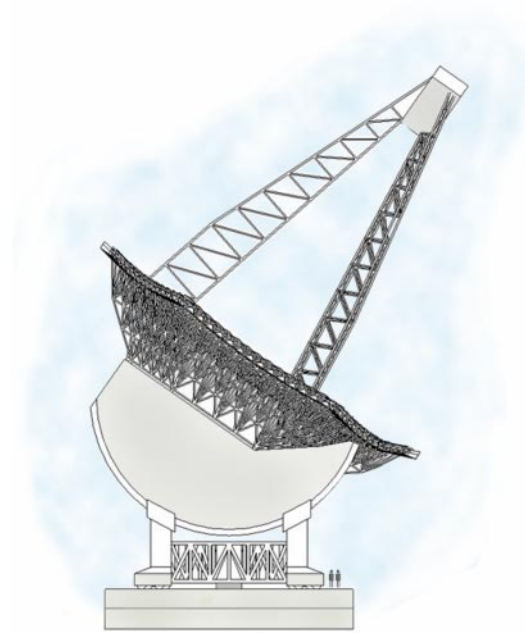




LUND
UNIVERSITY



ANALYS AV TELESKOPSPEGEL FÖR ETT "EXTREMELY LARGE TELESCOPE"

ANDREAS JILSMARK
och HANNA JOHANSSON

Department
of
Mechanics
and
Materials

Structural Mechanics
Master's Dissertation

Department of Mechanics and Materials
Structural Mechanics

ISRN LUTVDG/TVSM--00/5096--SE (1-83)

ISSN 0281-6679

ANALYS AV
TELESKOPSPEGEL FÖR ETT
"EXTREMELY LARGE TELESCOPE"

Examensarbete utfört av
ANDREAS JILSMARK och HANNA JOHANSSON

Handledare
GÖRAN SANDBERG, Avd. f. byggnadsmekanik
TORBEN ANDERSEN, Astronomiska institutionen

Copyright © 2000 by Structural Mechanics, LTH, Sweden.
Printed by KFS i Lund AB, Lund, Sweden, March 2000.

For information, address:
Division of Structural Mechanics, LTH, Lund University, Box 118, SE-221 00 Lund, Sweden.
Homepage: <http://www.byggmek.lth.se>

Abstract

This master's thesis describes methods of calculating deformations of large astronomical telescope mirrors caused by the mirror support system. In the first part of the report these calculation methods are derived, along with methods of optimizing a support system pattern. Both analytical and numerical methods are described in the case of deformation analysis, and methods based on probabilistic methods along with a parametrical description of the support system pattern in the case of optimization of the pattern.

In the second part of this report the deformation models and optimization methods are used when trying to optimize the support system pattern for a 50 *m* monolithic mirror. A future telescope with a main mirror of this size could be a reality, and has been proposed by a number of astronomers around the world.

The analyzes show that it is theoretically possible to support a mirror of this size, and that the number of supports needed increases when using a thinner mirror.

Förord

Denna rapport är resultatet av vårt examensarbete ”*Analys av teleskopspegel i ELT*”, som har utförts på avdelningen för byggnadsmekanik vid Lunds tekniska högskola. Arbetet gjordes på uppdrag av astronomiska institutionen vid Lunds universitet, juli 1999 till februari 2000. Rapporten är skriven för personer med ingenjörsteknisk bakgrund som har goda kunskaper inom hållfasthetslära. Under arbetets gång har vi lärt oss mycket om teleskopkonstruktioner, men framför allt har det gett oss djupare kunskaper i finita element-metoden såväl som i analytiska lösningsmetoder. Arbetet har varit lärorikt och stimulerande trots en del stunder av frustration.

I slutet av mars 2000 kommer delar av rapporten att publiceras i form av en artikel på en konferens i München anordnad av SPIE, *The International Society for Optical Engineering*. Artikeln är i sin helhet bifogad sist i denna rapport.

Vi vill tacka våra handledare, Torben Andersen, prof. vid astronomiska institutionen vid Lunds universitet, och Göran Sandberg, tf. prof. vid avdelningen för byggnadsmekanik vid Lunds tekniska högskola för utmärkt handledning. Vi vill också rikta ett stort tack till alla övriga på avdelningen för byggnadsmekanik som funnits till hands när vi behövt hjälp.

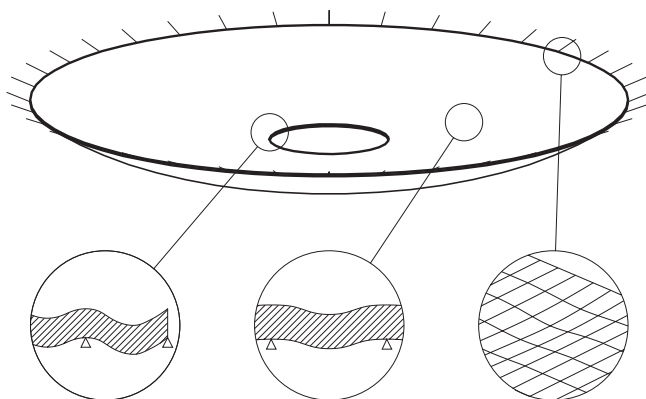
Lund, mars 2000

Andreas Jilsmark Hanna Johansson

Sammanfattning

Syftet med examensarbetet har varit att göra en allmän genomgång av metoder och modeller för beräkning av deformationer hos stora teleskop-speglar. Dessa deformationsmodeller används sedan för att optimera det stödsystem som håller spegeln på plats under de astronomiska observationerna. I vårt fall antas spegeln stöddas av två system, ett axiellt och ett lateralt. Det axiella systemet stödjer spegelns baksida och det laterala spegelns kant. Båda stödsystemen ger tillsammans med gravitationen upphov till deformationer, vilka leder till oskarpa bilder. Om deformationernas storlek överskrider 20 nm blir bilderna alltför oskarpa. Vi har därför använt detta mått som dimensioneringskriterium.

Det är endast deformationer i spegelytans normalriktning som ger upphov till optiska problem. Dessa deformationer sammanfattas av figur 1.



Figur 1: Spegelns kritiska områden

Till vänster och i mitten visas nedböjning mellan de axiella stöden och till höger deformationer av spegelytan orsakad av det laterala stödets krafter.

Deformationerna beror både på stödets placering och konstruktion. De axiella stöden kan antas verka i diskreta punkter, och de laterala stöden som spänningar längs spegelkanten. Detta gör en fullständig analys av det

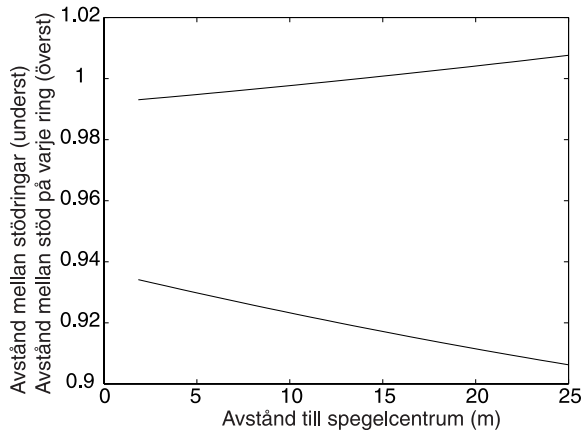
laterala systemet omöjlig, medan en relativt fullständig analys kan göras av det axiella systemet.

Vid en allmän analys av det laterala stödsystemets verkan på spegeln verifieras problemet med deformationer. Det visade sig att ju jämnare tryck stödsystemet anbringar spegeln, desto mindre blir deformationerna.

Vid analys av det axiella stödsystemet krävs deformationsmodeller av hela spegeln, eller delar av den. Såväl analytiska som numeriska modeller redovisas.

Det axiella stödsystemet kan optimeras så att så få stöd som möjligt behöver användas utan att deformationerna blir för stora. I denna rapport beskrivs optimeringsalgoritmer som leder fram till ett optimerat stödmönster. Algoritmerna bygger på finita element-modellering av spegeln, där mönstrets uppbyggnad beskrivs av endast sex parametrar.

Stödmönstret för de axiella stöden har valts att beskriva ringar, där avstånden mellan stöden på varje ring är konstant. Man kan beskriva avstånden mellan ringarna samt avståndet mellan stöden på varje ring som en funktion av radien. Optimeringsalgoritmerna har gett variationen hos dessa avstånd enligt figur 2.



Figur 2: Normerade stöдавstånd som funktion av radien

Innehåll

I	Teori	1
1	Inledning	3
1.1	Bakgrund	3
1.2	Syfte och avgränsningar	3
1.3	Problemformulering	4
1.4	Arbetsgång	5
2	Introduktion	7
2.1	Teleskophistorik	7
2.2	Dagens och framtidens spegelteleskop	7
2.3	Svenskt ELT-projekt	9
2.4	Fokus	10
2.5	Montering	11
3	Lokala nedböjningsanalyser	13
3.1	Lokalt lastfall	13
3.2	Plattmodell	14
3.3	Finita element-modell	16
3.4	Resultat	17
4	Globala nedböjningsanalyser	19
4.1	Analytisk beräkning	19
4.2	Finita element-modell	24
5	Kantdeformation	27
5.1	Inledning	27
5.2	Analytisk överslagsräkning	28
5.3	Tvådimensionell finita element-modell	29
6	Axiell stödoptimering	31
6.1	Grundmönster	31

6.2	Approximativ optimering	31
6.3	Stöd nära spegelkanten	32
6.4	Analytisk modell	33
6.5	Optimering utifrån par.studie mha FEM	33
6.6	Slutoptimering med hjälp av funktionsanpassning	34
7	Lateralt stödsystem	35
7.1	Analytisk endimensionell modell	35
7.2	Analytisk tvådimensionell modell	36
II	Optimering av stödsystem för ett 50m teleskop	39
8	Planerat 50m teleskop	41
8.1	Spegelmodell	41
8.2	Materialparametrar	41
8.3	Dimensioneringskriterier	42
9	Förenklad optimering	43
9.1	Tillvägagångssätt	43
9.2	Aktuellt optimeringsfall	47
10	Optimering utifrån global FE-modell	51
10.1	Parametrarna	51
10.2	Tillvägagångssätt	52
10.3	Resultat	53
11	Slutoptimering	55
11.1	Funktionsansats	55
11.2	Parameterstudie	56
11.3	Resultat	57
12	Analytisk modell	61
12.1	Praktiska begränsningar och användbarhet	61
12.2	Förfarande	62
12.3	Aktuellt fall	62
Artikel		1

Del I

Teori

Kapitel 1

Inledning

1.1 Bakgrund

Bland framtida spegelteleskop för forskningssyfte kommer det sannolikt att finnas varianter som är många gånger större än dagens största. I astronomiska kretsar talas det om teleskop med ljussamlade areor på flera tusen kvadratmeter, vilket innebär teleskopspeglar med diametrar på upp till 100 m . När denna rapport skrivs har det största befintliga spegelteleskopet med en monolitisk¹ primärspiegel en diameter på drygt åtta meter och står på en bergstopp i Chile, i en av världens torraste öknar. Att bygga större teleskop än detta ger upphov till nya problem, speciellt om man väljer en monolitisk primärspiegel. Denna monolits form får ej avvika alltför mycket från en parabol, vilket den riskerar att göra på grund av deformationer orsakade av sin egen tyngd. Det är därför viktigt att stödja upp spegeln på ett sådant sätt att alltför stora deformationer inte uppkommer. För stora monolitiska speglar innebär detta ett omfattande system av stödpunkter, med många gånger fler stöd än i dagens teleskop.

1.2 Syfte och avgränsningar

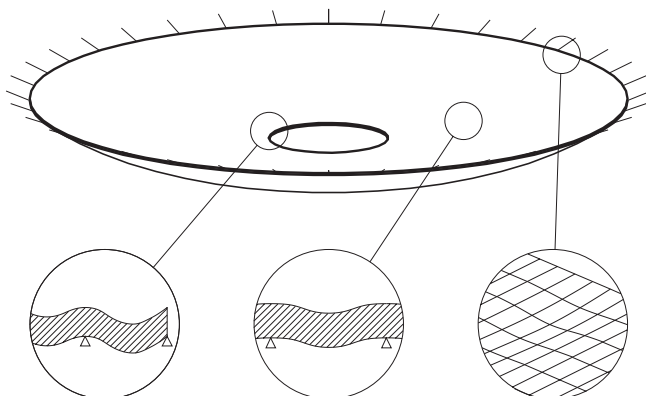
Syftet med detta examensarbete är att ta fram metoder för optimering av stödsystem för monolitiska speglar i framtida stora teleskop, så kallade ELT, *Extremely Large Telescopes*. Vid optimeringen eftersträvas en minimering av antalet stöd, för en given maximal deformation. Arbetet har främst fokuserats på att studera det axiella stödsystem som antas upprätthålla den paraboliska formen, eftersom detta till stor del låter sig göras på en generell

¹En monolitisk spegel är gjuten i ett enda stycke, i motsats till en segmenterad spegel som är hopfogad av flera mindre speglar

nivå. Det laterala stödsystemet som stödjer spegelns ytterkant kan variera mer i utförande och har därför bara till viss del studerats i form av en genomgång av metoder som kan användas för optimering. Metoderna kommer att testas i en FE-modellering av en 50 meters spegel med några olika tjocklekar för att utvärdera optimeringsmetoder samt verifiera teorier.

1.3 Problemformulering

Problem med alltför stora deformationer orsakade av stödsystemet kan uppstå på flera ställen i spegeln. Inner- och ytterkanten är särskilt utsatta och måste ägnas extra uppmärksamhet. Alla problem kommer inte att behandlas i denna rapport, men de tas ändå med i sammanfattningen för att ge läsaren en komplett bild av deformationsproblemet.



Figur 1.1: Spegelns kritiska områden

Det är brukligt att lägga spegelns baksida på ett antal stöd, vilka inte har ett större inbördes avstånd än att spegelns deformationer blir godtagbara. Stödets placering är alltså föremål för utredning, och kan med olika metoder optimeras till att bli så få som möjligt. Om spegeln är momentfritt upplagd längs inner- och ytterkant kan extra stora deformationer uppkomma mellan de två innersta respektive två yttersta stödraderna. Till detta måste man då ta hänsyn, exempelvis genom ett förfinat stödmönster.

Längs spegelns ytterkant (och eventuellt även längs dess innerkant) finns det laterala stödsystemet, som framför allt sörjer för att spegeln inte tappar sin form eller förlorar sitt läge när spegeln har annat läge än rent horisontellt. Detta stödsystem kommer att applicera betydande krafter om spegeln är stor, vilken den i denna studie antas vara. Krafterna ger naturligtvis upphov till deformationer, vilka är stora nog att försämra teleskopets optiska

kvalitet. Deformationernas form och storlek beror till stor del på de laterala stödets utformning, vilket gör en allmän studie av det laterala stödsystemets verkningar på spegeln omöjlig.

1.4 Arbetsgång

Rapporten beskriver i Del 1 metoder för optimering av det axiella stödsystemet, samt delvis detsamma för det laterala stödsystemet. I Del 2 exemplifieras deformationsanalyserna samt optimeringsförfarandet för det axiella stödsystemet på ett specifikt fall.

Rapportens uppbyggnad och de ingående avsnittens relation kan allmänt beskrivas enligt:

- Del 1

- **Lokala nedböjningsanalyser.** Lokala nedböjningsanalyser utföres för att ungefärligt bestämma avståndet mellan de axiella stöden, och de ligger till grund för en av optimeringsalgoritmerna.
- **Globala nedböjningsanalyser.** Analytiska och numeriska metoder för modellering av en hel spegel beskrivs. Dessa modeller används vid optimering av stödmönstret utifrån parameterstudier.
- **Kantdeformation.** En mycket allmän studie av kantdeformationer redovisas.
- **Axiell stödoptimering.** De lokala och globala nedböjningsanalyserna används för att finna ett optimalt axiellt stödmönster.
- **Lateralt stödsystem.** Liksom för kantdeformationen görs här en mycket allmän studie.

- Del 2

- **Aktuellt fall.** Den spegelmodell som valts ut för att exemplifiera optimeringsförfarandet beskrivs.
- **Analytisk modell.** Den analytiska deformationsmodellen demonstreras.
- **Förenklad optimering.** Den första och mest approximativa av de två optimeringsalgoritmerna exemplifieras.
- **Optimering utifrån global FE-modell.** Den andra och mer datorkrävande optimeringsalgoritmen exemplifieras.

- **Slutoptimering.** Ett slutligt stödmönster erhålles efter anpassning av resultat från den andra optimeringsalgoritmen följt av en parameterstudie.

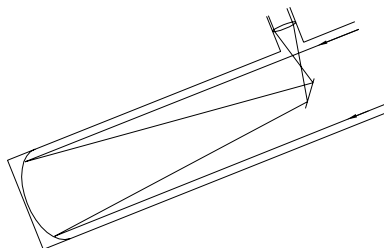
Kapitel 2

Introduktion

2.1 Teleskophistorik

På grund av den tekniska begränsningen var kunskapen om universum bristfälligt innan teleskopet uppfanns. Enkla linser har varit kända sedan antiken, men det var den holländske glasögonmakaren Hans Lipershey som i slutet av 1590-talet började experimentera med kikarkonstruktioner. Den som införde teleskopet i astronomin anses vara Galilei, som började tillverka egna instrument när han fått kännedom om den holländska uppfinningen. Det fanns emellertid andra forskare som samtidigt med Galilei men oberoende av hans konstruktioner byggde teleskop som användes inom astronomin. Refraktorerna är den typ av teleskop med linser som Galilei införde 1609. 1611 föreslog Kepler vissa förbättringar, vilka än idag utgör grundprincipen för fältkikare.

