

Modellering av extrema istryck

-studie av Pajala och Frösön



Magnus Fredrikson och Johan Persson

Avd. för Konstruktionsteknik och Teknisk Vattenresurslära
Lunds Tekniska Högskola
Lunds Universitet, 2005

Rapport TVBK-5131
Rapport TVRL-2005:10
Lund 2005

**Modellering av extrema istryck
-studie av Pajala och Frösön**

**Modelling of extreme ice pressures
-study of Pajala and Frösön**

Magnus Fredrikson och Johan Persson
2005

Avdelningarna för Konstruktionsteknik och Teknisk Vattenresurslära
Lunds Tekniska Högskola, Lunds Universitet
Box 118
221 00 Lund
046-222 00 00

Divisions of Structural Engineering and Water Resources Engineering
Lund's Institute of Technology, Lund University
Box 118
221 00 Lund
046-222 00 00

Rapport TVBK-5131
Rapport TVRL-2005:10
Lund 2005
ISSN 0349-4969
ISRN: LUTVDG/TVBK-05/5131 (60p)

Examensarbete
Handledare: Prof. Lars Bengtsson
Prof. Sven Thelandersson
Maj 2005

Abstract

Today, the knowledge about ice forces in Sweden is uncertain. Certain guidelines have been developed according to RIDAS to determine ice forces when constructing dams, piers etc. In this thesis an environmental model has been developed to predict thermal ice pressures. The inputs for the model are;

- a) the mean daily air temperature for each day of the year;
- b) the snow cover depth.

The mean daily air temperature is based on measured data, from SMHI (The Swedish Meteorology and Hydrology Institute). These input data are then simulated over 1000 years using an *Autoregressive Moving Average*-model.

Besides this, the model has been produced on assumptions and limitations. The most important assumptions and limitations are;

- a) the ice is formed in a static way;
- b) freeze-up of the ice;
- c) no cracks in the ice;
- d) the ice is divided into layers.

Further the ice thickness and the temperature profiles in the ice are analyzed using specific heat transfer equations and approximated by linear equation systems. Thermal ice loads are generated by short and long term temperature changes.

Short term load is the force that's calculated from the largest positive temperature-change during one day under a season. Long term load is the force that's calculated from the lowest average temperature in the ice to zero under a season. The ice pressures are calculated according to four cases:

1. Short term load; without snow cover.
2. Long term load; without snow cover.
3. Short term load; with snow cover.
4. Long term load; with snow cover.

The analysis shows that predicted short term load with snow gives ice pressures of the same order of magnitude as RIDAS.

Förord

Under hösten 2004 beslutade vi oss för att skriva vårt exjobb tillsammans. Då vi läst olika huvudinriktningar under Konstruktionsteknik respektive Teknisk Vattenresurslära tyckte vi att det skulle vara intressant att kombinera dessa kunskaper. Vi tog då kontakt med avdelningarna och tillsammans med Sven Thelandersson, Professor under Avdelningen Konstruktionsteknik utarbetades idén om att modellera extrema istryck. Exjobbet har varit omfattande och intressant, och gett oss stor inblick i vilka svårigheter som finns vid modellering av istryck. Vi vill därför tacka Prof. Sven Thelandersson för Konstruktionsteknik, Prof. Lars Bengtsson för Teknisk Vattenresurslära för allt engagemang och tid som de gett oss samt även ett stort tack till Doktorand Martin Häglund som varit en hjälpande hand.

16 Maj, 2005, Lund

Magnus Fredrikson och Johan Persson

Sammanfattning

De riktlinjer som idag används för betongdammar är enligt RIDAS (Kraftföretagens riktlinjer för dammsäkerhet), 50 kN/m, 100 kN/m och 200 kN/m för respektive södra, mellersta och norra Sverige. Problemet är att dessa riktlinjer inte är helt tillförlitliga.

Svårigheten med att dimensionera dammar mot istryck är att många olika parametrar inverkar samtidigt. Parametrarna är svåra att mäta och prediktera. Is har skiftande egenskaper, särskilt sprickmängd, tjocklek och randvillkor vid stränder har en stor inverkan. I denna rapport har antagande och begränsningar gjorts och de viktigaste är:

- a) Isen är belägen på en sjö eller damm;
- b) Statisk isttillväxt;
- c) Frysgraddagar;
- d) Sprickfri is;
- e) Snötäcke sätts till 1/3 av istjocklek.

Studien inriktar sig på två platser i Sverige, Pajala och Frösön. Befintliga temperaturdata har införskaffats från SMHI (Sveriges Meteorologiska och Hydrologiska Institut). Utifrån dessa temperaturdata beräknas extrema istryck. För detta har en modell tagits fram.

Ingångsdata erhålls genom ARMA-modellering som kalibreras från verkliga temperaturdata, därefter görs en simulering över 1000 år, varvid uppskattning av istjocklekar och temperaturprofiler i isen kan göras. Detta har möjliggjorts genom endimensionella värmeekvationer, där isen delas in i celler på 0.1m. För att få mer realistiska istjocklekar har även ett snötäcke inkluderats i modellen. Fall som orsakar extrema istryck uppkommer av korttids- och långtidslast, och dessa definieras:

Korttidslast är den kraft som största positiva dygnsdifferensen under en säsong ger upphov till. *Långtidslast* är den kraft som förändring från lägsta medeltemperaturen i isen under en säsong till noll ger upphov till. Extrema istryck per säsong beräknas enligt fyra fall där istrycken uppstår genom termisk expansion:

- 1) Korttidslast; utan snötäcke.
- 2) Långtidslast; utan snötäcke.
- 3) Korttidslast; med snötäcke.
- 4) Långtidslast; med snötäcke.

Utifrån dessa extrema istryck säsongsvis kan en predikerad 50-årslast fås fram. Vidare har även en maximal 40-årslast beräknats för ursprunglig temperaturdata.

Modellering utan snötäcke för fall 1 och 2, uppvisar orealistiskt höga istryck, medan fall 3 och 4 ger realistiska värden. Pajalas maximala 40-årslast och predikerad 50-årslast för fall 3 är 229 respektive 234 kN/m. Detta visar att dimensioneringsvärdena som idag använts antagligen är för låga.

Innehållsförteckning

1 Inledning	1
1.1 Bakgrund.....	1
1.2 Mål.....	1
1.3 Temperaturdata.....	1
2 Generell isbeskrivning	3
2.1 Istillväxt.....	3
2.2 Belastningsgenererande mekanismer.....	4
3 Modellbeskrivning	5
3.1 Antaganden och ingångsdata för modellanalys.....	5
3.2 Elasticitetsmodul.....	7
4 Modeller	9
4.1 Studie i Kanada.....	9
4.2 Experiment av Löfqvist.....	16
5 Metoder och modellanalys	17
5.1 Isbildning med värmeflödesekvationer.....	17
5.1.1 Snötäcke.....	20
5.2 Generell beskrivning av temperaturprofiler och istillväxt.....	22
5.3 Beräkning av maximala istryck med temperaturdata för 40 år.....	27
5.3.1 Beräkning av istryck med temperaturdata för 40 år.....	27
5.4 Beräkning av extrema istryck med simulerade temperaturdata.....	31
5.4.1 Beskrivning av Autoregressive Moving Average.....	31
5.4.2 Simulering av temperaturdata.....	33
5.4.3 Beräkning av istryck med simulerade temperaturdata för 1000 år...37	
6 Jämförelse med andra modeller	43
6.1 Tidigare modellanalysversion.....	43
6.2 Studie i Kanada.....	43
7 Diskussion och slutsats	45
7.1 Diskussion.....	45
7.2 Slutsats.....	46
8 Referenser	47

Appendix I Tabell över de viktigaste termer som använts i modellanalysen

Appendix II Figur över autokovariansen av temperaturdatan

Appendix III Figur över normalfördelningar

1 Inledning

I detta kapitel beskrivs syftet med denna rapport samt observerade ingångsdata. Storheter, beteckningar och enheter i denna rapport redovisas i Appendix I.

1.1 Bakgrund

Idag är osäkerheten stor vad det gäller att beräkna islasterna vid dimensionering av dammar, luckor och bropelare. Beroende på det geografiska läget i Sverige är islasterna indelade i respektive 50 kN/m, 100 kN/m och 200 kN/m (Kompendium RIDAS, 2000). Dessa dimensioneringsvärden skapar svårigheter vid dimensionering då dammar har olika utformning och styvhet (Ekström, 2002).

1.2 Mål

Genom en endimensionell värmeflödesmodell beräkna extremvärden för istjocklek och temperaturprofiler i de norra delarna av Sverige. Med befintliga ingångsdata ska extrema istryck för varje säsong över 1000 år beräknas med och utan snötäcke med beaktande till fyra fall. Dessa fall beskrivs av korttids –och långtidslast. Korttidslast är den kraft som största positiva dygnsdifferensen under ett dygn ger upphov till, och långtidslast bygger på att största istrycket genereras av den lägsta medeltemperaturen i isen under varje säsong till noll. Målet är att med dessa beräknade istryck skatta istryck med en återkomsttid på 50 år.

1.3 Temperaturdata

Temperaturdata har införskaffats från Sveriges Meteorologiska och Hydrologiska Institut, SMHI. De platser som valts är Pajala och Frösön med befintliga temperaturdata från mätstationer. Att dessa platser valts är dels att de är belägna i norra delarna av Sverige, och dels att fullständiga temperaturdata för platserna finns att tillgå. Okorrigerade temperaturdata innehåller uppmätta temperaturer från 1961-01-01 till 2004-07-31. Temperaturen ges i tretimmarsintervall per dygn för varje station. Utifrån dessa basdata beräknas dygnsmedeltemperaturer. Eventuella felvärden i temperaturdata har inte beaktats vid beräkning av dygnsmedeltemperaturer.

2 Generell isbeskrivning

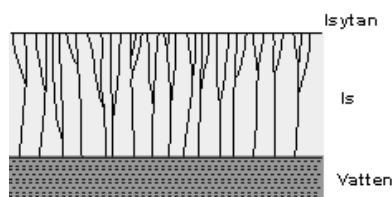
Kapitlet behandlar allmänt istillväxt och vilka mekanismer som påverkar uppkomsten av istryck.

2.1 Istillväxt

Istillväxt beror på att värme leds bort ifrån isen. Isens underyta blir då allt kallare, och vattnet närmast isen fryser. Ju större borttransporten är av värme desto större blir isens tillväxthastighet. Borttransporten av värme beror i huvudsak av tre fenomen: utstrålning, värmeledning och ångbildning.

När sjöar kyls ned på hösten, kyls först ytvattnet vilket då blir tyngre och sjunker medan det djupare belägna vattnet strömmar upp. Man säger då att sjön skiktar sig. I samband med denna skiktning transporteras vattnets värme upp i luften. När denna process är klar har sjön en ungefärlig temperatur på +4°C. Då temperaturen i luften fortsätter att sjunka kommer ytvattnet att kylas ner ytterligare, och till sist nås fryspunkten för detta lager medan det underliggande vattnet fortfarande har en temperatur som är över 0°C. Den första isen bildas oftast under kalla och klara nätter då små iskristaller från luftlagret kondenseras på vattenytan. Den första isen på lugnt vatten har en form av plattliknande kristaller som växer ihop till ett nätverk som slutligen förenar sig till ett kontinuerligt isskikt (Ekström, 2002). Istillväxt sker sedan nedåt och alltid på isens undersida i gränsskiktet mot vattnet. Den värme som frigörs kan inte ledas nedåt i vattnet där temperaturen är högre, utan måste ledas upp genom isen och ut till luften genom utstrålning. Under kalla och klara nätter är utstrålningen som bäst. Om det dessutom blåser så att den utstrålade värmen leds bort ökar värmeflödet och under dessa förhållanden fryser isen snabbast. Om det däremot är mulet sker istillväxt långsammare eftersom utstrålningsvärmen reflekteras tillbaka ner mot isen (SMHI, 2005).

Den is som bildas genom att vatten fryser till på istäckets undersida kallas för kärnis. Ren kärnis är hård och blank. Kärnis växer till nedåt och bildar sammanfogande pelarformade kristaller, parallellt med värmeledets riktning och är den typ av is som i allmänhet har störst bärighet, se figur 2.1. Stöpis bildas ovanpå kärnis och leder värme sämre än kärnis. Denna is kan uppstå genom att isen pressas ned, och vatten strömmar upp genom hål eller sprickor och fryser till. Ett exempel på stöpis är regn eller smältande snö som rinner ner genom snötäcket och fryser till (SMHI, 2005). Stöpisens kvalitet är varierande. Hållfastheten beror på temperatur, vindförhållanden under stöpningsen och underliggande istjocklek. Desto mer vatten stöpsörjan innehåller innan den återfryser desto mindre luftbubblor kommer stöpiserna att få, vilket ger bättre hållfasthet. Är luftinnehållet litet kan stöpis ha samma hållfasthet som kärnis.



