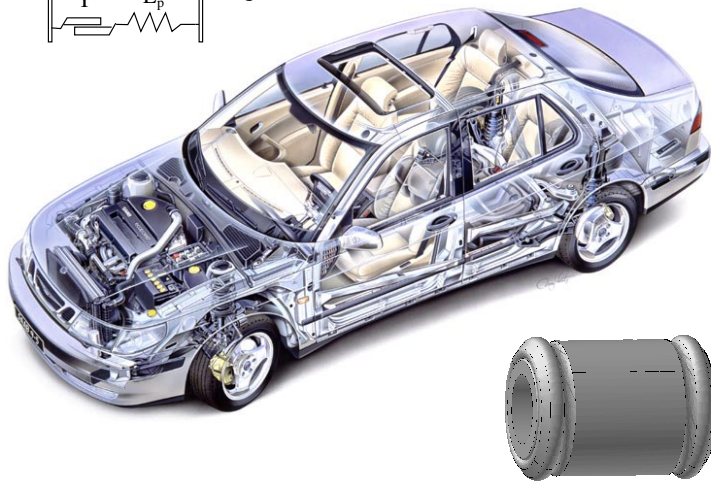
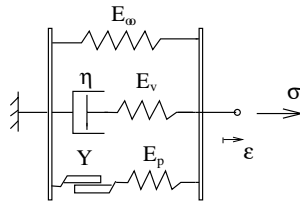




LUND
UNIVERSITY



MODELLERING AV VIBRATIONSDÄMPARE TILL BILMOTORUPPHÄNGNING

KRISTIAN BERGDAHL
och MIKAEL SVENSSON

Department
of
Mechanics
and
Materials

Structural Mechanics
Master's Dissertation

MODELLERING AV VIBRATIONSDÄMPARE TILL BILMOTORUPPHÄNGNING

Examensarbete utfört av
KRISTIAN BERGDAHL och MIKAEL SVENSSON

Handledare

PER-ERIK AUSTRELL, Avd. f. byggnadsmekanik

PETER DAVIDSSON, Avd. f. byggnadsmekanik

PER-OLOF STURESSON, Saab Automobile AB, Trollhättan

Abstract

The modelling of rubber materials in industrial applications is often carried out by experimental analysis. The company Saab Automobile AB in Trollhättan has assigned the task of simulating the transportation of vibration and noise from the engine of a car to the surrounding structures. The vibration and noise is reduced by the use of vibration dampers made of rubber. The damper is designed as two hollow cylinders, one inside the other, mounted between two cylinders of steel.

The objective of this report is to simulate the characteristics of rubber in a correct way. Of special interest is the nonlinear properties such as nonlinear elasticity and frequency as well as amplitude dependent stiffness. This is carried out by the creation of one-dimensional rheological models, which simulate the behavior of rubber components. In NASTRAN, these rheological models are placed in different directions in a three-dimensional structure to analyse how the vibrations from the engine transport to the surrounding chassis of the car. The NASTRAN analysis shows that if the engine vibrates with a frequency over 20 Hz the vibration in the surrounding structure will be very small. The eigenfrequency is about 7.5 Hz, which can also be approximately determined by analytical expressions, and at this frequency there will be no damping of the vibrations at all. From the analysis, it is also clear that the amplitude by which the structure is loaded plays an important role in the stiffness response by the rubber component.

Förord

Denna rapport är resultatet av examensarbetet MODELLERING AV VIBRATIONSDÄMPARE TILL BILMOTORUPPHÄNGNING, som har utförts vid Avdelningen för byggnadsmekanik vid Lunds tekniska högskola under vinterhalvåret 1999-2000. Det behandlar modellering av gummi material i dynamiska fordonssystem och inkluderar olinjär elasticitet samt frekvens- och amplitudberoende dynamisk styvhet.

Ett stort tack riktas till vår handledare Per-Erik Austrell, som med sin goda handledning väglett framför allt den teoretiska delen av arbetet på ett utmärkt sätt, samt läst och kommenterat rapporten. Vi vill även tacka vår andre handledare Peter Davidsson för all hjälp med modelleringen i NASTRAN.

Slutligen vill vi tacka vår uppdragsgivare Per-Olof Stuesson vid Saab Automobile AB i Trollhättan, som har hjälpt till med att utforma arbetet samt tillhandahållit data om gummi busningen.

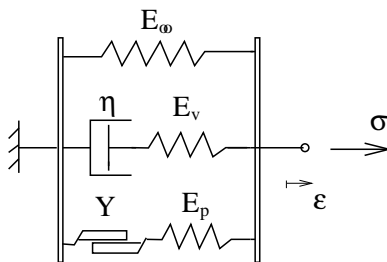
Lund i april 2000

Kristian Bergdahl och Mikael Svensson

Sammanfattning

Avsikten med detta examensarbete, som har utförts vid Avdelningen för byggnadsmekanik vid Lunds tekniska högskola, är att undersöka och beskriva metoder att modellera gummidämpare med avseende på bland annat olinjär elasticitet samt frekvens- och amplitudberoende dynamisk styvhet. Gummi-elementets samverkan med vidhängande styvare strukturer har också modellerats. Syftet är att bestämma hur vibrationer och ljud transporteras från en bilmotor och ut i omgivande strukturer.

Det modellerade gummi-elementet sitter i en bilmotorupphängning och har en cylindrisk utformning. Det modellerades med en femparametermodell som består av en elastisk (linjär eller olinjär), en viskoelastisk och en elastoplastisk del. Denna reologiska modell, som har både frekvens- och amplitudberoende egenskaper med avseende på dynamisk styvhet och dämpning, beskriver gummi-materialet på ett korrekt sätt. Femparametermodellen är avbildad i figur 1.



Figur 1: En enkel viskoplastisk materialmodell som korrekt simulerar både frekvens- och amplitudberoende för gummi-material.

Till en början modellerades gummi-elementet endimensionellt i Matlab med parametrar för ett specifikt gummi-material, inte samma som används till bilmotorupphängningen. Detta utfördes för att verifiera att modellens beteende beror på såväl frekvens som amplitud. För att bestämma de verkliga parametrarna till femparametermodellen användes resultat, som erhållits från experiment som utförts på en gummi-bussning vid Saab i Trollhättan. Med hjälp av dessa experiment kunde parametrarna bestämmas för både axiell och radiell belastning på gummi-elementet.

I Nastran implementerades femparametermodellen i en tredimensionell struktur, där gummi-elementet modellerades endimensionellt i y- och z-led, där y-led är radiell led och z-led axiell led. Hela strukturen analyserades genom att en kraft lades på i motorns mittpunkt och nedböjningen i motorns mittpunkt samt reaktionskrafterna i infästningarna räknades ut i Nastran. För att analysera hur motorvibrationerna överförs från motorstrukturen till omliggande strukturer lades en statisk kraft, som skulle motsvara motorns tyngdkraft, samt en sinusformad dynamisk kraft på i motorns tyngdpunkt. Flera olika lastfall analyserades, i vilka den dynamiska kraftens amplitud och frekvens varierades. Det visade sig att reaktionskraften har sitt maximum omkring frekvensen 7.5 Hz, vilket även är den analytiskt bestämda egenfrekvensen för strukturen. Vid belastning med frekvenser över 20 Hz blev reaktionskrafter och deformationer för gummidämparna mycket små, dämparna fungerar alltså bäst vid dessa frekvenser. Resultaten visar även att gummidämparnas styvhet minskar vid ökad belastningsamplitud, varför det är viktigt att göra en korrekt dimensionering av gummidämparen till varje användningsområde.

Innehåll

1	Inledning	1
1.1	Bakgrund	1
1.2	Syfte	2
1.3	Modellbeskrivning	2
1.4	Avgränsningar	2
1.5	Metodik	3
2	Materialiet gummi	5
2.1	Allmänt om gummi	5
2.2	Mekaniska egenskaper	5
2.3	Experimentella observationer	7
2.4	Bestämning av dynamisk skjuvmodul	9
3	Materialmodeller för gummi	11
3.1	Olinjära elastiska materialmodeller	11
3.1.1	Töjningsenergiuttryck	12
3.1.2	Val av materialmodell	13
3.2	Teoretiska spännings-töjningssamband	13
3.3	Reologiska modeller	14
3.3.1	Viskoelastisk materialmodell	14
3.3.2	Elastoplastisk materialmodell	15
3.3.3	Viskoplastisk materialmodell	16
4	Endimensionella gummielement	19
4.1	Transmissibilitet vid stationära svängningar	19
4.2	Modellering i MATLAB	20
4.3	Verifiering av MATLAB-program	21
4.4	Modellering till analys i NASTRAN	23
4.5	Gummidämparens komponentparametrar	26
4.6	Bestämning av initiella styvheter	28
4.6.1	Radiell led	28
4.6.2	Axiell led	29
4.7	Bestämning av materialparametrar till femparametermodell	29
4.7.1	Radiell led	29
4.7.2	Axiell led	30
4.7.3	Slutliga parametrar	32
4.8	Bestämning av komponentegenskaper till NASTRAN	32
4.8.1	Radiell led	33
4.8.2	Axiell led	33

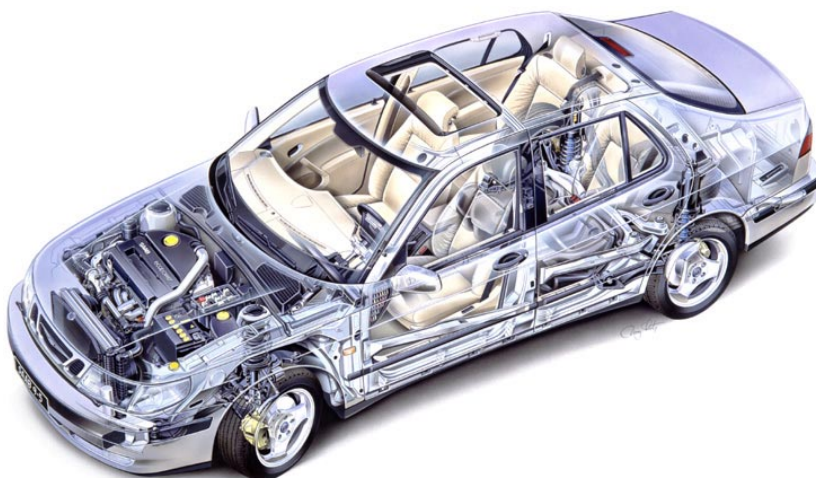
5	Tvådimensionella strukturmodeller	35
5.1	Dämpare i omgivande struktur	35
5.1.1	Uppställning av rörelseekvationer	36
5.1.2	Modellering med Kelvinmodell	37
5.2	Implementering i MATLAB/CALFEM	38
5.2.1	Stel balkstruktur	38
5.2.2	Global assemblering	38
5.2.3	Tidsstegning med stel balkstruktur	39
5.2.4	Tidsstegning med assemblering	39
5.3	Verifiering av balkstruktur i MATLAB/CALFEM	40
5.3.1	Stel balkstruktur	40
5.3.2	Global assemblering	41
5.3.3	Tidsstegning med fast inspänning	41
5.3.4	Tidsstegning med assemblering	42
6	Tredimensionella strukturmodeller	45
6.1	Analysens upplägg och syfte	46
6.2	Symmetrisk modellering av balkstrukturen	48
6.3	Modellering av hela balkstrukturen	49
6.3.1	Balkstrukturens translation	49
6.3.2	Frekvensanalys vid vertikal belastning	50
6.3.3	Amplitudanalys vid vertikal belastning	53
7	Slutsatser	55
7.1	Parameterframtagning på olika nivåer	55
7.2	Resultat från analys i NASTRAN	56
7.3	Femparametermodellens möjligheter	57
A	Olinjär elasticitet	61
A.1	Enaxlig tryck-/dragbelastning	61
A.2	Enkel skjuvning	62
B	MATLAB-program	65
B.1	Endimensionell modellering	65
B.2	Modellering av gummidämpare i omgivande struktur	67
C	NASTRAN-indatafil	69

Kapitel 1

Inledning

1.1 Bakgrund

Komponenter av gummi material används inom industrin i olika sorters maskiner. I bilindustrin används gummi komponenter som kopplingselement mellan styva strukturer för att isolera vibrationer och buller. Användningsområden för Saab är exempelvis motor- och hjulupphängningar till Saab 9⁵, se figur 1.1.



Figur 1.1: *En Saab 9⁵ i genomsnitt.*

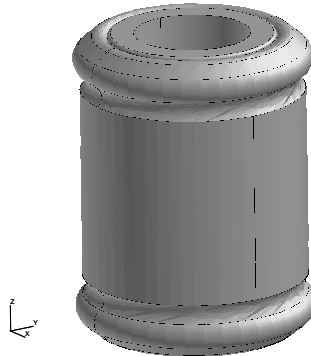
Vibrationsdämparna har i regel olinjära egenskaper såväl statiskt som dynamiskt. Inom bilindustrin används vanligtvis linjära approximationer när gummi materials dynamiska egenskaper modelleras. Examensarbetet är ett samarbete mellan Saab Automobile AB i Trollhättan och Institutionen för mekanik och material vid LTH.

1.2 Syfte

Arbetet avser att undersöka och beskriva metoder att modellera gummidämpare och deras samverkan med vidhängande styvare strukturer. Speciellt beaktas de olinjära materialegenskaper som gummi uppvisar. Från Saabs sida är man intresserad av att, genom komplettbilssimuleringar, bestämma hur vibrationer och ljud transporteras från motorn och ut i omgivande strukturer. Som en praktisk tillämpning studeras en modellkomponent i form av ett axialsymmetriskt hylselement. Egenskaper som kommer att modelleras är spännings- töjningssamband, olinjär elasticitet samt frekvens-, och amplitudberoende dynamisk styvhet. Analysen avser att ge insikt i förlast-, frekvens-, och amplitudberoende för gummikomponenter samt att ge förslag på hur gummikomponenter kan modelleras dynamiskt i ett fordonssystem.

1.3 Modellbeskrivning

Gummidämparen har en axialsymmetrisk (cylindrisk) utformning, denna återges i figur 1.2. Dämparens längd är 50 mm och ytterdiametern är 36.6 mm på mitten. I föreliggande tillämpning, upphängning av en bilmotor, är gummidämparen placerad mellan två metalldrivrar.



Figur 1.2: *Utformning av gummidämpning till bilmotorupphängning.*

1.4 Avgränsningar

Examensarbetet avgränsas till att behandla vibrationer som ligger väl under dämparelementens interna resonansfrekvenser, som för gummidämparen bör ligga över 500 Hz. Vibrationerna från en bilmotor befinner sig i frekvensintervallet 0-200 Hz och har förskjutningsamplituder av storleksordningen 0.01-1 mm. Ingen hänsyn kommer att tas till stora deformationer. Gummielementen antas vara utsatta för en statisk förlast med en överlagrad dynamisk belastning. Endast endimensionella dämparmodeller kommer att användas. Vidare kan den inre metalldrivraren utsättas för tre olika belastningsformer: axiell translation, radiell translation och axiell rotation. Härvid kommer gummidämparen att utsättas för axiell skjuvning, radiell tryck-/dragbelastning respektive axiell vridning. Vridning av en cylinder ger vid små deformationer ungefär samma effekt som skjuvning av densamma, därmed kan båda fenomenen betraktas som skjuvning.

Därmed kommer belastningen i modelleringen endast att verka som axiell skjuvning och radiell tryck-/drag.

1.5 Metodik

Examensarbetet kan huvudsakligen indelas i följande områden:

- Grundläggande beskrivning av elastomerers frekvens- och amplitudberoende egenskaper.
- Egenskaperna för ett kopplingselement av gummi modelleras i MATLAB med endimensionella fäfrihetsgradsmodeller.
- Möjligheterna att infoga kopplingselementet i en finit elementmodell undersöks i MATLAB-CALFEM.
- Modellen anpassas till experimentella resultat för en verklig gummikomponent. Radiell och axiell dynamisk styvhet och dämpning framtages.
- Ett förenklat modellproblem, en bilmotorupphängning med gummidämpare, modelleras i PATRAN och analyseras i MSC/NASTRAN.

Kapitel 2

Materialiet gummi

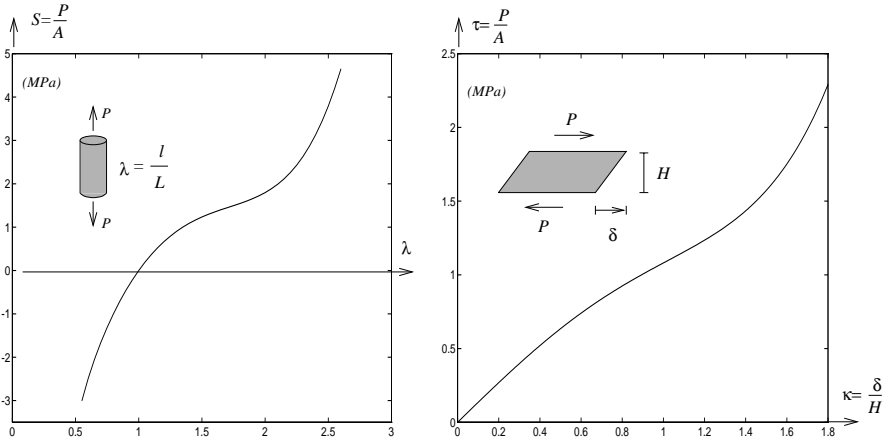
2.1 Allmänt om gummi

Gummi, eller elastomerer, är namn som representerar en stor grupp material. Gemensamt för dessa är att de är polymerer med långa molekylkedjor, vilket ger dem karakteristiska mekaniska egenskaper. Råmaterialiet är antingen naturgummi från gummiträd eller tillverkat på syntetisk väg. Gummiträd bildar gummi genom komplicerade biokemiska reaktioner. Det faktum att molekylkedjorna inte har några bryggor mellan sig gör att gummi är mjukt och plastiskt i sitt naturliga tillstånd. Genom en kemisk process, som kallas vulkanisering eller vulkning, överförs gummi från plastiskt formbart tillstånd till ett elastiskt och mer formstabilt tillstånd. Vulkaningen innebär att små mängder av vulkmedel, tex svavel, tillsätts under upphettning av gummit till mellan 120 och 200°C. Svavlet bildar bryggor mellan molekylkedjorna, varvid de binds samman och gummit blir starkare och mer temperaturstabilt. I syfte att öka styvheten och förbättra slitstyrkan för gummikomponenter, tillsätts ett fyllnadsmaterial innan vulkningen. Som fyllnadsmaterial används vanligen ett finfördelat kolpulver som kallas kimrök. Kimröken binds inte kemiskt till gummit, utan bildar en separat fas i det vulkade gummit. Kimröken påverkar ett flertal fysikaliska egenskaper såsom viskositet och hållfasthet. I praktiska tillämpningar används ofta kompositter av gummi och metall. Sammanfogningen mellan gummi och metall kan ske vid vulkaniseringen genom att metallstycken med vidhäftningsmedel läggs in i formen. Vidhäftningen blir mycket stark och fogen mellan gummi och metall blir starkare än själva gummit.

2.2 Mekaniska egenskaper

De viktigaste mekaniska egenskaperna hos gummimaterial som utnyttjas i tekniska tillämpningar är den töjningsupptagande förmågan, den vibrationsdämpande egenskapen och nötningsstyrkan. Den mest framträdande och karakteristiska egenskapen hos gummimaterial är den stora elasticiteten, dvs förmågan att tåla stora töjningar utan permanenta deformationer efter avlastning.

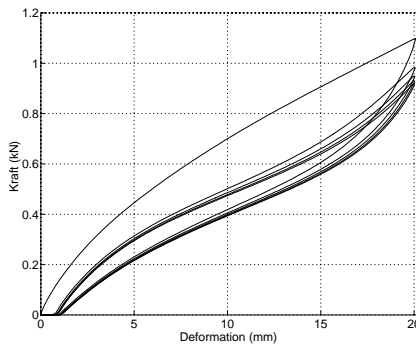
Det innebär också att gummimaterial har en förmåga att lagra mycket töjningsenergi per volymenhet och dessutom frigöra det mesta vid avlastning. Den goda elasticiteten har sin förklaring i den molekylära strukturen. De långa veckade polymerkedjorna kan sträckas och orienteras i töjningens riktning. Orsaken till detta är att polymerens byggstenar i kedjan har en förmåga att rotera i kopplingspunkterna mellan enheterna (monomererna). Därigenom är det möjligt att uppnå töjningar på flera hundra procent.



Figur 2.1: Spännings-töjningsdiagram för ett 60 IRHD naturgummi.
 Vänster: tryck/drag belastning. Höger: Enkel skjuvning.

Figur 2.1 visar spännings-töjningsdiagram för naturgummi med hårdhet 60 IRHD i tryck/drag-belastning respektive skjuvbelastning. Enkel skjuvning enligt figur 2.1 ger ett mer linjärt samband mellan spänning och töjning än vad som är fallet vid tryck/drag-belastning. Det är därför mer motiverat att använda skjuvmodulen G som en dynamisk materialkonstant än E-modulen eftersom den senare varierar kraftigt med töjningen.

Vissa typer av vulkaniserat gummi utan fyllmedel som tex naturgummi har hög elasticitet med små förluster vid cyklisk belastning. I regel är det dock nödvändigt att tillsätta fyllnadsmaterial för att få tillräcklig styvhet i materialet och uppnå tillräcklig nötningsbeständighet. Vid upprepade på- och avlastning av ett kimröksfyllt naturgummi av hårdhet 60 IRHD får man ett typiskt kraft-deformationssamband enligt figur 2.2.



Figur 2.2: Kraft-deformationssamband för ett kimröksfyllt naturgummi utsatt för cyklisk belastning.

Förutom att man får en skillnad mellan på- och avlastningskurvorna som indikerar att materialet inte är idealt elastiskt, får man också en viss sänkning av materialets styvhet. Denna sänkning är dock begränsad och når ett stationärt värde efter ett fåtal

belastningscykler enligt figur 2.2. Det töjningsmjuknande beteendet (som också kallas Mullins effekt) beror av molekylära omlagringar och brott i tvärbindingar mellan polymer och fyllmedelspartiklar. Töjningsmjuknandet ökar med ökande mängd fyllmedel.