1668 byggdes det första spegelteleskopet, reflektorn, av Isacc Newton. Idén var att ersätta linser med en reflekterande spegelyta för att slippa de dåtida refraktorernas färgfel. En Newton-reflektor, figur 2.1, samlar in ljuset med en konkav spegel som finns i botten av en tub, och en liten sekundärspegel riktar ut ljuset till okularet.



Figur 2.1: Newton-reflektor

2.2 Dagens och framtidens spegelteleskop

Nya teleskopkonstruktioner har alltid som mål att öka informationsintaget. Detta kan ske på olika sätt, till exempel genom att bygga större teleskop

eller att konstruera bättre detektorer. Vid planering av nya teleskop blir det intressant att se på kostnaderna. Ett problemet är att kostnaden för ett teleskop är proportionell mot teleskopets diameter enligt:

$$\text{kostnad} \sim D^3$$

Teleskopets förmåga att samla in ljus är proportionell mot dess spegelarea, det vill säga

$$\text{antal fotoner} \sim D^2$$

Detta resulterar i att:

$$\text{kostnad per foton} \sim D$$

Idag finns det olika sätt att undvika denna kostnadsexplosion till exempel genom att göra tunna speglar eller genom att sätta ihop flera små speglar.



Figur 2.2: Hubbleteleskopet

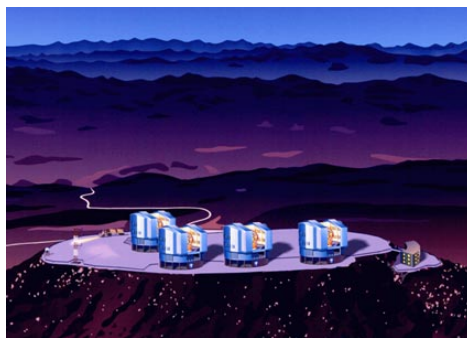
Moderna teleskop är konstruerade för att korrigera störningar. Två av dessa metoder är aktiv- och adaptiv optik. Aktiv optik korrigerar för optiska fel i spegeln på grund av spegelns avvikelse från den paraboliska formen, och adaptiv optik korrigerar för atmosfärens turbolens. Korrektion för atmosfärens turbolens åstadkoms genom mätning av distorsionen på ljusets vågfront, och kompensera för ojämnheter i denna genom att deformera en av teleskopets speglar. Eftersom uppdateringstiden är i storleksordningen 10-100 millisekunder, är det oftast inte primärspeglarna som deformeras utan den mindre sekundärspeglarna. Uppmätning av vågfronten sker med hjälp av ljusstarka stjärnor eller laserstrålar¹.

1990 sändes det första stora optiska teleskopet upp i omloppsbana runt jorden, det så kallade Hubble-teleskopet. Avsikten var att utan störningar från jordens atmosfär göra observationer

¹90 km upp i atmosfären finns ett 10 km tjockt lager, innehållande rester från meteoriter och rymdgrus, lagret har en hög halt av natriumatomer. När dessa atomer exciteras av laserljuset avger de ett monokromt ljus den så kallade natriumlinjen. Resultatet blir lysande laserstjärnor.

ut till den teoretiska gränsen, ett avstånd i ljusår som motsvarar universums ålder. Efter uppsändandet visade det sig dock att den 2,4 m stora huvudspegeln var felslipad, och teleskopet fick också problem med solpanelerna. Felen rättades till av amerikanska astronauter under 1993, då korrigerande optik monterades. Efter ytterligare förbättringar 1997 kunde Hubbleteleskopet täcka nya våglängsområden. Man kunde urskilja svagare ljuskällor och därmed se längre ut i rymden. Totala kostnaden för Hubble stannade på 10 miljarder dollar.

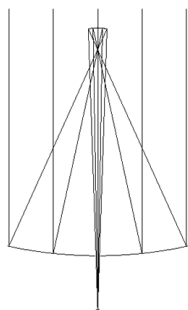
Europeiska sydobservatoriets VLT, *Very Large Telescope*, är ett projekt där fyra spegelteleskop med en spegeldiameter på vardera 8.2 m ska byggas. Teleskopen ska kunna användas tillsammans, med hjälp av speciell mjukvara och kraftiga datorer, men även till separata observationer. Om speglarna kopplas samman kommer det att motsvara ett spegelteleskop med diametern 16.4 m. Teleskopen är placerade i Chile, och beräknas vara helt klara för användning år 2001.



Figur 2.3: VLT i Chile

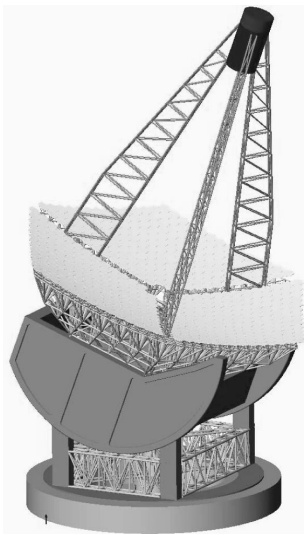
Många projekt finns idag på idéstadiet. Man diskuterar spegelteleskop med en reflekterande yta 100 gånger större än vad dagens spegelteleskop har.

2.3 Svenskt ELT-projekt



Lunds universitet har sedan 1991 studerat ELT, *Extremely Large Telescopes*. Forskningen har inriktats mot teleskop med en spegeldiameter på 50 m och med adaptiv optik. Ett teleskop av denna storlek kommer att ha en spegelyta på cirka 2000 m², vilket är 25 gånger större än de största teleskopen som finns idag. Upplösningen blir med hjälp av den adaptiva optiken två millibågsekunder², vilket är 200 gånger bättre jämfört med existerande teleskop utan adaptiv optik. Teleskopet kommer att utrustas med gregorianskt fokus enligt figur till vänster.

²Med en upplösning på 2 millibågsekunder kan man se en apelsin på 800 mils avstånd.



Figur 2.4: ELT

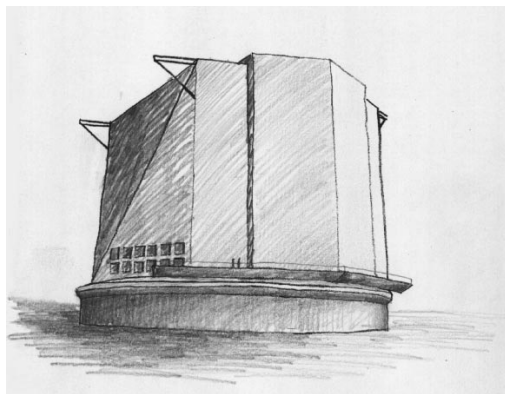
Spegeln är tänkt att konstrueras i ett enda stycke. En sådan pjäs går inte att flytta, varför man föreslagit gjutning och slipning på plats. Detta skulle inte bli dyrare än en segmenterad spegel, men man skulle vinna i kvalitet vid observationer inom det infraröda området, eftersom skarvarna i en segmenterad spegel avger störande värmestrålning.

Två hydrostatiskt styrda hästskor kommer att stå för den altituda rörelsen och en stor roterbar skiva kommer att stå för teleskopets rotation, se figur 2.4.

Den stora byggnad som kommer att inkapsla och skydda teleskopet skall kunna roteras på en räls. Byggnaden kommer att ha ett kylsystem för att undvika uppvärmning av teleskopet under dagtid, figur 2.5.

Det finns tre platser på jorden där luften anses vara tillräckligt torr och klar för goda observationer, och som har molnfri himmel större delen av årets nätter:

Det är Atacamaöknen i Chile där VLT är beläget, Kanarieöarna och vulkanen Mauna Kea på Hawaii. Det svenska EL-teleskopet är tänkt att byggas i Atacamaöknen. Ett teleskop av denna storlek beräknas kosta 722 miljoner Euro³ och förväntas ta tio år att konstruera och bygga. Med denna enorma kostnad krävs ett samarbete mellan flera länder.



Figur 2.5: Byggnadsförslag

2.4 Fokus

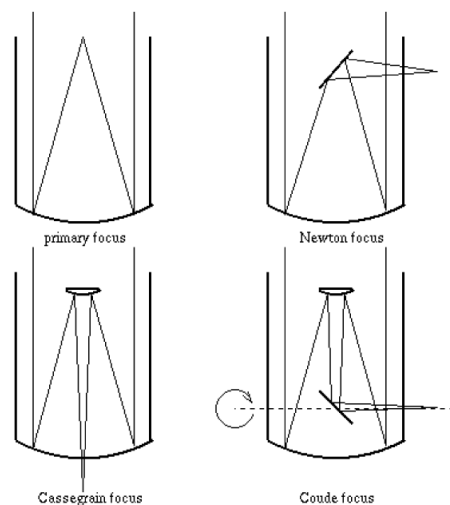
Den enklaste strålgången i ett spegelteleskop får man vid observationer i primärfokus, se figur 2.6. Det är uppenbart att detta kräver stora teleskop, eftersom instrument i fokus blockerar en del av spegeln. Fördelen med denna typ av observation är det låga förhållandet mellan f/D ⁴ som ger *snabb* optik.

³722 miljoner Euro motsvarar cirka 760 miljoner US Dollar, juni 1999

⁴ f - brännvidd och D - spegeldiameter

Primärfokus har en stor betydelse inom astronomisk fotografering. Newton-fokus saknar betydelse inom professionell astronomi, eftersom den introducerar en extra reflektion med ljusförluster. För små amatöртеleskop är detta dock en populär lösning. Den vanligaste större teleskopdesignen är Cassegrain-typen som använder sig av en parabolisk primärspegel samt en hyperbolisk sekundärspegel, vars ena brännpunkt sammanfaller med primärspgelns brännpunkt. Strålarna går genom ett hål i primärspgelns andra brännpunkt. Fokus hamnar utanför spegeln och där kan större instrument placeras.

Blir instrumenten ännu större eller kräver ännu högre stabilitet, kan man leda ut ljuset via plana speglar till exempel till ett annat rum som inte deltar i teleskopets rörelse. Fokuset kallas då för Coudé-fokus, figur 2.6.



Figur 2.6: Olika fokus för reflektorer

2.5 Montering

Det klassiska sättet att montera ett teleskop är den ekvatoriella uppställningen. Instrumentet är då upphängt på en axel, vars rotationsaxel är riktad mot himmelspolen (polstjärnan på norra hemisfären). En sekundär axel i rät vinkel mot polaxeln gör att alla riktningar blir tillgängliga. Med hjälp av datorstyrda precisionsmotorer får man instrumentet att följa stjärnhimlens skenbara rotation. Denna typ av montering gör att man bara behöver vrida teleskopet runt en av axlarna om man vil följa stjärnornas skenbara rörelse. Ett ekvatoriellt montage för ett stort spegelteleskop är inte alltid mekaniskt balanserat på grund av de snedställda axlarna. För att minska den mekaniska belastningen samt för att sänka kostnaderna på konstruktionen kan man med hjälp av datorteknik även styra ett horisontellt montage. Det moderna alternativet är så kallat altazimutalt montage, där ena teleskopaxeln pekar mot zenit och den andra axeln är en horisontell elevationsaxel. För att följa stjärnhimlens skenbara rotation krävs att båda axlarna uppdateras kontinuerligt.

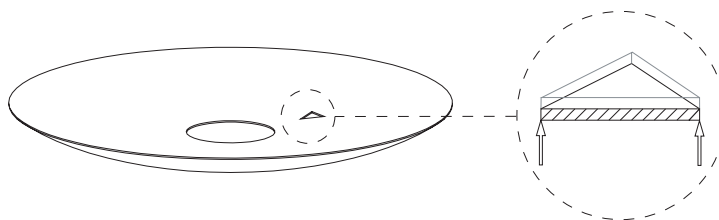
Kapitel 3

Lokala nedböjningsanalyser

För att kunna optimera stödmönstret är det av intresse att studera nedböjningen mellan stödpunkterna. Denna nedböjning beror förvisso på *alla* de yttre krafter som verkar på spegeln, men kan approximativt beräknas genom att studera ett triangulärt område innefattande endast ett nedböjningsmaximum. I detta kapitel studeras nedböjningen inom ett sådant område för att finna sambandet mellan deformationer, stödpunkternas inbördes avstånd samt spegelns tjocklek.

3.1 Lokalt lastfall

Det lokala lastfallet beskriver nedböjningen inom ett triangulärt område av spegeln, vars hörnpunkter motsvarar tre av spegelns upplagspunkter. I figur 3.1 är stöden representerade av pilar. Nedböjningen för det lokala lastfallet beräknas dels med analytiska metoder innefattande approximationer, dels med numeriska metoder vilka i sig är approximativa.



Figur 3.1: Lokala lastfallet

3.2 Plattmodell

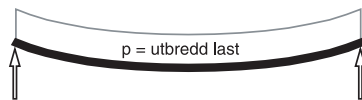
Analytiska metoder för nedböjningsanalyser förutsätter i det tredimensionella fallet ofta rotationssymmetri. I den första och mest approximativa nedböjningsanalysen kommer det lokala lastfallet att approximeras till en cirkulär skiva som är fast inspänd längs sin kant och belastad med en utbredd last p . Elementarfall för denna typ av lastfall är allmänt omskrivna i litteraturen¹ och kan superpositioneras fram ur lastfallen i figur 3.2 och 3.3.

För dessa elementarfall gäller för nedböjningar

$$\delta_1(r) = \frac{pa^2r^2}{32D} \left(\frac{3 + \nu}{1 + \nu} - \frac{r^2}{2a^2} \right) \quad (3.1)$$

$$\delta_2(r) = \frac{Mr^2}{2D(1 + \nu)} \quad (3.2)$$

I ekvationerna representerar a cirkelskivans radie, ν Poissons tal och p en utbredd last. Konstanten D beror på materialkonstanter och plattans tjocklek enligt ekvation 3.3.



Figur 3.2: Lastfall ett



Figur 3.3: Lastfall två

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3.3)$$

De båda elementarfallen superpositioneras med bivillkor enligt ekvation 3.4.

$$\frac{d}{dr} (\delta_1(a) + \delta_2(a)) = 0 \quad (3.4)$$

Bivillkoret ger förhållandet mellan momentet i lastfall ett och den utbredda lasten i lastfall två enligt ekvation 3.5.

$$M = -\frac{1}{8}a^2p \quad (3.5)$$

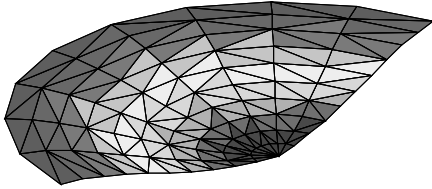
Detta ger nedböjningen som funktion av den utbredda lasten, och den kan uttryckas enligt ekvation 3.6.

$$\delta(r) = \frac{1}{64} \frac{(2a^2 - r^2)pr^2}{D} \quad (3.6)$$

Nedböjningen blir rotationssymmetrisk, och kan studeras i figur 3.4.

¹se till exempel "Formelsamling i hållfasthetslära", institutionen för hållfasthetslära, KTH, 1990 sidan 109.

Lasten p motsvarar plattans egentyngd, och blir därför ρgh . Den maximala nedböjningen fås som utböjningen vid radien är lika med a enligt ekvation 3.7.



Figur 3.4: Plattmodell

$$\delta_{max} = \frac{\rho g h a^4}{64D} = \frac{3(1-\nu^2)\rho g a^4}{16 E h^2} \quad (3.7)$$

Denna modell efterliknar det lokala lastfallet, med avståndet mellan stöden som en ingående parameter. Måttet a motsvarar radien hos plattan, men det är nedböjningen som funktion av avståndet mellan stöden som söks. Om plattmodellen ska efterlikna det lokala lastfallet med en liksidig triangel, fås avståndet mellan stödpunkterna som funktion av spegelns tjocklek och maximal nedböjning:

$$d = \left(\frac{3\delta_{max} E h^2}{(1-\nu^2)\rho g} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.8)$$

Stödpunkternas mönster kommer endast i undantagsfall att beskriva liksidiga trianglar. När liksidighet inte råder kan nedböjningen beräknas för ett fall där cirkelns radie a är radien i den cirkel som triangelns tre hörnpunkter beskriver. Radien a erhålles som funktion av triangelns sidlängder A, B, C som lösningen av ekvation 3.9.

$$2 \arcsin \left(\frac{d_1}{2a} \right) + 2 \arcsin \left(\frac{d_2}{2a} \right) + 2 \arcsin \left(\frac{d_3}{2a} \right) = 2\pi \quad (3.9)$$

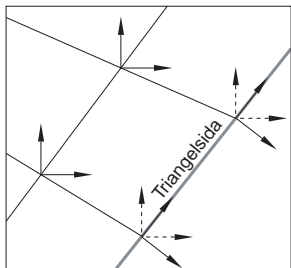
Denna metod är inte att föredra när någon av triangelns hörn är spetsiga, eftersom det skulle innebära stora värden på a . En alternativ metod är att i ekvation 3.7 anta att måttet d motsvarar triangelns sidornas medelvärde. Denna approximation kan inte motiveras mer än ingenjörsmässigt. Radien a kan då approximativt skrivas som

$$a = \frac{1}{3\sqrt{3}}(d_1 + d_2 + d_3) \quad (3.10)$$

där d_1, d_2 och d_3 är triangelns sidor.