Figur 2.1. Schematisk bild över kärnisens kristallstruktur.

2.2 Belastningsgenererande mekanismer

Det finns flera olika mekanismer som genererar laster från ett islager. Dessa laster kan utöva tryck på en konstruktion eller pelare. När ett landfast istäcke har bildats på en sjö uppkommer belastningar genom termisk expansion eller kontraktion vilket orsakas av temperaturvariationer i isen. Det är väldigt svårt att uppskatta dessa belastningar på grund av följande;

- a) Isens deformationer är icke linjära;
- b) Isens oregelbundna tjocklek;
- c) Isens skiftande egenskaper (istyp, mängden sprickor);
- d) Sannolikhet för extrema situationer.

Ett tunt lager av is har en temperatur nära 0°C . När lagret växer kommer temperaturen på ytan att sjunka eftersom temperaturen i luften blir allt lägre. Översta delen av isen kommer då att dra sig samman snabbt medan temperaturen vid underkanten fortfarande är vid fryspunkten. I och med att isen flyter på en horisontell vattenyta kommer den fria böjningen att vara begränsad. Detta leder till ett böjningsmoment i istäcket, och denna belastning kommer att släppa genom bildning av sprickor. Efter sprickbildningen skapas vågrörelser i isen, vilket kan kännas om man står på isen. Vissa sprickor kommer sedan att fyllas med vatten eller drivande snö och fryser till igen. Om vädret senare blir mildare eller om vatten letar sig upp till ytan kommer det översta lagret expandera igen. Tryck kommer då att uppstå i isen, detta får som följd att isen trycks mot en strand eller att den veckas mot en vall (Ashton, 1986). Hur stort detta tryck blir, beror på faktorer som;

- a) Temperaturförändringen i isen;
- b) Hur många sprickor som har blivit fyllda;
- c) Tjockleken på isen;
- d) Randvillkor vid stränder och vallar;
- e) Vindhastighet, lufttemperatur, solstrålning, snödjup.

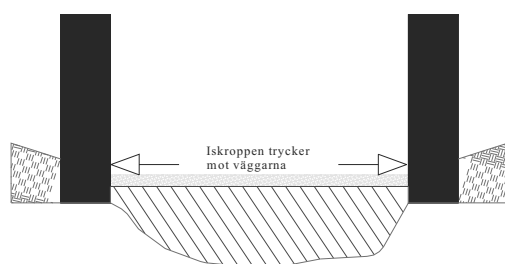
3 Modellbeskrivning

I kapitlet redogörs antaganden och begränsningar som modellanalysen för rapporten bygger på. Dessa antagande och begränsningar görs för att temperaturer i isen och istjocklek ska kunna beräknas m.h.a. värmeflödesekvationer.

3.1 Antaganden och ingångsdata för modellanalys

Att beräkna islager och i detta fall en 50-årslast är komplicerat, med beaktande till alla parametrar. I modellen har därför vissa förenklingar gjorts och studien bygger på följande antaganden;

- a) Isen är belägen mellan två oeftergivliga väggar eller konstruktioner, se figur 3.1;
- b) Vattnet mellan dessa kan beskrivas som en damm eller insjö;
- c) Statisk istillväxt;
- d) Isklasstyp S1;
- e) Antalet frysgraddagar;
- f) Samma densitet genom hela isen, över alla säsonger;
- g) Sprickfri is;
- h) Istillväxt beräknas med värmeflödesekvationer, där isen är uppdelad i lager (celler);
- i) Maximalt istryck fås när isen själv går sönder;
- j) Korttids –och långtidslast;
- k) Snötäcke sätts till 1/3 av istjocklek.



Figur 3.1. Modellprofil över iskropp som förhindras från expansion av två oeftergivliga väggar.

Nedan följer beskrivningar av några ovanstående förutsättningar.

Statisk istillväxt, istillväxt sker inte i snabbt strömmande vatten eller i en sjö med vattenfluktuationer.

Klasstypen S1, en is som enbart består av kärnis. Modellen beaktar inte att snö eller smältvatten kan bilda stöpis ovanpå kärnisen.

Frysgraddagar, har i modellen satts till 30°C-dygn. Med det menas om den ackumulerade summan av dygnsmedeltemperaturer över ett antal dygn når ned till -30°C börjar isbildningen. Även om temperaturen är under fryspunkten tar det en liten tid för isen att bildas eftersom sjöns strömning, vindförhållanden och solradiation inte alltid tillåter det.

Densiteten antas vara densamma över hela isvolymen. Isen är även fri från salt och andra föroreningar.

De oeftergivliga väggarna antas vara vertikala mot själva isen. Här finns alltså inga lutningar så att istrycket kan avlastas genom glidning. Beroende på hur väggarna ligger geografiskt, och hur de är uppbyggda ger detta en stor inverkan på hur stort trycket kan bli.

Värmeflödesekvationerna, styr istillväxten och temperaturprofilerna i isen, beskrivs i kap.5.2.

Snötäcke på is är en viktig faktor eftersom den är isolerande. Snödjupet varierar förstås med tid och vindar i verkligheten, men antagandet är att snödjupet är en tredjedel av istjocklek, under varje säsong då is finns.

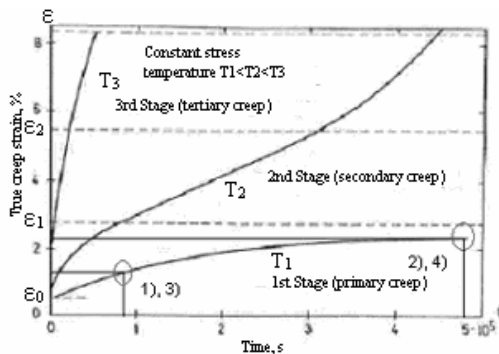
I modellen har följande ingångsdata använts;

- a) Dygnsmedeltemperaturer;
- b) Snödjup motsvaras av 1/3 av istjockleken vid varje tidpunkt.

Fall som orsakar extrema istryck uppkommer av korttids- och långtidslast. Korttidslast är den kraft som största positiva dygnsdifferensen under en säsong ger upphov till. Långtidslast är den kraft som förändring från lägsta medeltemperaturen i isen under en säsong till noll ger upphov till. I modellen har fyra fall för beräkning av extrema istryck förutsatts:

- 1) Korttidslast; utan snötäcke.
- 2) Långtidslast; utan snötäcke.
- 3) Korttidslast; med snötäcke.
- 4) Långtidslast; med snötäcke.

3.2 Elasticitetsmodul



Figur 3.2. Isens krypning, ϵ , vid konstant last och vid olika temperaturer som funktion av tiden t (Ekström, 2002).

Att bestämma Elasticitetsmodul för is är svårt, och till modellen har viss förenkling gjorts. Elasticitetsmodul, E_0 , kan en kort tid efter pålastning enligt Lindgren (Fransson, 1988), bestämmas till:

$$E_0 = 6.5 * (1 - 0.012 * T_{medel}) * 10^9 \text{ [Pa]} \quad (3.1)$$

där T_{medel} = isens medeltemperatur.

Vid belastning sker en tidsberoende deformation, krypning ϵ_c , vilken förenklat beskrivs genom en effektiv tidsberoende E-modul, $E_c(t) < E_0$. Modellen inriktar sig på den primära töjningen, som anger hur snabbt töjningen utvecklas. Då modellen bygger på en is av klasstyp S1, utan salthalt spelar krypeffekten stor roll för isens styvhet, se figur 3.2.

Sambandet mellan töjningar och E-moduler kan skrivas:

$$\frac{E_c}{E_0} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon_c} \quad (3.2)$$

där E_c under tiden t efter pålastningen bestäms.

I modellen har fyra fall för beräkning av istryck förutsatts. För fall 1 och 3 som beskriver islaster genererade av temperaturförändringar, under ett dygn antas en E-modul $E_1 = E_0/2$. För fall 2 och 4 som motsvarar temperaturförändring under lång tid antas en E-modul $E_\infty = E_0/4$.

4 Modeller

Kapitlet redogör för två tidigare studier, där islaster beskrivs med både analytiska modeller och praktiska försök.

4.1 Studie i Kanada

Comfort et al har utfört en studie över statiska islaster vad gäller fältmätningar och insamling av data över 73 mätstationer. Undersökningen pågick under 11 år, varav mätningar gjordes under 9 år med början vintersäsong 1991-92, av uppkomna islaster i utvalda dammar, se tabell 4.1. Forskningen påbörjades eftersom man hade liten kunskap om islasters uppkomst och verkan. Följande frågeställningar behandlades:

- Hur stora islaster påverkar lågdammar (~15 m), och om dimensioneringsvärden på islaster, 150-225 kN/m, ger tillräcklig säkerhet beträffande dammarnas stabilitet.
- Hur fördelningen av islasterna längs med dammen påverkar grindar, utskov m.m.

Tabell 4.1. Fältmätning av maximala islaster längs dammkonstruktioner (Comfort et al, 2004).

	Ägare	Mätplats	Mätperiod [År]	Maximal islast [kN/m]
Fall; Försumbara vattenfluktuationer: Islaster uppkomna av främst termisk expansion.	Hydro-Quebec	Paugan Dam	3	70
	National Research Council	Basin	1	47
	Man.Hydro	Seven Sisters	1 (1996-97)	62
	Man.Hydro	Pine Falls Dam	2	61
	Man.Hydro	McArthur Falls Dam	2	85
	Fall; Tydliga vattenfluktuationer: Islaster uppkomna genom kombinationer av vattennivå/temperaturförändringar.	Ontario Power Gen	Arnprior Dam	4
OPG		Otto Holden Dam-Main reservoar	3	52
OPG		Otto Holden Dam-East Bay	2	65
Man Hydro		Seven Sisters	2 (1995-96)	324
Man Hydro		Seven Sisters	2 (1998-99)	374
Lab & Nfld Hydro		Churchill Falls	1	89

Fältmätningarna (se tabell 4.1) som gjordes på 9 platser i Kanada, visade att den största uppmätta islasten var 374 kN/m. Denna islast uppmättes i Manitoba Hydro's Seven Sisters dam. Samtidigt mättes även uppkomna islaster på utskov, grindar m.m. på två platser, Quebec och Manitoba under 2 respektive 3 år. Detta utförs för att man genom analytiskt arbete ska kunna prediktera (Comfort et al, 2004);

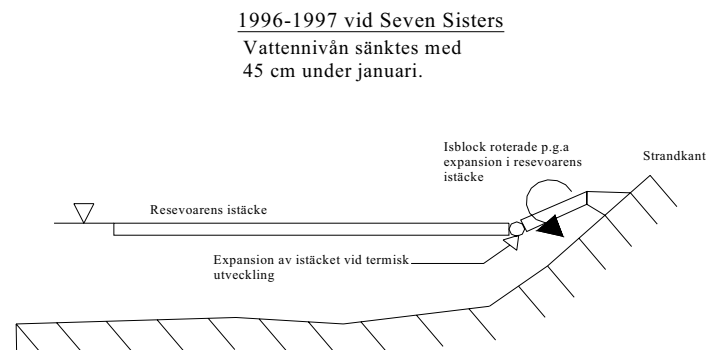
- a) Islaster på dammar, grindar, bropelare m.m;
- b) Isbetingade parametrar.

4.1.2 Mekaniskt genererade islaster och prediktionsmetoder

Comfort et al fann att största inverkan på islasterna var istemperaturer och vattenfluktuationer. Normala vattennivåsänkningar visade sig ge större islaster än med enbart termiskt expansion. Från detta togs två prediktionsmodeller fram:

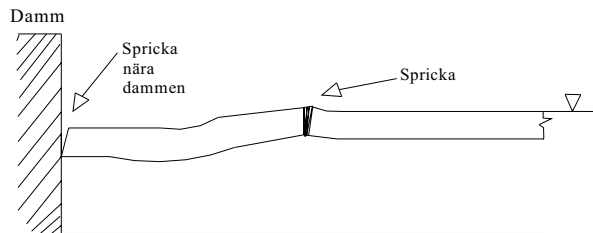
- a) Endast termiskt genererade islaster beräknades utan att beakta vattennivåsänkningar.
- b) Kombinerad temperatur/vattennivåsänkning beaktas.

