

ISSN 0280-5316  
ISRN LUTFD2/TFRT--5504--SE

# Designbegränsning för stabil regulator vid polynomsyntes

Magnus Wiktorsson

Institutionen för Reglerteknik  
Lunds Tekniska Högskola  
Maj 1994

<b>Department of Automatic Control Lund Institute of Technology</b> P.O. Box 118 S-221 00 Lund Sweden		<i>Document name</i> <b>MASTER THESIS</b>	
		<i>Date of issue</i> May 1994	
		<i>Document Number</i> ISRN LUTFD2/TFRT--5504--SE	
<i>Author(s)</i> Magnus Wiktorsson		<i>Supervisor</i> Per-Olof Källén	
		<i>Sponsoring organisation</i>	
<i>Title and subtitle</i> Designbegränsningar för stabil regulator vid polynomsyntes. (Design Limitations for a Stable Controller Using Polynomial Design.)			
<i>Abstract</i> <p>This report considers the design limitations that are obtained when using a stable controller. The design method used is polynomial design for linear continuous time-invariant single-input single-output systems. For systems with a maximum pole-excess of two where all the zeros are canceled a necessary and sufficient condition for controller stability is given. Systems without zeros and first order systems are examined in detail. Conditions for stable controllers are given for first order systems and higher order systems without zeros. The closed-loop poles can be divided into dominant and fast poles. The number of dominant poles in relation to the total number of poles is important for obtaining a stable controller. This relation is examined when the closed-loop poles are made fast.</p>			
<i>Key words</i>			
<i>Classification system and/or index terms (if any)</i>			
<i>Supplementary bibliographical information</i>			
<i>ISSN and key title</i> 0280-5316			<i>ISBN</i>
<i>Language</i> Swedish	<i>Number of pages</i> 31	<i>Recipient's notes</i>	
<i>Security classification</i>			

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Polynomsyntes</b>	<b>3</b>
2.1	Definitioner . . . . .	3
2.2	Gradtalsvillkor på RST-regulatorn . . . . .	4
2.3	Syntes . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Stabilitet hos regulatorn</b>	<b>6</b>
3.1	Allmänt om stabilitet hos regulatorn . . . . .	6
3.2	System av första ordningen . . . . .	9
3.3	System av andra ordningen . . . . .	11
3.4	System av högre ordning . . . . .	15
3.5	Exempel för system med nollställen . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Sammanfattning och kommentarer</b>	<b>20</b>
<b>A</b>	<b>SIMNON-filer</b>	<b>22</b>
<b>B</b>	<b>MATLAB-rutiner</b>	<b>24</b>

# 1 Inledning

Design genom polplacering leder i vissa fall till en instabil regulator. Instabila regulatorer bör av flera skäl, om möjligt, undvikas. Särskild behandling krävs vid in- och ur-koppling av en instabil regulator. Brott i återkopplingsloopen, som tex vid begränsning av styrsignalen, leder åtminstone till temporär instabilitet. Detta leder i sin tur i bästa fall till oönskade transienter i systemet. En icke hävbar temporär instabilitet kan åstadkommas exempelvis vid begränsningar i styrsignalens ändringshastighet. Detta är en effekt av att en instabil regulator ger ett slutet system som endast är villkorligt stabilt.

Ett exempel som visar detta ges av processen  
(För definitioner och beteckningar se stycket definitioner nedan.)

$$G(s) = \frac{s^2 + 2\sqrt{3}s + 4}{(s + 1)^3}$$

då den önskade överföringsfunktionen från referens till utsignal är

$$G_m(s) = \frac{64(s^2 + 2\sqrt{3}s + 4)}{(s + 4)^4}$$

och observerarpolynomet

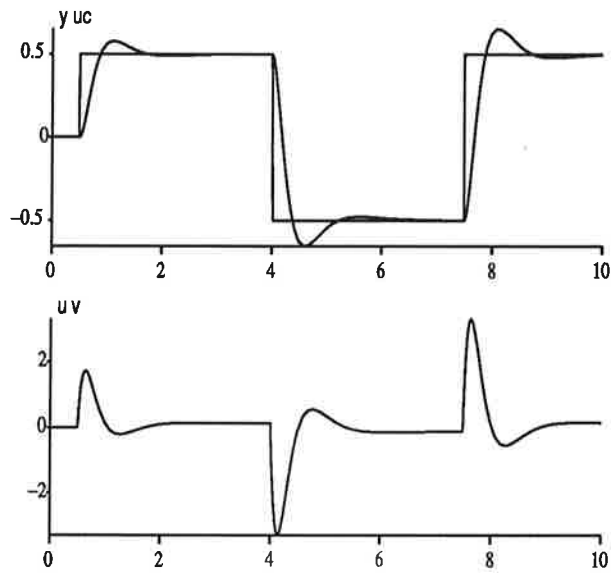
$$A_o(s) = (s + 8)^3$$

Med integralverkan i regulatorn erhålls vid polynomdesign i detta fall en instabil regulator som ges av

$$\begin{aligned}R(s) &= s(s^3 + 37s^2 - 1711.15s - 1284.57) \\S(s) &= 2269.15s^3 + 4589.46s^2 + 1699.2s + 32768 \\T(s) &= 64(s + 8)^3\end{aligned}$$