3.3 Finita element-modell

Vid de numeriska beräkningarna av nedböjningen har datorprogrammet Calfem² använts. Modellen av elementarfallet har byggts upp av isoparametiska skalelement som påverkas av kroppskrafter motsvarande sin egen tyngd. Längs triangelsidorna tillåts inte förskjutning i sidans normalriktning eller rotation tvärs denna. Eftersom denna normalriktning inte nödvändigtvis sammanfaller med det globala koordinatsystemet måste modellens frihetsgrader längs sidan transformeras, vilket görs enligt följande:



Figur 3.6:

Figur 3.6 visar hur frihetsgradernas riktning längs triangelsidorna måste ändras för att randvilkoren ska kunna definieras korrekt. Ett sätt att åstadkomma denna rotation är att modifiera styvhetsmatris, lastvektor och förskjutningsvektor genom att multiplicera dem med en transformationsmatris, vilken projicerar om förskjutningar, krafter och styvheter till de nya koordinatriktningarna. På nodnivå får denna transformation utseendet

$$\begin{aligned} \mathbf{K}'^n &= \mathbf{A}^{Tn} \mathbf{K}^n \mathbf{A}^n \\ \mathbf{a}'^n &= \mathbf{a}^n \mathbf{A}^n \\ \mathbf{f}'^n &= \mathbf{f}^n \mathbf{A}^n \end{aligned} \quad (3.11)$$

Transformationsmatrisen \mathbf{A}^n projicerar vektorerna på det nya lokala koordinatsystemet på nondivå, och definieras enligt ekvation 3.12. Vinkeln mellan det globala och det lokala koordinatsystemet definieras som α i ekvation 3.12.

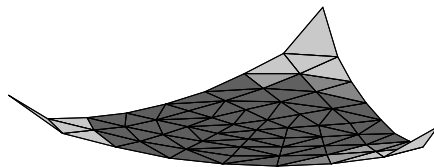
$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Den vanliga FE-ekvationen får nu utseendet

$$\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} \mathbf{A} = \mathbf{f} \mathbf{A} \quad (3.13)$$

Frihetsgraderna har nu ändrat riktning, och randvilkor kan nu ges för förskjutningar och laster längs triangelsidorna samt vinkelrätt mot denna.

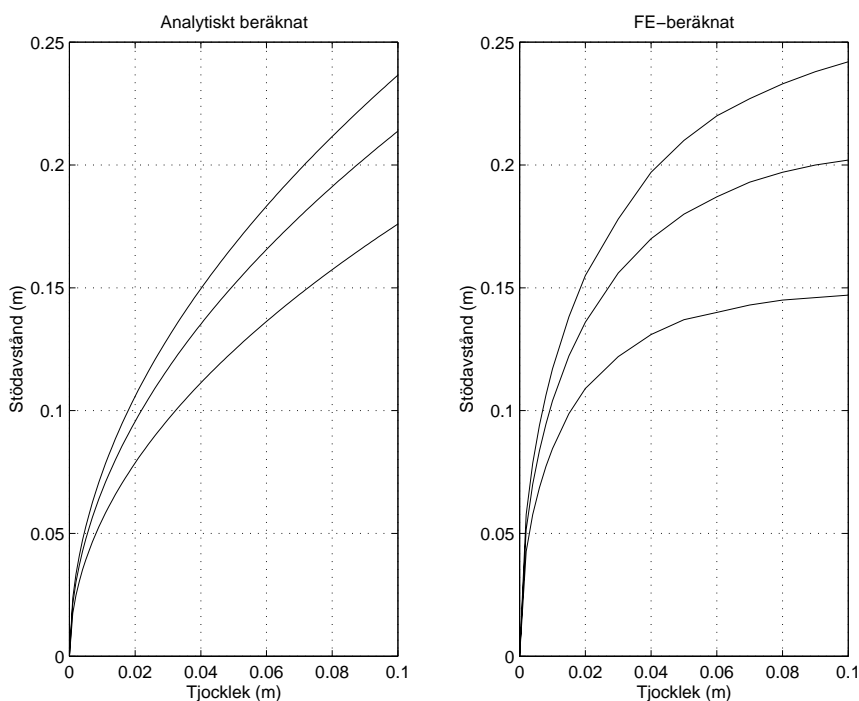
²Calfem är en Finita element-modul till datorprogrammet Matlab som är utvecklat av Avdelningen för hållfasthetslära och Avdelningen för byggnadsmekanik på Lunds tekniska högskola.



Figur 3.5: FE-modell

3.4 Resultat

Den maximalt tillåtna nedböjningen bestämmer avståndet mellan stödpunkterna och beror på faktorer som elasticitetsmodul, Poissons tal och spegelmaterialets densitet. För att kunna jämföra plattmodellen med FE-modellen har avståndet mellan stödpunkterna som funktion av spegelns tjocklek plottade i figur 3.7 för olika maximalt tillåtna nedböjningar. I fallet med FE-modellen har en liksidig triangelyta modellerats, och i båda lösningarna har fakta om materialkonstanter erhållits från tillverkare av spegelglas. För värden på materialkonstanter se kapitel 8.



Figur 3.7: Minsta stöдавstånd som funktion av spegelns tjocklek för en maximal nedböjning på 10, 20 och 30 nm

Resultaten visar att nedböjningen och stöдавståndet med god approximation kan beräknas med den analytiska plattmodellen. Det bör dock noteras att dessa resultat inte ska tolkas som allmänna – de gäller enbart för givna förhållanden mellan materialtjocklek och stöдавstånd.

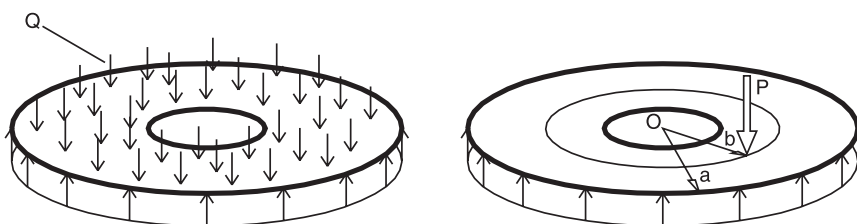
Kapitel 4

Globala nedböjningsanalyser

I detta kapitel beskrivs metoder för deformationsanalys av en hel spegel. Dessa *globala analyser* ger en sannare bild av spegelns deformationer än de som erhålls vid de lokala analyserna i kapitel 3.

4.1 Analytisk beräkning

Denna analytiska modell approximerar spegelns form till en tunn cirkulär skiva med ett hål i mitten. Approximation torde vara god, vilket dock den senare finita element-analysen får avgöra. Det aktuella lastfallet kan superpositioneras fram från elementarfallen i figur 4.1. Varje stöd motsvaras av en last



Figur 4.1: Jämnt utbredd last Q på cirkulär platta, samt punktlast P på cirkulär platta. Båda fritt upplagda längs ytterränd.

P_n , vars storlek beräknas utifrån villkoret att förskjutningen i stödpunkten ska vara noll. Eftersom det finns fler än ett stöd kommer flera lastfall att superpositioneras. Om antalet stöd är n kommer antalet laster, P_n , att vara n , och antalet superpositionerade lastfall vara $n + 1$. Lastfallet med den jämnt utbredda lasten Q motsvarar spegelns nedböjning orsakad av egentyngden

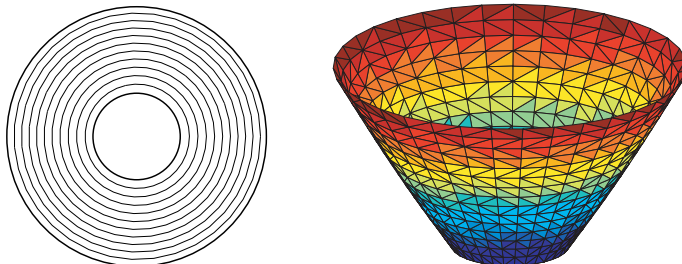
och finns i literaturen¹. Sambandet mellan last och nedböjning blir enligt ekvation 4.1

$$\delta = \frac{pr_0^2 a^2}{16D} \left[\left(\frac{3+\nu}{1+\nu} - \frac{4 \ln \alpha}{\alpha^2 - 1} \right) \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \ln \rho + \frac{\rho^2 - 1}{2} \right) - \frac{\rho^2 - 1}{2\alpha^2} \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} + \frac{\rho^2 + 1}{2} \right) + 2 \frac{\rho^2}{\alpha^2} \ln \rho \right] \quad (4.1)$$

Konstanterna ρ , α och D definieras

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \rho = \frac{r}{r_0} \quad \alpha = \frac{a}{r_0} \quad (4.2)$$

Variablerna r_0 och a är inner- respektive ytterradien på skivan. Nedböjningen kan visualiseras med nedböjningskonturer och deformationsbild enligt figur 4.2.



Figur 4.2: Nedböjningskonturer och deformationsbild för lastfall med utbredd last.

För lastfallet med punktlasten är nedböjningsuttrycken inte lika enkla. Antag en nedböjningsform för området utanför punktlasten, $r > b$ enligt ekvation 4.3².

$$w = R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos m\theta \quad (4.3)$$

θ anger vinkeln mellan \overline{Ob} i figur 4.1 och radievektorn som beskriver aktuell nedböjningspunkt *utanför* lasten. Termerna $R_0 \dots R_m$ definieras enligt ekvation 4.4.

$$\begin{aligned} R_0 &= A_0 + B_0 r^2 + C_0 \log r + D_0 r^2 \log r \\ R_1 &= A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \log r \\ &\dots \\ R_m &= A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D_m r^{-m+2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

¹se till exempel *Formelsamling i hållfasthetslära*, institutionen för hållfasthetslära, KTH, 1990, sidan 109.

²se Timoshenco S. *Theory Of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1959, sidan 290

Samma nedböjningsform antas för nedböjning *utanför* lasten, men med andra värden på de ingående termerna. Termerna betecknas $R'_0 \dots R'_m$, och de i termerna ingående konstanterna betecknas $A'_0 \dots A'_m$, $B'_0 \dots B'_m$ och så vidare. Konstanterna i ekvation 4.4 måste bestämmas för att nedböjningen ska kunna beskrivas. För att göra detta nyttjas randvillkor från inner- och ytterradie samt $r = b$ enligt ekvation 4.5 – 4.12 och 4.14. Det momentfria stödet längs ytterranden ger randvillkoren 4.5, eftersom det är ett ej eftergivande stöd, och 4.6, eftersom stödet är momentfritt.

$$w|_{r=a} = 0 \quad (4.5)$$

$$M_r|_{r=a} = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \Big|_{r=a} = 0 \quad (4.6)$$

Längs innerranden är spegeln varken inspänd eller upplagd, vilket ger randvillkor för tvärkraft och moment enligt ekvation 4.7 och 4.8.

$$M_r|_{r=r_0} = -D \left[\frac{\partial^2 w'}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w'}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w'}{\partial \theta^2} \right) \right] \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (4.7)$$

$$V|_{r=r_0} = \left(\frac{\partial}{\partial r} (\Delta w') + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left((1 - \nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w'}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right) \right) \right) \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (4.8)$$

Variabeln Δ är deltaoperatoren för polära koordinater enligt 4.9.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (4.9)$$

Längs hela skivan måste C^2 -kontinuitet råda, varför ytterligare tre randvillkor, 4.10 - 4.12, tillkommer.

$$\lim_{r \rightarrow b^+} w = \lim_{r \rightarrow b^-} w' \quad (4.10)$$

$$\lim_{r \rightarrow b^+} \frac{\partial w}{\partial r} = \lim_{r \rightarrow b^-} \frac{\partial w'}{\partial r} \quad (4.11)$$

$$\lim_{r \rightarrow b^+} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \lim_{r \rightarrow b^-} \frac{\partial^2 w'}{\partial r^2} \quad (4.12)$$

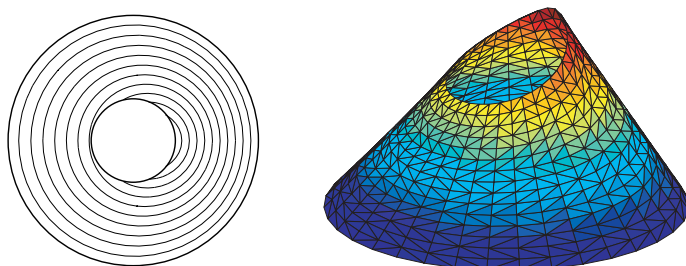
Ett jämviktssamband mellan innerdelen och ytterdelen av spegeln ger det sista randvillkoret. Tvärkraften, V_r , i ytor vinkelräta mot spegelns radievektor kan skrivas enligt ekvation 4.13.

$$V_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) \quad (4.13)$$

Jämvikt ger att skillnaden mellan tvärkrafterna på den yttre skivans innerradie och den inre skivans ytterradie ska vara lika med lasten. Härav ekvation 4.14:

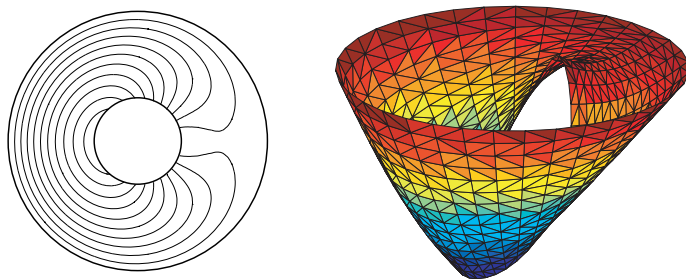
$$D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) - D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w') \Big|_{r=b} = \frac{P}{\pi b} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos(m\theta) \right) \quad (4.14)$$

De åtta konstanterna kan lösas ut och ger efter en hel del räknande uttryck för $R_0 \dots R_m$, varefter nedböjningarna kan beräknas med ekvation 4.3. Uttrycken blir så omfattande att de inte redovisas här, men för ett specifikt fall med förhållandet mellan $r_o : b : a$ som $1 : 1 : 3$ har de visualiserats som nedböjningskonturer och deformationsbild i figur 4.3.



Figur 4.3: Nedböjningskonturer och deformationsbild för lastfall med punktlast.

När de båda lastfallen superpositioneras med bivillkoret att utböjningen vid kraften P är noll fås figur 4.4.



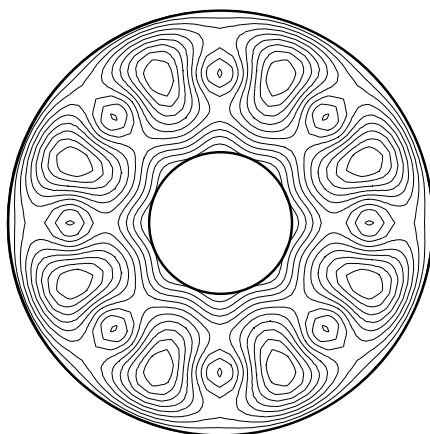
Figur 4.4: Nedböjningskonturer och deformationsbild efter superpositionering av de båda lastfallen.

Punktkraften i modellen symboliserar en av spegelns stödpunkter. Om man vill utöka modellen till att innefatta flera stödpunkter blir bivillkoret som säger att nedböjningen vid kraftens angreppspunkt ska vara noll inte

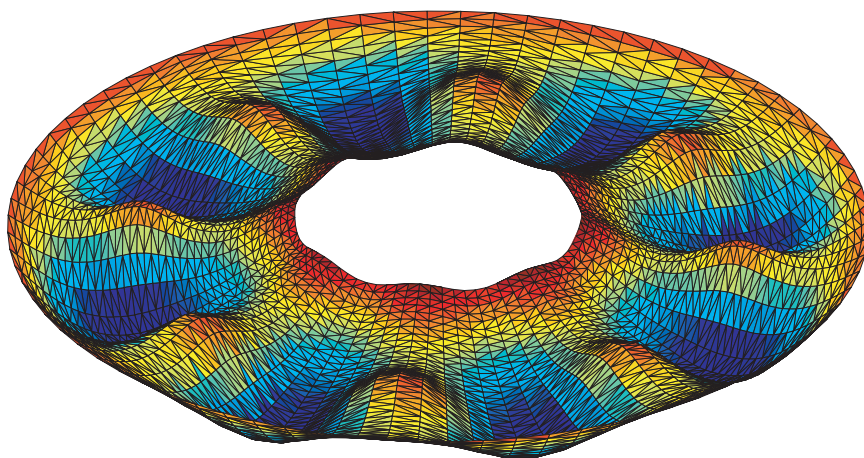
lika enkelt att hantera. Krafterna i stödpunkterna fås som lösningen till matrisekvationen 4.15:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} - \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (4.15)$$

I ekvationen är \mathbf{P} en vektor innehållande krafterna i stödpunkterna och \mathbf{G} en vektor innehållande nedböjningarna i stödpunkterna orsakade av spegelns egentygnd. \mathbf{A} är en influensmatris vars komponenter A_{mn} definieras som nedböjningen vid stödpunkten m om en enhetskraft appliceras i punkten n . Ett enkelt fall med 16 stöd visualiseras i figur 4.5 och 4.6.