Överdrivet stora vattennivåsänkningar ger inte högre islaster, och togs därför inte med i analyserna. En annan observation är att om man gör en relativt stor vattennivåsänkning under förvintern så reducerades islasterna med 3-5 gånger gentemot normala vattenfluktuationer. Förklaringen är att en ledmekanism skapas vid strandbanken nära dammen, se figur 4.1 och 4.2.



Figur 4.1. Ledmekanism vid vattennivåsänkning (Comfort et al, 2004)

1999-2000 vid Seven Sisters
Vattennivån sjönk 35cm i slutet av december, och återgick till normal nivå efter ett par dagar.



Figur 4.2. Sprickbildning påverkad av vattennivåsänkning (Comfort et al, 2004).

Att begränsa storleken av islasterna genom särskilda riktlinjer för vattennivåsänkning blir nu möjligt genom (Comfort et al, 2004):

- Optimal vattennivåsänkning är lika stor som befintlig istjocklek;
- Vattennivåsänkningen behöver inte göras under en längre period för att reducera islaster;
- Vattennivån vid strandkanten kan cykliskt höjas, efter en sänkning, utan att orsaka höga islaster;
- Optimal vattennivåsänkning ska ske under förvintern när isen fortfarande är relativt tunn, 30-40 cm tjock.

4.1.3 Modellering med hänsyn till miljö

En generell modell (Singh and Comfort 1997; 1998) togs därefter fram med hjälp av ingångsdata från mätstationer (se figur 4.3). Dessa användes för att prediktera istjocklek, snödjup, snösörja, tillfrysning och temperaturprofiler i isen för varje dag efter att isen lagt sig under vintersäsongen. Man använde sig av följande ingångsdata till modellen;

- Dygnsmedeltemperatur;
- Reservoarens tillfrysningsdag;
- Snödjup vid närbelägna mätstationer;
- Daglig regnnederbörd över vintern;
- Snödensitet över vintern.

Modellens prediktion av istjocklekar, snödjup och temperaturprofiler ligger inom 10 % av uppmätta medel för dammarna Arnprior, Paugan och Seven Sisters (Comfort et al, 2004).

4.1.4 Dammsäkerhetsanalyser av termiskt uppkomna islaster

Termiska islaster för de 73 mätstationerna i Manitoba, Ontario och Quebec bestämdes, se figur 4.3.

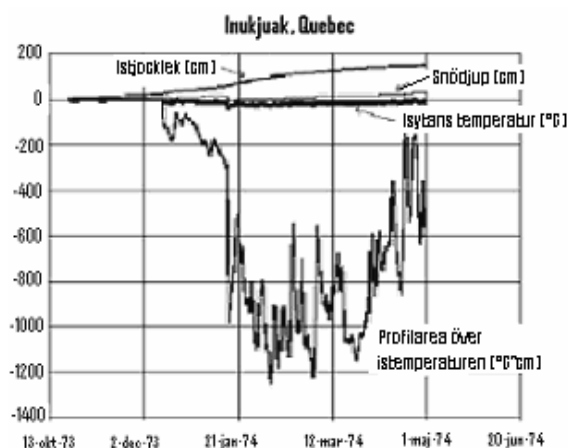


Figur 4.3. Analyserade mätstationer belägna i Kanada (Comfort et al, 2004).

I analysen använde man sig av;

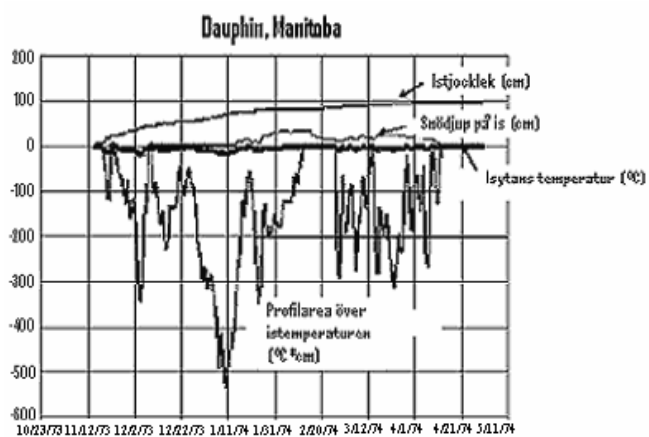
- a) Platsanpassad generell modell enligt Sing och Comfort (1997; 1998);
- b) Algoritmer för beräkning av termiska islaster;
- c) Ingångsdata för modellanalys enligt a).

I figur 4.4 och figur 4.5 visas resultat ifrån analys under en säsong. Figur 4.4 visar resultat från Inukjuak, Quebec, som ligger i norra delarna av Kanada med liten snönederbörd. Maximal last uppmättes under senvintern då isen värmdes upp under övergången till vår.



Figur 4.4. Predikterad istjocklek, snödjup och temperatur (Comfort et al, 2004).

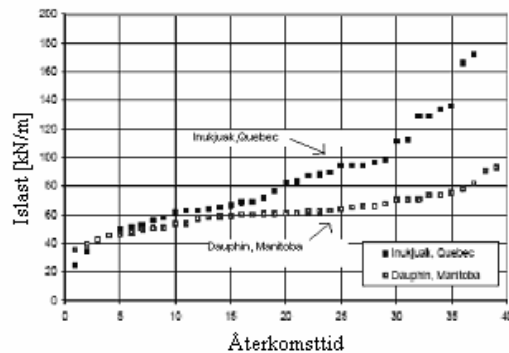
Figur 4.5 visar data över Dauphin i södra Manitoba. Här orsakade snöfall under för- och mittvintern att isytan pressades under vattenytan, vilket orsakade snösörja. Den största temperaturförändringen skedde innan snösörjan bildats, men inte den största islasten.



Figur 4.5. Predikterad istjocklek, snödjup och temperatur (Comfort et al, 2004).

Maximala islasten inträffade under senvintern, då temperaturförändringarna var mindre, men istjockleken större.

I relation till denna undersökning, gjordes också beräkningar av årliga maxima av islaster över de två platserna, se figur 4.6. Dessa årliga maxima bygger på kombination av fältmätningar och teoretiska analyser där modell enligt Singh och Comfort (1997; 1998) och algoritmer för beräkning av termiska islaster används.



Figur 4.6. Maximala årslaster för Inukjuak och Dauphin (Comfort et al, 2004).

En databas uppfördes, och analyser visar att årliga maximala islaster (Comfort et al, 2004);

- a) Ökar med istjocklek och antal frysdagar;
- b) Påverkas av det geografiska läget. Islasterna kan inte bestämmas generellt, utan är platsspecifika.

4.1.5 Islaster vid kombinerad vattennivåsänkning/termisk expansion

Vad gäller kombinerade fall, bestämde man spridningen av maximala årslaster för 12 fall av vattennivåförändringar och medelvattennivåförändringar, för de 73 stationer man valt. Algoritmerna utsattes för en prognostiserad analys, och orealistiskt höga islaster predikterades. Detta medförde att man fick begränsa ingångsdaten till algoritmerna för de analyser som gav orealistiskt höga islaster. Detta medförde att pålitligheten av årliga maximala islaster för de kombinerade fallen minskade. En databas upprättades dock, för det kombinerade fallet. Studien visade i övrigt att likaså rent termiska islaster, som kombinerade islaster ökade med istjockleken (Comfort et al, 2004).

4.1.6 Jämförelse mellan predikterade och uppmätta islaster

I en jämförelse fann man att uppmätta islasterna tenderade bli för höga gentemot predikterade islaster. Detta förklaras med att predikterade islaster vanligtvis överskrider de uppmätta islasterna under mätperioden som i studien var kort. Detta visade sig vid Seven Sisters för det kombinerade fallet (se tabell 4.2), då maximala uppmätta islasten var väl tilltagen i relation till mätperioden. Då studien är omfattande och det inte beskrivs närmare hur predikterade laster bestämts hänvisar författare av denna rapport till Singh and Comfort (1997; 1998) och Comfort et al (2003). I tabell 4.2. visas detaljerad lista över de uppmätta och predikterade islasterna:

- a) Islaster genererade av temperaturförändringar.
- b) Kombinerad temperatur/vattennivåsänkning beaktas.

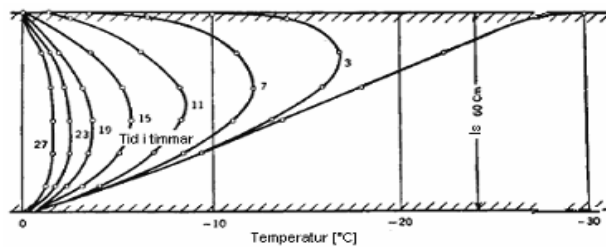
Tabell 4.2. Jämförelse mellan uppmätta och predikterade islaster (Comfort et al, 2004)

Fall a): Islaster genererade av temperaturförändringar					
Dam	Maximalt uppmätta islaster [kN/m]	Mätperiod (År)	Uppskattad återkomst av maximalt uppmätta islaster (År)	Predikterad 100-årslast [kN/m]	Predikterad 1000-årslast [kN/m]
Paugan	70	3	20	81	95
Pine Falls	61	2	2	105	117
MacArthur Falls	85	2	7	105	117
Seven Sisters	62	1	2	105	117
Fall b): Islaster genom kombinerad vattennivåsänkning/temperaturförändring					
Dam	Maximalt uppmätta islaster [kN/m]	Mätperiod (År)	Uppskattad återkomst av maximalt uppmätta islaster (År)	Predikterad 100-årslast [kN/m]	Predikterad 1000-årslast [kN/m]
Arnprior	210	4	43	264	382
Seven Sisters (98-99)	374	4	97	393	494
Seven Sisters (95-96)	324	4	24	397	499
Otto Holden	62	3	2	140	182

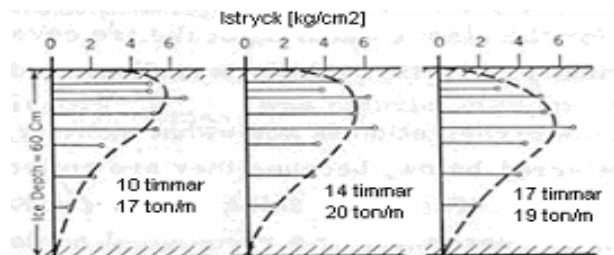
4.2 Experiment av Löfqvist

Löfqvist (Bergdahl, 1978) införde ett nytt koncept för att studera termiska istryck. Han återskapade en del av ett islager i en betongbassäng. Bassängen var cylindrisk med en diameter av 50 cm. Temperatur- och tryckmätare var inbäddade i isen.

Under experimentet fick isen växa till en viss tjocklek, och därefter höjdes temperaturen i rummet. I de två första försöken var sprickorna som skapades under bildandet av isen för trånga eller för grunda för att bli vattenfyllda. En cylindrisk film applicerades runt om bassängkanten så att islagret kunde röra sig fritt. Isen bildades av gradvis temperatursänkning ned till -30°C . Efter detta påbörjades upptiningen av isen till 0°C , under en tidsperiod på 15 timmar. Uppmätta temperaturprofiler under denna process kan ses figur 4.7.



Figur 4.7. Temperaturprofil (Bergdahl, 1978).



Figur 4.8 Tryckprofiler (Bergdahl, 1978).

Då temperaturökningen spreds ned genom isen, skapades en päronformad tryckprofil med ett maximalt tryck som rör sig nedåt. Det maximala trycket mättes till att bli 20 ton/m, detta inträffade ungefär 14 timmar efter temperaturhöjningen, se figur 4.8 (Bergdahl, 1978). Löfqvist noterade efteråt att trycket reducerades genom;

- Deformation av betongcylindern genom trycket från isen;
- Termisk expansion av betongcylindern (25 % av isens);
- Sprickbildning i det översta islagret.

5 Metoder och modellanalys

Kapitlet beskriver metoder och simulering av ingångsdata. Innefattar också de ekvationer som styr istillväxten samt snötäckets reducering av temperaturer vid isens översida. Vidare beskrivs numerisk modellering av is kroppen genom cellindelning och linjära ekvationssystem för analys av temperaturprofiler i isen.

5.1 Isbildning med värmeflödesekvationer

Modellen för istillväxt är uppbyggd av värmeflödesekvationer enligt ekv. (5.1), (5.2) och (5.3).

