tjo*int((omegaII3/6*x)^2,x=0..6)+tjv*int(((-
omegaII1+omegaII2)/h*x+omegaII1)^2,x=0..h)+tju*int((-
omegaII2/2.3*x+omegaII2)^2,x=0..2.3)):
```

Transversell fjderstyvhet, k

```
> iv:=tjv^3/12:
> io:=tjo^3/12:
> iu:=tju^3/12:
> n:=1+(2*b/h+3*(io+iu)/iv)/((io+iu)/iv+6*h*io*iu/(b*iv^2)):
> k:=24*E*iv/(n*h):
> axsp:=unapply(-E*omegaII1*gammabisx(x),x):
> sigmaoodef:=unapply(-rho*E*(fi1xbis(x)+q/(G*Ih))*w1,x):
> fi1x:=unapply(rho*E*Kw*(q/(G*Kv)-
q/(G*Ih))*cosh(sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*x)/(G*Kv)+(-
cosh(sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*L)*rho*E*Kw*(q/(G*Kv)-
q/(G*Ih))/(G*Kv*sinh(sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*L))+rho*E*Kw*(q/(G*Kv)-
q/(G*Ih))/(G*Kv*sinh(sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))*L)))*sinh(sqrt(G*Kv/(rho*E*Kw))
*x)+1/2*L*q*x/(G*Kv)-rho*E*Kw*(q/(G*Kv)-q/(G*Ih))/(G*Kv)-
1/2*q*x^2/(G*Kv),x):
> fi1xprim:=unapply(diff(fi1x(x),x),x):
> fi1xbis:=unapply(diff(fi1xprim(x),x),x):
> rho := 2.318679667:
```

```
> Kv :=11.11701832:
> q:=36800:
> Kw := 7.390130304:
> G:=0.4*30*10^9:
> Ih:=19.54743444:
> w1 := -1.630621325:
> w2:=1.251914229:
> w3:=1.598266442:
> plot(axsp(x)+sigmaoodef(x),x=0..30):
```

Reduktion av vridstyvhet

```
> gammabisx:=unapply(gbis(x,P[1,1],P[2,1],P[3,1],P[4,1]),x):
> axsp(15):
> axsp(15)+sigmaoodef(15):
> sigmaoodef(15):
```

Fjärdedelspunkter

```
> axsp(7.5):
> axsp(7.5)+sigmaoodef(7.5):
> sigmaoodef(7.5):
> sigmaoodef(x):
> axsp3:=unapply(-E*omegaII3*gammabisx(x),x):
> sigmaoodef3:=unapply(-rho*E*(fi1xbis(x)+q/(G*Ih))*w3,x):
> axsp3(15)+sigmaoodef3(15):
> axsp3(15):
> axsp3(7.5):
> axsp2:=unapply(-E*omegaII2*gammabisx(x),x):
> sigmaoodef2:=unapply(-rho*E*(fi1xbis(x)+q/(G*Ih))*w2,x):
> axsp2(15)+sigmaoodef2(15):
> axsp2(15):
> axsp2(7.5):
```

V Bilaga Enkel tvådimensionell FE-modell

V.1 Slankt tvärsnitt, utbredd last

```
clear all;
%Slankt tvärsnitt utbreddlast
%tvärsnittets geometri
tjonrm=0.2;%farbanans tjocklek
tjvnrm=0.4;%vertikalväggens tjocklek
tjunrm=0.18;%underplattans tjocklek
bk=12;%farbanans bredd
b=4.6;%cc-avstånd mellan vertikalväggar
h=1.91;%cc-avstånd mellan underplatta och farbana
%Tvärsnittskonstanter
C1nrm=(2*(tjonrm^3+tjunrm^3+b*tjvnrm^3/(2*h))+3*h/b*(tjonrm*tjunrm/tjvnrm)
^3)/(tjonrm^3+tjunrm^3+6*h/b*(tjonrm*tjunrm/tjvnrm)^3);
C2nrm=(1/3*(1+tjunrm/tjonrm*(b/bk)^3)+2*h/b*tjvnrm/tjonrm*(b/bk)^3)/(1/3*b/h
*tjunrm/tjvnrm+2/3*(1+tjunrm/tjonrm*(b/bk)^3)+h/b*tjvnrm/tjonrm*(b/bk)^3);
%material
E=30e9;
kekvnrm=4*E*tjvnrm^3/(C1nrm*h*b^2);%bäddmodul
Inrm=tjvnrm*h^3/12;%tröghetsmoment för vertikalvägg
%koordinater
ex=[0 0.1];
ey=[0 0];
%topologi
Edof=[[1:1:300]' [1:3:898]' [2:3:899]' [3:3:900]' [4:3:901]' [5:3:902]' [6:3:903]'];
%belstning
q=8e3;
equtb=[0 -q/2];
%elementstyvhetsmatris
epnrm=[E/C2nrm 1 Inrm 0 kekvnrm];
[Kenrmutb,fenrmutb]=beam2w(ex,ey,epnrm,equtb);
%assemblering
Knrmutb=zeros(903);
fnrmutb=zeros(903,1);
for i=1:300
   [Knrmutb,fnrmutb]=assem(Edof(i,:),Knrmutb,Kenrmutb,fnrmutb,fenrmutb);
end
%randvilkor
bc=[1 0
   2 0
   902 0];
%lösning av ekvationssystem
[wvnrmutb,Qnrmutb]=solveq(Knrmutb,fnrmutb,bc);
%snittkrafter
esnrmutb=zeros(300,2);
for i=1:300
   ed=extract(Edof(i,:),wvnrmutb);
   es=beam2ws(ex,ey,epnrm,ed,equtb);
```