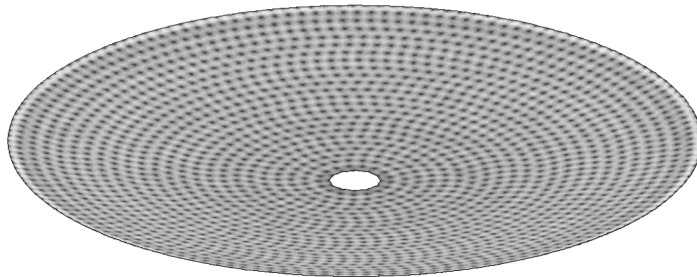
Figur 4.5: Nedböjningskonturer för fall med 16 stöd.



Figur 4.6: Deformationsbild för fall med 16 stöd.

4.2 Finita element-modell

I detta avsnitt beskrivs hur en tredimensionell finita element-modell kan byggas upp.



Figur 4.7: Spegel med stödmönster

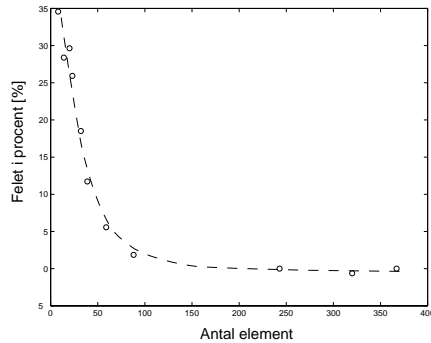
4.2.1 Elementtyp

Spegeln modelleras med trenodiga skalelement, isoparametriska med sex frihetsgrader i varje nod. Elementen är så kallade *Thick shell elements* som tar hänsyn till inre skjuvspänningar. En vanlig tumregel säger att om förhållandet mellan tjocklek och stöдавstånd är större än $1/20$ bör hänsyn tas till skjuvspänningar. En konvergensstudie, figur 4.8, har genomförts för att undersöka hur många element som krävs för att nedböjningen ska konvergera mot ett värde. Detta är av intresse vid stora modeller, där datorkapacitet kan innebära en begränsning och man därför vill undvika att använda fler element än nödvändigt. Studien har genomförts med lokala analyser på ett godtyckligt triangulärt område mellan tre tänkta stöd. Nastran³ användes för beräkningarna. En modell med samma randvillkor som för spegelns yttrekanter är gjord i Calfem och finns presenterad i avsnitt 3.3.

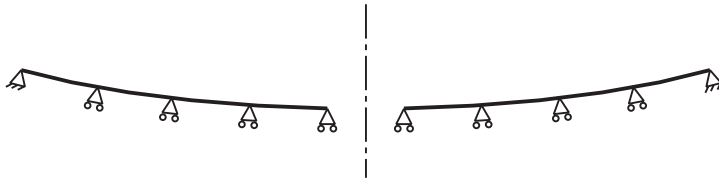
4.2.2 Randvärden

I varje nod definieras ett koordinatsystem med en axel i normalled, en i radiell led och en i tangentiell led mot spegelns plan. Detta möjliggör definiering av randvillkor i dessa riktningar. För att skapa dessa koordinatsystem används koordinattransformering, se kapitel 3.3. I alla stöd läses deformationerna i spegelns normalriktning. Inre randen på spegeln betraktas som fritt upplagd medan den yttre randen betraktas som fast inspänd. De yttre stöden läses

³Nastran är ett komersiellt finita element-program

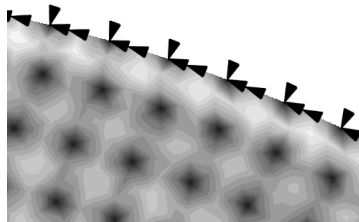


Figur 4.8: Konvergenstudie



Figur 4.9: Spegelsnitt med randvillkor för stöd, translation i normalled och radiell led

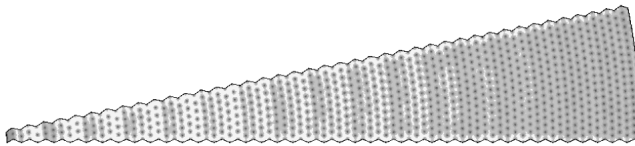
alltså i translation i normalled och radiell led samt i rotation i tangentiell led. De yttre noderna mellan de yttre stöden låses i translation i radiell led och i rotation i tangentiell led. Den yttre randen kan tänkas vara av intresse för mer ingående studier i ett framtida projekt, då den egentligen borde betraktas som fritt upplagd.



Figur 4.10: Randvillkoren längs ytterkanten, translation i radiell led och rotation i tangentiell led

4.2.3 Modellering av extremt stora speglar

Vid analys av stora speglar kan antalet frihetsgrader i modellen omöjliggöra modellering av en hel spegel. Användning av symmetrilinjer kan vara en lösning på problemet, och att endast en del av spegeln modelleras. För att randvillkoren längs symmetrilinjerna skall bli korrekta används *Multipoint Constraints*, MPC. MPC innebär att två eller fler frihetsgrader kopplas till varandra, och styvhetsmatrisen måste då kompletteras med ett samband mellan frihetsgraderna. Genom att definiera MPC mellan frihetsgraderna längs symmetrilinjerna, och därmed synkroniserar förskjutningarna, fås rätt randvillkor. I figur 4.11 visas en 1/32-dels spegel.



Figur 4.11: 1/32-dels spegel med stödmönster

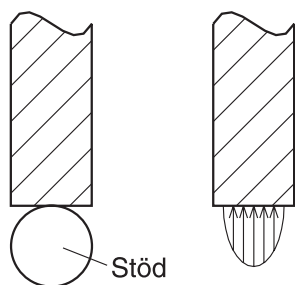
Kapitel 5

Kantdeformation

Eftersom spegelns laterala stöd krafter appliceras endast vid spegelkanten måste de vara stora jämfört med de axiella stödkrafterna. De laterala krafterna kan ge upphov till tjockleksvariationer i spegelns kanter, vilka i sin tur ger försämrad optisk kvalitet för teleskopet. Eftersom de krafter som det laterala stödsystemet utövar på spegelns kanter kan appliceras på olika sätt ska resultaten i detta kapitel endast ses som en allmän utredning om de deformationer som de laterala stödkrafterna kan ge upphov till.

5.1 Inledning

För att göra en adekvat deformationsanalys är det viktigt att lastfallet blir så verklighetstroget som möjligt.



Figur 5.1: Elliptisk stödkraftsvariation

I detta fall väljs en elliptisk fördelning av linjelasten i spegelns tjockleksriktning, eftersom det motsvarar ett stöd med cirkulär snittyta enligt figur 5.1. För ett tvådimensionellt fall motsvarar detta en cylinder, och för ett tredimensionellt en sfär. Kontaktytans bredd beror på stödets krökningsradie, stödets och spegelns elasticitetsmodul och stödkraftens storlek. Storleken på spegelns tjockleksökning är proportionell mot stödkraftens storlek, vilket medför att deformationsberäkningarna kan utföras med en enhetslast.

5.2 Analytisk överslagsräkning

En analytisk överslagsräkning har utförts för att kunna användas som kontroll vid senare finita element-beräkningar.

Om plant deformationsstillstånd råder ochsamt att spegelkanten utsätts för ett jämnt upplagstryck, se figur 5.2, kan töjningen i tjockleksriktningen beräknas enligt Hookes lag för plant deformationstillstånd:

$$\epsilon_y = \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_x \right) \quad (5.1)$$

Med en jämnt utbredd last på 1 Nm^{-1} längs spegelns kant och spgeltjockleken t blir spänningarna enligt 5.2:

$$\sigma_x = \frac{1}{t} \quad \sigma_y = 0 \quad (5.2)$$

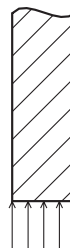
Töjningen i y -led blir då enligt Hookes lag för plant deformationstillstånd:

$$\epsilon_y = \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_x \right) = \frac{\nu(1 + \nu)}{Et} \quad (5.3)$$

Tjockleksändringen Δt blir:

$$\Delta t = \epsilon_y t = \frac{\nu(1 + \nu)}{E} \quad (5.4)$$

Tjockleksökningen beror alltså inte på spegelns tjocklek vid en given belastning per längdenhet. Med värden på materialkonstanterna enligt kapitel 8 fås tjockleksökningen $0,133 \text{ pm}$ med lasten 1 Nm^{-1} . Enligt Saint-Venants princip¹ bör därmed spegelns tjockleksökning en bit in på spegeln få detta värde för exempelvis en elliptisk lastprofil. Denna tjockleksändring kompenseras lätt för av det axiella stödsystemet.



Figur 5.2: Lastfall

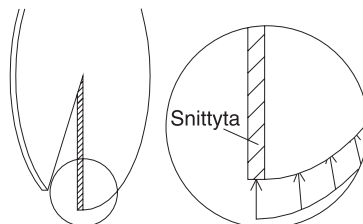
¹Saint-Venants princip säger att en lasts utseende inte kan spåras på ett avstånd av cirka 3-4 gånger lastens bredd.

5.3 Tvådimensionell finita element-modell

För att få en allmän bild av kantdeformationerna har en finita element-analys av spegelkanten för ett tvådimensionellt fall utförts.

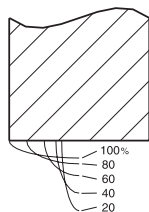
Den analyserade delen av spegeln är tagen från spegelns yttersta kant, och ytan som definierar de två dimensionerna utgörs av snittytan i figur 5.3.

Deformationsberäkningarna har utförts med en enhetslast på 1 Nm^{-1} för varierande förhållanden mellan kontaktytans bredd och spegelns tjocklek. Enhetslasten symboliseras av pilarna i figur 5.3, och lastprofilerna visas i figur 5.4 nedan.



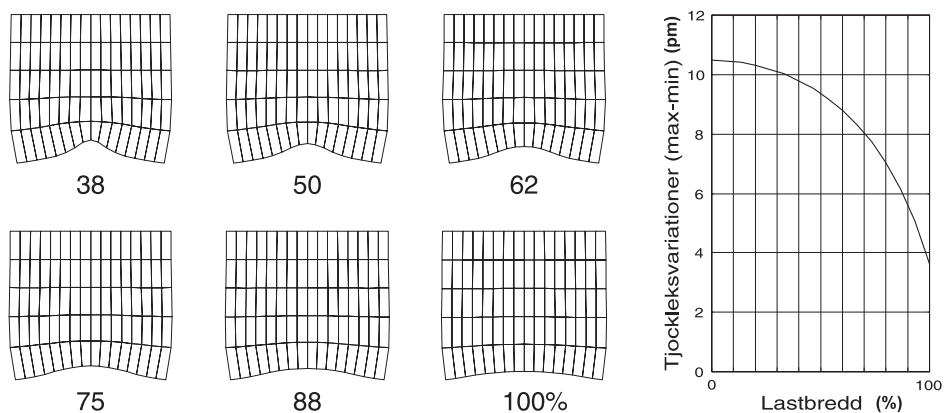
Figur 5.3: Beräkningsmodell

Vid beräkningarna har rektangulära fyrnodselement använts, vilket med de olika lastbredderna resulterat i deformationsprofiler enligt figur 5.5.



Figur 5.4: Last

De olika lastbredderna ger olika deformationbilder. Det är av intresse att studera deformationerna på spegelytan, vilka i figur 5.5 motsvaras av en av de vertikala sidorna. Stora tjockleksvariationer inom små områden är svåra att kompensera med spegelns stödsystem, vilket ställer krav på kantstödens utformning. Enligt diagrammet i figur 5.5 erhålles större lokala deformationer vid minskad bredd på kontaktytan mellan stöd och spegel. Värderna på tjockleksändringarna kan utläsas ur figur 5.5. Materialkonstanter har erhållits från glastillverkare, se kapitel 8.



Figur 5.5: Deformationsprofiler och tjockleksvariationer

Kapitel 6

Axiell stödoptimering

Nedböjningsanalyserna beskrivna i kapitel 3 och 4 används i detta kapitel för optimering av det axiella stödmönstret. Den första optimeringsalgoritmen bygger på lokala analyser, och den slutliga på globala analyser samt resultat från den första optimeringen. Spegelns mönster optimeras med avseende på erforderligt antal stöd, utan att spegelns avvikelse från sin paraboliska grundform blir större än ett på förhand bestämt mått.

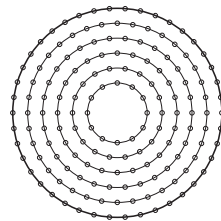
6.1 Grundmönster

För att strukturera sökningen av ett optimalt stödmönster har stödmönstrets grundform bestämts i förväg. Att lägga upp astronomiska speglar på diskreta stödpunkter har gjorts i decennier, och i denna studie har endast grundmönster som använts eller föreslagits tidigare studerats. Att använda sig av ett grundmönster minskar antalet fria parametrar som behövs för att beskriva stödmönstret, vilket gör en optimering utifrån en parameterstudie mindre komplex. En nackdel med användandet av ett grundmönster är dock att stöden inte kan placeras helt fritt, och endast ett suboptimalt stödmönster erhålles.

6.2 Approximativ optimering

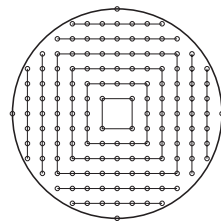
Resultat från de lokala nedböjningsanalyserna har använts till en approximativ optimering. Nedböjningsanalyserna i kapitel 3.2 och 3.3 är båda gjorda med triangulära element, vilket innebär att algoritmer för triangulindelning av stödmönstret måste användas. Optimeringsgången kommer att bero på stödmönstrets uppbyggnad, och redovisas här kortfattat för de olika mönstren.

Cirkulära mönster som i figur 6.1 beskrivs av ringarnas avstånd från spegelns centrum samt antalet stöd per ring. Den första ringen sätts på kanten till spegelns mitt-hål, eller en bit in på spegeln, och avstånden mellan stöden på innercirkeln kan exempelvis bestämmas från resultaten i avsnitt 3.2. Ytterligare en ring med samma antal stöd sätts till modellen utanför den första. Avståndet mellan dessa ringar bestäms, efter triangelin-delning, utifrån resultaten i avsnitt 3.3. Antalet stöd i den yttre ringen ökas och ringens radie uppdateras tills kvoten mellan antal stöd i modellen och arean innesluten i den yttre ringen når ett minimum. Ytterligare en ring läggs då till modellen, och samma förfarande upprepas tills hela spegeln fyllts med stöd.



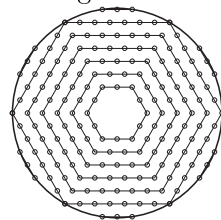
Figur 6.1:

Kvadratiska mönster som i figur 6.2 optimeras på liknande sätt. En kvadratisk stödformation som tangerar hålet i spegelns mitt är utgångspunkt. Härifrån optimeras antalet stöd i ytterligare rektanglar som i fallet för det cirkulära mönstret, dock med kvadrater både innanför och utanför den första kvadraten. Sexkantiga stödmönster som i figur 6.3 optimeras på samma sätt som kvadratiska.



Figur 6.2:

Det kan underlätta modellbeskrivningen av stödmönstret om man antar att det finns ett system i stödmönstrets uppbyggnad. Man kan exempelvis anpassa de från optimeringen erhållna värden på antal stöd per ring till ett polynom. Avståndet mellan två kvadrater kan behandlas på samma sätt. Detta förfarande kommer att användas senare i rapporten.



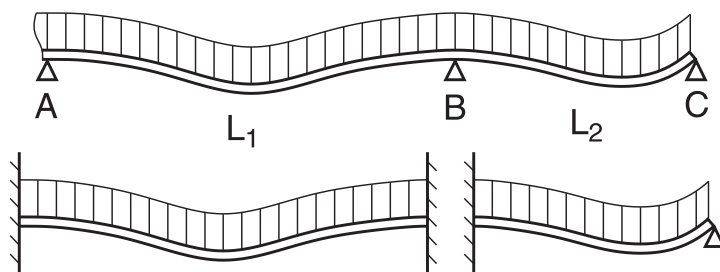
Figur 6.3:

6.3 Stöd nära spegelkanten

Eftersom spegelns kant är momentfritt upplagd kommer nedböjningen mellan de två yttre stödraderna att vara större än mellan stöd som ligger längre in på spegeln. Särskilt i det cirkulära stödmönsteralternativet är detta lätt att kompensera för, och det görs efter följande resonemang:

Om man ser spegelns kontur som en skiva upplagd enligt övre delen av figur 6.4 och sätter som krav att balkens lutning över stöd A och B ska vara noll, kan fallet delas upp i elementarfall enligt nedre delen av figur 6.4. Dessa är kända från litteraturen.

Eftersom C_0 -kontinuitet ska råda för momentet, gäller att momentet i



Figur 6.4: Nedböjning vid spegelkant

infästningen för de båda fallen ska vara lika. Tabeller ger uttrycken för momenten, och ekvation 6.1 kan nu ställas upp:

$$\frac{qL_1^2}{12} - \frac{qL_2^2}{8} = 0 \quad (6.1)$$

Denna ekvation ger förhållandet mellan L_1 och L_2 som $L_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}L_2$. Det kan visas att nedböjningen mellan de två yttersta stöden blir mindre än mellan de nästkommande.

6.4 Analytisk modell

Den analytiska modellen har gett en sannare bild av utböjningen och dessutom storleken på stödkrafterna. Den approximativa optimeringen från tidigare kapitel torde vara så god att endast smärre justeringar av upplagsmönstret behöver göras.

