

ISSN 0280-5316
ISRN LUTFD2/TFRT--5564--SE

Styraautomat för rollande missil baserad på mätinformation från accelerometrar

Stefan Delin

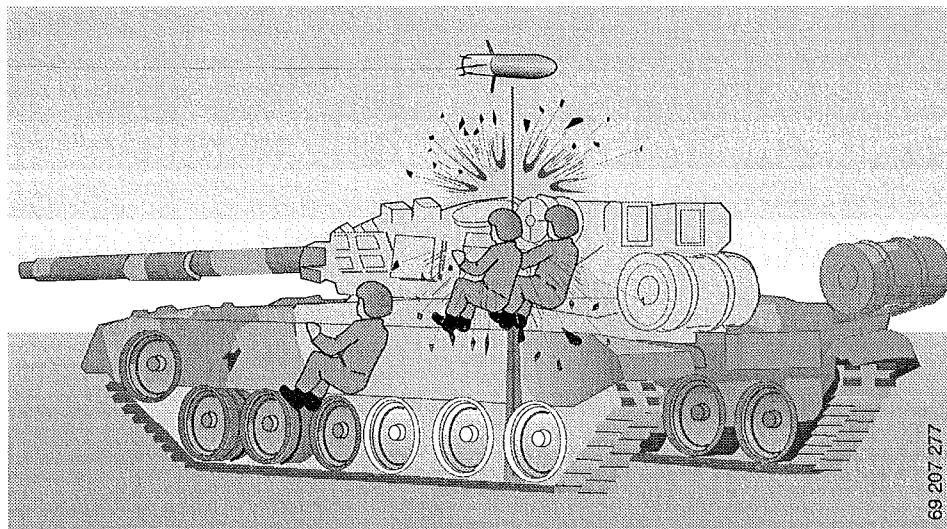
Institutionen för Reglerteknik
Lunds Tekniska Högskola
September 1996

Department of Automatic Control Lund Institute of Technology P.O. Box 118 S-221 00 Lund Sweden	<i>Document name</i> MASTER THESIS	
	<i>Date of issue</i> September 1996	
	<i>Document Number</i> ISRN LUTFD2/TFRT--5564--SE	
<i>Author(s)</i> Stefan Delin	<i>Supervisors</i> Johan Nilsson, Olof Rönn (Bofors AB)	
	<i>Sponsoring organisation</i> Bofors AB	
<i>Title and subtitle</i> Control of rolling missile based on measurement information from accelerometers. (Styrautomat för rollande missil baserad på mätinformation från accelerometrar.)		
<i>Abstract</i> <p>This report is a study on placement of accelerometers in a rolling missile. A Kalman filter is used for estimation of some states of the rolling missile. The rolling angle is assumed to be known. The states are fed back to give the missile desired dynamics. Reference signals in the form of desired accelerations are also introduced.</p> <p>The report shows that one transverse measuring accelerometer gives enough measure information to make estimation of the states needed for feedback possible. The estimation errors are only slightly lower if two transverse measuring accelerometers, placed perpendicular against one another, are used instead of one. Along the axis of symmetry of the missile there is an interval, in the front of the missile, where accelerometers should not be placed due to poor estimation. Bias errors in the accelerometers are efficiently eliminated by bias estimating states. Turbulent wind must be modeled in the Kalman filter to get good estimation of the angle of attack and the sideslip angle. In the controlled missile the gyrocoupling, due to the roll of the missile, is low. The small effects that are left of the gyrocoupling can be further reduced with suitable controllers. Reference signals can be introduced in the controller by feedforward of the states and control signals from a filtered reference signal. The feedforward can be done static without considerable deterioration of performance.</p>		
<i>Key words</i>		
<i>Classification system and/or index terms (if any)</i>		
<i>Supplementary bibliographical information</i>		
<i>ISSN and key title</i> 0280-5316		<i>ISBN</i>
<i>Language</i> Swedish	<i>Number of pages</i> 84	<i>Recipient's notes</i>
<i>Security classification</i>		

The report may be ordered from the Department of Automatic Control or borrowed through the University Library 2, Box 1010, S-221 03 Lund, Sweden, Fax +46 46 110019, Telex: 33248 lubbis lund.

Styrautomat för rollande missil baserad på mätinformation från accelerometrar

Stefan Delin



Bofors AB
1996-08-22

Sammanfattning

I denna rapport studeras hur accelerometrar bäst skall placeras i en rollande missil för att med ett kalmanfilter kunna estimeras vissa flygtillstånd, rollvinkeln förutsätts vara känd. Flygtillstånden återkopplas sedan för att ge missilen önskad dynamik. Även referenssignaler i form av önskade accelerationer introduceras.

Studien visar att **en** tvärsätande accelerometer ger tillräcklig mätinformation för estimering av de flygtillstånd som krävs för återkoppling. Estimeringsfelen blir endast obetydligt bättre då **två** tvärsätande accelerometrar, placerade vinkelrät mot varandra, används istället för **en**. Längs missilens symmetriaxel finns det ett intervall, långt fram, där accelerometrar inte bör placeras pga försämrade estimeringsmöjligheter. Biasfel i accelerometrarna elimineras effektivt av biasestimerande tillstånd. Turbulent vind måste modelleras i kalmanfiltret för att anblåsningsvinklar skall kunna estimeras. I den återkopplade missilen är gyralkopplingens effekter, som uppkommer pga missilens roll, låga. De små effekter som finns kvar av gyralkopplingen kan reduceras ytterligare med lämpliga styrklar. Referenssignaler kan introduceras i regulatorn genom framkoppling av tillstånd och styr signaler från en filtrerad referenssignal. Detta kan göras via rena förstärkningar utan nämnvärda försämringar av prestanda.

Förord

Denna rapport beskriver ett examensarbete som utförts som avslutning på linjen för teknisk fysik vid Lunds tekniska högskola. Studieriktningen har huvudsakligen varit reglerteknik, men även ett visst inslag av elektronik och mätteknik har ingått. Arbetet har utförts på heltid, med några avbrott, under tiden mars-augusti 1996 vid Bofors AB, avd. RUL3. Arbetet har handlat om styrautomat i en rollande missil baserad på mätinformation från accelerometrar.

Jag vill rikta ett stort tack till Ola Berger och min handledare Olof Lönn, på Bofors, för all hjälp och handledning. Jag vill även tacka de andra hjälpsamma arbetskamraterna på RUL3.

Karlskoga 1996-08-22

Stefan Delin

1	Problemformulering	5
1.1	Bakgrund	5
1.2	Problembeskrivning.....	5
1.3	Mål och förenklingar	6
2	Missilmodell	7
2.1	Linjäriserad missilmodell i tipped.....	7
2.2	Linjäriserad missilmodell i girled.....	9
2.3	Förenklingar	9
3	Modell för rollande missil	11
3.1	Koordinatsystem.....	11
3.1.1	Medrollande koordinatsystem	12
3.1.2	Icke medrollande koordinatsystem	13
3.2	Ytterligare förenklingar	14
3.3	Missildynamik vid roll	15
4	Accelerometrar och dess placering i en rollande missil	22
4.1	Accelerationer	22
4.2	Val av mätpunkt	26
4.2.1	Synpunkter på olika accelerometerplaceringar	27
4.2.2	Accelerometerplacering för skattning av q , α , r och β	28
4.2.2.1	Val av accelerometers avstånd till tyngdpunkten.....	29
4.2.3	Accelerometerplacering för skattning av g	31
4.2.4	Accelerometerplacering för skattning av ϕ	31
4.3	Sammanfattning av accelerometerplacering	32
5	Kalmanfilter för estimering av flygtillstånd	33
5.1	Diskretisering av missilmodell.....	33
5.2	Mätmatris.....	34
5.3	Observerbarhet	35
5.3.1	Observerbarhet med en accelerometer	36
5.3.2	Observerbarhet med två accelerometrar	37
5.3.3	Slutsats för accelerometerplacering baserad på observerbarhet	38
5.4	Kalmanfilter.....	40
5.5	Placering av estimatorpoler för en och två accelerometrar	41
6	Störningar	43
6.1	Rollvinkelfel	43
6.2	Vind.....	43
6.3	Roderfel	44
6.4	Accelerometerfel	44
6.5	Felplacerad accelerometer	45
6.6	Modellfel	45
6.7	Tyngdkraft.....	45
6.8	Sammanfattning av fel som simuleras i rapporten	46

7	Estimering i simuleringar	47
7.1	Testprocedur	47
7.2	Tolkning av estimeringsresultat	49
7.2.1	Estimering utan Störningar	49
7.2.2	Estimering med felplacerad accelerometer som störning	50
7.2.3	Estimering med roderskevhets som störning	52
7.2.4	Estimering med turbulent vind som störning	53
7.2.5	Alla fel samtidigt	54
7.2.6	Slutsats för estimering av tillstånd	55
8	Styrautomat	56
8.1	Dämpstyrautomat med hjälp av återkoppling	56
8.2	Accelerationsstyrautomat	56
8.2.1	Accelerationsstyrning med direktterm	58
8.2.2	Accelerationsstyrning med både framkoppling och återkoppling	59
8.2.2.1	Önskad modell.....	59
8.2.2.2	Tillståndsframkoppling	59
8.2.2.3	Framkoppling (invers av processmodell)	61
8.2.2.4	Approximativ invers.....	62
8.2.2.5	Simulering av accelerationsstyrautomat.....	63
8.3	Sammanfattning av styrautomat.....	69
9	Resultat	70
9.1	Vidare undersökningar	71
10	Referenser	72
Bilaga A	Terminologi samt typvärden för missil i denna rapport	73
Bilaga B	Signaler för olika givarplaceringar och riktningar (3 sid)	75
Bilaga C	Överföringsfunktioner (2 sid)	78
Bilaga D	Estimeringsfel och estimeringsskillnader (5 sid)	80

1 Problemformulering

1.1 Bakgrund

Med modern halvledarteknik och ökande produktionsvolymerna finns nu billiga och tillförlitliga accelerometrar med höga prestanda att tillgå. Fördelen med accelerometrar jämfört med gyron är att pris och vikt är lägre. Accelerometrar kan medge billig och effektiv styrning av delvis ny typ i missiler och styrda granater. Intresset för att öka precisionen för traditionellt ostyrda vapen som pansarskott och artillerigranater ökar därmed.

1.2 Problembeskrivning

Avsikten med examensarbetet är att studera styrning, av en rollande missil, baserad på information från accelerometrar. Informationen beror av accelerometrarnas placering, mätriktning och mätfel. Missilens flygtillstånd estimeras, utgående från mätsignalerna, med ett kalmanfilter. Med dessa estimat kan en styrautomat realiseras. Tillsammans med målrelaterade sensorer (tex målsökare eller ledstrålemottagare) kan man bygga upp kompletta styrlagar för missilstyrning mot mål. Placeringen av accelerometrarna och estimatorn för flygtillstånden är centrala områden att studera. I Bild 1 visas hur systemet ser ut. Insignalerna \ddot{z}_c och \ddot{y}_c är önskade accelerationer i höjd och sida. Framkopplingsblocket bildar de nominella värden på tillstånd \bar{x}_m och styrsignaler \bar{u}_m som krävs för att utsignalerna \ddot{z} och \ddot{y} såväl som möjligt skall följa insignalerna. Kalmanfiltret estimerar de flygtillstånd \hat{x} som används tillsammans med nominella tillstånd i återkopplingsblocket. Styrsignalen \bar{u} är summan av nominell styrsignal och de korrekationer som erhålles ifall nominella och skattade tillstånd inte är lika.

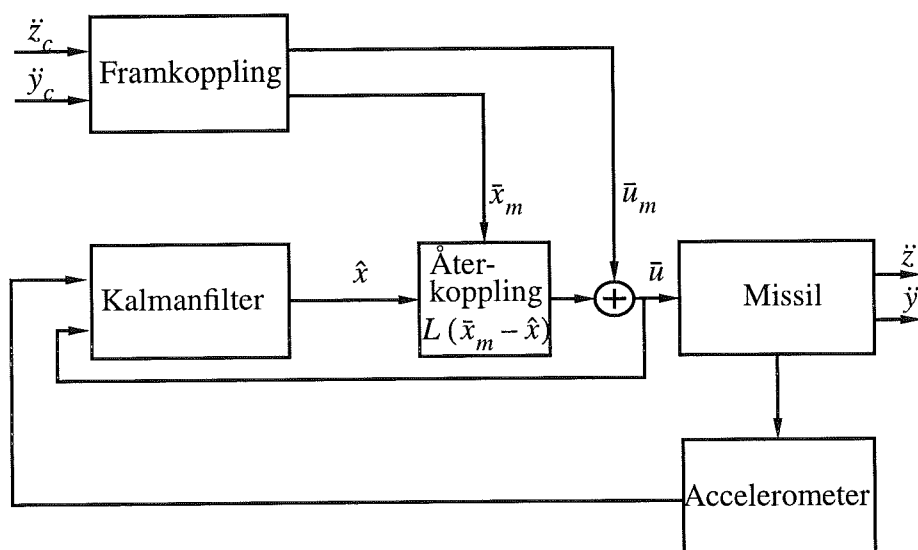


Bild 1: Principbild för missilsystemet.

Missilens rotation kring sin längsaxel gör att man får en gyalkoppling mellan sid- och höjddkanalerna, kopplingens storlek beror bla av rollvinkelhastigheten. Detta utgör en viss komplikation, men å andra sidan innebär missilens rotation att man tex kan utnyttja en accelerometermätaxel för att få mätinformation i mer än en kanal. Man kan även utnyttja rotationen till att minska komplexiteten hos målsökaren eller ledstrålemottagaren. Vidare kommer rotationen att reducera fel pga osymmetrier.

För att bilda en simuleringsmodell måste matematiska modeller skapas för blocken i Bild 1, detta görs i xmath och systembuild. Även olika fel såsom modellfel, vind, skevheter och accelerometerfel måste modelleras.

1.3 Mål och förenklingar

Mål:

Finna hur gyalkopplingen kommer in i tillståndsbeskrivningen av missilen.

Finna lämpligt antal accelerometrar som krävs, samt placeringen av dessa, för att därefter realisera ett robust kalmanfilter för estimering av vissa flygtillstånd.

Finna lämplig struktur på dämp- och accelerations-styrautomat.

Förenklingar:

Rollvinkeln antas känd.

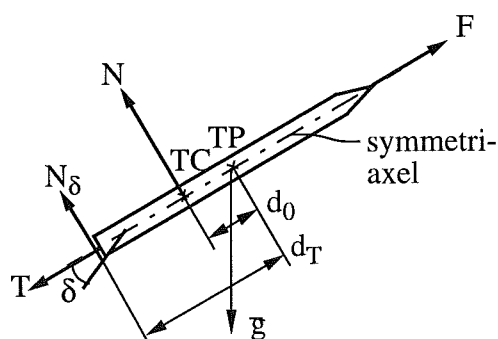
Missilen anses vara ett tidsinvariant linjärt system, men med en tidsvariant mätmatris.

Typvärden för en missil studeras.

Man kan anta att det finns accelerometrar med tillräckliga prestanda att tillgå.

2 Missilmodell

En modell för missilens olika flygtillstånd kommer att involvera flera olika koordinatsystem. Ofta väljs olika koordinatsystem för olika flygtillstånd hos missilen, detta för att differentialekvationerna som beskriver missilens rörelser skall bli så enkla som möjligt. Tillståndet uttryckt i ett annat koordinatsystem fås via en transformation. Missilens rörelser i olika plan har olika namn. Inom flygdynamik kallas vanligen rörelser i ett plan parallellt med jordytan för gir (ψ), rörelser vinkelrätt detta plan kallas tipp (θ) och rotation kring missilens längdaxel kallas roll (ϕ). För att beskriva hur missilen vridit sig i förhållande till ett inert (oftast approximerat med ett jordfast) koordinatsystem används vanligtvis Eulervinklar, se Etkin [1]. Dessa vinklar fås när det inerta koordinatsystemet roteras successivt kring sina z-, y- och x-axlar (i angiven ordning) tills det inerta systemet sammanfaller med missilens kroppsfasta system. De successiva vridningsvinklarna benämns ψ , θ och ϕ . För små vinklar i tipp och girled kan man bortse från att vridningarna ej kommuterar. Linjäriseringarna nedan är gjorda så, dvs rörelser i gir- respektive tipp-led betraktas som om tipp- respektive gir-vinkeln vore noll trots att den inte är det. En enkel bild över missilen och krafterna som verkar på den visas i Bild 2. En utförligare beskrivning av definitioner och missildynamik, som används i fortsättningen, finns tex i Bofors "Kurs i ROBOTTEKNIK" kapitel 1 [5]. Använda beteckningar på variabler och konstanter för missildynamiken är allmänt vedertagna.



F dragkraft
N lyftkraft
 N_δ roderkraft (tillskott när $\delta \neq 0$)
T luftmotstånd
 d_T roderkraftens hävarm mot TP
 d_0 aerodynamisk stabilitetsmarg.
TC tryckcentrum
TP tyngdpunkt
g tyngdkraft vektor

Bild 2: Missilens kraftpåverkan.

2.1 Linjäriserad missilmodell i tippled

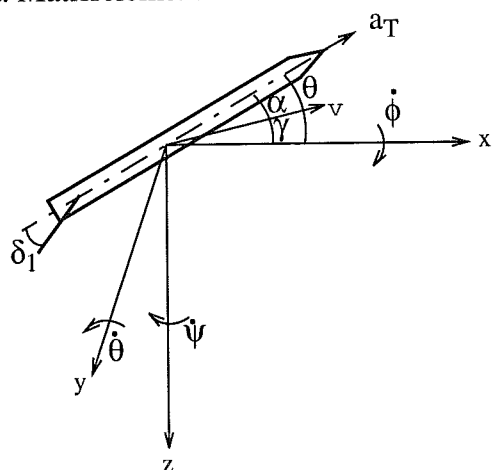
För små anfallsvinklar i tipp- och girled kan en linjäriserad modell som beskriver missilens dynamik bildas. I Bild 3 definieras vissa variabler för att beskriva missilens dynamik. Anfallsvinkeln α är vinkeln mellan missilens symmetriaxel och tyngdpunktens hastighetsvektor. Symmetriaxeln i en missil är den axel kring vilken missilen är rotationssymmetrisk. Banvinkeln γ är hastighetsvektorns avvikelse från en fix referensriktning, största möjliga värde på tidsderivatan av γ är ett mått på manöverbarheten.

Utgående från variablerna i Bild 3 kan missilens rörelser i xz-planet beskrivas av följande linjäriserade system, se Bofors "Kurs i ROBOTTEKNIK" [5]:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{z} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qSd^2 C_{mq}}{2vI_{yy}} & \frac{qSdC_{m\alpha}}{I_{yy}} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{-qSC_{N\alpha} - \frac{a_T}{v}}{mv} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-qSC_{N\alpha} - a_T}{m} & \frac{a_T}{v} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \alpha \\ \dot{z} \\ z \end{bmatrix} - qSC_{N\delta} \begin{bmatrix} \frac{d_T}{I_{yy}} \\ 1 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} \delta_1 \quad (1)$$

A1 B1

I Bilaga A finns information om elementen som ingår i matriserna A1 och B1. Egenvärdena till undermatrisen A1(1:2,1:2) i ekvation (1) bestämmer en viktig bit av missilens dynamik, den sk kortperioden. Som det visar sig senare kommer kortperioden att påverkas då missilen rollar. Notera att g-kraften här har försumrats. Dess inverkan kan beaktas genom superponering efteråt, eftersom systemet är linjäriserat. Matriselementen är i allmänhet tidsvariabla.



- α anfallsvinkel
- γ banvinkel
- δ_1 roderutslag
- v hastighet
- a_T längsacceleration
- $\dot{\phi}$ rollvinkelhastighet
- $\dot{\theta}$ tippvinkelhastighet
- $\dot{\psi}$ girvinkelhastighet

Bild 3: Definition av vissa variabler för missil i tippeld, origo i TP.

Precis som för tippeld kan missilen modelleras i girled, fast med andra beteckningar.

2.2 Linjäriserad missilmodell i girled

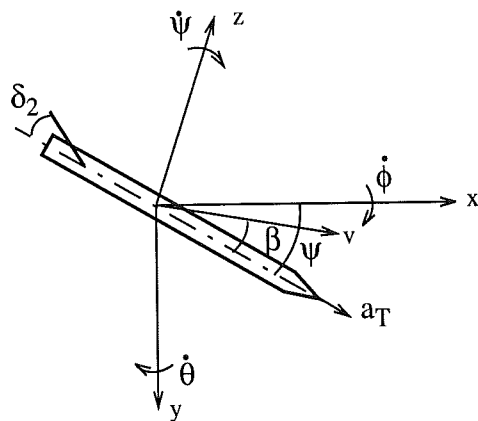


Bild 4: Definition av vissa variabler för missil i girled, origo i TP.

Utgående från variablerna i Bild 4 kan missilens rörelser i xy-planet beskrivas av följande linjäriserade system:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\beta} \\ \dot{y} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qSd^2 C_{mq}}{2vI_{zz}} & \frac{qSdC_{m\beta}}{I_{zz}} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{qSC_{N\beta}}{mv} - \frac{a_T}{v} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-qSC_{N\beta}}{m} - a_T & \frac{a_T}{v} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \beta \\ y \\ y \end{bmatrix} - qSC_{N\delta} \frac{1}{mv} \delta_2 \begin{bmatrix} \frac{d_T}{I_{zz}} \\ \frac{1}{mv} \\ \frac{-1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

A2 B2

2.3 Förenklningar

Egentligen är nästan inga av variablerna som ingår i A- och B-matriserna konstanta. Exempelvis ändras massan m och tröghetsmatrisen I när bränsle förbrukas. De aerodynamiska koefficienterna C_{index} varierar med anfallsvinklarna. Tyngdpunkten flyttar på sig vilket gör att d_T varierar. Variabeln q är en funktion av missilens hastighet som i allmänhet varierar. Variationerna är emellertid långsamma i förhållande till de kroppsvängningar som vi är intresserade av. Roderutslagen och anblåsningvinklarna är dessutom normalt små ($< 10^\circ$). Detta gör att de principi-

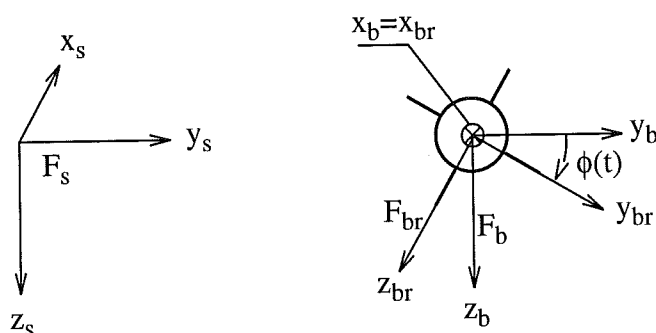
ella egenskaperna kan beräknas även efter vissa förenklingar utöver den linjäriserade aerodynamiken:

- Små roderutslag gör att påverkan på v och a_T från roder kan försummas.
- Missilens fart v är konstant, dvs a_T är lika med noll.
- Flyghöjden är konstant, dvs ρ är konstant.
- TP är fixerad, tex om bränslet är symmetriskt placerat kring TP.
- Simuleringarna är gjorda för en missil, typvärdena ges i Bilaga A.
- Roderutslag och anfallsvinklar är små ($<10^\circ$).
- Rollvinkeln sätts till 0.

3 Modell för rollande missil

3.1 Koordinatsystem

Missilmodellen skall nu även innefatta de effekter som uppkommer pga att missilen rollar. Den viktigaste effekten är gyalkopplingen, denna innebär att rörelser i sida och höjd kopplas till varandra via missilens rollning. Dessutom kan aerodynamiska effekter förekomma men de kan hållas små genom lämplig utformning av missilen. Den aerodynamiska kopplingen försummas här. Eftersom anblåsningssvinklar i tipp- och girled förutsätts små behöver ingen hänsyn tas till vilken ordning vridningar i tipp- och girled görs. Beskrivningen av gyalkopplingen blir då enkel. Rollningen innebär att ytterligare ett koordinatsystem kommer in i bilden, nämligen det som följer med missilen när den rollar. Detta innebär att 3 stycken koordinatsystem kommer att användas för beskrivning av den rollande missilens dynamik. Bild 5 visar dessa 3 koordinatsystem F_s , F_b och F_{br} .



- F_s - siktlinjeorienterat system, rollar ej, x_s parallell med en tangent till siktlinjen
- F_b - kroppsfast, icke medrollande system
- F_{br} - kroppsfast, medrollande system
- x_b och x_{br} sammanfaller med missilens symmetriaxel
- Alla 3 koordinatsystemen har origo i TP.
- $\phi(t)$ - missilens rollvinkel vid tiden t

Bild 5: 3 olika koordinatsystem samt missil, sedd bakifrån, inlagd.

Siktlinjen är den linje som kan tänkas finnas mellan skytt och mål och det är längs denna linje som missilen antas flyga. Den absoluta rotationen av F_b uttryckt i F_b kan skrivas på följande sätt:

$$(\bar{\omega}_{s,b})_b = \begin{bmatrix} 0 \\ q \\ r \end{bmatrix}_b = \bar{\Omega}_b \quad \begin{bmatrix} p = \dot{\phi} \\ q = \dot{\theta} \\ r = \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Kroppens absoluta rotation, F_{br} uttryckt i F_b ges av:

$$(\bar{\omega}_{s, br})_b = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_b = \bar{\omega}_b$$

Vissa av beteckningarna ovan kräver att förtydligas. Variablerna p , q och r är missilens absoluta vinkelhastigheter uttryckta i basen F_b . Variablerna $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ och $\dot{\psi}$ är missilens vinkelhastigheter i basen F_s . Missilen följer i princip siktlinjen men utför små pendlingar kring denna, dvs variationer i vinklarna θ och ψ . Tänk för ett ögonblick att målet rör sig, med en begränsad hastighet. Då kommer siktlinjen att vridas med en viss vinkelhastighet och basen F_s får följaktligen samma vinkelhastighet. Men eftersom målet förutsätts röra sig med begränsad hastighet kan vinkelhastigheten hos basen F_s försummas. Med små vinklar θ och ψ (missilen skall följa siktlinjen) samt försumning av vinkelhastighet hos F_s kan p , q och r approximativt sättas lika med $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ respektive $\dot{\psi}$. Alltså, p , q och r är här approximativt missilens absoluta vinkelhastighet i basen F_b .

3.1.1 Medrollande koordinatsystem

Allmänt gäller att summan av momenten \bar{M} som påverkar missilen står i jämvikt med derivatan av rörelsemängdsmomentet L :

$$\bar{M} = \frac{d}{dt}(L) = \frac{d}{dt}(I\bar{\omega})$$

För att inte I -matrisen skall bli tidsvariabel väljs basen för koordinatsystemet som missilens huvudtröghetsaxlar F_{br} , vilket medför att I -matrisen blir en diagonalmatris med elementen I_{xx} , I_{yy} , och I_{zz} . $\bar{\omega}_{br}$ är missilens vinkelhastighet i förhållande till ett inert system och uttrycks i huvudtröghetsaxlarna. Då kan gyalkopplingen i det medrollande koordinatsystem fås enligt ekvation (3), se Lidström-Uhlhorn [2].

$$\bar{M}_{br} = I\dot{\bar{\omega}}_{br} + \bar{\omega}_{br} \times I\bar{\omega}_{br} = \begin{bmatrix} I_{xx}\dot{p}_{br} \\ I_{yy}\dot{q}_{br} + p_{br}r_{br}(I_{xx} - I_{zz}) \\ I_{zz}\dot{r}_{br} + p_{br}q_{br}(I_{yy} - I_{xx}) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Observera att rotationsvektorn (p_{br}, q_{br}, r_{br}) i ekvation (3) måste uttryckas i det medrollande koordinatsystemet. Observera även att $p_{br} = p_b$.

Eftersom medrollande koordinater inte används i denna rapport, behandlas ekvation (3) inte mer. Alla simuleringar utförs i ett icke medrollande koordinatsystem.

3.1.2 Icke medrollande koordinatsystem

Ett enkelt sätt att beskriva gyalkopplingen är i basen F_b som har vinkelhastigheten $\bar{\Omega}_b$. Detta låter sig göras eftersom missilen antas rotationssymmetrisk, då spelar det ingen roll om huvudtröghetsaxlarna är medrollande eller inte. Gyalkopplingen fås enligt nedan, se Lidström-Uhlhorn [2].

$$\bar{M}_b = I\dot{\bar{\omega}}_b + \bar{\Omega}_b \times I\bar{\omega}_b = \begin{bmatrix} I_{xx}\dot{p} \\ I_{yy}\dot{q} + prI_{xx} \\ I_{zz}\dot{r} - pqI_{xx} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Nu är rotationsvektorn (p, q, r) i ekvation (4) uttryckt i det icke medrollande koordinatsystemet, F_b . Observera att (p, q, r) även i fortsättningen betyder vinkelhastigheter i basen F_b . Om ekvation (4) sätts samman med delsystemen som beskriver kortperioden i ekvation (1) och (2) fås följande system:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{r} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{-I_{xx}}{I_{yy}}p & 0 \\ 1 & a_{22} & 0 & 0 \\ \frac{I_{xx}}{I_{zz}}p & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & 1 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \alpha \\ r \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & 0 \\ 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{theta} \\ u_{psi} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Elementen på plats (1,3) och (3,1) är gyalkopplingstermerna. u_{theta} och u_{psi} är vinkelutslagen som ett kroppsfast icke medrollande stjärtröder skulle ha för att ge önskad styrning. Vinklarna för de kroppsfasta medrollande roderna ges av ekvation (6).

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{theta} \\ u_{psi} \end{bmatrix} \quad (6)$$

I ekvation (6) är ϕ rollvinkeln, dvs den vinkel som anger hur mycket missilen rollat kring sin x-axel. Denna kan tex sättas till 0 vid tiden noll. För att kunna styra missilen på ett riktigt sätt måste denna vinkel vara välkänd. Det är svårt att bestämma vinkeln ϕ , speciellt om inga gyron får användas. Systemet i ekvation (5) är det vi "upplever" om vi tittar på en flygande missil. Egenvärdena för A-matrisen i ekvation (5) ger direkt vilka egenfrekvenser missilen kommer att svänga med, kring y- och z-axlarna i basen F_b . Bodediagram för signaler i ekvation (5) är de vi normalt tänker oss. Om tillstånden varit uttryckta i medrollande koordinater hade det inte varit lika lätt att tänka fysikaliskt.