I en punkt på avståndet x under isens överyta gäller följande:

$$\text{Värmeflöde } q(x) = -k_{is} * \frac{dT(x)}{dx} \quad (5.1)$$

där $T(x)$ =temperatur i punkt x , och
 k_{is} =värmekonduktivitet

$$\frac{dq(x)}{dx} = -C_p \rho \frac{dT(x)}{dt} \quad (5.2)$$

Randvillkoren vid isens underkant blir:

$$-q(h) = L\rho \frac{dh}{dt} \quad (5.3)$$

där C_p = specifik värmekapacitet [$\text{Jkg}^{-1}\text{C}^{-1}$]

L = isbildningsvärme [Jkg^{-1}]

ρ = isens densitet [kgm^{-3}]

$\frac{dh}{dt}$ = istillväxt per tidsenhet [ms^{-1}]

Vidare införs beteckningarna:

$T_{\text{ös}}$ = temperatur på isens översida

T_{us} = temperatur på isens undersida $\rightarrow T_{\text{us}}=0^\circ\text{C}$

$\Delta T = (T_{\text{us}} - T_{\text{ös}}) = -T_{\text{ös}}$

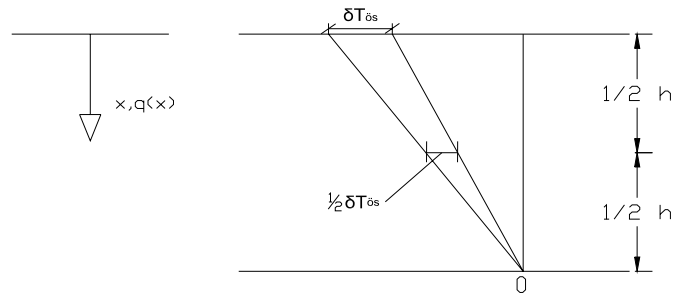
$\delta T_{\text{ös}} = T_{\text{ös}}^{k+1} - T_{\text{ös}}^k$

där,

$T_{\text{ös}}^k$ = Temperatur vid början av tidssteget k

$T_{\text{ös}}^{k+1}$ = Temperatur vid början av tidssteget $k+1$

Inledningsvis antages att temperaturerna varierar linjärt från översida till undersida hos isen, se fig 5.1.



Figur 5.1. Beskrivning av temperaturprofilen under ett dygn med ett element (isen ses som en hel kropp).

Ekv.(5.1) approximeras till:

$$-q(0) = \frac{-k_{is} \Delta T}{h} = \frac{-k_{is} \overline{T_{\overset{\circ}{o}s}}}{h} \quad (5.4)$$

där $\overline{T_{\overset{\circ}{o}s}} = \frac{1}{2} (T_{\overset{\circ}{o}s}^k + T_{\overset{\circ}{o}s}^{k+1})$, är medeltemperaturen under tidssteget k , och istjocklek h .

Vidare fås:

$$\frac{dT(x)}{dt} = \frac{\frac{T_{\overset{\circ}{o}s}^{k+1}}{2} - \frac{T_{\overset{\circ}{o}s}^k}{2}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dT_{\overset{\circ}{o}s}}{dt} \quad (5.5)$$

där $dT_{\overset{\circ}{o}s}$ är ändring i ytemperatur mellan tidssteget k och $k+1$.

$$q(h) = -L\rho \frac{dh}{dt} \quad (5.6)$$

där dh är istillväxten under tidsintervallet k .

Ekv. (5.4) och (5.6) ger då följande:

$$\frac{dq}{dx} = \frac{q(h) - q(0)}{h} = \frac{-L\rho \frac{dh}{dt} + k_{is} \frac{\overline{T_{\ddot{o}s}}}{h}}{h} \quad (5.7)$$

Insättning av ekv. (5.2) och ekv.(5.5) ger:

$$\frac{-L\rho \frac{dh}{dt} + k_{is} \frac{\overline{T_{\ddot{o}s}}}{h}}{h} = -C_p \rho \frac{1}{2} \frac{dT_{\ddot{o}s}}{dt} \quad (5.8)$$

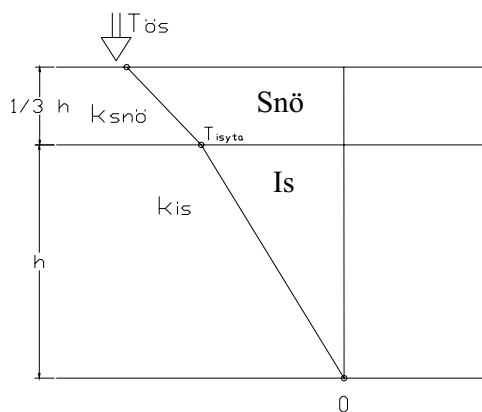
Ekv. (5.8) kan skrivas:

$$hdh = \frac{-k_{is} \overline{T_{\ddot{o}s}} dt + C_p \rho \frac{1}{2} h^2 dT_{\ddot{o}s}}{L\rho} \quad (5.9)$$

Att modellera istillväxt utifrån ekv. (5.9) visar sig vara problemfyllt då isen ses som ett element. När istjocklekarna överstiger en viss tjocklek ger ekv. (5.9) dåligt utslag, då isen inte hinner med temperaturomställningen över tidsstegen i varje säsong. Anledningen är att C_p -termen får stor betydelse om istjockleken är stor, och orsakar en reducering av istjockleken istället för istillväxt. För att modellera istillväxt blir lösningen istället att dela in isen i celler (lager), se kap.5.2.

5.1.1 Snötäcke

Istillväxt påverkas av förekomst av snötäcke under vintersäsongerna. I modellen antas att snön vid varje tidpunkt är 1/3 av istjocklek, h (se figur 5.2). Om snöns tjocklek är större än 1/3 kommer snöns egentygnd att pressa ned isen, vilket kan visas med Arkimedes princip. Snön fungerar som ett isolerande lager på isen, och temperaturerna på isytan kommer att bli varmare vilket torde ge en mer realistisk bild av islasterna. Snöns isolerande effekt ges av värmekonduktiviteten. Snö har en värmekonduktivitet, $k_{snö}$, mellan 0.12 och 0.51 W/m°C, och värmekonduktiviteten beror av densiteten (Ashton, 1986). Jämför man med isens värmekonduktivitet, k_{is} , som ligger runt 2.2 W/m°C är det en väsentlig skillnad, och ett snötäcke kommer att ge en stor reduktion av temperaturerna vid isens överyta.



Figur 5.2. Snöns reduktion av temperaturer, $T_{ös}$.

Algoritmen för beräkning av isens yttemperatur med pålagd snö (se figur 5.2) har följande utseende:

$$q = \frac{(T_{isyta} - 0)k_{is}}{h} = \frac{(T_{ös} - T_{isyta})k_{snö}}{(h/3)} \quad (5.10)$$

Genom att eliminera T_{isyta} som är temperatur på isytan i ekv. (5.10) fås:

$$(T_{isyta}k_{is})h = (3T_{ös}k_{snö} - 3T_{isyta}k_{snö})h$$

$$T_{isyta}k_{is} + 3T_{isyta}k_{snö} = 3T_{ös}k_{snö} \quad (5.11)$$

Där T_{isyta} slutligen ges av:

$$T_{\text{isyta}} = \frac{3k_{\text{snö}}}{k_{\text{is}} + 3k_{\text{snö}}} T_{\text{ös}} \quad (5.12)$$

där $k_{\text{snö}}$ = värmekonduktivitet [$\text{Jm}^{-1}\text{°C}^{-1}\text{s}^{-1}$]

k_{is} = värmekonduktivitet [$\text{Jm}^{-1}\text{°C}^{-1}\text{s}^{-1}$]

$T_{\text{ös}}$ = lufttemperatur [°C]

Snöns reduktion ger nya temperaturdata vid isens överyta, och används för fall med pålagd snö vid modellering av istillväxt och temperaturprofiler. Fortsättningsvis kommer beteckningen T_{isyta} att skrivas $T_{\text{ös}}$.

5.2 Generell beskrivning av temperaturprofiler och istillväxt

En algoritm för beräkning av istjocklek, h , och temperaturfördelning, T , genom is kropparna har bearbetats fram i Matlab. I det fall då snötäcke ligger på istäcket korrigeras temperaturen vid isens överyta $T_{\text{ös}}$, enligt kap 5.1.1. Isen delas upp i celler av tjockleken $d=0,1$ m med början från isens överyta. Randvillkor används, där isens överyta har luftens temperatur, och isens underyta konstant har temperatur 0°C . Vid istillväxt, dh , under första dygnet (tidpunkt k) ses isen enbart som en cell (oberoende av om cellen är mindre eller större än 0.1 m) där temperaturen är linjär genom iskroppen. Detta för att algoritmens approximation av temperaturprofiler och istillväxt skall kunna extrapoleras vid kommande tidssteg. Vid kommande tidssteg under vintersäsongen läggs celler till efterhand som modellen ger istillväxt respektive tas bort vid reduktion av isens tjocklek. En viktig aspekt som måste beaktas i algoritmen då celler läggs till är att den sista cellen vid isens underyta inte bör vara mindre än $0,01$ m. Eftersom att istillväxten, dh , vid nästa tidssteg då blir orimligt stor. Därför försummas sista cellen vid isens underyta för tidsintervall då den är mindre än $0,01$ m.

Numerisk approximation av ekv. (5.1) ger värmeflödet q^{in} och q^{ut} för cell I (som avser godtycklig cell i det inre av iskroppen) under ett tidssteg från tidpunkt t_k till tidpunkt t_{k+1} :

$$q_I^{\text{in}} = \frac{-k_{\text{is}}(T_I^{k+1} - T_{I-1}^{k+1}) * dt}{d} \quad (5.13)$$

$$q_I^{\text{ut}} = \frac{-k_{\text{is}}(T_{I+1}^{k+1} - T_I^{k+1}) * dt}{d} \quad (5.14)$$

där T_I^{k+1} = okänd temperatur för tidpunkt t_{k+1}

dt = tidssteg = $t_{k+1} - t_k$

d = celltjocklek (lika för alla I).

Ekv.(5.2) enligt kap.5.1 approximeras till:

$$q_I^{\text{in}} - q_I^{\text{ut}} = C_p \rho d (T_I^{k+1} - T_I^k) \quad (5.15)$$

där q_I^{in} = värmeflödet in i cellen I $[\text{Jm}^{-2}\text{s}^{-1}]$

q_I^{ut} = värmeflödet ut ur cellen I $[\text{Jm}^{-2}\text{s}^{-1}]$

C_p = specifika värmekapaciteten $[\text{Jkg}^{-1}\text{C}^{-1}]$

ρ = isens densitet $[\text{kgm}^{-3}]$

d = celltjocklek $[\text{m}]$

Högerledet i ekv. (5.15) beskriver hur isen kyls respektive värms.

Randvillkor för isens undersida ges av ekv. (5.3), se kap.5.1, och istillväxt, dh , beräknas med hänsyn till medeltemperatur, \bar{T}_n , i sista cellen, n , under tidssteget dt :

$$-L\rho \frac{dh}{dt} = \frac{-k_{is}(0 - \bar{T}_n)}{d_n / 2} \quad (5.16)$$

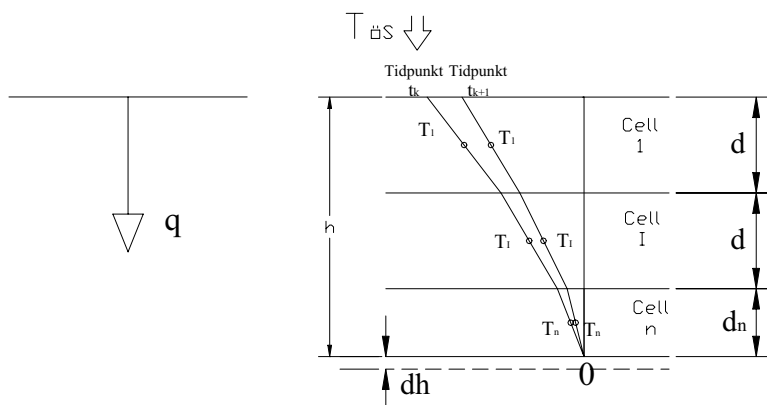
där $\bar{T}_n = \frac{(T_n^k + T_n^{k+1})}{2}$ är medeltemperatur för sista cellen för tidssteget från t_k till t_{k+1} ,

och d_n tjocklek för cell n .

Slutligen ges istillväxten:

$$dh = \frac{k_{is}(0 - \bar{T}_n) * dt}{L * \rho * (d_n / 2)} \quad (5.17)$$

för tidssteget dt .



Figur 5.3. Temperaturer vid tidpunkt t_k och t_{k+1} , då isen är celluppdelad.