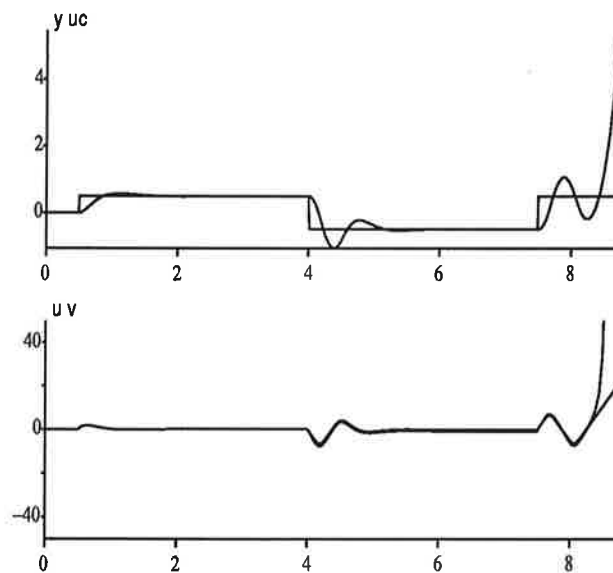
För att undersöka hur den instabila regulatorn beter sig då man begränsar maximal utsignalsderivata simulerades systemet i Simnon. Simnonfilerna finns listade i appendix A.

Utan derivatabegränsning av styrsignalen fås beteendet i figur 1. Överslängen i stegsvaret beror på nollställena i  $G_m$ .



Figur 1: Regulatorbeteende utan derivatabegränsning

Med begränsad ändringshastighet fås istället beteendet i figur 2, där maximala ändringshastigheten är satt till  $\max(\dot{u})=42.015$ .



Figur 2: Regulatorbeteende med derivatabegränsning

I figurerna ovan syns att en instabil regulator kan ge ett icke önskvärt beteende. Det blir därför intressant att undersöka för vilka designkrav som en instabil regulator erhålls. Detta arbetes främsta syfte är att undersöka när detta inträffar, så att man om möjligt kan undvika att erhålla en instabil regulator.

## 2 Polynomsyntes

### 2.1 Definitioner

Antag att processen är ett linjärt och tidsinvariant kontinuerligt system med den rationella överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (1)$$

Regulatorn har två frihetsgrader och ges av:

$$R(s)U(s) = T(s)U_c(s) - S(s)Y(s) \quad (2)$$

Med denna regulator fås det slutna systemet:

$$G_{cl}(s) = \frac{B(s)T(s)}{A(s)R(s) + B(s)S(s)} \quad (3)$$

Låt  $B^+$  innehålla alla nollställen som skall förkortas i regulatordesignen.  $B^+$  kan då alltid väljas monisk, vilket ger:

$$B = B^- B^+ \quad (4)$$

Den önskade överföringsfunktionen från referens till utsignal ges av:

$$G_m = \frac{B_m}{A_m} \quad (5)$$

$B_m$  består av den del av  $B$  som inte fick förkortas samt nya önskade nollställen:

$$B_m = B'_m B^- \quad (6)$$

Det önskade systemet erhålls genom att lösa diofantinen:

$$AR + BS = A_o A_m B^+ \quad (7)$$

Eftersom  $A_o$  ska förkortas i överföringsfunktionen från  $u_c$  till  $y$  fås:

$$T = A_o B'_m \quad (8)$$

Då  $B^+$  är en faktor i högerledet i (7) och även i  $B$  måste  $B^+$  vara en faktor i  $R$ , ty  $A$  och  $B$  antas vara relativt prima:

$$R = R' B^+ s^l \quad (9)$$

där  $l$  är antalet integratorer i regulatorn. Detta ger upphov till en modifierad diofantin:

$$AR' s^l + B^- S = A_o A_m \quad (10)$$

Inför designpolynomet  $D$  för högerledet i (10) dvs:

$$D = A_o A_m \quad (11)$$

## 2.2 Gradtalsvillkor på RST-regulatorn

När man skall lösa diofantinen (10) med  $R$  givet av (9) och  $T$  givet av (8) fås följande villkor på gradtalen hos RST-polynomen.

$$\text{grad } R = \text{grad } A_m + \text{grad } A_o - \text{grad } A + \text{grad } B^+ \quad (12)$$

$$\text{grad } T = \text{grad } A_o + \text{grad } B'_m \quad (13)$$

Villkor för proper regulator, ( $\text{grad } T \leq \text{grad } R$ ) ger:

$$\text{grad } A_o + \text{grad } B'_m \leq \text{grad } A_m + \text{grad } A_o - \text{grad } A + \text{grad } B^+$$

Detta leder till kravet:

$$\text{grad } A_m - \text{grad } B'_m \geq \text{grad } A - \text{grad } B^+ \quad (14)$$