Vill man ha med tillstånden för läge och hastighet i y- och z-led är det bara att lägga till dem i ekvation (5), dock skall man tänka på att ekvationerna är definierade i olika koordinatsystem. I basen F_b blir totala systemet, med numeriska värden enligt Bilaga A och rollfrekvens 10 Hz:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{z} \\ \dot{r} \\ \dot{\beta} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,99 & -465 & 0 & -3,14 & 0 & 0 \\ 1 & -2,42 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -484 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,14 & 0 & 0 & -2,99 & -465 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2,42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 484 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \alpha \\ z \\ r \\ \beta \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -553 & 0 \\ -0,346 & 0 \\ -69,2 & 0 \\ 0 & -553 \\ 0 & -0,346 \\ 0 & 69,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{theta} \\ u_{psi} \end{bmatrix} \quad (7)$$

A
B

Det är till detta system som a_{ij} - och b_{ij} -element hänförs i fortsättningen. Elementen i B-matrisens första kolumn benämns b_i . Eftersom ett av målen med detta examensarbete är att realisera en styrautomat för kommandering av acceleration behövs inte tillstånd för z och y. Uttrycken för a_{ij} - och b_{ij} -elementen finns i ekvation (1) och (5).

3.2 Ytterligare förenklingar

Skattningen av rollvinkeln $\phi(t)$ är ett stort problem i sig. För att underlätta analysen förutsätts därför att rollhastigheten p är konstant och känd, alternativt att rollvinkeln ϕ är känd.

Det finns aerodynamiska kopplingstermer, pga att missilen rollar, mellan de olika kanalerna:

- magnusmoment
- koppling mellan vissa aerodynamiska koefficienter (C_{index}) och flygtillstånd

Magnusmomentet har betydelse för korta och tjocka snabbt rollande projektiler. I den tillämpning som ligger till grund för detta arbete är magnusmomentet försumbart. Likaså kan koppling mellan vissa aerodynamiska koefficienter och flygtillstånd försummas. I ett verkligt fall varierar a- och b-elementen även med rollvinkeln. Det innebär i fallet med 4 symmetriska stjärtfenor att missilen kommer att påverkas med en frekvens som är 4·rollfrekvensen när α eller β är skilda från 0 rad. Även andra multipler än 4 kan förekomma. Tex blir multipeln 1 för parvis skeva roder. Därför bör rollfrekvensen·(möjliga multipler) vara långt ifrån missilens egenfrekvenser. För den antagna missilen är egenfrekvenserna ca 3.5 Hz. Med en rollfrekvens på 10 Hz är det då ingen större risk att missilen kommer i okontrollerad egensvängning, se Tullsson [6]. Rollvinkelberoendet hos a- och b-elementen kan därför försummas. Missilen kommer även att påverkas av jordens tyngdkraft. I fallet att denna ingår förutsätts siktlinjen gå vinkelrätt mot tyngdkraftfältet. Som nämnts tidigare kan g-kraften i efterhand enkelt superponeras till ekvation (7).

3.3 Missildynamik vid roll

När en missil rollar tillkommer kopplingar mellan vissa tillstånd som visats ovan. Det är intressant att studera hur missilen påverkas av denna koppling. Utan roll fås ett bodediagram (roderutslag till anfallsvinkel) med en kraftig resonanstopp.

Figurerna till vänster i Bild 6 visar bodediagram för en orollad missil, $p = 0$ Hz. Insignal är roderutslag i tippeld och utsignal är anfallsvinkel α i tippeld. Figurerna till höger visar bodediagram för korskopplingen, pga gyralkoppling, i en sakta rollande missil som rollar med 0.1 Hz. Insignal är roderutslag i tippeld och utsignal är anfallsvinkel β i girled. För en orollad missil finns givetvis ingen korskoppling pga gyralkoppling men om rollhastigheten är låg fås en svag koppling som kan försummas.

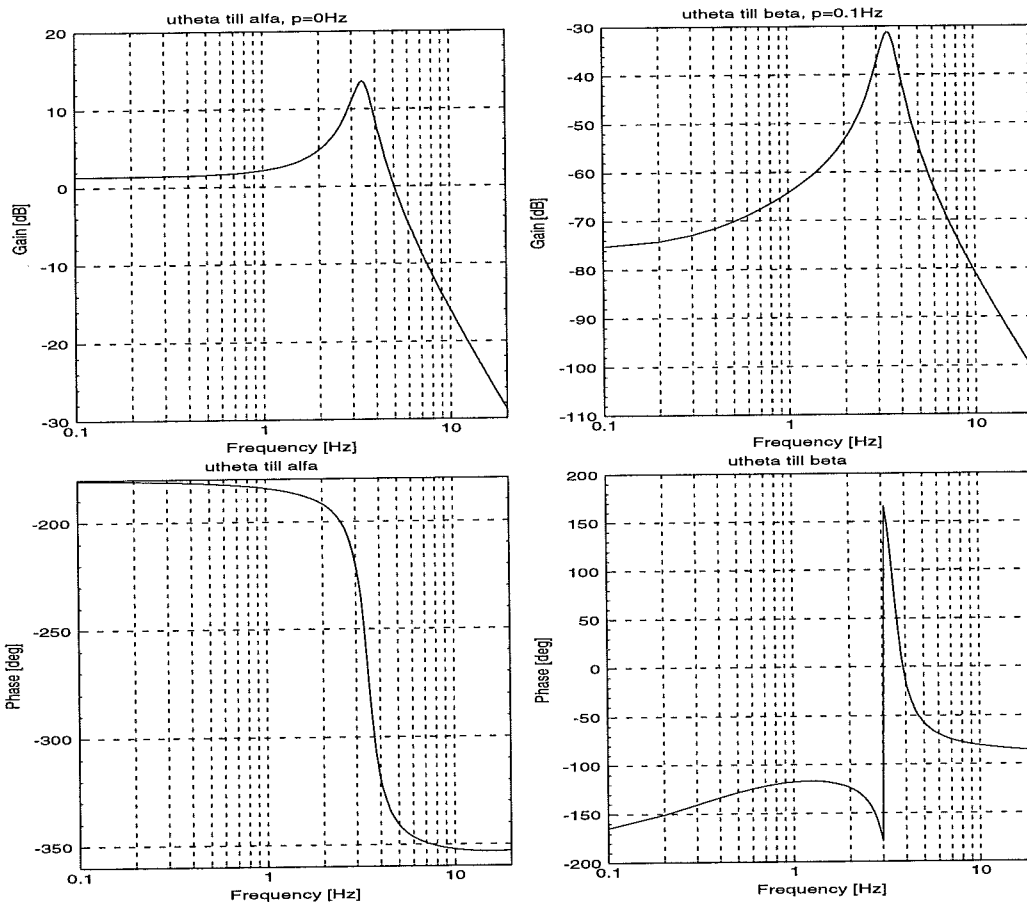


Bild 6: Bodediagram för orollad missil i basen F_b . Den statiska förstärkningen är negativ för båda utsignalerna.

Figurerna till vänster i Bild 7 visar bodediagram för en rollad missil, $p = 10$ Hz. Insignal är roderutslag i tipped och utsignal är anfallsvinkel α i tipped. För en rollhastighet på 10 Hz kommer resonanstoppet att breddas och bli lite lägre, jämfört med orollad missil. Detta beror på att tipp- och girkanalerna inte längre är separerade utan beror delvis på varandra, via gyalkopplingen. Då kommer det som från början var en komplex dubbelpol att delas upp i två olika komplex poler hos systemets överföringsfunktion. Överföringsfunktionen har även ett komplext nollställe som inte ändras sig med rollfrekvensen, detta sammanfaller med polerna hos det orollade systemet. Men mer intressant är att för roderutslag i höjd kommer, förutom anblåsningsvinkeln i höjd, även anblåsningsvinkeln i sida att ändras. Detta beror på den korskoppling som gyalkopplingen ger upphov till. Figurerna till höger i Bild 7 visar bodediagram för gyalkopplingen i en missil som rollar med 10 Hz, insignal är roderutslag i höjd och utsignal är anfallsvinkel β i sida. Bodediagrammet för gyalkopplingen visar en kraftig korskoppling vid resonansfrekvensen, men annars liten. Man ser även att korskopplingen ökat med en faktor 100 då rollvinkelhastigheten ökat 100 gånger.

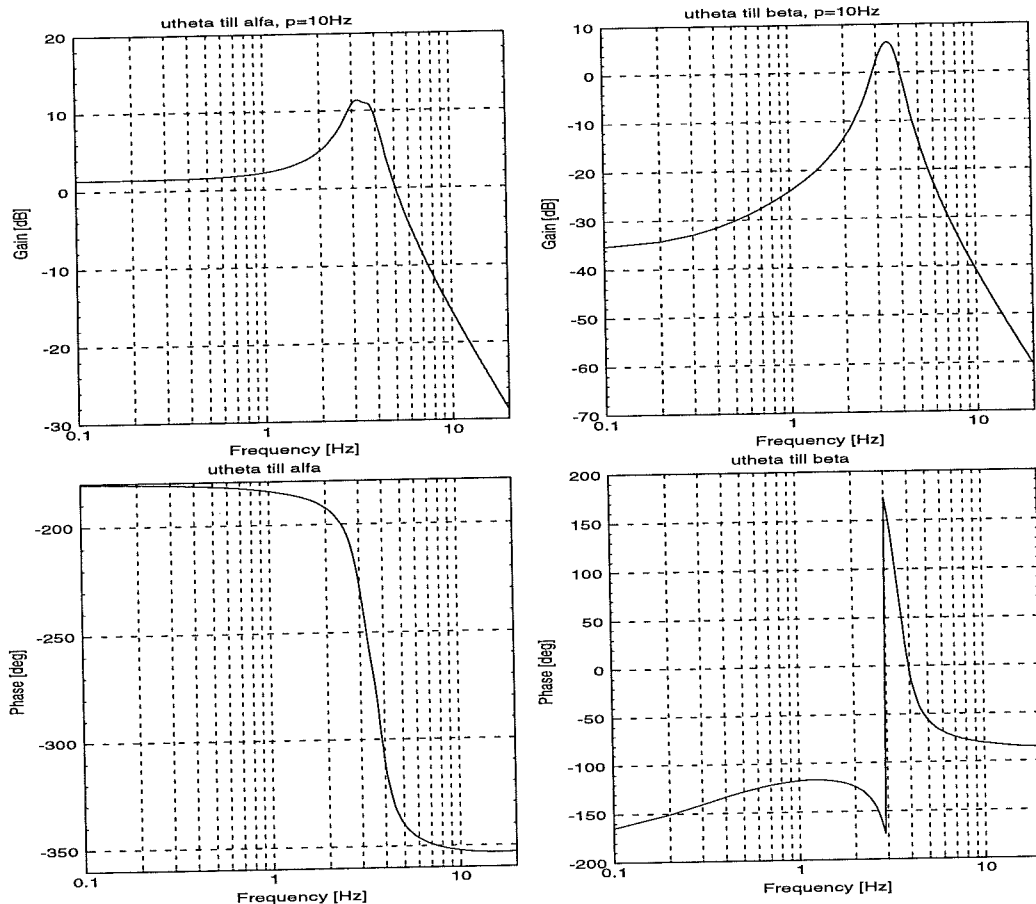


Bild 7: Bodediagram för rollad missil, i basen F_b . Den statiska förstärkningen är negativ för båda utsignalerna.

Med hjälp av överföringsfunktioner kan korskopplingen beskrivas av

$$\begin{bmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(s)_{\text{hojd-till-hojd}} & G(s)_{\text{sida-till-hojd}} \\ G(s)_{\text{hojd-till-sida}} & G(s)_{\text{sida-till-sida}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\text{theta}}(s) \\ u_{\text{psi}}(s) \end{bmatrix}$$

där elementen som inte finns i diagonalen är de oönskade korskopplingarna. Eftersom korskopplingen är relativt svag vid en rollhastighet på 10 Hz kan denna i princip approximeras med noll. Särskilt bra blir denna approximation när missilen är återkopplad och har lagom dämpning.

Ovan nämndes att en komplex dubbelpol delar sig när missilen rollar, i Bild 8 visas tydligt hur missilens egenvärden separerar med ökande rollhastighet.

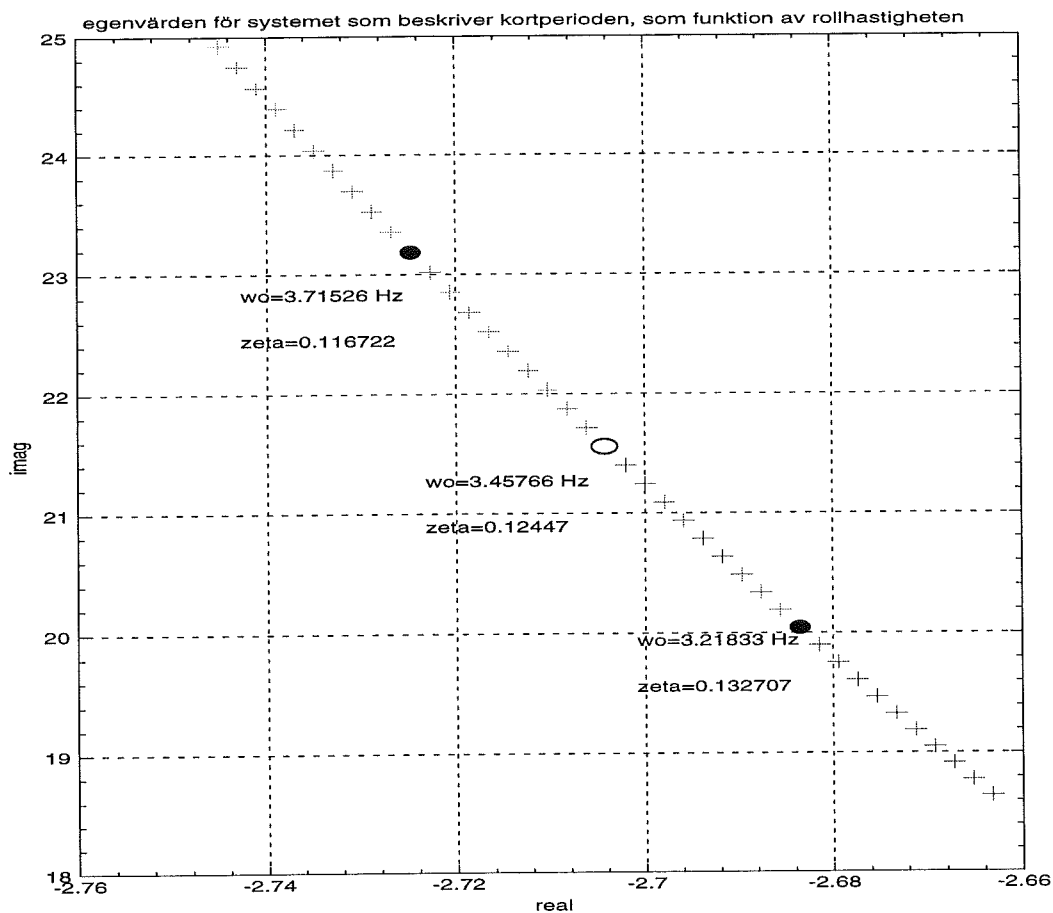


Bild 8: Egenvärden för A-matrisen (kroppsfast icke medrollande system, F_b), som hör ihop med tillståndsvektorn $[q, \alpha, r, \beta]$, kortperioden. Plotten är symmetrisk kring reella axeln, men här visas bara värdena i andra kvadranten. Rollhastigheten varierar från 0 Hz (tom ring) till 20 Hz (fylld ring vid 10 Hz).

Nedan finns plottar av vissa simuleringar (Bild 9- 11) för både orollad och rollad missil. Missilen påverkas av ett roderutslag i tippled som ett steg med amplituden 0.1 rad vid tiden 0.1 s. Alla missilens initialtillstånd utom p ($p = 10$ Hz) är nollställda. I alla plottar uttrycks tillståndsvariablerna i kroppsfast icke medrollande koordinatsystem.

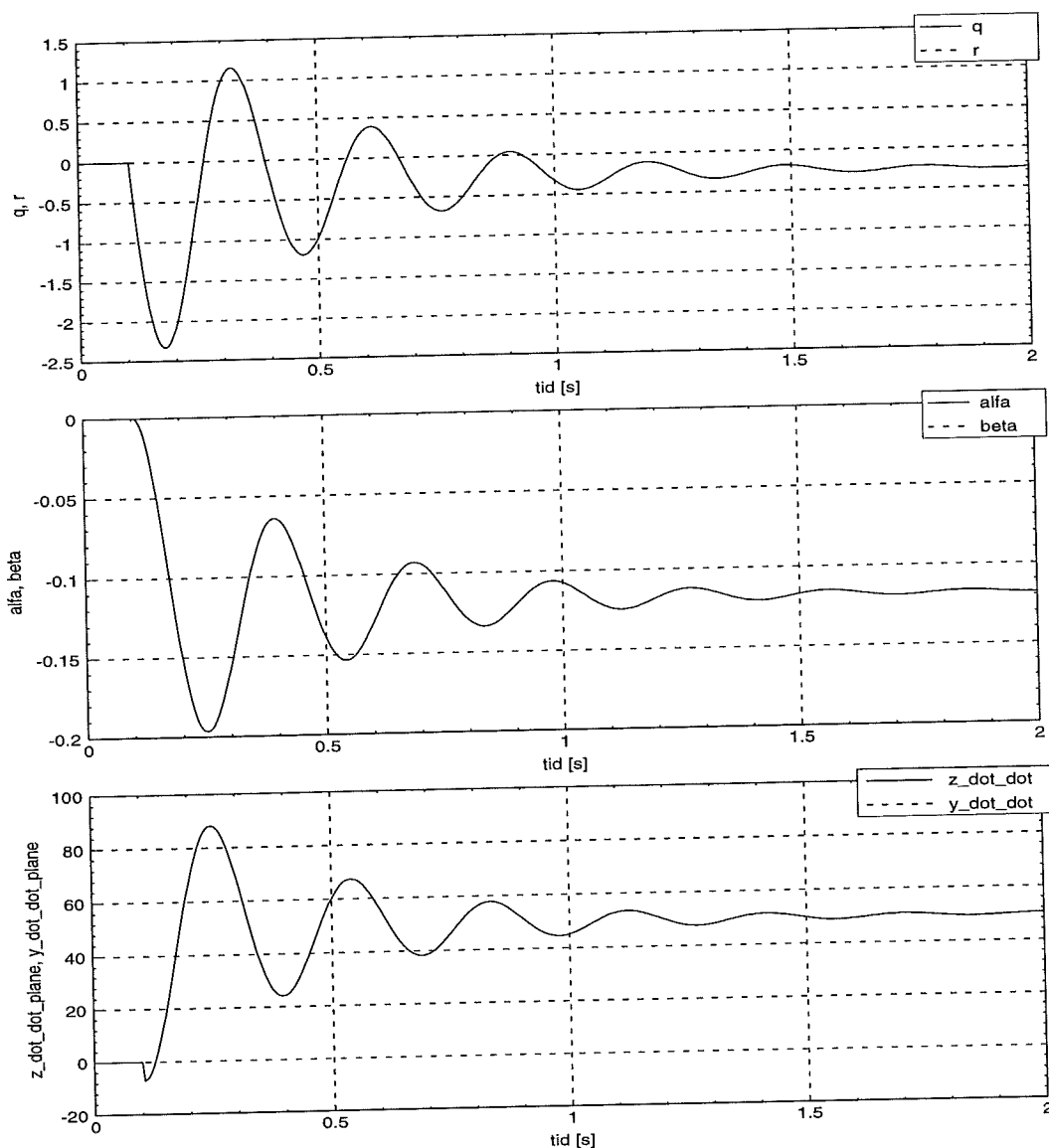


Bild 9: Vissa flygtillstånd för icke rollande missil. Eftersom missilen ej rollar fås ingen rörelse i girled, missilen ges ju bara roderutslag i tippel. I nedersta plotten syns tydligt att systemet är i icke minimum fas. Detta beror på att missilen har stjärtroder och roderkraften därigenom är motriktad lyftkraften.

När missilen rollar kommer tipp- och girkanalerna att påverka varandra via korskopplingen. I Bild 10 syns tydligt hur gyalkopplingen tvingar missilen till rörelse även i girled trots att roderutslag endast ges i tippel. På grund av gyalkopplingen kommer energi att skiftas mellan tipp- och girkanalerna, detta kommer att ske med en viss frekvens. Denna frekvens verkar vara skillnaden mellan systemets två egenfrekvenser. Med lite fantasi kan man se denna effekt i Bild 10 vid tiden strax efter 1 sekund. Med en så pass låg rollhastighet som 10 Hz är gyalkopplingen relativt liten. Om rollvinkelhastigheten ökas till 20 Hz kommer energiskiftningarna

mellan kanalerna att synas tydligare. Vid 20 Hz är separationen mellan polerna ca 1 Hz (syns i polseparationsplotten i Bild 8). I Bild 11 visas plotten för energiskiftningar, det syns tydligt att energi skiftas mellan kanalerna med just 1 Hz

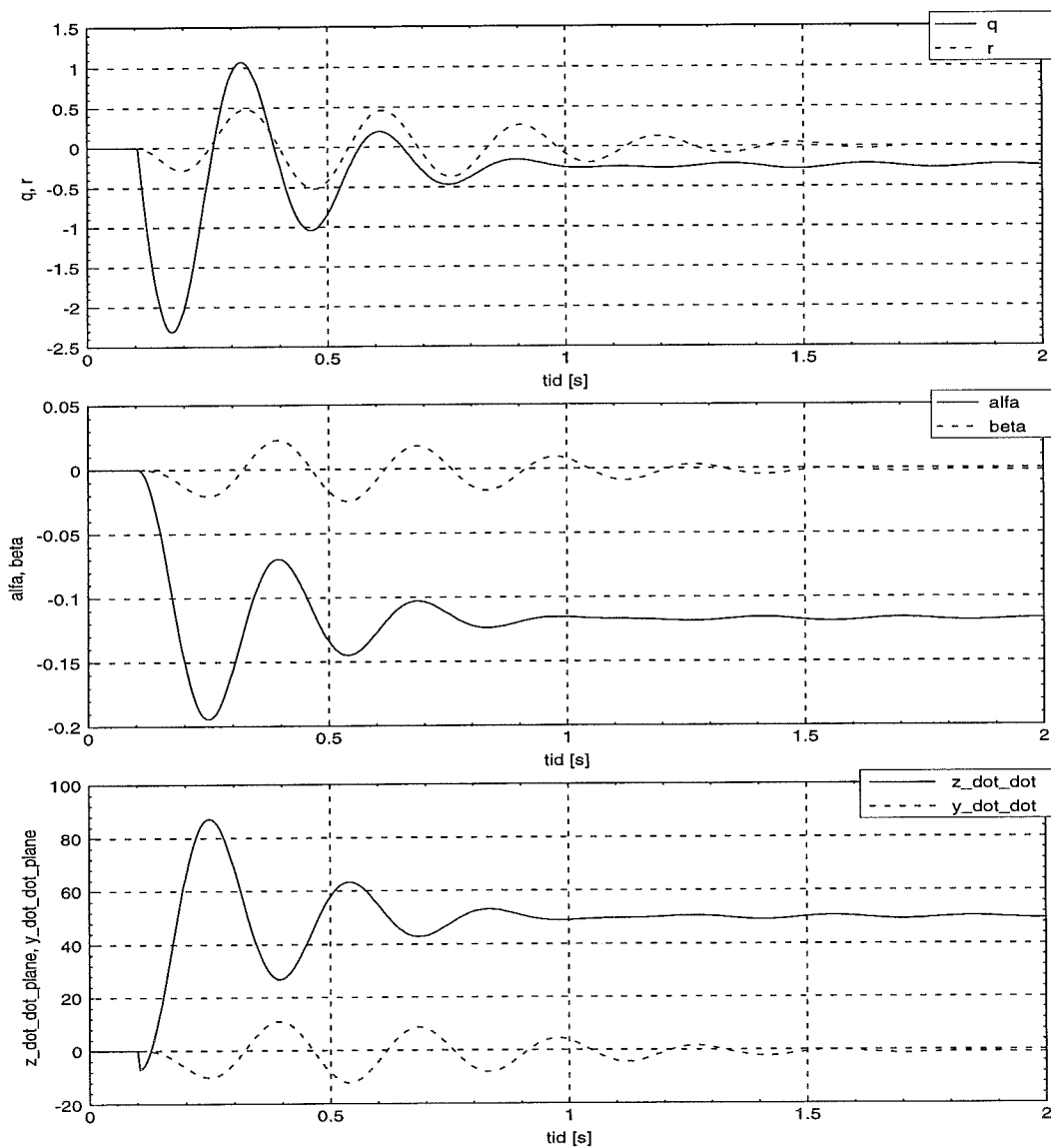


Bild 10: Vissa flygtillstånd för missil som rollar med 10Hz.

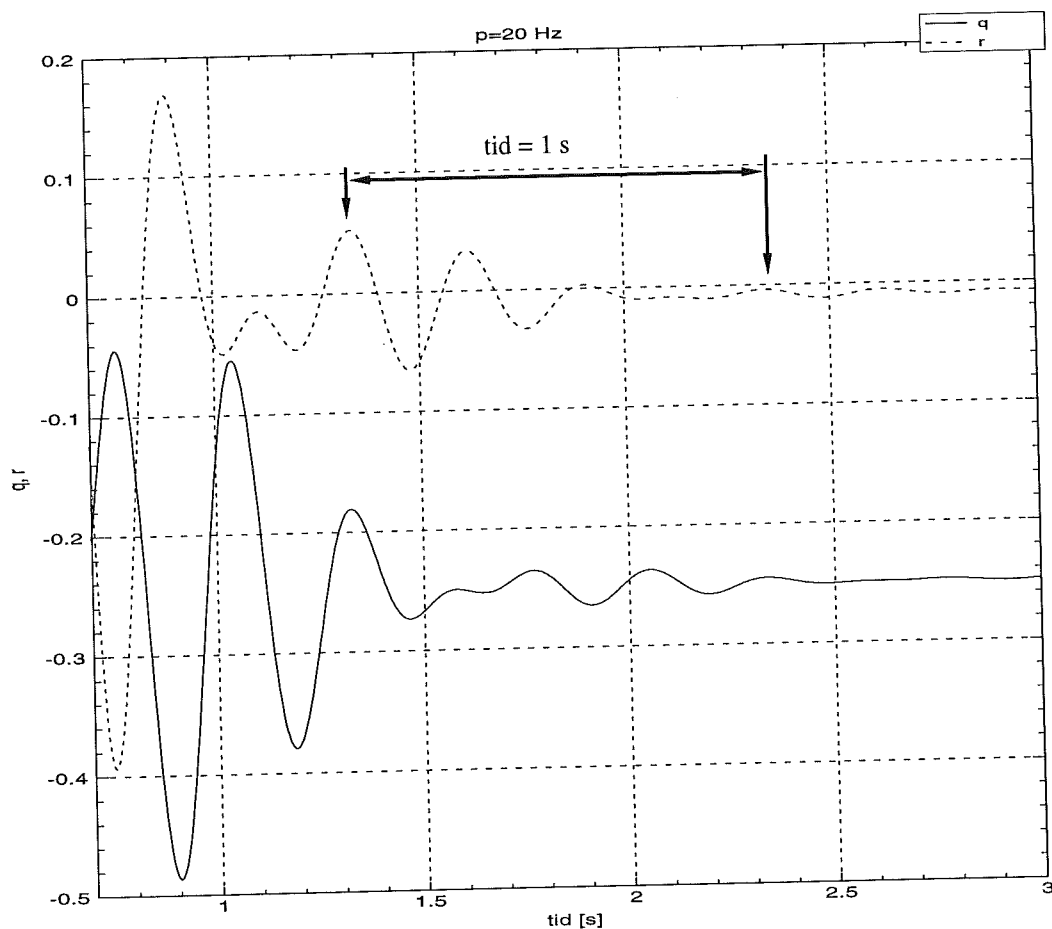


Bild 11: Illustrering av energibyten mellan tipp- och girkanal vid gyalkoppling. Rollvinkelfrekvensen är nu ökad till 20 Hz, detta för att gyalkopplingen skall bli starkare och energibytet skall framträda bättre. I figuren syns att energi skiftas mellan kanalerna med just 1 Hz.

Ett annat intressant resultat är att en statistiskt stabil missil inte kan destabiliseras pga gyalkoppling om missilen är rotationssymmetrisk, se Tullson [6].

4 Accelerometrar och dess placering i en rollande missil

Syftet med detta arbete är som tidigare nämnts att med hjälp av accelerometrar, placerade på lämpliga punkter i missilen, kunna skatta vissa flygtillstånd och därigenom påverka missilens dynamiska egenskaper med hjälp av återkoppling. Det innebär att en sk styrautomat skall utformas. Tack vare rollningen kan en tvärsmätande accelerometer ge information i både tipp- och girled, beroende på var i varvet den befinner sig. (Med tvärsmätande accelerometer avses här en accelerometer som är placerad så att dess mätriktning är tvärs missilens symmetriaxel.) Eftersom accelerometrar mäter just acceleration kan man ställa sig frågan: Var och hur kommer accelerationer in i fallet med missilen? Nedan ges svar på detta.