Isen vid början av ett tidssteg dt är generellt uppdelad i n celler (exemplifieras i figur 5.3), där de $n-1$ första cellerna har tjocklek d och sista cellen har tjocklek $d_n < d$. Istillväxten, dh , under ett tidssteg styrs av värmeflödet från underytan och uppåt. Temperaturerna i samtliga celler avser mittpunkten. Tjockleken för cell n uppdateras efter varje tidssteg till dess att celltjockleken d uppnåts. Därefter adderas en ny cell. Förändringar av cellerna i tidssteget t_k till t_{k+1} , och utseendet av värmeflödesekvationerna q^{in} och q^{ut} blir följande:

Cell 1,

$$q_1^{in} = \frac{-k_{is}(T_1^{k+1} - T_{\bar{os}}^{k+1}) * dt}{d/2}$$

Cellerna $n-1$,

$$q_1^{ut} = q_2^{in} = \frac{-k_{is}(T_2^{k+1} - T_1^{k+1}) * dt}{d}$$

$$q_{I-1}^{ut} = q_I^{in} = \frac{-k_{is}(T_I^{k+1} - T_{I-1}^{k+1}) * dt}{d}$$

$$q_{n-1}^{ut} = q_n^{in} = \frac{-k_{is}(T_n^{k+1} - T_{n-1}^{k+1}) * dt}{(d/2) + (d_n/2)}$$

Cell n ,

$$q_n^{ut} = \frac{-k_{is}(0 - \bar{T}_n^{k+1}) * dt}{d_n/2}$$

Sambandet för hur mycket värme som kommer in i cellen, q^{in} , och hur mycket som går ut ur cellen, q^{ut} , kan skrivas:

Cell I (I=1, ..., n-1)

$$q_I^{in} - q_I^{ut} = C_p \rho d (T_I^{k+1} - T_I^k) \quad (5.18)$$

Cell n ,

$$q_n^{in} - q_n^{ut} = C_p \rho d_n (T_n^{k+1} - T_n^k) \quad (5.19)$$

Temperaturerna vid tidpunkt t_{k+1} beräknas ur ekv. (5.18) och ekv.(5.19). Sambanden kan skrivas som ett linjärt ekvationssystem:

$$AT=Y \quad (5.20)$$

där A= bandmatris innehållande kända parametrar,
T= vektor för de okända temperaturerna för tidsintervall k.
Y= vektor innehållande kända parametrar för tidssteg k.

En generell beskrivning av linjära ekvationssystemet för en n x n matris över alla tidsintervall vid approximering av temperaturer i isen blir då:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{I-1,I-2} & A_{I-1,I-1} & A_{I-1,I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{I,I-1} & A_{I,I} & A_{I,I+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{I+1,I} & A_{I+1,I+1} & A_{I+1,I+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{I-1}^{k+1} \\ T_I^{k+1} \\ T_{I+1}^{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ T_n^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{I-1} \\ Y_I \\ Y_{I+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{bmatrix}$$

Där element i matris A för is kropp uppdelad i tre celler (se figur 5.3) då enligt ekv. (5.18) och ekv. (5.19) blir:

$$A_{1,1} = \frac{-3k_{is} * dt}{d} - C_p * \rho * d$$

$$A_{1,2} = \frac{k_{is} * dt}{d}$$

$$A_{I,I-1} = \frac{k_{is} * dt}{d}$$

$$A_{I,I} = \frac{-2k_{is} * dt}{d} - C_p * \rho * d$$

$$A_{I,I+1} = \frac{k_{is} * dt}{d}$$

$$A_{n,n-1} = \frac{k_{is} * dt}{(d/2) + (d_n/2)}$$

$$A_{n,n} = \frac{-k_{is} * dt}{(d/2) + (d_n/2)} - \frac{k_{is} * dt}{d_n/2} - C_p * \rho * d_n$$

och element i vektor Y för iskropp uppdelad i tre celler (se figur 5.3) ges:

$$Y_1 = \frac{-k_{is} T_{\infty} * dt}{d/2} - C_p * \rho * d * T_1^k$$

$$Y_I = -C_p * \rho * d * T_I^k$$

$$Y_n = -C_p * \rho * d_n * T_n^k$$

och vektorn T innehåller temperaturerna vid tid t_{k+1} , som beräknas ur ekv. (5.20) enligt:

$$T = A^{-1} Y \quad (5.21)$$

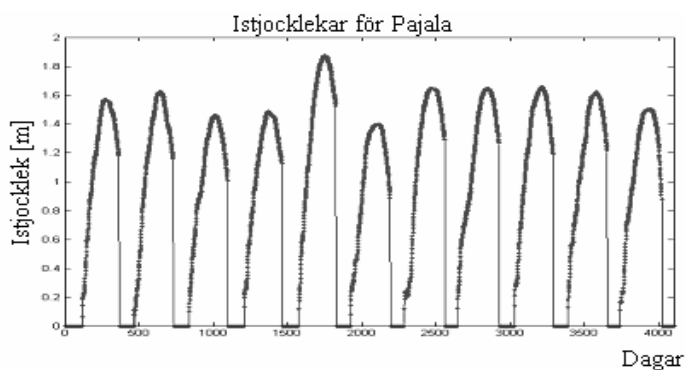
Lösningen till det linjära ekvationssystemet ges av ekv. (5.21), varefter de nya temperaturerna för tidpunkt t_{k+1} är kända. Istillväxten, dh, kan därefter beräknas enligt ekv. (5.17).

5.3 Beräkning av maximala istryck med temperaturdata för 40 år

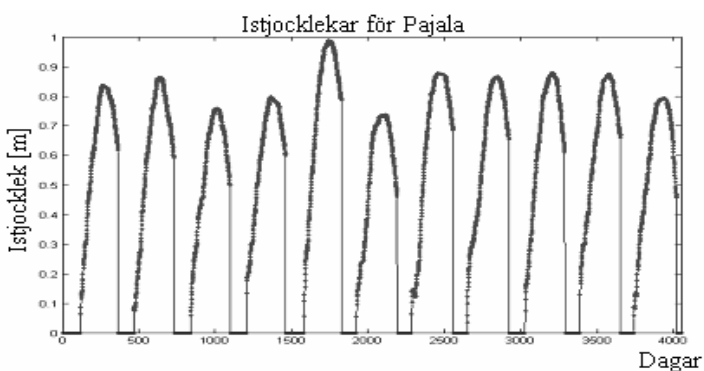
En analys av maximal 40-årslast görs för de fyra fall som definieras i kap.3.1, m.h.a. ursprungliga temperaturdata över 40 år som införskaffats för platserna Pajala och Frösön. Utöver analysen av maximala istryck är huvuduppgiften att simulera temperaturdata för analys av extrema istryck, enligt kap.5.4. Ur dessa extrema istryck ska maximal 50-årslast beräknas. Ifrån direkt uppmätta temperaturdata för 40 år görs beräkning av isens temperaturprofiler och istjocklekar, enligt kap.5.2, och istryck beräknas.

5.3.1 Beräkning av istryck med temperaturdata för 40 år

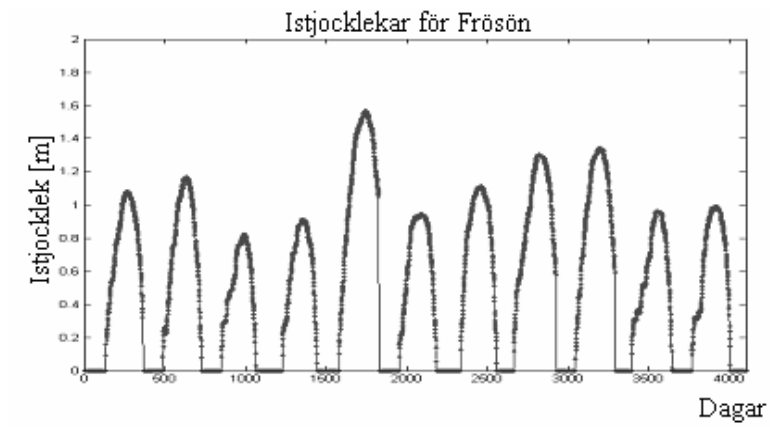
I analysen används ekv. (5.21) för beräkning av temperaturer i isprofilen, och ekv. (5.17) för beräkning av istillväxt, se kap.5.2. Sekvenser av beräknade istjocklekar för platserna Pajala och Frösön över 40 år utan snötäcke visas i figur 5.4a och 5.5a. Istjocklekar med snötäcke visas i figur 5.4b och 5.5b.



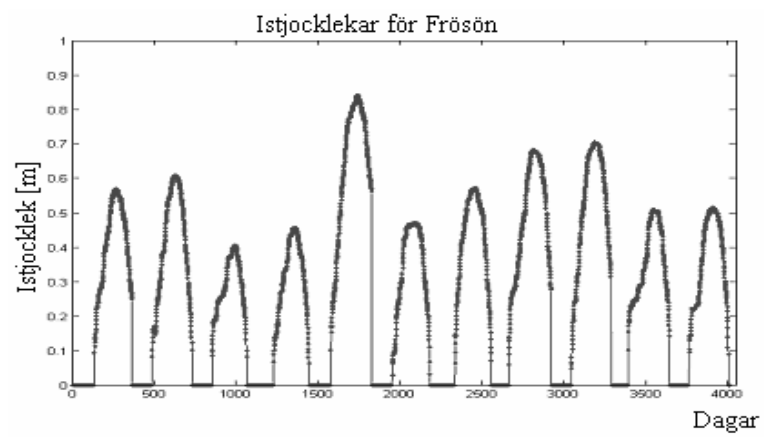
Figur 5.4a. Sekvens av istjocklekar för Pajala utan snötäcke.



Figur 5.4b. Sekvens av istjocklekar för Pajala med snötäcke.



Figur 5.5a. Sekvens av istjocklekar för Frösön utan snötäcke.



Figur 5.5b. Sekvens av istjocklekar för Frösön med snötäcke.

Utöver sekvensplottar för istjocklekar över 40 år beräknas medelvärden av största istjocklekarna över samtliga 40 vintersäsonger för platserna Pajala och Frösön, visas i tabell 5.1 och 5.2.

Tabell 5.1. Medelvärde av maximala istjocklekar utan snötäcke under 40 säsonger.

	Medelistjocklek över 40 år. [m]	Maximal istjocklek under 40 år. [m]
Pajala	1.57	1.87
Frösön	1.08	1.57

Tabell 5.2. Medelvärde av maximala istjocklekar med snötäcke under 40 säsonger.

	Medelistjocklek över 40 år. [m]	Maximal istjocklek under 40 år. [m]
Pajala	0.83	0.99
Frösön	0.57	0.84

Istjocklekarna i figur 5.4a, 5.4b, 5.5a och 5.5b och framtagna medeltemperaturer i isprofilerna har stor betydelse för maximalt istryck inom en vintersäsong. Istryck uppkommer när isen expanderar respektive kontraherar. Beräkning av istryck inriktar sig på fyra fall:

- 1) Korttidslast; utan snötäcke.
- 2) Långtidslast; utan snötäcke.
- 3) Korttidslast; med snötäcke.
- 4) Långtidslast; med snötäcke.

Istrycken uppkommer då isen expanderar horisontellt mot två oeftergivliga väggar (se kap.3.1). Maximala istrycket vid fullständig förhindrad expansion kan beräknas enligt (Ekström, 2002):

$$\frac{P}{h} = E\Delta T\alpha \quad (5.22)$$

där P=istryck [N]

h=istjocklek [m]

E =elasticitetsmodul [Pa]

ΔT =temperaturdifferens [°C]

α =längdutvidgningskoefficient [°C⁻¹]

Ekv. (5.22) ger:

$$P = E_0 \Delta T h \alpha \quad [\text{N/m}] \quad (5.23)$$

Maximala istryck beräknas för varje säsong enligt ekv. (5.23). Maximala istrycket med 40 års återkomsttid kan nu skattas, se tabell 5.3.

Tabell 5.3. Maximal 40-årslast för Pajala och Frösön samt medelvärde av istryck, istjocklek och temperaturdata.

Värden vid 40-årslast	Pajala				Frösön			
	Fall				Fall			
	1	2	3	4	1	2	3	4
Maximal 40-årslast [kN/m]	1272	2109	229	286	875	1230	177	181
Istjocklek. [m]	1.17	1.38	0.72	0.79	0.95	1.06	0.59	0.55
Positiv dygnsdifferens. [°C]	7.2	-	4.0	-	7.8	-	3.9	-
Lägsta medeltemperatur i isen till noll. [°C]	-	17.5	-	5.4	-	15.3	-	5.2
Medelvärden								
Istryck. [m]	586	-	114	-	429	-	57	-
Istjocklek. [m]	0.7	-	0.3	-	0.56	-	0.23	-
Positiv dygnsdifferens. [°C]	5	-	1.9	-	4.5	-	1.6	-

5.4 Beräkning av extrema istryck med simulerade temperaturdata

Analys av extrema istryck kommer att simuleras över en period av 1000 år. Basdata för 40 år som i kap.5.3 används för att beräkna maximala istryck kommer att användas för simulering av dygnsmedeltemperaturer över 1000 år. För att åstadkomma en förlängning av tidsserien används ARMA-modellering (Autoregressive Moving Average).