```
    esnrmutb(i,:)=[es(1,2) es(1,3)];
    if i==300
        esnrmutb(i+1,:)=[es(2,2) es(2,3)];
    end
end
%neutrallagrets läge
anrm=h*(1+3*h*tjvnrm/(b*tjunrm))/(1+tjonrm/tjunrm*(bk/b)^3+6*h*tjvnrm/(b*tju
nrm));
x=[0:0.1:30];
subplot(4,1,1);
Wvnrmutb=wvnrmutb(2:3:902);
plot(x,Wvnrmutb);
title('Nedböjning');
xlabel('x');
ylabel('wv');
subplot(4,1,2);
Skfnrmutb=esnrmutb(:,1)./h;
plot(x,Skfnrmutb);
title('Skjuvflöde pga tvätsnittsdeformation');
xlabel('x');
ylabel('skjuvflöde');
subplot(4,1,3);
Axspnrmutb=C2nrm*anrm.*esnrmutb(:,2)./Inrm;
plot(x,Axspnrmutb);
title('Sigma0');
xlabel('x');
ylabel('sigmao');
%hörnmoment ovankant
rqnrmutb=wvnrmutb(2:3:902).*(4*E*(tjvnrm)^3*(b^2+h^2)^0.5/(C1nrm*h^2*b^2))
;
monrmutb=rqnrmutb.*(b*h/(2*(b^2+h^2)^0.5)*(1+3*h/b*(tjunrm/tjvnrm)^3)/(1+(tj
unrm/tjonrm)^3+6*h/b*(tjunrm/tjvnrm)^3));
subplot(4,1,4);
plot(x,monrmutb);
title('Hörnmoment, mo');
xlabel('x');
ylabel('mo');
save blknrmutb Wvnrmutb Skfnrmutb Axspnrmutb monrmutb
```

V.2 Normalt tvärsnitt, utbredd last

```
clear all;
%Slankt tvärsnitt utbreddlast
%tvärsnittets geometri
tjonrm=0.2;%farbanans tjocklek
tjvnrm=0.4;%vertikalväggens tjocklek
tjunrm=0.18;%underplattans tjocklek
bk=12;%farbanans bredd
b=4.6;%cc-avstånd mellan vertikalväggar
h=1.91;%cc-avstånd mellan underplatta och farbana
```