Subtraheras  $\text{grad } B^-$  från båda sidor så fås

$$\text{grad } A_m - \text{grad } B_m \geq \text{grad } A - \text{grad } B$$

Detta är ett villkor på polöverskottet hos  $G_m$

$$d_m \geq d \quad (15)$$

För att ekvationsystemet som erhålls vid lösning av diofantinen skall bli entydigt bestämt måste följande villkor på gradtalen hos  $S$  och  $R'$  vara uppfyllda:

$$\text{grad } R' + \text{grad } S + 1 = \text{grad } A_m + \text{grad } A_o \quad (16)$$

$$\text{grad } R' = \text{grad } A_m + \text{grad } A_o - \text{grad } A - l$$

Således fås:

$$\text{grad } S = \text{grad } A - 1 + l \quad (17)$$

Villkor för en proper regulator, ( $\text{grad } S \leq \text{grad } R$ ), ger:

$$\text{grad } S \leq \text{grad } A_m + \text{grad } A_o - \text{grad } A + \text{grad } B^+ \quad (18)$$

För att få en realiserbar regulator måste ekv. (18) ge ett minst lika högt gradtal som (17), således krävs

$$\text{grad } A - 1 + l \leq \text{grad } A_m + \text{grad } A_o - \text{grad } A + \text{grad } B^+$$

Då erhålls följande villkor på  $\text{grad } A_o$ :

$$\text{grad } A_o \geq 2\text{grad } A - \text{grad } B^+ - \text{grad } A_m + l - 1 \quad (19)$$

## 2.3 Syntes

Om  $\text{grad } A_m = \text{grad } A_o = \text{grad } A = n$  och  $\text{grad } B^+ = 0$  fås:

$$D(s) = s^{2n} + \dots + d_{2n}$$

$$A(s) = s^n + \dots + a_n, \quad B(s) = b_0 s^n + \dots + b_n$$

$$R(s) = s^n + \dots + r_n, \quad S(s) = s_1 s^{n-1} + \dots + s_n$$

Om man sätter in  $A, R, B, S$  och  $D$  i diofantinen (7) fås:

$$(s^n + \dots + a_n)(s^n + \dots + r_n) + (b_0 s^n + \dots + b_n)(s_1 s^{n-1} + \dots + s_n) = (s^{2n} + \dots + d_{2n})$$

Identifiering av koefficienter ger ekvationssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_0 & \dots & 0 \\ \cdot & 1 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_n & \cdot & \dots & \cdot & b_n & \dots & \cdot \\ 0 & a_n & \dots & \cdot & 0 & \dots & \cdot \\ \cdot & 0 & \dots & 0 & \cdot & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & 1 & \cdot & \dots & b_0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_n & 0 & \dots & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ r_n \\ s_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ s_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n - a_n \\ d_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{2n} \end{bmatrix}$$

Sylvester-matris

Om  $B = k$ ,  $l = 1$ ,  $A$  och  $D$  samma som ovan, fås vid insättning i den modifierade diofantinen (10):

$$s(s^n + \dots + a_n)(s^n + \dots + r'_{n-1}) + k(s_0 s^n + \dots + s_n) = (s^{2n} + \dots + d_{2n})$$

Identifiering av koefficienter ger Sylvester-matrisen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & 1 & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_n & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & a_n & \dots & 0 & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & k & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 0 & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_n & 0 & \dots & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ r'_{n-1} \\ s_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ s_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n - a_n \\ d_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{2n} \end{bmatrix}$$

Eftersom Sylvester-matrisen är triangulär kan alla koefficienter i  $R$  successivt lösas ut med hjälp av de  $n-1$  översta raderna, dvs stabiliteten hos regulatorn beror bara på processens poler och de  $n-1$  första koefficienterna i designpolynomet  $D$ .



### 3 Stabilitet hos regulatorn

#### 3.1 Allmänt om stabilitet hos regulatorn

För system med ett polöverskott på högst två där samtliga nollställen förkortas kan en regulator väljas som  $R = s^l(s+r)B^+$ , dvs ett  $R$ -polynom med bara en fri koefficient, och grad  $S = \text{grad } A - 1 + l$ . Insättning i (10) ger lösningen:

$$r = d_1 - a_1$$

Regulatorn blir då stabil om och endast om:

$$r > 0$$

Detta ger kravet:

$$d_1 > a_1$$

Låt  $\bar{r}(A)$  vara tyngdpunkten till polynomet  $A$ :s rötter givet av

$$\bar{r}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Re}(p_i)$$

där  $p_i$  är rötterna till polynomet  $A$  av grad  $n$ .

Eftersom  $d_1 = -n_D \bar{r}(A_m A_o)$  och  $a_1 = -n_A \bar{r}(A)$  fås:

$$\bar{r}(A_m A_o) < \frac{n_A}{n_D} \bar{r}(A)$$

Detta villkor innebär att man i medeltal inte får göra det slutna systemets poler mer än  $n_D/n_A$  gånger långsammare än det öppna systemets. En situation då detta kan inträffa är då man har en eller flera poler som är väsentligt snabbare än alla de andra i processen. Försöker man placera alla poler i det slutna systemet ungefär lika snabba som de långsamma polerna i det öppna systemet kommer man att i medeltal ha bromsat systemet för mycket och erhåller därmed en instabil regulator. En bra regel är därför att lämna snabba och väldämpade processpoler oförändrade i det slutna systemet.

#### System utan nollställen

För system utan nollställen med grad  $A_m = \text{grad } A_o = \text{grad } A = n$  kan en regulator väljas som  $R = s(s^{n-1} + r_1 \dots + r_{n-1})$  och  $S = s_0 s^n + \dots + s_n$ .