6.5 Optimering utifrån parameterstudie med hjälp av FEM

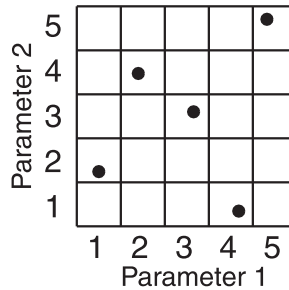
För att ta hänsyn till spegelns paraboliska form kan finita elementmodellering användas. Resultaten från avsnitt 6.2 kan användas som utgångspunkt vid förbättringen av stödmönstret.

Inom produktdesign används ibland ett stokastiskt angreppssätt, och med hjälp av detta kan de flesta egenskaper beskrivas.

För att utföra en stokastisk parameterstudie används Monte Carlo-metoden som genererar n slumpstal för varje variabel. Antalet stokastiska variabler betecknas k . Slumptalen genereras från en likformig fördelning med ett max- och minvärde för varje variabel. Slumptalen lagras i en matris av storleken $n \times k$. För att garantera slumpstälens spridning över intervallet används

Latinska hyperkuber. Denna metod delar in parameterintervallet i n delar och genererar ett värde från varje område. Ett exempel med två parametrar och fem uppsättningar presenteras i figur 6.5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$



Figur 6.5: *Latinsk hyperkub* för två parametrar och fem uppsättningar. 5×2 -matrisen visas till vänster och dess grafiska motsvarighet till höger.

Denna metod kommer i senare kapitel att användas för att ta fram kombinationen av parametrar till parameterstudien.

6.6 Slutoptimering med hjälp av funktionsanpassning

Efter att med hjälp av FEM ha analyserat spegelns nedböjning vid olika stödmönster kan en funktion som beskriver spegelns deformation som funktion av stödmönstrets utseende tas fram. Ett krav är då att stödmönstret enkelt kan beskrivas med inte alltför många parametrar. Funktionen kan erhållas genom exempelvis anpassning med minsta kvadrat-metoden, och funktionen i sig kan vara en polynomfunktion. Eftersom optimeringen eftersträvar att minimera antalet stöd måste då även antalet stöd kunna beskrivas utifrån samma parametrar.

Själva slutoptimeringen utföres som en parameterstudie av den framtagna funktionen, eventuellt med intervallhalvering.

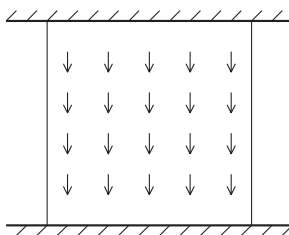
Kapitel 7

Lateralt stödsystem

Det laterala stödsystemet ska hålla spegeln på plats, så att den cirkulära konturen bibehålls. I detta kapitel utförs en mycket allmän studie av detta stödsystem.

7.1 Analytisk endimensionell modell

Den grävsta approximation som kan göras av det laterala spegelupphängningsfallet är att approximera spegeln som en plan kvadratisk skiva inspänd längs två av sidorna och påverkad av kroppskrafter i skivans plan på grund av egentynghet, enligt figur 7.1. Deformation antas bara ske i gravitationsriktningen, vilket är en approximation.



Figur 7.1: Inspänd skiva

Differentialekvationen som beskriver förskjutningarna i skivan kan skrivas som i ekvation 7.1.

$$\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + b = 0 \quad (7.1)$$

Ansatsen för utböjningsformen antas som ekvation 7.2.

$$u = C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \quad (7.2)$$

Med randvillkor enligt ekvation 7.3 samt uttryck för kroppskraften b enligt ekvation 7.4 kan differentialekvationen 7.1 lösas:

$$u_{x=0} = u_{x=l} = 0 \quad (7.3)$$

$$b = \rho g A \quad (7.4)$$

Utböjningsformen blir enligt ekvation 7.5.

$$u = -\frac{\rho g}{2E} (x^2 - lx) \quad (7.5)$$

Spänningen i spegeln är av intresse att studera och erhålles från ekvation 7.5 med Hookes lag:

$$\sigma = \frac{du}{dx} E \quad (7.6)$$

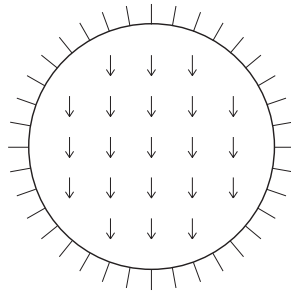
Spänningen i skivan kommer nu att variera enligt ekvation 7.7:

$$\sigma = \frac{\rho g}{2E} (l - 2x) \quad (7.7)$$

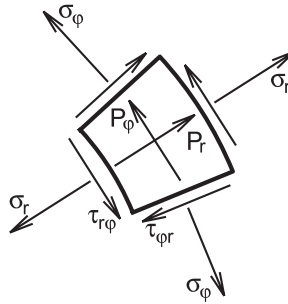
De högsta spänningarna uppkommer uppenbarligen vid infästningarna, och de största deformationerna sker längs en linje vid skivans halva höjd. Man kan förmodligen vänta sig en liknande spännings och deformationsbild i kommande mindre approximativa modeller.

7.2 Analytisk tvådimensionell modell

I den tvådimensionella analytiska modellen approximeras spegeln som en plan cirkulär skiva fast inspänd längs sin ytterkant enligt figur 7.2.



Figur 7.2: Inspänd skiva



Figur 7.3: Volymselement i cylinderkoordinatsystem.

Ett volymselement i ett cylinderkoordinatsystem (r, ϕ, z) betraktas. Volymselementet utsätts för plant spänningstillstånd enligt figur 7.3.

Jämviktsekvationer med gränsovergång ger ekvationerna 7.8 och 7.9:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} - \rho \cos \phi = 0 \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} + 2 \frac{\tau_{r\phi}}{r} - \rho \sin \phi = 0 \quad (7.9)$$

Kroppskrafterna P_ϕ och P_r motsvarar egentyngden. Dessa ekvationer löses med fördel med numeriska metoder, med randvillkor definierade utifrån kantstödens konstruktion.

Någon vidare analys har ej gjorts i detta arbete eftersom de randvillkor som krävs för att lösa dessa ekvationer beror på kantstödens konstruktion.

Del II

Optimering av stödsystem för ett 50m teleskop

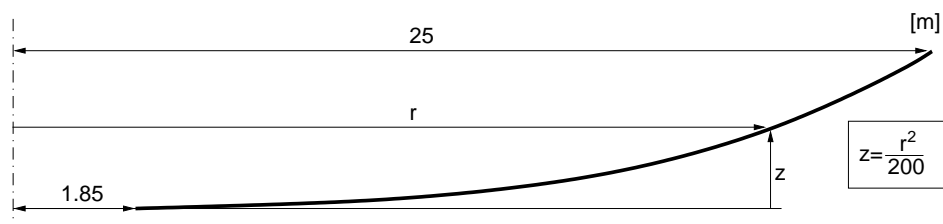
Kapitel 8

Planerat 50m teleskop

Astronomiska institutionen i Lund har sedan en tid tillbaka forskat kring ett optiskt teleskop med extremt stor primärspiegel. Vi kommer därför att testa våra optimeringsalgoritmer på en modell av denna. I detta kapitel beskrivs denna modell.

8.1 Spegelmodell

Spegeln som de praktiska beräkningarna är utförda på har mått enligt figur 8.1. Spegeln har en parabolisk form och ett hål i centrum. Tre olika spgeltjocklekar är analyserade: 20, 50 och 100 *mm*.



Figur 8.1: Spegelgeometri

8.2 Materialparametrar

Spegeln kommer att tillverkas i glas med låg värmeutvidgningskoefficient, så kallat *Ultra Low Expansion Titanium Silicates Glass – ULE*. Följande data är erhållna från den amerikanska glastillverkaren Corning:

Termisk utvidgningskoefficient $5 - 35^\circ C$	α	$< 10^{-9} K^{-1}$
Densitet	ρ	2210 kg/m ³
Elasticitetsmodul	E	67,6 GPa
Skjuvmodul	G	29,0 GPa
Poissons tal	ν	0,17

Tabell 8.1: Materialparametrar, ULE

8.3 Dimensioneringskriterier

Vid stödmönsteroptimeringen kommer en maximal nedböjning på 20 nm att tillåtas. Mönstret kommer att vara uppbyggt av cirklar, vilket motiveras utifrån konstruktions- och reglertekniska aspekter.

Kapitel 9

Förenklad optimering

I detta kapitel utföres en förenklad optimering av stödmönstret för tre olika spegeltjocklekar enligt metoder beskrivna i kapitel 6. Ett stödmönster bestående av cirklar har valts, eftersom detta är lättast att beskriva med fria parametrar och lättast att optimera efter. Resultaten av optimeringen redovisas i diagram, som i senare kapitel kan jämföras med mer komplexa finita element-modeller.

9.1 Tillvägagångssätt

Metoden i kapitel 6 är relativt allmänt beskriven, och därför beskrivs denna algoritm i detalj nedan:

- Framtagning av riktvärde enligt avsnitt 9.1.1
- *aktuell_radie* = spegelns innerradie
- Upprepa tills *aktuell_radie* är större än spegelns ytterradie
 - Beräkna *nästkommande_radie* samt *nästkommande_antalstöd* med rutinen *radieoptimering* i avsnitt 9.1.2
 - Lagra information om radien och antal stöd i nästkommande cirkel
 - *aktuell_radie* = *nästkommande_radie*
- Redovisa beräknat stödmönster

9.1.1 Framtagning av riktvärde

Framtagning av riktvärde innebär i detta fall att bestämma det största triangelement som är godtagbart ur nedböjningssynpunkt. Triangelementet antas vara liksidigt, och förfarandet följer schemat nedan:

- $sid_hög = spegelradie, sid_låg = 0$
- Upprepa tills $(sid_hög - sid_låg) / sid_mitt$ är mindre än önskad noggrannhet
 - $sid_mitt = (sid_hög + sid_låg) / 2$
 - Beräkna triangelns maxnedböjning för sidlängden sid_mitt
 - Om nedböjningen är mindre än tillåtet gäller att $sid_låg = sid_mitt$
 - Om nedböjningen är större än tillåtet gäller att $sid_hög = sid_mitt$
- Redovisa $sidlängd$ som sid_mitt

Variabeln $sidlängd$ tjänar nu som ett ungefärligt mått på avstånden mellan ringar och stöd.

9.1.2 Radieoptimering

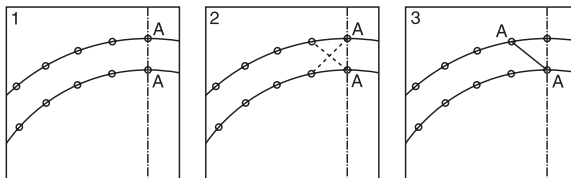
Om antalet stöd på en viss radie är given söks radien för nästa ring samt antalet stöd i denna. Det görs genom att optimera den sökta radien och det sökta antalet stöd så att så låg stöddensitet som möjligt erhålles. Med stöddensitet menas antal stöd per ytenhet. Optimeringen görs utifrån två variabler, (avstånd till nästkommande ring samt antal stöd på denna ring), vilket ger en något mer komplex algoritm än framtagningen av riktvärdet. Följande tillvägagångssätt har använts:

- Antal stöd samt stödringens radie är känt för inre ring, $antal_stöd$ och $radie_inner$
- Antal stöd för nästföljande ring antas vara lika många ($antal_stöd = antal_stöd_senast$)
- Upprepa tills stöddensiteten når ett minimum
 - $radie_låg = radie_inner$ samt $radie_hög = radie_inner + 2 \cdot sidlängd$
 - Upprepa tills $(radie_hög - radie_låg) / (radie_mitt - radie_inner)$ är mindre än önskad noggrannhet
 - * $radie_mitt = (radie_hög + radie_låg) / 2$
 - * Dela in området mellan cirklarna i trianglar (se avsnitt 9.1.3).
 - * Beräkna den maximala nedböjningen hos dessa trianglar
 - * Om nedböjningen är större än tillåtet gäller att:
 $radie_hög = radie_mitt$
 - * Om nedböjningen är mindre än tillåtet gäller att:
 $radie_låg = radie_mitt$
 - Beräkna ett mått på stöddensiteten som
 $stöddensitet = antal_stöd / (radie_mitt^2 - radie_inner^2)$
 - $antal_stöd = antal_stöd + 1$
- Presentera nästföljande rings radie som $nästkommande_radie = radie_mitt$ samt antal stöd på denna som $nästkommande_antal_stöd = antal_stöd$

9.1.3 Triangelindelning

Trianguleringen av området mellan de två aktuella ringarna sker genom stegning från en radie på vilken det ligger ett stöd från varje ring. Trianguleringsalgoritmen strävar efter att få så korta triangelsidor som möjligt och illustreras här med schema och bild:

- Aktuellt stöd på innering och ytterring definieras som de två stöd som ligger på den gemensamma radien (märkta med A i figur 9.1 ruta 1).
- Upprepa tills ett halvt varv stegats igenom.
 - Sträckan mellan de aktuella stöden på innerradien och ytterradien definieras som den första av triangelns sidor.
 - Avståndet mellan aktuellt stöd på innerradien och nästkommande stöd på ytterradien (*diagonal_ytter*), samt motsvarande sträcka från ytterradien till innerradien (*diagonal_inner*) beräknas (streckade linjer i figur 9.1 ruta 2).
 - Om *diagonal_ytter* är större än *diagonal_inner* flyttas det aktuella stödet på ytterradien fram ett steg, och sträckan den flyttas fram definieras som triangelns andra sida (som i figur 9.1 ruta 3).
 - Om *diagonal_inner* är större än *diagonal_ytter* flyttas det aktuella stödet på innerradien fram ett steg, och sträckan den flyttas definieras som en av triangelns sidor.
 - Den kortaste av sträckorna *diagonal_inner* och *diagonal_ytter* definieras som den sista av triangelns sidor.
 - Information om triangelns sidor lagras
- Trianglarnas sidor redovisas



Figur 9.1: Triangulering

9.2 Aktuellt optimeringsfall

Optimeringsprogramet är skrivet i Matlab. Den lokala nedböjningen har beräknats med hjälp av FE-teori från kapitel 3.3. Efter att ha bestämt de olika stödcirkelnas radier samt antalet stöd på dessa har stödmönstrets uppbyggnad anpassats till två andragsgradspolynom med minsta kvadrat-metoden. Dessa två andragsgradspolynom beskriver avståndet mellan två intilliggande stöd på en ring som funktion av radien samt avståndet från en ring till nästkommande utanförliggande ring som funktion av radien. Med beteckningar enligt figur 9.2 får ekvationerna utseendet:

$$\Delta_r = c_{0r} + c_{1r}r + c_{2r}r^2 \quad \Delta_t = c_{0t} + c_{1t}r + c_{2t}r^2 \quad (9.1)$$

Kurvanpassningen med minsta kvadrat-metoden görs i matrisform. Anpassning av andragsgradspolynom görs med utgång från följande definitioner:

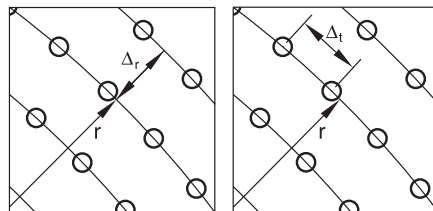
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 \\ 1 & r_2 & r_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & r_m & r_m^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

Matrisen \mathbf{A} skapas utifrån värden på de radier där de beräknade stödringarna befinner sig, \mathbf{f} innehåller avstånden mellan ringarna (alternativt mellan stöden enligt tidigare) och \mathbf{c} innehåller konstanterna i de sökta andragsgradspolynomen. Värden på konstanterna i \mathbf{c} fås genom att lösa matrisekvationen

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{A}^T \mathbf{f} \quad (9.3)$$

vilket ger vektorn \mathbf{c} som

$$\mathbf{c} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{f} \quad (9.4)$$



Figur 9.2:

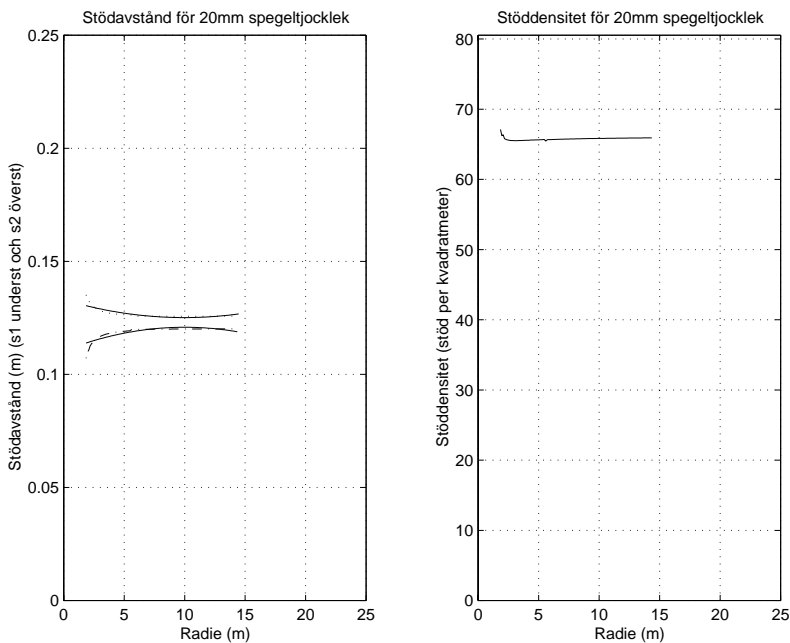
9.2.1 Optimering utifrån lokal FE-modell