5.4.1 Beskrivning av Autoregressive Moving Average

Modellering av mätserier, kan ske genom fysikaliska eller empiriska samband. Modelleringen bygger på att man från tidigare erfarenhet prognostiserar framtida tillstånd. Om det under en sommardag är varmare än medeltemperaturen är det sannolikt att nästa dag fortfarande är varmare än medeltemperaturen. En ny sommardag's temperatur är alltså korrelerad föregående sommardagars temperaturer, och där närmast föregående sommardag har störst påverkan på den nya sommardagens temperatur. Denna typ av samband kan användas för att prediktera ett system. Empirisk modellering av mätserier bygger på ett system som redan existerar (Kompendium, Empirisk modellering, 2004).

ARMA-modellering är matematiska modeller av autokorrelationen i en tidsserie, och är användbara inom områden som t.ex. hydrologi och dendrokronologi. De lufttemperaturdata som införskaffats från SMHI används i ARMA-modelleringen.

Den linjära tidsseriemodellen ARMA ges av:

$$A(q)y(t) = C(q)e(t) \quad (5.24)$$

En ARMA-modell kan beskrivas av en serie ekvationer. För att göra ekvationerna enklare reduceras mätserien med mätseriens medelvärde. Den medeljusterade mätserien blir då:

$$y_t = Y_t - \bar{Y}, \quad t=1,2,\dots,N \quad (5.25)$$

Där Y_t är ursprungliga mätserien, \bar{Y} är mätseriens medelvärde och y_t är den medeljusterade serien. För att kunna använda ARMA på ett riktigt och bra sätt måste den medeljusterade serien vara normalfördelad och svagt stationär. Med detta menas att, y_t , inte skall ha för stora avvikelser mellan höga och låga värden i serien.

ARMA-modellen delas upp i en AR -och en MA-modell. AR-modellen, Auto-Regressive, uttrycker den medeljusterade serien som en linjär funktion från föregående punkt i mätserien adderat med ett vitt brus, e_t . Man kan förenklat säga att den punkt man befinner sig i, beror av föregående punkt och ett slumpmässigt fel.

Beroende på hur många föregående punkter som skall inverka på den nya punkten så kan AR-modellen ges olika ordningar.

Den enklaste AR-modellen är den första ordningen av Autoregressive eller AR(1). Ekvationen skrivs som:

$$y_t + a_1 y_{t-1} = e_t \quad (5.26)$$

Där y_t är den medeljusterade serien i den punkt t man står i, y_{t-1} är den föregående punkten, a_1 är tidsförskjutningstermen och e_t är felet. Tidsförskjutningstermen varierar med olika ordningar. Felet, e_t , skall vara slumpmässigt i tiden och normalfördelat. Genom att skriva om ekv. (5.26) till:

$$y_t = -a_1 y_{t-1} + e_t \quad (5.27)$$

ges modellen AR(1) formen av en regressionsmodell, där punkten y_t beror på den föregående punkten.

Högre ordningar av AR-modell inkluderar fler punkter tillbaka i tiden. Ekvationen för AR(2) kan skrivas:

$$y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} = e_t \quad (5.28)$$

Där a_1, a_2 är tidsförskjutningstermer vid tidpunkt $t-1$ respektive $t-2$. Vilken ordning AR-modellen skall ha, ges av AR(o), där o är tidsförskjutningen i punkterna $t-1$ till $t-o$. MA (Moving-Average) är den delen av ARMA-modelleringen som består av slumpmässiga fel. MA ges också olika ordningar, där första ordningen eller MA(1) är:

$$y_t = e_t + c_1 e_{t-1} \quad (5.29)$$

Där e_t, e_{t-1} är felen vid tidpunkt t och $t-1$ och c_1 är första ordningens Moving-Average koefficienten. MA(2) har följande utseende:

$$y_t = e_t + c_1 e_{t-1} + c_2 e_{t-2} \quad (5.30)$$

Ordningen beskrivs som den $p:e$ ordningen, MA(p).

Auto-Regressive modellen består av tidsförskjutande termer på mätserien och Moving-Average modellen består av tidsförskjutande termer på själva felet. Genom att kombinera dessa ges en ARMA-modell.

ARMA-modellen inkluderar alltså ordningarna o och p , ARMA(o,p). Den enklaste modellens beskrivs av ARMA(1,1) (Kompendium, ARMA, 2003):

$$y_t + a_1 y_{t-1} = e_t + c_1 e_{t-1} \quad (5.31)$$

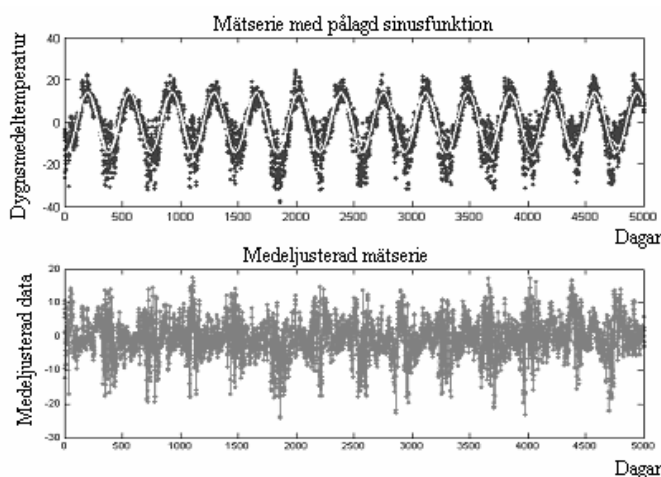
5.4.2 Simulering av temperaturdata

Metoden för ARMA-modelleringen som beskrivs exemplifieras med temperaturdata från Pajala. För Frösön används samma tillvägagångssätt. Dygnsmedeltemperaturer används som mätserie till ARMA-modellen. Som tidigare nämnt i kapitel 5.4.1, måste mätserien medeljusteras innan ARMA-modellen kan prediktera mätseriens framtida förlopp. Mätserien medeljusteras, enligt ekv. (5.25) (Kompendium, ARMA, 2003).

$$y_t = Y_t - \tilde{Y}, \quad t=1,2,\dots,N$$

där \tilde{Y} är en pålagd sinusfunktion, och Y_t mätserien i översta plotten i figur 5.6 nedan.

Medeljusterade mätserien, y_t , som ses i undre plotten i figur 5.6 ska för att ge en bra ARMA-modell vara stationär, och jämnt fördelad mellan låga och höga punkter. Mätserien som kan ses i undre plotten i figur 5.6 kan beskrivas som "taggig", med stora skillnader mellan höga och låga punkter.



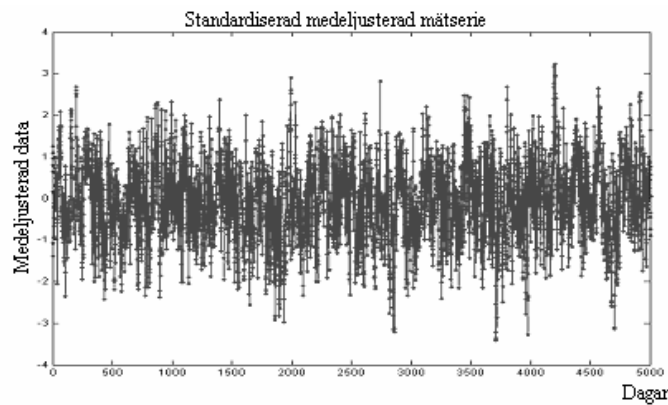
Figur 5.6. Översta plotten visar sekvens av mätserie med pålagd sinusfunktion. Den nedre plotten visar sekvens av medeljusterade mätserien.

Anpassningen är inte svagt stationär, och en standardisering av medeljusterade mätserien, y_t , behöver göras. Detta betyder att punkterna delas med motsvarande månads standardavvikelse (se tabell 5.4), och därigenom ges mätserien en standardavvikelse så nära 1 som möjligt.

Tabell 5.4. Den medeljusterade mätseriens standardavvikelse för varje månad för Pajala.

Månad	Standardavvikelse
Januari	8.7581
Februari	8.2906
Mars	6.0787
April	3.9851
Maj	4.1617
Juni	4.2196
Juli	3.1777
Augusti	3.2531
September	3.5963
Oktober	5.1392
November	7.0128
December	8.8010

Den standardiserade medeljusterade mätseriens, se figur 5.7, standardavvikelse blir 0.95. Mätseriens standardavvikelse är bra p.g.a. att fördelningen mellan höga och låga värden utjämnats. Den medeljusterade mätserien, se figur 5.7, är nu stationär.



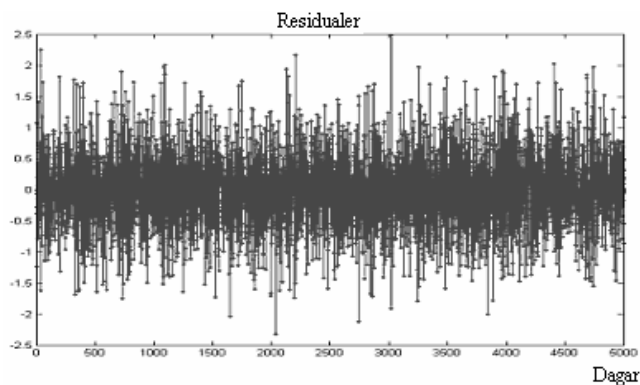
Figur 5.7. Standardiserad och stationär sekvens av medeljusterad mätserie.

ARMA-modellen kalibreras mot mätserien i figur 5.7, och ges ordningen ARMA(5,2). Den linjära tidsseriemodellen ARMA ges då enligt ekv. (5.24):

$$A(q) = 1 - 0.8717q^{-1} - 0.6503q^{-2} + 0.6572q^{-3} - 0.1483q^{-4} + 0.04519q^{-5}$$
$$C(q) = 1 + 0.00447q^{-1} - 0.8205q^{-2}$$

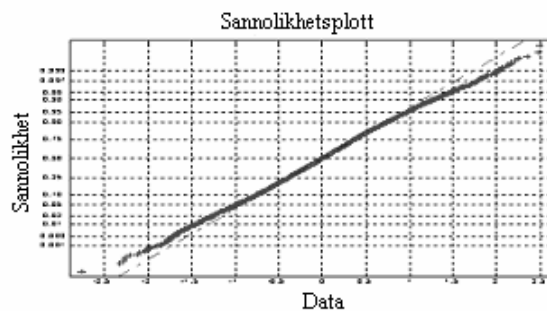
där $A(q)$ är prediktionen och $C(q)$ prediktionsfelet för punkt t .

Den medeljusterade mätseriens data förs in i ARMA-modellen och modellen ger nya värden för samtliga punkter. Skillnaden mellan den medeljusterade mätserien och ARMA-modellen visas i figur 5.8. Denna skillnad kallas residualer, och utifrån dessa kommer en simulering att göras.



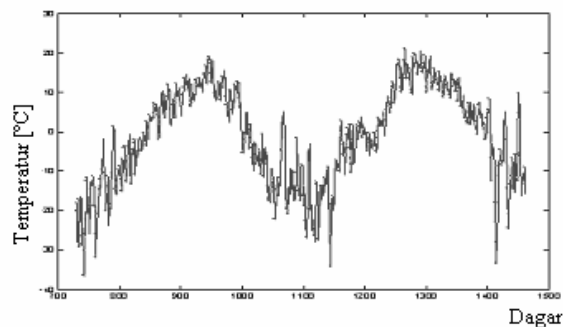
Figur 5.8. Sekvensplott av residualer som används för simulering av temperaturer.

Kontroll över om bra modellordningar valts, görs nu av residualerna, i figur 5.8. Kontrollen görs genom okulär besiktning av en sannolikhetsplott, se figur 5.9, autokovarians (se appendix II) samt normalfördelning för varje månad (se appendix III).



Figur 5.9. Sannolikhetsplott av residualerna.