4.1 Accelerationer

Utan att gå in på närmare detaljer kan de accelerationer som uppkommer på olika punkter och med olika riktningar i en missil beskrivas med hjälp av följande formler, se Harkins [8]:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{br} = & \ddot{O}_x + \Delta x (-q^2 - r^2) \\ & + \Delta y [\cos \phi (2qp - \dot{r}) + \sin \phi (2rp + \dot{q})] \\ & + \Delta z [\cos \phi (2rp + \dot{q}) - \sin \phi (2qp - \dot{r})] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{br} = & \ddot{O}_y \cos \phi + \ddot{O}_z \sin \phi \\ & + \Delta x (\dot{r} \cos \phi - \dot{q} \sin \phi) \\ & + \Delta y \left[-p^2 - \left[\frac{r^2 + q^2}{2} \right] - \left[\frac{r^2 - q^2}{2} \right] \cos 2\phi + qr \sin 2\phi \right] \\ & + \Delta z \left[-\dot{p} + \left[\frac{r^2 - q^2}{2} \right] \sin 2\phi + qr \cos 2\phi \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z}_{br} = & -\ddot{O}_y \sin \phi + \ddot{O}_z \cos \phi \\ & + \Delta x (-\dot{r} \sin \phi - \dot{q} \cos \phi) \\ & + \Delta y \left[\dot{p} + \left[\frac{r^2 - q^2}{2} \right] \sin 2\phi + qr \cos 2\phi \right] \\ & + \Delta z \left[-p^2 - \left[\frac{r^2 + q^2}{2} \right] - \left[\frac{r^2 - q^2}{2} \right] \cos 2\phi - qr \sin 2\phi \right] \end{aligned} \quad (10)$$

där indata är uttryckta i basen F_b

\ddot{O}_{index} - acceleration av TP (origo) i riktning som anges av index

$[\Delta x, \Delta y, \Delta z]$ - avstånd till accelerometer från TP

p - rollvinkelhastighet

q - tippvinkelhastighet

r - girvinkelhastighet

och utsignalerna uttrycks i basen F_{br} , dvs det som en fastspänd accelerometer mäter

\ddot{x}_{br} - acceleration i x-led i basen F_{br} , och motsvarande för y- och z-led

I formlerna antas TP var fix i missilen.

Nedan visas en enkel bild för att illustrera hur jag använder accelerometer-ekvationerna för att bilda de signaler som en godtyckligt placerad accelerometer ger.

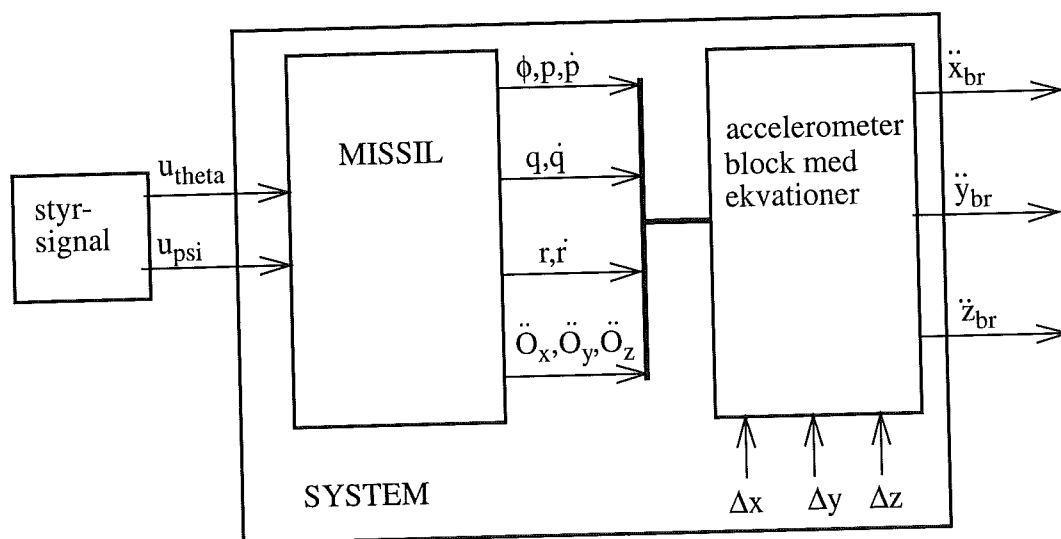


Bild 12: Beräkning av accelerometersignaler.

Accelerometerblocket i Bild 12, som består av ekvationerna (8) - (10), matas med erforderliga flygtillstånd från missilen. I fallet med en verklig missil är dessa flygtillstånd okända för oss. Därför behöver de skattas på något sätt. Det kan göras med hjälp av en eller flera utsignaler från systemet. Denna/dessa utsignal(er) är en linjärkombination av de 3 ortogonala accelerationer, i basen F_{br} , som kommer ifrån SYSTEMET i Bild 12. Dessa accelerationer är de som vi kan mäta för att skatta flygtillstånden för att senare kunna realisera någon styrautomat med återkoppling från dessa flygtillstånd.

Om $a_T = 0$ och tyngdkraften $\bar{g} \neq 0$ så blir

$$\begin{aligned}\ddot{O}_x &= a_T = 0 \\ \ddot{O}_y &= \ddot{O}_z = \ddot{z}\end{aligned}$$

Där \ddot{z} skall tänkas variera kring 0 om inte tyngdkraften finns med. Om tyngdkraften finns med måste ett sådant konstant roderutslag ges att det kompenserar för tyngdkraften, dvs då kommer \ddot{z} att variera kring -9.81 m/s^2 . Därför syns inte \bar{g} i någon ekvation då det beror på kring vilken stationär punkt ekvation (7) linjäriserats kring.

I Bild 13 visas de olika termernas (i ekvation (8) - (10)) bidrag till accelerometers utsignal för en missil som ges ett stegformat roderutslag med amplituden 0.1 rad vid tiden 0.1 s i tippel. Där syns det att vissa termer nästan inte ger något bidrag i förhållande till andra. Figurerna i bilden kan hjälpa till att ge lite vägledning om lämplig accelerometerplacering. Observera att termerna skall adderas och multipliceras enligt ekvation (8) - (10) för att få totala accelerometersignalen. Ytterligare bidrag är accelerationer i x-, y- och z-led. I Bild 10 visades accelerationer i y- och z-led.

I Bilaga B finns de tre utsignalerna i Bild 12 plottade för några olika sensorplaceringar. Det som syns tydligast där är att oavsett placering fås små signaler i x-led samt att biasen blir mycket kraftig när en tvärsätande accelerometer förskjuts i sin mätriktning ifrån missilens symmetriaxel.

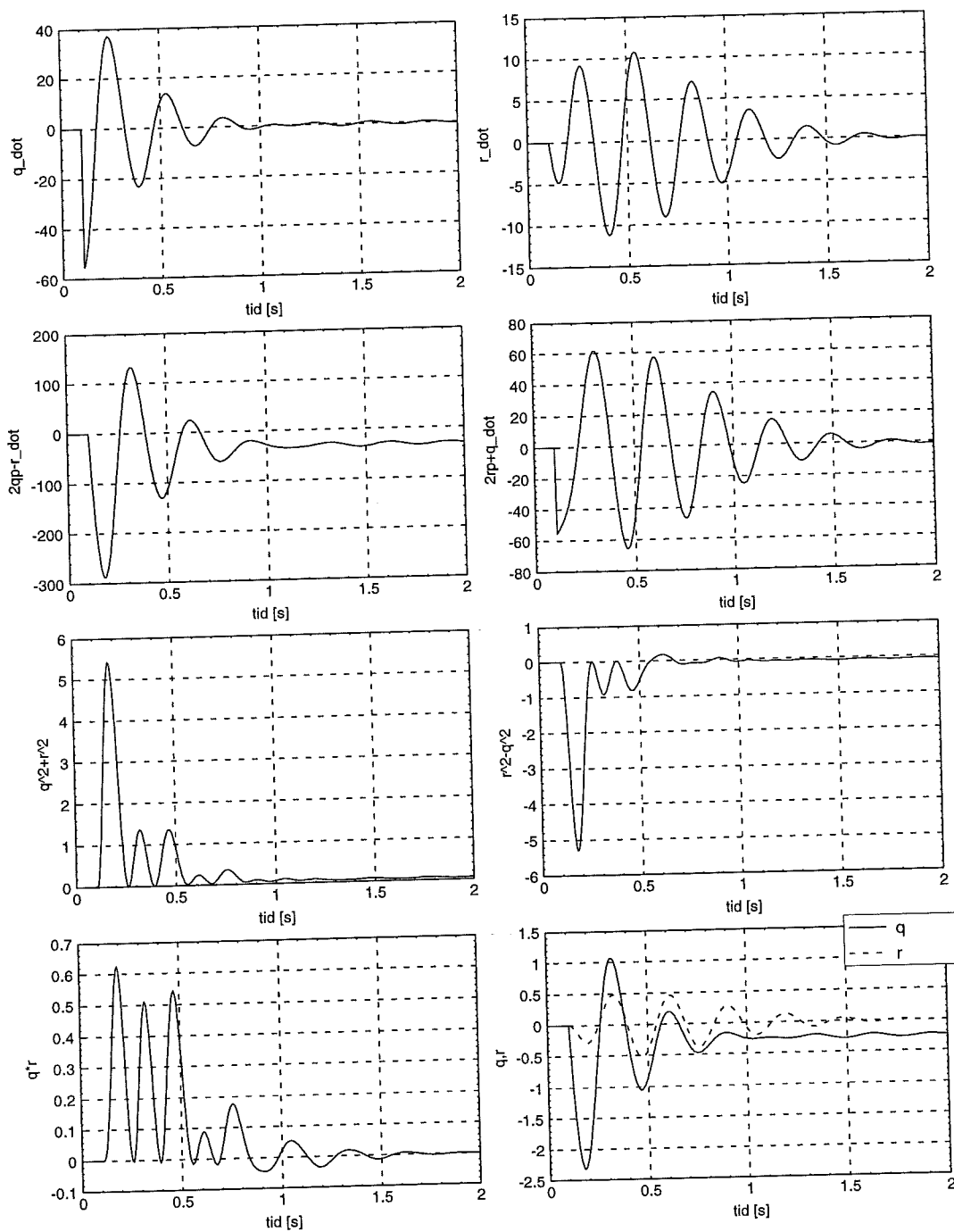


Bild 13: Signalbidrag från olika termer i ekvationerna (8) - (10). $r_{\dot{}}$ betyder tidsderivatan av r .

4.2 Val av mätpunkt

Vad kan man önska av en bra accelerometerplacering?

- 1) linjära termer
- 2) bra observerbarhet
- 3) läges- och orienterings-okänslig
- 4) bra signal/brus förhållande

1) Eftersom det här är önskvärt med ett linjärt kalmanfilter måste mätsignalerna kunna uttryckas som linjära funktioner av flygtillstånden. Dvs signaler som beror av q^2 eller $q \cdot r$ är mindre bra såvida de inte är så små att de kan försummas. Med ett extended kalmanfilter skulle även olinjära termer kunna användas i estimatorn.

2) Olika placering av accelerometern kan ge olika god noggrannhet i estimeringen av q , r , α och β . Att överhuvudtaget kunna skatta tillstånden förutsätter observerbarhet. Om en bra accelerometerplacering även kan ge information om $\text{tex } \bar{g}$ eller rollhastighet är det bra, för då behövs inte ytterligare accelerometrar för de storheterna.

3) Det är en fördel om accelerometern placeras så att mindre avvikelser från tänkt placering ej påverkar mätningarnas noggrannhet nämnvärt. Accelerometern skall helst inte plocka upp omodellerad information, tex på grund av överhörning eller felriktning. Vissa accelerometerfel kan behöva modelleras och estimeras så att inverkan av dem kan reduceras.

4) Helst skall accelerometern ge så stark signal som möjligt för att undertrycka brus. Om en del av accelerometersignalen består av önskade vinkelaccelerationskomponenter är det bra om avståndet till vridningspunkten är så stort som möjligt eftersom det ger störst signal. Det kan minska inverkan från brus i form av missilvibrationer.

Man skulle kunna säga att det finns 9 olika grundläggande sätt (3·3) att applicera en accelerometer.

3 placeringar:

- 1) förskjuten avståndet Δx i förhållande till TP längs x-axeln
- 2) -----"----- Δy -----"----- y---"---
- 3) -----"----- Δz -----"----- z---"---

Och för varje sådan här placering finns det 3 huvudmätningarna:

- 1) x-led
- 2) y-led
- 3) z-led

Fast egentligen blir det bara totalt 6 olika sätt eftersom förskjutning i y- och z-led är ekvivalenta tack vare rollningen. En speciell placering är att ha två accelerometrar i tex $\Delta x = -1\text{m}$ där den ena mäter i y-led och den andra z-led. En sådan applicering medför att det alltid finns mätinformation i alla riktningar vinkelrät mot missilens symmetriaxel. Med endast en accelerometer riktad i radiell led finns det visserligen information i accelerometersignalen om rörelser tvärs planet som spänns upp av accelerometers mätning och x-axeln tack vare korskopplingen. Men eftersom korskopplingen vid 10 Hz är liten är det bara i undantagsfall som denna ger märkbart tillskott på mätsignalen.

4.2.1 Synpunkter på olika accelerometerplaceringar

I Bilderna 10 och 13 visades olika termers bidrag till en accelerometermätsignal. De termer som är stora i förhållande till andra termer är intressanta att utnyttja för estimering av flygtillstånd. De största termerna är:

- 1) $2qp - \dot{r}, 2rp + \dot{q}$ (längsmätande accelerometer)
- 2) \dot{q}, \dot{r} (tvärs-mätande accelerometer)
- 3) \ddot{y}, \ddot{z} (tvärs-mätande accelerometer)
- 4) $p = 2\pi \cdot 10$ (tvärs-mätande accelerometer)

1) Dessa termer är störst, men eftersom accelerometern placeras i radiell led kommer termerna att multipliceras med små tal pga att Δy och Δz inte kan bli stora (en missil är långsmal). Vid konstant tvärsacceleration blir inte signalbidraget från en längsmätande accelerometer lika stort som från en tvärs-mätande (om $p = 10\text{ Hz}$). Mätsignalens amplitud kommer även att bero av rollfrekvensen. Denna rollfrekvens kan ses som en signalförstärkningsparameter.

2) För dessa termer blir mätningarna i y- och z-led i medroterande koordinater, då kommer automatiskt \ddot{y} och \ddot{z} att ingå i mätsignalen.

3) Med en tvärs-mätande accelerometer i TP kommer endast \ddot{y} och \ddot{z} att påverka mätsignalen.

4) p ingår kvadratisk i mätsignalen från en tvärs-mätande accelerometer som är förskjuten i mätningarna. Detta gör att absolutbeloppet på p kan skattas.

Med flygtillstånd nedan menar jag de tillstånd som är intressanta för stabilisering av kortperioden, q , α , r och β . För- och nackdelar med olika accelerometerplaceringar och mätningarna kan sammanfattas som följer:

mättriiktning i x - led

placering	Fördel	Nackdel
i TP	mäter enbart längsacceleration	-
$\Delta x \neq 0$	-	kvadratiska termer
$\Delta y \neq 0$ $\Delta z \neq 0$	ger info om flygtillstånd	beror av rollhastighet, Δy kan ej bli stor

mättriiktning i y - led

placering	Fördel	Nackdel: om det finns stora accelerationer i x-led kan de tas upp pga överhörning eller felriktad accelerometer
i TP	enkel mätmatris	ingen direkt info om \dot{q} och \dot{r}
$\Delta x \neq 0$	info om \dot{q} och \dot{r} , kan styra olika variabelers inverkan på mätsignalen, okänslig för små förskjutningar av TP om Δx väljs lämplig	komplicerad mätmatris
$\Delta y \neq 0$	möjlighet att skatta p^2	olinjära termer (är dock små i förhållande till p^2)
$\Delta z \neq 0$	kanske viss möjlighet att skatta \dot{p}	olinjära termer (förmodligen stora i förhållande till \dot{p})

I z-led blir det i princip som för y-led.

För att ha koll på aktuell A-matris i fallet med en verklig missil måste v och a_T mätas eller vara kända a priori. Av speciellt stor betydelse är detta i accelerationsfasen. Då skulle det även vara intressant att mäta accelerationer i x-led. Men som nämnts tidigare antas här $v = \text{konst}$ och $a_T = 0$

4.2.2 Accelerometerplacering för skattning av q , α , r och β

Eftersom en väsentlig styrfunktion är att dämpa missilens egensvängningar blir den accelerometerplacering som kan ge mesta möjliga information om flygtillståndet förmodligen den bästa. En lämplig placering borde vara på symmetriaxeln med mättriiktning tvärs denna. Avståndet från TP avgör hur stor inverkan vissa variabler kommer att ha på mätsignalen.

Valet för placering här är alltså:

- på symmetriaxeln ($\Delta y = \Delta z = 0$)
- på avståndet Δx från TP
- mätriktning i z-led (kroppsfasta medrollande koordinater)
- mätriktning i y-led -----"-----
- en eller två accelerometrar

Ytterligare en accelerometerplacering som kan vara värd att studera är placering i $\Delta x = 0$ och Δy eller $\Delta z \neq 0$ med mätriktning x-led. I detta fall måste längsaccelerationer modelleras.

4.2.2.1 Val av accelerometers avstånd till tyngdpunkten

Resonemanget som följer baseras på placeringen ovan för en accelerometer som mäter i z-led, det blir i princip samma sak för en accelerometer som mäter i y-led.

För en missil som rollar kan man tänka sig att det finns en punkt där vridningar och translationer i tex tipped motverkar varandra och utsignalen blir minimal. Signalen \ddot{z}_{br} från accelerometern ges av ekvation (7) och (10):

$$\begin{aligned} \ddot{z}_{br} &= -\ddot{O}_y \sin \phi + \ddot{O}_z \cos \phi + \Delta x (-\dot{r} \sin \phi - \dot{q} \cos \phi) & (11) \\ &= \sin \phi (\beta (a_{32} - a_{12} \Delta x) + u_{psi} (b_3 - b_1 \Delta x) - \Delta x a_{11} r + \Delta x a_{13} q) \\ &+ \cos \phi (\alpha (a_{32} - a_{12} \Delta x) + u_{theta} (b_3 - b_1 \Delta x) - \Delta x a_{11} q - \Delta x a_{13} r) \end{aligned}$$

Resultatet blir:

Om styrsignalen är noll fås speciellt svag mätsignal när termerna med α och β är noll.

Om $\Delta x = a_{32} / a_{12} = 1.04$ fås ingen direkt information om α eller β i accelerometermätsignalen. Minsta lilla omodellerade avvikelse ifrån detta läge kommer att påverka sensorsignalen radikalt, speciellt om styrsignalerna är noll. Om Δx väljs att vara långt ifrån denna punkt blir påverkan av fel läge inte så stor.

Om $\Delta x = b_3 / b_1 = 0.125$ undviks roderutslagets direktverkan på accelerometermätsignalen.

Om $\Delta x = 0$ kommer vinkelaccelerationerna i tipp- och girled inte att ge bidrag till accelerometermätsignalen.

Grovt sett är mätetalen för q och r 10 gånger större än för α och β i topparna av ett stegsvar (endast 2 gånger statistiskt) om ingen hänsyn tas till faslägena. För att termerna med q och r skall bli i storleksordningen 10% av termerna med α och β i ekvation (11) krävs att $\text{abs}(a_{32} - a_{12} \Delta x) = \text{abs}(300 \Delta x)$ vilket ger $\Delta x = 0.6$ eller 3. För $\Delta x = -0.5$ blir termerna med q och r ca 2% av termerna med α och β . Denna

ringa inverkan kan eventuellt räddas av att α och β inte är i fas med q och r samt att q och r blir stora i början på ett stegsvar.

Om Δx blir för nära noll kommer bara en liten del av vinkel-accelerationer att tas upp av accelerometern. Om Δx hamnar för nära $a_{32} / a_{12} = 1.04$ kommer accelerometersignalen bara att ge lite information om α och β . I Bild 14 visas simuleringar där accelerometersignalen från en tvärsmätande accelerometer plottats för olika värden på Δx . Där syns tydligt hur missilens svängningar bättre plockas upp av en tvärsmätande accelerometer som är placerad långt bak i missilen.

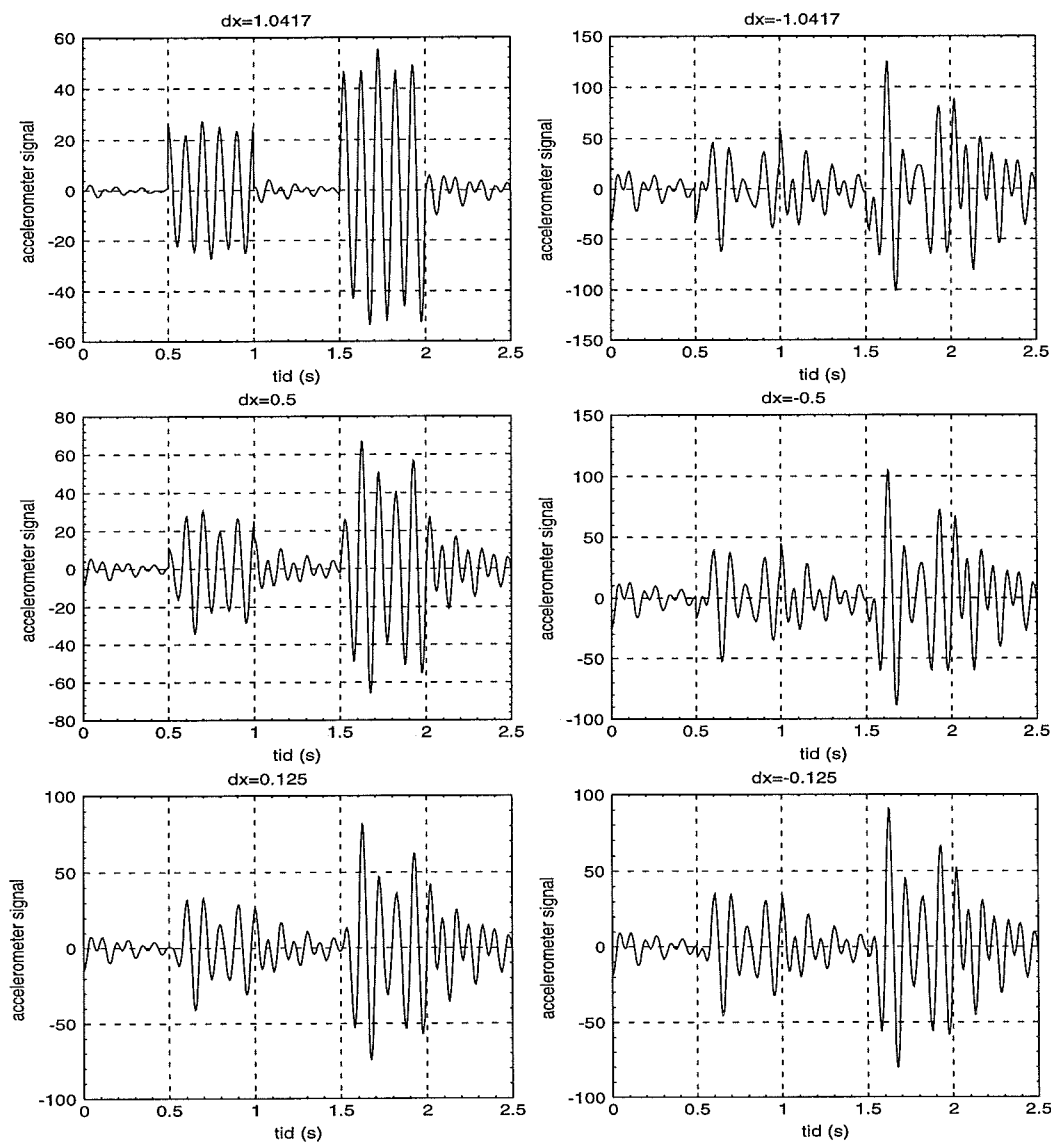


Bild 14: Figureorna ovan visar utsignalen från en tvärsmätande accelerometer placerad avståndet dx från TP och mätriktning i z-led i den rollande missilen. Vid $t = 0.5$ s ges en fyrkantspuls med amplituden 0.05 rad på tipproder och vid $t = 1.5$ s ges en fyrkantspuls med amplituden 0.1 rad på

girroder. Vid tid = 0 s är alla tillstånd nollställda utom anfallsvinkel α som har startvinkeln 2° . Observera att det är olika skalor på y-axlarna.

4.2.3 Accelerometerplacering för skattning av \underline{g}

För en fritt flygande missil som inte har någon återkoppling från någon yttre referens blir det omöjligt att skilja på \underline{g} och accelerationer parallella med denna vektor med hjälp av en accelerometer. För en missil som flyger vinkelrätt mot \underline{g} tex med hjälp av ledstråle, kan \underline{g} skattas med hjälp av en tvärsmätande accelerometer. I fallet med en rollande missil kommer \underline{g} att ge upphov till en sinusformad delsignal som kommer att ligga överlagrad på totala accelerometersignalen. Med lämplig signalbehandling kan eventuellt denna sinusformade delsignal extraheras ur totalsignalen varpå fas-, frekvens- och amplitud-bestämningar kanske låter sig göras. Fas och frekvens ger rollvinkel och rollhastighet, amplituden ger tippvinkeln. För en missil som flyger mer eller mindre vinkelrät mot \underline{g} och utan alltför extrema värden på anfallsvinklar och roderutslag borde \underline{g} 's inverkan på mätsignalen kunna uppgå till tiotals % vilket skulle kunna båda gott för skattning av ϕ . Genom att variera Δx kan \underline{g} 's andel av mätsignalen till en viss del varieras. Förutom signalbehandlingsproblemet för att lösa \underline{g} 's riktning i förhållande till basen F_{br} finns det ytterligare problem. Ett sådant problem uppkommer då missilen gör en kraftig acceleration i sida, om man då inte har exakt modellkänedom kommer den verkliga accelerationen i sida att avvika från den som modellen ger. Riktningen på skattningen av \underline{g} kommer då att hamna i riktningen som ges av verkligt \underline{g} plus riktning och amplitud på accelerationsfelet, se Bild 15. Skattningen av \underline{g} är ett viktigt problem i en fortsatt utredning.

Möjlig signalbehandling skulle kunna vara:

- 1) Faslåst slinga
- 2) Fas och frekvens estimering, se Ängeby [7]

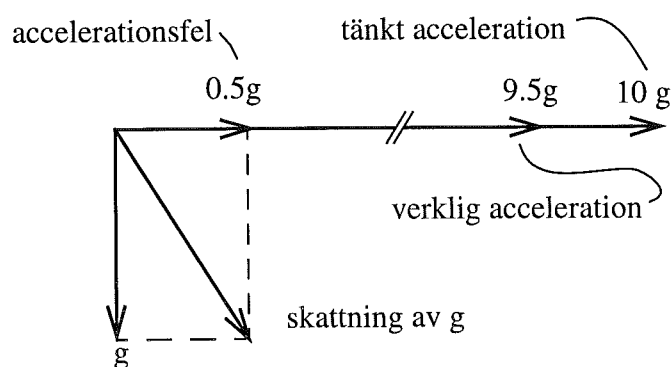


Bild 15: Problem med att skatta \underline{g} .

4.2.4 Accelerometerplacering för skattning av ϕ

Skattning av rollvinkeln ϕ är ett stort problem, men utan noggranna mätningar av denna vinkel blir styrning av missilen svår att genomföra. Rollvinkeln behövs för att bli rollresolering av rodersignal skall kunna göras. Rollvinkeln kan tex mätas med gyro och/eller rategyro, men syftet med att använda accelerometrar är att slippa gyron och/eller rategyron. Men även om gyron skulle användas så är de behäftade med mätfel såsom bias. Man kan dock tänka sig att det finns speciella styrprinciper där bestämning av rollvinkeln inte behövs eller är lika kritisk som i den styrprincip som används senare i denna rapport.

Skattning av ϕ kan ske via \bar{g} , som i sin tur skattas med hjälp av accelerometrar. Det är svårt att säga något om sensorplacering i ett generellt fall, det beror på hur missilen flyger och styrs. Men om siktlinjen som missilen skall flyga längs är vinkelrät mot \bar{g} och skattningen av \bar{g} fungerar, så borde bästa givarplacering för skattning av ϕ även vara den som skattar \bar{g} bäst, enligt resonemang i 4.2.3. ϕ skulle även kunna bestämmas med hjälp av polariserad elektromagnetisk strålning, fördelen med en sådan yttre referens jämfört med gyro är att drift och bias kan undvikas.

4.3 Sammanfattning av accelerometerplacering

Med en billig tvärsnätande accelerometer placerad på symmetriaxeln i en rollande missil kan en mätsignal erhållas ur vilken vissa flygtillstånd kan estimeras. Avståndet Δx till tyngdpunkten kommer att avgöra mätsignalens egenskaper. Tre speciella avstånd kan särskiljas:

- 1) $\Delta x = 0$, i TP fås endast direkt information om accelerationer
- 2) $\Delta x = b_3/b_1$, roderutslag ger ingen direktverkan på mätsignalen
- 3) $\Delta x = a_{32}/a_{12}$, mätsignalen innehåller ingen direkt information om α och β

Med en accelerometer placerad långt bak i missilen kommer mätsignalen att innehålla mer information om svängningar hos missilen än om en accelerometer placeras i närheten av punkt 3 ovan. För att kunna realisera en bra dämpstyrautomat är det önskvärt med mycket information om missilsvängningar.

Med hjälp av två tvärsnätande accelerometrar placerade vinkelrät mot varandra kommer det alltid att finnas samtidig mätinformation om svängningar kring både y- och z-axeln i basen F_b .

För att hitta ett optimalt avstånd mellan accelerometer och tyngdpunkt för skattning av flygtillstånd måste bli även en observerbarhetsmatris beaktas. Detta leder oss in på kalmanfilter.

5 Kalmanfilter för estimering av flygtillstånd

Eftersom tvärs-mätande accelerometrar förmodligen är det som blir bäst för estimering av flygtillstånden kommer en och två sådana att användas här. Kalmanfilter för både en och två tvärs-mätande accelerometrar kommer att härledas, dessa kommer i kapitel 8 att testas ihop med olika styr-lagar. Eftersom kalmanfiltret som används är i diskret tid, behöver tillståndsbeskrivningen av missilens dynamik diskretiseras.