En annan karakteristisk egenskap för gummi är den stora skillnaden mellan skjuvmodulen och bulkmodulen. Bulkmodulen B anger relationen mellan hydrostatiskt tryck och volymetrisk töjning

$$p = B \frac{\Delta V}{V}.$$

Typiska värden för gummi är en skjuvmodul $G \approx 1$ MPa och bulkmodul $B \approx 2000$ MPa. Den stora volymetriska styvheten jämfört med skjuvstyvheten betyder att volymändring kräver väsentligt större kraft än formändring genom skjuvning. Den stora skillnaden indikerar att materialet är i det närmaste inkompressibelt och i många sammanhang, även i denna rapport, betraktas därför gummi som fullständigt inkompressibelt.

Vidare gäller att det statiska förhållandet mellan elasticitetsmodul och skjuvmodul ges av

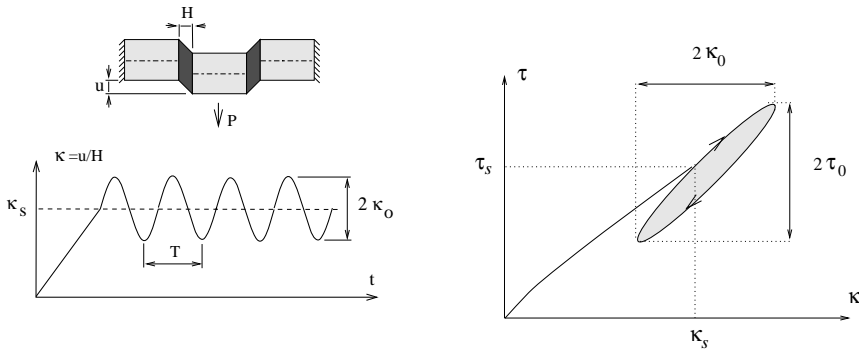
$$E = \frac{9BG}{3B + G}.$$

Eftersom det gäller att $B \gg G$ kan detta förenklas till

$$E = 3G. \quad (2.1)$$

2.3 Experimentella observationer

Det här avsnittet behandlar dynamiska materialegenskaper vid stationär cyklisk belastning. Speciellt diskuteras dynamiska modulens och dämpningens beroende på frekvens, temperatur och framförallt amplitud.



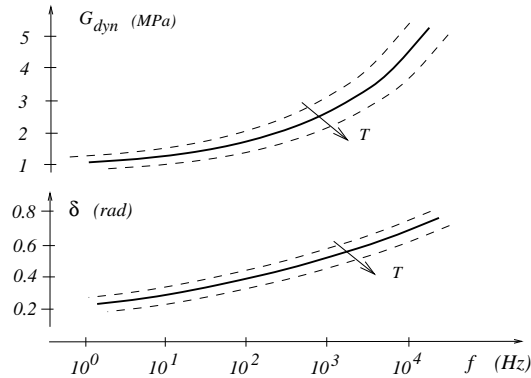
Figur 2.3: 'Double shear' provkropp för test i enkel skjuvning, harmonisk töjningshistoria och hystereskurvor med spännings- och töjningsamplituder angivna.

Figur 2.3 återger dynamisk provning i enkel skjuvning vid små amplituder för ofyllda gummimaterial. Den resulterande skjuvtöjningen har ett linjärt dynamiskt beteende som karakteriseras av att sinusformad excitation ger sinusformad respons. Responsen är dock fasförskjuten fasvinkeln δ , vilket ger en elliptisk spännings-töjningskurva enligt figur 2.3.

För att beskriva dynamiska materialegenskaper är det användbart att studera dynamiska skjuvmodulen och fasvinkeln δ . Dynamiska skjuvmodulen

$$G_{dyn} = \tau_0 / \kappa_0,$$

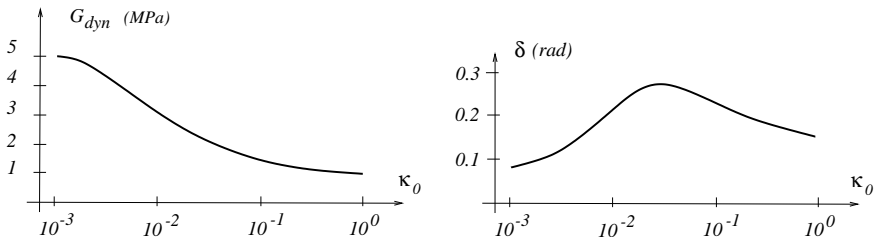
definieras som skjuvspänningsamplituden τ_0 delat med skjuvtöjningsamplituden κ_0 . Tillvägagångssättet för att bestämma den dynamiska skjuvmodulen beskrivs i kapitel 2.4. Fasvinkeln δ dvs. fasförskjutningen mellan spänning och töjning är ett mått på materialdämpningen.



Figur 2.4: *Dynamiska skjuvmodulens och fasvinkelns frekvensberoende för ett ordinärt naturgummi med fyllnadsmaterial. Temperaturens inverkan visas också.*

Den elliptiska hystereskurvan är associerad med omvandling av energi. Vid cyklisk belastning av gummimaterial är det därför alltid en del av energin som omvandlas till värme. Den inneslutna ytan mellan pålastnings- och avlastningskurvorna motsvarar den energi som omvandlas till värme. Vid fria vibrationer medför detta en minskande amplitud med tiden och man säger därför att materialet uppvisar dämpning.

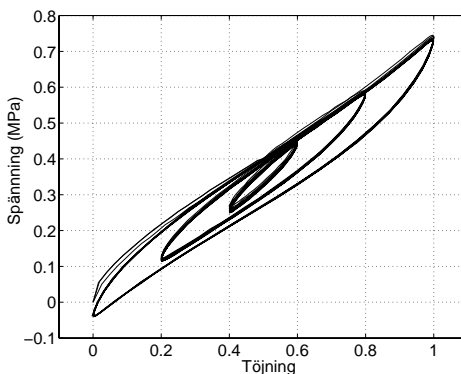
De dynamiska egenskaperna för gummimaterial är beroende av både temperatur och frekvens, vilket visar sig i den dynamiska modulen och fasvinkeln. En ökning av frekvensen har en hårdnande effekt och en ökning av temperaturen har en mjukande effekt enligt figur 2.4.



Figur 2.5: *Amplitudberoende dynamisk skjuvmodul och fasvinkel för ett ordinärt naturgummi med kivröksfyllning.*

Fyllnadsmaterial i gummiblandningen ökar dämpningen och ger upphov till en viss olinjäritet i det dynamiska beteendet, som visar sig i en distorsion av hysteresloopen

och som en minskning av den dynamiska skjuvmodulen då amplituden ökar. Den dynamiska olinjäritet som amplitudberoendet innebär, orsakas av fyllmedelsstrukturens nedbrytning och återformning. Den dynamiska modulens och fasvinkels beroende av töjningsamplituden visas principiellt i figur 2.5 med typiska värden för ett kimröksfyllt material av hårdhet cirka 60 IRHD. Den dynamiska modulen är alltså starkt beroende av töjningsamplituden vid måttliga till stora töjningar. För små amplituder under ca 0.1 % (inom platån enligt figur 2.5) då ingen nämnvärd nedbrytning och återformning av fyllmedelsstrukturen sker, är beteendet dock linjärt dynamiskt även för fyllda material.



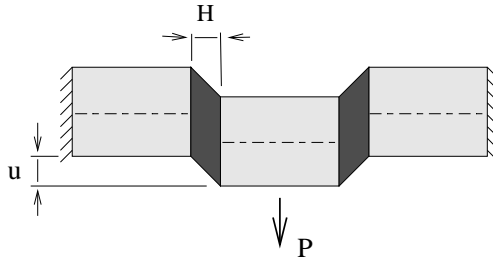
Figur 2.6: *Kvasi-statiskt test i skjuvning med harmonisk belastning vid 0.05 Hz med ökande amplitud.*

För högfyllda material och stora amplituder vid låga frekvenser avviker hystereskurvan väsentligt från den elliptiska formen i figur 2.3. I figur 2.6 visas resultatet av ett skjuvprov med förskjutningsstyrning enligt figur 2.3 med succesivt ökande amplitud vid konstant frekvens $f = 0.05 Hz$. Vid denna låga frekvens är materialets viskösa spänningsbidrag obetydligt. Den dämpning som visar sig i skillnaden mellan pålastnings- och avlastningskurvorna är väsentligen oberoende av töjningshastigheten. Observera också att hystereskurvornas lutning minskar med ökande amplitud, det vill säga att den dynamiska elasticitetsmodulen minskar med ökande amplitud. Man kan också notera att kurvorna har spetsiga ändar trots att töjningen är sinusformad. Detta karakteristiska utseende beror på den inre friktionen i gummit och är därmed karakteristiskt för de amplitudberoende egenskaperna.

2.4 Bestämning av dynamisk skjuvmodul

Den dynamiska skjuvmodulen är en storhet som beror av både frekvens och amplitud för den pålagda lasten. För ett specifikt gummimaterial kan den dynamiska skjuvmodulen bestämmas med ett *Double shear*-skjuvtest som finns beskrivet i [1]. Provkroppen, som återges i figur 2.7 består av två puckformade gummiskivor vulkade mellan tre metallstycken. Det mellanliggande metallstycket belastas med en kraft P varvid gummibitarna utsätts för enkel skjuvning, ett nära nog linjärt deformationstillstånd vid små till måttliga deformationer, se figur 2.1. Den dynamiska skjuvmodulen för en viss frekvens och amplitud bestäms ur

$$\frac{P_0}{2A} = G_{dyn} \frac{u_0}{H}$$



Figur 2.7: *Provkropp som utsätts för enkel skjuvning.*

P_0 är den pålagda kraftamplituden, u_0 är den resulterande förskjutningsamplituden, A och H är gummibitarnas area respektive höjd.

Rent praktiskt går man tillväga på följande sätt:

En kraft eller förskjutning med viss amplitud läggs på vid olika frekvenser tills ett nöjaktigt frekvensintervall har genomgått. Härvid erhålls en kurva som återger skjuvmodulen som funktion av frekvensen. Sedan körs ett amplitudintervall med en viss frekvens på samma sätt, vilket ger en kurva på skjuvmodulen som funktion av den pålagda amplituden.

Eftersom de viskösa och plastiska beteendena för ett verkligt gummimaterial inte är kopplade, vilket kommer att diskuteras i kapitel 3.3.3, kan man sedan parallellförflytta kurvorna i frekvensplanet för olika amplituder och vice versa för olika frekvenser för att erhålla G_{dyn} för varje kombination av amplitud och frekvens.

Som en tumregel kan nämnas att vid måttliga frekvenser och amplituder är den dynamiska skjuvmodulen ungefär 1.5 gånger den statiska.

Sammanfattningsvis kan konstateras att skjuvmodulen för ett specifikt gummimaterial kan beräknas genom ett enkelt skjuvtest av en enda komponent med en specifik geometri. Sedan kan styvheterna räknas fram för varje tänkbar komponentgeometri.

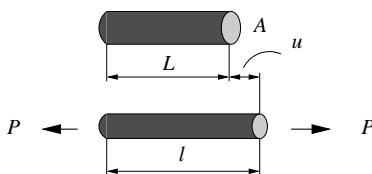
Kapitel 3

Materialmodeller för gummi

Här ges en beskrivning av hur ett gummiaterials egenskaper kan modelleras med endimensionella modeller. Speciellt diskuteras spännings-/töjningssamband och de viktiga storheterna dynamisk elasticitetsmodul och fasvinkel och deras beroende av frekvens och amplitud. Genom att introducera friktionsdämpning kan dynamiska modulens och fasvinkeln amplitudberoende modelleras. I kapitel 3.1 och 3.2 beskrivs den statiska modelleringen och i kapitel 3.3 den dynamiska.

3.1 Olinjära elastiska materialmodeller

Mooney och Rivlin utvecklade under 1950-talet den olinjära fenomenologiska elasticitetsteorin för stora deformationer. Mooney initierade arbetet genom att utveckla en speciell materialmodell varefter Rivlin utvecklade en generell teori baserad på ett töjningsenergiuttryck. I de så kallade *hyperelastiska materialen* enligt Rivlin definieras en töjningsenergifunktion W som är att betrakta som en potentialfunktion för spänningarna i materialet. De elastiska egenskaperna bestäms med hjälp av funktionen W , som representerar *töjningsenergi per volymenhet* för det aktuella materialet.



Figur 3.1: *Elastisk stång belastad med kraften P .*

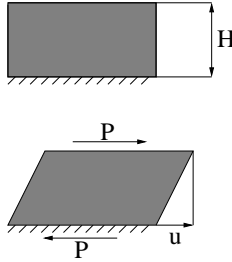
För att illustrera hur töjningsenergin kan definiera relationen mellan spänning och töjning betraktas först fallet med en linjärelastisk stång enligt figur 3.1. Töjningsenergin per volymenhet ges av

$$W = \frac{1}{2} E \epsilon^2$$

där $\epsilon = u/L$ är töjningen i stången. Spänningen σ kan fås genom derivering med hänsyn till töjningen enligt

$$\sigma = \frac{dW}{d\epsilon} = E \epsilon .$$

Resultatet är alltså den välkända Hookes lag för det enaxliga fallet.



Figur 3.2: Element skjuvat med kraften P .

Ett annat exempel är skjuvning av ett linjärelastiskt rätblock enligt figur 3.2. Töjningsenergin per volymenhet ges i detta fall av

$$W = \frac{1}{2}G\kappa^2$$

där skjuvtöjningen κ beräknas ur $\kappa = u/H$. Skjuvspänningen τ erhålls här ur

$$\tau = \frac{dW}{d\kappa} = G\kappa.$$

De enkla exemplen visar att det är möjligt att erhålla materialsambandet för ett elastiskt material genom att använda töjningsenergin som en potentialfunktion.

3.1.1 Töjningsenergiuttryck

I den generella fleraxliga och olinjära teorin är principen för att härleda materiallagen densamma som i det linjära, enaxliga fallet. Men i det olinjära fallet krävs i regel fler materialparametrar. Dessutom måste töjningsmättet generaliseras för att även täcka fleraxliga tillstånd av töjning som uppkommer vid godtyckligt belastade kroppar. I denna rapport kommer analysen att begränsas till att omfatta enaxliga olinjära tillstånd. Töjningsmått som kallas töjningsinvarianter införs som grundläggande variabler i töjningsenergiuttrycket. Töjningsinvarianterna uttrycks ofta i *stretch* vid belastning i tryck/drag. Stretch definieras som förhållandet mellan deformerad och odeformerad längd. För stången i figur 3.1 får man då

$$\lambda = \frac{l}{L} = 1 + \epsilon,$$

eftersom den deformerade längden $l = u + L$. Vid skjuvning av ett rätblock enligt figur 3.2 kan töjningsinvarianterna på motsvarande sätt uttryckas i skjuvtöjning, κ .

Töjningsenergin per volymenhet, W , kan för ett isotropt hyperelastiskt material uttryckas på formen

$$W = W(I_1, I_2, I_3)$$

där töjningsinvarianterna I_1 , I_2 och I_3 är ett mått på töjningstillståndet.

Som tidigare har nämnts är gummi i det närmaste inkompressibelt. Detta innebär att den tredje töjningsinvarianten, som uttrycker förändring av volymen, kan sättas till $I_3 = 1$, detta ger

$$W = W(I_1, I_2)$$

3.1.2 Val av materialmodell

En generell form för töjningsenergifunktionen W ges av serieutvecklingen

$$W = \sum_{i=0, j=0}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (3.1)$$

där C_{ij} är materialkonstanter. Formellt ingår oändligt många termer i serien, men i tillämpningar brukar man endast använda ett fåtal av dem. Anledningen till att termerna skrivs på formen $(I_1 - 3)$ och $(I_2 - 3)$ är att alla termer då blir lika med 0 i odeformerat läge, vilket ger att W blir 0 i odeformerat tillstånd, förutsatt att $C_{00} = 0$.

En töjningsenergifunktion som visat sig vara väl lämpad för gummi med tillsats av kimrök är O.H. Yeohs modell. Yeoh fann att töjningsinvarianten I_2 har ett försumbart inflytande för kimröksfyllda naturgummin och utelämnade därför denna. Modellen inkluderar tre termer i serien för töjningsenergifunktionen och ger

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (3.2)$$

Yeohs modell speglar korrekt det kvalitativa beteendet för kimröksfyllda gummimaterial. Modellen ger korrekt fysikaliskt beteende och är ganska enkel att använda, eftersom den bara har tre konstanter som dessutom har ett linjärt funktionsberoende eftersom den är på polynomform. Den ger ofta en noggrann och stabil passning till experimentella data. En annan fördel är att det är möjligt att bestämma parametrarna endast med ett skjutprov av gummimaterialet, vilket inte är möjligt för ett generellt val av parametrar.

3.2 Teoretiska spännings-töjningssamband

På samma sätt som i det linjära fallet kan den nominella spänningen i det olinjära fallet erhållas genom derivering av töjningsenergifunktionen W . Den intresserade läsaren hänvisas till bilaga A för en utförligare härledning av spännings-töjningssamband. Nedan återges de härledda resultaten. Vid tryck/drag deriveras W med avseende på stretch,

$$\frac{P}{A} = \frac{dW}{d\lambda}.$$

Med W enligt Yeohs modell (3.2) blir sambandet mellan nominell spänning och stretch

$$\frac{P}{A} = 2(C_{10} + 2C_{20}\left(\frac{2}{\lambda} + \lambda^2 - 3\right) + 3C_{30}\left(\frac{2}{\lambda} + \lambda^2 - 3\right)^2)\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right). \quad (3.3)$$

Deformationen vid skjuvning beskrivs av skjuvtöjningen κ , vid skjuvning sker därför deriveringen av W med avseende på skjuvtöjningen,

$$\frac{P}{A} = \frac{dW}{d\kappa}.$$

Med W enligt Yeoh (3.2) erhålls det teoretiska sambandet mellan skjuvspänning och skjuvtöjning som

$$\frac{P}{A} = 2(C_{10} + 2C_{20}\kappa^2 + 3C_{30}\kappa^4)\kappa.$$

I de numeriska beräkningarna kommer följande värden på Yeoh-parametrarna, som ger ett kraftigt olinjärt uppträdande, att användas:

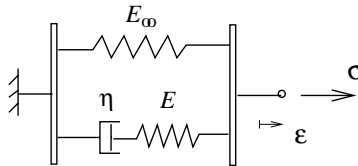
$$\begin{cases} C_{10} = 1.0 \text{ MPa} \\ C_{20} = -0.15 \text{ MPa} \\ C_{30} = 0.050 \text{ MPa} \end{cases} \quad (3.4)$$

3.3 Reologiska modeller

Ett illustrativt sätt att beskriva och tolka gummimaterials dynamiska egenskaper är att använda endimensionella modeller som kan beskrivas med mekaniskt analogt system av fjädrar, dämpare och friktionselement. Sådana modeller är direkt användbara vid modellering av gummelement, till exempel i fordonsdynamiska simuleringar.

I det följande behandlas en viskoelastisk och en elastoplastisk modell. Dessa kombineras genom parallellkoppling till en viskoplastisk modell som uppvisar ett principiellt korrekt frekvens- och amplitudberoende vid jämförelse med experimentella resultat för kimröksfyllda gummimaterial. En femparameters viskoplastisk materialmodell används för att illustrera dynamiska modulens och dämpningens frekvens- och amplitudberoende.

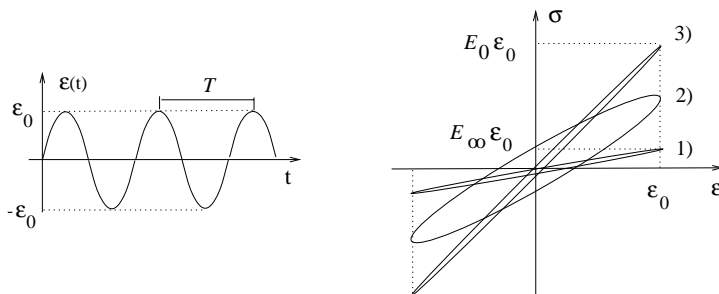
3.3.1 Viskoelastisk materialmodell



Figur 3.3: *Mekanisk analogi som illustrerar en viskoelastisk materialmodell, den så kallade Zener-modellen.*

Den enklaste viskoelastiska solidmodellen som uppvisar ett rimligt fysikaliskt beteende ges av en fjäder parallellkopplad med ett Maxwellelement enligt figur 3.3. Detta är den så kallade 'Standard Linear Solid' modellen, även kallad Zenermodellen. Den består av två fjädrar, med elasticitetsmodulerna E och E_∞ , och en viskös dämpare med dämpningsfaktorn η . Beteckningen E_∞ syftar på relaxationsmodulen då tiden $t \rightarrow \infty$, vilket motsvarar en frekvens som går mot noll. Initiell elasticitetsmodul bestäms av de två fjädrarna tillsammans, $E_0 = E_\infty + E$. Modellen är användbar för att beskriva de frekvensberoende egenskaperna hos gummimaterial. Den ger ett kvalitativt riktigt dynamiskt beteende avseende den dynamiska modulen och dämpningen. Dynamiska modulen ökar med frekvensen och dämpningen har en topp där dynamiska modulen ökar som mest. Men modellen inkluderar inte amplitudberoende, eftersom den är linjärt dynamisk. Den dynamiska modulen och dämpningen är därmed enbart beroende av frekvensen.

Modellens frekvensberoende egenskaper visas i figur 3.4, som visar hystereskurvor vid harmonisk sinuslast vid tre olika frekvenser. Frekvensen ökar från 1) som anger låg frekvens till 3) som anger hög frekvens. Mycket låg och mycket hög frekvens resulterar i en nästan elastisk dynamisk modul. Dvs dämpningen är nästan noll, vilket också illustreras i figuren genom de smala hystereskurvorna med nästan sammanfallande på-



Figur 3.4: *Harmonisk excitation av en viskoelastisk modell och hystereskurvor för ökande frekvens från 1) till 3).*

och avlastningskurvor. Gränsvärdet för dynamiska modulen då frekvensen går mot noll ges av $E_{dyn} = E_{\infty}$. Gränsvärdet vid hög frekvens ges av $E_{dyn} = E_0 = E_{\infty} + E$.

