

ISSN 0280-5316  
ISRN LUTFD2/TFRT--5574--SE

# Inverkningar av tidsfördröjningar i samplade system

Jonas Bygren

Institutionen för Reglerteknik  
Lunds Tekniska Högskola  
Januari 1997

<p><b>Department of Automatic Control</b>  <b>Lund Institute of Technology</b>  P.O. Box 118  S-221 00 Lund Sweden</p>		<p><i>Document name</i>  MASTER THESIS</p> <p><i>Date of issue</i>  January 1997</p> <p><i>Document Number</i>  ISRN LUTFD2/TFRT--5574--SE</p>
<p><i>Author(s)</i>  Jonas Bygren</p>		<p><i>Supervisors</i>  Björn Wittenmark and Johan Nilsson</p>
		<p><i>Sponsoring organisation</i></p>
<p><i>Title and subtitle</i>  Inverkningar av tidsfördrönningar i samplade system. (Influence of time-delays in sampled-data systems).</p>		
<p><i>Abstract</i>  For a process with random time delays, it is possible to find the optimal control law with dynamic programming. This control law is complicated and is therefore of interest to find simpler suboptimal controllers. The simplest one is the standard LQG-regulator that ignores the varying time delays. It appears however that this controller has bad stability properties or give bad performance. In the thesis two suboptimal controllers are given, which are compared with the optimal controller en some examples.</p>		
<p><i>Key words</i></p>		
<p><i>Classification system and/or index terms (if any)</i></p>		
<p><i>Supplementary bibliographical information</i></p>		
<p><i>ISSN and key title</i>  0280-5316</p>		<i>ISBN</i>
<i>Language</i> Swedish	<i>Number of pages</i> 28	<i>Recipient's notes</i>
<i>Security classification</i>		

The report may be ordered from the Department of Automatic Control or borrowed through the University Library 2, Box 1010, S-221 03 Lund, Sweden, Fax +46 46 110019, Telex: 33248 lubbis lund.

## Förord

Arbetet är utfört vid reglerinstitutionen vid Lunds Universitet och är ett exa-  
mensarbete på elektrotekniklinjen. Jag vill speciellt tacka mina handledare Björn  
Wittenmark och Johan Nilsson för deras tålmod, uppmuntran och förslag på för-  
bättringar i mitt arbete. Jag vill också tacka Leif Andersson för all datorteknisk  
hjälp.

# Inverkningar av tidsfördräjningar i samplade system

Jonas Bygren

30 januari 1997

## Innehåll

1 Inledning	4
2 Problemformulering	5
3 Optimal stokastisk reglering	6
4 Suboptimala regulatorer	9
5 Exempel	11
5.1 Exempel, Doyle and Stein (1979) . . . . .	11
5.2 Exempel, robbot . . . . .	13
6 Stabilitets- och förlust- undersökningar av regulatorer	14
6.1 Dubbelintegratorn . . . . .	14
6.2 Oscillatorn med poler i $\pm 0.5i$ . . . . .	19
6.3 Processer med poler i $\{-0.1, -0.2\}$ . . . . .	21
6.4 Processer med poler i $\{\pm 0.5i, -0.2\}$ . . . . .	24
7 Ett tidsvariationskänsligt system	25
8 Slutsatser	27

## 1 Inledning

I detta arbete ska vi undersöka hur tidsfördröjningar påverkar samplade system och finna regulatorer som tar hänsyn till de tidsfördröjningar som finns i systemet. Fördröjningar, som naturligt uppstår i överföringarna mellan systemet och regulatorn, är ofta slumpmässiga. Det är rimligt att anta att summan av alla tidsfördröjningar i systemet är mindre än sampeltiden. Man kan skilja på tre olika modeller av tidsfördröjningar, se Nilsson (1996),

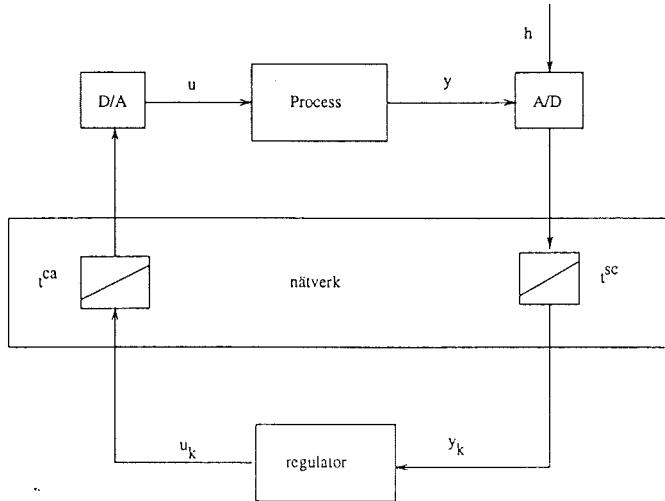
1. Nätverk med konstanta fördröjningar.
2. Nätverk med oberoende och slumpmässiga fördröjningar med känd sannolikhetsfördelning.
3. Nätverk med slumpmässiga tidsfördröjningar, där tidsfördröjningarnas sannolikhetsfördelning ges av en markovprocess.  
(Denna modell behandlas inte i detta arbete)

I avsnitt 2 anges de modellantaganden som vi gjort och i avsnitt 3 beräknas den optimala regulatorn då vi har slumpmässiga tidsfördröjningar. Den optimala regulatorn är dock relativt komplicerad.

Då man använder sig av tidsoberoende regulatorer, så kan det mycket väl hända att vi får stabilitet för alla konstanta tidsfördröjningar, men att vi får instabilitet för slumpmässiga tidsfördröjning. Ett exempel på ett sådant system ges i avsnitt 7. Detta betyder att vi får något väsentligt nytt att ta hänsyn till då vi undersöker system med slumpmässiga tidsfördröjningar jämfört med om vi endast undersöker system med konstanta tidsfördröjningar. Därför verkar det vara rimliga att då vi dessignerar vår regulator inte bara ta hänsyn till tidsfördröjningarnas väntevärde utan också deras andramoment. Tidsfördröjningar kan ses som parameterbrus i den samplade processmodellen. En regulator som tar hänsyn till tidsfördröjningarnas varians, och därmed också parametrarnas varians, kan tolkas som en så kallad 'cautious' regulator, Åström-Wittenmark (1995) kap 7.

Ett förlag av Johan Nilsson på en suboptimal regulator som endast tar hänsyn till tidsfördröjningarnas väntevärden återfinns i avsnitt 4. I detta avsnitt ges också ett förslag på en regulator som dessutom tar hänsyn till tidsfördröjningarnas andramoment.

I avsnitten 5 och 6 så undersöks stabiliteten och förlusten för de suboptimala regulatorerna i jämförelse med den optimala för ett antal system. Avsikten är att undersöka i vilka fall som de ger acceptabla förluster.



Figur 1: Blockschema över digitalt system med tidsfördröjningar

## 2 Problemformulering

Avsikten är här att analysera samplade system med tidsfördröjningar, se figur 1. Tidsfördröjningar förekommer i regulatorn samt i överföringarna mellan process och regulator. Vi inför beteckningarna  $\tau_k^{sc}$  och  $\tau_k^{ca}$  för överförningsfördröjningarna från process till regulator respektive från regulator till process. Man kan anta att fördröjningen i regulatorn är noll. Denna kan annars bokas in i  $\tau_k^{ca}$ . Inför även  $\tau_k = \tau_k^{sc} + \tau_k^{ca}$ .

Följande antaganden görs om reglersystemet:

- Processens utsignal sampelas periodiskt med perioden  $h$ .
- Fördröjningarna  $\tau_k^{sc}$  och  $\tau_k^{ca}$  är alla oberoende och slumpmässiga med känd sannolikhetsfördelning.
- Styrsignalen  $u_k$  ställs ut omedelbart då den når D/A omvandlaren.
- Den totala tidsfördröjningen  $\tau_k = \tau_k^{sc} + \tau_k^{ca}$  antas att alltid vara mindre än samplingperioden  $h$ .
- Alla gamla tidsfördröjningar är kända för regulatorn. Detta uppnås tex genom att man tillsammans med  $y_k$  även skickar  $\tau_{k-1}^{ca}$ .

Detta är samma förutsättningar som i Nilsson (1996). Processen som ska styras antas vara linjär utan direktterm och kan då skrivas

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + \xi \\ y &= Cx + \eta\end{aligned}$$

där  $\xi$  och  $\eta$  är normalfördelat brus med medelvärdet noll och med variansen  $R_1^{kont}$  respektive  $R_2^{kont}$ . Sampelas detta system och man tar hänsyn till tidsfördröjningarna,

så får vi

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma_0(\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca}) u_k + \Gamma_1(\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca}) u_{k-1} + v_k \quad (1)$$

$$y_k = C x_k + e_k \quad (2)$$

där  $v_k$  och  $e_k$  är normalfördelat brus med medelvärdet noll och med variansen  $R_1$  respektive  $R_2$ . Dimensionen för  $x_k$  och  $y_k$  är  $n$  respektive  $m$ . Det gäller att

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{Ah} \\ \Gamma_0 &= \int_0^{h-\tau_k^{sc}-\tau_k^{ca}} e^{As} ds B \\ \Gamma_1 &= \int_{h-\tau_k^{sc}-\tau_k^{ca}}^h e^{As} ds B. \end{aligned}$$

Vi inför även  $\Gamma = \Gamma_0(0, 0)$ .

Kostnadsfunktionen som vi vill att regulatorn skall minimera antas vara på formen

$$J_N = \sum_{k=0}^N \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^N x_k^T Q_{11} x_k + x_k^T Q_{12} u_k + u_k^T Q_{12}^T x_k + u_k^T Q_{22} u_k.$$

där

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}.$$

Om kostnadsfunktionen är given på kontinuerlig form, så samplar vi denna under förutsättning att  $\tau_k = 0$ , se Åström-Wittenmark (1990).