För de tre olika spegeltjocklekar som har analyserats fås resultaten efter optimering och kurvanpassning enligt diagram i figurerna 9.3 – 9.5. I de högra diagrammen redovisas stöddensiteten som funktion av radien. Analyserna har avslutats då konvergens erhållits. Polynomkonstanterna är inte alla av intresse, eftersom dessa optimeringsalgoritmer inte tar hänsyn till spegelns paraboliska form. Endast konstanterna c_{r0} och c_{t0} är därmed användbara vid vidare studier. Och de har beräknats till:

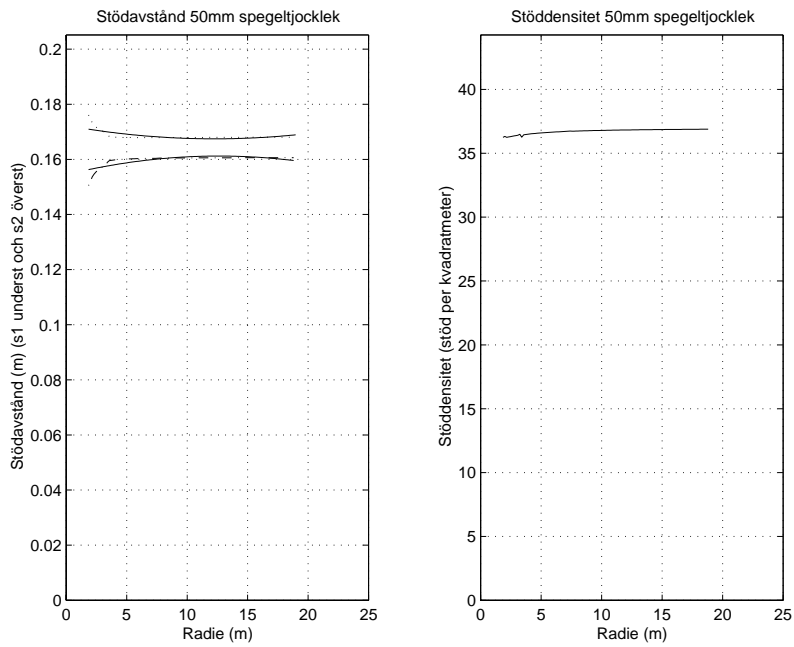
	c_{r0}	c_{t0}
100mm	0,175	0,1951
50	0,1544	0,1723
20	0,1104	0,1330

Tabell 9.1: Polynomkonstanter

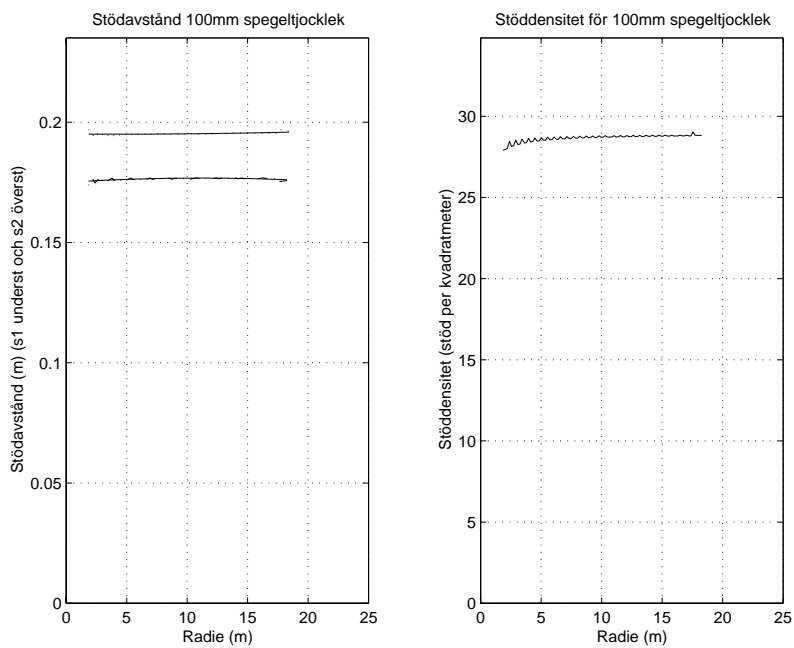
Resultaten från denna optimering ska tjäna som indata till ytterligare optimering. Det är då bara konstanterna i tabell 9.1 som är av intresse.



Figur 9.3: Stöдавstånd och stöద్дensitet för 20 mm spegeltjocklek



Figur 9.4: Stödavstånd och stöddensitet för 50 mm spegeltjocklek



Figur 9.5: Stödavstånd och stöddensitet för 100 mm spegeltjocklek

Kapitel 10

Optimering utifrån global FE-modell

I den förenklade optimeringen i kapitel 9, betraktas spegeln som plan. För att ta hänsyn till den paraboliska formen görs i detta kapitel en stokastisk parameterstudie på en tredimensionell FE-modell.

10.1 Parametrarna

De två funktionerna beskrivna i kapitel 9.2

$$\Delta_r = c_{0r} + c_{1r}r + c_{2r}r^2 \quad \Delta_t = c_{0t} + c_{1t}r + c_{2t}r^2 \quad (10.1)$$

beskriver spegelns stödmönster. De sex stokastiska parametrarna c_{0r} , c_{1r} , c_{2r} , c_{0t} , c_{1t} och c_{2t} antas vid denna parameterstudie ha en likformig fördelning. De två parametrarna c_{0r} och c_{0t} varieras inom ett cirka sex centimeter stort intervall, vars medelvärde bestäms av resultaten i kap 9. Resterande fyra parametrar motiveras av den paraboliska formen, och därför har deras variationsintervall satts godtyckligt. Intervallen kommer sedan att minska i den andra parameterstudien av två som kommer att göras. I den första parameterstudien läggs mindre vikt vid att använda de mest optimala intervallen, eftersom det är viktigare att alla potentiella lösningar kan upptäckas. För den första parameterstudien har intervall enligt tabell 10.1 använts, och för den andra enligt tabell 10.2.

Intervall	c_{0r}	c_{1r}	c_{2r}	c_{0t}	c_{1t}	c_{2t}
t=100mm, max	0.195	0.001	0.00005	0.225	0.001	0.00005
min	0.145	-0.001	-0.00005	0.175	-0.001	-0.00005
t=50mm, max	0.175	0.001	0.00005	0.207	0.001	0.00005
min	0.115	-0.001	-0.00005	0.147	-0.001	-0.00005
t=20mm, max	0.147	0.001	0.00005	0.170	0.001	0.00005
min	0.087	-0.001	-0.00005	0.100	-0.001	-0.00005

Tabell 10.1: Variationsintervall för parametrarna c_{0r} , c_{1r} , c_{2r} , c_{0t} , c_{1t} och c_{2t} i första parameterstudien.

10.2 Tillvägagångsätt

För de tre olika spegeltjocklekarna har samma beräkningsgång använts. FE-modellen är uppbyggd på det sätt som beskrivs för extremt stora speglar i kapitel 4.2.

- Monte Carlo-metoden genererar 50 uppsättningar av parametrarna c_{0r} , c_{1r} , c_{2r} , c_{0t} , c_{1t} och c_{2t} .
- För alla parameteruppsättningar görs följande:
 - Matlab beräknar stödens koordinater.
 - Triangle¹ beräknar koordinaterna för elementnätet.
 - Matlab skriver indatafilen till Nastran.
 - Nastran utför FEM-beräkningarna.
 - Förskjutningarna läses in i Matlab som genererar resultatdiagram och tabeller.

För att förfina stödmönstret har en andra optimerande parameterstudie gjorts. Genom att utvärdera den första parameterstudien och välja ut de analyser som har så få stöd som möjligt och en nedböjning nära 20 nm fås nya, mer optimala intervall för parametrarna i Monte Carlo-metoden. Sedan har ytterligare 50 körningar för varje tjocklek gjorts. Dessa analyser har utförts på samma sätt som första parameterstudien.

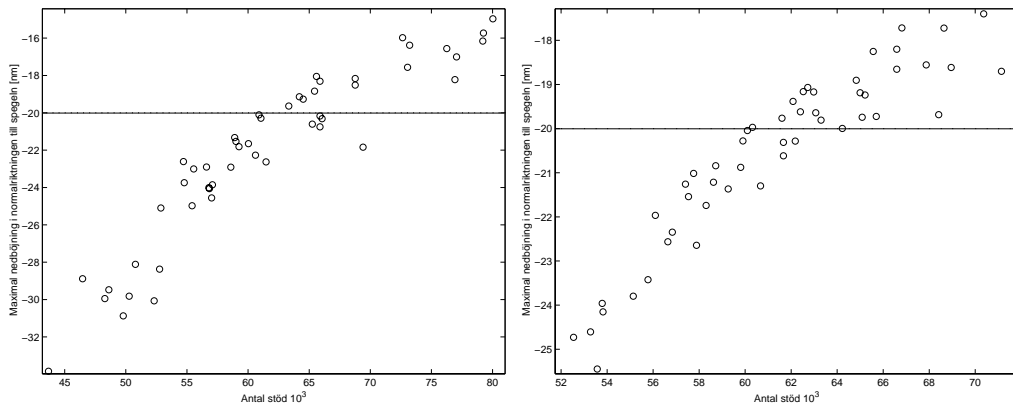
¹Triangle – trianguleringsprogram som använder sig av Delaunay triangulering.

Intervall	c_{0r}	c_{1r}	c_{2r}	c_{0t}	c_{1t}	c_{2t}
100mm, max	0.192	$5.8 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	0.199	$8.6 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$
100mm, min	0.169	$-6.4 \cdot 10^{-4}$	$-4.0 \cdot 10^{-5}$	0.184	$-8.3 \cdot 10^{-4}$	$-2.5 \cdot 10^{-5}$
50mm, max	0.172	$6.5 \cdot 10^{-4}$	$4.7 \cdot 10^{-5}$	0.206	$8.6 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$
50mm, min	0.130	$-6.8 \cdot 10^{-4}$	$-2.5 \cdot 10^{-5}$	0.167	$-9.4 \cdot 10^{-4}$	$-4.2 \cdot 10^{-5}$
20mm, max	0.128	$8.2 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-5}$	0.131	$5.9 \cdot 10^{-4}$	$1.7 \cdot 10^{-5}$
20mm, min	0.114	$-4.3 \cdot 10^{-4}$	$-3.1 \cdot 10^{-5}$	0.113	$-4.1 \cdot 10^{-4}$	$-3.9 \cdot 10^{-5}$

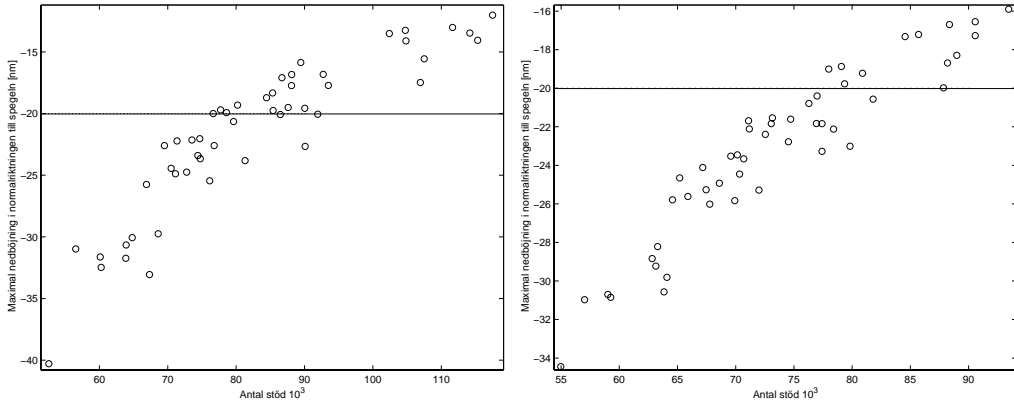
Tabell 10.2: Variationsintervall för parametrarna c_{0r} , c_{1r} , c_{2r} , c_{0t} , c_{1t} och c_{2t} i andra parameterstudien.

10.3 Resultat

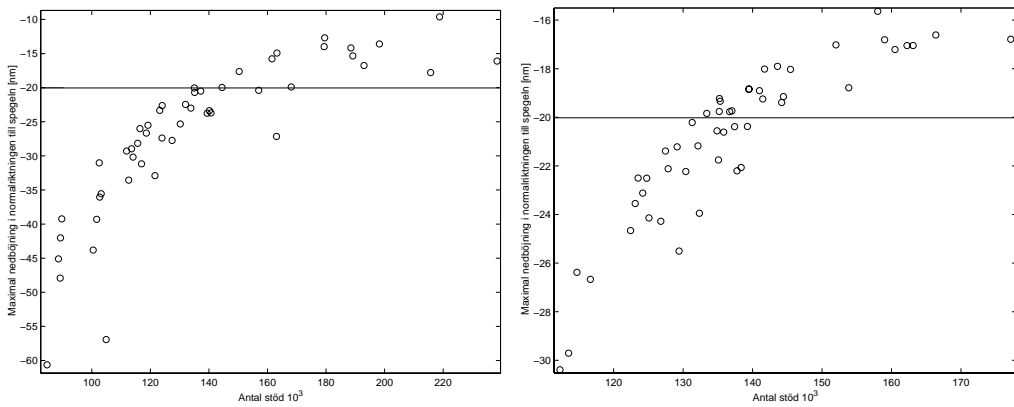
Resultaten av analyserna finns presenterade i figur 10.1 – 10.3 där den horisontella axeln visar antal stöd och den vertikala axeln visar maximal nedböjning i spegelytans normalriktning. Varje ring motsvarar en parameteruppsättning eller en analys. Då målet är att finna en spegel med så få stöd som möjligt med villkoret att maximal nedböjning i normalriktningen ej understiger -20 nm är det önskvärt att hamna långt till vänster och över -20 nm i diagrammen.



Figur 10.1: Analys 1-50, 100mm, första parameterstudien till höger och andra till vänster.



Figur 10.2: Analys 1-50, 50mm, första parameterstudien till höger och andra till vänster.



Figur 10.3: Analys 1-50, 20mm, första parameterstudien till höger och andra till vänster.

Kapitel 11

Slutoptimering med hjälp av funktionsanpassning

För att hitta en optimal kombination av stödparametrar görs i detta kapitel ett försök att finna ett empiriskt samband mellan nedböjning och de parametrar som beskriver stödmönstret. En parameterstudie av det empiriska sambandet görs sedan, vilket förhoppningsvis resulterar i ett optimalt stödmönster.

11.1 Funktionsansats

Det empiriska sambandet mellan maximal nedböjning och de sex stödmönsterparametrarna har beskrivits med en polynomfunktion enligt:

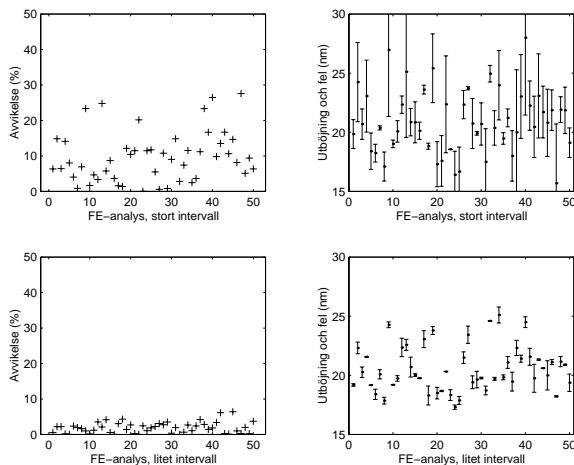
$$\begin{aligned} \delta_{max,approx} = & k_0 + k_1c_{0r} + k_2c_{1r} + k_3c_{2r} + k_4c_{0t} + k_5c_{1t} + k_6c_{2t} + \\ & + k_7c_{0r}^2 + k_8c_{1r}^2 + k_9c_{2r}^2 + k_{10}c_{0t}^2 + k_{11}c_{1t}^2 + k_{12}c_{2t}^2 \end{aligned} \quad (11.1)$$

Funktionsanpassningen görs med hjälp av minsta kvadrat-metoden, vilket innebär en minimering av

$$\sum_{n=1}^m (\delta_{max,approx} - \delta_{max,FEM})^2 \quad (11.2)$$

med avseende på parametrarna $k_0 \dots k_{12}$, där m är antalet FE-beräkningar. Minimeringen utföres enklast med hjälp av numeriska metoder, vilket i denna studie har gjorts i analysprogrammet *Maple*. Kvaliteten på funktionsanpassningen kan bedömas utifrån figur 11.1, där den procentuella skillnaden mellan maximal nedböjning beräknad med FE-analys och maximal nedböjning erhållen från den approximerade funktionen har plottats till

vänster. I samma bild är utböjningen och det absoluta felet plottade till höger. De övre diagrammen i varje bild motsvarar första parameterstudien för respektive spegeltjocklek och de nedre den andra parameterstudien.