Insättning i (10) ger lösningen:

$$\begin{cases} r_1 &= d_1 - a_1 \\ r_k &= d_k - a_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{k-j} r_j \quad 2 \leq k \leq n-1 \\ r_n &= 0 \end{cases} \quad (20)$$

Ur uttrycket för  $r_1$  fås även för detta fall att ett villkor för stabilitet hos regulatorn är att

$$\bar{r}(A_m A_o) < \frac{n_A}{n_D} \bar{r}(A) \quad (21)$$

här är det dock bara ett nödvändigt men ej tillräckligt villkor för att erhålla en stabil regulator. Ur uttrycket för koefficienterna till  $R$  fås även att regulatorns stabilitet endast beror på koefficienterna  $[a_1..a_{n-1}]$  och  $[d_1..d_{n-1}]$ . Det innebär att regulatorns poler blir oberoende av koefficienterna  $[d_n..d_{2n}]$  i designpolynomet  $D$ . För att utreda hur stabiliteten hos regulatorn påverkas då man väljer att snabbt slutet system införs några nya beteckningar.

Antag att  $d_k \in \mathbb{R}$ ,  $k \in [0, n-1]$  är kända koefficienter. Låt

$$D_k(s) = s^k + d_1 s^{k-1} + \dots + d_{k-1} s + d_k$$

Då är uppdelningen

$$D_n(s) = s^{n-k} D_k(s) + \check{D}(s)$$

med grad  $\check{D} < n - k$  väldefinierad. Introducera

$$D_k^\circ = s^k + d_1^\circ s^{k-1} + \dots + d_k^\circ$$

Låt nu  $D^\circ(s) = D_{2n}^\circ(s)$  ange önskad polkonfiguration för det slutna systemet för en given låg bandbredd. Väljes det slutna systemet en faktor  $w$  snabbare men med oförändrad polkonfiguration fås

$$D(s) = w^{2n} D^\circ(s/w) = s^{2n} + d_1 w s^{2n-1} + \dots + d_{2n-1} w^{2n-1} s + d_{2n} w^{2n}$$

dvs

$$d_k = d_k(w) = d_k^\circ w^k$$

Sätter man nu in  $d_k(w)$  i ekvation (20) fås

$$\begin{cases} r_1(w) &= d_1(w) - a_1 \\ r_k(w) &= d_k(w) - a_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{k-j} r_j(w) \quad 2 \leq k \leq n-1 \\ r_n(w) &= 0 \end{cases}$$

Eftersom  $D^\circ(s)$  är stabil gäller att alla  $d_k^\circ > 0$ , dvs alla  $d_k(w) > 0$ .

Bilda kvoterna

$$\frac{r_k(w)}{d_k(w)}, \quad 1 \leq k \leq n$$

Låt  $w \rightarrow \infty$ . Gränsvärdena blir då

$$\begin{cases} \frac{r_1(w)}{d_1(w)} &= 1 - \frac{a_1}{d_1(w)} & \rightarrow 1, w \rightarrow \infty \\ \frac{r_2(w)}{d_2(w)} &= 1 - \frac{a_2}{d_2(w)} - \frac{a_1 r_1(w)}{d_2(w)} & \rightarrow 1, w \rightarrow \infty \\ \frac{r_3(w)}{d_3(w)} &= 1 - \frac{a_3}{d_3(w)} - \frac{a_2 r_1(w)}{d_3(w)} - \frac{a_1 r_2(w)}{d_3(w)} & \rightarrow 1, w \rightarrow \infty \\ \vdots & & \\ \frac{r_{n-1}(w)}{d_{n-1}(w)} &= 1 - \frac{a_{n-1}}{d_{n-1}(w)} - \sum_{j=1}^{n-2} \frac{a_{n-1-j} r_j(w)}{d_{n-1}(w)} & \rightarrow 1, w \rightarrow \infty \\ r_n(w) &= 0 \end{cases}$$

Detta ger att

$$R'(s) \rightarrow D_{n-1}(s), w \rightarrow \infty$$

$D_{n-1}(s)$  har samma polkonfiguration som  $D_{n-1}^o(s)$ , men med en faktor  $w$  större belopp hos polerna. Om  $D_{n-1}^o(s)$  har samtliga rötter i vänster halvplan så har även  $D_{n-1}(s)$  samtliga rötter i vänster halvplan. Alltså beror stabiliteten hos regulatoren då för stora  $w$  endast av vilken polkonfiguration som valts för det slutna systemet och ej av processen som ska regleras, dock kommer processens ordning in eftersom den bestämmer hur många poler som skall placeras i det slutna systemet. Detta innebär att om man kan hitta en polkonfiguration  $D^o(s)$  sådan att polynomet  $D_{n-1}^o(s)$  har samtliga rötter i vänster halvplan så kan det slutna systemet göras obegränsat snabbt utan att regulatoren blir instabil. Nu uppstår naturligt frågan om vilka konfigurationer hos polplaceringen som uppfyller detta villkor. Generellt kan sägas att villkoret blir svårare att uppfylla då ordningen hos processen ökar. En möjlighet att uppfylla villkoret är välja en observerare som är väsentligt snabbare än det önskade svaret från referenssignalen, dvs polerna hos  $A_o$  väljs väsentligt snabbare än de hos  $A_m$ . Om man väljer polerna hos  $A_o$   $k$  gånger snabbare än de hos  $A_m$  kommer  $k$  att behöva ökas för att villkoret skall vara uppfyllt om processordningen ökas. Ju högre ordning på processen desto snabbare måste polerna hos  $A_o$  väljas relativt de hos  $A_m$ . En möjlig tolkning av ovanstående är att då observeraren väljs snabb relativt  $A_m$  närmar man sig tillståndsåterkoppling.