Den dynamiska modulen ökar alltså från E_{∞} till E_0 med ökad frekvens. Maximal dämpning inträffar för frekvensen 2) där den elliptiska hystereskurvan har maximalt avstånd mellan pålastnings- och avlastningskurvorna. Generellt gäller att maximal dämpning uppnås ungefär vid $\omega t_r \approx 1$, vilket innebär att

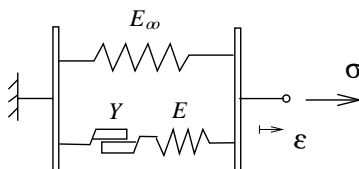
$$f \approx \frac{1}{2\pi t_r}. \quad (3.5)$$

Som nämndes i kapitel 2.3 omvandlar viskoelastiska material mekanisk energi till värme vid cyklisk belastning. Den av hystereskurvan inneslutna ytan enligt figur 2.3 representerar energin som omvandlas till värme. Energin som omvandlas under en cykel är

$$U_c = \pi \sigma_0 \epsilon_0 \sin \delta$$

där det framgår att den omvandlade energin (dämpningen) ökar med fasvinkeln δ upp till $\delta = \pi/2$.

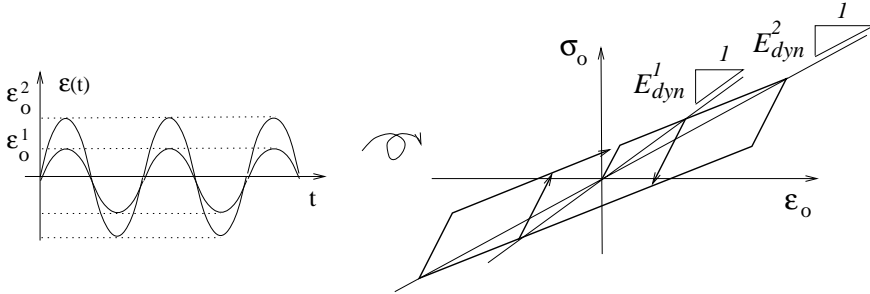
3.3.2 Elastoplastisk materialmodell



Figur 3.5: *Mekanisk analogi som illustrerar en enkel elastoplastisk materialmodell som ger en amplitudberoende dynamisk modul.*

Förutom den viskösa typen av dämpning som beskrevs i föregående avsnitt, förekommer också en töjningshastighetsberoende dämpning i gummi material med fyllnadsmaterial. En enkel modell som uppvisar dämpning som är oberoende av töjningshastigheten fås genom att den viskösa dämparen i Zener-modellen ovan byts mot ett friktionselement enligt figur 3.5. Spänningen i elementet är begränsad till $\sigma_f = \pm Y$ vid glidning mellan ytorna i elementet, som illustreras symboliskt i figuren. Spänningen begränsas alltså till det givna värdet oavsett hastigheten, med vilken ytorna glider mot varandra.

Modellen i figuren, med två linjära fjädrar med elasticitetsmodulerna E och E_∞ , är en mekanisk analogi för ett elastoplastiskt material. Spänningen i modellen är oberoende av tøjningshastigheten.



Figur 3.6: *Periodisk excitation av en elastoplastisk modell och hystereskurvor för ökande amplitud.*

Då modellen utsätts för cyklisk belastning, som gör att gränsspänningen i friktionselementet uppnås, ger friktionselementet en skillnad i på- och avlastningskurvorna och hystereskurvan får formen av en parallelogram enligt figur 3.6. Alla typer av periodiska belastningar med en viss amplitud ϵ_0 ger samma respons i spännings-tøjningsdiagrammet oberoende av kurvform och belastningshastighet.

Friktionselementet ger en olinjäritet, som syns i den parallelogramformade hystereskurvan som också resulterar i ett amplitudberoende för den dynamiska modulen. Det framgår tydligt i figur 3.6 att dynamiska modulen minskar med ökande amplitud. Man kan också notera att formen på hystereskurvorna med de spetsiga ändarna visar likheter med de experimentella kurvorna i figur 2.6.

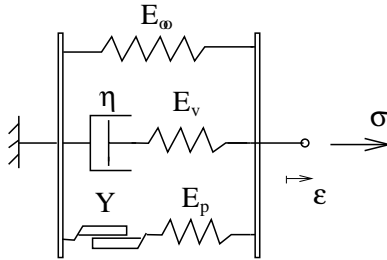
3.3.3 Viskoplastisk materialmodell

Dämpningen i fyllda gummimaterial orsakas av två olika mekanismer på materialnivå, som ger upphov till viskös- respektive friktionsdämpning. Omlagringar i polymernätverket vid periodisk last ger upphov till ett motstånd som är av viskös karaktär. Friktionsdämpningen kan härledas till fyllmedelsstrukturen och den nedbrytning och återformning som förekommer vid periodisk belastning. De spänningar som uppkommer i ett gummimaterial med fyllnadsmaterial består därför av en dominerande del som är elastisk, men också av en del som är viskös och en del som är av friktionstyp.

Genom parallellkoppling av de viskoelastiska och elastoplastiska modellerna ovan, erhålls en materialmodell som adderar spänningar av elastisk, viskös och friktionstyp. En enkel modell av denna viskoplastiska typ visas i figur 3.7. Modellen simulerar fyllda gummimaterials amplitud- och frekvensberoende på ett fysikaliskt korrekt sätt.

Fasvinkeln är direkt kopplad till dämpningen och därmed till hysteresen genom att en stor fasvinkel motsvarar en stor skillnad mellan på- och avlastningskurvorna.

Modellens frekvensberoende vid en given amplitud och amplitudberoende för en given frekvens stämmer väl överens med de experimentella kurvorna i figur 2.4 och figur 2.5. Dess hystereskurva överensstämmer väl med den experimentella kurvan i figur 2.6. Eftersom den viskösa och plastiska delen inte är seriekopplade är frekvens och amplitud oberoende av varandra. Amplituden är kopplad till det plastiska beteendet och oberoende av det viskösa beteendet, för frekvensen gäller motsvarande samband.



Figur 3.7: *Mekanisk analogi som illustrerar en enkel viskoplastisk materialmodell som ger kombinerat frekvens- och amplitudberoende för dynamisk modul och dämpning.*

Detta stämmer helt överens med det verkliga beteendet för gummimaterial.

Den här analyserade endimensionella modellen enligt figur 3.7 kan generaliseras genom att ett godtyckligt antal viskösa- och friktionselement parallellkopplas. Modellen kan då fås att ge en bättre kvantitativ överensstämmelse med experiment. I syfte att modellera det olinjära elastiska beteendet, som ett verkligt gummimaterial uppvisar, kan den ensamma fjädern göras olinjär. Olinjär elasticitet beskrivs i avsnitt 3.1 samt utförligare i bilaga A.

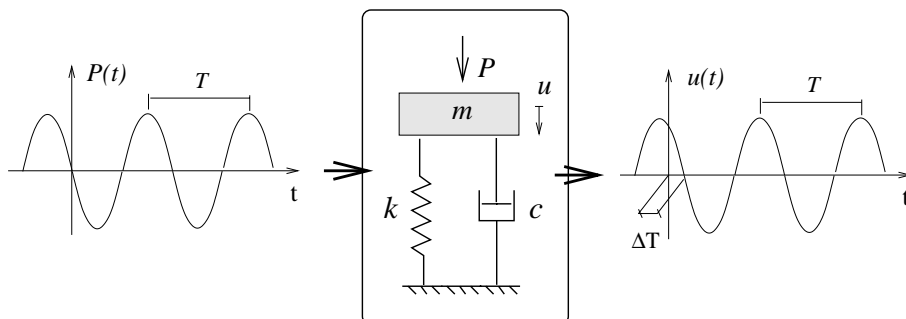
Kapitel 4

Endimensionella gummielement

I detta kapitel diskuteras hur materialmodellerna för gummi som beskrivits i kapitel 3 kan modelleras i MATLAB och PATRAN. Först diskuteras den viktiga storheten transmissibilitet vid stationär cyklisk belastning, som är ett mått på hur mycket av motorvibrationerna som överförs till bilens chassi.

4.1 Transmissibilitet vid stationära svängningar

Viktiga egenskaper och begrepp som används vid dynamisk analys av gummikomponenter kan härledas ur det enkla endimensionella systemet i figur 4.1.



Figur 4.1: Ett linjärt dynamiskt system utsatt för stationär sinusformad belastning. Responsen är en fördröjd sinusformad funktion med samma frekvens.

Vibrationsdämparen består här av en enkel modell med en linjär fjäder parallellkopplad med en viskös dämpare, en så kallad Kelvinmodell. Den sitter mellan balkstrukturen och en motor med massan m . Systemet beskrivs av en andra ordningens differentialekvation

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = P(t). \quad (4.1)$$

Det tekniskt sett mest intressanta fallet är det med påtvingande sinusformade vibrationer dvs stationära svängningar där systemet drivs av en harmonisk periodisk kraft. Responsen i detta fall är en sinusformad förskjutning med samma vinkelfrekvens som kraften, men med en fördröjning. För ett odämpat system ($c = 0$) i fallet med påtvingade vibrationer med $P = P_0 \sin(\omega t)$ ger den stationära lösningen vibrationsam-

plituden

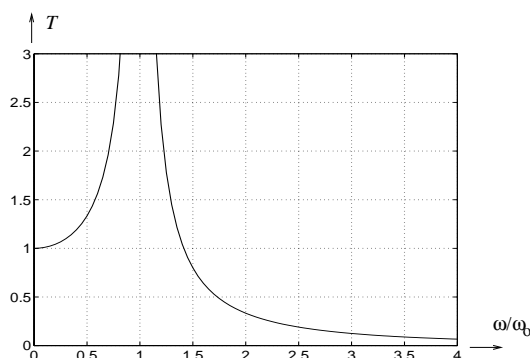
$$u_0 = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (4.2)$$

där ω är den drivande kraftens vinkelfrekvens och ω_0 är systemets egenfrekvens.

En viktig fråga vid vibrationsdämpning är hur mycket av den drivande kraften som överförs genom dämparen till balkstrukturen. Kvoten mellan den överförda kraften och den drivande kraften kallas *transmissibilitet* som för det odämpade systemet ges av

$$T = \left| \frac{ku_0}{P_0} \right| = \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right| \quad (4.3)$$

dvs fjäderkraftens amplitud dividerat med den drivande kraftens amplitud. Uttrycket (4.3) visas grafiskt i figur 4.2. Här framgår det att om den drivande kraftens frekvens $\omega \rightarrow \omega_0$ så gäller att $T \rightarrow \infty$ för ett odämpat system.



Figur 4.2: *Transmissibilitet mot normaliserad vinkelfrekvens för ett odämpat system.*

För måttligt dämpade system gäller ekvation (4.3) approximativt om den drivande kraftens frekvens är större än resonansfrekvensen, vilket också krävs för en reduktion av den överförda kraften. Enligt diagrammet måste drivfrekvensen vara högre än resonansfrekvensen för att vibrationsdämpningen skall fungera. Vidare gäller att transmissibiliteten alltid är ändlig för ett dämpat system.

4.2 Modellering i MATLAB

Arbetet påbörjas med utgångspunkt från MATLAB-programmet [2], som modellerar gummimaterial med en viskoplastisk femparametermodell. Denna funktion har en töjningshistoria som indata och ger en spänningshistoria som utdata. Gummimaterialet modelleras som en linjär fjäder parallellkopplad med ett godtyckligt antal viskoelastiska och elastoplastiska element. Sådana element har beskrivits i kapitel 3.3. Det första utkastet är en enkel multi-viskoplastisk modell, dvs en linjär fjäder parallellkopplad med ett godtyckligt antal viskoelastiska och elastoplastiska element. Ovanpå modellen finns en punktmassa och i botten är den fast inspänd. Indata är en krafthistoria som verkar på massan och utdata är en reaktionskrafthistoria i botten på fjädern samt en förskjutningshistoria för massan. Programmet har följande struktur: Beräkna förskjutningen i det första tidssteget på grund av den pålagda kraften. Därefter beräknas i varje tidssteg

- Ny töjning samt töjningsinkrementet.
- Elastisk spänning i den ensamma linjära fjädern.
- Viskoelastisk spänning i den viskösa delen.
- Tag reda på i vilka elastoplastiska element som flytspänningen kommer att uppnås. Bestäm spänningen i den elastoplastiska delen.
- Reaktionskraften erhålls ur $R(t) = -(\sigma_e + \sigma_v + \sigma_p)A_d$
- Förskjutningen i nästa tidssteg.

MATLAB-analysen syftar endast till att genomföra modelleringen, inte att få fram specifika resultat för den aktuella gummidämparen. För att kunna verifiera programmet genom en jämförelse med ett genomfört skjuvprov (avsnitt 4.3) används följande numeriska värden, som gäller för ett gummi med hårdheten IRHD=50:

$$\begin{cases} E_\infty = 2.7 MPa \\ E_v = 3.4 MPa \\ t_r = 0.013s \\ E_p = 1.6 MPa \\ Y = 0.018 MPa \end{cases}$$

E_∞ , E_v och E_p är elasticitetsmoduler, t_r står för relaxationstiden och Y är flytspänningen för friktionselementet. För viskositetskoefficienten gäller att $\eta = t_r E_v$. Därefter införs en fjäder som är olinjärt elastisk enligt Yeoh. Olinjär elasticitet diskuteras i bilaga A. Programmen som inkluderar denna fungerar för tryck-/dragbelastning respektive för enkel skjuvning. Båda har ett godtyckligt antal viskoelastiska och elastoplastiska element och fungerar även i övrigt på samma sätt som det första programmet. Programhuvuden för dessa tre MATLAB-funktioner återfinns i bilaga B.1.

4.3 Verifiering av MATLAB-program

Först kontrolleras att funktionen med linjär ensam fjäder ger korrekt egenfrekvens för vibrationsdämparen. För att ta fram komponentens egenskaper vid tryck-/dragbelastning används ett enkelt samband mellan komponentnivå (styvhet) och materialnivå (elasticitetsmodul),

$$k = \frac{E_\infty A_d}{L_d} \quad (4.4)$$

där A_d är dämparens area och L_d är dess längd. I fallet med skjuvning gäller motsvarande samband med den skillnaden att elasticitetsmodulen byts mot skjuvmodulen. Dessa formler gäller för en stånggeometri, men fungerar som en bra approximation för den puckliknande gummidämparen. Korrekta formler finns angivna i [3]. I verifieringen förutsätts vibrationsdämparen ha samma utformning som provkroppen, återgiven i figur 2.7, det vill säga två gummibitar med längden $L_d=6$ mm, diametern $D=25$ mm och vardera arean $A_d=490$ mm².

Sambandet mellan dämpningskoefficient och dämpningsfaktor kan härledas ur förhållandet mellan styvhet och elasticitetsmodul, ekvation (4.4). Denna ger nämligen att

$$k = \textit{konstant} \cdot E. \quad (4.5)$$

Där faktorn *konstant* endast beror av den geometriska utformningen av dämparen. I det aktuella fallet är $\textit{konstant}=A_d/L_d$. Den konstitutiva lagen ger att

$$\sigma = E\epsilon.$$

Sambandet mellan kraft och förskjutning ges av

$$F = ku.$$

Dessa båda ekvationer insätts i (4.5), vilket ger

$$\frac{F}{u} = \textit{konstant} \cdot \frac{\sigma}{\epsilon}. \quad (4.6)$$

Vidare gäller att spänningen i en viskös dämpare ges av

$$\sigma = \eta\dot{\epsilon}.$$

Kraften beräknas på samma sätt enligt

$$F = c\dot{u}.$$

Om dessa insätts i (4.6) erhålls

$$c = \textit{konstant} \cdot \eta$$

vilket är det sökta sambandet mellan dämpningskoefficienten c och dämpningsfaktorn η . Eftersom det i detta fall gäller att $\textit{konstant}=A_d/L_d$, blir förhållandet mellan c och η

$$c = \frac{\eta A_d}{L_d}.$$

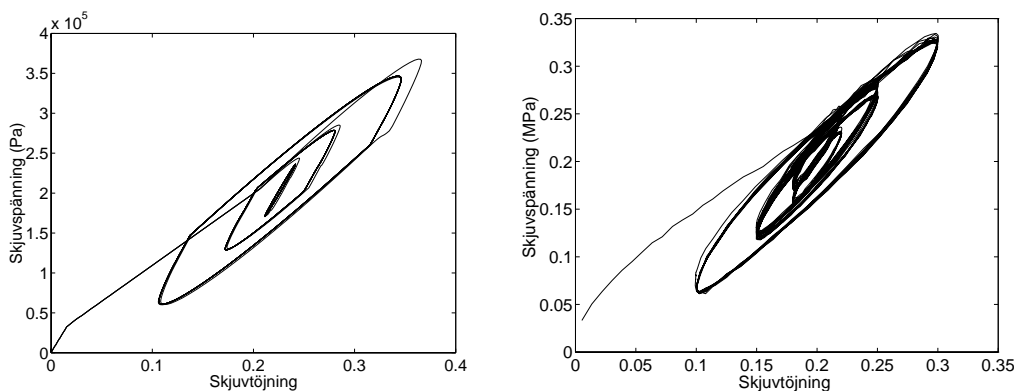
Vidare gäller att den lägsta egenfrekvensen för det svängande systemet (dämpare med pålagd massa) approximativt kan beräknas ur

$$f_e = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4.7)$$

Med en massa på 20 kg placerad ovanpå dämparen blir den approximativa egenfrekvensen enligt ekvation (4.7) $f_e=13.8$ Hz, vilket ligger nära modellens egenfrekvens, som med hjälp av programkörningar vid olika frekvenser kan uppskattas till ungefär 16.5 Hz.

Den endimensionella dämparmodellens egenskaper jämförs med ett skjuvprov, som har utförts på en komponent utformad enligt figur 2.7. En utförligare beskrivning av provet återges i [1] sid 121-123. Vid skjuvbelastning används skjuvmodulen G istället för elasticitetsmodulen E , för gummi ges förhållandet mellan dessa av ekvation (2.1). Vid provet används förskjutningsstyrning, vilket innebär att lasten läggs på som en töjningshistoria. Eftersom MATLAB-programmet är kraftstyrt ges indata av en krafthistoria. En statisk förlast på 200 N läggs på. Denna är överlagrad med dynamiska

laster som har amplituder på 30, 60 resp 120 N. Samma frekvens, 5 Hz, används i de olika lastfallen, och den dynamiska lasten ligger på under 3 sekunder, lika lång tid som i experimentet. De angivna indata ger ungefär samma töjningshistoria som används i experimentet. Genom att plotta den resulterande skjuvspänningen τ som funktion av skjuvtöjningen κ , erhålls tre hystereskurvor, som återges i figur 4.3 tillsammans med motsvarande experimentella kurvor.



Figur 4.3: *Hystereskurvor för skjuvspänning-skjuvtöjning vid olika amplituder, till vänster framräknade och till höger experimentella.*

Det teoretiska experimentet ger enligt figur 4.3 (vänster) en något kantigare form på hystereskurvorna som den som erhålls vid skjuvprovet (figur 4.3 (höger)). MATLAB-modellen har alltså ett tydligare elastoplastiskt beteende än den verkliga komponenten. En annan avvikelse är att de från MATLAB erhållna kurvorna har en något kraftigare översläng under hystereskurvornas första cykel. Däremot överensstämmer spännings- och töjningsintervallen ganska väl. Den lägsta kraftamplituden ger enligt modellen nästan ingen dämpning, de två övriga ger ungefär samma inneslutna area som den verkliga provkroppen. Vidare överensstämmer den dynamiska skjuvmodulen ganska väl, och den minskar med ökande kraftamplitud.

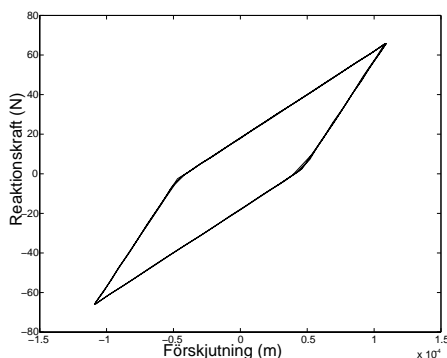
4.4 Modellering till analys i NASTRAN

I PATRAN-modelleringen till körningen i NASTRAN används samma komponentparametrar som i MATLAB, förutom att komponenten utgörs av en enda gummibit med arean $A_d = 490 \text{ mm}^2$. Till att börja med provas en viskoelastisk modell, i denna används NASTRAN-funktionerna *CELAS* och *PELAS* till att modellera enkla, linjära fjädrar. Funktionerna *CDAMP* och *PDAMP* används för att erhålla viskösa dämpare. En sådan seriekopplas med en fjäder, vilket ger ett viskoelastiskt element. Det viskoelastiska elementet parallellkopplas med en fjäder, vilket ger en viskoelastisk Zenermodell, som finns beskriven i figur 3.3. Denna modell görs fast inspänd i botten och en punktmassa läggs på i toppen. Sedan läggs en sinusformad dynamisk kraft på vid olika frekvenser och amplituder. Vid låga frekvenser gäller att den viskösa dämpningen ligger nära noll. Frekvensen som ger maximal dämpning bestäms av ekvation (3.5), om frekvensen överstiger detta värde avtar den viskösa dämpningen. Detta beteende finns återgivet i figur 3.4.