```
%Tvärsnittskonstanter
C1nrm=(2*(tjonrm^3+tjunrm^3+b*tjvnrm^3/(2*h))+3*h/b*(tjonrm*tjunrm/tjvnrm)
^3)/(tjonrm^3+tjunrm^3+6*h/b*(tjonrm*tjunrm/tjvnrm)^3);
C2nrm=(1/3*(1+tjunrm/tjonrm*(b/bk)^3)+2*h/b*tjvnrm/tjonrm*(b/bk)^3)/(1/3*b/h
*tjunrm/tjvnrm+2/3*(1+tjunrm/tjonrm*(b/bk)^3)+h/b*tjvnrm/tjonrm*(b/bk)^3);
%material
E=30e9;
kekvnrm=4*E*tjvnrm^3/(C1nrm*h*b^2);%bäddmodul
Inrm=tjvnrm*h^3/12;%tröghetsmoment för vertikalvägg
%koordinater
ex=[0 0.1];
ey=[0 0];
%topologi
Edof=[[1:1:300]' [1:3:898]' [2:3:899]' [3:3:900]' [4:3:901]' [5:3:902]' [6:3:903]'];
%belstning
q=8e3;
equtb=[0 -q/2];
%elementstyvhetsmatris
epnrm=[E/C2nrm 1 Inrm 0 kekvnrm];
[Kenrmutb,fenrmutb]=beam2w(ex,ey,epnrm,equtb);
%assemblering
Knrmutb=zeros(903);
fnrmutb=zeros(903,1);
for i=1:300
   [Knrmutb,fnrmutb]=assem(Edof(i,:),Knrmutb,Kenrmutb,fnrmutb,fenrmutb);
end
%randvilkor
bc=[1 0
   2 0
   902 0];
%lösning av ekvationssystem
[wvnrmutb,Qnrmutb]=solveq(Knrmutb,fnrmutb,bc);
%snittkrafter
esnrmutb=zeros(300,2);
for i=1:300
   ed=extract(Edof(i,:),wvnrmutb);
   es=beam2ws(ex,ey,epnrm,ed,equtb);
   esnrmutb(i,:)=[es(1,2) es(1,3)];
   if i==300
      esnrmutb(i+1,:)=[es(2,2) es(2,3)];
   end
end
%neutrallagrets läge
anrm=h*(1+3*h*tjvnrm/(b*tjunrm))/(1+tjonrm/tjunrm*(bk/b)^3+6*h*tjvnrm/(b*tju
nrm));
x=[0:0.1:30];
subplot(4,1,1);
Wvnrmutb=wvnrmutb(2:3:902);
plot(x,Wvnrmutb);
title('Nedböjning');
```

```
xlabel('x');
ylabel('wv');
subplot(4,1,2);
Skfnrmutb=esnrmutb(:,1)./h;
plot(x,Skfnrmutb);
title('Skjuvflöde pga tvätsnittsdeformation');
xlabel('x');
ylabel('skjuvflöde');
subplot(4,1,3);
Axspnrmutb=C2nrm*anrm.*esnrmutb(:,2)./Inrm;
plot(x,Axspnrmutb);
title('Sigma0');
xlabel('x');
ylabel('sigmao');
%hörnmoment ovankant
rqnrmutb=wvnrmutb(2:3:902).*(4*E*(tjvnrm)^3*(b^2+h^2)^0.5/(C1nrm*h^2*b^2))
;
monrmutb=rqnrmutb.*(b*h/(2*(b^2+h^2)^0.5)*(1+3*h/b*(tjunrm/tjvnrm)^3)/(1+(tj
unrm/tjonrm)^3+6*h/b*(tjunrm/tjvnrm)^3));
subplot(4,1,4);
plot(x,monrmutb);
title('Hörnmoment, mo');
xlabel('x');
ylabel('mo');
save blknrmutb Wvnrmutb Skfnrmutb Axspnrmutb monrmutb
```

V.3 Grovt tvärsnitt, utbredd last

```
clear all;
%Slankt tvärsnitt utbreddlast
%tvärsnittets geometri
tjogrv=0.4;%farbanans tjocklek
tjvgrv=0.8;%vertikalväggens tjocklek
tjugrv=0.4;%underplattans tjocklek
bk=12;%farbanans bredd
b=4.6;%cc-avstånd mellan vertikalväggar
h=1.91;%cc-avstånd mellan underplatta och farbana
%Tvärsnittskonstanter
C1grv=(2*(tjogrv^3+tjugrv^3+b*tjvgrv^3/(2*h))+3*h/b*(tjogrv*tjugrv/tjvgrv)^3)/(t
jogrv^3+tjugrv^3+6*h/b*(tjogrv*tjugrv/tjvgrv)^3);
C2grv=(1/3*(1+tjugrv/tjogrv*(b/bk)^3)+2*h/b*tjvgrv/tjogrv*(b/bk)^3)/(1/3*b/h*tju
grv/tjvgrv+2/3*(1+tjugrv/tjogrv*(b/bk)^3)+h/b*tjvgrv/tjogrv*(b/bk)^3);
%material
E=30e9;
kekvgrv=4*E*tjvgrv^3/(C1grv*h*b^2);%bäddmodul
Igrv=tjvgrv*h^3/12;%tröghetsmoment för vertikalvägg
%koordinater
ex=[0 0.1];
ey=[0 0];
%topologi
```