### Uppdelning i snabba respektive dominerande poler

Ett annat sätt att dela upp polerna är i snabba respektive dominerande poler. Låt  $D(s) = D_d(s)D_s(s)$  med  $n_d = \text{grad } D_d$ ,  $n_s = \text{grad } D_s$  där  $D_d$  innehåller de dominerande polerna och  $D_s$  innehåller snabba poler. Intressant att studera är hur det totala antalet poler i det slutna systemet skall delas upp i snabba respektive dominerande poler för att erhålla en stabil regulator då samtliga poler görs snabba. Traditionellt väljes ett fåtal dominerande poler medan resterande poler görs snabba. Låt rötterna till  $D_s$  ligga på lika avstånd  $w_o$  från origo och låt på samma sätt rötterna till  $D_d$  ligga på lika avstånd  $w_m$  från origo. Undersökningar i matlab visar att man för processer av lägre ordning ( $< 8$ ) inte vinner något på att välja  $n_d \neq n_s$ . För högre ordning erhålls däremot att kvoten  $w_o/w_m$  blir minimal då

$$n_d = n + 3$$

$$n_s = n - 3$$

för en process av ordning  $n$  med integrerande regulator. De snabba polerna kan alltså för detta fall väljas att ligga så nära de dominerande polerna som möjligt.

### 3.2 System av första ordningen

För system med nollställe fås

$$A(s) = s + a_1 \quad ; \quad B(s) = k(s + b_1)$$

$$R(s) = s + r_1 \quad ; \quad S(s) = s_1$$

$$A_m(s) = s + a_{m1} \quad ; \quad A_o(s) = s + a_{o1}$$

Om man väljer att inte förkorta nollstället fås ur diofantinen (10):

$$s^2 + (a_1 + r_1 + ks_1)s + a_1r_1 + kb_1s_1 = s^2 + (a_{m1} + a_{o1})s + a_{m1}a_{o1}$$

Identifiering av koefficienterna ger:

$$\begin{cases} r_1 + ks_1 & = a_{m1} + a_{o1} - a_1 \\ a_1r_1 + kb_1s_1 & = a_{m1}a_{o1} \end{cases}$$

Om man löser ut  $r_1$  fås:

$$r_1 = \frac{b_1(a_{m1} + a_{o1}) - a_{m1}a_{o1} - b_1a_1}{b_1 - a_1}$$

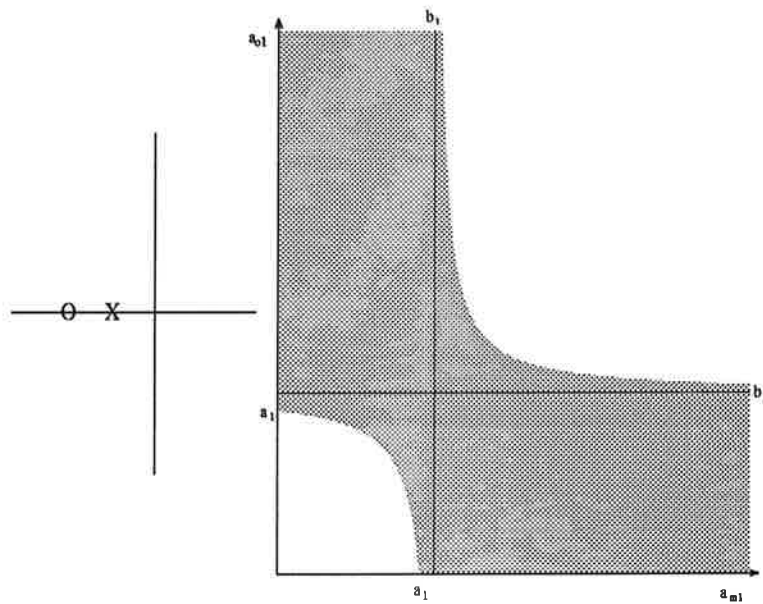
För stabilitet hos regulatorn krävs att  $r_1 > 0$ . Detta ger kravet:

$$\frac{b_1(a_{m1} + a_{o1}) - a_{m1}a_{o1} - b_1a_1}{b_1 - a_1} > 0$$

När man analyserar denna olikhet upptäcker man att det finns fyra principiellt olika fall nämligen:

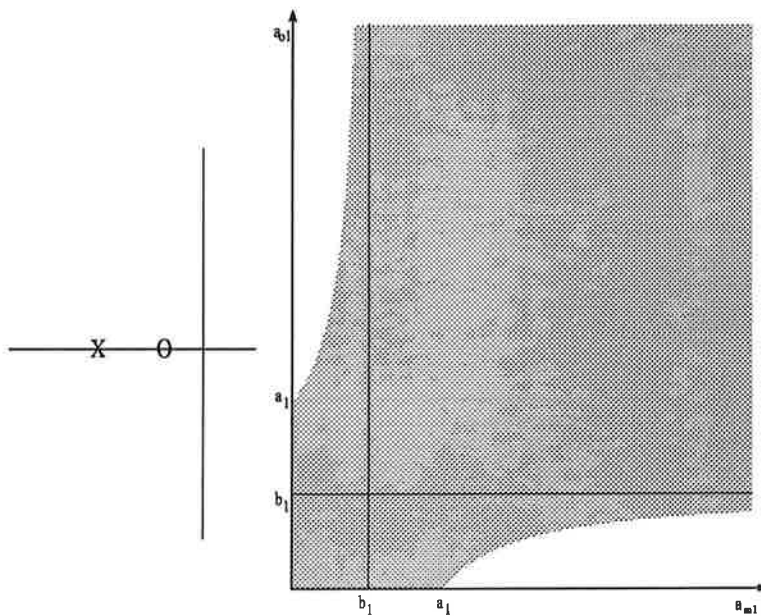
$$\begin{cases} b_1 > 0, \quad b_1 > a_1 & (I) \\ b_1 > 0, \quad b_1 < a_1 & (II) \\ b_1 < 0, \quad b_1 < a_1 & (III) \\ b_1 < 0, \quad b_1 > a_1 & (IV) \end{cases}$$

För samtliga fall gäller att stabilitetsområdena är symmetriska kring linjen  $a_{m1} = a_{o1}$  i  $(a_{m1}, a_{o1})$ -planet. Fall (I) ger ett utseende på stabilitetsområdet i  $(a_{m1}, a_{o1})$ -planet enligt fig (3). Endast en av polerna i det slutna systemet kan väljas snabb medan snabbheten hos den andra begränsas av  $-b_1$ .



Figur 3: Principiellt stabilitetsområde skuggat för fall (I), då  $a_1 > 0$

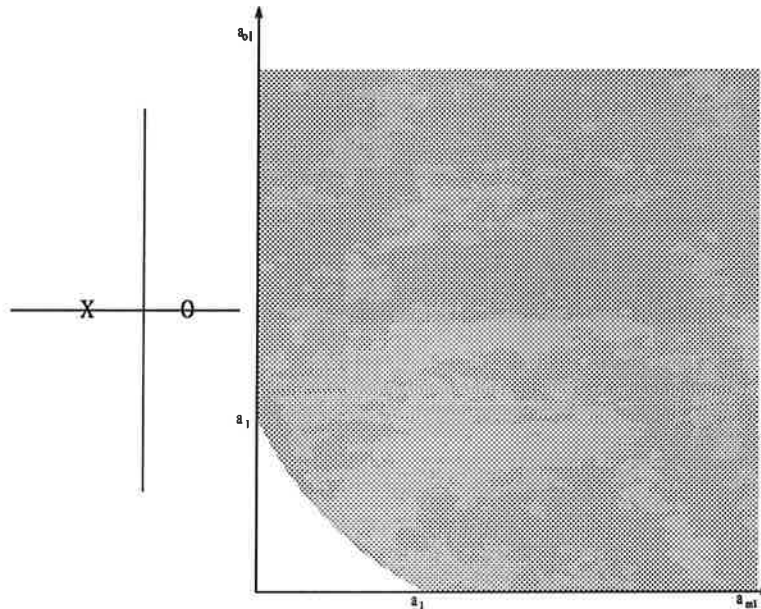
Fall (II) ger ett utseende på stabilitetsområdet i  $(a_{m1}, a_{o1})$ -planet enligt fig (4). Det slutna systemet kan göras godtyckligt snabbt med en stabil regulator. Linjerna  $a_{m1} = a_1$ ,  $a_{o1} = b_1$  respektive  $a_{m1} = b_1$ ,  $a_{o1} = a_1$  ger en approximativ avgränsning av det instabila området.



Figur 4: Principiellt stabilitetsområde skuggat för fall (II)

Fall (III) ger ett utseende på stabilitetsområdet i  $(a_{m1}, a_{o1})$ -planet enligt fig (5).

Figuren är ritad för fallet då  $a_1 > 0$ . Om  $a_1 < 0$  blir regulatorn stabil för alla val av  $a_{m1}$  och  $a_{o1}$ .



Figur 5: Principiellt stabilitetsområde skuggat för fall (III), då  $a_1 > 0$

I figuren ser man att en nedre gräns för hur långsamt det slutna systemet kan göras, med bibehållen regulatorstabilitet, bestäms av  $a_1$ , dvs det slutna systemet kan aldrig göras långsammare än processen med bibehållen stabilitet hos regulatorn.

För fall (IV), en instabil icke-minimum-fas process, blir regulatorn instabil för alla val av polplacering hos det slutna systemet.

Dock bör påpekas att man, tex genom att välja en regulator med integralverkan där  $R(s) = s$  och  $S(s) = s_0s + s_1$  kan erhålla en godtycklig polplacering hos det slutna systemet. Detta beror på att  $R$  nu blir oberoende av polplaceringen hos det slutna systemet. Även konfigurationen  $A_o(s) = 1$ ,  $A_m(s) = s + a_{m1}$ ,  $R(s) = 1$  och  $S(s) = s_0$  leder till att man kan placera polen i det slutna systemet på ett valfritt sätt. Av detta drar man slutsatsen att det är viktigt att välja rätt regulator-konfiguration. Det kan annars hända att man inför begränsningar i designen som ej är nödvändiga.