Nästa steg är att prova en elastoplastisk modell. Två metoder har utprovats. Den första är att använda funktionerna *CBUSH1D* och *PBUSH1D*, men att modifiera dessa så att dämparen blir ett friktionselement. Detta åstadkoms genom att använda parametern *SHOCKA* i *PBUSH1D*. Funktionen *SHOCKA* definierar kraften i ett olinjärt Kelvinelement med en ekvation som ser ut på följande sätt:

$$F(u, v) = C_v \cdot S(u) \cdot \text{sign}(v) \cdot |v|^{EXPV}$$

där F är kraften, u och v är förskjutning respektive hastighet. Dämpningen C_v , skalfaktorn S och hastighetsexponenten $EXPV$ definieras för att få det önskade friktionselementet. *SHOCKA*-elementet seriekopplas med en fjäder och parallellkopplas med en annan, detta ger ett elastoplastiskt element enligt figur 3.5. Tyvärr har inte *SHOCKA*-modelleringen gett önskat resultat. NASTRAN-körningen konvergerar aldrig, utan avbryts utan att någon felkälla anges. Den andra metoden är att modellera ett endimensionellt stångelement (rod) som elastiskt-idealplastiskt och parallellkoppla detta med en enkel linjär fjäder för att erhålla ett elastoplastiskt element. I figur 4.4 har hystereskurvan för en elastoplastisk modell med stångelement plottats.

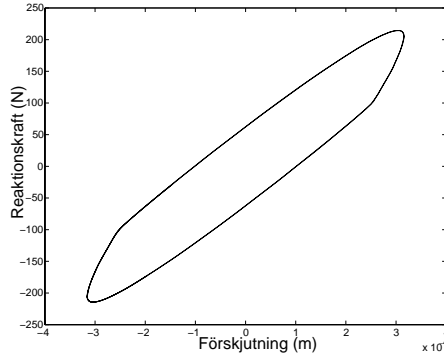


Figur 4.4: Hystereskurva för en endimensionell gummidämpare med elastoplastisk materialmodell.

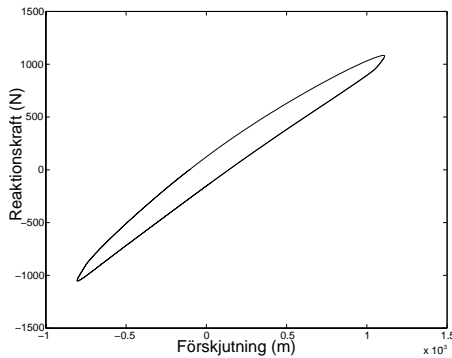
En jämförelse med figur 3.6 ger att modellen uppvisar den typiska parallelogramformade hystereskurvan som har avsetts. De viskoelastiska och elastoplastiska elementen parallellkopplas i sin tur, vilket ger en viskoplastisk femparametermodell. Femparametermodellens hystereskurvor redovisas i figur 4.5 och dessa uppvisar liknande beteende som hystereskurvorna i figur 4.3 som gäller för samma modell modellerad i MATLAB.

Slutligen modifieras den ensamma fjädern till att uppvisa ett olinjärt elastiskt beteende. Detta görs med hjälp av de olinjära elastiska materialmodeller som finns beskrivna i kapitel 3 samt bilaga A. I NASTRAN används parametern *SPRING* i *PBUSH1D* för att ge fjädern ett olinjärt kraft-förskjutningssamband. Olinjära samband mellan kraft och förskjutning enligt Yeohs materialmodell återfinns i kapitel 3.2 med tillhörande Yeoh-parametrar. Hystereskurvan för tryck-/dragbelastning återfinns i figur 4.6, det olinjärt elastiska beteendet syns tydligt redan vid relativt små töjningar.

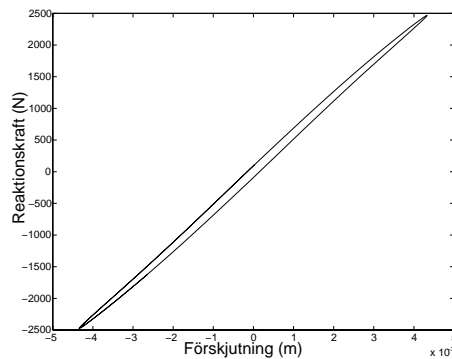
Det är viktigt att notera att ett gummimaterial uppför sig linjärt när det utsätts för skjuvbelastning, åtminstone upp till en skjuvtöjning på cirka 100%, jämför figur 2.1. Följdaktligen krävs det relativt stora spänningar och töjningar för att åskådliggöra ett olinjärt elastiskt beteende vid skjuvning. I figur 4.7 återges hystereskurvan vid skjuvbelastning.



Figur 4.5: *Hystereskurva för en endimensionell gummidämpare med viskoplastisk materialmodell.*



Figur 4.6: *Hystereskurva för en endimensionell dämpare med viskoplastisk materialmodell inkluderande olinjär fjäder utsatt för tryck-/dragbelastning.*

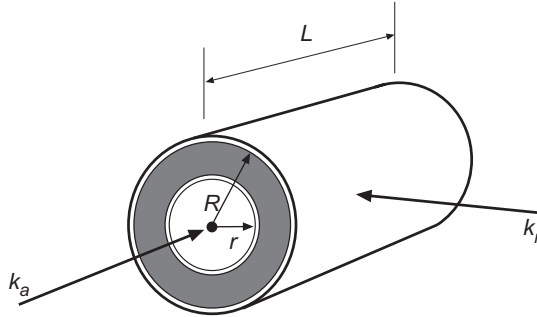


Figur 4.7: *Hystereskurva för en endimensionell dämpare med viskoplastisk materialmodell inkluderande olinjär fjäder utsatt för skjuvbelastning.*

Materialparametrarna vid skjuvning har ändrats till skjuvmoduler istället för E-moduler. Dessutom har flytspänningen Y ökat med en faktor 100 för att reducera det elastoplastiska uppträdandet och därmed tydligare åskådliggöra kurvans krökning.

4.5 Gummidämparens komponentparametrar

Här kommer elastiska styvhetsuttryck för tryck/drag samt skjuvning av en gummbussning att presenteras.



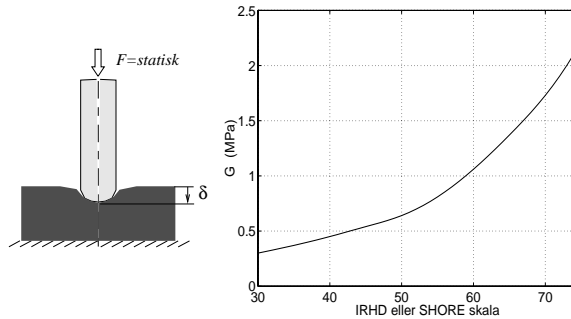
Figur 4.8: Visualisering av gummidämparens styvhet i axiell och radiell led.

För en ihålig cylindrisk gummbussning, avbildad i figur 4.8, gäller följande uttryck för axiell respektive radiell styvhet (k_a respektive k_r), hämtade ur [3]. För gummi-hylsans tjocklek H gäller att $H = R - r$.

$$k_a = \frac{2\pi GL}{\ln(R/r)} \quad (4.8)$$

$$k_r \approx \beta LG \quad (4.9)$$

Där G är den statiska skjuvmodulen, som kan bestämmas direkt ur gummi-materialets uppmätta hårdhet, se figur 4.9. Det förutsätts att $L > 2R$ och β är det minsta av



Figur 4.9: Sambandet mellan skjuvmodulen G och hårdheten enligt Lindley.

följande uttryck

$$\beta = \beta_l \quad \text{eller} \quad \beta = \beta_s + (\beta_l - \beta_s) \frac{0.08L}{R - r}.$$

Variablerna β_s och β_l ges av

$$\beta_s = \frac{80\pi(R^2 + r^2)}{25(R^2 + r^2)\ln(R/r) - 9(R^2 - r^2)}$$

$$\beta_t = \frac{4\pi(R^2 + r^2)}{(R^2 + r^2)\ln(R/r) - (R^2 - r^2)}.$$

Den axiella respektive radiella dämpningskoefficienten kan beräknas med formler som motsvarar styvhetsuttrycken (4.8)-(4.9). Med samma argumentation som i kapitel 4.3 gäller följande formler för beräkning av dämpningskoefficienten c ur viskositetskoefficienten η .

$$c_a = \frac{2\pi\eta L}{\ln(R/r)} \quad (4.10)$$

$$c_r \approx \beta L \eta \quad (4.11)$$

Vidare behövs den kraft, F_y , för vilken friktionselementet börjar glida. Förhållandet mellan denna flytkraft och friktionselementets flytspänning kan härledas på samma sätt som styvhetera framräknades i kapitel 4.3. Ur ekvation (4.6) inses, med $\epsilon = u_r/H$, i tryck-/dragfallet, och $\kappa = u_z/H$ i skjuvfallet att

$$\frac{F}{u} = \textit{konstant} \cdot Y \frac{H}{u}$$

vilket ger att

$$\frac{F}{H} = \textit{konstant} \cdot Y. \quad (4.12)$$

Faktorn *konstant* gäller i detta fall för en ihålig cylindrisk gummidämpare. Alltså kan flytkrafterna i axiella respektive radiella fallet erhållas som

$$\frac{F_y^a}{H} = \frac{2\pi Y L}{\ln(R/r)} \quad (4.13)$$

$$\frac{F_y^r}{H} \approx \beta L Y \quad (4.14)$$

Detta visar att styvheten k , dämpningskoefficienten c och flytkraften F_y för en gummikomponent beror av skjuvmodulen G , viskositetskoefficienten η respektive flytspänningen Y , samt en faktor som i sin tur beror av komponentens geometriska utformning. Här bör understrykas att G , η och Y inte beror av den geometriska utformningen, varje gummikomponentet behöver alltså inte utprovas separat.

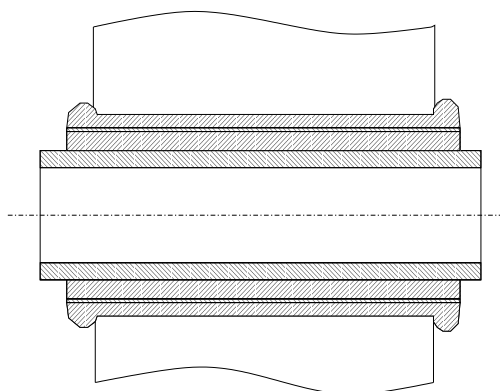
I det dynamiska fallet används samma ekvationer som i det statiska för att bestämma styvhetera, med den skillanden att den dynamiska skjuvmodulen G_{dyn} beror av både frekvens och amplitud för den pålagda lasten. För ett specifikt gummimaterial kan den dynamiska skjuvmodulen bestämmas med ett *Double shear*-skjuvtest som finns beskrivet i 2.4.

Med hjälp av ekvationerna (4.8)-(4.9), (4.10)-(4.11) och (4.13)-(4.14) kan man göra den önskade övergången från material- till komponentnivå för samtliga parametrar till femparametermodellen. Förutsättningen är att materialparametrarna först har bestämts med hjälp av experiment.

4.6 Bestämning av initiella styvheter

För att visa att ekvationerna 4.8 och 4.9 fungerar beräknas de statiska styvheterna för en gummikomponent med samma hårdhet och geometrisk utformning som vibrationsdämparen i det verkliga fallet. Resultaten jämför sedan med ett kvasi-statiskt test som utförts på samma komponent vid Saab i Trollhättan. I radiell led är belastningen av typen tryck/drag och i axiell led blir det skjuvning.

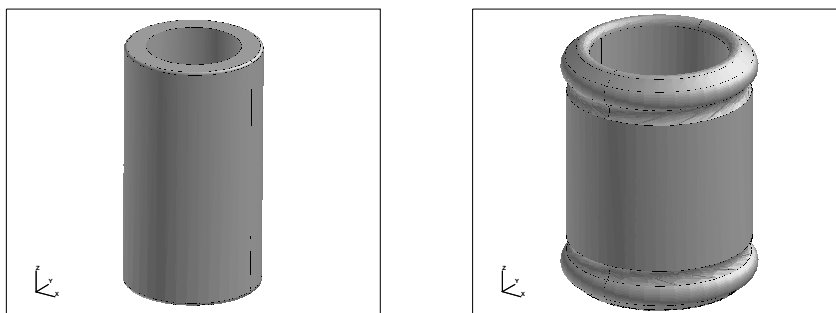
För gummibussningen gäller att hårdheten IRHD = 45, vilket enligt figur 4.9 ger att den statiska skjuvmodulen $G = 0.55 \text{ MPa}$. Gummibussningen är inspänd mellan ett rör och en utanpåliggande länkarm och dess utseende när den är ihoptryckt visas i figur 4.10.



Figur 4.10: *Gummibussning vid ihoptryckt tillstånd.*

4.6.1 Radiell led

I radiell led måste man ta hänsyn till att bussningen är uppdelad i en yttre och en inre cylinder, vilka återges i figur 4.11. I radiell led ger detta en seriekoppling av de båda cylindrarnas styvheter.



Figur 4.11: *Inner- och yttercylinder för en gummibussning.*

För den yttre cylindern gäller: $L=50 \text{ mm}$ $R=18.3 \text{ mm}$ $r=13.75 \text{ mm}$.

Värdena insätts i ekvation (4.9), vilket ger den yttre cylinderns radiella styvhet $k_{r1} = 45800 \text{ N/mm}$

För den inre cylindern gäller: L=50 mm R=13.75 mm r=9.5 mm.

Med insatta värden blir den inre cylinderns radiella styvhet $k_{r2} = 21600$ N/mm. Seriekoppling ger den totala styvheten k_r som

$$k_r = \frac{k_{r1}k_{r2}}{k_{r1} + k_{r2}}$$

Insatta värden ger den totala radiella styvheten $k_r = 14700$ N/mm, detta kan jämföras med det uppmätta värdet vid ett kvasi-statiskt test som är 11100 N/mm. Avvikelsen kan vara i högsta laget för en noggrann analys men är fullt acceptabel för den här tillämpningen.

4.6.2 Axiell led

I axiell led gäller: L=50 mm R=18.3 mm r=9.5 mm.

I axiell led tas ingen hänsyn till att bussningen är uppdelad i en yttre och en inre cylinder, utan den betraktas som en enda cylinder. För att bestämma den initiella styvheten i axiell led insätts värdena i ekvation 4.8, vilket ger $k_a = 262$ N/mm. Detta kan jämföras med det uppmätta värdet vid ett kvasi-statiskt test som är 258 N/mm. Resultatet är alltså korrekt i de två första värdesiffrorna, vilket är den noggrannhetsnivå som föreligger.

4.7 Bestämning av materialparametrar till femparametermodell

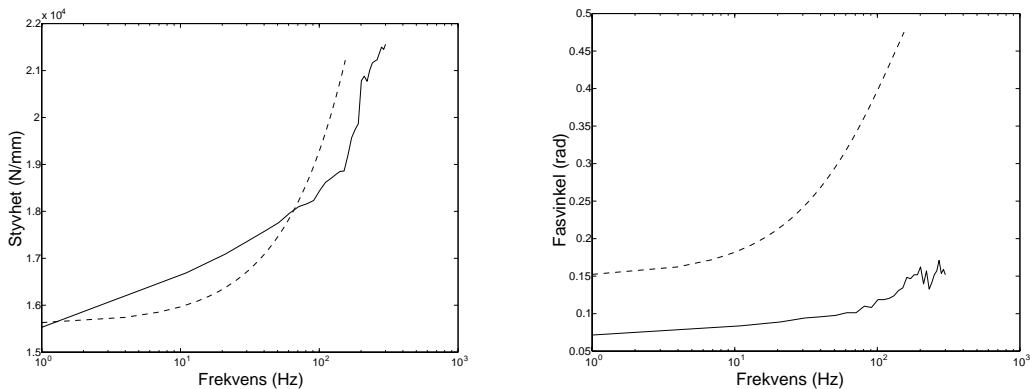
I detta avsnitt bestäms parametrar till femparametermodellen, som finns beskriven i kapitel 3. Vid Saab i Trollhättan har experiment utförts på gummikomponenten. I syfte att anpassa femparametermodellen till experimentella data, används ett MATLAB-program som plottar styvhet och fasvinkel som funktion av både frekvens och amplitud. Detta görs för att kunna jämföra de experimentella kurvorna med femparameterkurvorna, som är återgivna på komponentnivå. Ungefärliga värden på relaxationstiden t_r och flytspänningen Y bestäms genom att plotta fasvinkel som funktion av frekvens respektive amplitud och avläsa maximum. Parametrarna G_∞ , G_v och G_p erhålls genom att gissa värden och jämföra kurvorna tills ett acceptabelt resultat har uppnåtts. I axiell led har ett skjuvprov utförts och i radiell led ett tryck-/dragprov.

4.7.1 Radiell led

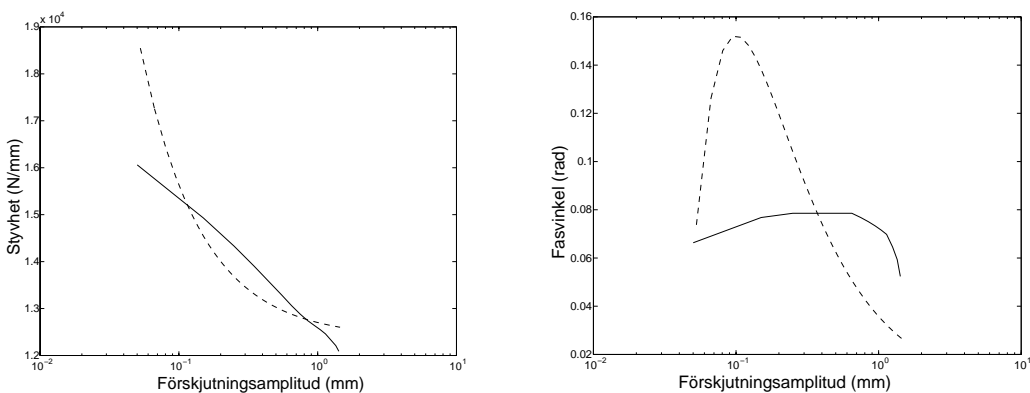
I det radiella fallet sitter gummikomponenten infäst mellan två metallcylindrar och den inre cylindern belastas i radiell led, varvid komponenten utsätts för tryck-/dragbelastning. En förskjutning med en amplitud på 0.1 mm läggs på vid ett frekvensintervall på 0-300 Hz. Styvheten och fasvinkeln mäts som funktion av frekvensen. Därefter läggs en förskjutning med frekvensen 1 Hz på och amplituden varieras mellan 0.05 och 1.4 mm. Här mäts styvhet och fasvinkel som funktion av amplituden.

I figur 4.12 och 4.13 återges de anpassade frekvens- respektive amplitudberoende kurvorna i det radiella belastningsfallet.

Det är svårt att ge femparametermodellen egenskaper som får den att uppvisa samma beteende som de experimentella kurvorna. I detta fall har valts att i första hand låta styvheterna överensstämma och acceptera en något avvikande fasvinkel. Det är nöjaktigt med ett resultat som är korrekt endast i den första värdesiffran. För en



Figur 4.12: Jämförelse mellan anpassade frekvensberoende parameterkurvor till femparametermodell (streckade) och experimentella resultat.



Figur 4.13: Jämförelse mellan anpassade amplitudberoende parameterkurvor till femparametermodell (streckade) och experimentella resultat.

noggrannare studie bör man ta med fler än fem parametrar i modellen, det vill säga införa flera viskoelastiska och elastoplastiska element.

Kurvornas variabler ligger på komponentnivå, varför man behöver omvandla dessa till materialnivå med de ovan angivna formlerna, vilket ger:

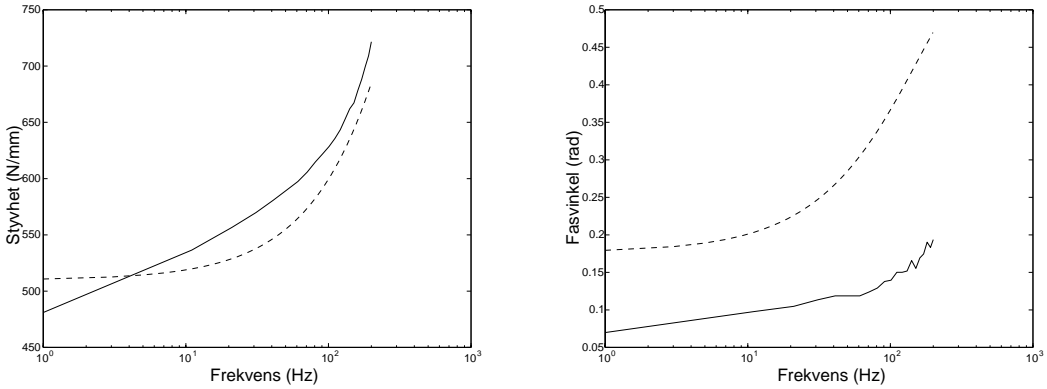
$$\begin{cases} G_{\infty} = 0.5 \text{ MPa} \\ G_v = 1.2 \text{ MPa} \\ t_r = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s} \\ G_p = 0.3 \text{ MPa} \\ Y = 3 \text{ kPa} \end{cases}$$

4.7.2 Axiell led

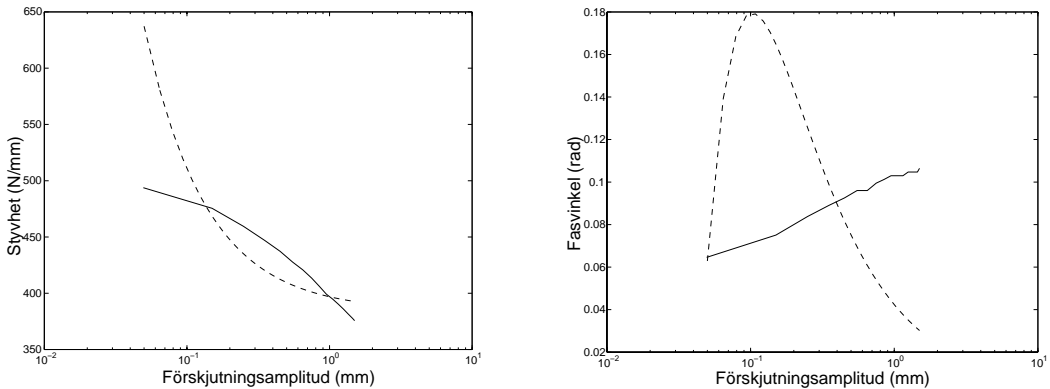
Vid det axiella experimentet belastas också här den inre cylindern, men i detta fall utsätts gummikomponenten för skjuvning eftersom belastningen läggs på i axiell led. En förskjutning med en amplitud på 0.1 mm läggs på vid ett frekvensintervall på 0-200 Hz. Styvheten och fasvinkeln mäts som funktion av frekvensen. Därefter läggs en

förskjutning med frekvensen 1 Hz på och amplituden varierar mellan 0.05 och 1.5 mm. Här mäts styvhet och fasvinkel som funktion av amplituden.