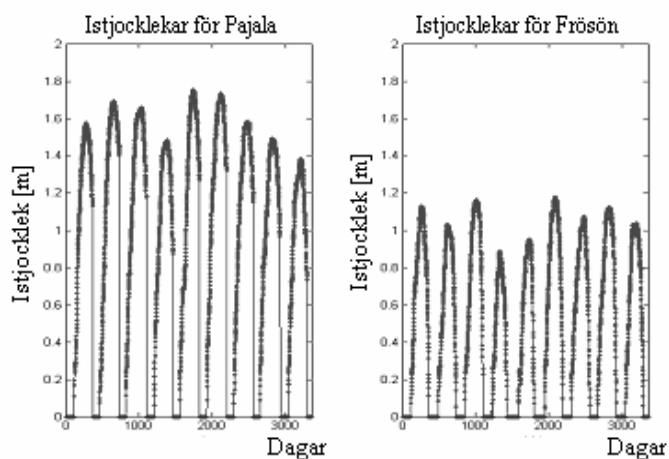
Den okulära besiktningen av figur 5.9 visar att bra ordningar har valts. Residualerna (se figur 5.8) delas in månadsvis och simuleringen av ARMA-modellen för 1000 år kan nu utföras. När simuleringen utförts fås dock inte slutliga temperaturdata. För att få korrekta temperaturdata måste omvänd standardisering göras d.v.s. varje månads standardavvikelse måste multipliceras med simulerade data, och mätseriens medelvärde, \bar{Y} , adderas till datan. Den framsimulerade temperaturen får då ett utseende, som exemplifieras i figur 5.10. Sådana temperaturdata används som randvillkor vid isens övertyta för modellanalysen av temperaturprofiler och istillväxt.



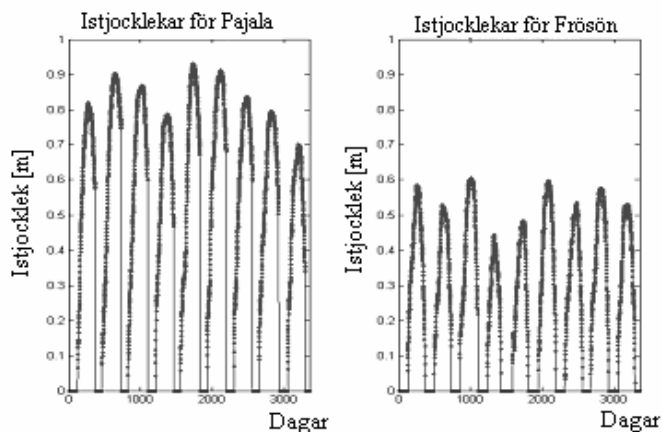
Figur 5.10. Simulerade temperaturer över 2 säsonger.

5.4.3 Beräkning av istryck med simulerade temperaturdata för 1000 år

Simulerade tidsserier av temperatur under 1000 år används som ingångsdata på samma sätt som temperaturdata (basdata) för 40 år. Detta ger temperatur i isen med ekv. (5.21). Istillväxten beräknas ur ekv. (5.17). Sekvensplottar av resulterande istjocklekar utan snötäcke respektive med snötäcke för Pajala och Frösön visas i figurer 5.11 och 5.12.



Figur 5.11. Sekvenser av simulerade istjocklekar för Pajala och Frösön utan snötäcke.



Figur 5.12. Sekvenser av simulerade istjocklekar för Pajala och Frösön med snötäcke.

Extrema istryck vid fullständigt förhindrad expansion beräknas för varje säsong under 1000 år enligt ekv. (5.23) (se kap.5.3.1), och 50-årslast kan bestämmas för fyra fall, enligt kap.3.1 och 5.3.1. Utöver 50-årslast bestäms även medelvärde för:

- a) Istryck;
- b) Istjocklek;
- c) Medeltemperaturdata för största positiva dygnsdifferensen över ett dygn;
- d) Medeltemperaturdata för lägsta medeltemperatur i isen över alla säsonger.

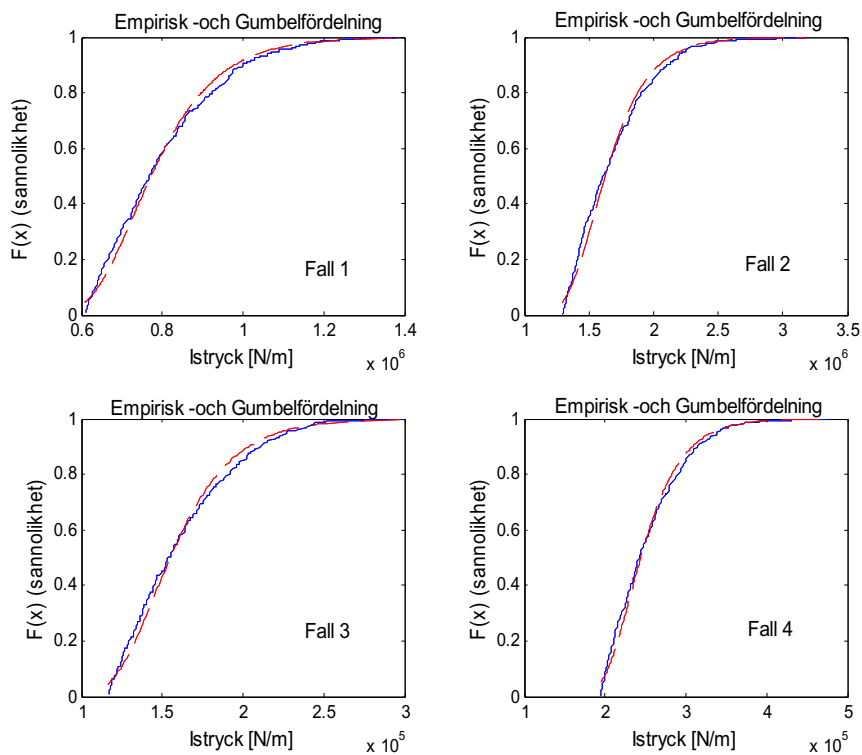
Predikterad 50-årslast samt medelvärde av ovan angivna data visas i tabell.5.5.

Tabell 5.5. Predikterad 50-årslast för extrema istryck och medelvärden för istryck, istjocklek och medeltemperaturdata.

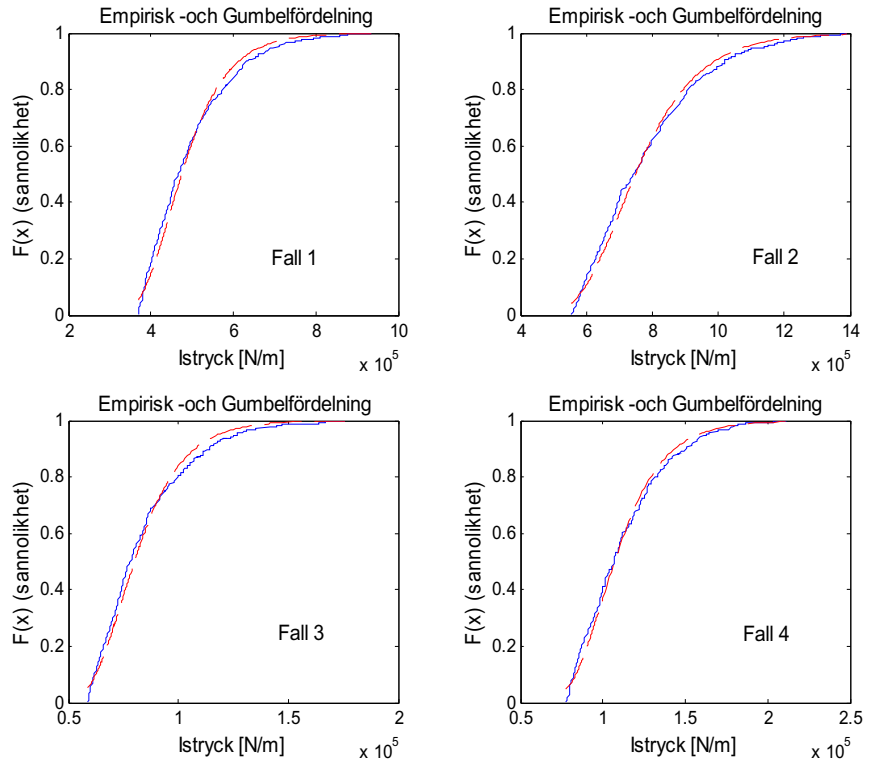
Värden vid 50-årslast	Pajala				Frösön			
	Fall				Fall			
	1	2	3	4	1	2	3	4
Predikterad 50-årslast. [kN/m]	1093	2264	234	342	720	1162	129	169
Istjocklek. [m]	0.91	1.44	0.76	0.79	1.08	1.1	0.58	0.57
Positiv dygnsdifferens. [°C]	7.0	-	3.5	-	5.5	-	3.2	-
Lägsta medeltemperatur i isen till noll. [°C]	-	19.0	-	5.9	-	13.3	-	4.1
Medelvärden								
Istryck. [kN/m]	608	1294	116	195	369	555	59	78
Istjocklek. [m]	0.8	0.99	0.44	0.54	0.62	0.68	0.3	0.36
Positiv dygnsdifferens. [°C]	4.4	-	1.7	-	3.4	-	1.2	-
Lägsta medeltemperatur i isen till noll. [°C]	-	14.0	-	4.3	-	9.2	-	2.7

En anpassning görs nu av fördelningar för beräknade extrema istryck mot Gumbelfördelning. Syftet med detta är att undersöka om analysens resultat är extremvärdesfördelade.

Fördelningarna visas i figur 5.13 och 5.14, och av detta framgår att beräknade istjocklekar och temperaturförändringar ger upphov till extremvärdesfördelade istryck, då fördelningarna ger bra passning.

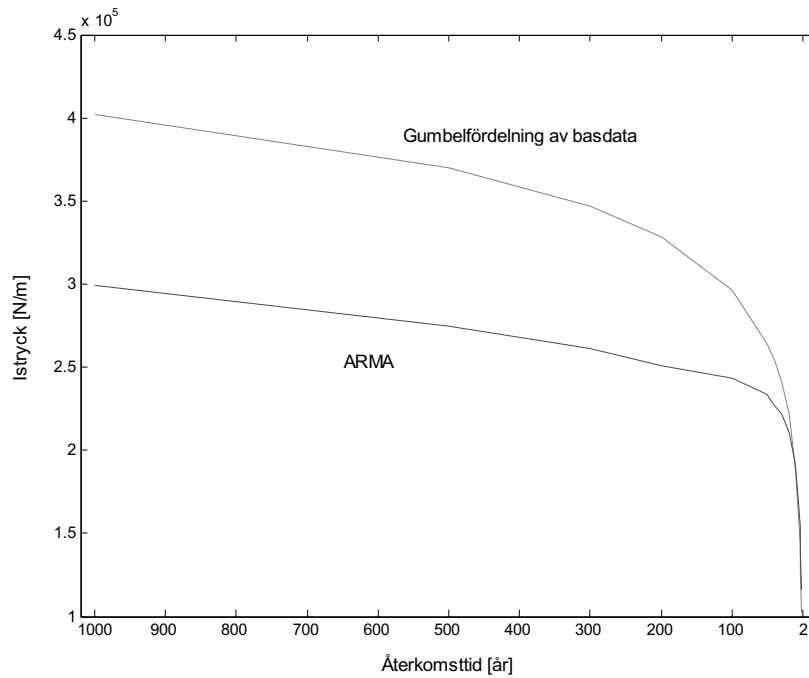


Figur 5.13. Samband mellan empirisk fördelning (heldragen linje) och Gumbelfördelning för Pajala.

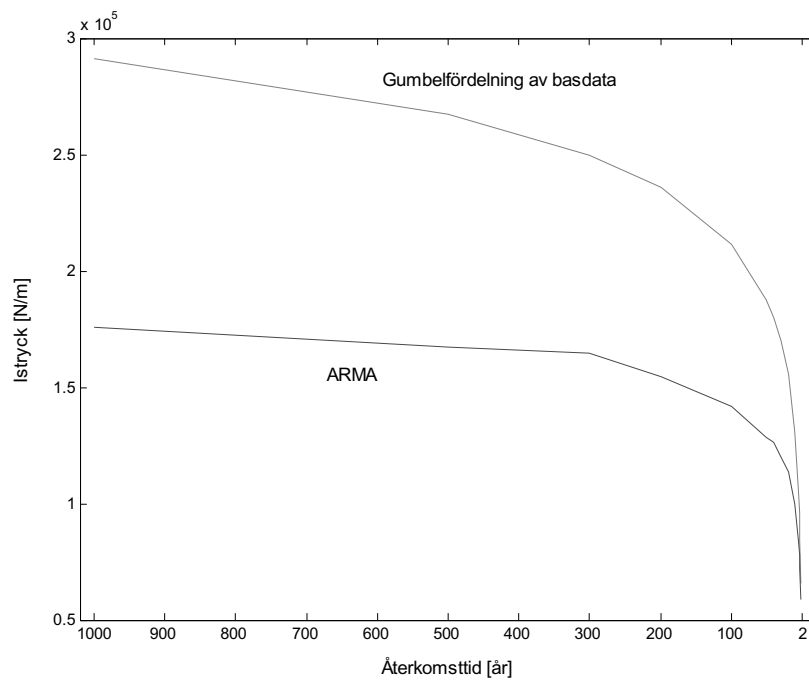


Figur 5.14. Samband mellan empirisk fördelning (heldragen linje) och Gumbelfördelning för Frösön.