### 3.3 System av andra ordningen

#### System utan nollställen

För processer av andra ordningen utan nollställen kan ett relativt enkelt analytiskt uttryck erhållas för när polplacering ger en stabil regulator. Om man väljer

det slutna systemet av samma ordning som det öppna (ett ofta naturligt val) och R polynomet väljs av grad två och S polynomet av grad ett erhålles diofantinen:

$$(s^2 + a_1s + a_2)(s^2 + r_1s + r_2) + b_0(s_1s + s_2) = s^4 + d_1s^3 + d_2s^2 + d_3s + d_4$$

Identifiering av koefficienterna ger följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} r_1 & = d_1 - a_1 \\ a_1r_1 + r_2 & = d_2 - a_2 \\ a_2r_1 + a_1r_2 + b_0s_1 & = d_3 \\ a_2r_2 + b_0s_2 & = d_4 \end{cases}$$

$r_1$  och  $r_2$  löses ur de två översta ekvationerna:

$$\begin{cases} r_1 & = d_1 - a_1 \\ r_2 & = d_2 - a_1d_1 + a_1^2 - a_2 \end{cases}$$

Med  $A_m = s^2 + a_{m1}s + a_{m2}$  och  $A_o = s^2 + c_1a_{m1}s + c_2a_{m2}$  ( $c_1 > 0$  och  $c_2 > 0$ ) fås:

$$\begin{cases} d_1 & = a_{m1}(1 + c_1) \\ d_2 & = a_{m1}^2c_1 + a_{m2}(1 + c_2) \end{cases}$$

R-polynomet blir då:

$$\begin{cases} r_1 & = a_{m1}(1 + c_1) - a_1 \\ r_2 & = a_{m1}^2c_1 - a_{m1}a_1(1 + c_1) + a_{m2}(1 + c_2) + a_1^2 - a_2 \end{cases} \quad (22)$$

Regulatorn är stabil om och endast om:

$$\begin{cases} r_1 > 0 \\ r_2 > 0 \end{cases}$$

Sätts villkoren ovan in i (22) fås:

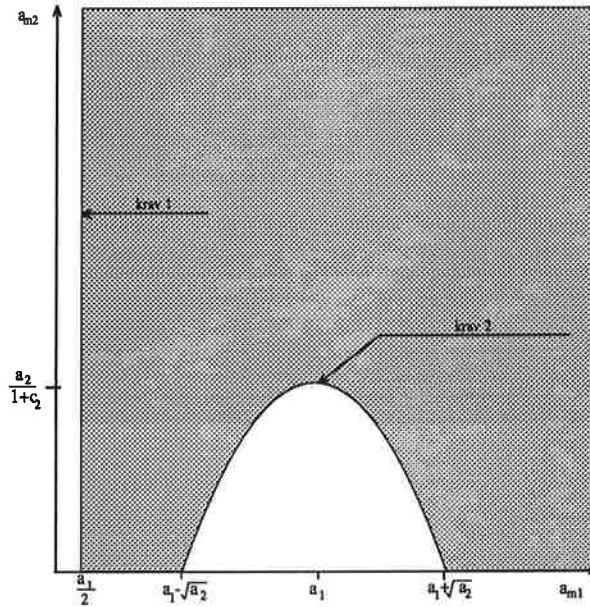
$$\begin{cases} a_{m1}(1 + c_1) - a_1 > 0 & (i) \\ a_{m1}^2c_1 - a_{m1}a_1(1 + c_1) + a_{m2}(1 + c_2) - a_2 + a_1^2 > 0 & (ii) \end{cases}$$

Första villkoret ger att:

$$a_{m1} > \frac{a_1}{1 + c_1}$$

Andra villkoret ger att:

$$\begin{aligned} \left( a_{m1} - \frac{a_1(1 + c_1)}{2c_1} \right)^2 &> \frac{a_1^2(1 + c_1)^2 - 4a_1^2c_1 + 4c_1a_2 - 4a_{m2}c_1(1 + c_2)}{4c_1^2} \\ \left( a_{m1} - \frac{a_1(1 + c_1)}{2c_1} \right)^2 &> \frac{a_1^2(1 - c_1)^2 + 4c_1a_2 - 4a_{m2}c_1(1 + c_2)}{4c_1^2} \end{aligned}$$



Figur 6: Principiellt stabilitetsområde skuggat (med  $c_1 = 1$ )

Om  $c_1 = 1$ , dvs  $a_{o1} = a_{m1}$ , fås följande förenklade uttryck:

$$\begin{cases} a_{m1} > a_1/2 & \text{(från första villkoret, krav från } r_1) \\ (a_{m1} - a_1)^2 > a_2 - a_{m2}(1 + c_2) & \text{(från andra villkoret, krav från } r_2) \end{cases}$$

Detta ger ett utseende på stabilitetsområdet i  $(a_{m1}, a_{m2})$ -planet, enligt figur (6)

Figuren är ritad för  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_1^2 \geq a_2$ .