För att anpassa parametrarna görs på samma sätt som i det radiella fallet. Problemet här är detsamma som i det radiella fallet: inga parameterintervall fungerar helt korrekt för både frekvens- och amplitudpassning, se figur 4.14 och 4.15. Om den frekvensberoende fasvinkeln anpassas till den experimentella kommer den amplitudberoende att vara mycket lägre än den experimentella över hela intervallet. Liksom för det radiella fallet kan det hjälpa att ta med flera element. Men den stora skillnaden kan även bero på att gummikomponenten är inklämd och inte fastvulkad mellan cylindrarna. Detta kan nämligen leda till att den glappar när den utsätts för axiell belastning.



Figur 4.14: Jämförelse mellan anpassade frekvensberoende parameterkurvor till femparametermodell (streckade) och experimentella resultat.



Figur 4.15: Jämförelse mellan anpassade amplitudberoende parameterkurvor till femparametermodell (streckade) och experimentella resultat.

De anpassade parametrarna ges av

$$\begin{cases} G_{\infty} = 0.8MPa \\ G_v = 1.5MPa \\ t_r = 2 \cdot 10^{-4}s \\ G_p = 0.6MPa \\ Y = 3kPa \end{cases}$$

4.7.3 Slutliga parametrar

De två olika analyserna ger följande ungefärliga medelvärden på parametrarna till fem-parametermodellen:

$$\begin{cases} G_{\infty} = 0.65MPa \\ G_v = 1.35MPa \\ t_r = 2 \cdot 10^{-4}s \\ G_p = 0.45MPa \\ Y = 3kPa \end{cases}$$

4.8 Bestämning av komponentegenskaper till NASTRAN

Vid skapandet av indatafilen till NASTRAN behöver femparametermodellens numeriska värden anges på komponentnivå, en annan form än den i kapitel 4.7, där värdena anges på materialnivå. Styvheterna anges för den ensamma fjädern och fjädern i det viskoelastiska elementet. På samma sätt beräknas en dämpningskoefficient c för dämparen. Eftersom den elastoplastiska delen (fjäder och friktionselement) modelleras med ett stångelement, behöver fjäderns styvhet, k_p , omvandlas till elasticitetsmodul för en elastisk-idealplastisk stång. Detta görs i fallet med radiell tryck-/dragbelastning med ekvationen

$$E_{rod} = \frac{k_p H}{A_m} \quad (4.15)$$

där H och A_m är tjocklek respektive mantelarea för bussingen, som är samma som stångens längd respektive area.

I fallet med axiell skjuvning behöver fjäderns styvhet, k_p omvandlas till skjuvmodul med ekvationen

$$G_{rod} = \frac{k_p H}{A_t} \quad (4.16)$$

där A_t är tvärsnittsarean för bussingen, som är densamma som stångens area, stångens längd är även här lika med H .

För att ta fram stångens flytspänning behöver ekvation (4.12) användas, men nu är flytkraften känd och ur denna ska stångens flytspänning, Y_{rod} , beräknas, vilket ger

$$\frac{F_y}{H} = konstant \cdot Y_{rod}.$$

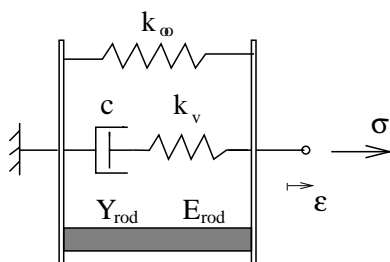
Därmed kan stångens flytspänning, Y_{rod} , beräknas enligt

$$Y_{rod} = \frac{(F_y/H) \cdot H}{A} \quad (4.17)$$

där arean A är A_t i det axiella fallet respektive A_m i det radiella fallet.

De värden på komponentparametrarna som kommer att beräknas i detta avsnitt kommer att användas vid NASTRAN-analysen i kapitel 6.

Femparametermodellen finns representerad på komponentnivå i figur 4.16.



Figur 4.16: Modellering av femparametermodellen på komponentnivå i NASTRAN.

4.8.1 Radiell led

I radiell led består gummibussningen av två seriekopplade cylindrar (en yttre och en inre), varför en femparametermodell kommer att skapas för var och en av dessa. Fjädrarnas styvheter, dämparens dämpningskoefficient och flytkraften i friktionselementet beräknas med ekvationerna (4.9), (4.11) och (4.14). Det elastiskt-idealplastiska stångelementets parametrar erhålls med ekvation (4.15) och (4.17).

Den yttre cylinderns tjocklek är 4.6 mm, varför femparametermodellen modelleras med element av denna längd. Stångelementets area är densamma som halva mantelarean på innersidan av cylindern, eftersom det är här kraften tas upp, arean är 0.0022 m^2 . Femparametermodellens värden för den yttre av de två cylindrarna blir

$$\begin{cases} k_\infty = 48 \text{ MN/m} \\ k_v = 99 \text{ MN/m} \\ c = 59.6 \text{ kNs/m} \\ E_{rod} = 69.2 \text{ MPa} \\ Y_{rod} = 462 \text{ kPa} \end{cases}$$

Den inre cylinderns tjocklek är 4.2 mm, halva mantelarean är 0.0015 m^2 . För den inre cylindern ges de fem parametrarna av

$$\begin{cases} k_\infty = 24 \text{ MN/m} \\ k_v = 50 \text{ MN/m} \\ c = 30.1 \text{ kNs/m} \\ E_{rod} = 46.8 \text{ MPa} \\ Y_{rod} = 312 \text{ kPa} \end{cases}$$

4.8.2 Axiell led

I axiell led kan de två cylindrarna betraktas som en homogen cylinder. Härvid används ekvation (4.8), (4.10) och (4.13) för att beräkna de två fjädrarnas parametrar, medan ekvationerna (4.16) och (4.17) ger stångens egenskaper. Gummidämparens snittarea är 770 mm^2 och dess längd är 50 mm. Den elastisk-idealplastiska stången utformas därför

med dessa egenskaper. De fem parametrarna ges av

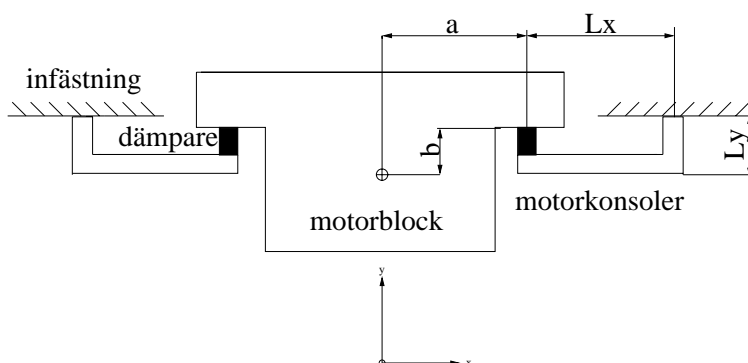
$$\begin{cases} k_{\infty} = 311kN/m \\ k_v = 647kN/m \\ c = 388Ns/m \\ E_{rod} = 14MPa \\ Y_{rod} = 93kPa \end{cases}$$

Kapitel 5

Tvådimensionella strukturmodeller

Som en tillämpning av den endimensionella diskussionen i kapitel 4, implementeras en enkel dämparmodell i en omgivande struktur utsatt för stationära svängningar. Vibrationsdämparna placeras som kopplingselement mellan en bilmotor och dess omgivande balkstruktur. I detta kapitel kommer parametrarna från kapitel 4.2 att användas. Motorblocket med omgivande upphängning modelleras tvådimensionellt i en vy sedd framifrån bilen enligt figur 5.1.

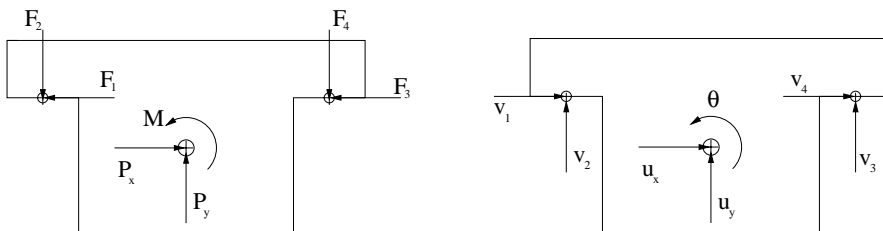
5.1 Dämpare i omgivande struktur



Figur 5.1: En förenklad tvådimensionell modell av en bilmotor upphängd i balkar via vibrationsdämpare.

Motorblocket modelleras som en stelkropp med tre frihetsgrader i tyngdpunkten, det har massan m och masströghetsmomentet J . Dämparna modelleras som endimensionella och frikopplade, verkande i två frihetsgrader enligt figur 5.2. Detta innebär att motorblockets infästning med motorkonsolerna, via dämparna, modelleras med två frihetsgrader, en i horisontell och en i vertikal led. Chassit modelleras med balkelement som har elasticitetsmodulen E , arean A samt yttröghetsmomentet I . Systemet påverkas av harmoniska krafter och moment som placeras i motorblockets tyngdpunkt. I det följande anger kolonnmatriisen \mathbf{u} förskjutningar som gäller för motorns tyngdpunkt

(global förskjutning). Kolonnmatrisen \mathbf{v} avser lokal förskjutning i noden mellan motorblock och vibrationsdämpare medan kolonnmatrisen \mathbf{F} innehåller krafterna $F_1 - F_4$ enligt figur 5.2.



Figur 5.2: *Friläggning av motorblocket.*

5.1.1 Uppställning av rörelseekvationer

Den pålagda kraften ges av $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 \sin \nu t$. Friläggning av motorblocket ger följande rörelseekvationer

$$\begin{cases} P_x - F_1 - F_3 = m\ddot{u}_x \\ P_y - F_2 - F_4 = m\ddot{u}_y \\ M + bF_1 + aF_2 + bF_3 - aF_4 = J\ddot{\theta} \end{cases}$$

Rörelseekvationen för motorn på matrisform lyder

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}^T\mathbf{F} = \mathbf{P}.$$

Där $\ddot{\mathbf{u}}$ är accelerationen för motorns tyngdpunkt och \mathbf{F} är den pålagda kraften ovanpå dämparen. \mathbf{M} är tröghetsmatrisen för motorn, som ges av

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix}$$

Masströghetsmomentet för motorn, J , beräknas approximativt ur ekvationen

$$J = m \frac{h^2 + (2a)^2}{12}$$

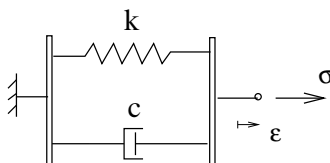
som är hämtad ur [8]. Det gäller att m är motorns massa och h är dess höjd. Måttet a återges i figur 5.1 och representerar ungefär halva bredden på motorn. I beräkningarna ansätts motorn som en stelkropp med längden 0.6 meter, bredden 0.4 meter och höjden 0.4 meter. Detta ger ett masströghetsmoment för motorn på 6.7 kgm^2 om massan är 250 kg.

Matrisen \mathbf{B} anger förhållandet mellan lokala förskjutningar \mathbf{v} och globala förskjutningar \mathbf{u} , vilket lyder $\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{u}$. \mathbf{B} bestäms av motorstrukturens utformning enligt

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

5.1.2 Modellering med Kelvinmodell

I detta avsnitt modelleras gummidämparna som ett Kelvinmaterial, se figur 5.3, det vill säga en fjäder parallellkopplad med en dämpare.



Figur 5.3: *Mekanisk analogi som illustrerar ett Kelvinmaterial, en enkel materialmodell.*

Som en första approximation modelleras kopplingselementet som en linjär fjäder i den horisontella och vertikala frihetsgraden, vilket innebär att dämpningskoefficienten $c=0$ i Kelvinmodellen. Här gäller $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{v}$ där \mathbf{K} är styvhetsmatrisen för de fyra fjäderfrihetsgraderna, som ges av

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix}$$

Detta ger att

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}^T\mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{P}. \quad (5.1)$$

I denna MATLAB-analys begränsas studien till att endast omfatta stationära svängningar. Detta innebär att man inte tar med själva insvängningsförloppet i analysen. En harmonisk störningslast, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 \sin \nu t$, ger upphov till en harmonisk förskjutning, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \sin \nu t$, i med- eller motfas. Eftersom förskjutningen \mathbf{u} är en sinusserie kan accelerationen $\ddot{\mathbf{u}}$ skrivas $\ddot{\mathbf{u}} = -\nu^2\mathbf{u}$, där ν är den drivande vinkelfrekvensen. Detta ger att

$$(\mathbf{B}^T\mathbf{K}\mathbf{B} - \nu^2\mathbf{M})\mathbf{u}_0 = \mathbf{P}_0.$$

Den resulterande förskjutningshistorian för motorn erhålls som en amplitud, \mathbf{u}_0 . Förskjutningshistorian i botten på fjädern ges nu av $\mathbf{v}_0 = \mathbf{B}\mathbf{u}_0$. Ur denna beräknas en amplitud för reaktionskraften i botten på fjädern genom $\mathbf{F}_0 = \mathbf{K}\mathbf{v}_0$. Denna kraft läggs i sin tur på balkstrukturen. CALFEM-funktioner används för att beräkna reaktionskrafter och förskjutningar för hela strukturen.

Därefter modelleras kopplingselementet som en linjär fjäder parallellkopplad med en dämpare i varje frihetsgrad utom rotationsfrihetsgraden. Jämviktsekvationen är densamma, men kraften i kopplingselementet beror nu av både förskjutning och hastighet $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{v} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}}$. Dämpningsmatrisen \mathbf{C} ges av

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix}$$

Dämparelementet ger upphov till en fasförskjutning av reaktionskraft och förskjutning, i förhållande till den pålagda kraften. Genom att ansätta förskjutningen i motorns

tyngdpunkt som $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s \sin \nu t + \mathbf{u}_c \cos \nu t$ och sätta in detta uttryck i rörelseekvationen (ekvation 5.1) erhålls ett ekvationssystem för amplituderna \mathbf{u}_s och \mathbf{u}_c

$$\begin{cases} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{u}_s - \mathbf{C} \mathbf{u}_c \nu - \mathbf{M} \mathbf{u}_s \nu^2 = \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{u}_c + \mathbf{C} \mathbf{u}_s \nu - \mathbf{M} \mathbf{u}_c \nu^2 = \mathbf{0} \end{cases}$$

Insättning av den andra ekvationen i den första ger

$$\begin{cases} \mathbf{u}_s = (\mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} + \nu^2 \mathbf{C} (\mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} - \nu^2 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{C} - \nu^2 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{u}_c = -(\mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} - \nu^2 \mathbf{M})^{-1} \nu \mathbf{C} \mathbf{u}_s \end{cases}$$

Dessa ekvationer ger den totala förskjutningsamplituden för motorns tyngdpunkt. Förskjutningarna i kopplingselementens frihetsgrader blir $\mathbf{v}_s = \mathbf{B} \mathbf{u}_s$ samt $\mathbf{v}_c = \mathbf{B} \mathbf{u}_c$. Genom derivering erhålls en hastighetshistoria för frihetsgraderna. Nu kan reaktionskraften beräknas som en tidshistoria via $\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{v} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{v}}$ där $\mathbf{v} = \mathbf{v}_s \sin \nu t + \mathbf{v}_c \cos \nu t$.

5.2 Implementering i MATLAB/CALFEM

Den endimensionella dämparen placeras i en omgivande modellstruktur. Den enkla modellstrukturen består av en motor och två upphängningsbalkar med kopplingselement emellan. Strukturen modelleras tvådimensionellt i MATLAB/CALFEM. Flera olika, mer eller mindre förenklade, lösningsmetoder utförs för att verifiera programmen. I kapitel 5.2.1 och 5.2.2 modelleras gummidämparna som Kelvinmaterial för att underlätta beräkningarna.

5.2.1 Stel balkstruktur

Den första metoden är en enkel stationär analys. Eftersom balkstrukturen är utformad i stål är den mycket styvare än gummidämparen. Analysen sker därför i två steg. Först analyseras motor och dämpare som är fast inspända i botten, lasten läggs på som en sinusformad krafthistoria i motorns tyngdpunkt, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 \sin \nu t$. Sedan används CALFEM-funktioner för att beräkna reaktionskrafter och förskjutningar för själva balkstrukturen. Detta är en god approximation, som dessutom ger en enkel analys.

5.2.2 Global assemblering

Den andra metoden är, liksom den första, en stationär analys. I denna metod assembleras dämparelementens styvhet och dämpning in i globala styvhets-, och dämpningsmatriser som innehåller balkarnas styvhet och dämpning. Assembleringen görs så att balkarnas styvhet parallellkopplas med fjädern i dämparelementet. Även massmatrisen modifieras genom att motorns massa läggs in ovanpå dämparelementen. Innan fjädrarna läggs på har systemet 18 stycken frihetsgrader (tre i varje balknod enligt figur 5.1). Genom att fyra nya frihetsgrader assembleras får systemet nu $(18+4)=22$ frihetsgrader. Reaktionskrafter och förskjutningar för systemet beräknas med hjälp av CALFEM-funktionen *step2* genom att lösa ekvationssystemet $\mathbf{M}_g \ddot{\mathbf{u}}_g + \mathbf{C}_g \dot{\mathbf{u}}_g + \mathbf{K}_g \mathbf{u}_g = \mathbf{F}_g$. Index g i ekvationerna står för globala egenskaper, vilka inkluderar alla frihetsgrader i balkstrukturen.

5.2.3 Tidsstegning med stel balkstruktur

I den tredje metoden används den endimensionella femparametermodellen som presenterades i kapitel 4.2 för att modellera gummidämparna. Eftersom analysen stegas fram i tiden modifieras MATLAB-funktionen för att kunna anropas i varje tidssteg, med en pålagd förskjutning som last. Friläggning av motorn ger med Newtons 2:a lag

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{P} - \mathbf{B}^T \mathbf{R}.$$

Där $\mathbf{P}(t)$ är den i motorns tyngdpunkt pålagda kraften, $\mathbf{u}(t)$ är förskjutningen i frihetsgraderna ovanpå dämparen och $\mathbf{R}(t)$ är reaktionskraften i dämparen. Reaktionskraften i varje frihetsgrad ges av

$$R(t) = -(\sigma_e + \sigma_v + \sigma_p)A_d$$

där e, v och p står för elastiskt, visköst och plastiskt spänningsbidrag och A_d är dämparens tvärsnittsarea. Accelerationen \ddot{u} approximeras med centrala differensmetoden enligt

$$\ddot{u}_i = \frac{(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}))}{\Delta t^2}.$$

Approximationen av \ddot{u} insätts i rörelsekvationen, vilket ger

$$\mathbf{u}_{i+1} = 2\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1} + \Delta t^2 \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P}_i - \mathbf{B}^T \mathbf{R}_i).$$

Om man förutsätter att $\mathbf{u}(0)$ och $\dot{\mathbf{u}}(0)$ är kända begynnelsevärden kan \mathbf{u}_{-1} beräknas ur

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = \frac{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{-1}}{2\Delta t}.$$

Detta ger nämligen att $\mathbf{u}_{-1} = -2\Delta t \dot{\mathbf{u}}(0) + \mathbf{u}_1$. Uttrycket insättes i ekvationen för \mathbf{u}_{i+1} med $i=-1$, vilket ger

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}(0) + \Delta t \dot{\mathbf{u}}(0) + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{B}^T \mathbf{R}_0).$$

Med alla begynnelsevärden kända kan nu följande storheter beräknas i varje tidssteg:

- Reaktionskraft under dämparen \mathbf{R} med MATLAB-funktionen.
- Förskjutningen vid toppen av dämparen, \mathbf{u} , erhålls ur den modifierade jämviktsekvationen.
- Accelerationen $\ddot{\mathbf{u}}$ beräknas med centrala differensmetoden.

När alla tidssteg har avverkats kan den erhållna reaktionskraftshistorian läggas på balkstrukturen, som analyseras på samma sätt som i metod 1.

5.2.4 Tidsstegning med assemblering

Den fjärde metoden fungerar på samma sätt som den tredje, med förändringen att balkarnas styvhet approximeras som fjädrar i x-led och y-led. Balkstyvheterna seriekopplas med fjädrarna i femparametermodellen i dämparfunktionen *Transientserie*, som finns återgiven i bilaga B.2. Balkarnas fjäderkonstanter beräknas med elementarfall hämtade ur [8], vilket ger följande ekvationer.

$$\text{Förskjutning i x-led} \quad \delta_x = \frac{F_x L_y^3}{3EI}.$$

Vinkeländring $\theta = \frac{ML_y}{EI}$ där $M = F_y L_x$.

Förskjutning i y-led $\delta_y = \frac{F_y L_x^3}{3EI} + \theta L_x$.

Dessa ekvationer ger tillsammans med $F = k\delta$ styvheterna i x- respektive y-led som

$$k_x = \frac{3EI}{L_y^3} \quad k_y = \frac{3EI}{L_x^3 + L_x^2 L_y}$$

Uttrycken seriekopplas i sin tur med dämparen och den totala styvheten k_{tot} erhålls enligt

$$k_{tot} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (5.2)$$

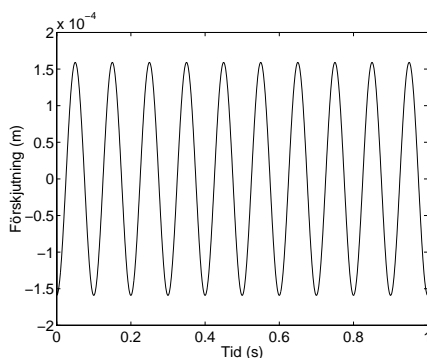
På detta vis kan förskjutningar och reaktionskrafter för en pålagd last beräknas i varje tidssteg. När alla tidssteg har avverkats kan den erhållna reaktionskraftshistorian läggas på balkstrukturen, som analyseras på samma sätt som i metod 1 och 3.