### 3 Optimal stokastisk reglering

När man har tidsfördröjningar i ett system, så är det nödvändigt att införa  $u_{k-1}$  som ett processtillstånd. Det samplade systemet kan då skrivas

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{\Phi} \tilde{x}_k + e^{\tilde{A}(h-\tau_k^{sc}-\tau_k^{ca})} \tilde{B} \tilde{u}_k + \tilde{v}_k \\ y_k &= \tilde{C} \tilde{x}_k + e_k \\ J_N &= \sum_{k=0}^N \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix}^T \tilde{Q} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

om vi inför beteckningarna

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k &= \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix} & \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \\ \tilde{\Phi} &= e^{\tilde{A}h} & \tilde{B}^T &= [0_{m \times n}, I_{m \times m}] \\ \tilde{u}_k &= u_k - u_{k-1} & \tilde{C} &= [C, 0] \\ \tilde{v}_k &= \begin{bmatrix} v_k \\ 0 \end{bmatrix} & \tilde{\Gamma} &= \tilde{\Phi} \tilde{B} \\ \tilde{Q}_{11} &= Q & \tilde{Q}_{12} &= \begin{bmatrix} Q_{12} \\ Q_{22} \end{bmatrix} \\ \tilde{Q}_{22} &= Q_{22} \end{aligned}$$

Detta följer av att

$$e^{\tilde{A}t}\tilde{B} = \begin{bmatrix} \int_0^t e^{As}dsB \\ I_{m \times m} \end{bmatrix}.$$

Observera att  $\tilde{\Phi}$  ovan ges av

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Vi vill nu finna en styrlag, så att  $E(J_N)$  minimeras. För enkelhetens skull antar vi att  $u$  har dimensionen 1.

**Teorem 1** *Optimal tillståndsåterkoppling (Nilsson 1996)*

Om  $x_k$  är brusfritt uppmätt och  $m = 1$ , så ges den optimala tillståndsåterkopplingen av

$$\tilde{u}_k = -l_k(\tau_k^{sc})\tilde{x}_k$$

där  $S_k$  och  $l_k$ ,  $k = 0 \dots N - 1$ , beräknas rekursivt genom

$$\begin{aligned} V &= E_{\tau^{ca}} \left( (e^{-\tilde{A}\tau^{ca}}\tilde{B})(e^{-\tilde{A}\tau^{ca}}\tilde{B})^T \right) \\ S_N &= 0 \\ S_k &= \tilde{Q}_{11} + \tilde{\Phi}^T S_{k+1} \tilde{\Phi} \\ &\quad - E_{\tau^{sc}} \left( \frac{(\tilde{\Phi}^T S_{k+1} \tilde{\Phi} e^{-\tilde{A}\tau^{sc}} V \tilde{B} + \tilde{Q}_{12})(\tilde{\Phi}^T S_{k+1} \tilde{\Phi} e^{-\tilde{A}\tau^{sc}} V \tilde{B} + \tilde{Q}_{12})^T}{\text{tr}(e^{-\tilde{A}^T \tau^{sc}} \tilde{\Phi}^T S_{k+1} \tilde{\Phi} e^{-\tilde{A}\tau^{sc}} V) + \tilde{Q}_{22}} \right) \\ l_k(\tau^{sc}) &= \frac{(\tilde{\Phi}^T S_{k+1} \tilde{\Phi} e^{-\tilde{A}\tau^{sc}} V \tilde{B} + \tilde{Q}_{12})^T}{\text{tr}(e^{-\tilde{A}^T \tau^{sc}} \tilde{\Phi}^T S_{k+1} \tilde{\Phi} e^{-\tilde{A}\tau^{sc}} V) + \tilde{Q}_{22}}. \end{aligned}$$

I de gamla variablerna ges styrlagen av

$$u_k = -L_k(\tau_k^{sc}) \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix}, \quad L_k(\tau_k^{sc}) = l_k(\tau_k^{sc}) - \tilde{B}^T.$$

Teoremet och beviset är väsentligen samma som i Nilsson (1996), men är här skriven på ett sätt som inte kräver att man beräknar dubbelintegraler i varje iteration.

**Bevis** Använder man sig av dynamisk programmering och låter  $S_k$  vara kostnaden vid tidpunkt  $k$  och  $\alpha_k$  vara den del av kostnadsfunktionen som inte kan påverkas av styrsignalen, så gäller

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_k^T S_k \tilde{x}_k + \alpha_k &= \min_{\tilde{u}_k} \mathbb{E}_{\tau^{sc}, \tau^{ca}} \left( \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix}^T \tilde{Q} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix} + \tilde{x}_{k+1}^T S_{k+1} \tilde{x}_{k+1} \right) + \alpha_{k+1} \\
&= \mathbb{E}_{\tau^{sc}} \min_{\tilde{u}_k} \mathbb{E}_{\tau^{ca}} \left( \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix}^T \tilde{Q} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix} + (\tilde{x}_k + e^{-\tilde{A}\tau_k} \tilde{B}\tilde{u}_k)^T \tilde{\Phi}^T S_{k+1} \tilde{\Phi} (\tilde{x}_k + e^{-\tilde{A}\tau_k} \tilde{B}\tilde{u}_k) \right. \\
&\quad \left. + \beta_k \right) \\
&= \mathbb{E}_{\tau^{sc}} \min_{\tilde{u}_k} \left( \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix}^T \tilde{Q} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix} + \tilde{x}_k^T \tilde{\Phi}^T S_{k+1} \tilde{\Phi} \tilde{x}_k + \tilde{u}_k^2 \text{tr}(e^{-\tilde{A}^T \tau_k^{sc}} \tilde{\Phi}^T S_{k+1} \tilde{\Phi} e^{-\tilde{A} \tau_k^{sc}} V) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{x}_k^T \tilde{\Phi}^T S_{k+1} \tilde{\Phi} e^{-\tilde{A} \tau_k^{sc}} V \tilde{B} \tilde{u}_k + \tilde{u}_k^T \tilde{B}^T V e^{-\tilde{A}^T \tau_k^{sc}} \tilde{\Phi}^T S_{k+1} \tilde{\Phi} \tilde{x}_k \right) + \beta_k \\
&= \mathbb{E}_{\tau_k^{sc}} \min_{\tilde{u}_k} \left( \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix}^T \Omega \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix} \right) + \beta_k
\end{aligned}$$

där

$$\Omega = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11} + \tilde{\Phi}^T S_{k+1} \tilde{\Phi} & \tilde{Q}_{12} + \tilde{\Phi}^T S_{k+1} \tilde{\Phi} e^{-\tilde{A} \tau_k^{sc}} V \tilde{B} \\ \tilde{Q}_{12}^T + \tilde{B}^T V e^{-\tilde{A}^T \tau_k^{sc}} S'_k & \tilde{Q}_{22} + \text{tr}(e^{-\tilde{A}^T \tau_k^{sc}} \tilde{\Phi}^T S_{k+1} \tilde{\Phi} e^{-\tilde{A} \tau_k^{sc}} V) \end{bmatrix}.$$

Vi har ovan använt oss av att  $\mathbb{E}(e^{\tilde{A}\tau^{ca}} \tilde{B}) = V\tilde{B}$ . Genom exempelvis derivation så kan vi till den kvadratiska formen finna extempunkten  $\tilde{u}_k = -(\Omega_{21}/\Omega_{22})\tilde{x}_k$ . Insättning av detta värde på  $\tilde{u}_k$  ger minimum  $\tilde{x}_k^T (\Omega_{11} - \Omega_{12}\Omega_{21}/\Omega_{22}) \tilde{x}_k$ .  $\square$

Under lämpliga villkor så konvergerar  $S_k$  mot ett stationärt värde  $S_\infty$  då  $N$  går mot  $\infty$ . Vi får då en styrlag

$$u_k = -L(\tau_k^{sc}) \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix},$$

där  $L$  endast beror på  $\tau_k^{sc}$ . Styrlagen kan implementeras genom att interpolera ur en tabell för  $L(\tau^{sc})$ .

I många fall har man inte fullständig tillstånds information. Man kan då uppskatta tillstånden med ett Kalmanfilter. Följande teorem, som är bevisad i Anderson and Moore (1979), visar att Kalmanfiltret ger en optimal tillståndsuppskattning

**Teorem 2** *Optimal tillståndsuppskattning*

Estimatorens

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \bar{K}_k (y_k - C\hat{x}_{k|k-1})$$

där

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{k+1|k} &= \Phi \hat{x}_{k|k-1} + \Gamma_0(\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca}) u_k + \Gamma_1(\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca}) u_{k-1} + K_k (y_k - C\hat{x}_{k|k-1}) \\
\hat{x}_{0|-1} &= E(x_0) \\
P_{k+1} &= \Phi P_k \Phi^T + R_1 - \Phi P_k C^T (C P_k C^T + R_2)^{-1} C P_k \Phi^T \\
P_0 &= R_0 = E(x_0 x_0^T) \\
K_k &= \Phi P_k C^T (C P_k C^T + R_2)^{-1} \\
\bar{K}_k &= P_k C^T (C P_k C^T + R_2)^{-1}
\end{aligned}$$

minimerar felvariansen  $E([x_k - \hat{x}_{k|k}]^T [x_k - \hat{x}_{k|k}])$ . Filterförstärkningen  $K_k$  är oberoende av  $\tau^{sc}$  och  $\tau^{ca}$ . Estimeringsfelet är normalfördelat med medelvärde noll och kovarians  $P_k - P_k C^T (CP_k C^T + R_2)^{-1} CP_k$ .  $\square$

Låter vi  $k$  gå mot  $\infty$ , så kommer, under lämpliga förutsättningar,  $P_k$ ,  $K_k$  och  $\bar{K}_k$  att konvergera mot stationära värden  $P$ ,  $K$  respektive  $\bar{K}$ . Även felvariansen  $E([x_k - \hat{x}_{k|k}]^T [x_k - \hat{x}_{k|k}])$  kommer att konvergera mot ett stationärt värde  $\bar{P}$ .

Följande teorem visar att vi får en optimal styrning, om vi i Teorem 1 använder oss av tillståndsuppskattningen i Teorem 2.