5.1 Diskretisering av missilmodell

Sampling sker med 200Hz, dvs 20 mätpunkter per varv missilen rollar. Om missilens bandbredd hade varit det avgörande hade det räckt med en samplingshastighet på 40-120 Hz. Här förutsätts att rodersignalen ges i basen F_b . För en verklig missil behöver roderutslagen rollresolveras och då kanske det inte räcker med 20 mätpunkter per varv utan samplingen måste göras snabbare. Eftersom rodererna inte ändras mellan sampelpunkterna kommer rollresolveringen inte att vara riktig när missilen rollat en viss vinkel. Felet blir större ju längre tid det går mellan sampelpunkterna. Man skulle också kunna tänka sig att rodererna sitter på en icke med rollande ring då behövs inte lika snabba roder. Förfilter och andra filter kanske behövs rent praktiskt, det påverkar överföringsfunktionen, men det tas inte hänsyn till här.

Alla tillstånden i ekvation (7) behöver inte vara med eftersom \dot{z} och \dot{y} enbart beror av α respektive β och styrsignaler, för $a_T = 0$. Det kontinuerliga systemet som skall diskretiseras är:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \underline{A}\bar{x} + \underline{B}\bar{u} + \bar{v}_c & \bar{x} &= \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \alpha \\ \psi \\ \beta \end{bmatrix} \\ \bar{y} &= \underline{C}(t)\bar{x} + \underline{D}(t)\bar{u} + \bar{e}_c \end{aligned} \quad (12)$$

D är en direktterm som ger tillägg till mätsignalen \bar{y} pga att mätsignalen beror av deriverade tillstånd, v_c och e_c är vitt brus, processbrus respektive mätbrus.

Det diskreta systemet som fås vid sampling med sampelintervallet h ges av:

$$\begin{aligned} \bar{x}(kh+h) &= \underline{\Phi}\bar{x}(kh) + \underline{\Gamma}\bar{u}(kh) + \bar{v}(kh) \\ \bar{y}(kh) &= \underline{C}(kh)\bar{x} + \underline{D}(kh)\bar{u}(kh) + \bar{e}(kh) \end{aligned} \quad (13)$$

Sampelintervallet som används är $h = 0.005$ s. Det kan verka besynnerligt att det finns en direktterm i det diskretiserade fallet eftersom man i en sampelpunkt först mäter utsignalen innan styrsignal ställs ut. Detta beror på att i den förenklade modellen som används här försummas roderdynamiken, dvs rodret står momentant i den vinkel som styrsignalen anger. Om roderdynamiken skulle tagits med i ekvation (12) hade det krävts ytterligare 4 tillstånd men då hade man å andra sidan blivit av med direkttermen och roderdynamiken hade hamnat i den nya A -matrisen.

Men om inte \bar{u} ändras sig för mycket mellan sampelpunkterna kan man låta systemet se ut som i ekvation (13). I det följande beskrivs bla hur direkttermen tas om hand i kalmanfiltret.

5.2 Mätmatris

Mätmatrisen för en accelerometer placerad Δx från TP på missilens symmetriaxel med mätriktning i z-led fås från ekvation (7) och (10):

$$\ddot{z}_{br} = -\ddot{O}_y \sin \phi + \ddot{O}_z \cos \phi + \Delta x (-\dot{r} \sin \phi - \dot{q} \cos \phi) \quad (14)$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \end{bmatrix}}_{C1(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} q \\ \alpha \\ r \\ \beta \end{bmatrix}}_{D1(t)} + (b_3 - b_1 \Delta x) \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{theta} \\ u_{psi} \end{bmatrix}$$

På motsvarande sätt kan mätmatrisen för en accelerometer placerad Δx från TP på missilens symmetriaxel med mätriktning i y-led fås av (7) och (9):

$$\ddot{y}_{br} = \ddot{O}_y \cos \phi + \ddot{O}_z \sin \phi + \Delta x (\dot{r} \cos \phi - \dot{q} \sin \phi) \quad (15)$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}}_{C2(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} q \\ \alpha \\ r \\ \beta \end{bmatrix}}_{D2(t)} + (b_3 - b_1 \Delta x) \begin{bmatrix} \sin \phi & -\cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{theta} \\ u_{psi} \end{bmatrix}$$

Elementen i C-matriserna ges av:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \Delta x (a_{13} p \sin \phi - a_{11} \cos \phi) & c_{21} &= \Delta x (-a_{13} p \cos \phi - a_{11} \sin \phi) \\ c_{12} &= \Delta x (a_{32} / \Delta x - a_{12}) \cos \phi & c_{22} &= \Delta x (a_{32} / \Delta x - a_{12}) \sin \phi \\ c_{13} &= \Delta x (-a_{11} \sin \phi - a_{13} p \cos \phi) & c_{23} &= \Delta x (a_{11} \cos \phi - a_{13} p \sin \phi) \\ c_{14} &= \Delta x (a_{32} \Delta x - a_{12}) \sin \phi & c_{24} &= \Delta x (-a_{32} \Delta x + a_{12}) \cos \phi \end{aligned}$$

Om tillstånd för bias tas med i tillståndsrepresentation fås följande mätvärde och mätmatris:

$$\begin{bmatrix} y1_{kal} \\ y2_{kal} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{z}_{br} \\ \ddot{y}_{br} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D1(t) \\ D2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{theta} \\ u_{psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C1(t) & 1 & 0 \\ C2(t) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \alpha \\ r \\ \beta \\ bias1 \\ bias2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

För en accelerometer kan man visserligen trimma bort det mesta av biasen. Men bara en liten förskjutning av accelerometern från symmetriaxeln ger upphov till centripetalacceleration som ger en bias. Därför finns biastillståndet med. En förskjutning av accelerometern 1mm i mätriktningen ger en centripetalacceleration på $4m/s^2$ ($p = 10$ Hz).

Om bara en accelerometer används stryks en av raderna i ekvation (16). Observera att Δx inte nödvändigtvis behöver vara samma för de två accelerometrarna i ekvation (16). Orsaken till att accelerometermätsignalerna i ekvation (14) och (15) måste modifieras enligt (16) är att kalmanfiltret inte tar hand om direkttermerna. Notera att mätmatriserna C1 och C2 är tidsvariabla, detta beror på att accelerometersignalen inte uttrycks i samma koordinatsystem som variablerna som påverkar den (F_{br} resp F_b).

5.3 Observerbarhet

Observerbarheten av missilens tillstånd i ekvation (16) kan bestämmas med hjälp av observerbarhetsmatrisen W_o (ett biastillstånd):

$$W_o = \begin{bmatrix} C(k) \\ C(k+1)\Phi \\ C(k+2)\Phi^2 \\ C(k+3)\Phi^3 \\ C(k+4)\Phi^4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Om två biastillstånd (ett för varje accelerometer) finns med i ekvation (16) utökas ekvation (17) med en rad till. Hur välkonditionerad W_o är bestämmer till viss del hur väl tillstånden kan skattas. W_o är välkonditionerad om de singulära värdena till W_o ej skiljer mycket från varandra. En generell regel säger att för varje tiopotens

som det skiljer mellan största och minsta singulära värdet förloras en siffra i precision vid invertering av matrisen, se Ctrl[®]-C User's Guide, Volume One [9]. Om antalet tiopotenser är mycket större än $\sqrt{\text{eps}}$, där eps är upplösningen på numeriken, är systemet dåligt konditionerat och även de mest pålitliga algoritmer kan haverera.

Med konditionstal för en matris avses här konditionstalet i 2-norm, vilket är lika med kvoten mellan matrisens största och minsta singulära värde. Ju närmare 1 konditionstalet är desto bättre är det. För W_o här beror konditionstalet inte på vilken tidpunkt k väljs som, dvs konditionstalet varierar inte med rollvinkeln. Däremot avgör sampelintervall och rollvinkelhastighet hur stor vinkel som täcks av observerbarhetsmatrisen. Varje rad i W_o motsvarar en tidpunkt, mellan dessa tidpunkter hinner missilen vrida sig en viss vinkel kring sin symmetriaxel pga rollningen. Dvs varje mätning sker i en ny riktning. Med 200 Hz sampelhastighet och en rollfrekvens på 10 Hz kommer W_o (med 5 rader) att täcka en rollvinkel på 72° .

5.3.1 Observerbarhet med en accelerometer

Hur påverkas observerbarheten av tillstånden i ekvation (16) med varierande avstånd Δx till TP och rollhastighet? I Bild 16 visas hur singulära värden och konditionstal för W_o varierar med Δx och rollhastighet, när en accelerometer används. Det syns att W_o blir bättre konditionerad ju närmare Δx hamnar intervallet 1.0 -1.1, jämför detta med avståndet $\Delta x = a_{32}/a_{12} = 1.04$ i ekvation (11). I området $\Delta x = 1.0$ -1.1 ger α och β inte längre det huvudsakliga bidraget till mätsignalen, om rodrens inverkan bortses ifrån. (Rodrens inverkan dras ifrån mätsignalen innan den går till kalmanfiltret.) Eller slarvigt uttryckt så ger α , β , q och r ungefär lika mycket bidrag till den totala mätsignalen.

Bild 16 visar även hur rollhastigheten påverkar konditionstalet. För rollfrekvens kring missilens egenfrekvens blir W_o dåligt konditionerad.

De tillstånd som är möjliga att observera i ett visst ögonblick ligger i planet som spänns upp av missilens symmetriaxel och accelerometers mättriaktning. Med tillstånd i ett visst plan menas här de tillstånd som kan kopplas till missilrörelser i detta plan, tex q , α och \dot{z} i tippeld. Fördelen med att rolla är att detta plan rollar med missilen och att tillstånd i både tipp- och girled därför kan observeras.

Förmodligen bara är i närheten av avståndet $\Delta x = a_{32}/a_{12}$ som gyalkopplingen kan anses ge sådana bidrag att observationer kan göras momentant i mer än ett plan för en fix tidpunkt.

Med lägre samplingsfrekvens verkar konditionstalet W_o bli bättre, men vid för låg samplingsfrekvens blir det omöjligt att styra den rollande missilen pga att roderna uppdateras för sällan. Detta skulle eventuellt kunna avhjälpas med att roderutslagen rollresolveras snabbare än samplingsfrekvensen.

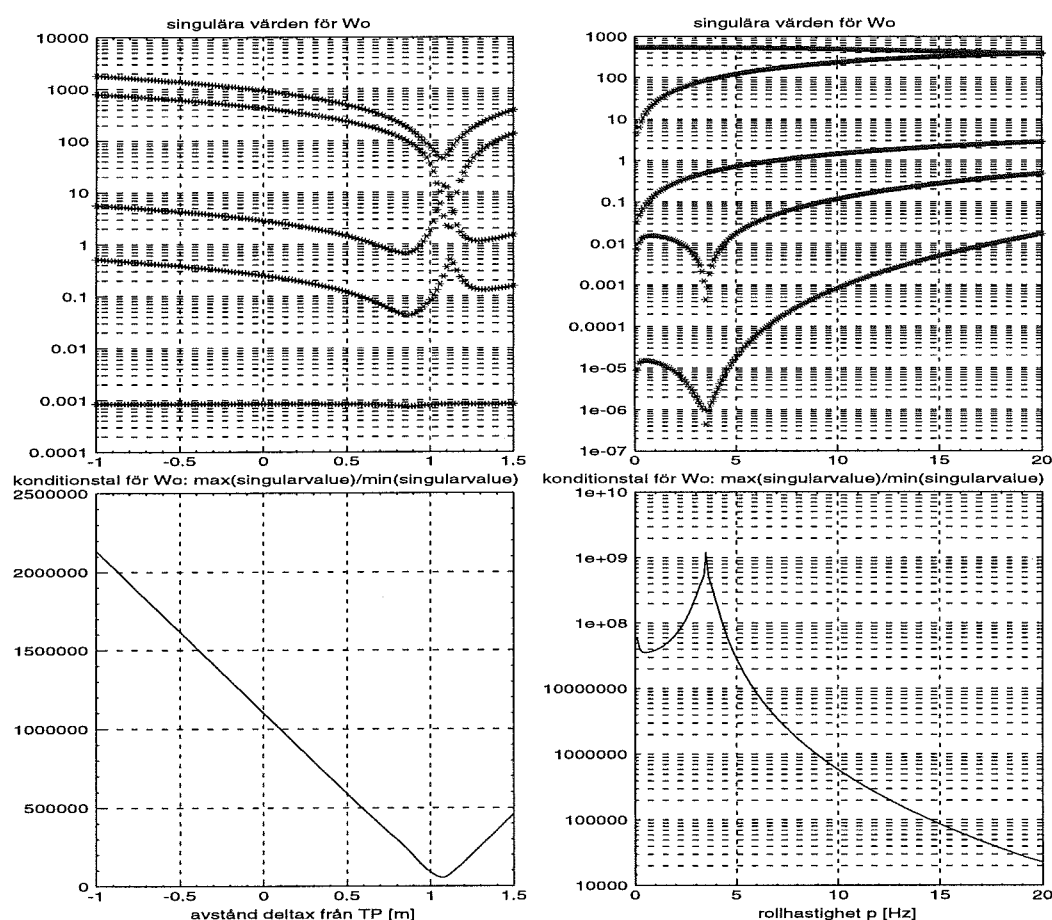


Bild 16: Singulära värden och konditionstal hos observerbarhetsmatrisen som funktion av accelerometerplacering och rollhastighet, en accelerometer. I plottarna till vänster är rollhastigheten 10 Hz och i plottarna till höger är Δx 0.5 m.

5.3.2 Observerbarhet med två accelerometrar

I Bild 17 visas hur singulära värden och konditionstal för observerbarhetsmatrisen W_o varierar med Δx och rollhastighet när mätningar görs med två tvärsmätande accelerometrar placerade i samma Δx men med mätriktningarna vinkelräta mot varandra. Alla singulära värdena är dubbla, förmodligen pga symmetrin med två vinkelräta accelerometrar. Med dessa två accelerometrar finns det alltid samtidig information om rörelser i både tipp- och girled. Precis som med en accelerometer är W_o bäst konditionerad för Δx i intervallet 1.0 - 1.1 men med den skillnaden att konditionstalet i detta intervall med två accelerometrar är ca 200 gånger lägre. Man ser även att rollhastigheten inte påverkar konditionstalet lika mycket som i fallet med en accelerometer. Detta är ju naturligt eftersom observerbarheten rimligtvis inte borde påverkas lika mycket av rollhastigheten, detta pga att det finns två vin-

kelrät mot varandra placerade tvärsätande accelerometrar. En slutsats då är att rollning inte behövs för att skatta flygtillstånden. Dock kan andra omständigheter fortfarande kräva rollning tex skattning av \bar{g} eller rollvinkel. Även med två accelerometrar försämras konditionstalet när rollfrekvensen ligger kring missilens egenfrekvens.

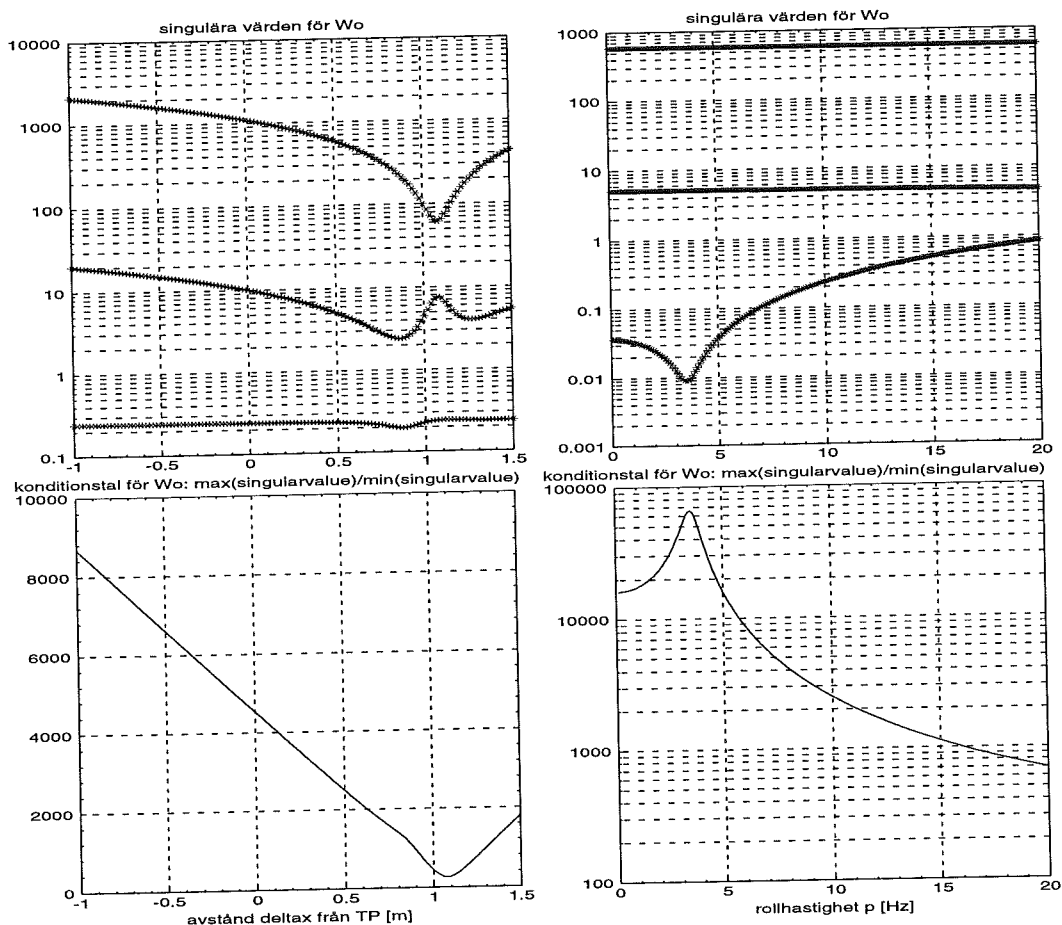


Bild 17: Singulära värden och konditionstal hos observerbarhetsmatrisen som funktion av accelerometerplacering och rollhastighet. Två tvärsätande accelerometrar vinkelräta mot varandra med samma Δx . I plottarna till vänster är rollhastigheten 10 Hz och i plottarna till höger är Δx 0.5 m.

5.3.3 Slutsats för accelerometerplacering baserad på observerbarhet

I kapitel 5.3.1 och 5.3.2 visades det observerbarhetsmatrisen blir klart bättre konditionerad för två accelerometrar jämfört med en, särskilt välkonditionerad blir matrisen för Δx i intervallet 1.0 - 1.1 vilket motsvarar ett intervall kring $\Delta x = a_{32} / a_{12}$. Är detta intervall då så bra? Här kommer ekvation (11) igen:

$$\begin{aligned}\ddot{z}_{br} &= -\ddot{O}_y \sin \phi + \ddot{O}_z \cos \phi + \Delta x (-\dot{r} \sin \phi - \dot{q} \cos \phi) \\ &= \sin \phi (\beta (a_{32} - a_{12} \Delta x) + u_{psi} (b_3 - b_1 \Delta x) - \Delta x a_{11} r + \Delta x a_{13} q) \\ &+ \cos \phi (\alpha (a_{32} - a_{12} \Delta x) + u_{theta} (b_3 - b_1 \Delta x) - \Delta x a_{11} q - \Delta x a_{13} r)\end{aligned}$$

Resonemanget görs för en tvärsmätande accelerometer och i stationärt tillstånd med konstant roderutslag. Förhållandet blir samma för två accelerometrar. Den signal ("kalmansignal") som kommer till kalmanfiltret är mätsignalen \ddot{z}_{br} minus direkttermerna (termerna med u_{theta} och u_{psi}). Hur stora dessa "kalmansignaler" är beror av givarnas placering, dvs hur stora direkttermerna i ekvationen ovan är. För Δx i närheten av a_{32} / a_{12} ger termerna med α , β , q och r ungefär lika stora bidrag till mätsignalen, men dessa bidrag är inte särskilt stora jämfört med vad direkttermerna ger. Ifall brusnivån på accelerometern är hög kommer detta val av Δx förmodligen inte att ge bra observationsmöjligheter av missilens flygtillstånd jämfört med ett Δx långt ifrån a_{32} / a_{12} , eftersom signalbrusförhållandet är bättre för det senare valet av Δx . Man kan se koefficienterna för α , β , q och r i ekvationen ovan som signalförstärkningar vilka styrs med hjälp av Δx . I Bild 18 visas den signal som kommer till kalmanfiltret sedan roderens direktverkan dragits ifrån. Man ser tydligt att "kalmansignalen" blir mycket svagare när accelerometern placeras nära $\Delta x = 1$.

En annan aspekt är om TP eller accelerometerplacering ej är väldefinierad i x-led kommer Δx ej heller att bli väldefinierad. Det innebär att koefficienterna som α och β skall multipliceras med blir mycket osäkra, relativt sett, om Δx är i närheten av a_{32} / a_{12} och kalmanfiltret borde då fungera dåligt. Men om accelerometern flyttas långt ifrån $\Delta x = a_{32} / a_{12}$ kommer varken dåligt definierad TP eller mätbrus att förstöra lika mycket. Liknande resonemang kan göras för $\Delta x = b_3 / b_1$. Optimalt Δx får provas fram.

Resultatet från analys av observerbarhetsmatrisen kan sammanfattas som:

- Två accelerometrar är bättre än en.
- $\Delta x = a_{32} / a_{12}$: bäst konditionerad observerbarhetsmatris
- $\Delta x \neq a_{32} / a_{12}$: minskad känslighet mot avvikelser i Δx och mot brus.
- Rollhastighet lika med missilens egenfrekvens är ej bra.
- Det är bara för "stora" konditionstal som det kan bli problem med att invertera matrisen.

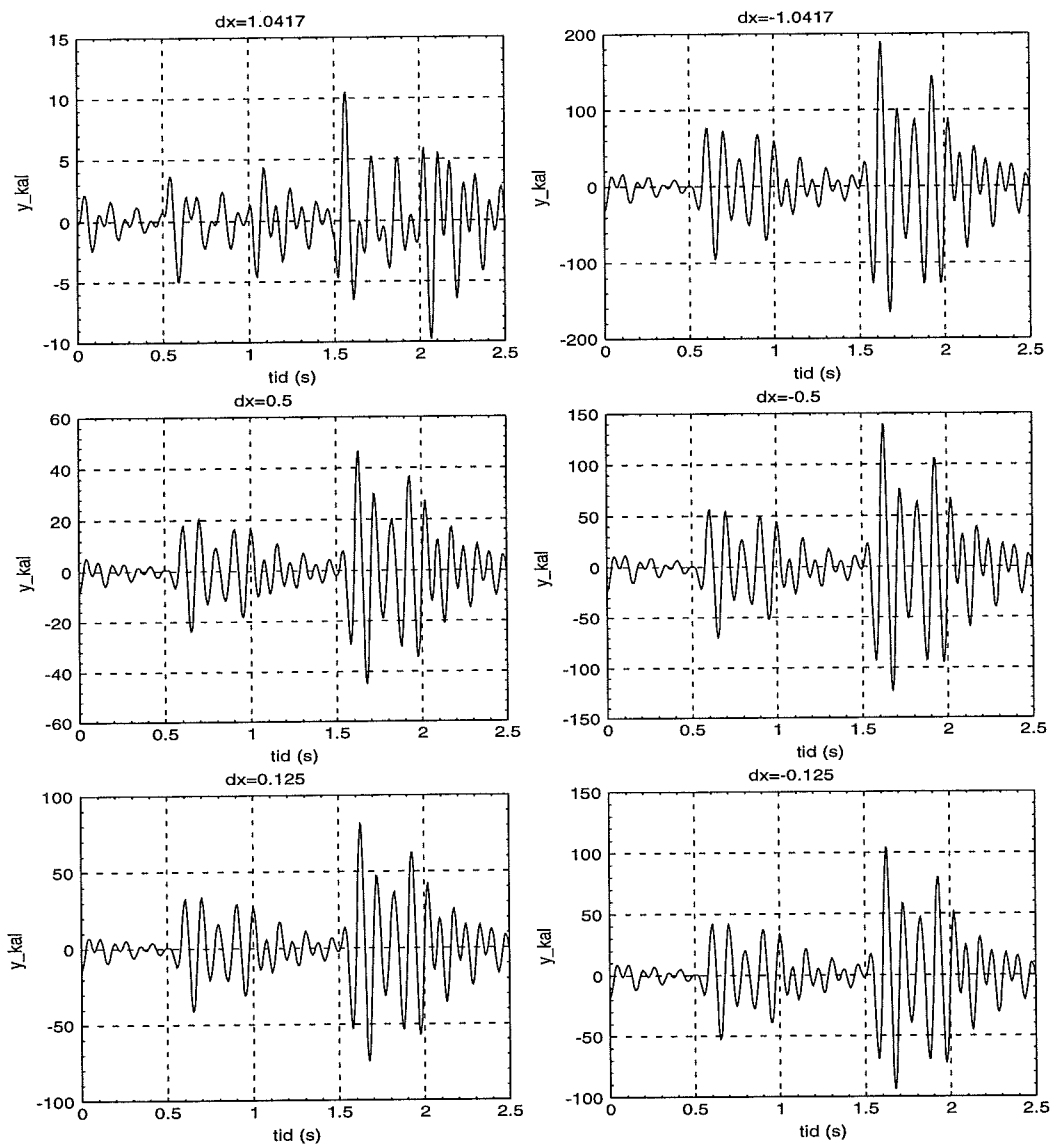


Bild 18: Figurerna ovan visar signal den som kommer till kalmanfiltret, för olika val av Δx , sedan rodrets inverkan på accelerometermätsignalen dragits ifrån. Jämför med Bild 14 där den ursprungliga accelerometermätsignalen finns. Observera att det är olika skalor på y-axlarna.

5.4 Kalmanfilter

För att skatta tillstånden i ekvation (16) används mätsignalerna från densamma. Skattningen görs med ett kalmanfilter enligt ekvationerna (18) och (19), dessa tillsammans utgör ett kalmanfilter med direktterm. Detta filter används dock som ett predikterande filter, och felet i prediktionerna ges av ekvation (20). Orsaken till att filtret används på detta sätt är att det gjorts så sedan tidigare på Bofors och att det därför finns färdigimplementerad algoritm för bestämning av förstärkningsmatrisen $K(k)$.

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + \underline{K}(k) [\bar{y}(k) - \underline{\Phi}(k) \hat{x}(k|k-1)] \quad (18)$$

$$\hat{x}(k+1|k) = \underline{\Phi}(k) \hat{x}(k|k) + \underline{\Gamma}(k) \bar{u}(k) \quad (19)$$

$$\tilde{x}(k+1) = (\underline{\Phi} - (\underline{\Phi}\underline{K})(k) \underline{C}(k)) \tilde{x}(k) \quad (20)$$

I ekvationerna ovan är matriserna $C(k)$ och $K(k)$ tidsvariabla.

$K(k)$ kan förberäknas, eftersom rollvinkelns utveckling i tiden antas känd och därmed också $C(k)$. $K(k)$ beräknas för att ge minsta möjliga varians hos prediktionsfelet. $K(k)$ beräknas enligt följande schema:

$$P_y(k|k-1) = C(k) P(k|k-1) C^T(k) + R_2(k) \quad (21)$$

$$K(k) = P(k|k-1) C^T(k) P_y^{-1}(k|k-1)$$

$$P(k|k) = P(k|k-1) - K(k) P_y(k|k-1) K^T(k)$$

$$P(t+1|t) = \phi(k) P(k|k) \phi^T(k) + R_1(k)$$

$$P(0|-1) = P_0$$

P_0 - kovariansen hos starttillståndet $\bar{x}(0)$

R_2 - kovariansen hos mätbruset $\bar{e}(k)$

R_1 - kovariansen hos processbruset $\bar{v}(k)$

Här varierar R_1 och R_2 för att ge lämpliga observerarpoler, eftersom det är mycket svårt att hitta en bra brusmodell som kan generera R_1 och R_2 . Observerarpolerna fås från egenvärdena till matrisen $(\underline{\Phi} - \underline{\Phi}\underline{K}(k)\underline{C}(k))$ i ekvation (20), åtminstone stationärt är denna matris tidsinvariant.

5.5 Placering av estimatorpoler för en och två accelerometrar

Tillstånden som estimeras är:

- vinkelhastigheter, q och r
- anblåsningvinklar, α och β
- bias

Biasen estimeras snabbt och sedan ligger den på en konstant nivå. Detta åstadkommes genom att välja diagonalelement, för bias i P_0 , stora. Medan motsvarande diagonalelement i R_1 väljs små. Därför är det inte intressant att titta på var observerarpolerna för biastillstånd hamnar i stationäritet. Därmed behandlas inte observerarpolerna för biastillstånd mer. Det viktiga är att placera observerarpolerna för de andra fyra tillstånden på lämpligt sätt. Här förutsetts att observerarpolerna studeras efter insvängning mot stationära värden. Eftersom q och r precis som α och β är parvis ekvivalenta i brushänseende sätts $r_{11}=r_{33}$ och $r_{22}=r_{44}$ i brusmatrisen R_1 . Med det valet kan endast två poler placeras i fallet med en accelerometer. De andra två polerna hamnar ungefär vid polerna för missilens egen dynamik utan roll. Detta är naturligt eftersom en givare i huvudsak mäter i ett plan momentant, då kan endast två tillstånd observeras (biasen observeras i början och ligger sedan konstant). Med två givare kan fyra poler placeras. Om polerna skall vara komplexa hamnar de dock ungefär parvis lika. Skillnaden mellan att ha en eller två accelerometrar illustreras i Bild 19. Där plottas förstärkningen för $1/(\text{karaktäristiska polynom till } \Phi - \Phi KC)$. Med en givare fås alltid en brytfrekvens vid f_1 , enligt ovan, medan den andra brytfrekvensen f_2 kan väljas fritt. Om brytfrekvenserna för två accelerometrar väljs till f_2 fås en större högfrekvensförstärkning än i fallet med en accelerometer. Om brytfrekvenserna för två accelerometrar väljs till f_3 fås ungefär samma högfrekvensförstärkning som med en givare.