5.3 Verifiering av balkstruktur i MATLAB/CALFEM

5.3.1 Stel balkstruktur

Först utprovas den enklaste MATLAB-funktionen, där balkstrukturen betraktas som stel i förhållande till dämparna. I syfte att utröna om Kelvinmodelleringen ger korrekt resultat jämförs funktionen med lösningen till en endimensionell differentialekvation för ett Kelvinmaterial, hämtad ur [13].

$$u(t) = \frac{Py}{2k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} ((1 - \beta^2)\sin(\omega t) - 2\xi\beta\cos(\omega t))$$

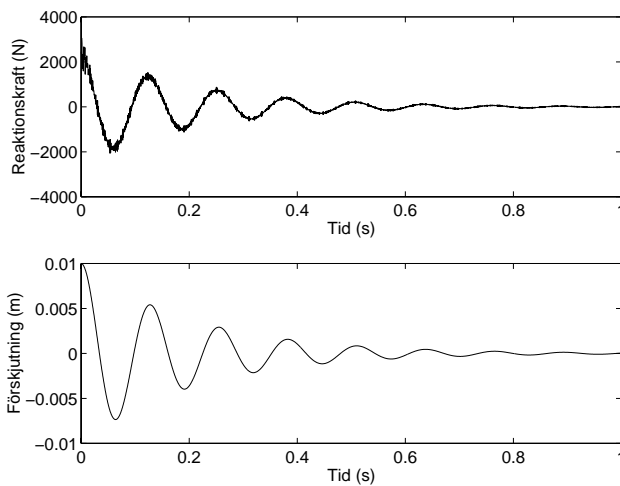


Figur 5.4: Jämförelse mellan framräknad och teoretisk förskjutning i noderna mellan motor och dämpare.

Kurvorna, som i det dämpade fallet återges i figur 5.4, uppvisar exakt samma utseende för flera olika belastningsfall såväl med som utan dämpning. Detta tyder på att programmet ger korrekt resultat för stationära svängningar med enkla fjäder-dämpare system.

5.3.2 Global assemblering

Den tvådimensionella balkstrukturen med en massa kopplad via två dämparelement ska nu verifieras. Efter att ha verifierat det enklaste programmet för stationära svängningar, gäller det att undersöka om den andra metoden simulerar ett korrekt insvängningsförlopp. MATLAB-funktionen testas genom att lägga på en initial förskjutning på 10 mm i y-led (uppåt) på dämparnas övre noder (i frihetsgrad 20 och 22). Dämpningskoefficienten c sätts till $c=1000$ Ns/m och reaktionskraften och förskjutningen i frihetsgrad 20 och 22 plottas som funktion av tiden.



Figur 5.5: Utdämpning av reaktionskraft och förskjutning vid pålagd initial förskjutning på 1 cm.

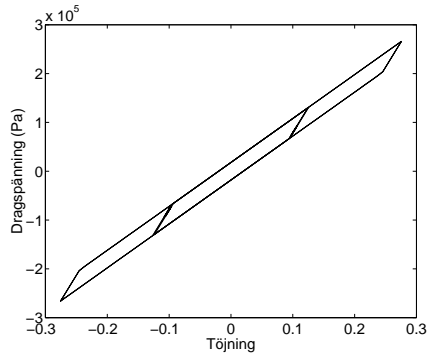
Resultatet visas i figur 5.5 och det kan konstateras att systemets reaktionskrafter och förskjutningar dämpas ut med tiden, vilket är ett förväntat beteende.

5.3.3 Tidsstegning med fast inspänning

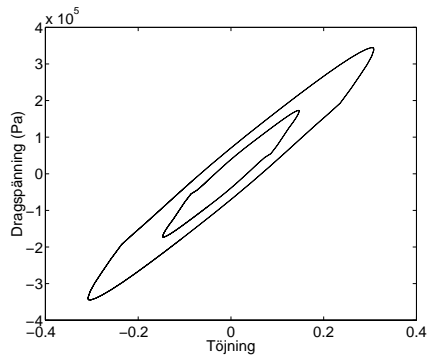
I syfte att jämföra den tredje modellens uppträdande med teoretiskt förväntade hystereskurvor, plottas reaktionskraften som funktion av förskjutningen vid flera olika pålagda kraftamplituder vid stationärt tillstånd. För att verifiera att friktionselementet fungerar, analyseras först den elastoplastiska modellen. Dess hystereskurva återges i figur 5.6.

Hystereskurvorna plottas för två olika amplituder på den pålagda kraften och det framgår tydligt att den dynamiska amplituden minskar med ökande kraftamplitud. Figuren jämförs med figur 3.6, som har ungefär likadant utseende.

Figur 5.7 visar hystereskurvan för en viskoplastisk femparametermodell. Denna överensstämmer väl med den experimentella kurvan i figur 2.6. Eftersom fjädern i modellen är linjär saknar den det olinjära elastiska beteendet som gör att den experimentella kurvan kröker på- och avlastningssidan.



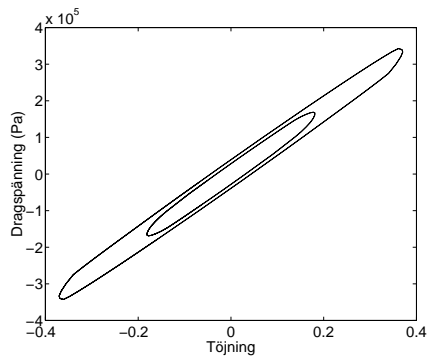
Figur 5.6: *Hystereskurva för en elastoplastisk materialmodell för olika kraftamplituder.*



Figur 5.7: *Hystereskurva för en viskoplastisk materialmodell för olika kraftamplituder.*

5.3.4 Tidsstegning med assemblering

Hystereskurvan för en femparametermodell i seriekoppling med balkstrukturen plottas i figur 5.8.



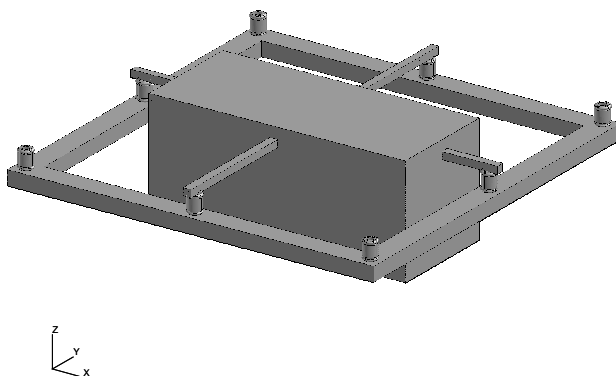
Figur 5.8: *Hystereskurva för en viskoplastisk materialmodell seriekopplad med balkstrukturen.*

De båda sätten att använda tidsstegning (metod 3 och 4) jämförs och man kan konstatera att hystereskurvorna uppvisar samma beteende. Det visar sig att lutningen på kurvan är något lägre, samtidigt som deformationen är något större, i det fall där dämparmodellen är seriekopplad med motorkonsolerna. Detta beror på att seriekopplingen ger en något lägre styvhet för hela strukturen.

Kapitel 6

Tredimensionella strukturmodeller

I syfte att analysera dämparmodellerna i en verklighetsliknande simulering, implementeras dessa i en modell av en motor med omgivande balkstruktur. Gummidämparnas axiella riktning är orienterad i motorns vertikala riktning. Motorstrukturen som modelleras i PATRAN illustreras i figur 6.1, där den fyrkantiga klumpen i mitten föreställer motorn och ramen runt denna utgörs av ihåliga balkar. Denna balkstruktur är förenklad jämfört med hur den ser ut i verkligheten och den kommer att ges en ganska grov elementindelning. Detta kan göras eftersom avsikten i första hand är att modellera själva dämparna korrekt, balkstrukturens uppbyggnad och motorns utseende kommer i andra hand.



Figur 6.1: Visualisering av hur motorn är upphängd i balkstrukturen via gummidämparna.

De fyra gummidämpningarna i hörnen är fast inspända i bilens chassi (ej avbildat i figuren). Totalt finns det åtta gummidämpningar i strukturen och alla är inspända mellan en inre och en yttre stålcyllinder. I kopplingarna mellan olika delar av strukturen gäller

att det är de inre stålcyldrarna i bussningarna som är kopplade till motorn och chassit. De yttre är kopplade till balkarna.

De endimensionella vibrationsdämparna är femparametermodeller, vars parametrar har framtagits i kapitel 4.8. Balkstrukturen modelleras med fyrnodiga skalelement som ges en tjocklek på 2.5 mm. Motorn, som visas i figur 6.2, modelleras med solidelement i den symmetriska analysen och med balkelement i den fullständiga analysen.

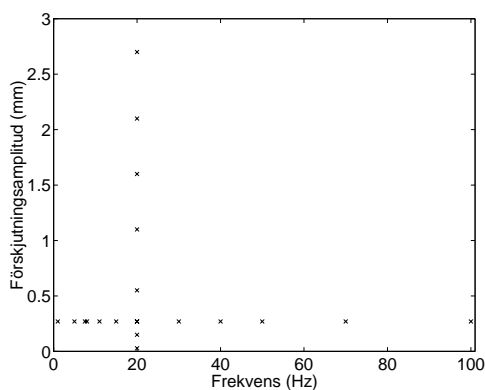


Figur 6.2: Verklig utformning av en bilmotor till Saab.

Vid NASTRAN-analysen i kapitel 4.4 används en dator av typen *SGI Octane* med en R10000 processor. Den fullständiga analysen kan inte köras på denna dator då den innehåller flera gummidämpare och lösningsmetoden som används är tidsstegning, vilken kräver mycket datorkraft. Därför används en paralleldator av typ *SGI Origin 2000* med 32 stycken R12000 processorer.

6.1 Analysens upplägg och syfte

NASTRAN-analysen syftar till att visa hur gummidämparna fungerar vid belastning från motorn. Hystereskurvor uppritas för alla dämpare i den analyserade strukturen vid ett antal olika belastningsfall med varierande frekvens och amplitud. Därmed kan såväl dämpning som frekvens- och amplitudberoende studeras. Med en given förskjutningsamplitud körs ett antal olika frekvenser, sedan hålls frekvensen konstant varvid amplituden varierar. Dessa båda intervall presenteras i figur 6.3.

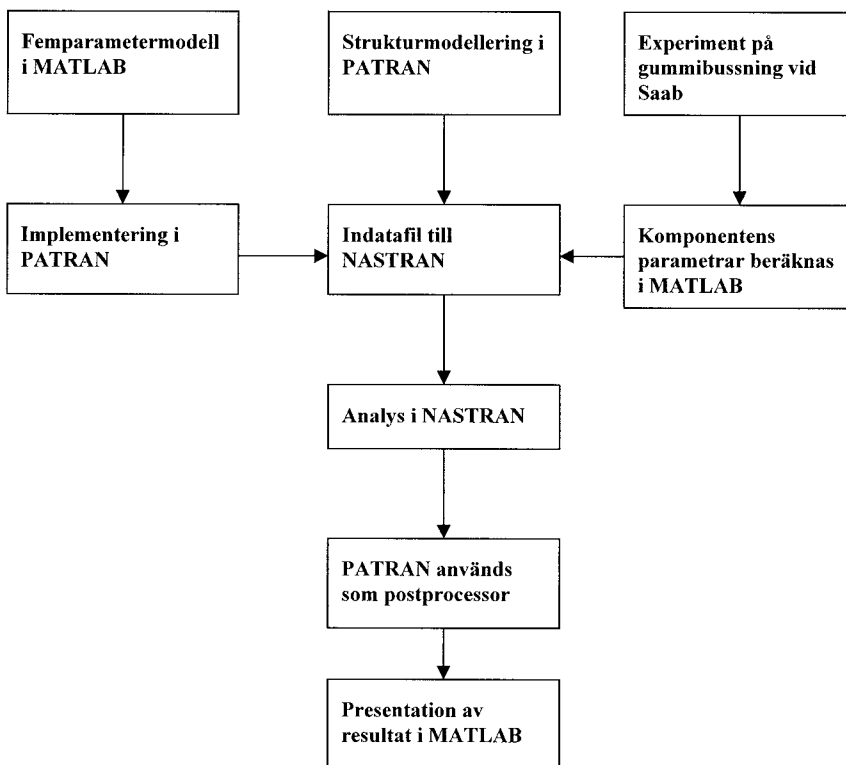


Figur 6.3: Frekvens- och amplitudintervall till NASTRAN-analys.

Själva analysen kan indelas i följande steg:

- Modellering av motor och balkstruktur i PATRAN.
- Modifiering av indatafil till NASTRAN. Inläggning av femparametermodeller.
- Analys i NASTRAN.
- PATRAN används som postprocessor.
- Grafisk presentation av resultat i MATLAB.

I figur 6.4 visas arbetets upplägg vid NASTRAN-analysen.



Figur 6.4: Arbetsgång vid NASTRAN-analysen.

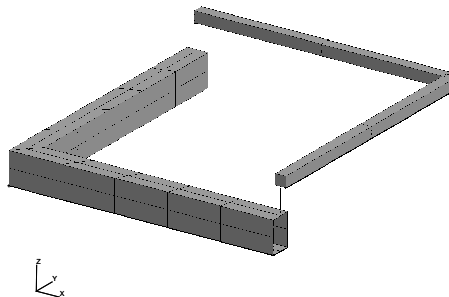
De olika typer av element som används vid NASTRAN-modelleringen återfinns i tabell 6.1.

Elementtyp	dimension	namn	antal noder
skal	2	<i>SHELL</i>	4
fjäder	1	<i>ELAS</i>	2
olinjär fjäder	1	<i>SPRING</i>	2
dämpare	1	<i>DAMP</i>	2
stång	1	<i>ROD</i>	2
Kelvin	1	<i>SHOCKA</i>	2
solid	3	<i>SOLID</i>	8+1
balk	1	<i>BEAM</i>	2

Tabell 6.1: *Olika element som används vid modelleringen i PATRAN.*

6.2 Symmetrisk modellering av balkstrukturen

I den första analysen läggs belastningen på endast i z-led, se figur 6.5. Problemet blir nu symmetriskt, varför endast en fjärdedel av balkstrukturen behöver modelleras.

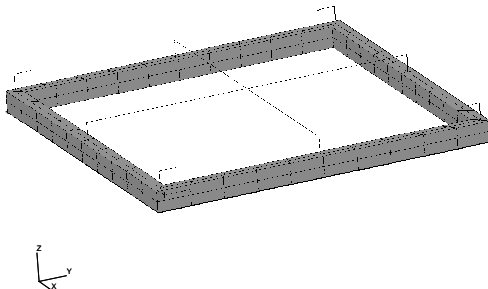


Figur 6.5: *En fjärdedel av balkstrukturen modellerad i NASTRAN.*

Balken är inspänd via en gummidämpare i hörnet. Själva balkstrukturen uppritas i PATRAN medan utplaceringen av de endimensionella dämparmodellerna sker genom direkt inmatning i indatafilen till NASTRAN. Motorn modelleras med solidelement, som ges en massa som är en fjärdedel av motorns totala massa. Solidelementen fastläses i den riktning där symmetri föreligger, noderna läses fast i y-led för balkelementet som har en utsträckning i x-led och vice versa. Detta görs eftersom motorn inte kommer att förflytta sig i xy-planet vid den horisontella belastningen. Solidelement kan inte ta upp ett böjmoment från motorn, men detta är inte heller gummidämparna avsedda att göra. Solidelementen är i grunden åttanodiga, men för att koppla ihop dem med de endimensionella gummidämparna läggs en extra nod in på varje plats som är sammankopplad med en dämpare. I denna förenklade analys modelleras gummidämparna med endimensionella femparametermodeller endast i z-led. Denna förenklade modell används för att testa om gummidämparna uppträder korrekt när de implementeras i en omgivande struktur.

6.3 Modellering av hela balkstrukturen

Motorn hängs upp i en balkstruktur via fyra stycken gummikomponenter, som i verkligheten är tredimensionella. I denna analys modelleras de med endimensionella vibrationsdämpare i varje koordinatled. I syfte att korta ned beräkningstiden läggs ingen last på i x-led, detta gör också att det räcker med utplacering av endimensionella dämparmodeller i y- och z-led. PATRAN-filen blir mer överskådlig och förenklingen innebär ingen inskränkning i modelleringen. Detta eftersom egenskaperna i x-led, liksom i y-led, representerar radiella dämparegenskaper. Balkstrukturen är i sin tur upphängd i fyra andra gummidämpare av samma slag. Dessa är i sin tur fast inspända i bilens chassi, som här ansätts till att endast ta upp, inte ge ifrån sig, vibrationer. I figur 6.6 åskådliggörs den modellerade balkstrukturen.



Figur 6.6: Hela balkstrukturen modellerad i PATRAN.

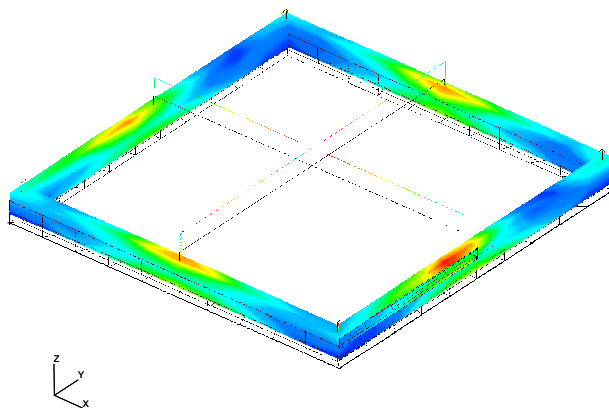
Tiden som åtgår för de olika analyserna varierar kraftigt beroende på hur korta tidssteg som krävs och hur lång tid det tar för systemet att svänga in sig. I de analyser som har körts har tidsåtgången varierat från cirka 5 minuter upp till ungefär två timmar. Körningar vid hög frekvens tar längst tid, då insvängningen sker långsamt och de snabbt svängande reaktionskrafterna och förskjutningarna kräver ett kort tidssteg.

6.3.1 Balkstrukturens translation

Kraften på motorn läggs på i y- och z-led samt som ett moment kring x-axeln. Balkstrukturen i sin tur är sammankopplad med ytterligare fyra stycken gummikomponenter som är fast inspända. Dessa är modellerade på samma sätt som gummikomponenterna mellan motor och balk. Det faktum att en nod är placerad i mitten av dämparmodellen, i seriekopplingen mellan fjädern och dämparen (viskoelastiska elementet) försvårar modelleringen i PATRAN. Det visar sig att om ett element placeras i 90° med ett annat så förskjuts noden i hörnet mellan dem kraftigt vid belastning. I syfte att motverka detta låses de tre noderna i varje dämparelement, så att de alltid ligger på en rät linje. För att göra detta används NASTRAN-funktionen *MPC* (Multipoint Constraint) där summan av nodernas förskjutningar i en viss riktning sätts till noll. Själva motorn modelleras med tvånodiga balkelement, som sträcker sig tvärs över den omgivande strukturen och har ett tvärsnitt på 0.4×0.4 m samt längden 0.6 m. Balkelementen ges en tillräckligt hög densitet så att de uppnår samma vikt som den verkliga motorn, vilken ansätts

till 250 kg. De balkelement som representerar motorn kopplas ihop med dämparna via masslösa och oändligt styva balkelement. Denna modellering framgår inte av figur 6.6, eftersom alla balkelement här representeras av linjer.

Vid analysering av modellen belastas motorn först med en statisk kraft i z-led (som representerar tyngdkraften) på 2500 N samt en dynamisk last med amplituden 5000 N i y-led och 1000 N z-led. Genom att studera figur 6.7 kan man konstatera att dämparna uppträder på önskat sätt, deras deformation gör att balkstrukturen translateras i y- och z-led.



Figur 6.7: Balkstrukturens translation samt töjningsbild vid belastning från motorn verkande i y- och z-led.

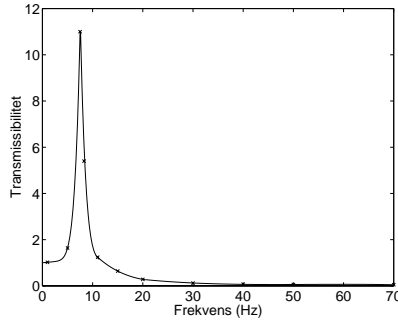
6.3.2 Frekvensanalys vid vertikal belastning

Ett antal olika körningar på hela balkstrukturen med modellerade dämpare i y- och z-led har utförts. Resultaten för analyser vid olika frekvenser återges i tabell 6.2. Den pålagda lasten består av en statisk last på 2500 N som skall motsvara motorns tyngdkraft, samt en sinusformad dynamisk last på 1000 N. Både den statiska och den dynamiska lasten verkar endast i z-led. Förskjutningarna δ_{stat} och δ_{dyn} står för nedböjningen i motorns tyngdpunkt på grund av den statiska respektive den dynamiska lasten. R_{stat} och R_{dyn} står för reaktionskraften i en av balkens infästningar, vilket betyder att den totala kraften är fyra gånger så stor.

Det relativt enkla systemet, med en endimensionell masslös dämparmodell och en punktmasa, som används har en enda egenfrekvens. I praktiken har en gummidämpare en utspridd massa och därmed oändligt många egenfrekvenser, detta är en begränsning för modellen. Egenfrekvensen vid belastning i vertikal led beräknas med ekvation (4.7). Balkarna väger cirka 15 kg som adderas till motorns massa, vilket ger den totala massan 265 kg. Den totala styvheten bestäms av parametern k_{∞} i axiell led. Med hänsyn taget till att det finns fyra parallellkopplade dämpare mellan motor och balkar multipliceras k_{∞} med 4. Eftersom strukturen även har fyra gummidämpare mellan balk och infästning är det totalt åtta dämpare, fyra parallellkopplade som i sin tur är seriekopplade med fyra andra, inbördes parallellkopplade. Seriekopplingen ger med ekvation (5.2) en total styvhet på

Frekvens [Hz]	δ_{stat} [mm]	δ_{dyn} [mm]	R_{stat} [N]	R_{dyn} [N]
1	4.3	1.25	625	255
5	4.3	2.3	625	410
7.5	4.3	18	625	2750
8	4.3	8.8	625	1350
11	4.3	1.6	625	310
15	4.3	0.65	625	160
20	4.3	0.27	625	70
30	4.3	0.11	625	30
40	4.3	0.050	625	18
50	4.3	0.035	625	14
70	4.3	0.018	625	12

Tabell 6.2: Förskjutningsamplituder och reaktionskrafter i varje gummidämpare vid olika frekvenser för en pålagd dynamisk last på 1000 N överlagrad med en statisk på 2500 N.