**Teorem 3** *Separationsegenskapen (Nilsson 1996)*

Den styrlag som minimerar förlusten  $J_k$ , givet regulatorekvationerna (1)–(2), blir

$$u_k = -L_k(\tau_k^{sc}) \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} \\ u_{k-1} \end{bmatrix}$$

där  $L_k$  är den optima tillståndsåterkopplingen, som beräknades i Teorem 1 och där  $\hat{x}_{k|k}$  beräknas enligt Teorem 2.  $\square$

## 4 Suboptimala regulatorer

Den optima regulatorn i Teorem 1 kräver mycket beräkningsarbete och det är därför intressant att finna suboptimala regulatorer. Vi ska i detta avsnitt ta fram två suboptimala regulatorer för att i avsnitt 5 och 6 testa dessa teoretiskt och med simuleringar.

Det är naturligt att använda sig av tillståndsuppskattningen i Teorem 2 men att använda sig av någon annan tillståndsåterkoppling. Ett förslag av Johan Nilsson är att man skattar tillstånden då kontrollsignalen förväntas att ställas ut. Man får då följande regulator

$$u_k = -L \begin{bmatrix} \Phi_k^p & \Gamma_k^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} \\ u_{k-1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

där

$$\Phi_k^p = e^{A(\tau_k^{sc} + \bar{\tau}^{ca})}, \quad \Gamma_k^p = \int_0^{\tau_k^{sc} + \bar{\tau}^{ca}} e^{As} ds B$$

och  $L$  är den optima fördröjningsfria återkopplingen. Vi har använt oss av beteckningen  $\bar{\tau}^{ca} = E\tau_k^{ca}$ . Styrlagen kan också skrivas

$$\tilde{u}_k = -L_0 e^{\tilde{A}(\tau_k^{sc} + \bar{\tau}^{ca})} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} \\ u_{k-1} \end{bmatrix}$$

om man låter  $L_0 = [L, 1]$ . Om vi erhållit den diskreta kostnadsfunktionen,  $J_N$ , genom att sampla en kontinuerlig kostnadsfunktion, så är styrlagen optimal med avseende på den kontinuerliga förlustfunktionen, förutsatt att tidsfördröjningarna är konstanta.

Ett förslag att förbättra den suboptimala regulatorn (3) är att vid tillståndsåterkopplingen, förutom  $E(\tau^{ca})$ , även ta hänsyn till standardavvikelsen  $\sigma(\tau^{ca})$ . Den föreslagna styrlagen ges av

$$\tilde{u}_k = -L_{\sigma(\tau^{ca})} e^{\tilde{A}(\tau_k^{sc} + \overline{\tau^{ca}})} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} \\ u_{k-1} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

där  $L_\sigma$  beräknas med Riccatiekvationen

$$\begin{aligned} S_\sigma &= \tilde{Q}_{11} + \tilde{\Phi}^T S_\sigma \tilde{\Phi} - L_\sigma^T ((\tilde{Q}_{22} + \sigma^2 B^T \Phi^T S_\sigma^{11} \Phi B) + \tilde{\Gamma}^T S_\sigma \tilde{\Gamma}) L_\sigma \\ L_\sigma &= ((\tilde{Q}_{22} + \sigma^2 B^T \Phi^T S_\sigma^{11} \Phi B) + \tilde{\Gamma}^T S_\sigma \tilde{\Gamma})^{-1} (\tilde{\Gamma}^T S_\sigma \tilde{\Phi} + \tilde{Q}_{12}^T) \end{aligned}$$

och  $S_\sigma^{11}$  är det övre  $n \times n$  blocket till  $S_\sigma$ . Då  $\sigma = 0$  så är detta Riccatiekvationen för den fördröjningsfria återkopplingen och  $L_\sigma = L_0$ . De båda suboptimala regulatorna sammanfaller därför i detta fall. Vi ser att det som skiljer dem åt kan tolkas som en extra term  $\sigma^2(u_k - u_{k-1})^T(B^T \Phi^T S_\sigma^{11} \Phi B)(u_k - u_{k-1})$  i förlustfunktionen. Intuitivt så leder detta till ett system där variationen av styrsignalen blir mindre och därför ett system som är mindre känsligt för tidsvariationer.

Vi ska först motivera styrlagen i specialfallet  $\tau_k^{sc} = 0$ . Detta kan tolkas som att vi inte tar hänsyn till  $\tau_k^{sc}$ , utan slår ihop denna med  $\tau_k^{ca}$ . Låt  $\tau_k = \tau_k^{ca}$ . Observera att med samma beteckningar som i Teorem 1, så kan öppna systemet skrivas som

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{\Phi} \tilde{x}_k + e^{-\tau_k \tilde{A}} \tilde{\Gamma} \tilde{u}_k + \tilde{v}_k.$$

Med variabelbytet  $z_k = \exp(\bar{\tau} \tilde{A}) \tilde{x}_k$ , så får vi

$$z_{k+1} = \tilde{\Phi} z_k + \tilde{\Gamma} \tilde{u}_k - (I - e^{-(\tau_k - \bar{\tau}) \tilde{A}}) \tilde{\Gamma} \tilde{u}_k + \tilde{v}'_k.$$

Låter man  $\gamma_k = (I - \exp(-(\tau_k - \bar{\tau}) \tilde{A})) \tilde{\Gamma}$ , så kan systemet skrivas som

$$z_{k+1} = \tilde{\Phi} z_k + \tilde{\Gamma} \tilde{u}_k - \gamma_k \tilde{u}_k + \tilde{v}'_k. \quad (5)$$

där  $\gamma_k \approx [B^T \Phi^T, 0]^T (\tau_k - \bar{\tau})$ . Vi söker nu den styrlag som minimerar kostnaden

$$J'_N = \sum_{k=0}^N \begin{bmatrix} z_k \\ u_k \end{bmatrix}^T \tilde{Q} \begin{bmatrix} z_k \\ u_k \end{bmatrix}$$

för systemet (5), då vi antar att  $\gamma_k = [B^T \Phi^T, 0]^T (\tau_k - \bar{\tau})$ . Det gäller då att  $E(\gamma_k) = 0$  och  $E(\gamma_k \gamma_k^T) = \sigma^2 [B^T \Phi^T, 0]^T [B^T \Phi^T, 0]$  om  $\sigma$  är standardavvikelsen av  $\tau_k$ . Kostnadsfunktionen  $J'$  är approximativt lika med  $J$ , eftersom  $z_k$  kan uppfattas som en uppskattning av  $\tilde{x}$  i tidpunkten då styrsignalen ställs. Vi använder oss av dynamisk-programmering, på samma sätt som i beviset av Teorem 1.

Låter vi  $S_k$  vara kostnaden vid tidpunkt  $k$  och  $\alpha_k$  vara den del av kostnadsfunktionen som inte kan påverkas av styrsignalen, så gäller

$$\begin{aligned}
z_k^T S_k z_k + \alpha_k &= \min_{\tilde{u}_k} \mathbb{E}_{\tau_k} \left( \begin{bmatrix} z_k \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix}^T \tilde{Q} \begin{bmatrix} z_k \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix} + z_{k+1}^T S_{k+1} z_{k+1} \right) + \alpha_{k+1} \\
&= \min_{\tilde{u}_k} \mathbb{E}_{\tau_k} \left( \begin{bmatrix} z_k \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix}^T \tilde{Q} \begin{bmatrix} z_k \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix} + (\tilde{\Phi} z_k + \tilde{\Gamma} \tilde{u}_k - \gamma_k \tilde{u}_k)^T S_{k+1} (\tilde{\Phi} z_k + \tilde{\Gamma} \tilde{u}_k - \gamma_k \tilde{u}_k) \right. \\
&\quad \left. + \alpha_{k+1} + \mathbb{E}_{\tilde{v}'_k} ((\tilde{v}'_k)^T S_{k+1} \tilde{v}'_k) \right) \\
&= \min_{\tilde{u}_k} \left( \begin{bmatrix} z_k \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix}^T \tilde{Q} \begin{bmatrix} z_k \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix} + z_k^T \tilde{\Phi}^T S_{k+1} \tilde{\Phi} z_k + \tilde{u}_k^T \tilde{\Gamma}^T S_{k+1} \tilde{\Gamma} \tilde{u}_k + z_k^T \tilde{\Phi}^T S_{k+1} \tilde{\Gamma} \tilde{u}_k \right. \\
&\quad \left. + \tilde{u}_k^T (\mathbb{E}_{\tau_k} \gamma_k^T S_{k+1} \gamma_k) \tilde{u}_k + \tilde{u}_k^T \tilde{\Gamma}^T S_{k+1} \tilde{\Phi} z_k \right) + \beta_k \\
&= \min_{\tilde{u}_k} \left( \begin{bmatrix} z_k \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix}^T \Omega \begin{bmatrix} z_k \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix} \right) + \beta_k
\end{aligned}$$

där

$$\Omega = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11} + \tilde{\Phi}^T S_{k+1} \tilde{\Phi}^T & \tilde{Q}_{12} + \tilde{\Phi}^T S_{k+1} \tilde{\Gamma} \\ \tilde{Q}_{12}^T + \tilde{\Gamma}^T S_{k+1} \tilde{\Phi} & (\tilde{Q}_{22} + \sigma^2 B^T \Phi^T S_{k+1}^{11} \Phi B) + \tilde{\Gamma}^T S_{k+1} \tilde{\Gamma} \end{bmatrix}.$$

förutsatt att  $S_{k+1}^{11}$  är övre  $n \times n$  blocket till  $S_{k+1}$ . Vi har då använt oss av att  $\mathbb{E} \gamma_k^T S_{k+1} \gamma_k = \text{tr}(\mathbb{E} S_{k+1} \gamma_k \gamma_k^T) = \sigma^2 \text{tr}(S_{k+1} [B^T \Phi^T, 0]^T [B^T \Phi^T, 0])$ , som blir lika med  $\sigma^2 B^T \Phi^T S_{k+1}^{11} \Phi B$ . Genom exempelvis derivation så kan vi finna extrempunkten  $\tilde{u}_k = -(\Omega_{21}/\Omega_{22})\tilde{x}_k$  till den kvadratiska formen. Insättning av denna ger minimum  $\tilde{x}_k^T (\Omega_{11} - \Omega_{12}\Omega_{21}/\Omega_{22})\tilde{x}_k$ . Då  $k \rightarrow -\infty$ , så kommer  $S_k$  konvergera mot ett stationärt värde och vi erhåller den suboptimala styrlagen  $\tilde{u}_k = -L_{\sigma(\tau_k)} z_k$ , som är ekvivalent med den ovan angivna styrlagen om vi använder oss av Kalmanfilteruppskattningen, eftersom  $\tau_k^{sc} = 0$ . I fallet att  $\tau_k^{sc}$  också är slumpmässig, så verkar det lämpligt att ersätta  $\sigma(\tau)$  med  $\sigma(\tau^{ca})$  eftersom regulatorn då tar hänsyn till  $\tau_k^{sc}$ . Regulator (4) inkluderar också variansen hos  $\tau_k^{ca}$  och kan jämföras med en sk 'cautious' regulator, Åström-Wittenmark (1995) kap 7.