Istryck som beräknats m.h.a. basdata och simulerade temperaturer jämförs även mot varandra. Med Gumbelfördelning skattas sannolikhet för återkomsttid av istryck för basdata över 40 år. Denna fördelning jämförs med beräknade extrema istryck m.h.a. simulerade temperaturer över 1000 år vilket visas i figur 5.15 och 5.16.



Figur 5.15. Jämförelse av återkomsttid för istryck med Gumbelfördelning av basdata mot istryck med ARMA-modellering, som beräknats för Pajala med snötäcke.



Figur 5.15. Jämförelse av återkomsttid för istryck med Gumbelfördelning av basdata mot istryck med ARMA-modellering, som beräknats för Frösön med snötäcke.

6 Jämförelse med andra modeller

6.1 Tidigare modellanalysversion

Ett problem i framtagandet av en säker analysmodell har varit hur iskroppen skall ses. I tidigare modeller gjordes antagande om att isen tillväxt sker genom att lufttemperaturen påverkar hela iskroppen d.v.s. isen ses som ett helt lager. Vidare använde sig modellen av ekv. (5.9), se kap.5.2. Då istjocklekarna översteg en viss tjocklek gav ekv. (5.9) dåligt utslag, då isen inte hinner med temperaturomställningen mellan tidsstegen. Detta medförde att man i modellen fick en reducering av istjockleken istället för istillväxt. Problemet uppstår när $h_0 \geq 1.12$ m, och då modellen gav flertalet av istjocklekarna större än $h_0=1.12$ m kunde iskroppen inte ses som ett helt lager.

6.2 Studie i Kanada

Rapporten från Kanada har en större omfattning än denna rapport. Comfort et al behandlar både fältmätningar och analytiska modeller. Den stora skillnaden är att Kanada-studien baserar mätdata på ett kortare tidsintervall, men samtidigt bygger studiens prediktioner på fler ingångsdata. I en första modell beräknas islasterna genom termisk expansion, se tabell 4.2 (fall a), och i en andra modell kombineras den första modellen med vattenfluktationerna, vilket ger större islast, se tabell 4.2 (fall b).

I figur 4.4 redovisas en prediktion av snödjup, istjocklek och temperatur. En jämförelse mellan modellanalysen i denna rapport och studien i Kanada visar att;

- Klimatdata kan jämföras med Pajala;
- Snödjupet är jämförelsevis samma;
- Istjocklekar är av samma storleksordning.

En jämförelse mellan predikterade istryck visas i tabell 4.2 och tabell 5.5.

Av de resultat som framgår av tabell 5.5 är det korttidslasterna med snötäcke både för Pajala och för Frösön som ger bäst överensstämmelse med predikterade islasterna i tabell 4.2.

7 Diskussion och Slutsats

7.1 Diskussion

Den viktigaste parametern i modellen där temperaturer i isen och istjocklekar beräknats har varit uppmätta temperaturdata från Pajala och Frösön. Modellanalys har gjorts med temperaturdata över 40 år och simulerade temperaturdata över 1000 år. För simuleringen av temperaturdata har en ARMA-modell använts. Själva kalibreringen av data har gjorts med hjälp av sannolikhets- och normalfördelningar av de residualer som tagits fram i ARMA-modelleringen.

Värmetransport i isen har beskrivits genom lageruppdelning. Detta har medfört att temperaturfördelning genom isen har kunnat beräknas mer exakt än när isens ses som ett element. Vidare har förutsättningar för modellen beaktats. En av dessa har varit val av rätt E-modul. Det svåra med att välja rätt E-modul är att isen uppträder olika vid olika stadier av belastning. För de fall där upphov till istryck beräknas utifrån största positiva dygnsdifferens, har E-modulen bestämts till, $E_0/2$, där E_0 är elasticitetsmodulen under en kort tid efter pålastning. Då långtidslaster beräknas har en E-modul bestämts till, $E_0/4$. Detta har gjorts för att beakta tidsberoende deformationer. Den långtidslast som beräknats uppvisar mycket högre istryck trots att E-modulen är lägre än vid beräkning av korttidslaster. Detta beror på att den positiva temperaturförändringen baserats på den lägsta medeltemperaturen i isen under en säsong till noll. Dygnsdifferensen under ett dygn är avsevärt mindre. Analysmodellens resultat gällande fall 1 och 2 kan förklaras med det konservativa antagandet; is utan snötäcke, vilket ger höga istryck. Då vi inte haft tillgång till mätta nederbördsdata har en förenklad bild av snötäcke införts i modellen. Snötäcke ger avsevärt lägre istryck för fall 3 och 4. Eftersom rapporten ger en omfattande teoretisk bild över istjocklekar och extrema istryck, blir snötäcket en viktig parameter. Maximal 40-årslast och predikerad 50-årslast för fall 3 (korttidslast; med snötäcke) ger en bra skattning.

De analyserade istrycken har även visat sig vara extremvärdesfördelade eftersom de passar väl med Gumbelfördelning. Bortser man från fall utan snötäcke bedöms modellen vara tillämpbar vid beräkning av istryck. Detta p.g.a. att utifrån begränsningar och antaganden som gjorts har modellen approximerat temperaturer i isen och istjocklekar väl.

7.2 Slutsats

Modellanalysen visar att de riktvärden som man idag använder för dimensionering av istryck, beroende på det geografiska läget är för låga. En jämförelse med fall 3 (Korttidslast; med snötäcke) för Pajala och Frösön gentemot dimensioneringsvärdet 200 kN/m visar just detta.

	Pajala	Frösön
Fall	3	3
40-årslast [kN/m]	229	177
Predikterad 50-årslast [kN/m]	234	129

Resultat av istryck simulerade med snötäcke överensstämmer med dimensioneringsvärde enligt RIDAS (Kraftföretagens riktlinjer för dammsäkerhet), men resultaten indikerar att dimensioneringsvärdet är för lågt. Att resultat av 40-årslast är högre än predikterad 50-årslast vid tre observationer, skulle kunna förklaras med att simuleringen vid ARMA-modelleringen dämpar svängningar i klimat i jämförelse med verkliga basdata. Modellanalysen för de fall snötäcke inte beaktats ger oralistiskt höga istryck. Detta beror på is utan snötäcke blir tjockare och erhåller större positiv dygnsdifferens för fall 1 (Korttidslast; utan snötäcke) vilket orsakar högre istryck vid termisk expansion. Beräknade istryck för fall 1 visas nedan.

	Pajala	Frösön
Fall	1	1
40-årslast [kN/m]	1272	875
Predikterad 50-årslast [kN/m]	1093	720

Vår modell ger bra resultat med beaktande av de begränsningar och förutsättningar som gjorts. För att göra en ännu bättre modellanalys krävs noggranna ingångsdata av isdensitet, istjocklekar, tillfrysning, snödjup, vattenfluktuationer och sprickbildning. Det geografiska platsvalet är viktigt då de lokala variationerna spelar stor roll. I kombination med detta behöver även fältmätningar av istryck genomföras.

8 Referenser

Skriftliga referenser

Ashton.G.D (1986); *River And Lake Ice Engineering*; Book Crafters, Inc.; ISBN-0-918334-59-4; U.S Library of Congress Catalog Number-86-50681

Bergdahl.L (1978); *Thermal Ice Pressure in Lake Ice Covers*; Chalmers University of Technology; Göteborg; Department of Hydraulics

Comfort.G, Liddiard.A, Abdelnour.R; *A Method And Tool For Predicting Static Ice Loads On Dams*; Canadian Dam Associations 2004 Annual Conference, Ottawa, Ontario, Canada; hämtad från Avdelningen för Konstruktionsteknik, Väg –och Vattenbyggnadssektionen, vid Lunds Tekniska Högskola

Ekström.T (2002); *Dammsäkerhet-Islaster mot hydrauliska konstruktioner*, med inriktning mot betongdammar;Elforsk; Rapport 02:03; Finns att hämta på internet http://www.elforsk.se/publish/show_report.phtml?id=503#

Fransson.L (1988); *Thermal Ice Pressure On Structures In Ice Covers*; Luleå University of Technology; Doctoral thesis 1988:67 D; ISSN: 0348-8373

ARMA; *Autoregressive-Moving-Average Modeling*; hämtad från Avdelningen för Konstruktionsteknik, Väg –och Vattenbyggnadssektionen vid Lunds Tekniska Högskola.

Empirisk Modellering; *Manual för Autoregressive-Moving-Average*; hämtad från Avdelningen för Konstruktionsteknik, Väg –och Vattenbyggnadssektionen vid Lunds Tekniska Högskola

RIDAS (2000); *Kraftföretagens riktlinjer för dammsäkerhet*; Kapitel 3.3, Betongdammar, Tillämpningsanvisningar

Internetadresser

Vägverket (1987); *Istryck mot bropelare*; Nr. 1987:43; Serviceavdelning Väg –och brokonstruktion;Sektionen för broteknik, hämtad den 22 februari år 2005 från internet <http://www.vv.se/filer/publikationer> (sökord: Istryck mot bropelare)

SMHI (2005); Isbildning och istillväxt; hämtad den 29 april år 2005 <http://www.smhi.se/sgmain/vinter/isbildning.htm>

Muntliga referenser

Bengtsson, Lars; Prof. Avdelningen för Teknisk Vattenresurslära, LTH
Häglund, Martin; Doktorand Avdelningen för Konstruktionsteknik, LTH
Ringnér, Bengt; Universitetslektor Avdelningen för Matematisk Statistik, LTH
Thelandersson, Sven; Prof. Avdelningen för Konstruktionsteknik, LTH

Övrigt

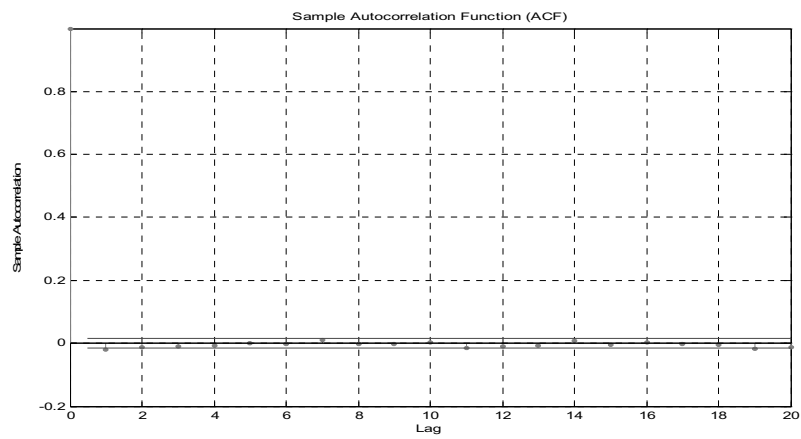
Temperatur –och nederbördsdata inköpt från Sveriges Meteorologiska och Hydrologiska Institut, SMHI

Programkoder för ARMA-modellering från Matlab´s Toolbox

Appendix I. Tabell över de viktigaste termer som använts i modellanalysen.

Beteckningar	Konstanter	Enhet
ρ = densitet	920	kgm^{-3}
C_p = specifik värmekapacitet	2120	$\text{Jkg}^{-1}\text{°C}^{-1}$
L = isbildningsvärme	334000	Jkg^{-1}
α =längdutvidgningskoefficient	0.000050	°C^{-1}
dt = dygn	86400	s
k_{is} = värmekonduktivitet	2.21	$\text{Jm}^{-1}\text{°C}^{-1}\text{s}^{-1}$
$k_{snö}$ = värmekonduktivitet	0.3	$\text{Jm}^{-1}\text{°C}^{-1}\text{s}^{-1}$
d = celltjocklek	0.1	m
d_n = sista cellen, n	-	m
E = elasticitetsmodul	-	Pa
h = istjocklek	-	m
P = istryck	-	Nm^{-1}
q = värmeflöde	-	$\text{Jm}^{-2}\text{s}^{-1}$

Appendix II. Autokovarians för temperaturdata



Appendix III. Månadsvisa normalfördelningar för temperaturdata under 40 år.