```
Edof=[[1:1:300]' [1:3:898]' [2:3:899]' [3:3:900]' [4:3:901]' [5:3:902]' [6:3:903]'];
%belstning
q=8e3;
equtb=[0 -q/2];
%elementstyvhetsmatris
epgrv=[E/C2grv 1 Igrv 0 kekvgrv];
[Kegrvutb,fegrvutb]=beam2w(ex,ey,epgrv,equtb);
%assemblering
Kgrvutb=zeros(903);
fgrvutb=zeros(903,1);
for i=1:300
   [Kgrvutb,fgrvutb]=assem(Edof(i,:),Kgrvutb,Kegrvutb,fgrvutb,fegrvutb);
end
%randvilkor
bc=[1 0
   2 0
   902 0];
%lösning av ekvationssystem
[wvgrvutb,Qgrvutb]=solveq(Kgrvutb,fgrvutb,bc);
%snittkrafter
esgrvutb=zeros(300,2);
for i=1:300
   ed=extract(Edof(i,:),wvgrvutb);
   es=beam2ws(ex,ey,epgrv,ed,equtb);
   esgrvutb(i,:)=[es(1,2) es(1,3)];
   if i==300
      esgrvutb(i+1,:)=[es(2,2) es(2,3)];
   end
end
%neutrallagrets läge
agrv=h*(1+3*h*tjvgrv/(b*tjugrv))/(1+tjogrv/tjugrv*(bk/b)^3+6*h*tjvgrv/(b*tjugrv)
);
x=[0:0.1:30];
subplot(4,1,1);
Wvgrvutb=wvgrvutb(2:3:902);
plot(x,Wvgrvutb);
title('Nedböjning');
xlabel('x');
ylabel('wv');
subplot(4,1,2);
Skfgrvutb=esgrvutb(:,1)./h;
plot(x,Skfgrvutb);
title('Skjuvflöde pga tvätsnittsdeformation');
xlabel('x');
ylabel('skjuvflöde');
subplot(4,1,3);
Axspgrvutb=C2grv*agrv.*esgrvutb(:,2)./Igrv;
plot(x,Axspgrvutb);
title('Sigma0');
xlabel('x');
```

```
ylabel('sigmao');
%hörnmoment ovankant
rqgrvutb=wvgrvutb(2:3:902).*(4*E*(tjvgrv)^3*(b^2+h^2)^0.5/(C1grv*h^2*b^2));
mogrvutb=rqgrvutb.*(b*h/(2*(b^2+h^2)^0.5)*(1+3*h/b*(tjugrv/tjvgrv)^3)/(1+(tjugr
v/tjogrv)^3+6*h/b*(tjugrv/tjvgrv)^3));
subplot(4,1,4);
plot(x,mogrvutb);
title('Hörnmoment, mo');
xlabel('x');
ylabel('mo');
save blkgrvutb Wvgrvutb Skfgrvutb Axspgrvutb mogrvutb
```

V.4 Slankt tvärsnitt, punktlast

```
clear all;
%Slankt tvärsnitt punktlast vi L/2
%tvärsnittets geometri
tjoslnk=0.1;%farbanans tjocklek
tjvslnk=0.2;%vertikalväggens tjocklek
tjuslnk=0.1;%underplattans tjocklek
bk=12;%farbanans bredd
b=4.6;%cc-avstånd mellan vertikalväggar
hslnk=1.91;%cc-avstånd mellan underplatta och farbana
%Tvärsnittskonstanter
C1slnk=(2*(tjoslnk^3+tjuslnk^3+b*tjvslnk^3/(2*hslnk))+3*hslnk/b*(tjoslnk*tjuslnk
/tjvslnk)^3)/(tjoslnk^3+tjuslnk^3+6*hslnk/b*(tjoslnk*tjuslnk/tjvslnk)^3);
C2slnk=(1/3*(1+tjuslnk/tjoslnk*(b/bk)^3)+2*hslnk/b*tjvslnk/tjoslnk*(b/bk)^3)/(1/3
*b/hslnk*tjuslnk/tjvslnk+2/3*(1+tjuslnk/tjoslnk*(b/bk)^3)+hslnk/b*tjvslnk/tjoslnk*(
b/bk)^3);
%material
E=30e9;
kekvslnk=4*E*tjvslnk^3/(C1slnk*hslnk*b^2);%bäddmodul
Islnk=tjvslnk*hslnk^3/12;%tröghetsmoment för vertikalvägg
%koordinater
ex=[0 0.1];
ey=[0 0];
%topologi
Edof=[[1:1:300]' [1:3:898]' [2:3:899]' [3:3:900]' [4:3:901]' [5:3:902]' [6:3:903]'];
%belstning
Q=250e3;
%elementstyvhetsmatris
epslnk=[E/C2slnk 1 Islnk 0 kekvslnk];
Keslnkpkt=beam2w(ex,ey,epslnk);
%belastning
fslnkpkt=zeros(903,1);
fslnkpkt(452)=-250e3/2;
%assemblering
Kslnkpkt=zeros(903);
for i=1:300
   Kslnkpkt=assem(Edof(i,:),Kslnkpkt,Keslnkpkt);
```