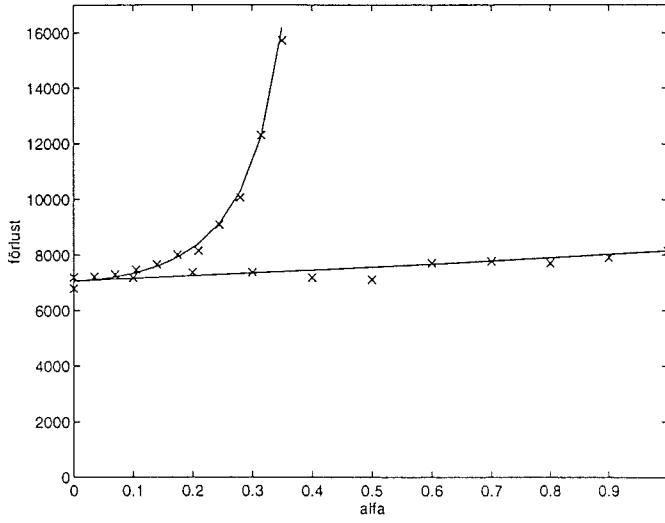
Ett förslag på ett suboptimalt schema i Luck and Ray (1990), är att man i schemat i figur 1, inför buffertar på regulator- och process sidan, så att alla tidsfördröjningar kan ses som konstanta. Fördelen med detta schema är att man helt kan bortse från tidsvariationer, men innebär också att man infört onödiga tidsfördröjningar. Detta schema är inte analyserat här.

## 5 Exempel

I detta avsnitt så ska vi i två exempel undersöka hur väl en LQG-kostnadsfunktion minimeras av standard LQG-regulatorn, samt de i kapitel 4 föreslagna regulatorerna. För att teoretiskt beräkna förlusten för de olika regulatorerna, så kan man använda sig av teorin i Nilsson (1996), avsnitt 4.2 .

### 5.1 Exempel, Doyle and Stein (1979)

Följande exempel är taget ur Doyle and Stein (1979) och är även analyserat i Nilsson (1996).



Figur 2: Teoretiska beräkningar och simuleringar av förlusten som funktion av  $\alpha$ . Den översta kurvan är regulatorn som inte tar hänsyn till tidsfördröjningar, och de undre (sammanfallande) kurvorna är den optimala samt den suboptimala regulatorn (3). Kryssen är simuleringar av standardregulatorn samt regulator (3).

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 35 \\ -61 \end{bmatrix} \xi \quad (6)$$

$$y = [2 \ 1] x + \eta. \quad (7)$$

Det gäller att  $\xi$  och  $\eta$  är vitt brus med medelvärde noll och variansen ett. Kostnadsfunktionen som ska minimeras är

$$J = E \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x^T H^T H x + u^2) dt$$

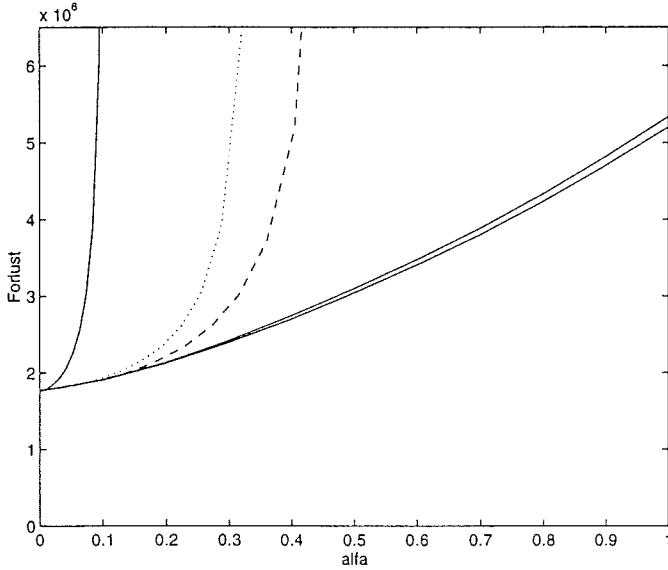
där  $H = 4\sqrt{5} [\sqrt{35} \ 1]$ . Samplingperioden väljs till  $h = 0.05$  enligt tummreglerna i Åström och Wittenmark (1990). Tidsfördröjningarna  $\tau_k^{sc}$  och  $\tau_k^{ca}$  antas vara rektangelfördelade i intervallet  $[0, \alpha h/2]$  där  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Vi får följande designparametrar för regulator som inte tar hänsyn till tidsfördröjningar

$$L = \begin{bmatrix} 38.911 \\ 8.094 \end{bmatrix}^T, \quad K = \begin{bmatrix} 2.690 \\ -4.484 \end{bmatrix}, \quad \bar{K} = \begin{bmatrix} 2.927 \\ -5.012 \end{bmatrix}.$$

Det slutna systemets poler blir egenvärdena till  $\Phi - \Gamma L$  och  $\Phi - KC$ , som kan beräknas till  $\{0.700 \pm 0.07i\}$  respektive  $\{0.743, 0.173\}$ . Ur detta skulle man kunna tro att systemet inte är svårreglerat. En Nyquistplott visar emellertid att fasmarginalen endast är  $11^\circ$ .

I figur 2, som innehåller beräkningar och simuleringar av förlusten för de olika regulatorerna, ser vi att regulator (3) ligger mycket nära den optimala. Teoretiska beräkningar visar att regulatorn som inte tar hänsyn till tidsfördröjningar blir instabil då  $\alpha \geq 0.4252$ .



Figur 3: Beräkningar av förlusten då (8) reguleras av de olika regulatorerna. Den heldragna översta kurvan är standardregulatorn som inte tar hänsyn till tidsfördröjningar. De båda understa kurvorna är den optimala respektive mitt förslag till suboptimal regulator. De båda prickade kurvorna är den suboptimala regulatorn (3) som tar hänsyn till  $\tau_k^{sc}$  (- -), respektive inte gör det (...).

## 5.2 Exempel, robot

Betrakta processen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -0.9 & -0.09 & 0.09 \\ 0.1 & 0.01 & -0.01 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 100 \end{bmatrix} \xi \quad (8) \\ y &= [0, 0, 1]x + \eta \\ J &= E \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x^T H^T H x + u^2) dt \\ H &= [3, 37, 20]\end{aligned}$$

där  $\xi, \eta$  är vitt brus med  $E(\eta^2) = E(\xi^2) = 1$ . Processen, som har poler i  $\{0, 0.05 \pm 0.9987i\}$ , är med några modifikationer robotexemplet i Åström och Wittenmark (1990). Sampelperioden väljs även här till  $h = 0.5$ .

I figur 3 är denna process undersökt och vi ser att regulator (3) blir instabil då  $\alpha > 1/2$ . Regulator (4) däremot är stabil för alla  $\alpha$  och ligger strax över den optimala.

## 6 Stabilitets- och förlust- undersökningar av regulatorer

Vi ska här undersöka uppförandet för fyra olika SISO-processer, där brus endast adderas till in- och ut- signalen ( $u_k$  och  $y_k$ ). Det förutsätts dessutom att kostnadsfunktionen endast straffar in- och ut- signal. Vi ska jämföra hur väl en LQG-kostnadsfunktion minimeras av standard LQG-regulatorn, samt de i kapitel 4 föreslagna suboptimala regulatorerna, det vill säga regulator (3) och regulator (4).

Stabilitetsundersökningarna görs för sex olika typer av slumpmässiga tidsfördröjningar. Dessa är

- I       $\tau^I = \delta_h$ , dvs konstant tidsfördröjning  $\tau_k = h$ .
- II      $\tau^{II} = 0.2\delta_0 + 0.8\delta_h$
- III     $\tau^{III} = 0.5\delta_0 + 0.5\delta_h$
- IV     $\tau^{IV} = \text{rect}(0, h)$
- V     $\tau^V = 0.5\delta_{(0.5h-\sigma)} + 0.5\delta_{(0.5h+\sigma)}$  där  $\sigma = h/\sqrt{12}$
- VI    $\tau^{VI} = \delta_{0.5h}$

Vi har använt oss av  $\delta_t$  för att beteckna en punktmassa i  $t$ . Notera att fördelningarna (IV) och (V) båda har väntevärdet  $h/2$  och standardavvikelsen  $h/\sqrt{12}$ .