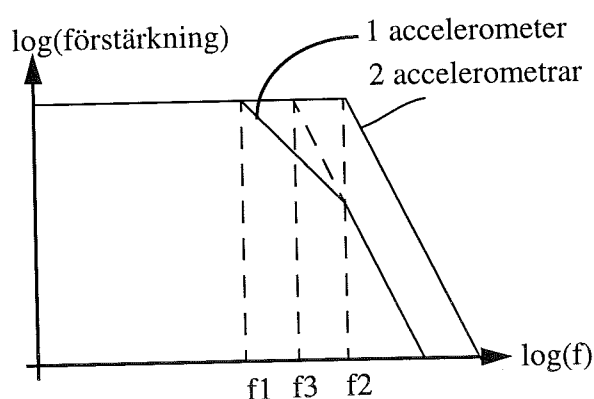


Bild 19: Principiell skillnad mellan observerarpoler för en och två accelerometrar.

6 Störningar

Nedan beskrivs många av de störningar som kan tänkas komma in när missilens tillstånd skall estimeras.

6.1 Rollvinkelfel

Rollvinkelfel innebär att informationen om aktuell rollvinkel inte stämmer med verklig rollvinkel. Orsakerna till felets uppkomst kan vara många och beror till stor del på vilken metod som används för att skatta rollvinkeln, jämför kapitel 4.2.3 och 4.2.4. Om rollvinkeln är felaktig kommer fel mätmatris att användas när kalmanförstärkningarna skall beräknas, vilket innebär att felaktiga kalmanförstärkningar kommer att användas vid uppdateringen av kalmanfiltret. Med felaktig rollvinkel kommer även rollresolveringen av roderutslagen att bli felaktig. Studier av rollvinkelfelens inverkan på estimeringen kan vara en intressant fortsättning. Förmodligen är en bra estimering rollvinkeln av vikt för att hela arrangemanget med accelerometrar för estimering av flygtillstånd skall fungera.

6.2 Vind

Vindstörningar kan vara både turbulenta och statiska. Turbulent vind är sådan som hela tiden varierar till både riktning och amplitud medan statisk vind är tex konstant sidovind. Inverkan från vind på missilen kan modelleras som extra störningar, v_{vindz} och v_{vindy} :

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\psi} \\ \dot{\beta} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \alpha \\ \dot{z} \\ \dot{\psi} \\ \beta \\ \dot{y} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} u_{theta} \\ u_{psi} \end{bmatrix} + \frac{1}{v} \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \\ a_{32} & 0 \\ 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \\ 0 & -a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{vindz} \\ v_{vindy} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Där A- och B-matriserna samt a-elementen är enligt ekvation (7) och v är missilens hastighet. Den extra störsignalen v_{vindz} fås när vitt brus filtreras genom följande filter (det nedan sagda gäller även för v_{vindy}).

$$G_z(s) = \frac{\sqrt{\frac{3}{\tau_z}} s + \frac{1}{\tau_z \sqrt{\tau_z}}}{\left(s + \frac{1}{\tau_z}\right)^2} \quad (23)$$

Variansen hos det vita bruset som filteras genom $G_z(s)$ väljs så att variansen hos v_{vindz} stämmer med vad lämplig tabell ger för aktuell höjd och grad av turbulens. Tidskonstanten τ_z ges av L/v där v är missilens hastighet och L är en turbulensskala som även denna fås ur tabell (L varierar med höjden). Spektrat som fås när vitt brus filtreras enligt ovan kallas Drydenspektra, se MIL-F-8785C [10]. Här har variansen för mätetalen hos v_{vind} valts till $[4\ 4]'$ och L till 200, detta motsvarar medelturbulens på 50 m höjd. När vind anges som störning är det vind med dessa egenskaper som menas om inget annat anges. I ett verkligt fall kan vindens inverkan modelleras som extra tillstånd drivna av vitt brus, detta görs då i enlighet med ekvationerna (22) och (23). Dessa extra tillstånd skattas sedan på sedvanligt vis med hjälp av kalmanfiltret, men så är det inte gjort här.

6.3 Roderfel

Roderfel kan vara av varierande slag:

- 1) Tidsfördröjning, tex på grund av låg bandbredd hos rodret.
- 2) Glapp i rodrets mekanik.
- 3) Skevhet i roder (ungefär samma effekt av skeva fenor).

1. Om rodrets dynamik modelleras som ett andra ordningens system med de rimliga värdena $\omega = 100$ och $\zeta = 0.4$, blir effekten att rodret fördröjs ca 10 ms för en stegformad insignal. Detta motsvarar ett fasfel på 36° för en missil som rollar med 10 Hz, dvs rodret når inte det önskade läget förrän efter nästan ett kvarts varv. Ett sådant fel kan minskas antingen genom att öka bandbredden för roderdynamiken eller genom att ta hänsyn till fasfelet när rodersignalen skall rollresolveras. Här antas att inget fasfel finns såvida inget annat anges.

2. Glappet hos ett rodermekaniken kan typiskt vara 2 mrad, men här antas det vara 0 om inget annat anges.

3. Skevhet hos roder kan ligga kring 2 mrad till detta kan läggas effekter av skevheter hos vingar och kropp. Här antas att totala effekten av skevheter kan räknas om till en ekvivalent roderskevheter, denna har här ansatts till 3 mrad om inget annat anges.

6.4 Accelerometerfel

Fel i signalen från en riktigt placerad accelerometer är

- 1) bias
- 2) brus
- 3) överhörning

1. Bias kan till stor del trimmas bort, men i det fallet att den finns kvar tas den effektivt om hand av det biasestimerande tillståndet. Med brus i accelerometern menas sådana störningar som är av rent elektronisk karaktär och kan kopplas direkt

till accelerometern och dess kringelektronik. På det sätt som accelerometern används i denna rapport kan inverkan från brus nästan bortses ifrån, eftersom det för en normal accelerometer är mycket lågt ($< 1 \%$).

3. Överhörning innebär att accelerometern ger signal även för accelerationer vinkelräta mot mätriktningen. Denna överhörning kan typiskt ligga kring 2 %. Effekten av att en accelerometer är felriktad blir den samma. Överhörningen kan simuleras genom att rikta accelerometern fel. Effekten gör sig särskilt gällande för tvärsmätande accelerometer vid kraftig acceleration i färdriktningen tex vid start. Eftersom missilen antas flyga med konstant fart ger inte överhörningen något bidrag till den tvärsmätande accelerometers utsignal. För en tvärsmätande accelerometer placerad exakt på missilens symmetriaxel kommer överhörningar mellan riktningar i yz-planet att ge en effekt som kan liknas vid fasfel vad gäller rollvinkel. Här antas därför att överhörningens bidrag kan försummas om inget annat anges.

Ytterligare fel fås när accelerometern placeras på olämpligt underlag. Om underlaget är fjädrande kan mekaniska vibrationer förstärkas pga egensvängningar i underlaget.

I simuleringarna finns det en konstant bias på 1 m/s^2 samt ett svagt brus $\sigma = 0.25$ adderat till mätsignalen. I fallet med felplacerad accelerometer kan biasen bli annorlunda tex på grund av centripetalaccelerationens inverkan.

6.5 Felplacerad accelerometer

Med felplacerad accelerometer menas här att accelerometers verkliga placering och riktning avviker från tänkta dito. Här studeras bara effekterna av felplacerad accelerometer. Felplaceringen här innebär att det verkliga Δx kommer att få ett extra bidrag på 2 cm jämfört med det modellerade Δx . Det verkliga Δz kommer att få ett extra bidrag på 2 mm jämfört med det modellerade Δz för accelerometer som mäter i z-led (pss för accelerometer i y-led).

Felriktad accelerometer kommer i huvudsak att ge upphov till en form av fasfel och modelleras därför inte här, jämför kapitel 6.4.

6.6 Modellfel

Modellfel är övriga fel i den matematiska modelleringen såsom felaktiga element i matriserna som beskriver systemet. Test för sådana fel görs inte här.

6.7 Tyngdkraft

Tyngdkraften kan ses som en störning. Om missilen flyger längs en siktlinje som går parallellt med jordytan kommer de tvärsmätande accelerometrarna även att känna av en acceleration som varierar sinusformat i tiden pga tyngdkraften. Efter-

som kännedom om rollvinkeln krävs, för tex rollresolvering, antas tyngdkraftens inverkan vara känd. Då kan denna överlagrade sinussignal som tyngdkraften ger upphov till enkelt dras ifrån mätsignalen och inga problem uppstår pga detta signaltillskott. Därför sätts tyngdkraften till 0 i simuleringarna.

6.8 Sammanfattning av fel som simuleras i rapporten

I huvudsak är det inverkan från följande tre störningar, med avseende på möjlighet att skatta flygtillstånd, som studeras i denna rapport.

- 1) Roderskevhets
- 2) Turbulent vind
- 3) Felplacerad accelerometer

Storleken på dessa fel är beskrivna tidigare i kapitlet under respektive rubrik. Till detta kommer en bias och ett svagt brus som alltid läggs på accelerometersignalen. Med störningsfritt menas här att inga av störningarna 1-3 ingår. Biasen och det svaga bruset ingår dock alltid. När "alla fel" nämns betyder det att alla felen i 1) - 3) samt bruset och biasen påverkar missilen samtidigt.

7 Estimering i simuleringar

En svårighet med att göra jämförbara simuleringar om tex Δx varierar är att för ett visst val på P0, R1 och R2 varierar observerarpolerna med Δx . Samma sak blir det om två accelerometrar används istället för en. För att få jämförbara simuleringar har därför R1 och R2 varierats beroende på Δx och antal givare. Om Δx är "långt" ifrån a_{32}/a_{12} räcker det att korrigera R2 som en funktion av Δx och antal accelerometrar. Nära denna punkt måste även den inbördes storleken på matriselementen i R1 ändras för att samma observerarpoler skall erhållas. Brusnivån på accelerometrarna hålls konstant oavsett Δx . Det innebär att signal/brusförhållandet blir sämre nära a_{32}/a_{12} . Med långt fram menas i fortsättningen punkter nära a_{32}/a_{12} .

7.1 Testprocedur

I Bild 20 visas en av de simuleringar som används för att utvärdera olika antal accelerometrar, deras placering i missilen samt olika störningar som verkar på systemet (missil + accelerometrar). Vid tiden 0 är alla missilens tillstånd nollställda, utom α som är 0.035 rad. En grundbias på 1 m/s^2 och ett brus med standardavvikelsen 0.25 adderas alltid till accelerometermätningen. Vid tiden 3 s ges ett roderutslag på 0.05 rad under 0.5 s i tippeld. Resten av tiden lämnas missilen ostyrd. Hur väl kalmanfiltret skattar olika tillstånd testas med avseende på:

- 1 eller 2 accelerometrar
- olika placering i x-led $\Delta x = [-0.5, 0, 0.125, 0.5, 1.0]$
- olika störningsfall
 - 1) endast grundbias och brus
 - 2) felplacerad accelerometer
 - 3) skevt roder
 - 4) turbulent vind
 - 5) alla fel samtidigt

Totalt blir det $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ simuleringar och i varje simulering studeras hur väl q , α , r och β estimeras. Måttet på estimeringsnoggrannheten för ett visst tillstånd ges av ges av summan av alla fel i kvadrat mellan två tidpunkter, delat med antal sampel-punkter och därefter dras roten ur alltihop. Uttryckt i formler:

$$\text{estimeringsfel} = \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{r} \\ \tilde{\beta} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\sum_{k=k_1}^{k_2} (\bar{x}(k) - \hat{x}(k))^2}{(k_2 - k_1)}}$$

I summeringen väljs k_1 så pass stor att kalmanfiltret hunnit svänga in sig. För att på ett enkelt sätt kunna avgöra om 1 eller 2 accelerometrar blir bäst finns ytterligare ett mått:

$$\text{estimeringsskillnad} = \frac{\text{estimeringsfel}(1\text{ givare}) - \text{estimeringsfel}(2\text{ givare})}{\text{estimeringsfel}(1\text{ givare}) + \text{estimeringsfel}(2\text{ givare})}$$

- Ju närmare 1 estimeringsskillnaden är desto bättre är det med 2 givare.
- Ju närmare -1 estimeringsskillnaden är desto bättre är det med 1 givare.
- När estimeringsskillnaden närmar sig 0 ger både 1 och 2 givare samma fel.
- Om tex estimeringsskillnaden är 0.1 så är estimeringsfelen för 2 givare 18 % lägre än estimeringsfelen för 1 givare.

Estimeringsfel och estimeringsskillnad presenteras i diagram för 1 och 2 accelerometrar i Bilaga D. Som nämnts tidigare har observerarpolerna korrigerats för varje val av Δx och antal accelerometrar. Polerna har placerats så att de motsvarar egenfrekvens ω_0 och dämpning ζ i stationäritet enligt tabell I. För att få de värdena har R1 och R2 varierats kring följande:

- 1 accelerometer: R1: $r_{11} = r_{33} = 1e-3$, $r_{22} = r_{44} = 1e-7$, $r_{55} = 1e-14$
R2: $r_1 = 0.015$
- 2 accelerometrar: R1: $r_{11} = r_{33} = 1e-3$, $r_{22} = r_{44} = 4e-6$, $r_{55} = 1e-14$
R2: $r_{11} = r_{22} = 0.06$

Som tidigare nämnts får observerarpolerna för biasen bli som de blir.

Δx [m]	1 accelerometer				2 accelerometrar			
	ω_0	ζ	ω_0	ζ	ω_0	ζ	ω_0	ζ
-0.5	33.1	0.75	21.7	0.11	26.9	0.66	24.6	0.72
0.0	32.5	0.73	21.8	0.12	25.0	0.72	26.1	0.61
0.125	32.7	0.73	21.8	0.12	25.4	0.73	25.9	0.61
0.5	32.8	0.74	22.0	0.12	24.8	0.53	26.6	0.74
1	33.8	0.94	22.0	0.12	24.7	0.46	26.4	0.34

Tabell I: Egenfrekvens och dämpning hos observerarpoler i stationäritet.

I Bilaga D finns även plot över estimeringsfel och estimeringsskillnad då alla 4 observerarpolerna för två accelerometrar är lika snabba som de två snabbaste för en accelerometer, dvs alla 4 polerna har $\omega_0 = 32 - 34$ och $\zeta = 0.7 - 0.8$. Jämför med kapitel 5.5 och Bild (19). Dessa plottar är med för att visa vad som händer då två accelerometrar, med 4 snabba observerarpoler, används. Bla blir högfrekvensförstärkningen större.

7.2 Tolkning av estimeringsresultat

I påståendena nedan ligger information från plottarna i Bilaga D till grund, därför görs ingen hänvisning till dem varje gång något påstås. Det finns mycket information i dessa plottar. Det går inte att beskriva allt. Den intresserade läsaren rekommenderas därför att själv studera och dra slutsatser från plottarna i Bilaga D.

7.2.1 Estimering utan Störningar

Felen i alla estimaten pga brus och grundbias ökar när accelerometrarna flyttas framåt. Detta beror på att signal/brusförhållandet då blir sämre. Två accelerometrar ger något lägre fel än en accelerometer. När accelerometrarna flyttas framåt ökar felet snabbare för en accelerometer än för två. Det syns i plotten för estimeringskillnad i Bilaga D. I Bild 20 visas estimering med en accelerometer i $\Delta x = 1$ m, dvs det fall som blir sämst. Trots det blir estimaten ganska bra, väljs Δx längre bak blir estimaten riktigt bra. Observera hur snabbt biasen hittas för att sedan ligga på en konstant nivå.

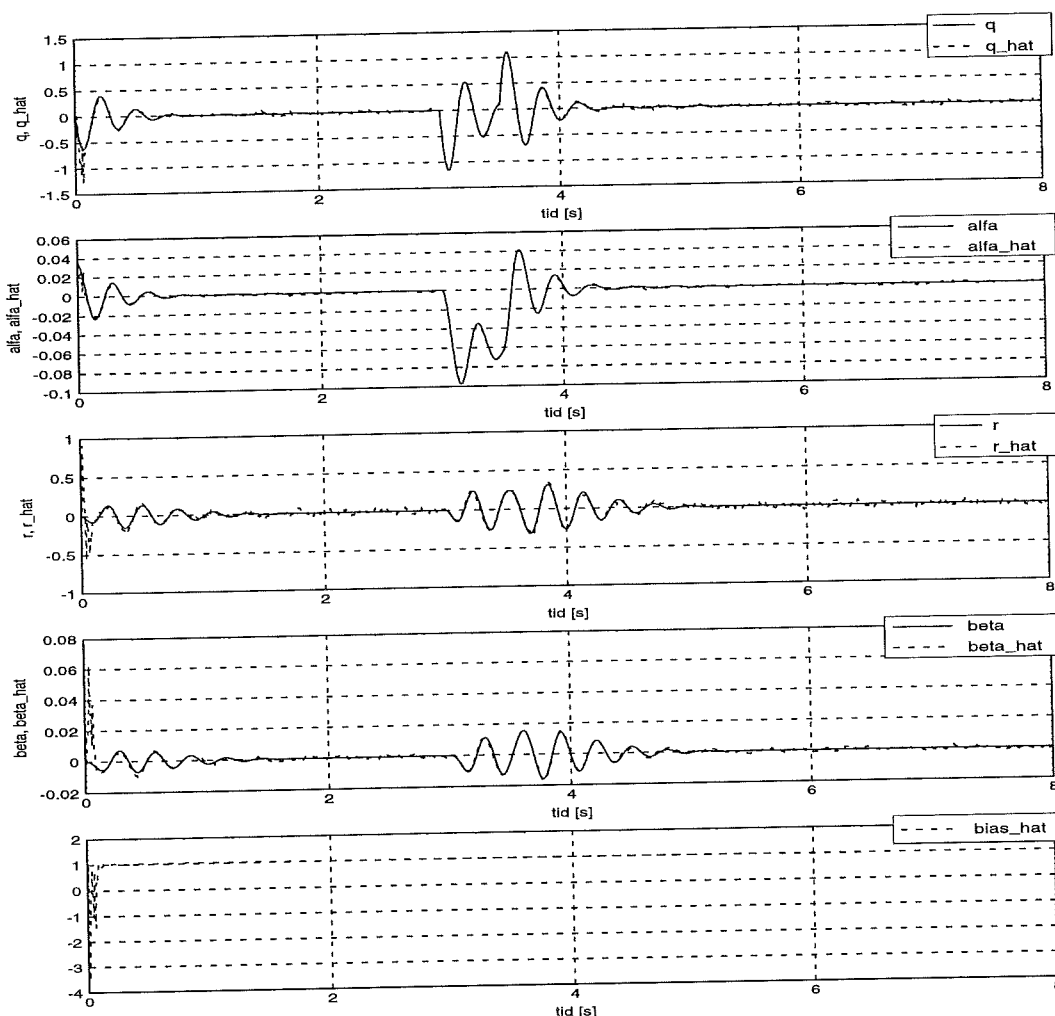


Bild 20: Estimering med 1 accelerometer placerad i $\Delta x = 1$ m med enbart grundbias och brus.

7.2.2 Estimering med felplacerad accelerometer som störning

Estimeringsfelen pga felplacerade accelerometrar ökar när dessa flyttas framåt. Orsaken är att ju närmare $\Delta x = a_{32} / a_{12}$ accelerometrarna placeras desto större andel av mätsignalen utgör felsignalerna. Felplaceringen av accelerometrarna i radiell led med 2 mm ger upphov till en centripetalacceleration. Denna visar sig som ett biastillskott på -8 m/s^2 . Bild 21 visar estimering i det sämsta fallet för 2 accelerometrar, dvs $\Delta x = 1 \text{ m}$. Estimeringsfelen blir trots det mycket små, se hur väl biasen på -7 m/s^2 (1 - 8) skattas. Det är inte förrän i närheten av $\Delta x = 1 \text{ m}$ som fel pga felplacerad accelerometer märks i förhållande till brus och grundbias. Utan det biasestimerande tillståndet skulle estimeringarna bli mycket dåliga.

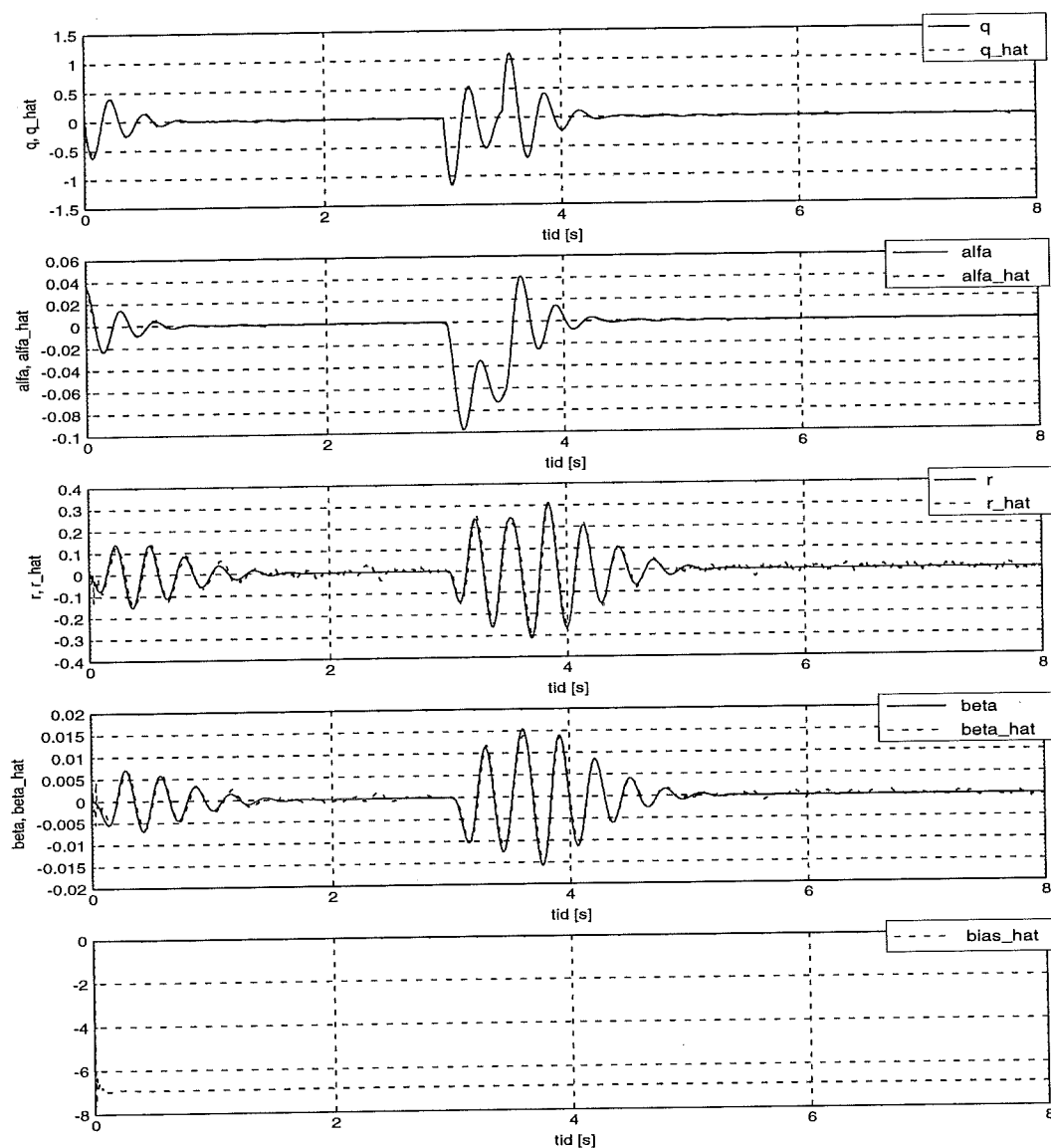


Bild 21: Estimering med 2 felplacerade accelerometrar i $\Delta x = 1 \text{ m}$.

I Bild 21 syns knappt estimeringsfelen trots att det är värsta fallet för 2 accelerometrar. I Bild 22 visas estimeringsfelen dels när två felplacerade accelerometrar finns i $\Delta x = 1$ m och dels i $\Delta x = -0.5$ m. För verklig placering, addera 2 cm i x-led och 2 mm i mätriktningen. Det syns tydligt att estimeringsfelen blir mycket mindre när accelerometrarna är placerade långt bak. Observera hur felen ökar i det tidsintervall där rodersignal ges.

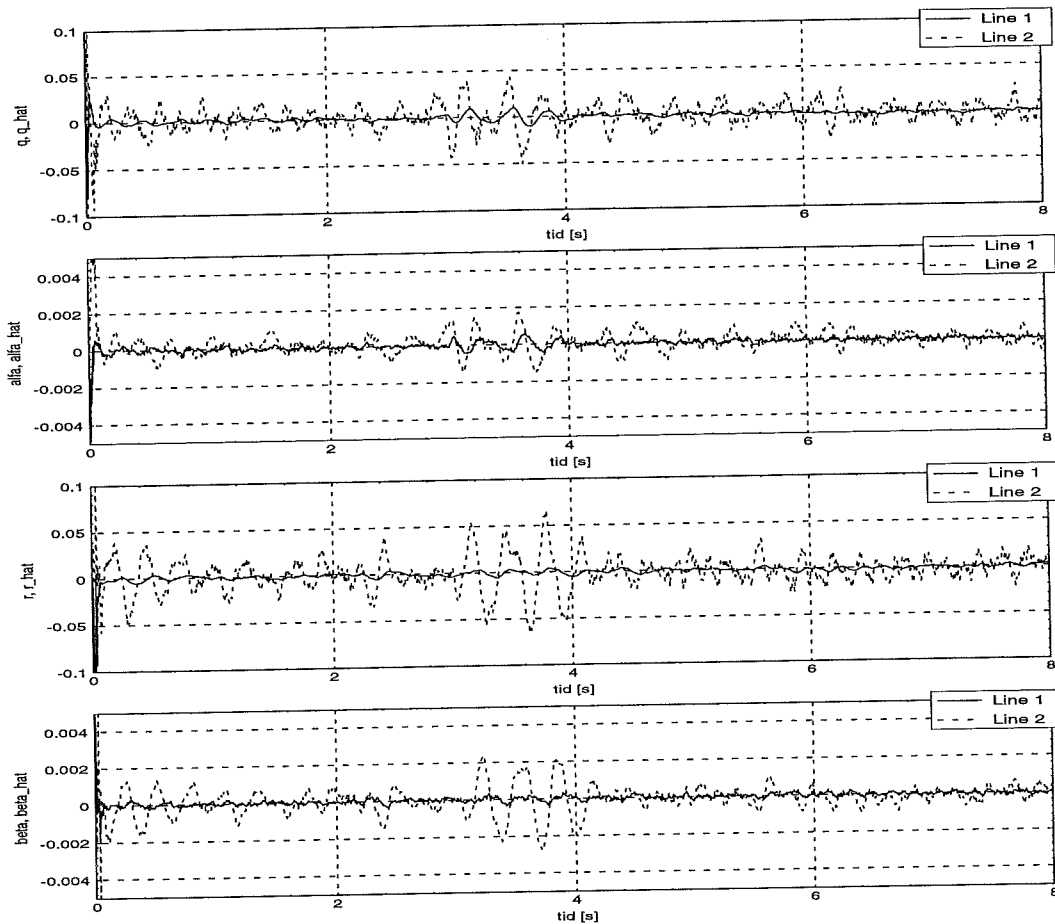


Bild 22: Två olika fall med estimeringsfel för två felplacerade accelerometrar. För linje 1 är avsett $\Delta x = -0.5$ m för båda accelerometrarna, för linje 2 är avsett $\Delta x = 1$ m.

Estimeringarna blir något bättre om 2 accelerometrar används istället för 1. Det är inte förrän vid $\Delta x = 1$ m som det märks tydligt att 2 accelerometrar är att föredra framför 1. Totalt sett märks knappt inte felen pga felplacerad accelerometer förrän Δx närmar sig 1 m. Därför är det bra om denna punkt undviks för accelerometerplacering.

7.2.3 Estimering med roderskevhets som störning

Skevhets hos roder gör att missilen kommer att wobbla. Frekvensen för wobblingen blir rollvinkelfrekvensen, 63 rad / s. Kalmanfiltret har observerarpoler med egenfrekvensen 22 - 34 rad / s. Därför bör det bli svårt för kalmanfiltret att hinna med och observera dessa svängningar. Estimeringsfelen pga skeva roder blir klart större än felen för brus, grundbias och felplacerad accelerometer. Bild 23 visar estimeringsfelen för 1 accelerometer placerad i $\Delta x = 1$ m. Det syns hur felen varierar med rollvinkeln. Estimatet blir bättre om accelerometern placeras bak i missilen, se plot över estimeringsfel i Bilaga D.