```
end
%randvilkor
bc=[1 0
   2 0
   902 0];
%lösning av ekvationssystem
[wvslnkpkt,Qslnkpkt]=solveq(Kslnkpkt,fslnkpkt,bc);
%snittkrafter
esslnkpkt=zeros(300,2);
for i=1:300
   ed=extract(Edof(i,:),wvslnkpkt);
   es=beam2ws(ex,ey,epslnk,ed);
   esslnkpkt(i,:)=[es(1,2) es(1,3)];
   if i==300
      esslnkpkt(i+1,:)=[es(2,2) es(2,3)];
   end
end
%neutrallagrets läge
aslnk=hslnk*(1+3*hslnk*tjvslnk/(b*tjuslnk))/(1+tjoslnk/tjuslnk*(bk/b)^3+6*hslnk*t
jvslnk/(b*tjuslnk));
x=[0:0.1:30];
subplot(4,1,1);
Wvslnkpkt=wvslnkpkt(2:3:902);
plot(x,Wvslnkpkt);
title('Nedböjning');
xlabel('x');
ylabel('w_v');
subplot(4,1,2);
Skfslnkpkt=esslnkpkt(:,1)./hslnk;
plot(x,Skfslnkpkt);
title('Skjuvflöde pga tvätsnittsdeformation');
xlabel('x');
ylabel('skjuvflöde');
subplot(4,1,3);
Axspslnkpkt=C2slnk*aslnk.*esslnkpkt(:,2)./Islnk;
plot(x,Axspslnkpkt);
title('\sigma_o');
xlabel('x');
ylabel('sigmao');
%hörnmoment ovankant
rqslnkpkt=wvslnkpkt(2:3:902).*(4*E*(tjvslnk)^3*(b^2+hslnk^2)^0.5/(C1slnk*hslnk
^2*b^2));
moslnkpkt=rqslnkpkt.*(b*hslnk/(2*(b^2+hslnk^2)^0.5)*(1+3*hslnk/b*(tjuslnk/tjvsl
nk)^3)/(1+(tjuslnk/tjoslnk)^3+6*hslnk/b*(tjuslnk/tjvslnk)^3));
subplot(4,1,4);
plot(x,moslnkpkt);
title('Hörnmoment, mo');
xlabel('x');
ylabel('mo');
save blkslnkpkt Wvslnkpkt Skfslnkpkt Axspslnkpkt moslnkpkt
```

V.5 Normalt tvärsnitt, punktlast

```
clear all;
%Slankt tvärsnitt utbreddlast
%tvärsnittets geometri
tjonrm=0.2;%farbanans tjocklek
tjvnrm=0.4;%vertikalväggens tjocklek
tjunrm=0.18;%underplattans tjocklek
bk=12;%farbanans bredd
b=4.6;%cc-avstånd mellan vertikalväggar
h=1.91;%cc-avstånd mellan underplatta och farbana
%Tvärsnittskonstanter
C1nrm=(2*(tjonrm^3+tjunrm^3+b*tjvnrm^3/(2*h))+3*h/b*(tjonrm*tjunrm/tjvnrm)
^3)/(tjonrm^3+tjunrm^3+6*h/b*(tjonrm*tjunrm/tjvnrm)^3);
C2nrm=(1/3*(1+tjunrm/tjonrm*(b/bk)^3)+2*h/b*tjvnrm/tjonrm*(b/bk)^3)/(1/3*b/h
*tjunrm/tjvnrm+2/3*(1+tjunrm/tjonrm*(b/bk)^3)+h/b*tjvnrm/tjonrm*(b/bk)^3);
%material
E=30e9;
kekvnrm=4*E*tjvnrm^3/(C1nrm*h*b^2);%bäddmodul
Inrm=tjvnrm*h^3/12;%tröghetsmoment för vertikalvägg
%koordinater
ex=[0 0.1];
ey=[0 0];
%topologi
Edof=[[1:1:300]' [1:3:898]' [2:3:899]' [3:3:900]' [4:3:901]' [5:3:902]' [6:3:903]'];
%belstning
Q=250e3;
fnrmpkt=zeros(903,1);
fnrmpkt(452)=-Q/2;
%elementstyvhetsmatris
epnrm=[E/C2nrm 1 Inrm 0 kekvnrm];
Kenrmpkt=beam2w(ex,ey,epnrm);
%assemblering
Knrmpkt=zeros(903);
for i=1:300
   Knrmpkt=assem(Edof(i,:),Knrmpkt,Kenrmpkt);
end
%randvilkor
bc=[1 0
   2 0
   902 0];
%lösning av ekvationssystem
[wvnrmpkt,Qnrmpkt]=solveq(Knrmpkt,fnrmpkt,bc);
%snittkrafter
esnrmpkt=zeros(300,2);
for i=1:300
   ed=extract(Edof(i,:),wvnrmpkt);
   es=beam2ws(ex,ey,epnrm,ed);
   esnrmpkt(i,:)=[es(1,2) es(1,3)];
   if i==300
```