De processer som ska analyseras är; dubbelintegratorn, oscillatorn med  $\omega = 0.5$ , stabila processer med poler i  $\{-0.1, -0.2\}$ , samt tredje ordningens processer med poler i  $\{\pm 0.5i, -0.2\}$ . Sampelperioden sättes i samtliga fall till  $h = 1$ . Den samplade processen kan i det fördröjningsfria fallet skrivas på formen

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma(u_k + v_k) \quad (9)$$

$$y_k = Cx_k + \sqrt{r}e_k \quad (10)$$

där  $v_k$  och  $e_k$  förutsätts vara oberoende normalfördelat brus med medelvärdet noll och med variansen 1. Förlusten som skall minimeras förutsätts vara på formen

$$J_N = \sum_{k=0}^N (y_k^2 + qu_k^2). \quad (11)$$

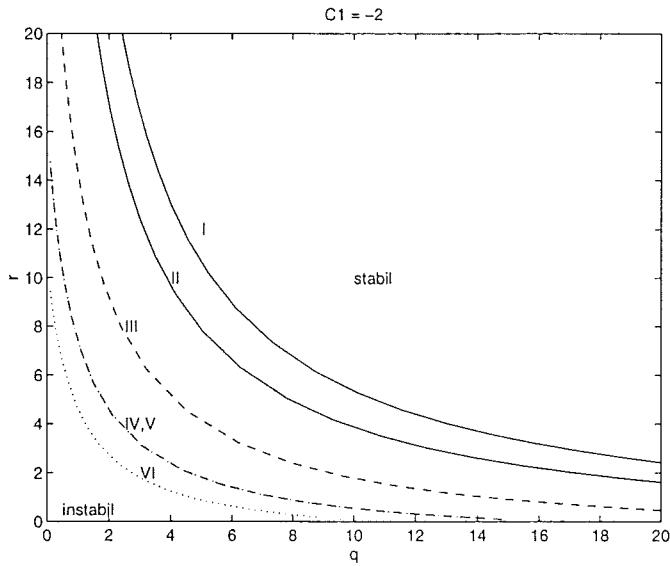
Vi ska bland annat bestämma de  $(r, q)$  som ger en stabilisande regulator.

### 6.1 Dubbelintegratorn

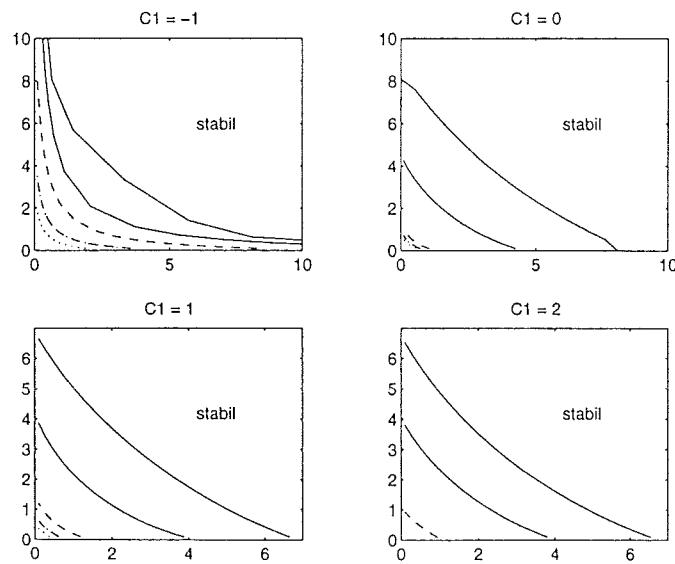
Den kontinuerliga processen beskrivs av

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [C_1, 1]x \end{aligned}$$

Sampelperioden är satt till  $h = 1$ . I figur 4 och 5 så är stabilitetsområdet för  $(r, q)$  plottad då  $C_1 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ , förutsatt att vi använder oss av standard LQG-regulatorn. Dessa val av  $C_1$  motsvarar process-nollställen i  $\{1/2, 1, \infty, -1, -1/2\}$ . I samtliga fall så gäller att stabilitetsområdet för  $\tau^I$  är mindre än stabilitetsområdet för  $\tau^{II}$  som är mindre än stabilitetsområdet för  $\tau^{III}$  och så vidare. Däremot så sammanfaller i stort sett stabilitetsområdet för  $\tau^{IV}$  med stabilitetsområdet för  $\tau^V$ . Eftersom  $E(\tau^I) > E(\tau^{II}) > E(\tau^{III}) = E(\tau^{IV}) = E(\tau^V) = E(\tau^{VI})$  och  $\sigma(\tau^{III}) > \sigma(\tau^{IV}) = \sigma(\tau^V) > \sigma(\tau^{VI})$  så verkar det som om



Figur 4: Stabilitetsområde i  $(q, r)$  planet för dubbelintegratorn då  $C_1 = -2$  och för fördelningarna (I)-(VI) när man använder sig av standard LQG-regulatorn.



Figur 5: Stabilitetsområde i  $(q, r)$  planet för dubbelintegratorn då man använder sig av standard LQG-regulatorn. I samtliga fall så gäller att stabilitetsområdet för  $\tau^I$  är mindre än stabilitetsområdet för  $\tau^{II}$  som är mindre än stabilitetsområdet för  $\tau^{III}$  och så vidare samt att stabilitetsområdet för  $\tau^{IV}$  och stabilitetsområdet för  $\tau^V$  i stort sett sammanfaller.

- Stabilitetsområdet minskar då  $E(\tau)$  ökar,
- För ett fixt  $E(\tau)$  så minskar stabilitetsområdet då  $\sigma(\tau)$  ökar.

Ytterligare beräkningar visar att det inte finns något nollställe som gör att systemet blir stabilt för varje val av  $(r, q)$  och tidsfördöjning. Observera att  $q = 0$  ger en minimum-varians tillståndsåterkoppling och  $r = 0$  medför att regulatorn kommer att använda sig av en deadbeat estimator för att uppskatta tillstånden. Antag nu att  $C_1 = -2$  och att fördöjningarna  $\tau_k^{sc}$  och  $\tau_k^{ca}$  båda är slumpmässiga med  $\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca} \in \text{Rect}(0, h/2)$ . Processen har i detta fall ett nollställe i  $1/2$ . Följande tabell visar förlusten för olika regulatorer då  $r, q \in \{1, 3, 5\}$

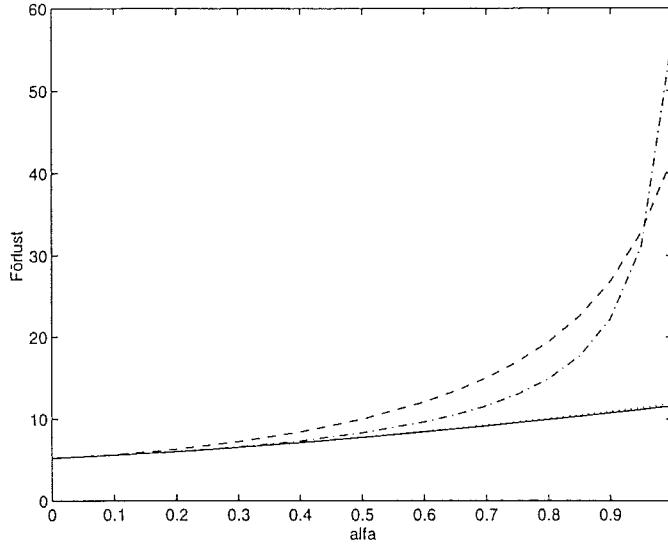
$r/q$	$q = 1$		$q = 3$		$q = 5$	
$r = 1$	149.41	0.370 %	164.3	0.200 %	175.2	0.140 %
	0.466 %	$\infty$	0.13 %	$\infty$	0.059 %	$\infty$
$r = 3$	163.0	0.358 %	178.7	0.193 %	190.1	0.137 %
	0.451 %	$\infty$	0.129 %	449.1 %	0.058 %	113.5 %
$r = 5$	173.3	0.350 %	189.6	0.190 %	201.3	0.135 %
	0.442 %	$\infty$	0.127 %	152.5 %	0.0568 %	79.30 %

För varje val av  $(r, q)$  så står förlusten för den optimala regulatorn i vänstra övre hörnet, och övriga siffror är förlusten, angiven i procentuell ökning i förhållande till den optimala, för de suboptima regulatorerna (3), (4) samt för standard LQG-regulatorn. I högra övre hörnet så står förlusten för regulator (3) och i nedre vänstra hörnet förlusten för regulator (4). I nedre högra hörnet så står förlusten för standardregulatorn och  $\infty$  betyder att systemet är instabilt.

Samma undersökning då  $C_1 = 0$ , vilket motsvarar att processen har ett kontinuerligt nollställe i  $\infty$ , ger resultatet;

$r/q$	$q = 0.1$		$q = 0.5$		$q = 1$	
$r = 0.1$	5.86	32.0 %	7.95	4.76 %	9.69	2.27 %
	2.10 %	$\infty$	0.82 %	$\infty$	0.46 %	313 %
$r = 0.5$	8.75	28.7 %	11.3	4.36 %	13.5	2.11 %
	1.87 %	$\infty$	0.75 %	272 %	0.43 %	125 %
$r = 1$	10.9	27.0 %	13.8	4.14 %	16.2	2.01 %
	1.75 %	366 %	0.72 %	134 %	0.42 %	85.3 %

Nedanstående tabell avser fallet  $C_1 = 2$ , som ger ett kontinuerligt nollställe i  $-1/2$ ;



Figur 6: Plott av förlusten som funktion av  $\alpha$ . De båda undre (samanfallande) kurvorna är förlusten för den optimala regulatorn och regulator (4). Förlusten för regulator (3), kurvtyp (.-), är större än för standard LQG-regulatorn (- -), då  $\alpha > 0.96$ .