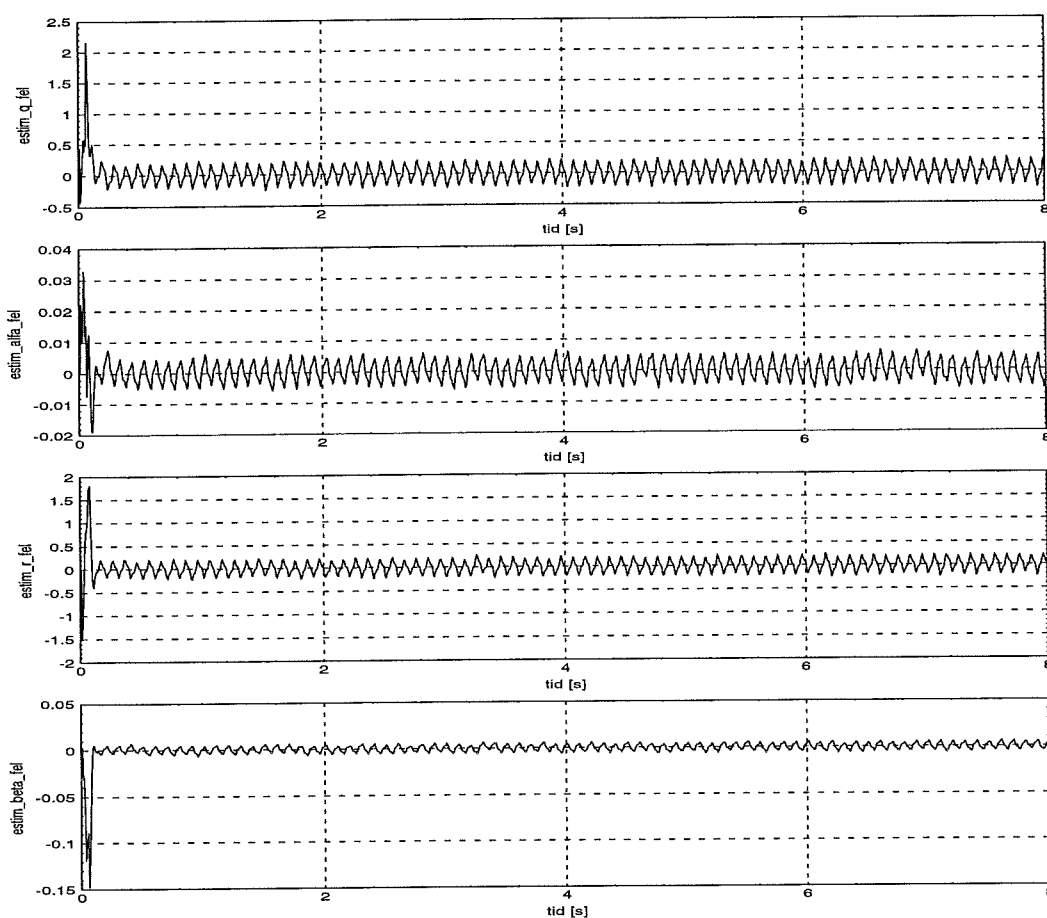


Bild 23: Estimeringsfel pga skeva roder, en accelerometer i $\Delta x = 1$.

Om alla 4 observerarpolerna i fallet med 2 accelerometrar görs lika snabba som de två snabbaste för 1 accelerometer visar det sig att 1 accelerometer ger mindre mätfel. Det beror på att med två accelerometrar dämpas då inte fel vid högre frekvenser lika bra, jämför med Bild 19.

7.2.4 Estimering med turbulent vind som störning

Felen blir stora när tillstånden skall estimeras i medelturbulent vind. Med både 1 och 2 accelerometrar blir estimering av α och β klart sämre än estimering av q och r . α och β påverkas i princip inte av accelerometrarnas antal eller deras placering i x -led. För att skatta tillstånden bättre i turbulent vind bör modelleringen av vinddynamikerna tas med i kalmanfiltret. I Bild 24 visas en estimering i turbulent vind. Man ser att q och r skattas hyfsat men att α och β är svåra att följa.

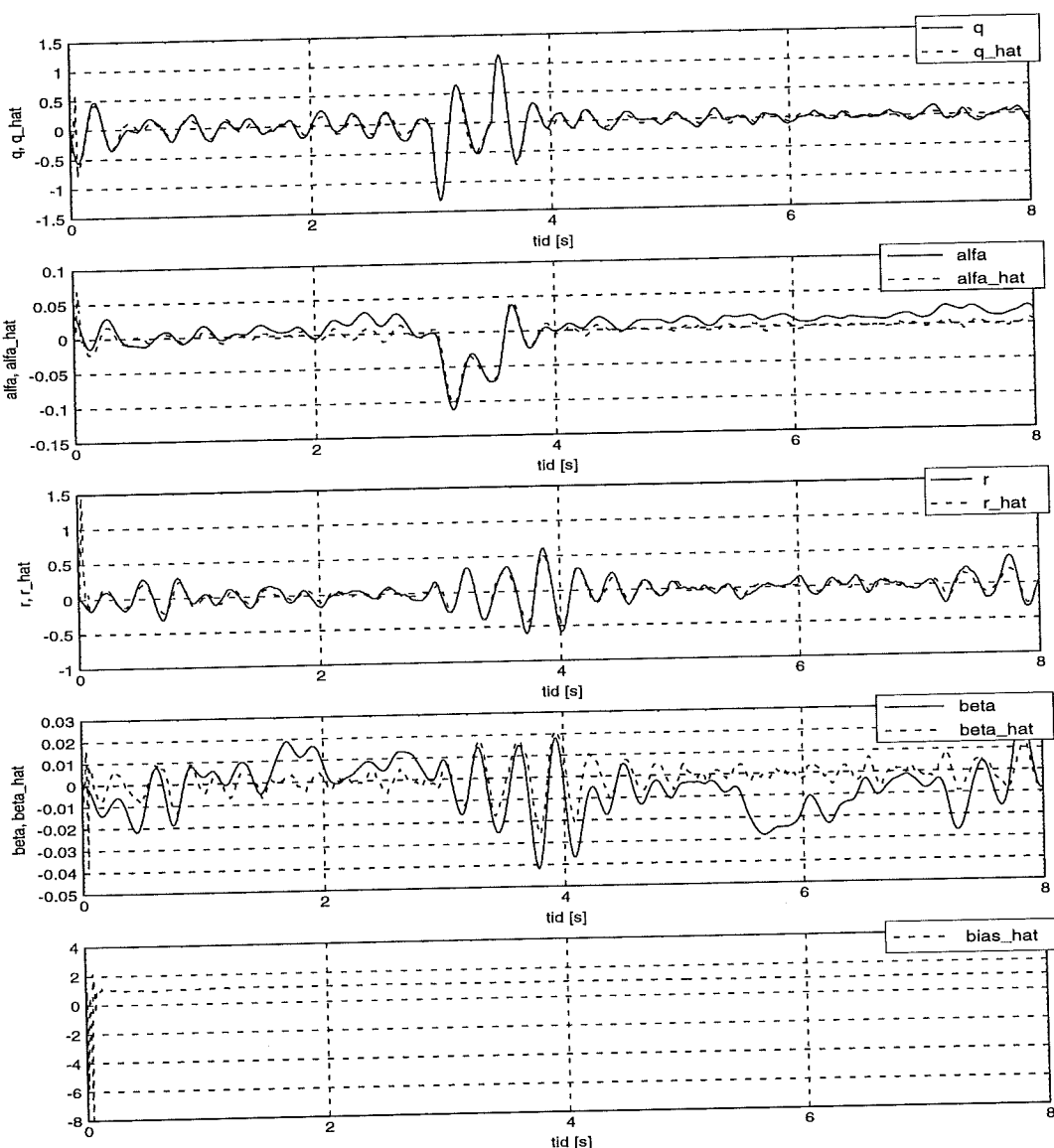


Bild 24: Estimering av tillstånd för missil i turbulent vind. Mätning med en accelerometer placerad i $\Delta x = 0.5$ m.

Om bandbredden hos kalmanfiltret för 2 accelerometrar ökas så att alla fyra polerna blir ungefär lika snabba som de två snabbaste för 1 accelerometer blir skattningarna av tillstånden i turbulent vind något bättre. Men å andra sidan ökar felen pga högfrekventa störningar, särskilt gäller detta då accelerometrarna är placerade långt fram.

7.2.5 Alla fel samtidigt

För både en och två accelerometrar är det i huvudsak den turbulenta vinden som begränsar noggrannheten på estimering av α och β . När det gäller estimering av q och r är det också i huvudsak den turbulenta vinden som begränsar noggrannheten utom i $\Delta x = 1$ då skevt roder försämrar noggrannheten avsevärt. I Bild 25 visas hur en estimering kan bli då alla fel inverkar samtidigt.

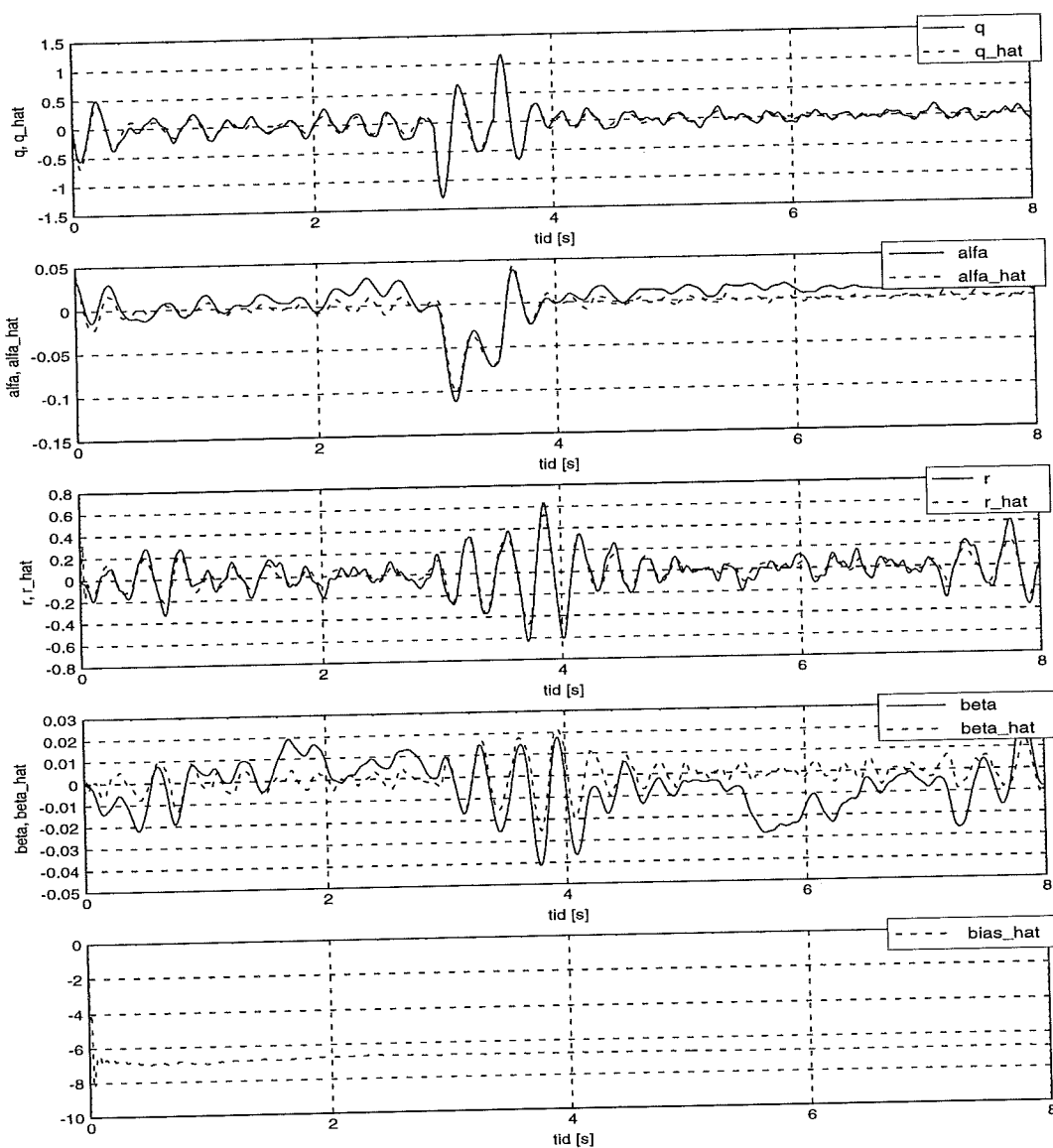


Bild 25: Estimering då alla fel påverkar missilen samtidigt. Mätning sker med två accelerometrar placerade i $\Delta x = -0.5$.

7.2.6 Slutsats för estimering av tillstånd

För att även kunna estimeras anblåsningsvinklar, bör turbulent vind (förmodligen även konstant vind) modelleras i kalmanfiltret. Roderskevhets inverkan kan ses som en högfrekvent störning. Denna störning har samma frekvens som missilens rollvinkelfrekvens. Ökad bandbredd hos kalmanfiltret försämrar estimatens noggrannhet pga högfrekventa störningar.

Resultaten från analysen av observerbarhetsmatrisen gav att denna var bäst konditionerad för Δx kring 1 m. Men simuleringarna visar att detta val av Δx bör undvikas pga den höga känsligheten för störningar som inte är modellerade i kalmanfiltret.

Fel i estimat pga brus, bias och felplacerad accelerometer är i allmänhet små i förhållande till skeva roder och turbulent vind. Det spelar inte någon större roll om 1 eller 2 accelerometrar används. För kalmanfilter med ungefär samma högfrekvensförstärkning, blir estimeringsfelen i intervallet $\Delta x = [-0.5 \ 0.5]$ ca 1 - 25 % lägre då två givare används, beroende på vilken störning som avses.

Det verkar som den höga rollfrekvensen gör att 1 accelerometer hinner med att ge tillräcklig med information till kalmanfiltret för att detta skall hinna med att skatta tillstånden. Rollfrekvensen är ju ca 3 gånger snabbare än missilens egenfrekvens. Dock kan det finnas andra vinster med att ha två accelerometrar. Tex borde rollfrekvensen kunna vara lägre. Om \bar{g} skall skattas är det kanske en fördel med två accelerometrar. Med två accelerometrar kan man fritt placera alla fyra observerarpolerna.

Sammanfattning:

- 1 eller 2 accelerometrar ger ungefär lika bra estimat, med en svag fördel för 2 accelerometrar.
- $\Delta x = a_{32} / a_{12}$ bör undvikas trots konditionstalet för observerbarhetsmatrisen säger annat.
- Brus och bias samt felplacerad givare (inom rimliga gränser) påverkar knappt estimatens noggrannhet.
- Med snabb observerare blir felen pga skeva roder stora.
- Vindfel bör modelleras i kalmanfiltret.

8 Styrautomat

Man kan enkelt visa att alla tillstånden i ekvation (13) är styrbara eftersom styrbarhetsmatrisen $Wc = [\Gamma \Phi \Gamma \Phi^2 \Gamma \Phi^3 \Gamma]$ har full rang. Observera att Wc är av lägre ordning än W_0 , eftersom biastillstånd ej är styrbara. Observation och återkoppling kan delas upp i två helt skilda fall enligt separationsatsen. Observationen av tillstånden anses nu avklarad. I fallet med återkoppling dimensioneras till början en enkel dämpstyrautomat. Därefter dimensioneras en accelerationsstyrautomat vilken kommer att vara både framkopplad och återkopplad.

8.1 Dämpstyrautomat med hjälp av återkoppling

Dämpstyrautomaten innebär att missilen skall få en mera dämpad dynamik. Med missilen menas modellen i ekvation (13). Dämpningen kan åstadkommas med styrlagen:

$$\bar{u}(k) = - \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\theta}} \\ \hat{\alpha} \\ \dot{\hat{\psi}} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = -\underline{L}\hat{x} \quad (24)$$

Där \hat{x} är skattningar av de riktiga tillstånden. L har beräknats med LQ-design. Straffen Q_0 , Q_1 och Q_2 har valts så att polerna i stationaritets för det återkopplade systemet hamnat på ungefär samma ställe som polerna hos ett andra ordningens system med egenfrekvens $\omega = 20-25$ rad/s och dämpning $\zeta = 0.75$, jämför med värden för den odämpade missilen i Bild (8). Eftersom missilmodellen (13) är ett 4:e ordningens system som består av nästan två separata 2:a ordningens system har alla fyra polerna hos det återkopplade systemet givits samma ω och ζ . Ett sådant val av poler gör att missilens dynamik vid återkoppling är ungefär lika snabb som missilens dynamik utan återkoppling, men dämpningen blir bättre. För att göra det återkopplade systemets dynamik snabbare än det ursprungliga krävs det i allmänhet stora styrsignaler.

8.2 Accelerationsstyrautomat

För en accelerationsstyrautomat innebär det att en referenssignal skall kunna följas. Valet här är att acceleration i sida och höjd skall kunna ges som referenssignal. Realiseringen av accelerationsstyrautomaten innebär att såväl återkoppling som framkoppling behöver tillgripas. Bild 26 visar med blockschema hur det kan se ut i ett allmänt fall, se Åström [3].

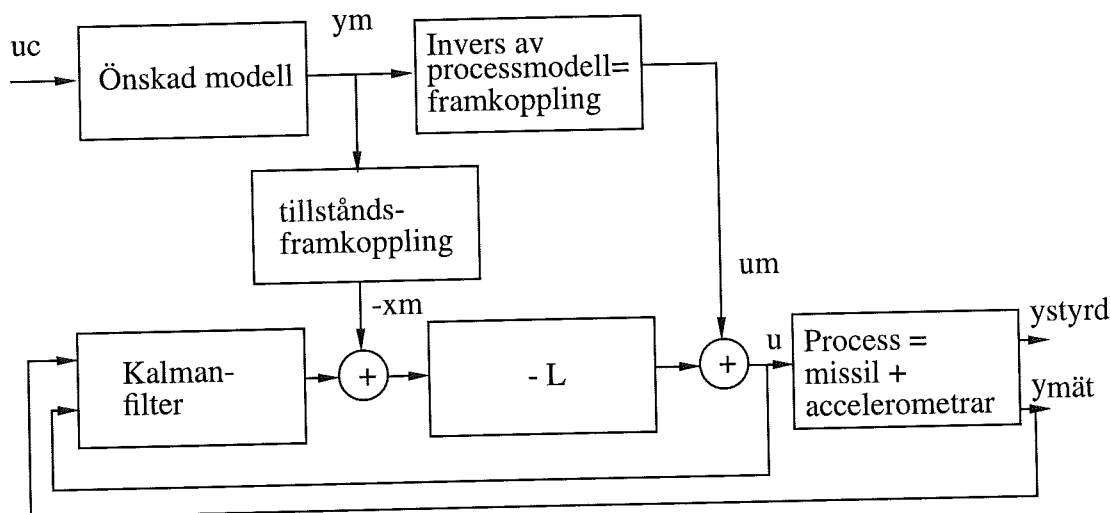


Bild 26: Ett sätt att introducera referenssignaler i system med tillståndsåterkoppling.

Förklaring av beteckningar i Bild 26:

- u_c : referenssignaler, önskad acceleration i sida och höjd
- y_m : filtrerade referenssignaler
- u_m : nominella styrsignaler som krävs för att ge y_m som utsignal
- x_m : nominella tillstånd som krävs för att ge y_m som utsignal
- u : styrsignaler, u_{θ} och u_{ψ} rollresolveras i processblocket
- y_{styrd} : utsignalerna som kontrolleras, \dot{z} och \dot{y}
- $y_{mät}$: den eller de mätsignaler som kommer från accelerometrarna
- Önskad modell beskriver hur man vill att totala systemet skall se ut från u_c till y_{styrd} .
- Invers av processmodell går endast att göra approximativt här eftersom processen inte är minimum fas.
- Processen är missilmodellen tillsammans med accelerometrar.

Det bör observeras att benämningen utsignal kan avse olika signaler beroende på i vilket sammanhang utsignal nämns. Med utsignal kopplad till kalmanfiltret är det accelerometermätsignalen som menas, med utsignal i fallet accelerationsstyrautomat menas acceleration i tippel (eller girled). Dessa två fall har olika C- och D-matriser

8.2.1 Accelerationsstyrning med direktterm

Går det att styra missilen utan dynamik mellan referenssignal och utsignal?

Utsignalerna för acceleration i tippel kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \alpha \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_B u_{theta} \quad (25)$$

$$\ddot{z} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{32} \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \alpha \end{bmatrix} + b_3 \cdot u_{theta} \quad (26)$$

Eftersom utsignalen i ekvation (26) har direktterm (via b_3) skulle eventuellt en lämpligt vald styrlag kunna ge en direktstyrning av denna utsignal. Direktstyrning innebär att utsignalen följer insignalen exakt sånär som på en förstärkningsfaktor. För att se om det är möjligt att åstadkomma direktstyrning (med en styrlag på standardform) görs vissa förenklingar. Analysen görs i kontinuerlig tid och bara för tipp-kanalen, dvs gyalkopplingen försummas då dess bidrag är små.

Styrlagen ges av tillståndsåterkoppling med referenssignal enligt följande:

$$u = - \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}}_L \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \alpha \end{bmatrix} + l_c \cdot u_c \quad (27)$$

Det återkopplade systemets överföringsfunktion $G(s)$ fås från ekvation (25) - (27) på vanligt vis:

$$G(s) = b_3 \cdot l_c + (C - b_3 \cdot L) (sI - (A - BL))^{-1} l_c \cdot B \quad (28)$$

För styrning med enbart direkttermen $b_3 \cdot l_c$ skall den dynamiska delen i ekvation (28) vara noll. Men med L vald så att den dynamiska är noll kommer en av polerna hos det återkopplade systemet att hamna i höger halvplan. Slutsatsen blir att det inte går att kommandera acceleration med enbart direkttermen. Det beror på att missilen med roder baktill inte är i minimumfas. Med nosroder kommer problemet i en helt annan synvinkel.

8.2.2 Accelerationsstyrning med både framkoppling och återkoppling

För att skapa accelerationsstyrautomat krävs både framkoppling och återkoppling, här kommer modellen i Bild 26 att följas. Det innebär att rutorna med "önskad modell", "tillståndsframkoppling" och "framkoppling" skall fyllas i med lämpliga modeller. Kalmanfiltret och återkopplingsblocket -L har klarats av tidigare.

8.2.2.1 Önskad modell

Den önskade modellen väljs som två särkopplade 2:a ordningens system, här visas i kontinuerlig tid:

$$\begin{bmatrix} \ddot{z}_m \\ \ddot{y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} & 0 \\ 0 & \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Detta ger:

$$\begin{aligned} y_{m1}(k) &= \ddot{z}_m(k) = H5(q) u_{c1} \\ y_{m2}(k) &= \ddot{y}_m(k) = H6(q) u_{c2} \end{aligned} \quad (30)$$

Valet av ω_0 är samma som för den orollade missilens egenfrekvens, dämpningen ζ väljs till 0.7. Diskretiseringen av överföringsfunktionerna i ekvation (29) motsvarar således $H5(q)$ och $H6(q)$.

8.2.2.2 Tillståndsframkoppling

Rutan för "tillståndsframkoppling" skall ge nominella värden för tillstånd \bar{x}_m från nominella utsignaler \bar{y}_m .

$$\begin{aligned} q_m(k) &= H1(q) \ddot{z}_m(k) \\ r_m(k) &= H2(q) \ddot{y}_m(k) \\ \alpha_m(k) &= H3(q) \ddot{z}_m(k) \\ \beta_m(k) &= H4(q) \ddot{y}_m(k) \end{aligned} \quad (31)$$

H1 till H4 är sökta överföringsfunktioner.

Överföringsfunktionerna för missilens tillstånd kan skrivas på följande sätt:

$$\begin{bmatrix} q(k) \\ r(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H7(q) & K1(q) \\ K2(q) & H8(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{theta}(k) \\ u_{psi}(k) \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha(k) \\ \beta(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H9(q) & K3(q) \\ K4(q) & H10(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{theta}(k) \\ u_{psi}(k) \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{z}(k) \\ \ddot{y}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H11(q) & K5(q) \\ K6(q) & H12(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{theta}(k) \\ u_{psi}(k) \end{bmatrix} \quad (34)$$

Där K står för överföringsfunktion för korskopplingstermer. I Bilaga C finns alla överföringsfunktionerna, i ekvation (32) - (34), samt dessas poler och nollställen med de numeriska värden som gäller i denna rapport (även fallen med kontinuerlig tid finns med). Några anmärkningar beträffande överföringsfunktionerna kan göras:

- Alla H och K har samma nämnarpolynom.
- $K3(q) - K6(q)$ är icke minimum fas trots att de kontinuerliga motsvarigheterna $K3(s) - K6(s)$ är minimum fas.
- H11 och H12 är icke minimum fas.

Utgående från ekvationerna (32) - (34) kan överföringsfunktioner från \ddot{z} och \ddot{y} till q , r , α och β bildas, operatoren q utelämnas för att förenkla:

$$\begin{bmatrix} q(k) \\ r(k) \end{bmatrix} = \frac{1}{H11H12 - K6K5} \begin{bmatrix} H12 & -K5 \\ -K6 & H11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H7 & K1 \\ K2 & H8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}(k) \\ \ddot{y}(k) \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha(k) \\ \beta(k) \end{bmatrix} = \frac{1}{H11H12 - K6K5} \begin{bmatrix} H12 & -K5 \\ -K6 & H11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H9 & K3 \\ K4 & H10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}(k) \\ \ddot{y}(k) \end{bmatrix} \quad (36)$$

Observera att alla överföringsfunktionerna i ekvation (35) och (36) bara kan fås approximativt eftersom inverserna av H11, H12, K5 och K6 inte är stabila

Ekvation (35) kan användas för att skapa de nominella tillstånden q_m och r_m genom att ersätta \dot{y} och \dot{z} med de nominella värdena \dot{y}_m och \dot{z}_m som fås av den önskade modellen (beskrivs nedan). För att få en enklare styrlag har jag ansatt K1, K2, K5 och K6 till 0. Då fås för H1(q) och H2(q):

$$\begin{aligned} q_m(k) &= H1(q) \cdot \dot{z}_m(k) = \frac{H7(q)}{H11(q)} \cdot \dot{z}_m(k) \\ r_m(k) &= H2(q) \cdot \dot{y}_m(k) = \frac{H8(q)}{H12(q)} \cdot \dot{y}_m(k) \end{aligned} \quad (37)$$

Ekvation (36) kan användas för att skapa de nominella tillstånden α_m och β_m genom att ersätta \dot{y} och \dot{z} med de nominella värdena \dot{y}_m och \dot{z}_m som fås av den önskade modellen (beskrivs nedan). För att få en enklare styrlag har jag ansatt K3 - K6 till 0. Då fås för H3(q) och H4(q):

$$\begin{aligned} \alpha_m(k) &= H3(q) \cdot \dot{z}_m(k) = \frac{H9(q)}{H11(q)} \cdot \dot{z}_m(k) \\ \beta_m(k) &= H4(q) \cdot \dot{y}_m(k) = \frac{H10(q)}{H12(q)} \cdot \dot{y}_m(k) \end{aligned} \quad (38)$$

Om K1 - K6 inte ansatts till 0 skulle en viss reducering av korskopplingen kunnat erhållas i ekvation (37) och (38) om dessa varit på fullständig form enligt ekvation (35) och (36).

8.2.2.3 Framkoppling (invers av processmodell)

Med framkoppling menas här inversen av processmodellen, dvs inversen av överföringsfunktionen från roderutslag till accelerationer i ekvation (34). Framkopplingen är således:

$$\begin{bmatrix} u_{theta}(k) \\ u_{psi}(k) \end{bmatrix} = \frac{1}{H11H12 - K6K5} \begin{bmatrix} H12 & -K5 \\ -K6 & H11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}(k) \\ \dot{y}(k) \end{bmatrix} \quad (39)$$

För att få en enklare styrlag ansätts K5 och K6 till 0. Då blir framkopplingen (inversa processmodellen):

$$\begin{aligned} u_{m\theta} &= \frac{1}{H11(q)} \cdot \ddot{z}_m(k) \\ u_{m\psi} &= \frac{1}{H12(q)} \cdot \ddot{y}_m(k) \end{aligned} \quad (40)$$

Som nämnts tidigare så kan bara inverserna av H11 och H12 fås approximativt eftersom dessa inverser inte är stabila.

8.2.2.4 Approximativ invers

En invers av en överföringsfunktion i kontinuerlig tid kan endast fås approximativt då den har nollställen i höger halvplan. Den approximativa inversen av överföringsfunktionen $G(s) = B(s) / A(s)$ kan bildas enligt följande:

- 1) Dela upp $B(s)$ enligt $B(s) = B^-(s)B^+(s)$ där
 - $B^-(s)$ är polynom med rötter i höger halvplan
 - $B^+(s)$ är polynom med rötter i vänster halvplan
- 2) Då blir, enligt Åström [11], approximativ invers:

$$G^{-1}_{approx}(s) = \frac{A(s)}{B^{plus}(s)B^{minus}(-s)}$$

I diskret tid kan motsvarande uppdelning $B(q) = B^+(q)B^-(q)$ göras. $B^+(q)$ är då ett polynom med rötterna innanför enhetscirkeln och $B^-(q)$ är ett polynom med rötterna utanför enhetscirkeln. Då motsvarar bytet från $B^-(s)$ till $B^-(-s)$ att rötterna hos $B^-(q)$ skall speglas från enhetscirkelns utsida till dess insida. Detta åstadkommes genom att invertera rötterna. Det så erhållna polynomet korrigeras så att statiska förstärkningen är lika stor efter speglingen som före.

Om man väljer att endast använda den statiska förstärkningen av överföringsfunktionerna (37), (38) och (40) blir så klart inverserna automatiskt stabila.

8.2.2.5 Simulering av accelerationsstyrautomat

I simuleringarna har olika grad av komplexitet hos överföringsfunktionerna $H1(q)$ till $H6(q)$ testats. Det finns några återkommande benämningar, vad de avser förklaras nu:

- 1) framkoppling: överföringsfunktion från y_m till u_m (H5 och H6)
- 2) tillståndsframkoppling: överföringsfunktion från y_m till x_m (H1 - H4)
- 3) statisk: överföringsfunktionerna i 1) och 2) implementeras statiskt, dvs som $H(1)$
- 4) dynamisk: överföringsfunktionerna i 1) och 2) implementeras dynamiskt, dvs som $H(q)$
- 5) kors_Q: straffmatriserna $Q0 = Q1$ har element utanför diagonalen som är skilda från noll

Om inget nämns beträffande straffmatriserna Q , så har de följande värden:

$$Q0 = Q1 = \begin{bmatrix} 0,15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad Q2 = \begin{bmatrix} 42 & 0 \\ 0 & 42 \end{bmatrix}$$

För kors_Q ändras $Q0$ och $Q1$ till:

$$Q0 = Q1 = \begin{bmatrix} 0,15 & 0 & -0,01 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -0,5 \\ 0,01 & 0 & 0,15 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Straffen utanför diagonalen gör att vissa av elementen i återkopplingsmatrisen L ändras. Man får följande två L -matriser beroende på val av Q -matriser:

L-matrisen

-0.0484005	0.103892	0.00039192	0.00508069
-0.00039192	0.00508069	-0.0484005	0.103892

L-matrisen beräknad med kors_Q

-0.0480573	0.110332	0.00685511	-0.010295
-0.00685511	0.010295	-0.0480573	0.110332

Man ser i L-matriserna att elementen som återkopplar från tillståndsfel i grannkanalen ökar när kors_Q används vid beräkning av L. Detta gör att gyalkopplingens effekter i vissa lägen kan reduceras.