Figur 6.8: Transmissibilitet som funktion av frekvensen.

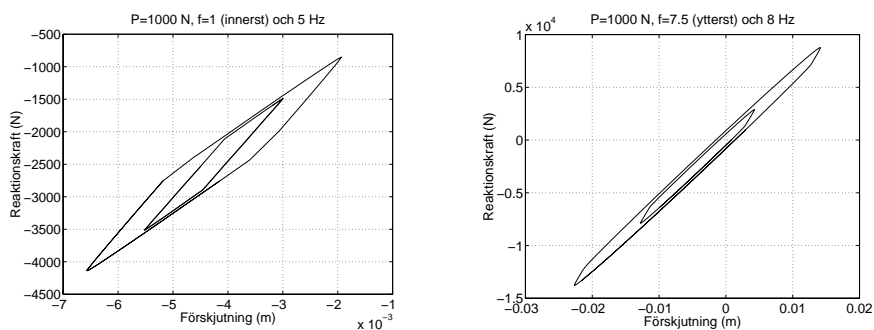
$$k_{tot} = \frac{4k_{\infty} \cdot 4k_{\infty}}{4k_{\infty} + 4k_{\infty}} = 2k_{\infty}.$$

Detta ger med $k_{\infty} = 311$ kN/m att $k_{tot} = 622$ kN/m och egenfrekvensen blir därmed med ekvation (4.7) $f_e = 7.7$ Hz. Denna egenfrekvens märks i figur 6.8 där transmissibiliteten, och därmed även reaktionskraften, ökar upp till egenfrekvensen för att sedan minska. Fenomenet återspeglas även i hystereskurvornas utseende i figur 6.9-6.10. Frekvenser över 70 Hz har utelämnats då de kräver en analys med ett litet tidssteg (ned till 0.00001 s), vilket ger mycket stora utdatafiler. Vidare dämpas laster med dessa höga frekvenser ut ganska väl, härvid fungerar alltså dämpningen till full belåtenhet. Området där dämparen uppvisar dessa önskade egenskaper kan naturligtvis flyttas till ett annat frekvensintervall om dämparen ges en annan styvhet. Detta kan göras genom att välja en annan typ av gummi eller att ändra tillsatsen av fyllnadsmaterial.

Med de värden på dämpningskoefficienten c som ges av relaxationstiden t_r i experimenten kommer den viskösa dämpningen enligt ekvation (3.5) att nå sitt maximum vid frekvensen 800 Hz. I frekvensintervallet 0 - 200 Hz är alltså den viskösa dämpningen relativt låg. Detta är anledningen till att hystereskurvorna inte är ellipsformade utan spetsiga. För att få maximal viskös dämpning vid en lägre frekvens måste

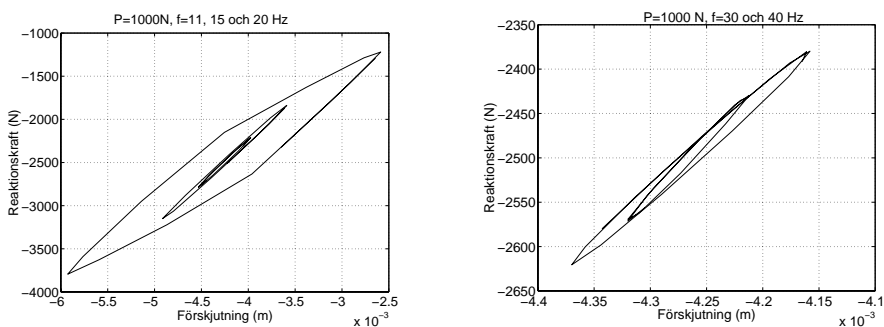
dämpningskoefficienten c ökas.

För att illustrera hur mycket energi som dämparna absorberar vid olika frekvenser har hystereskurvorna för olika frekvenser uppritats, dessa visas i figur 6.9 - 6.10.

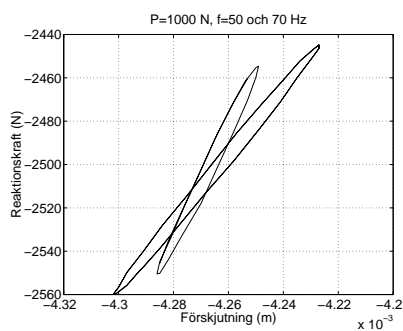


Figur 6.9: Hystereskurvor för hela balkstrukturen vid en dynamisk last på 1000 N och för frekvenser på 1 och 5 Hz (vänster) respektive 7.5 och 8 Hz (höger).

Här framgår i den högra figuren att egenfrekvensen ligger omkring 7.5 Hz.



Figur 6.10: Hystereskurva för hela balkstrukturen vid en dynamisk last på 1000 N och för frekvenser på 11, 15 och 20 Hz (vänster) respektive 30 och 40 Hz (höger).



Figur 6.11: Hystereskurva för hela balkstrukturen vid en dynamisk last på 1000 N och för frekvenser på 50 och 70 Hz.

Här framgår det, speciellt genom att jämföra kurvorna för frekvenser mellan 50 och 70 Hz, där den senare har en brantare lutning, att gummidämparna har en högre dynamisk styvhet vid ökad frekvens.

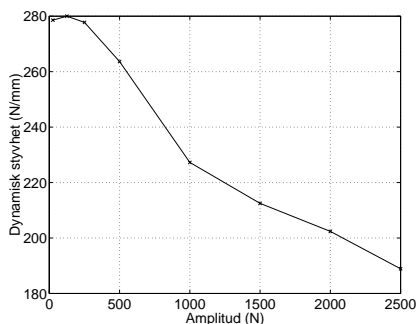
6.3.3 Amplitudanalys vid vertikal belastning

Som tidigare har påpekats är amplitudberoendet av speciell betydelse för gummimaterial. I tabell 6.3 återges förskjutningar och reaktionskrafter samt dynamiska styvheter vid en frekvens på 20 Hz och olika amplituder på den pålagda lasten. Den statiska lasten är även här 2500 N. Förskjutningarna och reaktionskrafterna är beräknade på samma sätt som i frekvensanalysen.

Pålagd kraft [N]	δ_{stat} [mm]	δ_{dyn} [mm]	R_{stat} [N]	R_{dyn} [N]	k_{dyn} [N/mm]
100	4.3	0.028	625	7.8	279
500	4.3	0.15	625	42	280
1000	4.3	0.27	625	75	278
2000	4.3	0.55	625	145	264
4000	4.3	1.1	625	250	227
6000	4.3	1.6	625	340	213
8000	4.3	2.1	625	425	202
10000	4.3	2.7	625	510	189

Tabell 6.3: Förskjutningsamplituder och reaktionskrafter samt dynamisk styvhet för varje gummidämpare vid olika belastningsamplituder för en frekvens på 20 Hz.

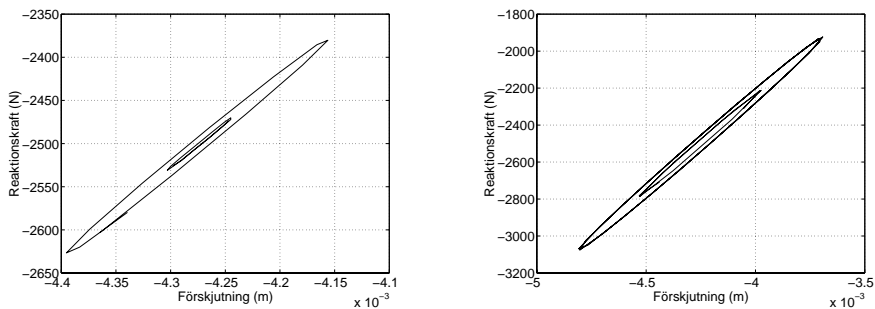
Den dynamiska styvheten har plottats som funktion av pålagd kraftamplitud i figur 6.12, här syns att den dynamiska styvheten minskar med ökad amplitud, vilket är ett korrekt beteende.



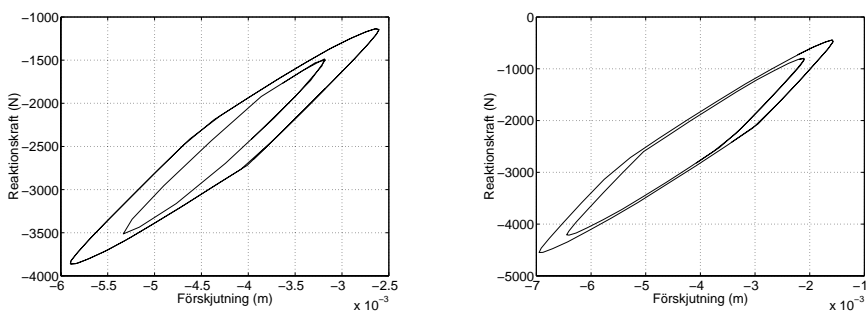
Figur 6.12: Dynamisk styvhet som funktion av amplituden för en gummidämpare.

Även för varierande amplitud har hystereskurvor plottats, dessa återges i figur 6.13 - 6.14.

Arean mellan på- och avlastningskurvorna i figur 6.13 - 6.14 ökar för ökande amplitud, mer energi omvandlas alltså till värme vid ökad belastning, vilket också detta är ett förväntat resultat. Här återfinns tyvärr en begränsning i modelleringen, som består i att NASTRAN-körningen falerar vid för hög belastning i det elastoplastiska stångelementet. Anledningen är sannolikt att flytspänningen är relativt låg jämfört



Figur 6.13: Hystereskurvor för hela balkstrukturen vid en frekvens på 20 Hz och en dynamisk last på 100 och 500 N (vänster) respektive 1000 och 2000 N (höger).



Figur 6.14: Hystereskurvor för hela balkstrukturen vid en frekvens på 20 Hz och en dynamisk last på 4000 och 6000 N (vänster) respektive 8000 och 10000 N (höger).

med de andra parametrarna i femparametermodellen. Flera sätt att undvika detta har utprovats utan att ge önskat resultat, bland annat att använda kortare tidssteg samt att acceptera en maximal tolerans på felet (högre än flytspänningen är ej tillåtet). Påföljden är att förskjutningsamplituder över 2.7 mm inte har kunnat modelleras. Det bör påpekas att gummidämparen inte tål alltför höga belastningsamplituder. Höga amplituder leder till kraftig värmeutveckling, vilket ger en lägre styvhet för dämparen. Dessutom kan själva molekylstrukturen i gummit förändras om dess temperatur blir för hög, vilket leder till försämrade egenskaper och snabbare förslitning.

Kapitel 7

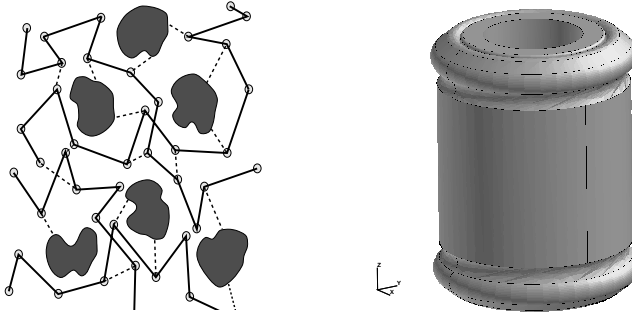
Slutsatser

Målet med denna rapport är att på ett kvalitativt korrekt sätt modellera en vibrationsdämpare av gummi. Denna modell implementeras i en omgivande styvare struktur, i detta fall en upphängning till en bilmotor. För att modellera gummimaterialets beteende används en så kallad femparametermodell som består av en fjäder, linjär eller olinjär, ett viskoelastiskt och ett elastoplastiskt element. Det viskoelastiska elementet består av en fjäder seriekopplad med en dämpare och modellerar gummimaterialets frekvensberoende egenskaper. För att modellera de amplitudberoende egenskaperna används ett elastoplastiskt element som består av en fjäder i serie med ett friktionselement. För att åstadkomma detta i NASTRAN modelleras det amplitudberoende elementet med ett stångelement som plasticeras vid en given spänning. Eftersom den viskösa delen inte är seriekopplad med den plastiska är frekvens och amplitud oberoende av varandra, såväl för modellen som för ett verkligt gummimaterial. Vid en sinusformad pålagd last på femparametermodellen kan reaktionskraften plottas som funktion av modellens deformation. Då uppkommer ellipsformade hystereskurvor eftersom energi absorberas på grund av dämpningen. Hystereskurvan för modellen har ungefär samma utseende som den för gummimaterialet, vilket visar att gummimaterialets beteende kan modelleras bra med en femparametermodell. Här bör poängteras att det har visat sig möjligt att modellera de olinjära dynamiska egenskaper som gummi uppvisar.

7.1 Parameterframtagning på olika nivåer

I denna rapport används ihåliga, cylindriska komponenter. En visuell jämförelse mellan material- och komponentnivå för dessa kan studeras i figur 7.1.

Materialnivån (till vänster i figuren) representeras av molekylstrukturen hos ett gummimaterial, där de mörka partiklarna mellan polymerkedjorna föreställer kimrök. De endimensionella femparametermodeller som används är relativt enkla att handskas med. En svårighet är att ta fram egenskaper för ett specifikt gummimaterial, men det behöver bara göras en enda gång för varje typ av material. När materialegenskaperna har bestämts genom experiment kan sedan varje tänkbar komponent tilldelas egenskaper (styvhet, dämpningskoefficient och flytkraft) beroende på dess geometriska utformning. Olika storheter på material- och komponentnivå presenteras i tabell 7.1



Figur 7.1: Visualisering av material- respektive komponentnivå för en specifik gum-mikomponent.

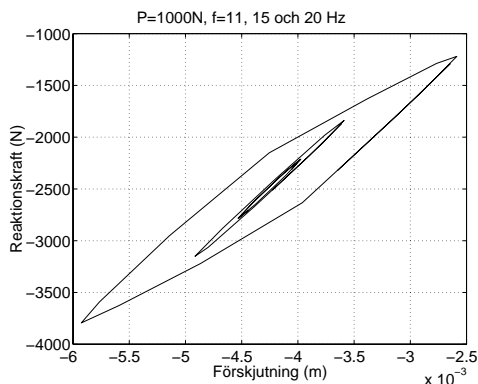
Materialstorhet	enhet	Komponentstorhet	enhet
spänning, σ	$[N/m^2]$	kraft, F	$[N]$
töjning, ϵ	$[1]$	deformation, u	$[m]$
elasticitetsmodul, E	$[N/m^2]$	styvhet, k	$[N/m]$
dämpningsfaktor, η	$[Ns/m^2]$	dämpningskoefficient, c	$[Ns/m]$
flytspänning, Y	$[N/m^2]$	flytkraft, F_y	$[N]$

Tabell 7.1: Presentation av olika storheter på material- respektive komponentnivå.

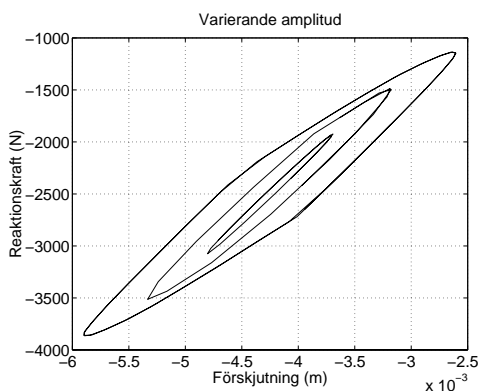
7.2 Resultat från analys i NASTRAN

I den tredimensionella strukturen modelleras dämparna med femparametermodeller i axiell och radiell led. Värdet på parametrarna ges från experiment utförda vid Saab i Trollhättan. Det visar sig att problem uppstår vid belastning med höga amplituder, då körningen avbryts utan att någon felkälla anges. Troligen beror det på att flytspänningen i stångelementet är relativt låg jämfört med de andra parametrarna i femparametermodellen.

De resultat som har nåtts visar att en pålagd kraft från motorn dämpas ut kraftigt vid frekvenser på över cirka 20 Hz. Man kan också konstatera att vid frekvenser på 20 Hz och däröver är den av hystereskurvan inneslutna arean liten, se figur 7.2. Omkring frekvensen 7.5 Hz når reaktionskraften sitt maximum, detta är alltså egenfrekvensen. Dämparens styvhet uppvisar ett markant beroende av den pålagda lastens amplitud, varför det är viktigt att ta hänsyn till detta när dämparen dimensioneras. Om den verkliga pålagda amplituden är lägre än den avsedda kan styvheten i dämparen vara för hög och därmed blir dämpningen mindre än den avsedda. Påföljden blir att hela motorpaketet vibrerar. Vid belastning med för hög amplitud kan värmeutvecklingen bli för stor i dämparen, som därmed förlorar sin styvhet och slits snabbare. Hystereskurvas utseende för hela balkstrukturen med dämpare finns återgiven i figur 7.3. Denna visar tydligt hur dämparnas dynamiska styvhet avtar med ökad pålagd kraftamplitud.



Figur 7.2: Hystereskurvor för hela balkstrukturen vid en pålagd amplitud på 1000 N och frekvenser på 11, 15 och 20 (minst och smalast kurva) Hz.



Figur 7.3: Hystereskurvor för hela balkstrukturen vid en frekvens på 20 Hz och dynamiska laster på 2000, 4000 och 6000 N.

7.3 Femparametermodellens möjligheter

I denna rapport har modeller av gummidämpare lagts in i en enkel omgivande struktur. Genom att använda samma strategi kan femparametermodeller placeras i en FEM-modell av ett komplett bilhassi, varvid en fullständig analys av vibrationers utbredning i detta kan utföras. Metoden med tidsstegning, som används vid analysen, kräver dock en avsevärd datorkraft. Högre frekventa belastningar kräver ett litet tidssteg och ger därför stora utdatafiler. Analyser med stora belastningar kan inte heller köras. Anledningen kan vara att det numeriska felet överstiger flytspänningen i de elastoplastiska elementen, som är relativt låg.

Litteraturförteckning

- [1] AUSTRELL P.-E. , (1997), *Modeling of Elasticity and Damping for Filled Elastomers* Thesis, Report TVSM-1009, Lund Institute of Technology, Division of Structural Mechanics, Lund, Sweden, 1997.
- [2] AUSTRELL P.-E. , (1996), *viscoplastle*, MATLAB-program, Lund Institute of Technology, Division of Structural Mechanics, Lund, Sweden, 1996.
- [3] AUSTRELL P.-E., BELLANDER M., STENBERG B. CARLSSON U, KARI L. OCH PERSSON S. , (1998), *Survey of design methods and material characteristics in rubber engineering*, a NUTEK-VAMP report, TVSM-3036, Lund Institute of Technology, Division of Structural Mechanics, Lund, Sweden, 1998.
- [4] AUSTRELL P.-E. OCH JÖNSSON M., (1999), *Analys av några axialsymmetriska gummi-komponenter*, Rapport inom NUTEK-VAMP, TVSM-7129, Lund Institute of Technology, Division of Structural Mechanics, Lund, Sweden, 1999.
- [5] CLOUGH R.W. OCH PENZIEN J., (1993), *Dynamics of structures*, McGraw-Hill Co., Singapore, 1993.
- [6] MAIA N.M.M. OCH SILVA J.M.M., (1997), *Theoretical and experimental modal analysis*, Research Studies Press LTD, England, 1997.
- [7] MILLER M.P., (1996), *Getting started with MSC/NASTRAN*, MacNeal-Schwendler Corporation, 1996.
- [8] ODQVIST F.K.G. M.FL., (1990), *Formelsamling i hållfasthetslära*, Kungliga tekniska högskolan, Stockholm, 1990.
- [9] OTTOSEN N.S. OCH PETERSON H., (1992), *Introduction to the Finite Element Method*, Prentice Hall Europe, 1992.
- [10] OTTOSEN N.S. OCH RISTINMAA M., (1996), *The Mechanics of Constitutive Modelling*, Department of Solid Mechanics, University of Lund, 1996.
- [11] PÄRT-ENANDER E., ISAKSSON P., MELIN B. OCH SJÖBERG A., (1996), *Användarhandledning för MATLAB 4.2*, Uppsala universitet, 1996.
- [12] RISTINMAA M. M.FL., (1996), *CALFEM, A finite element toolbox to MATLAB, Version 3.2*, Division of Structural Mechanics and Division of Solid Mechanics, Lund, Sweden, 1996.
- [13] SANDBERG G., AUSTRELL P.-E., HANSSON P.-A. OCH GUSTAVSSON M., (1999), *Additional notes in Structural dynamics*, TVSM-7101, Lund Institute of Technology, Division of Structural Mechanics, Lund, Sweden, 1999.

Bilaga A

Olinjär elasticitet

Här ges en härledning av spännings-töjningssamband för fallen enaxlig tryck-/dragbelastning respektive enkel skjuvning.

Den generella, fleraxliga, konstitutiva lagen för ett hyperelastiskt, isotropt och inkompressibelt material kan uttryckas på formen

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\mathbf{B} - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{B}^2 + p\mathbf{I}. \quad (\text{A.1})$$

Här gäller att $\boldsymbol{\sigma}$ är den nominella spänningsmatrisen, W är töjningsenergin och I_1 och I_2 är töjningsinvarianter. Deformationsmatrisen $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$, där \mathbf{F} är deformationsgradienten. Det hydrostatiska trycket ges av $p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ och \mathbf{I} är identitetsmatrisen.