$r/q$	$q = 0.1$		$q = 0.5$		$q = 1$	
$r = 0.1$	11.4	1.50 %	12.6	1.05 %	13.8	0.777 %
	2.4 %	253 %	1.34 %	152 %	0.79 %	105 %
$r = 0.5$	12.4	1.44 %	13.5	1.01 %	14.8	0.755 %
	2.29 %	153 %	1.30 %	107 %	0.76 %	80.1 %
$r = 1$	13.4	1.39 %	14.6	0.982 %	15.9	0.734 %
	2.20 %	106 %	1.26 %	80.7 %	0.74 %	63.6 %

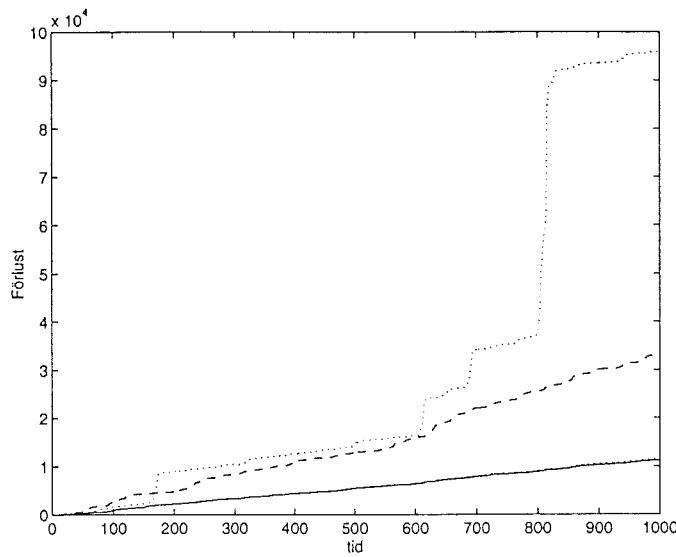
Av ovanstående undersökta fall, så ser vi att vi endast får signifikant bättre resultat med regulator (4) än med regulator (3) då  $C_1 = 0$  och  $q$  är litet. I figur 6 så är förlusten för de olika regulatorerna plottade då  $C_1 = 0$ ,  $q = 0.03$  och  $r = 1.5$ . De slumpmässiga tidsfördräjningarna antas vara  $\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca} \in \text{Rect}(0, \alpha h/2)$ , där vi varierar  $\alpha$  i intervallet  $[0, 1]$ . Vi får följande designparametrar

$$L_0 = [1.572 \quad 1.236 \quad 1] \quad L_{\sigma(\text{Rect}(0, h/2))} = [1.249 \quad 0.810 \quad 0.962]$$

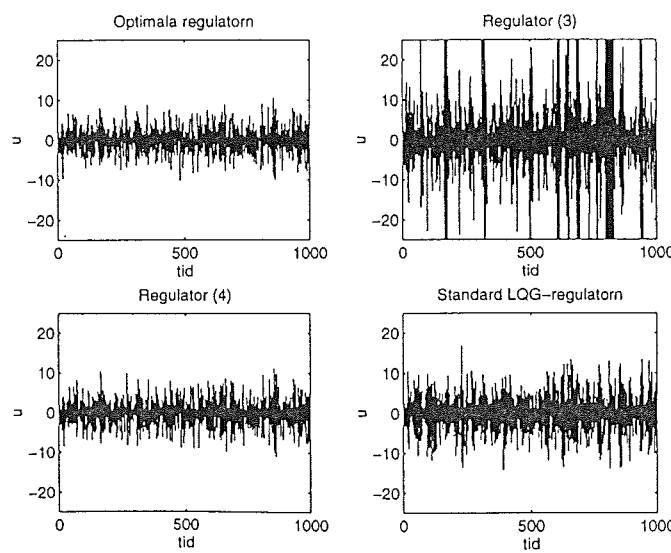
$$K = \begin{bmatrix} 0.436 \\ 1.151 \end{bmatrix} \quad \bar{K} = \begin{bmatrix} 0.436 \\ 0.716 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att regulator (3) ger större förlust än standardregulatorn då  $\alpha > 0.96$ . Regulator (4) däremot ligger mycket nära den optimala.

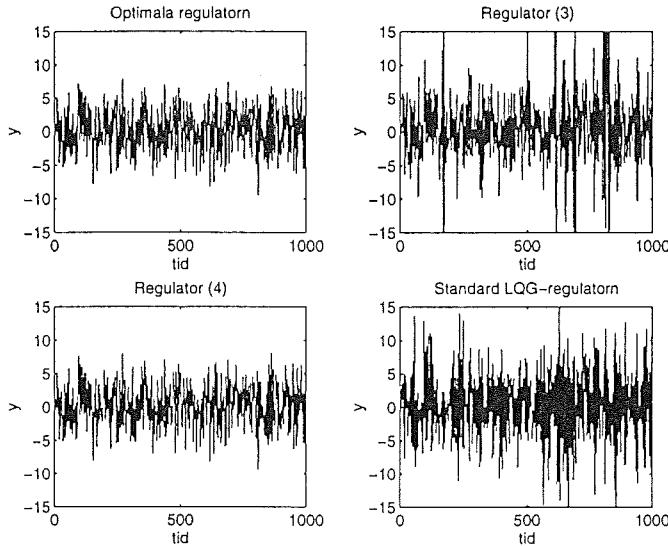
I figur 7, 8 och 9 så har vi plottat förlusten, styrsignalen samt utsignalen som funktion av tiden för de olika regulatorerna. Simuleringarna avser fallet  $\alpha = 1$ . Vi har låtit  $\tau_k^{sc}, \tau_k^{ca}, e_k$  och  $v_k$  vara samma i de olika simuleringarna. Vi ser att regulator (3) uppför sig väl utom då  $t \approx 170$ ,  $t \approx 610$ ,  $t \approx 690$  eller  $t \approx 810$ . I dessa fall blir både styrsignal och utsignal stora. Om man begränsar styrsignalen för regulator (3),



Figur 7: Plott av förlusten som funktion av tiden då  $\alpha = 1$ . De båda understa kurvorna är simuleringar av den optimala regulatorn samt regulator (4). Den streckade kurvan är en simulering av standard LQG-regulatorn och den övre prickade kurvan är en simulering av regulator (3). Samtliga simuleringar har startats med samma slumptalsfrö.



Figur 8: Plott av styrsignalen  $u$  som funktion av tiden då  $\alpha = 1$ .



Figur 9: Plott av utsignalen  $y$  som funktion av tiden då  $\alpha = 1$ .

så att  $|u| \leq 10$ , så kommer förlusten  $J_{1000}/1000$  bli 18.1, vilket är betydligt lägre än om man inte begränsar styrsignalen. I figur 10 så har förlusten medelvärdesbildats för 1000 simuleringar då vi använder oss av de olika regulatorerna.

## 6.2 Oscillatoren med poler i $\pm 0.5i$

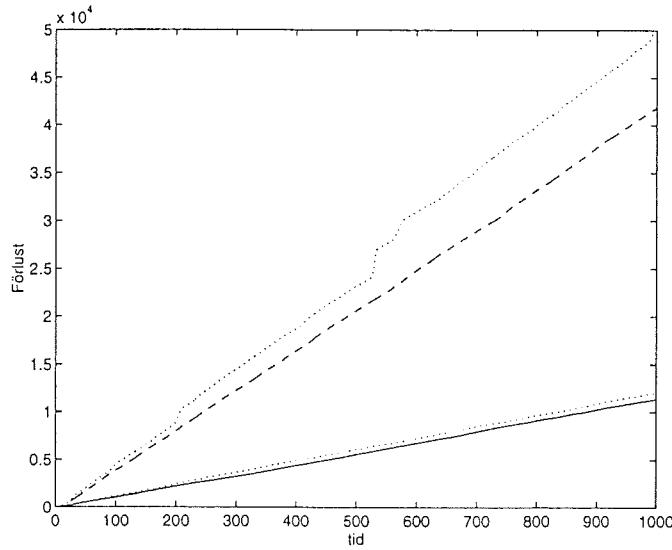
Den kontinuerliga processen beskrivs av

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \\ y &= [C_1, 1]x\end{aligned}$$

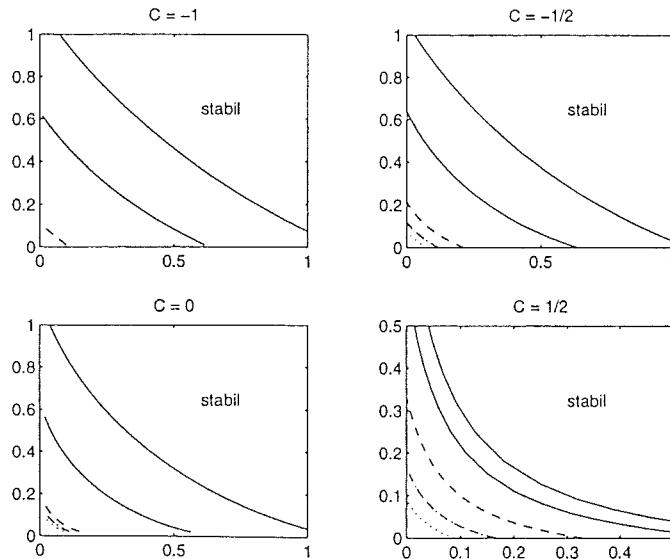
Samplar vi detta system med  $h = 1$ , så får vi diskreta poler i  $0.878 \pm 0.479i$ . I figur 11 så är stabilitetsområdet för  $(r, q)$  plottad då  $C_1 \in \{-1, -1/2, 0, 1/2\}$ . Dessa val av  $C_1$  motsvarar process-nollställen i  $\{-1/2, -1, \infty, 1\}$ . Då  $C_1 \in [0.96, 2.61]$ , så blir det slutna systemet stabilt för varje val av  $(r, q)$  och tidsfördröjning. Detta motsvarar kontinuerliga process-nollställen i  $[0.19, 0.52]$ . För övrigt gäller samma slutsatser som i dubbelintegrator fallet vad gäller de inbördes förhållanden mellan stabilitetsområdena för olika fördelningar.

I nedanstående diagram så har vi beräknat förlusten för suboptimala system då  $C_1 \in \{1/2, -1, 0\}$  och  $r, q \in \{0.02, 0.07, 0.18\}$ .

Då  $C_1 = 1/2$  ( Motsvarar ett nollställe i  $-1$  );



Figur 10: Plott av förlusten som funktion av tiden då  $\alpha = 1$ . De båda understa kurvorna är simuleringar av den optimala regulatorn samt regulator (4). Den strec-kade kurvan är en simulering av standard LQG-regulatorn och den övre prickade kurvan är en simulering av regulator (3). Förlusten har medelvärdesbildats för 1000 simuleringsar.



Figur 11: Stabilitetsområde i  $(q, r)$  planet för oscillatorn. I samtliga fall så gäller att stabilitetsområdenas inbördes storlek blir samma som i dubbelintegrator fallet.