I Bild (27) -(30) simuleras missilen med återkoppling, inga fel förutom lite brus och bias, enligt tidigare, finns på accelerometern. Acceleration kommanderas i höjd i form en fyrkantsvåg med frekvensen 0.5 Hz och amplituden 40 m/s^2 . Olika val av regulatorer för återkopplingen har testats. Med en styrautomat fås snabba väl dämpade accelerationer samt låg koppling mellan kanalerna, jämför tex med nedersta plotten i Bild (10). Diskussionen nedan hänger samman med Bild (27) -(30).

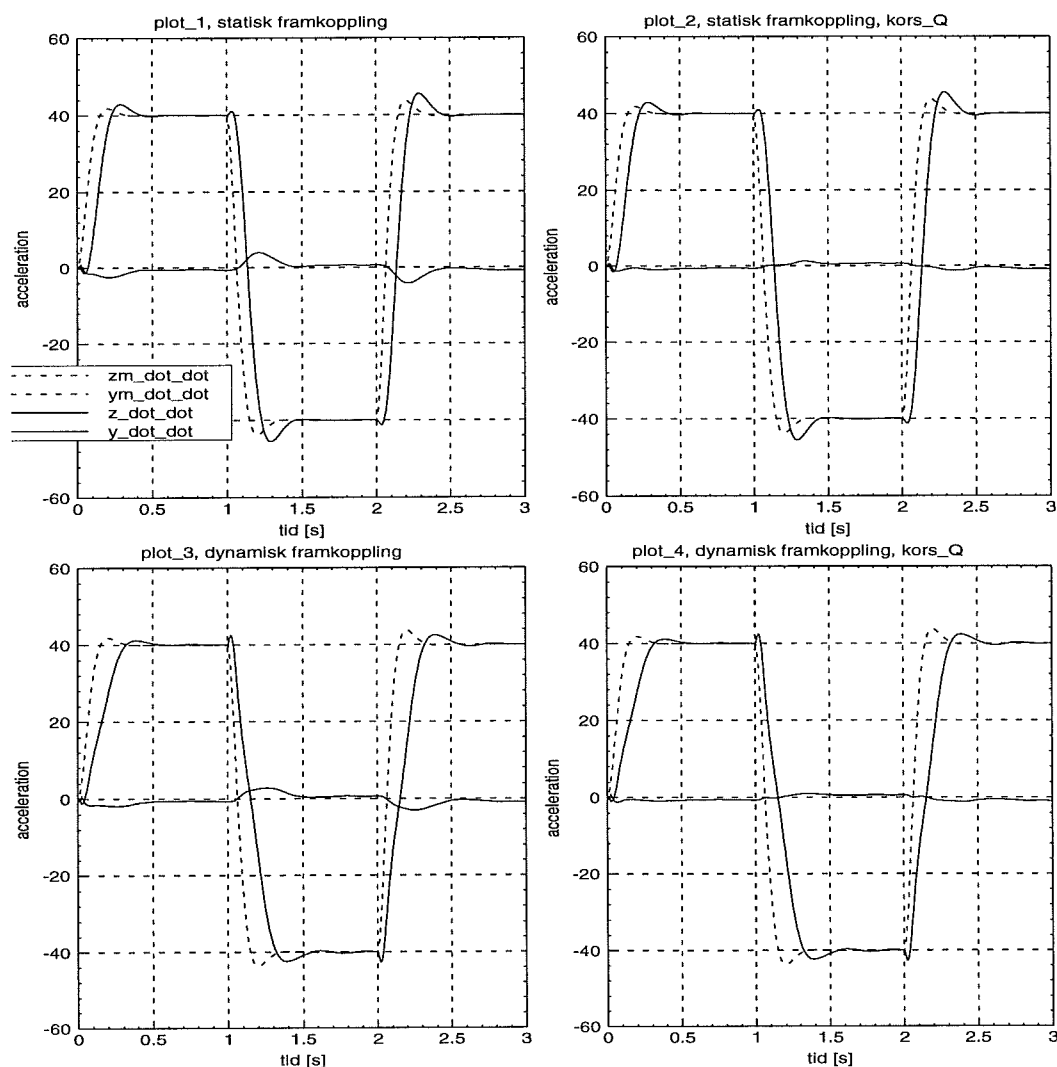


Bild 27: Kommenderad acceleration i tippel. Tillståndsframkopplingen är statisk. I de översta plottarna är framkopplingen av um statisk, i de nedersta plottarna är framkopplingen av um dynamisk. I plottarna till höger har L beräknats med kors_Q.

I Bild (27) är tillståndsframkopplingen statisk. Man ser att statisk framkoppling ger snabba stegsvar med en viss översläng. Dynamisk framkoppling ger lägre översläng men långsammare stegsvar. Om återkopplingsmatrisen L beräknas med kors_Q blir kopplingen till sida klart lägre.

I Bild (28) är tillståndsframkopplingen dynamisk. Man ser att statisk framkoppling i kombination med dynamisk tillståndsframkoppling ger snabbare stegsvar men med en kraftig översläng, jämfört med statisk tillståndsframkoppling. När både framkoppling och tillståndsframkoppling är dynamiska fås det snabbaste stegsvaret, men trots det en relativt låg översläng. Priset är större koppling till sida.

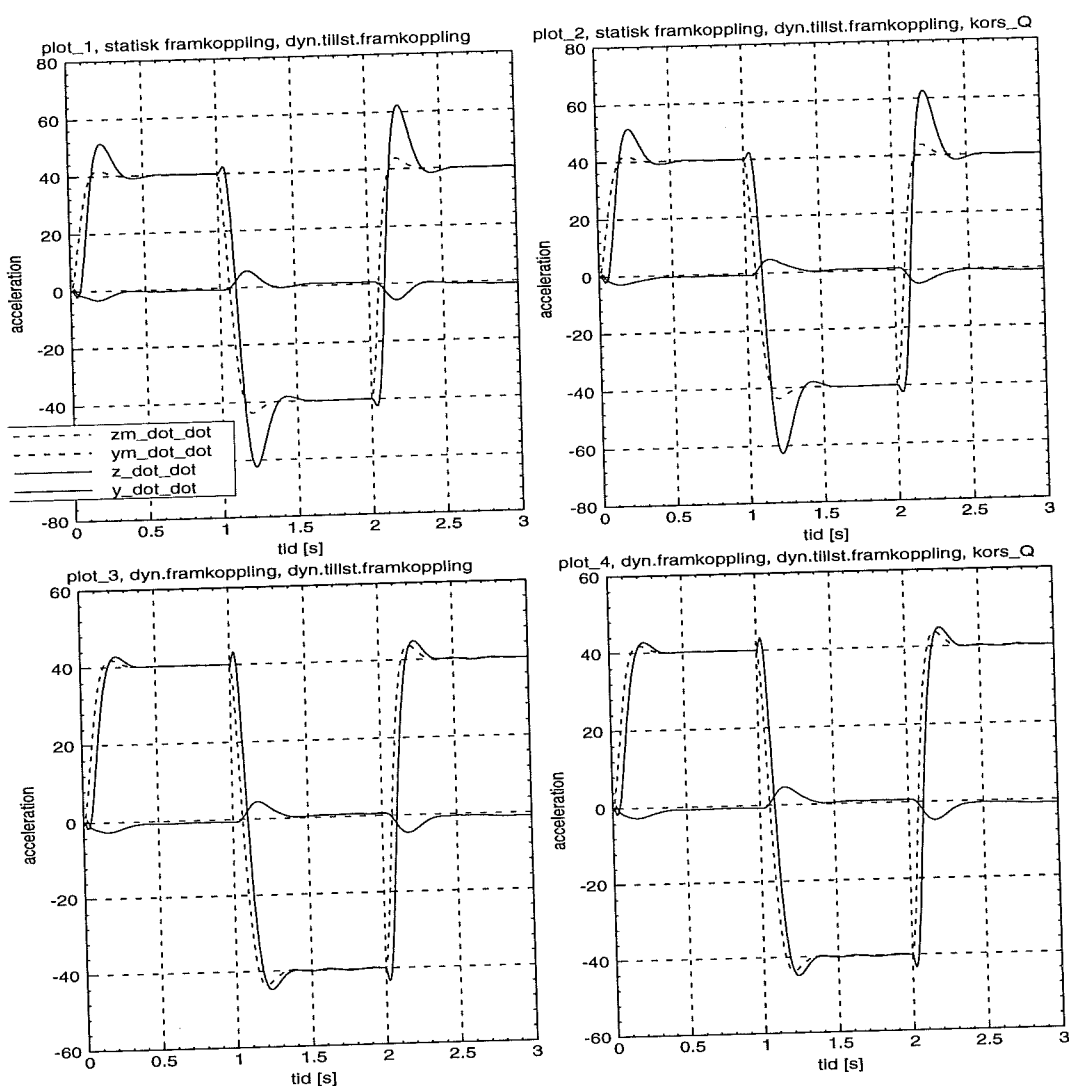


Bild 28: Kommenderad acceleration i tippeld. Tillståndsframkopplingen är dynamisk. I de översta plottarna är framkopplingen av um statisk, i de nedersta plottarna är framkopplingen av um dynamisk. I plottarna till höger har L beräknats med kors_Q.

Med dynamisk tillståndsfrankoppling blir kopplingen till sida klart större och kopplingen reduceras inte märkbart när återkopplingsmatrisen L beräknats med kors_Q. En förklaring till dessa effekter kommer lite längre fram.

För att följa y_m så väl som möjligt, verkar det som frankoppling och tillståndsfrankoppling skall väljas antingen statisk eller dynamiskt, alltså ingen kombination.

I Bild (29) och (30) visas q , q_m , β och β_m från samma simuleringar som (27) respektive (28). q avgör hur mycket som skall kopplas till sida via gyalkoppling och β ger ett ungefärligt mått på hur stor accelerationen i sida blir pga gyalkopplingen (om inga referenssignaler ges i sida).

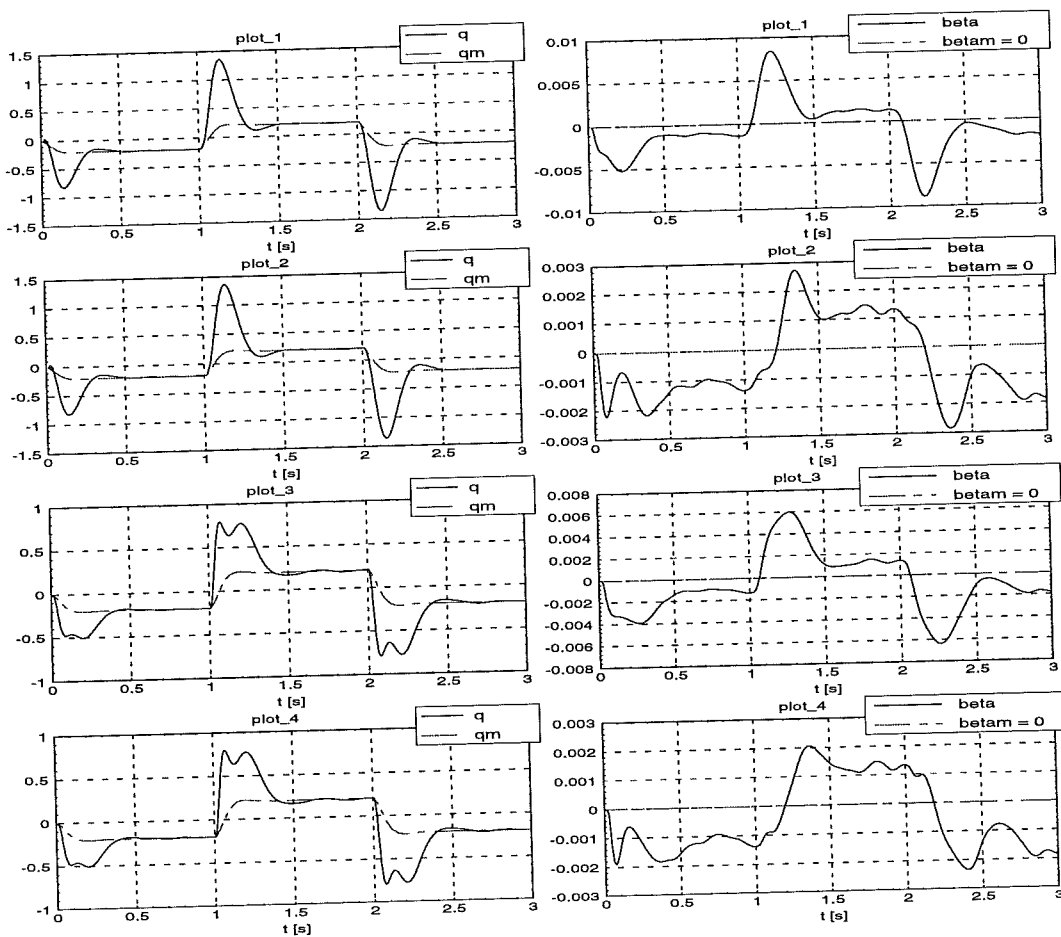


Bild 29: Signaler för q och β när acceleration kommanderas i tippeld. Tillståndsfrankopplingen är statisk. Plottarna motsvarar de i Bild (27).

plot_1: statisk frankoppling

plot_2: statisk frankoppling, kors_Q

plot_3: dynamisk frankoppling

plot_4: dynamisk frankoppling, kors_Q

I Bild (29) där tillståndsframkopplingen är statisk ser man att q_m långsamt glider upp till ett nytt stationärt värde varje gång kommenderad acceleration i höjd ändras. Men q gör ett mycket större initialt utslag för att sedan glida in mot q_m . Det är tack vare skillnaden mellan q och q_m som gyalkopplingens effekter kan reduceras med hjälp av kors_Q. Denna skillnad förstärks av l_{21} och l_{22} , för att därefter ge roderkompensering i sida för att motverka gyalkopplingen. Det syns i plottarna att β blir klart lägre då kors_Q används vid beräkningen av L.

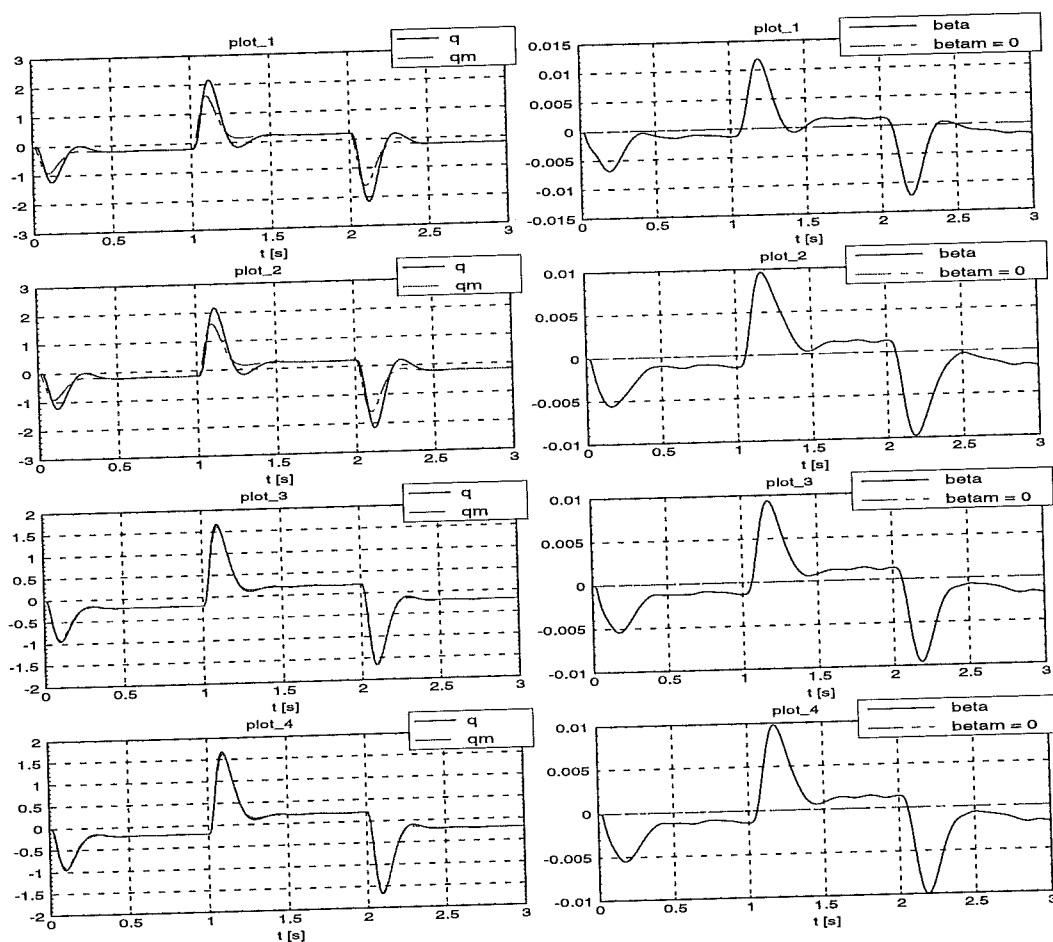


Bild 30: Signaler för q och β när acceleration kommenderas i tipped. Tillståndsframkopplingen är dynamisk. Plottarna motsvarar de i Bild (28).

plot_1: statisk framkoppling

plot_2: statisk framkoppling, kors_Q

plot_3: dynamisk framkoppling

plot_4: dynamisk framkoppling, kors_Q

I Bild (30) där tillståndsframkopplingen är dynamisk ser man att q och q_m blir större dvs gyalkopplingen effekter blir större. Samtidigt minskar skillnaden mellan q och q_m och därmed blir reduceringen av gyalkopplingen effekter, med hjälp av kors_Q, små.

Desto snabbare man vill att missilen skall svara på referenssignaler desto större måste q och r bli, dvs man får större koppling mellan tipp- och girled. Om denna koppling är besvärande kan den reduceras genom att uttrycka ekvationerna (37), (

38) och (40) på sin fullständiga form med överföringsfunktionerna för korskopplingarna.

I Bild (31) visas hur missilen följer kommenderad acceleration när den utsätts för flera olika störningar samtidigt. Detta görs för 2 olika återkopplingsfall samt ingen återkoppling alls. Bilden visar att det inte blir någon större skillnad om framkoppling och tillståndsframkoppling görs statiskt eller dynamiskt. I det dynamiska fallet blir stegsvaret lite snabbare men samtidigt blir korskopplingen märkbar. Utan återkoppling blir stegsvaren verkligen dåliga.

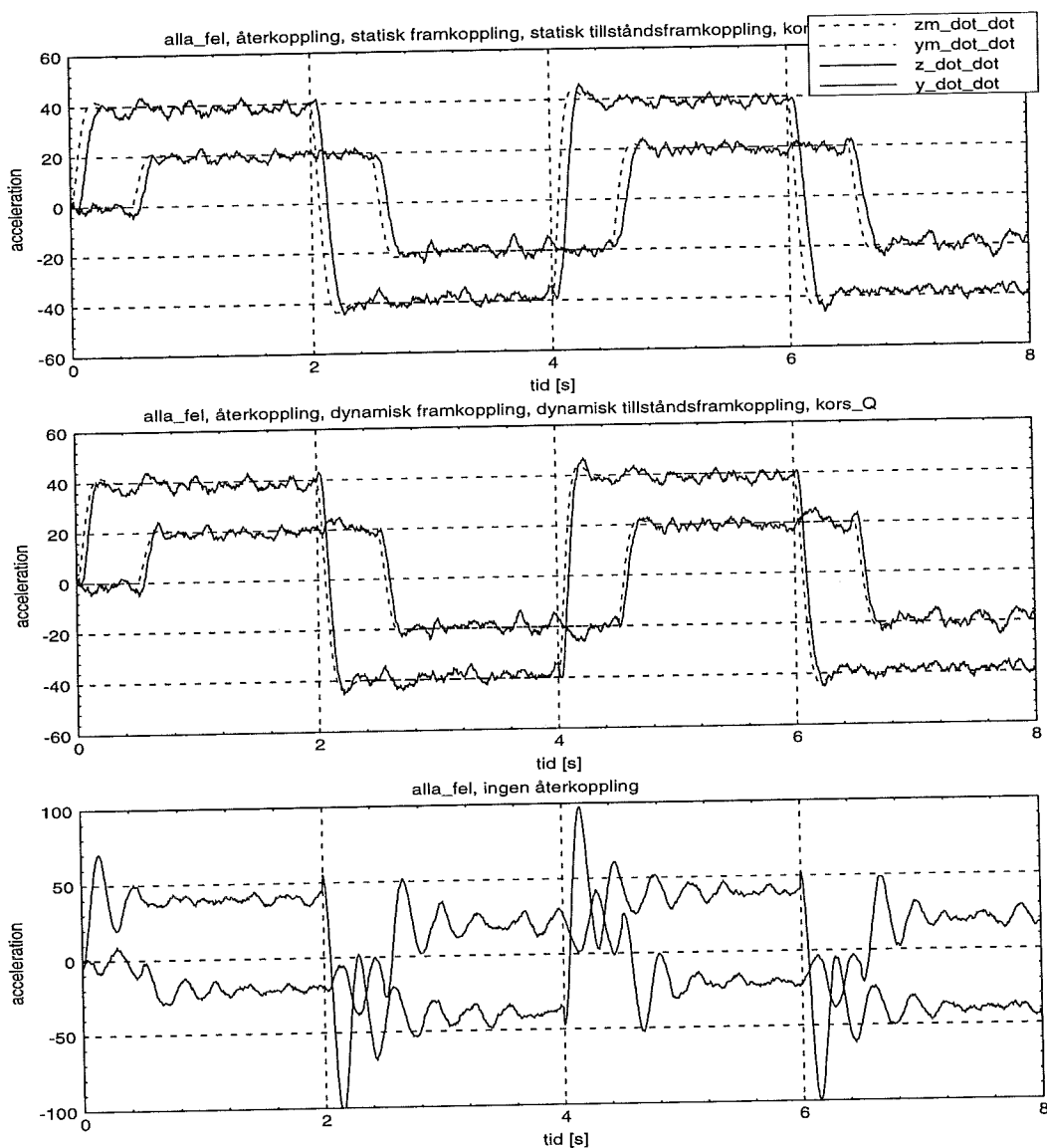


Bild 31: Kommendering av acceleration då störningar verkar på missilen (vind, skevt roder och felplacerade accelerometrar). Kommenderad acceleration i z-led är dubbelt så stor som i y-led. I plotten längst ner har kommenderad acceleration i y-led omvänt tecken för att kurvorna inte skall flyta ihop.

8.3 Sammanfattning av styrautomat

En enkel dämpstyrautomat baserad på återkoppling har introducerats. Återkopplingsförstärkningarna har beräknats med linjärvadratisk metod. Genom att ha med mer än diagonalelementen i straffmatriserna Q_0 och Q_1 har en reducering av gyralkopplingens effekter kunnat erhållas i vissa lägen. Även accelerationsstyrautomat har introducerats. Accelerationsstyrning utan dynamik kan inte erhållas för en missil med stjärtroder, eftersom det återkopplade systemet då får instabila poler. Däremot fungerar accelerationsstyrning med samtidig framkoppling och återkoppling väl, även då systemet är utsatt för störningar. Framkoppling av tillstånd och styr signaler från en filtrerad referenssignal kan göras via rena förstärkningar utan nämnvärda försämringar av prestanda.

9 Resultat

Gyralkopplingen, mellan höjd- och sidkanalerna, som uppkommer pga att missilen rollar har uttryckts i en tillståndsbeskrivning för missilens dynamik. Tillståndsbeskrivningen är uttryckt i ett koordinatsystem som inte rollar med missilen. För en odämpad missil märks gyralkopplingens effekter tydligt.

En metod för att beräkna accelerometermätsignaler, från en accelerometer som är godtyckligt placerad i en missil, har beskrivits. För att estimeras vissa av missilens flygtillstånd ur accelerometermätsignaler har olika kalmanfilter dimensionerats. Denna dimensionering har gjorts för både en och två tvärsmätande accelerometrar som är placerade på missilens symmetriaxel, på godtyckligt avstånd från missilens tyngdpunkt. Kalmanfiltrets möjligheter att estimeras missilens flygtillstånd, med avseende på olika störningar och accelerometrarnas placering, har undersökts.

Resultatet blev:

- 1 eller 2 accelerometrar ger ungefär lika bra estimat, med en svag fördel för 2 accelerometrar.
- Det finns ett intervall långt fram i missilen där accelerometrar inte bör placeras pga kalmanfiltrets försämrade estimeringsförmåga.
- Brus och bias samt felplacerad accelerometer (inom rimliga gränser) påverkar knappt estimatens noggrannhet, om intervallet långt fram undviks för accelerometerplacering.
- Vindfel bör modelleras i kalmanfiltret för riktig estimering av anblåsningsvinklar.

En dämpstyrautomat med accelerationskommendering har beskrivits. Denna styrautomat består av en återkopplingsdel för dämpningen och en framkopplingsdel för accelerationskommenderingen. Återkopplingsförstärkningarna har beräknats med LQ-design. Genom att låta vissa av straffmatrisernas element utanför diagonalen vara skilda från noll kan en reducering av gyralkopplingens effekter erhållas när framkopplingsdelen implementeras som rena förstärkningar. Trots att framkopplingsdelen implementeras som rena förstärkningar fås ett totalt system som endast blir marginellt långsammare än om framkopplingsdelen implementeras med sina fullständiga överföringsfunktioner.

Slutsats:

- Styrlagar för accelerationskommendering kan implementeras på ett mycket enkelt sätt utan någon större begränsning av prestanda.

9.1 Vidare undersökningar

Under arbetets gång har många frågor kommit fram. Dessa kan vara av intresse för vidare undersökningar.

- Hur skall rollvinkeln skattas och hur stora rollvinkelfel klarar kalmanfilter och styrautomat av innan regleringen av missilen havererar?
- Hur kritisk är roderdynamikens snabbhet?
- Vad innebär det att beskriva den rollande missilen dynamik på tillståndsform i ett medrollande koordinatsystem?
- Hur blir det om mätsignalerna kommer från en längsmätande accelerometer som är förskjuten i radiell led?

I denna rapport har rollvinkeln förutsatts vara känd och en styrautomat dimensionerats. I nästa steg kan man anta att det finns en fungerande styrautomat, men man vill dimensionera ett filter som skattar rollvinkeln. I det tredje steget kan man försöka sätta samman styrautomat och filter för skattning av rollvinkeln.

Referenser

- [1] B. Etkin (1972): *Dynamics of atmospheric flight*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- [2] P. Lidström och U. Uhlhorn (1991): *Teknisk Mekanik 2F*. Lund: KF-Sigma.
- [3] K.J. Åström och B. Wittenmark (1990): *Computer-controlled systems, theory and design*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, INC.
- [4] G. F. Franklin, J. D Powell och M. L. Workman (1990): *Digital Control of Dynamic Systems*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- [5] Kursmaterial på Bofors Missiles: *Kurs i ROBOTTEKNIK*. (O. Berger: *Kap. 1 Robotstyrning*.)
- [6] B.E Tullson (1983-05-30): *Tröghetskopplingar vid fritt rollande kropp (Arbetspapper)*. FOA 221, Uppdragsnummer DR07E.
- [7] J. Ängeby (Oct 91): *Structured autoregressive instantaneous phase and frequency estimation* (teknisk rapport). Automatic Control and System Analysis Group. Uppsala University.
- [8] T.E. Harkins (1994): *Assessing the Feasibility of Accelerometer-Only Inertial Measurement Units for Artillery Projectiles*. US Army Research Laboratory: ARL Report Number: ARL-MR-200.
- [9] *Ctrl®-C User's Guide, Volume One*. Version 4.5 1992. Palo Alto: Systems Control Technology, Inc.
- [10] Military Specification: MIL-F-8785C, November 5, 1980.
- [11] Åström (1976): *Reglerteori*. Uppsala: Almqvist & Wiksell.