```
        esnrmpkt(i+1,:)=[es(2,2) es(2,3)];
    end
end
%neutrallagrets läge
anrm=h*(1+3*h*tjvnrm/(b*tjunrm))/(1+tjonrm/tjunrm*(bk/b)^3+6*h*tjvnrm/(b*tju
nrm));
x=[0:0.1:30];
subplot(4,1,1);
Wvnrmpkt=wvnrmpkt(2:3:902);
plot(x,Wvnrmpkt);
title('Nedböjning');
xlabel('x');
ylabel('wv');
subplot(4,1,2);
Skfnrmpkt=esnrmpkt(:,1)./h;
plot(x,Skfnrmpkt);
title('Skjuvflöde pga tvätsnittsdeformation');
xlabel('x');
ylabel('skjuvflöde');
subplot(4,1,3);
Axspnrmpkt=C2nrm*anrm.*esnrmpkt(:,2)./Inrm;
plot(x,Axspnrmpkt);
title('Sigma0');
xlabel('x');
ylabel('sigmao');
%hörnmoment ovankant
rqnrmpkt=wvnrmpkt(2:3:902).*(4*E*(tjvnrm)^3*(b^2+h^2)^0.5/(C1nrm*h^2*b^2))
;
monrmpkt=rqnrmpkt.*(b*h/(2*(b^2+h^2)^0.5)*(1+3*h/b*(tjunrm/tjvnrm)^3)/(1+(tj
unrm/tjonrm)^3+6*h/b*(tjunrm/tjvnrm)^3));
subplot(4,1,4);
plot(x,monrmpkt);
title('Hörnmoment, mo');
xlabel('x');
ylabel('mo');
save blknrmpkt Wvnrmpkt Skfnrmpkt Axspnrmpkt monrmpkt
```

V.6 Grovt tvärsnitt, punktlast

```
%Slankt tvärsnitt utbreddlast
%tvärsnittets geometri
tjogrv=0.4;%farbanans tjocklek
tjvgrv=0.8;%vertikalväggens tjocklek
tjugrv=0.4;%underplattans tjocklek
bk=12;%farbanans bredd
b=4.6;%cc-avstånd mellan vertikalväggar
h=1.91;%cc-avstånd mellan underplatta och farbana
%Tvärsnittskonstanter
```

```
C1grv=(2*(tjogrv^3+tjugrv^3+b*tjvgrv^3/(2*h))+3*h/b*(tjogrv*tjugrv/tjvgrv)^3)/(t
jogrv^3+tjugrv^3+6*h/b*(tjogrv*tjugrv/tjvgrv)^3);
C2grv=(1/3*(1+tjugrv/tjogrv*(b/bk)^3)+2*h/b*tjvgrv/tjogrv*(b/bk)^3)/(1/3*b/h*tju
grv/tjvgrv+2/3*(1+tjugrv/tjogrv*(b/bk)^3)+h/b*tjvgrv/tjogrv*(b/bk)^3);
%material
E=30e9;
kekvgrv=4*E*tjvgrv^3/(C1grv*h*b^2);%bäddmodul
Igrv=tjvgrv*h^3/12;%tröghetsmoment för vertikalvägg
%koordinater
ex=[0 0.1];
ey=[0 0];
%topologi
Edof=[[1:1:300]' [1:3:898]' [2:3:899]' [3:3:900]' [4:3:901]' [5:3:902]' [6:3:903]'];
%belstning
Q=250e3;
fgrvpkt=zeros(903,1);
fgrvpkt(452)=-Q/2;
%elementstyvhetsmatris
epgrv=[E/C2grv 1 Igrv 0 kekvgrv];
Kegrvpkt=beam2w(ex,ey,epgrv);
%assemblering
Kgrvpkt=zeros(903);
for i=1:300
   Kgrvpkt=assem(Edof(i,:),Kgrvpkt,Kegrvpkt);
end
%randvilkor
bc=[1 0
   2 0
   902 0];
%lösning av ekvationssystem
[wvgrvpkt,Qgrvpkt]=solveq(Kgrvpkt,fgrvpkt,bc);
%snittkrafter
esgrvpkt=zeros(300,2);
for i=1:300
   ed=extract(Edof(i,:),wvgrvpkt);
   es=beam2ws(ex,ey,epgrv,ed);
   esgrvpkt(i,:)=[es(1,2) es(1,3)];
   if i==300
      esgrvpkt(i+1,:)=[es(2,2) es(2,3)];
   end
end
%neutrallagrets läge
agrv=h*(1+3*h*tjvgrv/(b*tjugrv))/(1+tjogrv/tjugrv*(bk/b)^3+6*h*tjvgrv/(b*tjugrv)
);
x=[0:0.1:30];
Wvgrvpkt=wvgrvpkt(2:3:902);
plot(x,Wvgrvpkt);
title('Nedböjning');
xlabel('x, m');
ylabel('w_v, m');
```