$r/q$	$q = 0.02$		$q = 0.07$		$q = 0.18$	
$r = 0.02$	3.09	0.89 %	3.18	0.65 %	3.32	0.42 %
	0.8 %	$\infty$	0.4 %	$\infty$	0.24 %	48.3 %
$r = 0.07$	3.17	0.83 %	3.26	0.60 %	3.40	0.40 %
	0.7 %	$\infty$	0.41 %	83.5 %	0.23 %	34.2 %
$r = 0.18$	3.31	0.74 %	3.39	0.54 %	3.53	0.35 %
	0.62 %	85.2 %	0.36 %	44.2 %	0.20 %	26.5 %

Då  $C_1 = -1$  ( Motsvarar ett nollställe i  $1/2$  );

$r/q$	$q = 0.02$		$q = 0.07$		$q = 0.18$	
$r = 0.02$	2.34	1.49 %	2.44	1.16 %	2.61	0.773 %
	2.6 %	163 %	1.9 %	128 %	1.18 %	89.6 %
$r = 0.07$	2.42	1.46 %	2.51	1.13 %	2.68	0.765 %
	2.5 %	129 %	1.89 %	106 %	1.15 %	77.3 %
$r = 0.18$	2.56	1.39 %	2.66	1.08 %	2.83	0.73 %
	2.40 %	90.6 %	1.80 %	77.8 %	1.11 %	60.5 %

Då  $C_1 = 0$  ( Motsvarar ett nollställe i  $\infty$  );

$r/q$	$q = 0.02$		$q = 0.07$		$q = 0.18$	
$r = 0.02$	0.96	26.6 %	1.12	5.84 %	1.35	2.01 %
	2.1 %	$\infty$	1.11 %	$\infty$	0.56 %	223 %
$r = 0.07$	1.20	23.8 %	1.37	5.27 %	1.60	1.84 %
	1.89 %	$\infty$	1.01 %	416 %	0.524 %	110 %
$r = 0.18$	1.47	21.0 %	1.64	4.70 %	1.87	1.66 %
	1.67 %	258 %	0.91 %	118 %	0.48 %	64.2 %

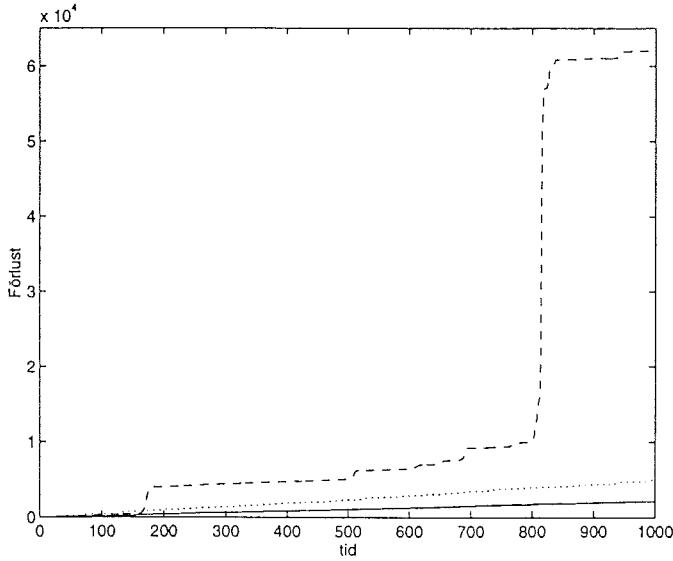
Precis som för dubbelintegratorn så verkar vi få problem med regulator (3), då  $q$  är litet, och processen har ett stort nollställe.

Antag nu att  $q = 0.004$  och  $r = 1$ . I figur 12 har vi plottat förlusten som funktion av tiden för de olika regulatorerna då  $\tau^{sc}$  och  $\tau^{ca}$  båda antas vara rektangelfördelade i intervallet  $[0, h/2]$ . Det visar sig att regulator (3) är instabil medan att regulator (4) och standard LQG-regulatorn båda är stabila.

### 6.3 Processer med poler i $\{-0.1, -0.2\}$

Den kontinuerliga processen beskrivs av

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y &= [C_1, 1]x\end{aligned}$$



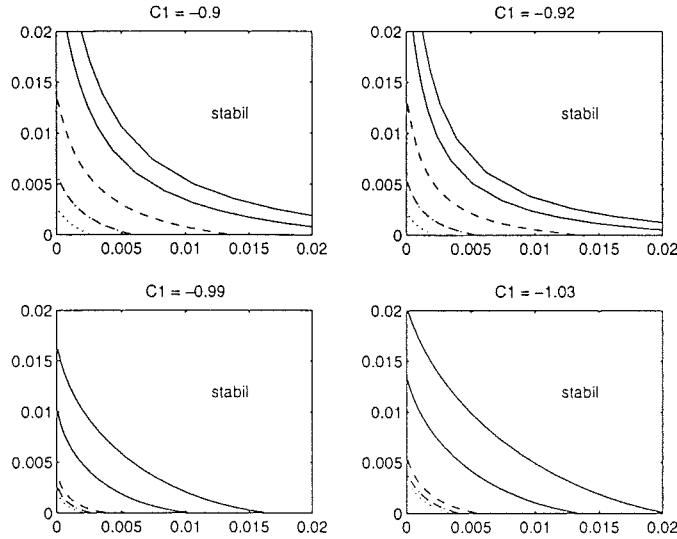
Figur 12: Förlusten som funktion av tiden då  $q = 0.004$  och  $r = 1$  för oscillatorn. Tidsfördröjningarna är rektangelfördelade i  $[0, h/2]$ . Simuleringarna är gjorda för regulator (3) (--) , standard LQG-regulatorn (..), regulator (4) (-.) samt för den optimala regulatorn (-). Förlusten för regulator (4) och den optimala regulatorn sammanfaller i stort sett. Observera att regulator (3) inte stabilisera systemet.

Systemet sampelas med  $h = 1$  och vi får då poler i  $\{0.905, 0.819\}$ . I figur 13 så har vi undersökt fallen  $C_1 = -0.9, -0.92, -0.99, -1.03$ . Detta motsvarar de kontinuerliga nollställena  $0.8, 1.05, 9.8, -3.5$ . Vi får stabilitet för varje val av  $(r, q)$  och tidsfördröjningar endast om  $C_1 < -1.92$  eller  $C_1 > -0.79$ , vilket motsvarar (kontinuerliga) nollställen i intervallet  $[-0.31, 0.79]$ . Följande tabeller visar förlusten då  $C_1 \in \{-1, -0.9, -0.93\}$  och  $q, r \in \{0.001, 0.1, 0.5\}$ :

Då  $C_1 = -1$  ( Nollställe i oändligheten );

$r/q$	$q = 0.001$		$q = 0.1$		$q = 0.5$	
$r = 0.001$	0.0307	12.07 %	0.107	0.21 %	0.204	0.40 %
	1.40 %	$\infty$	0.17 %	6.22 %	0.40 %	2.15 %
$r = 0.1$	0.114	5.82 %	0.207	0.11 %	0.304	0.24 %
	0.68 %	33.2 %	0.09 %	2.86 %	0.24 %	1.35 %
$r = 0.5$	0.213	3.51 %	0.305	0.07 %	0.392	0.16 %
	0.41 %	42.0 %	0.053 %	1.79 %	0.16 %	0.88 %

Då  $C_1 = -0.9$  ( Nollställe i 0.8 );



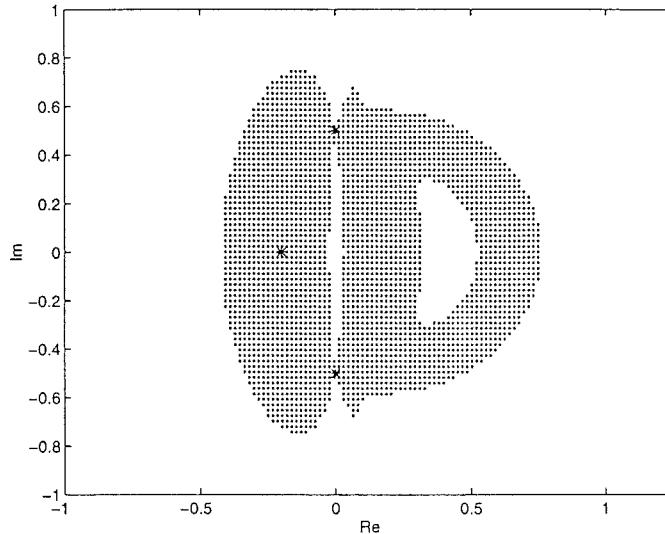
Figur 13: Stabilitetsområde i  $(q, r)$  för den stabila processen. I samtliga fall så gäller att stabilitetsområdet för  $\tau^I$  är mindre än stabilitetsområdet för  $\tau^{II}$  som är mindre än stabilitetsområdet för  $\tau^{III}$  och så vidare.

$r/q$	$q = 0.001$		$q = 0.1$		$q = 0.5$	
$r = 0.001$	0.107 0.73 %	0.44 % $\infty$	0.174 0.074 %	0.082 % 3.29 %	0.245 0.23 %	0.23 % 1.22 %
	0.46 %	22.5 %	0.236 0.047 %	0.053 % 1.76 %	0.298 0.16 %	0.16 % 0.78 %
$r = 0.1$	0.173 0.46 %	0.28 % 22.5 %	0.236 0.047 %	0.053 % 1.76 %	0.298 0.16 %	0.16 % 0.78 %
	0.245 0.29 %	0.18 % 17.1 %	0.299 0.031 %	0.035 % 1.15 %	0.350 0.11 %	0.11 % 0.50 %

Då  $C_1 = -1.03$  ( Nollställe i -3.53 );

$r/q$	$q = 0.001$		$q = 0.1$		$q = 0.5$	
$r = 0.001$	0.0290 1.23 %	9.65 % $\infty$	0.106 0.17 %	0.21 % 7.23 %	0.207 0.41 %	0.41 % 2.38 %
	0.111 0.59 %	4.62 % 24.5 %	0.207 0.085 %	0.11 % 3.12 %	0.311 0.24 %	0.25 % 1.50 %
$r = 0.1$	0.215 0.36 %	2.77 % 32.1 %	0.313 0.052 %	0.070 % 1.93 %	0.408 0.16 %	0.16 % 0.97 %

Vi ser att de suboptimala regulatorerna ligger nära den optimala och att vi får störst problem med regulator (3) då processen har ett stort nollställe och  $q$  är liten.