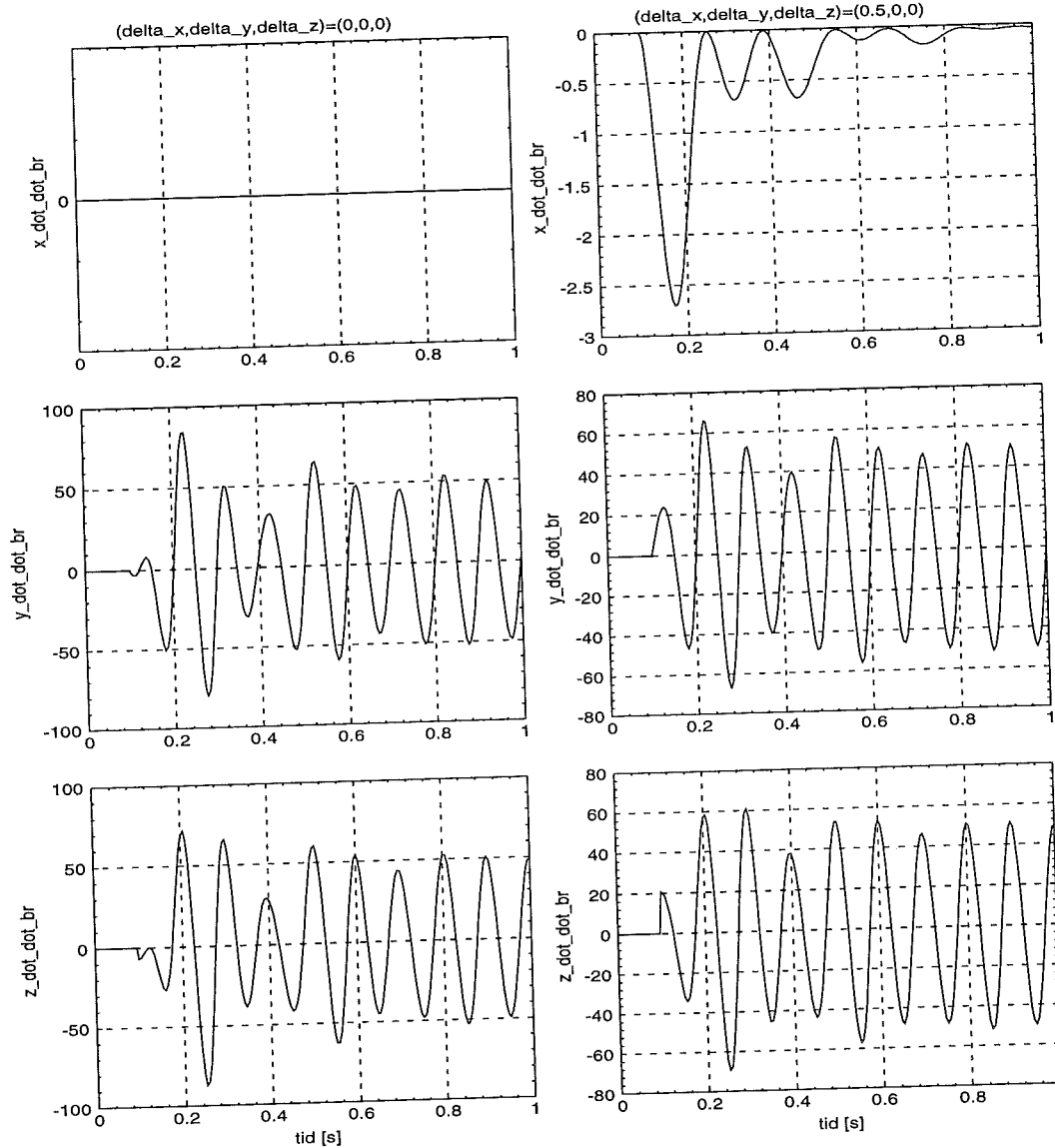
Bilaga A Terminologi samt typvärden för missil i denna rapport

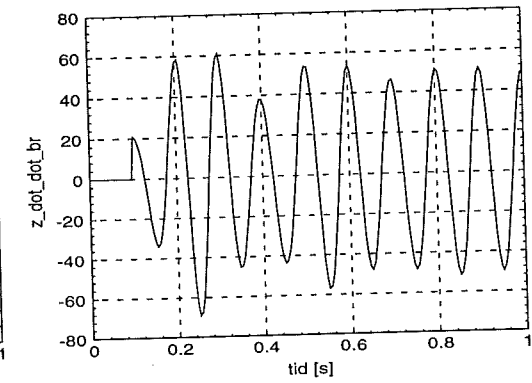
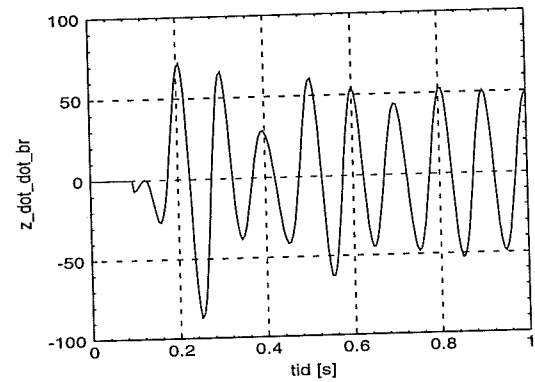
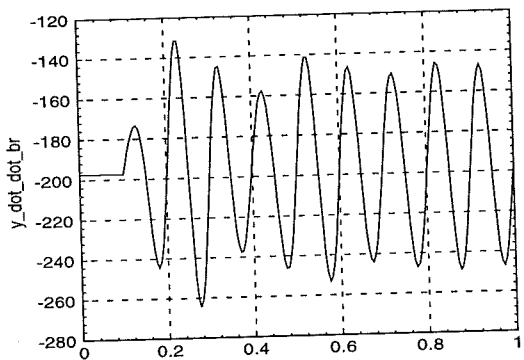
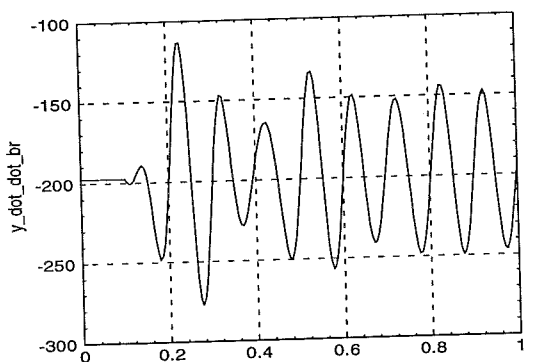
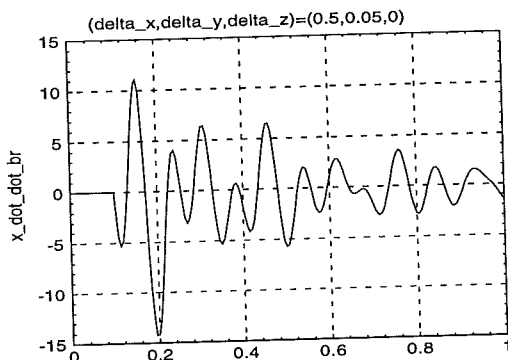
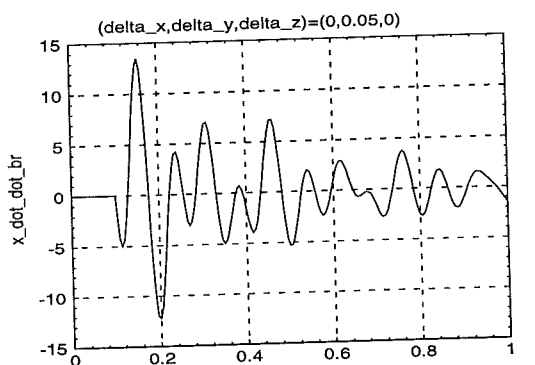
TP	tyngdpunkt
TC	tryckcentrum, punkt där totala luftmotståndet kan tänkas verka
$v = 200\text{m/s}$	farten hos TP, banvinkeln anger riktningen
$a_T = 0$	accelerationen hos TP, riktning längs symmetriaxeln
$I = I_{yy} = I_{zz} = 0.5 \text{ kgm}^2$	tröghetsmoment i tipp- och girled
$I_{xx} = 0.025 \text{ kgm}^2$	tröghetsmoment i roll
$m = 8 \text{ kg}$	massa
$d = 0.12$	referenslängd
S	referensarea: $\pi d^2/4$
$\rho = 1.223 \text{ kgm}^3$	luftdensitet
q	dynamiskt tryck: $\rho v^2/2$
$d_T = 0.5\text{m}$	roderkraftens momentarm kring TP
d_0	aerodynamisk stabilitetsmarginal: $-dC_{m\alpha}/C_{N\alpha}$
α	anblåsningvinkel
β	snedanblåsningvinkel (kallas här bara anblåsningvinkel)
γ	banvinkel i tippled (girled: χ)
$\phi = \text{fi}$	rollvinkel (roll: rotation kring missilens längsgående sym.axel)
$\theta = \text{theta}$	tippvinkel (tipp: rotation i ett vertikalt plan)
$\psi = \text{psi}$	girvinkel (gir: rotation i ett horisontalt plan)
$d\phi/dt = p = 10 \text{ Hz}$	rollvinkelhastighet
$d\theta/dt = q$	tippvinkelhastighet
$d\psi/dt = r$	girvinkelhastighet
$C_{mq} = -150$	tippdämpderivata
$C_{m\alpha} = C_{m\beta} = -7$	tipp-/gir-momentderivata
$C_{N\alpha} = -C_{N\beta} = 14$	normalkraftsderivata
$C_{N\delta} = 2$	rodereffektivitet
$C_T = 0.3$	luftmotstånd
δ_1	roderutslag i tippled, för verkligt roder (elevator)

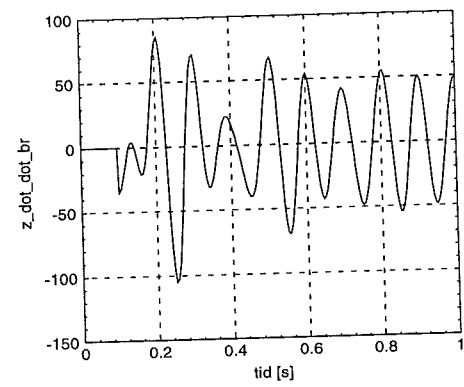
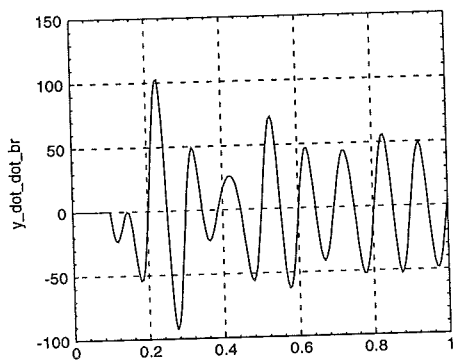
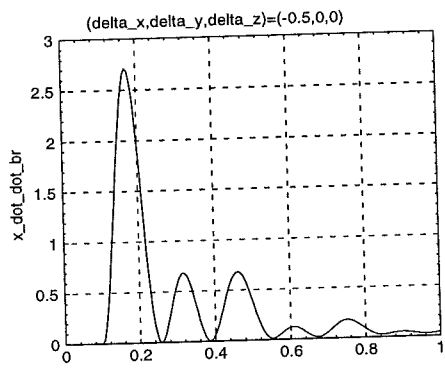
δ_2	roderutslag i girled, för verkligt roder (rudder)
u_{theta}	roderutslag i tipped, för icke medrollande roder
u_{psi}	roderutslag i girled, för icke medrollande roder
\bar{g}	jordens tyngdacceleration

Bilaga B Signaler för olika givarplaceringar och riktningar (3 sid)

På denna och följande två sidor visas utsignalen från en kroppsfast accelerometer i en viss punkt på avståndet $(\delta_x, \delta_y, \delta_z)$ från TP och riktad i x-, y- eller z-led, dvs accelerationer i basen F_{br} . Att signalen i y- och z-led blir sinusformad stationärt beror på att roderutslag givits i form av ett steg.







Bilaga C **Överföringsfunktioner (2 sid)**

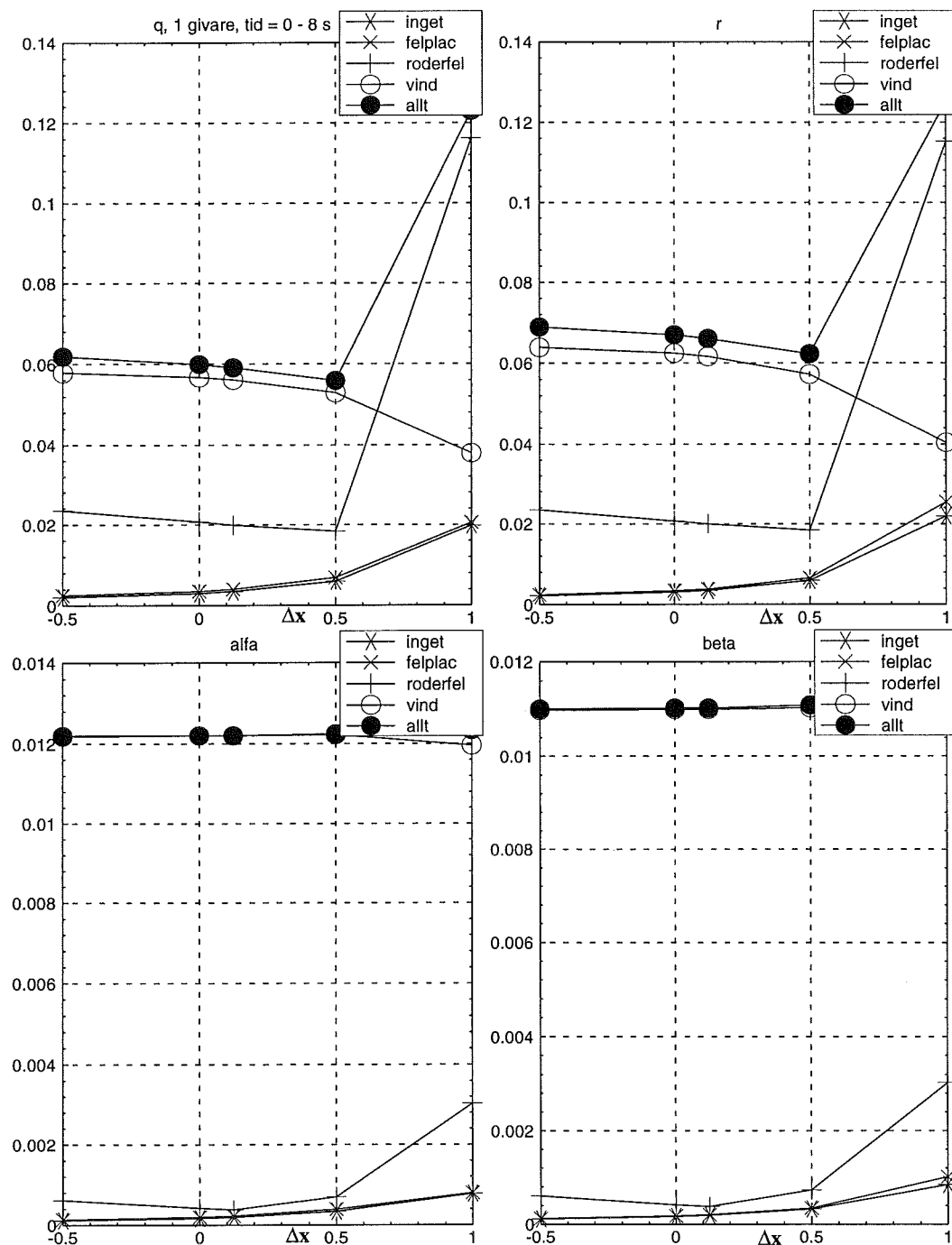
u_{θ}	numc	roots(numc)	numd	roots(numd)
q	-553.272 -4170.75 -267507 -556240	-2.1301 -2.70412 - 21.5562 j -2.70412 + 21.5562 j	-2.7384 8.08126 -7.98028 2.63708	0.980845 + 0.106129 j 0.980845 - 0.106129 j 0.989396
α	-0.345795 -556.175 -3164.43 -261630	-2.7072 - 21.5562 j -2.7072 + 21.5562 j -1602.98	-0.00856236 0.0117004 0.00166301 -0.00495992	-0.595166 0.98083 - 0.106126 j 0.98083 + 0.106126 j
\dot{z}	-69.159 -580.653 201263 1.17557e+06 1.11248e+08	-2.70756 + 21.5837 j -2.70756 - 21.5837 j 56.8337 -59.8145	-69.159 275.466 -406.399 263.277 -63.1169	0.721108 0.980807 + 0.106259 j 0.980807 - 0.106259 j 1.30035
r	-1738.16 -7909.76 -8962	-2.1301 -2.4205	-0.0214594 0.0211969 0.0210156 -0.0207586	0.98797 0.989406 -0.989607
β	-1738.16 -3702.44	-2.1301	-3.57787e-05 -0.000106004 0.000104895 3.46391e-05	-0.265414 0.989406 -3.68676
\dot{y}	-841464 -1.7924e+06	-2.1301	-0.0173209 -0.0513178 0.0507812 0.0167692	-0.265414 0.989406 -3.68676
u_{θ}	denc	roots(denc)	dend	roots(dend)
$\alpha, \dot{z},$ β, \dot{y}	1 10.8165 983.08 5152.94 222823	-2.68351 - 20.0425 j -2.68351 + 20.0425 j -2.72473 - 23.1841 j -2.72473 + 23.1841 j	1 -3.92314 5.7944 -3.81847 0.947354	0.979848 - 0.114096 j 0.979848 + 0.114096 j 0.981722 - 0.0987116 j 0.981722 + 0.0987116 j

u_{ψ}	numc	roots(numc)	numd	roots(numd)
r	-553.272 -4170.75 -267507 -556240	-2.1301 -2.70412 - 21.5562 j -2.70412 + 21.5562 j	-2.7384 8.08126 -7.98028 2.63708	0.980845 + 0.106129 j 0.980845 - 0.106129 j 0.989396
β	-0.345795 -556.175 -3164.43 -261630	-2.7072 - 21.5562 j -2.7072 + 21.5562 j -1602.98	-0.00856236 0.0117004 0.00166301 -0.00495992	-0.595166 0.98083 - 0.106126 j 0.98083 + 0.106126 j
\dot{y}	69.159 580.653 -201263 -1.17557e+06 -1.11248e+08	-2.70756 + 21.5837 j -2.70756 - 21.5837 j 56.8337 -59.8145	69.159 -275.466 406.399 -263.277 63.1169	0.721108 0.980807 + 0.106259 j 0.980807 - 0.106259 j 1.30035
q	1738.16 7909.76 8962	-2.1301 -2.42057	0.0214594 -0.0211969 -0.0210156 0.0207586	0.98797 0.989406 -0.989607
α	1738.16 3702.44	-2.1301	3.57787e-05 0.000106004 -0.000104895 -3.46391e-05	-0.265414 0.989406 -3.68676
\dot{z}	-841464 -1.7924e+06	-2.1301	-0.0173209 -0.0513178 0.0507812 0.0167692	-0.265414 0.989406 -3.68676

I tabellerna ovan finns överföringsfunktioner för roder u_{θ} och u_{ψ} till vissa flygtillstånd. Tabellerna används bla för att hitta statiska förstärkningar. Förklaring av beteckningar: den = nämnarpolynom, num = täljarpolynom, c = kontinuerlig tid, d = diskret tid, roots = polynomens rötter, denc är samma för alla överföringsfunktioner (så även dend), siffrorna i kolumnerna för polynomen anger polynomens koefficienter med högst gradtal överst.

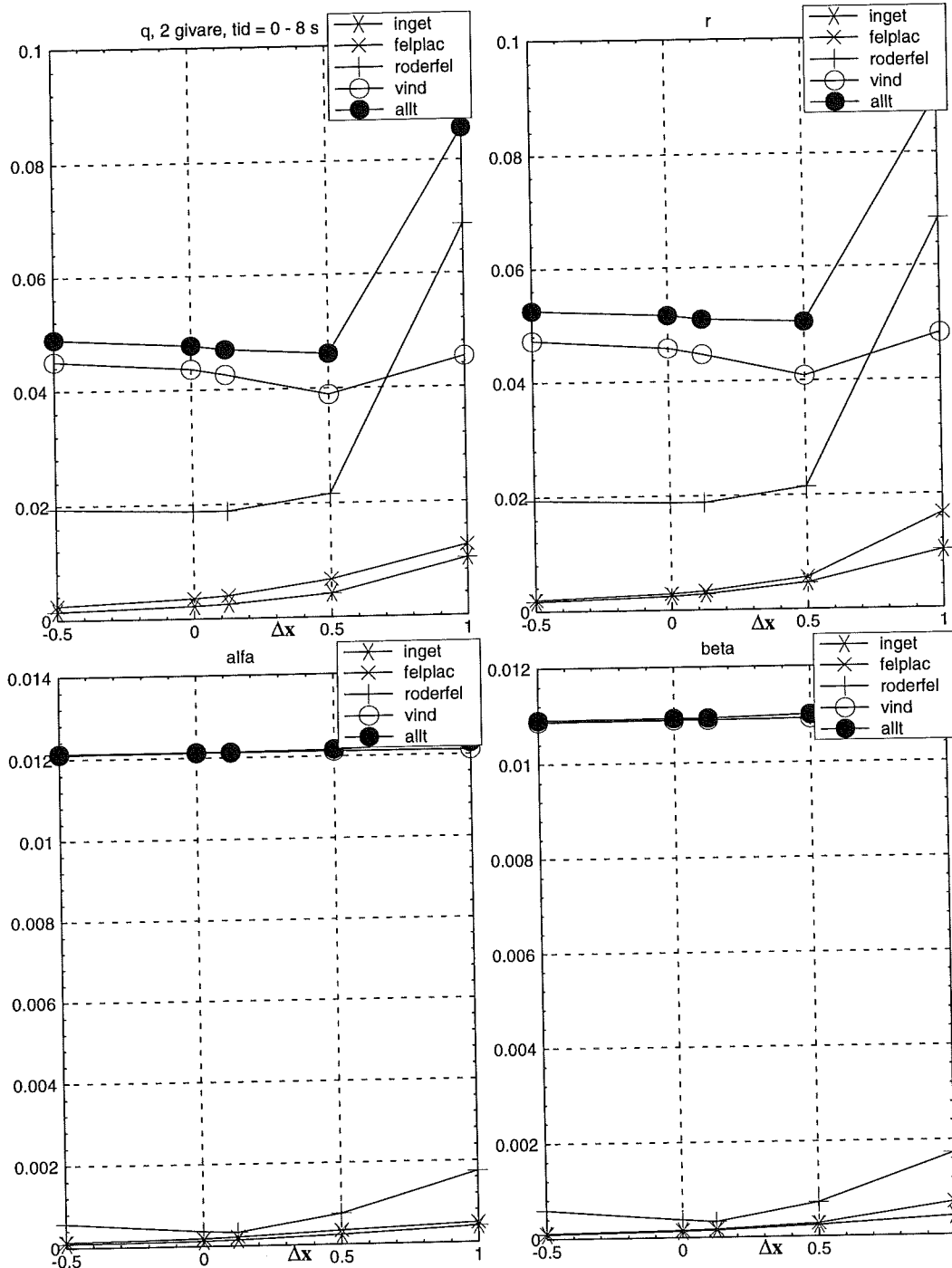
Bilaga D Estimeringsfel och estimeringskillnader (5 sid)

Estimeringsfel 1



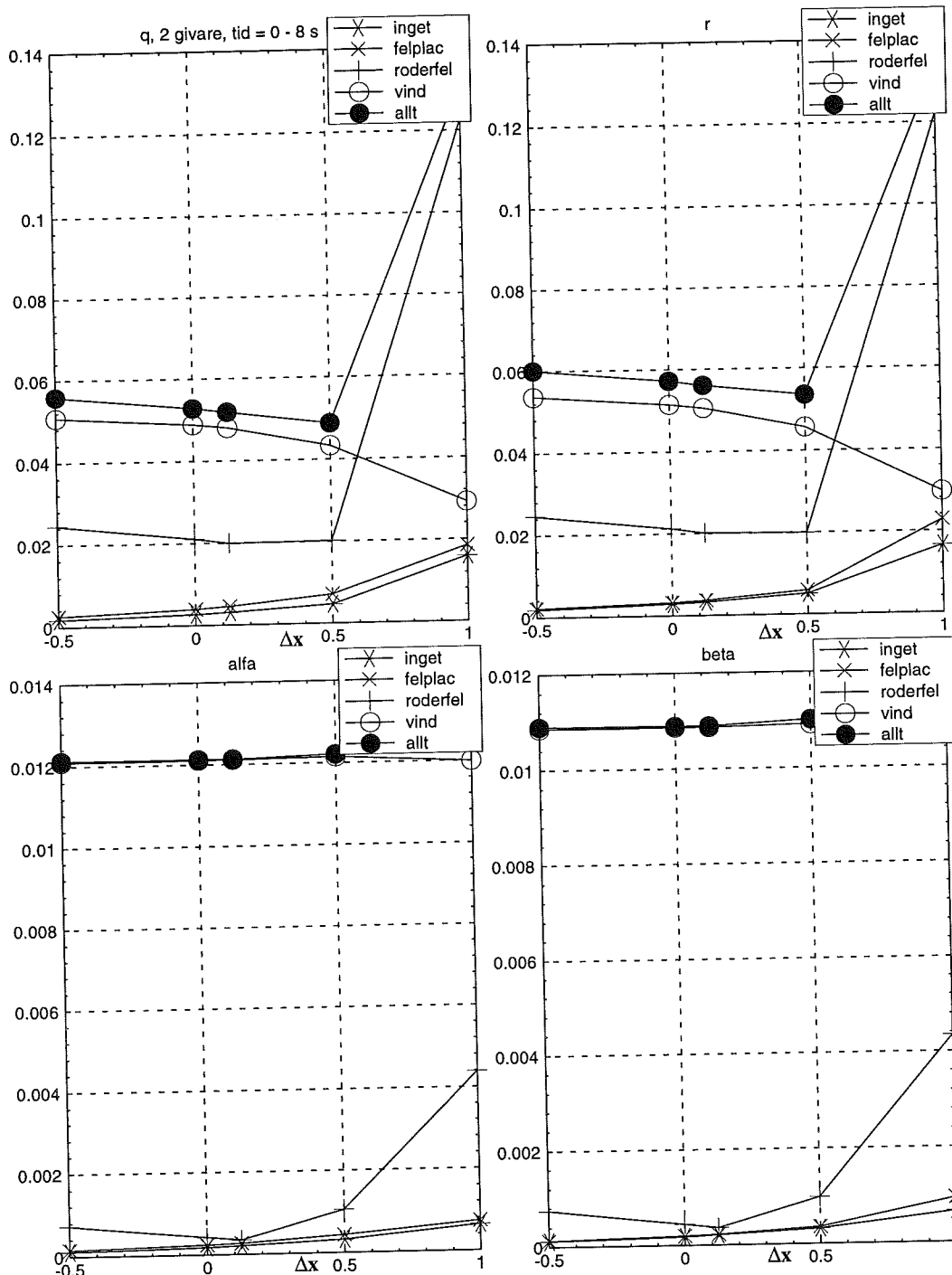
Estimeringsfel för en accelerometer. Observerarpoler enligt tabell I för en accelerometer. $\omega_{01} \approx 33$, $\zeta_1 \approx 0.75$, $\omega_{02} \approx 22$, $\zeta_2 \approx 0.12$

Estimeringsfel 2



Estimeringsfel för två accelerometrar. Observerarpoler enligt tabell I för två accelerometrar. $\omega_{01} \approx \omega_{02} \approx 25 - 27$, $\zeta_1 \approx \zeta_2 \approx 0.4 - 0.7$

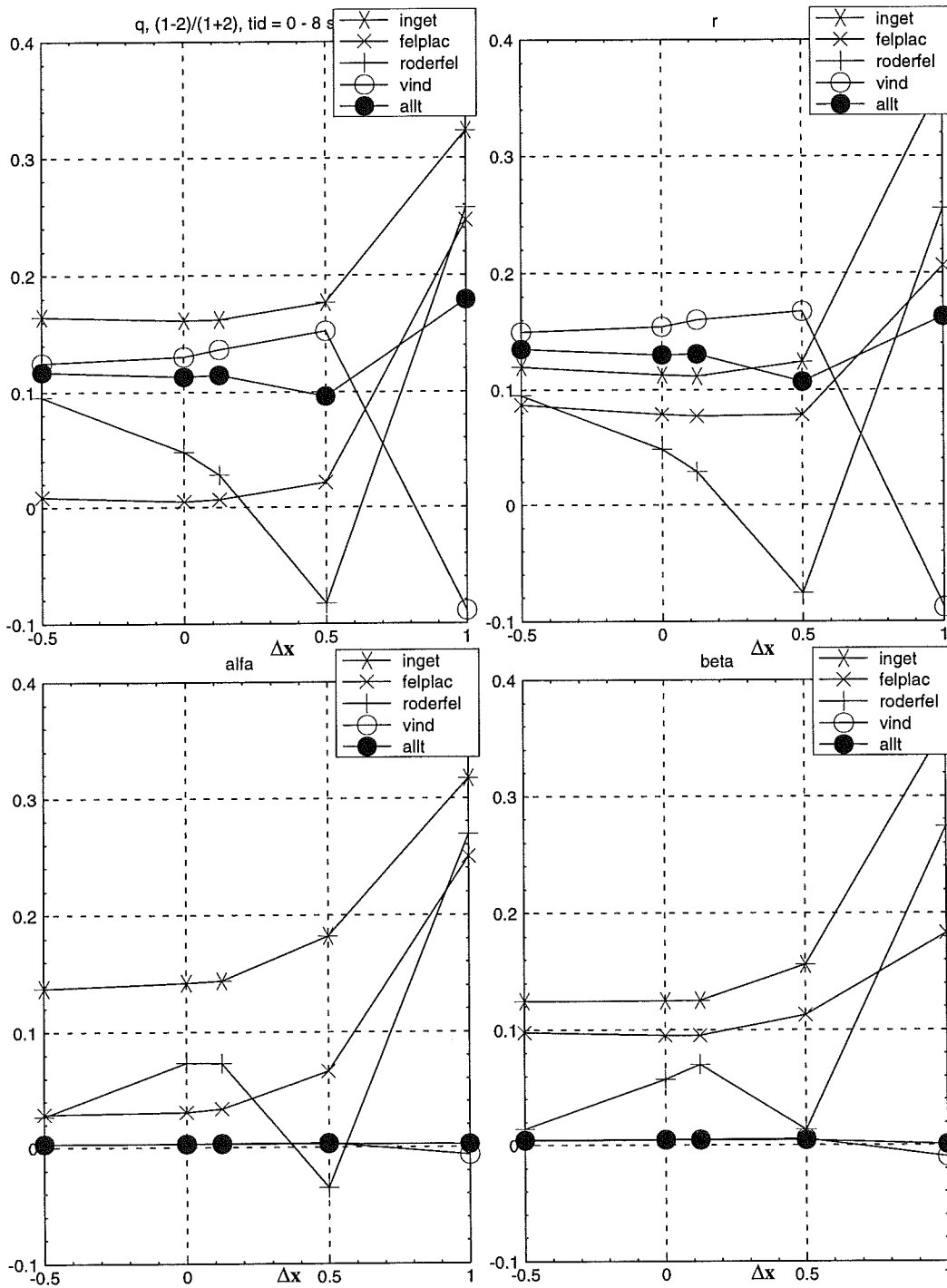
Estimeringsfel 3



Estimeringsfel för två accelerometrar. Alla fyra observerarpolerna är ungefär lika snabba som de två snabbaste för en accelerometer enligt tabell I.

$$\omega_{01} \approx \omega_{02} \approx 33 - 34, \zeta_1 \approx \zeta_2 \approx 0.7 - 0.8$$

Estimeringsskillnad mellan Estimeringsfel 1 och Estimeringsfel 2



Estimeringskillnad mellan Estimeringsfel 1 och Estimeringsfel 3