A.1 Enaxlig tryck-/dragbelastning

Vid tryck-/dragbelastning ges deformationsgradienten \mathbf{F} av

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

detta innebär att deformationsmatrisen ges av

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}.$$

Töjningsinvarianterna I_1 , I_2 och I_3 kan beräknas ur egenvärdesproblemet

$$\det(\mathbf{B} - \lambda^2\mathbf{I}) = 0.$$

Vilket ger att

$$(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2)(\lambda^2 - \lambda_3^2) = 0.$$

Detta skrivs om på formen

$$(\lambda^2)^3 - I_1(\lambda^2)^2 + I_2\lambda^2 - I_3 = 0$$

där töjningsinvarianterna I_1 , I_2 och I_3 har värdena

$$\begin{cases} I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 \\ I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2. \end{cases}$$

För att bestämma de tre stretcharna i huvudtöjningsriktningarna λ_1 , λ_2 och λ_3 behöver man inkompressibilitetsvillkoret, vilket lyder $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$. En av stretcharna bestäms av förskjutningen som den pålagda tryck- eller draglasten ger upphov till, denna ges av $\lambda_3 = \lambda = l/L$. De två övriga ska vara lika stora och ges enligt inkompressibilitetsvillkoret av $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/\sqrt{\lambda}$.

Insättning av dessa uttryck i uttrycken för töjningsinvarianterna ger

$$\begin{cases} I_1 = \frac{2}{\lambda} + \lambda^2 \\ I_2 = \frac{1}{\lambda^2} + 2\lambda \\ I_3 = 1. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

I fallet med drag/tryck deriveras W med avseende på stretch,

$$\frac{P}{A} = \frac{dW}{d\lambda}. \quad (\text{A.3})$$

Den nominella spänningen, P/A , erhålls genom att uttrycka töjningsenergin W som funktion av töjningen λ

$$W = W(\lambda) = W(I_1(\lambda), I_2(\lambda)).$$

Kedjeregeln ger nu

$$\frac{dW}{d\lambda} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \lambda}. \quad (\text{A.4})$$

Insättning av uttrycken för invarianterna enligt ekvation (A.2) i (A.4) och med utnyttjande av (A.3) ger uttrycket för nominell spänning

$$\frac{P}{A} = \frac{dW}{d\lambda} = 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Med W enligt Yeohs modell blir sambandet mellan nominell spänning och stretch vid tryck-/dragbelastning

$$\frac{P}{A} = 2(C_{10} + 2C_{20}\left(\frac{2}{\lambda} + \lambda^2 - 3\right) + 3C_{30}\left(\frac{2}{\lambda} + \lambda^2 - 3\right)^2)\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right). \quad (\text{A.5})$$

A.2 Enkel skjuvning

Deformationen vid skjuvning beskrivs av skjuvtöjningen κ , för enkel skjuvning ges deformationsgradienten \mathbf{F} av

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \kappa \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vilket innebär att deformationsmatrisen ges av

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 + \kappa^2 & 0 & \kappa \\ 0 & 1 & 0 \\ \kappa & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

På samma sätt som vid tryck/drag kan töjningsinvarianterna I_1 , I_2 och I_3 beräknas ur ett egenvärdesproblem

$$\det(\mathbf{B} - \nu^2 \mathbf{I}) = 0.$$

Vilket ger att

$$(\nu^2)^3 - I_1(\nu^2)^2 + I_2\nu^2 - I_3 = 0$$

där töjningsinvarianterna I_1 , I_2 och I_3 har värdena

$$\begin{cases} I_1 = 3 + \kappa^2 \\ I_2 = 3 + \kappa^2 \\ I_3 = 1. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Vid skjuvning sker deriveringen av W med avseende på skjuvtöjningen,

$$\frac{P}{A} = \frac{dW}{d\kappa}. \quad (\text{A.7})$$

Skjuvspänningen erhålls genom att skriva töjningsenergifunktionen W som funktion av skjuvtöjningen κ

$$W = W(\kappa) = W(I_1(\kappa), I_2(\kappa)).$$

På samma sätt som för tryck/drag erhålls med kedjeregeln

$$\frac{dW}{d\kappa} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \kappa} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \kappa}. \quad (\text{A.8})$$

Insättning av uttrycken för invarianterna enligt ekvation (A.6) i (A.8) och med utnyttjande av (A.7) ger uttrycket för nominell skjuvspänning

$$\frac{P}{A} = \frac{dW}{d\kappa} = 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\kappa.$$

Med W enligt Yeoh, erhålls det teoretiska sambandet mellan skjuvspänning och skjuvtöjning som

$$\frac{P}{A} = 2(C_{10} + 2C_{20}\kappa^2 + 3C_{30}\kappa^4)\kappa. \quad (\text{A.9})$$

Bilaga B

MATLAB-program

B.1 Endimensionell modellering

Här återges programhuvuden till MATLAB-program för endimensionell modellering av en gummidämpare belastad med en krafthistoria. Modellen är viskoplastisk med ett godtyckligt antal viskoelastiska och elastoplastiska element. Det första programmet har en linjärt elastisk fjäder, de båda andra har olinjärt elastisk fjäder enligt Yeoh.

```
function[R,u,n]=Viscoplast(Fhist,Time,udot0,Ee,Ev,Ep,Tr,Y,m,L,A)
%-----
%   SYFTE:
%   Beräknar Reaktionskraft och förskjutning för en förutbestämd last Fhist
%
%   REFERENSER:
%   Mikael Svensson och Kristian Bergdahl 1999-09-30
%
%   INDATA:
%   Fhist=[F1 F2 .....];   krafthistoriavektor
%   Time;                   motsvarande tidsvektor
%   udot0;                  initiell förskjutningshastighet
%   Ee;                     E-modul, ensam fjäder (1x1)
%   Ev=[Ev1 Ev2 ... Evn];  E-moduler, viskös del
%   Ep=[Ep1 Ep2 ... Epm];  E-moduler, plastisk del
%   Tr=[Tr1 Tr2 ... Trn];  relaxationstider
%   Y=[Y1 Y2 ... Ym];      flytspänningar
%   m;                      punktmassa
%   L;                      dämparens längd
%   A;                      dämparens area
%
%   UTDATA:
%   R=[R1 R2 .....];      reaktionskrafthistoria
%   u=[u1 u2 .... un];    förskjutningshistoria
%   n;                      antal tidssteg
%-----end-----
```

```

function[R,u,n]=YeohTens(Fhist,Time,udot0,c10,c20,c30,Ev,Ep,Tr,Y,m,L,A)
%-----
%   SYFTE:
%   Beräknar Reaktionskraft och förskjutning för en förutbestämd last Fhist
%
%   REFERENSER:
%   Mikael Svensson och Kristian Bergdahl 1999-11-08
%
%   INDATA:
%   Fhist=[F1 F2 .....];   krafthistoriavektor
%   Time;                   motsvarande tidsvektor
%   udot0;                  initiell förskjutningshastighet
%   c10,c20,c30;           Yeohkonstanter
%   Ev=[Ev1 Ev2 ... Evn]; E-moduler, viskös del
%   Ep=[Ep1 Ep2 ... Epm]; E-moduler, plastisk del
%   Tr=[Tr1 Tr2 ... Trn]; relaxationstider
%   Y=[Y1 Y2 ... Ym];     flytspänningar
%   m;                      punktmassa
%   L;                      dämparens längd
%   A;                      dämparens area
%
%   UTDATA:
%   R=[R1 R2 .....];     reaktionskraftshistoria
%   u=[u1 u2 .... un];   förskjutningshistoria
%   n;                    antal tidssteg
%-----end-----

```

```

function[R,u,n]=Yeohshear(Fhist,Time,udot0,c10,c20,c30,Gv,Gp,Tr,Y,m,H,A)
%-----
%   SYFTE:
%   Beräknar Reaktionskraft och förskjutning för en förutbestämd last Fhist
%
%   REFERENSER:
%   Mikael Svensson och Kristian Bergdahl 1999-11-08
%
%   INDATA:
%   Fhist=[F1 F2 .....];   krafthistoriavektor
%   Time;                   motsvarande tidsvektor
%   udot0;                  initiell förskjutningshastighet
%   c10,c20,c30;           Yeohkonstanter
%   Gv=[Gv1 Gv2 ... Gvn]; skjuvmoduler, viskös del
%   Gp=[Gp1 Gp2 ... Gpm]; skjuvmoduler, plastisk del
%   Tr=[Tr1 Tr2 ... Trn]; relaxationstider
%   Y=[Y1 Y2 ... Ym];     flytspänningar
%   m;                      punktmassa
%   H;                      dämparens höjd
%   A;                      dämparens area
%
%   UTDATA:
%   R=[R1 R2 .....];     reaktionskraftshistoria
%   u=[u1 u2 .... un];   förskjutningshistoria
%   n;                    antal tidssteg
%-----end-----

```

B.2 Modellering av gummidämpare i omgivande struktur

Här återges ett MATLAB-program för endimensionell modellering av gummidämpare i omgivande balkstruktur. Gummidämparens och balkstrukturens styvheter seriekopplas. Dämparen har en viskoplastisk materialmodell och belastas med en förskjutningshistoria.

```
function [R1]=Transientserie(Sigv,Sigp,index,dt,u,Ee,Ev,Ep,Tr,Y,Mm,Ld,Ad,E,I,Lx,Ly)
%-----
%   SYFTE:
%       Beräknar Reaktionskraft för en förutbestämd förskjutning u
%
%   REFERENSER:
%       Mikael Svensson och Kristian Bergdahl 2000-01-26
%
%   INDATA:
%       index;                aktuellt tidssteg
%       u=[u11 u12 ... u1index
%         .
%         u41 u42 ... u4index];  förskjutningshistoria (4 x index)
%       Ee;                    E-modul, ensam fjäder (1x1)
%       Ev=[Ev1 Ev2 ... Evn];  E-moduler, viskös del
%       Ep=[Ep1 Ep2 ... Epm];  E-moduler, plastisk del
%       Tr=[Tr1 Tr2 ... Trn];  relaxationstider
%       Ysig=[Y1 Y2 ... Ym];   flytspänningar
%       Mm;                    tröghetsmatris
%       Ld;                    dämparlängd
%       Ad;                    dämpararea
%       E, I, Lx, Ly;          balkparametrar
%   UTDATA:
%       R1=[R1 R2 R3 R4];     reaktionskraftvektor
%
%-----
if index==2                % nollställning av spänning
    Sigv=zeros(length(Ev));
    Sigp=zeros(length(Ep));
end
R1=zeros(3,1); stress=zeros(3,1);

oldstr=-(u(:,index-1))/Ld;
strain=-(u(:,index))/Ld;

for i=1:3
    if i==1
        % skjuvning i x-led
        Ee=Ee/3; Ev=Ev/3; Ep=Ep/3;
        k=3*E*I/Ly^3;
    else
        % tryck/drag i y-led
        k=3*E*I/(Lx^3+Lx^2*Ly);
    end
end
\newpage
%-----seriekoppling dämpare-balk-----
```

```

Ke=Ee*Ad/Ld; % ekvivalent styvhet för fjädern
Ke=Ke*k/(Ke+k); % seriekoppling av fjädrar
Ee=Ke*Ld/Ad;
Kv=Ev*Ad/Ld;
for j=1:length(Ev)
    Kv(j)=Kv(j)*k/(Kv(j)+k);
end
Ev=Kv*Ld/Ad;
Kp=Ep*Ad/Ld;
for j=1:length(Ep)
    Kp(j)=Kp(j)*k/(Kp(j)+k);
end
Ep=Kp*Ld/Ad;

deps(i)=strain(i)-oldstr(i);
%-----elastisk del-----

sige=Ee*strain(i);

%-----viskös del-----

Dsigv=Sigv.*(exp(-dt./Tr)-1)+(Ev.*(exp(-dt./Tr)+1)/2)*deps(i);
Sigv=Sigv+Dsigv;

%-----plastisk del-----

Dsigp=Ep*deps(i);
tsig=Sigp+Dsigp;
indx=find(abs(tsig)>Y);
Dsigp(indx)=sign(deps(i))*Y(indx)-Sigp(indx);
Sigp=Sigp+Dsigp;

%-----

stress(i)=sige+sum(Sigv)+sum(Sigp);
end
R1=-stress*Ad;

%-----end-----

```

Bilaga C

NASTRAN-indatafil

Här återges en indatafil till NASTRAN, skapad i PATRAN för modellering av endimensionella gummidämpare i en balkstruktur.

```
$ NASTRAN input file created by the MSC MSC/NASTRAN input file
$ translator ( MSC/PATRAN Version 8.5 ) on December 14, 1999
ASSIGN OUTPUT2 = 'motorstruktur.op2', UNIT = 12
$ Nonlinear Transient Response Analysis, Direct Formulation, Database
SOL 129
TIME 600
CEND
SEALL = ALL
SUPER = ALL
ECHO = NONE
MAXLINES = 999999999
SUBCASE 1
SUBTITLE=1000N20Hz
TSTEPNL = 1
SPC = 2
MPC = 30
DLOAD = 2
$ Beskrivning av vilka parametrar som skall vara utdata
  DISPLACEMENT(SORT1,REAL)=ALL
  SPCFORCES(SORT1,REAL)=ALL
  OLOAD(SORT1,REAL)=ALL
$ force(sort1,real,bilin)=all
$ stress(sort1,real,vonmises,bilin)=all
$ strain(sort1,real,vonmises,strcur,bilin)=all

BEGIN BULK
PARAM      POST      -1
PARAM      PATVER    3.
PARAM      AUTOSPC   NO
PARAM      COUPMASS  -1
PARAM      K6ROT     100.
PARAM      WTMASS    1.
PARAM      LGDISP    1
PARAM      NOCOMPS   -1
PARAM      BAILOUT   -1
PARAM      PRTMAXIM  YES
TSTEPNL    1          80000 .00005 5          ADAPT  2          10      PW      +      A
```


+ A .001 1.-6

\$ Axiella (Z-led) styvheter och dämpning för gummidämpare

PELAS 10 3.11e5
PELAS 410 6.47e5
PDAMP 510 388.
PROD 120 1 7.7e-4
MATS1,1,,PLASTIC,0.,1,1,9.33e4
MAT1,1,14.0e6,,.3,1.

\$ Radiella (Y-led) styvheter och dämpning för gummidämpare

\$ yttre cylinder

PELAS 12 4.8e7
PELAS 412 9.9e7
PDAMP 512 5.96e4
PROD 101 5 0.0022
MATS1,5,,PLASTIC,0.,1,1,4.62e5
MAT1,5,6.92e7,,.3,1.

\$ inre cylinder

PELAS 14 2.4e7
PELAS 414 5.0e7
PDAMP 514 3.01e4
PROD 110 6 0.0015
MATS1,6,,PLASTIC,0.,1,1,3.12e5
MAT1,6,4.68e7,,.3,1.

\$-----KOPPLINGSELEMENT MELLAN BALK OCH INFÄSTNING I Y-LED

CELAS1 400 12 554 2 566 2
CELAS1 401 12 557 2 567 2
CELAS1 402 12 558 2 568 2
CELAS1 403 12 561 2 569 2

CELAS1,410,412,554,2,574,2
CELAS1,412,412,557,2,570,2
CELAS1,414,412,558,2,576,2
CELAS1,416,412,561,2,572,2

CDAMP1,411,512,574,2,566,2
CDAMP1,413,512,570,2,567,2
CDAMP1,415,512,576,2,568,2
CDAMP1,417,512,572,2,569,2

\$ Rod som friktionselement

CROD 430 101 554 566
CROD 431 101 557 567
CROD 432 101 558 568
CROD 433 101 561 569

CELAS1 500 14 566 2 555 2
CELAS1 501 14 567 2 556 2
CELAS1 502 14 568 2 559 2
CELAS1 503 14 569 2 560 2

CELAS1,510,414,566,2,575,2
CELAS1,512,414,567,2,571,2
CELAS1,514,414,568,2,577,2
CELAS1,516,414,569,2,573,2

CDAMP1,511,514,575,2,555,2
CDAMP1,513,514,571,2,556,2
CDAMP1,515,514,577,2,559,2
CDAMP1,517,514,573,2,560,2

CROD 530 110 566 555
CROD 531 110 567 556
CROD 532 110 568 559
CROD 533 110 569 560

\$-----KOPPLINGSELEMENT MELLAN BALK OCH INFÄSTNING I Z-LED

CELAS1 404 10 554 3 12 3
CELAS1 405 10 557 3 22 3
CELAS1 406 10 558 3 111 3
CELAS1 407 10 561 3 55 3

CELAS1,418,410,555,3,562,3
CELAS1,422,410,556,3,563,3
CELAS1,423,410,558,3,564,3
CELAS1,424,410,560,3,565,3

CDAMP1,419,510,562,3,12,3
CDAMP1,425,510,563,3,22,3
CDAMP1,426,510,564,3,111,3
CDAMP1,427,510,565,3,55,3

CROD 434 120 554 12
CROD 435 120 557 22
CROD 436 120 558 111
CROD 437 120 560 55

\$-----4 KOPPLINGSELEMENT MELLAN MOTOR OCH BALK I Y-LED

CELAS1 321 12 517 2 552 2
CELAS1 325 12 532 2 553 2

CELAS1,110,412,517,2,580,2
CELAS1,112,412,532,2,582,2

CDAMP1,111,512,580,2,552,2
CDAMP1,113,512,582,2,553,2

CROD 120 101 517 552
CROD 121 101 532 553

CELAS1 731 14 552 2 543 2
CELAS1 735 14 553 2 547 2

CELAS1,150,414,552,2,581,2
CELAS1,152,414,553,2,583,2

CDAMP1,151,514,581,2,543,2
CDAMP1,153,514,583,2,547,2

CROD 124 110 552 543
CROD 125 110 553 547

\$ De axiella gummidämparna i y-led placeras som dubbletter

CELAS1 721 12 517 2 552 2
CELAS1 725 12 532 2 553 2

CELAS1,610,412,517,2,580,2
CELAS1,612,412,532,2,582,2

CDAMP1,611,512,580,2,552,2
CDAMP1,613,512,582,2,553,2

CROD 620 101 517 552
CROD 621 101 532 553

CELAS1 741 14 552 2 543 2
CELAS1 745 14 553 2 547 2

CELAS1,650,414,552,2,581,2
CELAS1,652,414,553,2,583,2

CDAMP1,651,514,581,2,543,2
CDAMP1,653,514,583,2,547,2

CROD 624 110 552 543
CROD 625 110 553 547

\$ -----4 KOPPLINGSELEMENT MELLAN MOTOR OCH BALK I Z-LED

CELAS1 335 10 517 3 17 3
CELAS1 338 10 532 3 215 3
CELAS1 345 10 525 3 116 3
CELAS1 348 10 527 3 50 3

CELAS1,218,410,517,3,538,3
CELAS1,220,410,532,3,539,3
CELAS1,222,410,525,3,540,3
CELAS1,223,410,527,3,541,3

CDAMP1,219,510,538,3,17,3
CDAMP1,221,510,539,3,215,3
CDAMP1,224,510,540,3,116,3
CDAMP1,225,510,541,3,50,3

CROD 230 120 517 17
CROD 231 120 532 215

CROD	236	120	525	116				
CROD	237	120	527	50				
\$ Egenskaper för balkstrukturen								
PBEAM	3	2	.16	.0021	.0021			+ B
+	B							+ C
+	C YES	1.	.16	.0021	.0021			+ D
+	D							
PBEAM	5	1	.01	8.3-6	8.3-6			+ K
+	K							+ L
+	L YES	1.	.01	8.3-6	8.3-6			+ M
+	M							
PSHELL	4	3	.0025	3		3		
\$ Placering av motorbalkar								
CBEAM	332	3	537	578	0.	0.	1.	
CBEAM	333	3	537	579	0.	0.	1.	
CBEAM	334	5	578	525	0.	0.	1.	
CBEAM	335	5	579	527	0.	0.	1.	
CBEAM	336	5	543	537	0.	0.	1.	
CBEAM	337	5	537	547	0.	0.	1.	
\$ Balkstrukturens elementindelning								
CQUAD4	1	4	1	2	13	12		
CQUAD4	2	4	2	3	14	13		
.								
CQUAD4	319	4	515	516	76	75		
CQUAD4	320	4	516	441	77	76		
\$ Materialbeskrivning för balkstrukturen								
MAT1*	3		2.1+11			.3		* E
*	E 7500.							
\$ Materialbeskrivning för motorbalkarna								
MAT1*	2		2.1+14			.3		* F
*	F 14100.							
MAT1*	1		2.1+14			.3		* G
*	F 1.							
\$ Noderna i hela modellen								
GRID	1		.04	.04	.06			
GRID	2		.132	.04	.06			
.								
GRID	582		.5	.9756	.11			
GRID	583		.5	.9668	.11			
\$ Pålagd dynamisk kraft								
DLOAD,2,1.,1.,4,1.,7								
TLOAD2,4,5,,0,0.,50.,20.,-90.,+a1								
+a1,0.,0.								
DAREA,5,537,3,1000.,537,2,1000.								
\$ Vertikal tyngdkraft pga motorn								
TLOAD1	7	6	0	0	1			

```

TABLED1 1
+ N 0. 1. 1. 1. ENDT
DAREA,6,537,3,-2500.

$ Fast inspända noder
SPC1,1,123456,555,556,559,560
SPCADD 2 1

$ LÅSNING AV NODPUNKTER I FÖRHÅLLANDE TILL VARANDRA
MPCADD,30,1,2,3,4,5,6,7,+m
+m,8,9,10,11,12,14,15,16,+m1
+m1,17,18,19,20,21,22,23,24,+m2
+m2,25,26,27,28,29,30,31,32,+m3
+m3,51,52,53,54,55,56,59,60,+m4
+m4,63,64,65,66,33,34,35,36,+m5
+m5,37,38,39,40,67,68,69,70,+m6
+m6,71,72,73,74,75,76,79,80,+m7
+m7,83,84,85,86,13
$ balk-infästning
$ y-led
MPC,1,12,2,1.,554,2,-1.
.
.
$ z-led
MPC,9,575,3,1.,566,3,-1.
.
.
$ x-led
MPC,25,12,1,1.,554,1,-1.
.
.
$ motor-balk
$ y-led
MPC,51,17,2,1.,517,2,-1.
.
.
$ z-led
MPC,55,581,3,1.,552,3,-1.
.
.
$ x-led
MPC,71,17,1,1.,517,1,-1.
.
.
ENDDATA

```