Figur 14: Stabilitetsområde för de komplexa nollställen som gör att processen med poler i  $\{\pm 0.5i, -0.2\}$  blir stabilt för varje val av  $(q, r)$  då vi använder oss av standardregulatorn . Tidsfördröjningarna  $\tau^{sc}$  och  $\tau^{ca}$  antas vara rektangel fördelade i  $[0, h/2]$ ,  $h = 1$ .

#### 6.4 Processer med poler i $\{\pm 0.5i, -0.2\}$

Den kontinuerliga processen beskrivs i detta fall av

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -0.2 & -0.25 & -0.05 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= Cx\end{aligned}$$

I figur 14, så är området där komplexa processnollställen ger stabilitet för varje val av  $(q, r)$  då  $\tau^{sc}$  och  $\tau^{ca}$  antas vara rektangel fördelade i  $[0, h/2]$ , förutsatt att vi använder oss av standard regulatorn. Vi har i tidigare avsnitt sett att man för de flesta processer kan få instabilitet om man väljer  $q$  och  $r$  för små. Vi ska undersöka förlusten då  $C = [0, 0, 1]$ ,  $C = [0, 1, 0]$ ,  $C = [1.5625, 0, 1]$  och  $C = [6.25, 5, 1]$ .

Då  $C = [0, 0, 1]$  (Två nollställen i oändligheten);

$r/q$	$q = 0.4$		$q = 1.8$		$q = 6$	
$r = 0.4$	29.1	12.3 %	38.1	2.55 %	49.7	0.84 %
	1.55 %	$\infty$	0.66 %	$\infty$	0.32 %	189 %
$r = 1.8$	40.0	10.67 %	49.6	2.22 %	61.3	0.74 %
	1.33 %	$\infty$	0.58 %	783 %	0.296 %	88.7 %
$r = 6$	52.7	8.97 %	62.4	1.87 %	73.4	0.63 %
	1.11 %	376 %	0.50 %	117 %	0.26 %	47.3 %

Då  $C = [0, 1, 0]$  (Ett nollställe i oändligheten och ett nollställe = 0);

$r/q$	$q = 0.05$		$q = 0.2$		$q = 1$	
$r = 0.05$	2.38	27.9 %	2.81	5.39 %	3.97	0.89 %
	2.17 %	$\infty$	1.08 %	$\infty$	0.31 %	70.3 %
$r = 0.2$	3.00	24.4 %	3.44	4.78 %	4.62	0.81 %
	1.90 %	$\infty$	0.97 %	237 %	0.29 %	50.5 %
$r = 1$	4.32	19.0 %	4.79	3.79 %	6.00	0.68 %
	1.47 %	94.5 %	0.77 %	59 %	0.26 %	30.1 %

Då  $C = [1.5625, 0, 1]$  (Nollställen i  $\pm 0.8i$ );

$r/q$	$q = 0.4$		$q = 0.9$		$q = 2$	
$r = 0.4$	7.02	2.29 %	8.92	1.14 %	11.9	0.59 %
	2.87 %	$\infty$	1.35 %	$\infty$	0.56 %	435 %
$r = 0.9$	8.68	2.32 %	10.9	1.18 %	14.3	0.63 %
	2.85 %	$\infty$	1.36 %	1168 %	0.59 %	228 %
$r = 2$	11.4	2.27 %	14.1	1.19 %	18.1	0.67 %
	2.74 %	550 %	1.33 %	250 %	0.61 %	138 %

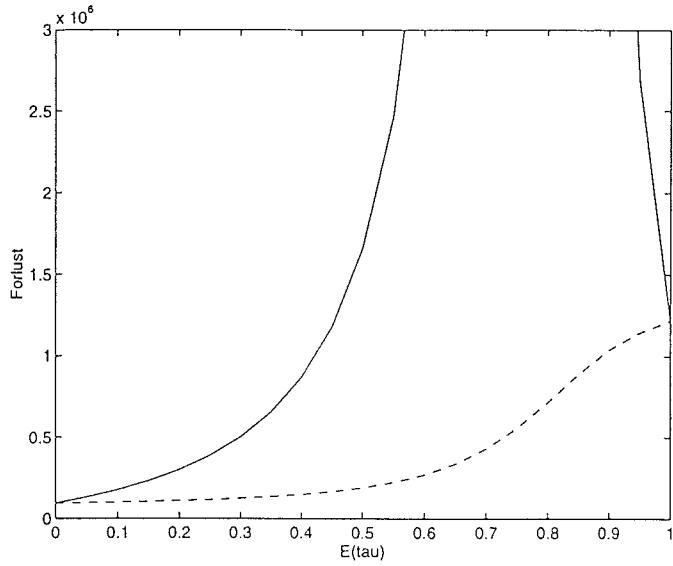
Då  $C = [6.25, 5, 1]$  (Dubbla nollställen i  $-0.4$ );

$r/q$	$q = 0.01$		$q = 0.05$		$q = 0.5$	
$r = 0.01$	103.5	1.70 %	103.6	1.69 %	104.7	1.60 %
	2.78 %	810 %	2.76 %	793 %	2.57 %	642 %
$r = 0.05$	103.6	1.70 %	103.7	1.69 %	104.8	1.59 %
	2.78 %	792.76 %	2.76 %	776 %	2.56 %	631 %
$r = 0.5$	104.5	1.69 %	104.6	1.68 %	105.8	1.59 %
	2.76 %	643 %	2.74 %	632 %	2.55 %	532 %

Det verkar som att vi får problem med regulator (3) om  $q$  är litet och processen har ett stort nollställe.

## 7 Ett tidsvariationskänsligt system

Från föregående avsnitt, så skulle man kunna tro att man alltid har stabilitet för tidsberoende tidsfördröjningar om man har stabilitet för alla konstanta tidsfördröjningar, förutsatt att man använder sig av standard LQG-regulatorn. Följande exempel visar dock att så inte är fallet.



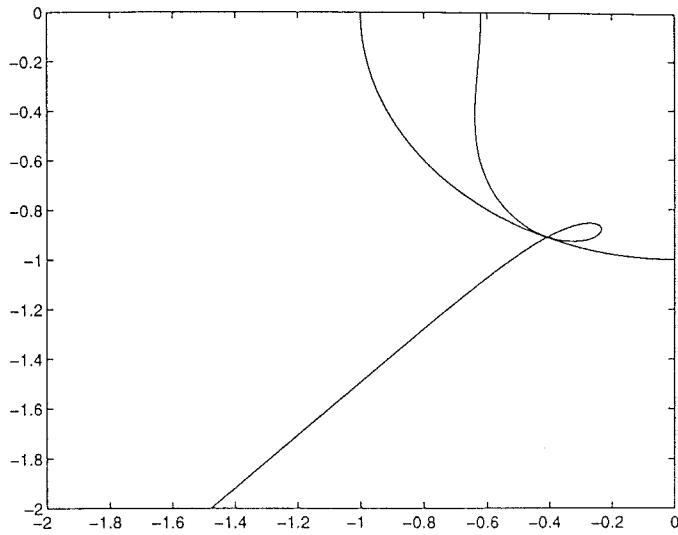
Figur 15: Plott av förlusten som funktion av  $\alpha$ . Den övre kurvan är förlusten då  $\tau = (1 - \alpha)\delta_0 + \alpha\delta_h$  och den undre då  $\tau = \delta_{\alpha h}$  (dvs konstanta tidsfördröjningar).

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \xi \\ y &= [0.7043 \quad 0.5396 \quad 1] x + \eta.\end{aligned}$$

Sampelperioden sättes till  $h = 1$ . Med beteckningarna i avsnitt 2 så låter vi bruset och straffet ges av matriserna  $Q_1 = H_Q H_Q^T$ ,  $R_1 = H_R H_R^T$ ,  $Q_{12} = R_{12} = 0$  och  $Q_2 = R_2 = 1$  där

$$\begin{aligned}H_Q &= [-8.8531 \quad 8.7241 \quad 3.4532] \\ H_R &= [-3.5177 \quad 11.063 \quad -9.4502]\end{aligned}$$

Den kontinuerliga processen har sina poler i  $\{0, \pm 0.5i\}$ . I figur 15 har vi plottat förlusten som funktion av väntevärdet ( $= \alpha$ ) för fördelningarna  $\tau = \delta_{\alpha h}$  och  $\tau = (1 - \alpha)\delta_0 + \alpha\delta_h$ . Systemet blir stabilt för alla konstanta tidsfördröjningar, men instabil då  $\tau = 0.2\delta_0 + 0.8\delta_h$ . Figur 16 visar Nyquistkurvan för systemet, som har stor fasmarginal.



Figur 16: Nyquistkurvan för processen

## 8 Slutsatser

Om man använder sig av standard LQG-regulatorn då man styr en process, så kan man få problem med tidsfördröjningar om straffet på styrsignalen och bruset på utsignalen är små, dvs om man gör en krävande regulatordesign. Genom att kompensera sig för tidsfördröjningarna med regulator (3), som tar hänsyn till  $E(\tau_k^{sc})$  och använder sig av optimal tillståndsuppskattning, så kan man dock minska förlusterna. Med denna regulator kan man få problem med slumpmässiga tidsfördröjningar om straffet på styrsignalen är liten och processen har ett stort nollställe. Om man använder sig av regulator (4), som dessutom tar hänsyn till  $\sigma(\tau_k^{sc})$ , så får man små förluster, i förhållande till den optima regulatorn, för alla undersökta fall. Eftersom regulator (4) är försumbart mer komplicerad (en extra term i Riccatiekvationen) än regulator (3), så verkar denna vara att föredra förutsatt att man känner  $\sigma(\tau_k^{sc})$ .

## Referenser

- [1] Nilsson Johan Licentsiat avh. (1996) *Analysis and Design of Real-Time Systems with Random Delays*. Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology.
- [2] Anderson, B. and J.Moore (1979). TFRT -3215. *Optimal filtering*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [3] Luck, R. and A. Ray (1990). *An observer-based compensator for distributed delays*. Automatica, 26:5, (903-908)
- [4] Åström, K. J. and B. Wittenmark (1990) *Computer Controlled Systems- Theory and Design*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, second edition.
- [5] Åström, K. J. and B. Wittenmark (1995) *Adaptive Control* Addison-Westley, Reading,MA, Secund edition.