```
figure;
Skfgrvpkt=esgrvpkt(:,1)./h;
plot(x,Skfgrvpkt);
title('Skjuvflöde pga tvätsnittsdeformation');
xlabel('x, m');
ylabel('skjuvflöde, Pa/m');
figure;
Axspgrvpkt=C2grv*agrv.*esgrvpkt(:,2)./Igrv;
plot(x,Axspgrvpkt);
title('Välvspänningar');
xlabel('x, m');
ylabel('\sigma_o, Pa');
%hörnmoment ovankant
rqgrvpkt=wvgrvpkt(2:3:902).*(4*E*(tjvgrv)^3*(b^2+h^2)^0.5/(C1grv*h^2*b^2));
mogrvpkt=rqgrvpkt.*(b*h/(2*(b^2+h^2)^0.5)*(1+3*h/b*(tjugrv/tjvgrv)^3)/(1+(tjugr
v/tjogrv)^3+6*h/b*(tjugrv/tjvgrv)^3));
figure;
plot(x,mogrvpkt);
title('Hörnmoment, m_o');
xlabel('x, m');
ylabel('m_o');
save blkgrvpkt Wvgrvpkt Skfgrvpkt Axspgrvpkt mogrvpkt
```

VI Konstanter odeformerbart tvärsnitt

VI.1 Utbrett vridmoment

$$
\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\dfrac{\rho\, E\, Kw\, q\, (Ih - Kv)}{G^2\, Kv^2\, Ih} \\[2ex]
-\dfrac{\rho\, E\, Kw\, q\, (Ih - Kv)\left(\cosh\left(\sqrt{\dfrac{G\, Kv}{\rho\, E\, Kw}}\, L\right) - 1\right)}{G^2\, Kv^2 \sinh\left(\sqrt{\dfrac{G\, Kv}{\rho\, E\, Kw}}\, L\right) Ih} \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\,\dfrac{L\, q}{G\, Kv} \\[2ex]
-\dfrac{\rho\, E\, Kw\, q\, (Ih - Kv)}{G^2\, Kv^2\, Ih}
\end{bmatrix}
$$

VI.2 Punktvridmoment

$$
\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{aligned}
&[0] \\
&\left[-\frac{1}{2}\,\frac{T\, L \left(-2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\, Kv\, L^2}{\rho\, E\, Kw}}\right) + \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\, Kv\, L^2}{\rho\, E\, Kw}}\right)\sqrt{\frac{G\, Kv\, L^2}{\rho\, E\, Kw}}\right)}{\left(-2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\, Kv}{\rho\, E\, Kw}}\, L\right) + \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\, Kv}{\rho\, E\, Kw}}\, L\right)\sqrt{\frac{G\, Kv}{\rho\, E\, Kw}}\, L\right)\cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\, Kv\, L^2}{\rho\, E\, Kw}}\right)\rho\,\sqrt{\frac{G\, Kv\, L^2}{\rho\, E\, Kw}}\, G\, Kv}\right] \\
&\left[\frac{1}{2}\, T \left(\cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\, Kv}{\rho\, E\, Kw}}\, L\right)\sqrt{\frac{G\, Kv}{\rho\, E\, Kw}}\, L \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\, Kv\, L^2}{\rho\, E\, Kw}}\right)\rho\,\sqrt{\frac{G\, Kv\, L^2}{\rho\, E\, Kw}} - 2\cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\, Kv}{\rho\, E\, Kw}}\, L\right)\sqrt{\frac{G\, Kv}{\rho\, E\, Kw}}\, L \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\, Kv\, L^2}{\rho\, E\, Kw}}\right)\right.\right. \\
&\quad - 2\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\, Kv}{\rho\, E\, Kw}}\, L\right)\cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\, Kv\, L^2}{\rho\, E\, Kw}}\right)\sqrt{\frac{G\, Kv\, L^2}{\rho\, E\, Kw}}\,\rho + 2\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\, Kv}{\rho\, E\, Kw}}\, L\right)\cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\, Kv\, L^2}{\rho\, E\, Kw}}\right)\left.\sqrt{\frac{G\, Kv\, L^2}{\rho\, E\, Kw}}\right) \Big/ \Bigg(\\
&\left.\left(-2\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\, Kv}{\rho\, E\, Kw}}\, L\right) + \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\, Kv}{\rho\, E\, Kw}}\, L\right)\sqrt{\frac{G\, Kv}{\rho\, E\, Kw}}\, L\right)\cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G\, Kv\, L^2}{\rho\, E\, Kw}}\right)\rho\,\sqrt{\frac{G\, Kv\, L^2}{\rho\, E\, Kw}}\, G\, Kv \Bigg)\right] \\