Figur 11.1: Funktionsanpassning av värden från FE-analys av 100 mm spegeltjocklek

Diagrammen 11.1 - 11.3 visar tydligt hur den approximerande funktionens överensstämmelse med resultaten från FE-analyserna ökar vid minskade intervall för stödmönsterparametrarna. Eftersom parametrarna c_{0r} - c_{2r} samt c_{0t} - c_{2t} är har en statistiskt sett god spridning, kan en parameterstudie som bygger på den approximerande funktionen väntas ge avvikelser i samma storleksordning.

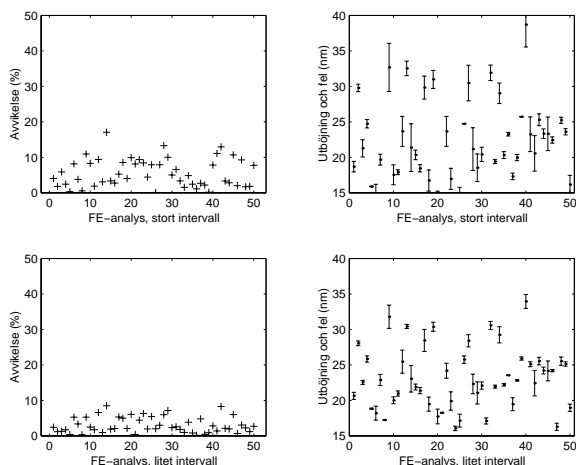
11.2 Parameterstudie

När den approximativa nedböjningsfunktionen har tagits fram kan parameterstudien genomföras. Intervallen inom vilka stödmönsterparametrarna varierar bestäms utifrån resultaten från FE-analyserna.

En reducering av antalet parametrar kan göras med hjälp av bivilkoret att maximal nedböjning ska vara lika med 20 nm. Därmed reduceras antalet stödmönsterparametrar från sex till fem. Reduceringen bör göras av antingen c_{0r} eller c_{0t} , eftersom de har störst inverkan på nedböjningen.

I detta fall har c_{0r} eliminerats, vilket leder till ett uttryck för c_{0r} :

$$c_{0r} = -\frac{1}{2k_7} \left(2k_1 + \left(\frac{k_1^2}{4} - k_7(k_0 + k_2c_{1r} + k_3c_{2r} + k_4c_{0t} + k_5c_{1t} + \right. \right.$$



Figur 11.2: Funktionsanpassning av värden från FE-analys av 50 mm spegeltjocklek

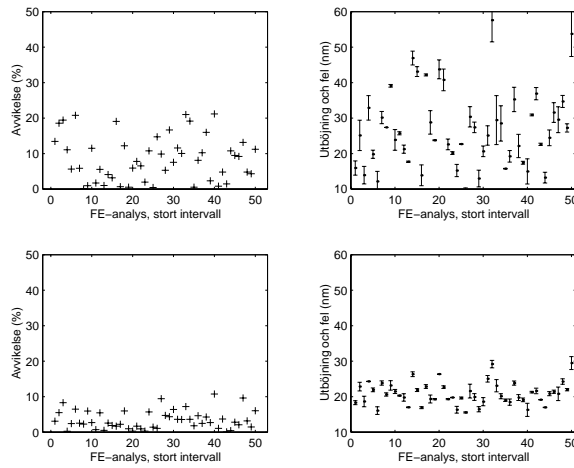
$$\left. + k_6 c_{2t} + k_8 c_{1r}^2 + k_9 c_{2r}^2 + k_{10} c_{0t}^2 + k_{11} c_{1t}^2 + k_{12} c_{2t}^2 - \delta_{max} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11.3)$$

Denna substitution medför att alla val av resterande parametrar ger en maximal nedböjning enligt ekvation 11.1 på δ_{max} . Detta är inte rimligt, varför en viss försiktighet bör iakttas vid val av intervall för parameterstudien.

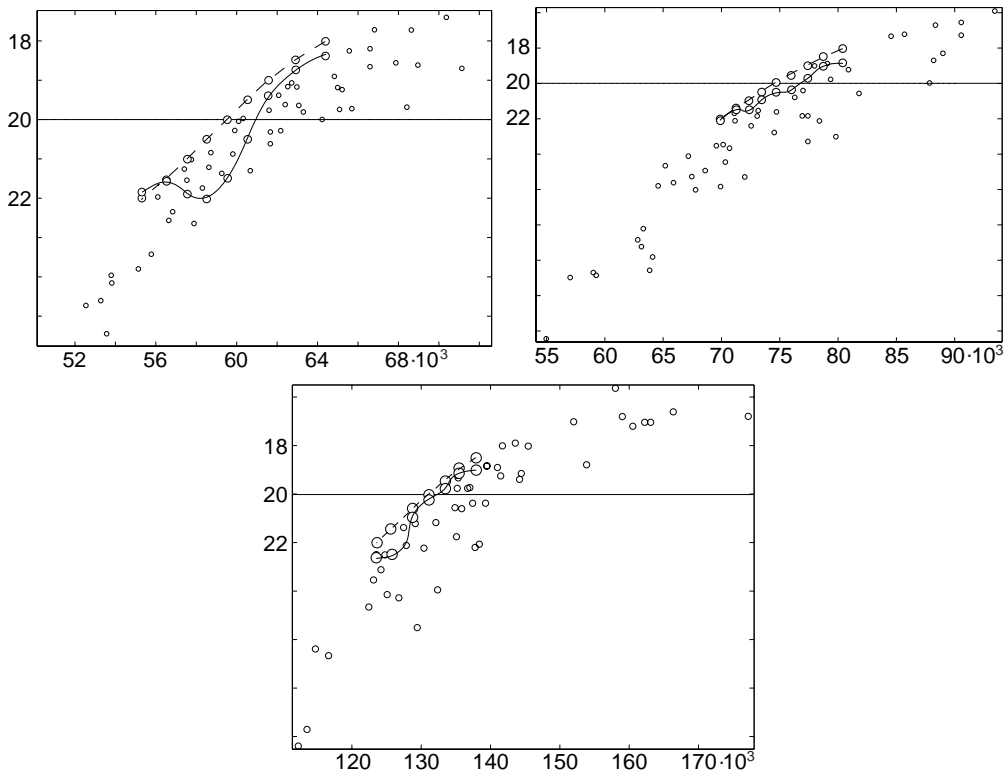
11.3 Resultat

För de tre fallen som studerats sker en förbättring av stödmönstret endast för spegeltjocklekarna 20 och 50 mm. Detta beror sannolikt på den goda noggrannhet som erhållits genom att två omgångar FE-beräkningar har utförts inom minskande intervall, samt den begränsade förmågan hos ekvation 11.1 att beskriva sambandet mellan maximal nedböjning och stödmönsterparametrarna. I figur 11.4 nedan har de optimerade lösningarna för de tre spegeltjocklekarna ritats in tillsammans med FE-analyserna. De streckade linjerna beskriver resultaten från parameterstudien utifrån den approximativa funktionen, och de heldragna linjerna den nedböjning som erhålls med FE-analys med stödmönster beskrivet av samma parametrar.

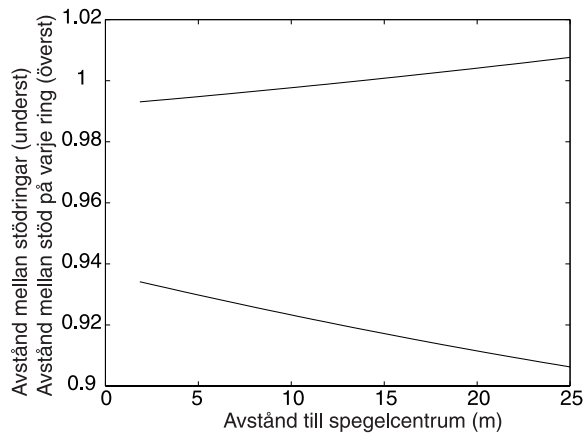
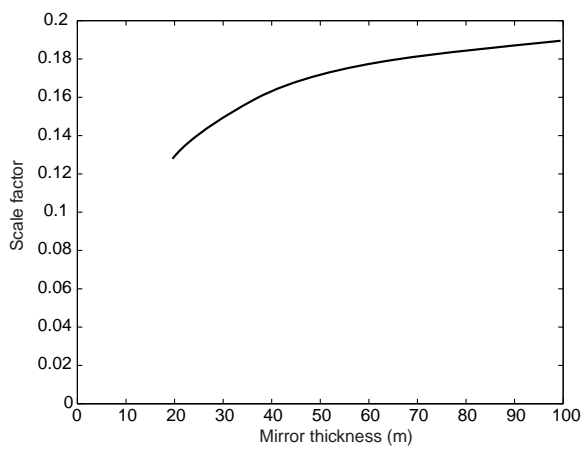
Optimeringen ger stödmönster med minimerat antal stöd. Stödmönsterfunktionerna får samma utseende för de tre spegeltjocklekarna, men med olika skalor på y-axeln.



Figur 11.3: Funktionsanpassning av värden från FE-analys av 20 mm spegeltjocklek



Figur 11.4: Resultat från parameterstudie

Figur 11.5: Optimala funktioner, Δ_t överst och Δ_r underst

Figur 11.6: Skalfaktor för olika spegeltjocklekar

Kapitel 12

Analytisk modell

I detta kapitel demonstreras den analytiska deformationsmodellen som beskrivs i kapitel 4. Modellen är, trots sin analytiska natur, svårhanterad. Numeriska problem uppstår när de i nedböjningsformlerna förekommande konstanterna ska beräknas, vilket innebär att endast de första konstanterna i den oändligt långa serien kan bestämmas. Detta betyder i sin tur att endast modeller med ett begränsat antal stöd kan analyseras. För att visa att modellen trots detta är användbar har nedböjningsberäkningar genomförts för en modell med ett reducerat antal stöd.

12.1 Praktiska begränsningar och användbarhet

Den i avsnitt 4.1 beskrivna nedböjningsformeln är uppbyggd som en oändligt lång serie. I detta kapitel beskrivs deformationer med de första femtio termerna, vilket begränsar det antal stöd som kan innefattas i modellen. Det maximala antalet stöd per ring som kan beskrivas visar sig sammanfalla med seriens längd. Den bakomliggande anledningen till begränsningen av serien är datorers bristande noggrannhet vid beräkning av differenser mellan stora tal, där differensen är mycket mindre än de subtraherade talen. Sådana subtraktioner förekommer vid beräkning av konstanter då nedböjningsformelns serielängd ökas.

Den analytiska modellen är trots sina begränsningar användbar. Den kan exempelvis användas för utvärdering av olika stödmönsters egenskaper, och vid studier av nedböjning vid inner- och ytterradien.

12.2 Förfarande

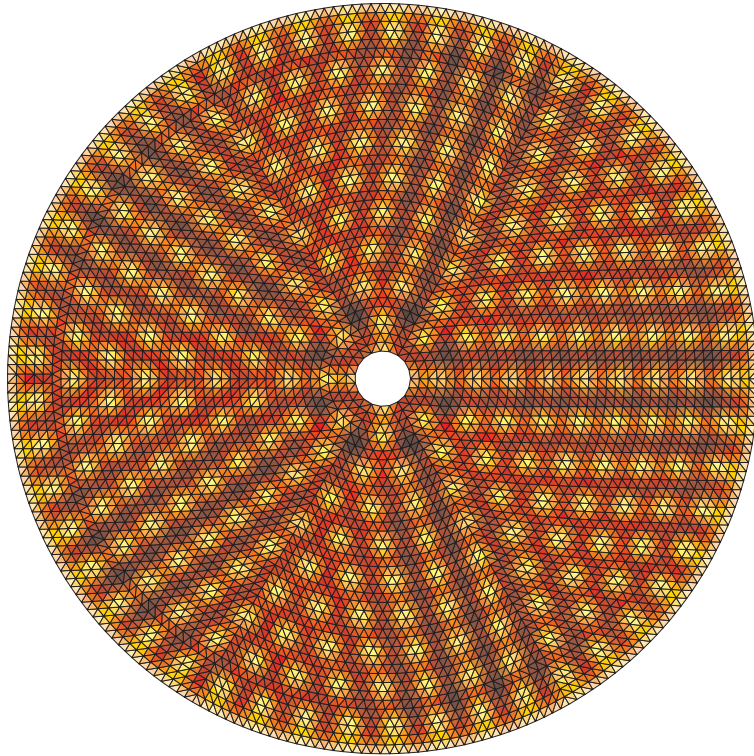
Nedböjningsanalyser har gjorts genom implementering av ekvationer i Matlab. Programmet beräknar nedböjningen i ett så stort antal punkter att en användbar nedböjningsbild kan skapas. Den principiella uppbyggnaden av programmet beskrivs av nedanstående schema:

- Beräkning av stödmönster utifrån konstanter erhållna efter optimering beskriven i kapitel 9 (stödcirkelradier och antal stöd i dessa cirklar).
- Beräkning av konstanter i nedböjningsekvation (A_0, A_1 osv) för de olika stödradierna.
- Beräkning av influensmatris \mathbf{A} i ekvation 4.15.
- Beräkning av nedböjningsvektor \mathbf{G} i ekvation 4.15.
- Lösning av ekvation 4.15 och erhållande av stödkrafter i form av vektorn \mathbf{P} .
- Beräkning av nedböjning orsakad av spegelns egentyngd i ett antal utvalda punkter, då den är fritt upplagd längs ytterkanten enligt figur 4.2
- Beräkning av stödkrafternas uppböjning av spegeln i de utvalda punkterna.
- Grafisk redovisning av den sammanlagda deformationen.

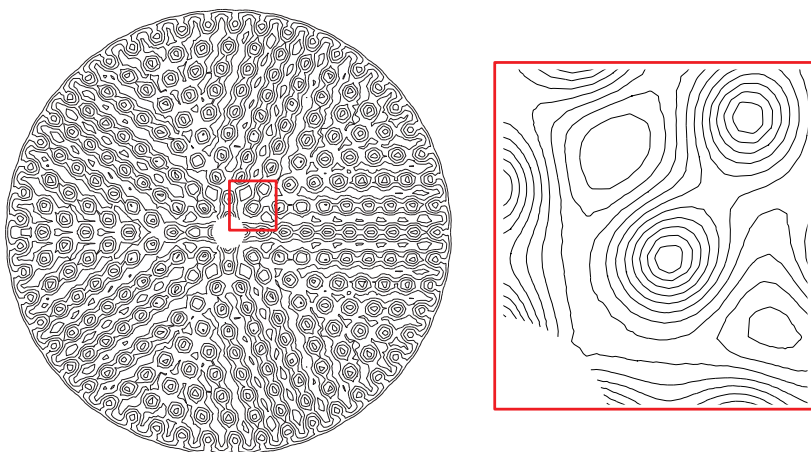
12.3 Aktuellt fall

Då antalet termer i nedböjningsekvationen överstiger 50 uppkommer numeriska problem. Eftersom antalet stöd per ring då är begränsat till femtio, kan en modellering av det aktuella stödmönstret inte genomföras. Stödmönstret har därför skalats upp så mycket att analysen kan genomföras. Nedan visas deformationsbilder av spegeln med parametrarna beskrivna i ekvation 9.1 som $c_{0r} = 2.4 \text{ m}$ och $c_{0t} = 3 \text{ m}$. På bilderna kan brister i mönstrets uppbyggnad lätt upptäckas, och rättas till innan mer tidskrävande FE-analyser utförs.

En fördel med analytiska modeller är att man lätt kan detaljstudera begränsade områden när nedböjningsformlerna väl är bestämda. Detta exemplifieras i figur 12.2, där ett område vid spegelns innerkant är förstorat.



Figur 12.1: Nedböjningsbild



Figur 12.2: Nedböjningskonturer

Litteraturförteckning

- [1] Kaufmann, W. J., *Universe*, 4th ed., W. H. Freeman and Company 1994.
- [2] Lindemann, J., *The Interactive Visualisation Framework - User's guide*, Division of Structural Mechanics, TVSM-3038, Lund University, 2000.
- [3] Olsson, A., *Modelling damage and stochastic properties in engineering structures*, Division of struktural mechanics, Lund Institute of Technology, 1999.
- [4] Ottosen, N. S. och Petersson, H., *Introduction to the finite element method*, Prentice Hall, 1992.
- [5] Timoshenko, S.P. och Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed. McGraw-Hill Book Company, New York. 1959.
- [6] Timoshenko, S.P. och Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, 3rd ed. McGraw-Hill Book Company, New York. 1934
- [7] *Formelsamling i hållfasthetslära*, 9:e uppl. Institutionen för hållfasthetslära, KTH, Stockholm. 1990.

Artikel

Vårt examensarbete fick internationell uppmärksamhet då en artikel som bygger på denna rapport blev antaget till en internationell konferens. Konferensen hölls i München, och var anordnad av SPIE, *the International Society for Optical Engineering*. Artikeln sammanfattar avsnitten som beskriver parameterbeskrivningen av stödmönstret, lokala och globala finita element-analyser, statistiska metoder för framtagning av parametervärden samt resultat från finita element-analyser.

Optimization of the Axial Support System for a Monolithic, 50 m Primary Mirror

Andreas Jilsmark, Hanna Johansson and Göran Sandberg

Structural Mechanics, Department of Mechanics and Materials, Lund University, Sweden

ABSTRACT

In this paper methods to optimize support systems for *Extremely Large Telescopes, ELT* with a thin monolithic main mirror are described. The method of optimization is based on a parametrical description of the support system pattern and a sensitivity analysis using a strategic version of the *Monte Carlo method* including theories of *Latin Hyper Cubes*. The procedure is also exemplified by analysing *the proposed Swedish 50 m monolithic Telescope* with different mirror thicknesses.