&[0]
\end{aligned}
$$

VII Konstanter deformerbart tvärsnitt

VII.1 Utbredda antisymmetriska laster

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \;=\begin{bmatrix} 6\dfrac{\sin(k\,L)\,b^2\,q}{(\cos(k\,L)+\cosh(k\,L))\,(Av\,b^2+Av\,b^2\,\alpha+Ao\,bk^2+\alpha\,Au\,b^2)\,h\,k^2} \\ 0 \\ 6\dfrac{\sinh(k\,L)\,b^2\,q}{(\cos(k\,L)+\cosh(k\,L))\,(Av\,b^2+Av\,b^2\,\alpha+Ao\,bk^2+\alpha\,Au\,b^2)\,h\,k^2} \\ -6\dfrac{q\,b^2}{(Av\,b^2+Av\,b^2\,\alpha+Ao\,bk^2+\alpha\,Au\,b^2)\,h\,k^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} =$$

$$\left[\frac{1}{4}\left(24\,b^2\sin\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\cos\left(\frac{1}{2}k\,L\right)q\,Z\,\alpha+F\,k\,h\cosh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\cos\left(\frac{1}{2}k\,L\right)Av\,b^2+F\,k\,h\cosh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\cos\left(\frac{1}{2}k\,L\right)Av\,b^2\,\alpha\right.\right.$$
$$+F\,k\,h\cosh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\cos\left(\frac{1}{2}k\,L\right)Ao\,bk^2+F\,k\,h\cosh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\cos\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\alpha\,Au\,b^2-F\,k\,h\sinh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\sin\left(\frac{1}{2}k\,L\right)Av\,b^2$$
$$\left.-F\,k\,h\sinh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\sin\left(\frac{1}{2}k\,L\right)Av\,b^2\,\alpha-F\,k\,h\sinh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\sin\left(\frac{1}{2}k\,L\right)Ao\,bk^2-F\,k\,h\sinh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\sin\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\alpha\,Au\,b^2\right)\Big/\Bigg($$
$$\left.k^2\,h\,(Av\,b^2+Av\,b^2\,\alpha+Ao\,bk^2+\alpha\,Au\,b^2)\left(\cosh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)^2-1+\cos\left(\frac{1}{2}k\,L\right)^2\right)Z\,\alpha\Bigg)\right]$$

$$\left[\frac{1}{4}\left(24\,b^2\cosh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\sinh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)q\,Z\,\alpha+F\,k\,h\sinh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\sin\left(\frac{1}{2}k\,L\right)Av\,b^2+F\,k\,h\sinh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\sin\left(\frac{1}{2}k\,L\right)Av\,b^2\,\alpha\right.\right.$$
$$+F\,k\,h\sinh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\sin\left(\frac{1}{2}k\,L\right)Ao\,bk^2+F\,k\,h\sinh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\sin\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\alpha\,Au\,b^2+F\,k\,h\cosh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\cos\left(\frac{1}{2}k\,L\right)Av\,b^2$$
$$\left.+F\,k\,h\cosh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\cos\left(\frac{1}{2}k\,L\right)Av\,b^2\,\alpha+F\,k\,h\cosh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\cos\left(\frac{1}{2}k\,L\right)Ao\,bk^2+F\,k\,h\cosh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\cos\left(\frac{1}{2}k\,L\right)\alpha\,Au\,b^2\right)\Big/\Bigg($$
$$\left.k^2\,h\,(Av\,b^2+Av\,b^2\,\alpha+Ao\,bk^2+\alpha\,Au\,b^2)\left(\cosh\left(\frac{1}{2}k\,L\right)^2-1+\cos\left(\frac{1}{2}k\,L\right)^2\right)Z\,\alpha\Bigg)\right]$$

$$\left[-6\frac{q\,b^2}{k^2\,h\,(Av\,b^2+Av\,b^2\,\alpha+Ao\,bk^2+\alpha\,Au\,b^2)}\right]$$