Keywords: Support system, Optimization, Monolithic mirror

1. INTRODUCTION

This article is to a large extent based on a Master thesis written at the Department of Structural Mechanics at Lund University. The authors have made a study of primary mirror deformation caused by the support system configuration, focusing on the axial system. The mirror is assumed to be a main mirror in an *ELT*, and thin enough to be used as optic correction in an adaptive optic system. The following problems are reviewed in the report:

- Deformation along the edge of the mirror caused by a linear load
- General study of lateral support systems
- Analytical modelling of mirrors
- Parametrical description of axial support systems
- Sensitivity analysis of parametrically described support systems
- Optimization of parametrically described support systems using the Finite Element method

The three latter ones are described briefly in this paper, and exemplified by studying *the proposed Swedish 50m monolithic mirror solution*.

2. PARAMETRICAL MODEL FOR THE SUPPORT SYSTEM PATTERN

The number of supports needed to get a thin monolithic mirror in an ELT to keep its parabolic shape with required accuracy is much larger than in the telescopes of today. When optimizing a support system, trying to minimise the number of supports, it is of great interest to reduce the number of parameters needed to describe the support system pattern. A well known reduction method is to let the supports form a *base pattern*. The geometry of the base pattern has an influence on the construction of other parts of the telescope, which should be kept in mind when choosing pattern. Patterns used in existing telescopes are exemplified in Figure 1.

In these patterns, the distance between the supports at each level is kept constant, which leads to another reduction of the number of parameters needed to fully describe the support system pattern. The pattern can now be fully described by the distance of each level from the mirror centre, and the number of supports at each level.

When designing smaller mirrors this reduction might result in a desirable number of parameters, and a sensitivity analysis can be made. The parametrical description of the support system of larger and thinner mirrors still contains

Further author information:

Send correspondence to Göran Sandberg; Email: goran@byggmek.lth.se

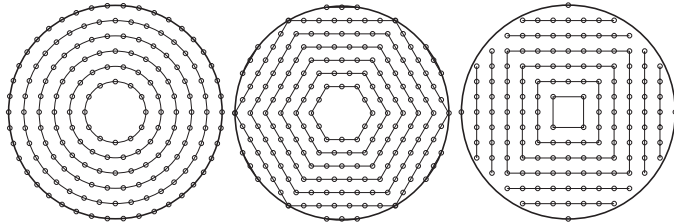


Figure 1. Base pattern

a large number of parameters, though, which in *the proposed Swedish 50 m monolithic Telescope* would mean up to 300. Although sensitivity analyses could now be performed, further reductions can be made. One way of doing so is by describing the distance between the levels and the distance between the supports at each level with a function of the distance to the mirror centre.

The basic pattern used in the present work has been described by circles, and the functions have been chosen to be second degree polynomials. These functions might look something like Equations 1 and 2.

$$\Delta_r = c_{0r} + c_{1r}r + c_{2r}r^2 \quad (1)$$

$$\Delta_t = c_{0t} + c_{1t}r + c_{2t}r^2 \quad (2)$$

The distances described by the functions are shown grafically in Figure 2. The functions are not supposed to describe the pattern near the edges of the mirror, why special attention has to be paid to these areas. The deformation at the edge of the mirror is also influenced by the construction of the lateral support system. These questions are not taken into account in the present study.

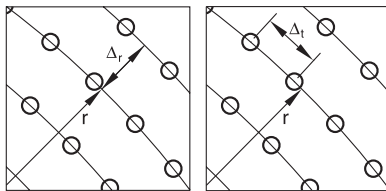


Figure 2.

3. LATIN HYPER CUBE SAMPLING FOR EFFICIENT PROBABILISTIC ANALYSIS

The Latin hypercube sampling plan was theoretically described in 1979 in a paper by McKay et al.² The desired accuracy in the estimated distribution function determines the required number of realizations. Let n denote the required number of realizations and k the number of uncertain parameters; the sampling space is then k -dimensional. The sampling plan is constructed as follows. For each of the k parameters, divide the outcome into n intervals with equal probability of occurrence and construct a column matrix with permutations of the integers $1, 2, \dots, n$. Note that two such columns can be identical. By putting the columns together, an $n \times k$ -matrix is obtained. Each row in that matrix defines a k -dimensional hypercube cell in the sampling space. Take one random realization from each such cell. For two input variables with a uniform (0,1) distribution and five simulations, a possible sampling plan is

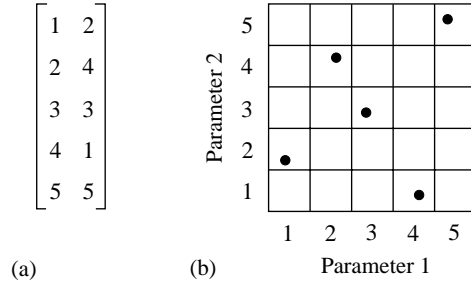


Figure 3.

shown in Figure 3. Note that the samples are spread over the entire sampling space as the generation of the Latin hypercube sampling plan requires one sample from each row and each column. If n samples from the entire sampling space had been chosen completely at random, there is a risk that they would form a cluster and some parts of the sample space would not be investigated, Figure 4. For sampling in higher dimensions than three it is not possible to visualize the sampling plan, but it is clear that n samples spread over the whole sampling space are obtained. A detailed description of several Latin hypercube approaches and an overview on alternative probabilistic methods are found in Olsson.³

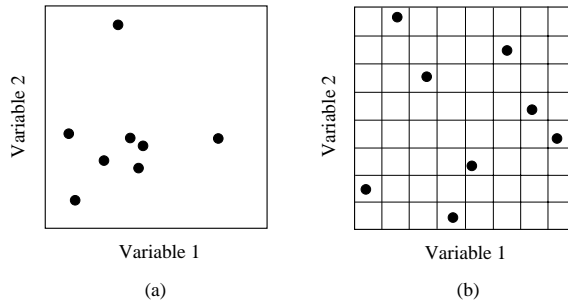


Figure 4.

4. FINITE ELEMENT-MODELS

4.1. Local Model

A local analysis has been performed to estimate the distance between the supports. The local analysis calculates the deformation in a triangular section of the mirror, where the corners of the triangle represent supports. The analysis has been performed with different mirror thicknesses, with material properties given by *ULE glass*. If the maximum deformation allowed is 20 nm , the maximum distance between the supports for different mirror thicknesses is shown in Figure 5. The same diagram also shows the mirror thickness needed when the maximum deformation allowed is 10 and 30 nm , respectively. In these special cases the three different triangle sides all have the same length.

The calculations have been made using a Finite Element Program, with nine-node *Thick Shell Elements* in the model. These elements take into account shear forces, which is necessary when analysing this kind of thick shells. This analysis gives a rough estimation of the distance between the supports, and can also be used to estimate the total number of supports needed for supporting a mirror. The distance between the supports has the same magnitude as C_{0r} and C_{0l} in the Equations 1 and 2.

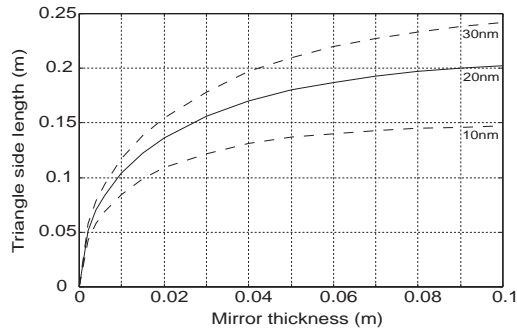


Figure 5.

It is obvious from Figure 5 that an increase in mirror thickness reduces the distance between supports, but that there is less gain above say $50mm$ for the $20nm$ target, though.

4.2. Global Model

The global Finite Element Model was modelled with three-node *Thick Shell Elements*. The boundary conditions along the edges are chosen to be symmetry lines so that extreme deformations along the edge of the mirror will be avoided. As mentioned earlier, these areas will have to be studied further, with account taken to the design of the lateral supports. The axial supports are modelled as deformation constraints at the nodes coinciding with support coordinates. The constraints allow node movement in the tangential directions, but not in directions perpendicular to the mirror surface as shown in Figure 6.

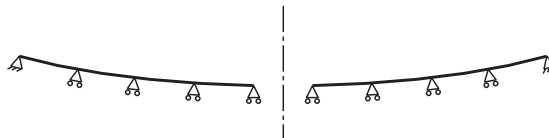


Figure 6.

When modelling large mirrors with a large number of support points, it might be necessary to analyse only part of the mirror. Thus, it seems natural to model a sector, which is given special boundary conditions as *Multipoint constraint* along its radial boundary. These boundary conditions need not be modelled as symmetry lines, hence they don't have to be straight lines.

4.3. Modelling information

The mirror analysis contains 400 000 nodes which means 2.4 million degrees of freedom.

The input file was generated using Matlab running on a Silicon Graphics Octane machine, and took about an hour for each mirror analysis.

The finite element calculations were performed using the LUNARC* computer, Sgi Origin 2000 – 100 processor machine with 24 GB memory. For each mirror analysis the Nastran used 2 GB RAM and about 2 CPU hours.

Problems mostly aroused when trying to visualise the results. The postprocessor Patran for example can not show models this large. With help from a specially written program,¹ we have been able to visualize the mirror in a deformed shape.

5. RESULTS FROM THE FINITE ELEMENT MODELLING

5.1. Sensitivity analysis

The purpose of the finite element analysis is to find a support system pattern that results in a low number of supports, without causing deformations larger than 20 nm. The analyses have been made with a number of different parameter values, for three different mirror thicknesses. The parameters have been generated using the *Monte Carlo method* complemented with *Latin hypercube sampling*, described in section 3, in chosen intervals. Since only values for two of the parameters could be estimated from the results in section 4.1, the other four parameters were allowed to vary in obviously too large intervals. Further analyses will then be made using smaller intervals, until required accuracy is obtained.

The first sensitivity analysis was made with large variations in the parameters, for three different mirror thicknesses – 20, 50 and 100 mm. By plotting the number of supports and the maximum deformation, interesting combinations of parameters can be derived. Analysing these parameter combinations gives better input to a second sensitivity analysis. The results from the first and the second sensitivity analyses are shown in Figure 7 – 9.

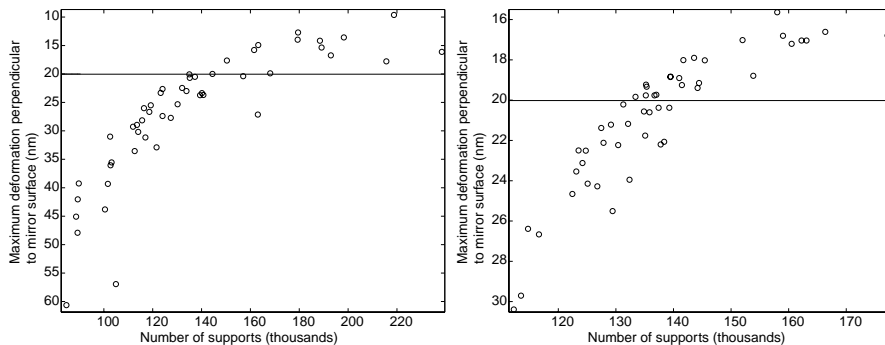


Figure 7. Sensitivity analysis for 20mm (first analysis to the left, and the second to the right).

Since we used the Latin hypercube sampling plan when deriving the input to the sensitivity analysis, we can expect that the best combinations of parameters from the sensitivity analyses are close to optimal.

5.2. Interpretation of results

From the results of the sensitivity analysis, it can be shown that the functions 1 and 2 describing the support system pattern are quite similar. Therefore, a general description of the optimal support system pattern can be made.

For the three mirror thicknesses analysed, the functions closest to the optimal solution are shown in Figure 10. To make comparison easier, the functions are standardized to the mean value of function 1.

*LUNARC is a center for scientific and technical computing in the areas of Computational Chemistry, Computational Mechanics, and Computational Physics at Lund University.

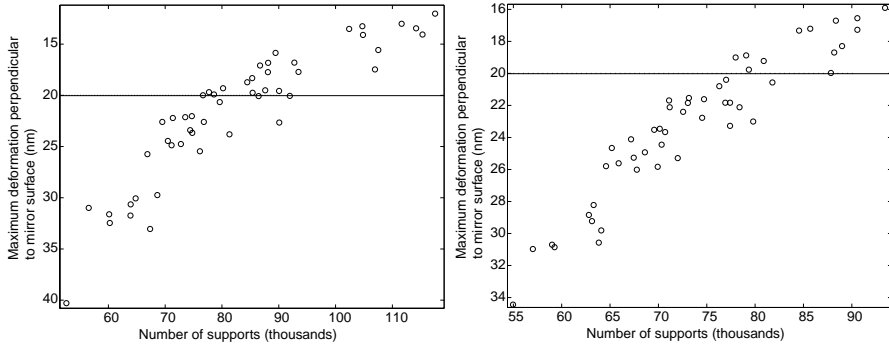


Figure 8. Sensitivity analysis for 50mm (first analysis to the left, and the second to the right).

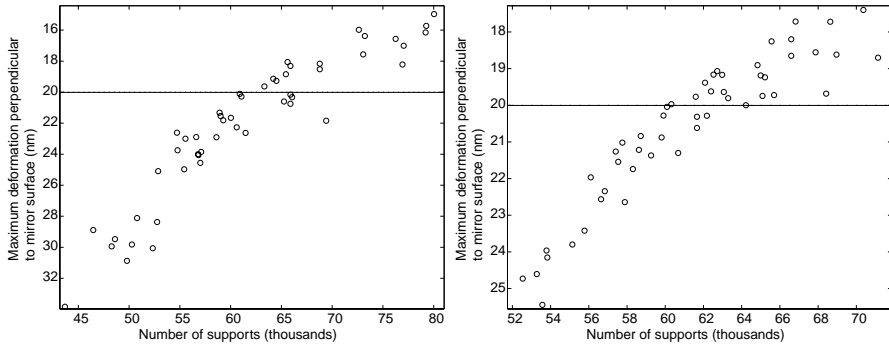


Figure 9. Sensitivity analysis for 100mm (first analysis to the left, and the second to the right).

Some kind of mean value of these functions ought to give a solution close to optimal. By superposing the optimal functions after having normalized them, functions close to describing the optimum support pattern will be obtained. These functions have been plotted to the left in Figure 11, and by consulting the right plot in the same figure the functions can be scaled to be valid for an arbitrary mirror thickness.

6. CONCLUSIONS

In this paper means of designing support systems for large optical telescope are discussed. A probabilistic method based on parametric descriptions of support patterns is employed to investigate the best possible choice, given certain intervals of the parameters included in the description. The result clearly indicate a substantial gain in the number of supports when optimizing the pattern.

The target measure has been the overall pointwise maximum displacement. Further investigations are needed to include more sophisticated means of optimization. For instance deformation patterns that could be corrected by postprocessing of recorded data can be included as the target measure.

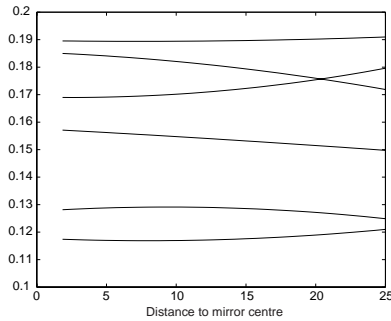


Figure 10. The functions Δ_r and Δ_t for the three mirror thicknesses

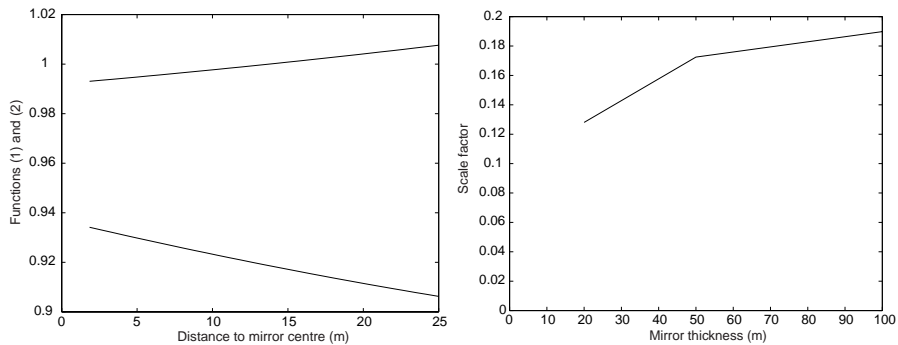


Figure 11. Optimal function and scale factor

ACKNOWLEDGMENTS

During the course of this work several discussions with Professor Torben Andersen, Department of astronomy have been of great value. His expertise and willingness to share his knowledge in design of astronomical instruments is deeply acknowledged.

REFERENCES

1. Lindemann, J., *The Interactive Visualisation Framework - User's guide*, Division of Structural Mechanics, TVSM-3038, Lund University, Sweden, 2000.
2. McKay MD, Conover WJ, Beckman RJ. *A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code* Technometrics 1979;21:239–45.
3. Olsson A., *Modelling Damage and Stochastic Properties in Engineering Structures*, Division of Structural Mechanics, TVSM-3037, Lund University, Sweden, 1999. Licentiate thesis.