Om  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_1^2 \leq a_2$  kommer parabeln att skära  $a_{m2}$ -axeln i figuren annars ser det likadant ut. Om  $a_1^2 \geq a_2$ ,  $a_1 < 0$  fås stabilitet i hela positiva  $(a_{m1}, a_{m2})$ -planet. Om  $a_1^2 \leq a_2$ ,  $a_1 < 0$ ,  $a_2 \geq 0$  fås stabilitet i hela  $(a_{m1}, a_{m2})$ -planet utom i området som begränsas av koordinataxlarna och en parabelgren mellan punkterna  $(0, \frac{a_2 - a_1^2}{c_2})$  och  $(a_1 + \sqrt{a_2}, 0)$ .

Om  $c_1 \neq 1$ , dvs  $a_{o1} \neq a_{m1}$ , fås stabilitet för:

$$a_{m1} > \frac{a_1}{1 + c_1}$$

$$\left( a_{m1} - \frac{a_1(1 + c_1)}{2c_1} \right)^2 > \frac{a_1^2(1 - c_1)^2 + 4c_1a_2 - 4a_{m2}(c_2 + 1)c_1}{4c_1^2}$$

Detta ger samma struktur som fallet med  $c_1 = 1$  ty att ändra  $c_1$  flyttar parabeln men det ändrar ej strukturen. Parametern  $c_2$  skalar i höjddled men påverkar inte heller strukturen hos kurvan. Alltså för andra ordningens system utan nollställen finns en begränsning neråt för var man kan placera det slutna systemets poler för att få en stabil regulator. Uppåt finns inga begränsningar ty  $a_{m2}$  är produkten av beloppen av polerna och eftersom  $a_{m2}$  kan väljas hur stor som helst utan



att regulatoren blir instabil så kan det slutna systemets poler väljas godtyckligt snabba.

Om man låter  $A_o$ :s rötter ha samma belopp som  $A$ :s,  $A$  stabil, men med större dämpning kan ett ännu enklare krav för stabilitet hos regulatoren erhållas:

$$A = s^2 + a_1s + a_2, \quad A_m = s^2 + a_{m1} + a_{m2}, \quad A_o = s^2 + \alpha a_1s + a_2 \quad \text{där } \alpha > 1$$

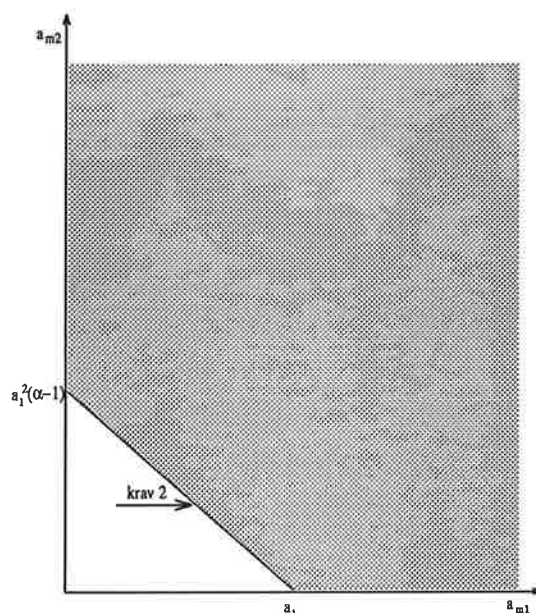
Lösning av diofantinen ger:

$$\begin{cases} r_1 = a_{m1} + a_1(\alpha - 1) \\ r_2 = a_{m2} + a_{m1}a_1(\alpha - 1) - a_1^2(\alpha - 1) \end{cases}$$

Detta ger följande kriterium för stabilitet hos regulatoren:

$$\begin{cases} a_{m1} > a_1(1 - \alpha) & (i) \\ a_{m2} > a_1^2(\alpha - 1) - a_{m1}a_1(\alpha - 1) & (ii) \end{cases}$$

Första kravet är alltid uppfyllt ty  $a_1(1 - \alpha) < 0$  och  $a_{m1}$  alltid väljes alltid positiv. I  $(a_{m1}, a_{m2})$ -planet fås följande utseende på stabilitets-området:



Figur 7: Principiellt stabilitetsområde skuggat

Även för detta val av design saknas begränsning uppåt för val av  $A_m$ s poler. Ju mer  $A_o$  dämpas (ökat  $\alpha$ ) desto större instabilt område erhålles. Det största  $\alpha$  som är meningsfullt att välja är  $\frac{2\sqrt{a_2}}{a_1}$ , dvs det värdet på  $\alpha$  som ger en reell dubbelrot hos  $A_o$ . Detta leder till att det instabila området i praktiken är begränsat uppåt av linjen

$$a_{m2} = a_1(2\sqrt{a_2} - a_1) - a_{m1}(2\sqrt{a_2} - a_1)$$

### 3.4 System av högre ordning

För processer av högre ordning är det svårt att hitta enkla uttryck för vilka designkrav som ger en instabil respektive stabil regulator. Även för de fall då man kan göra det blir det svårt att presentera resultatet, eftersom det är många poler i designpolynommet  $D$  som skall väljas. Om man skall rita upp resultatet behöver man parametrisera polerna, men då blir det normalt svårt att täcka alla fall av polplacering som kan förekomma. Ett sätt att parametrisera polerna för ett polynom av grad  $n$  är:

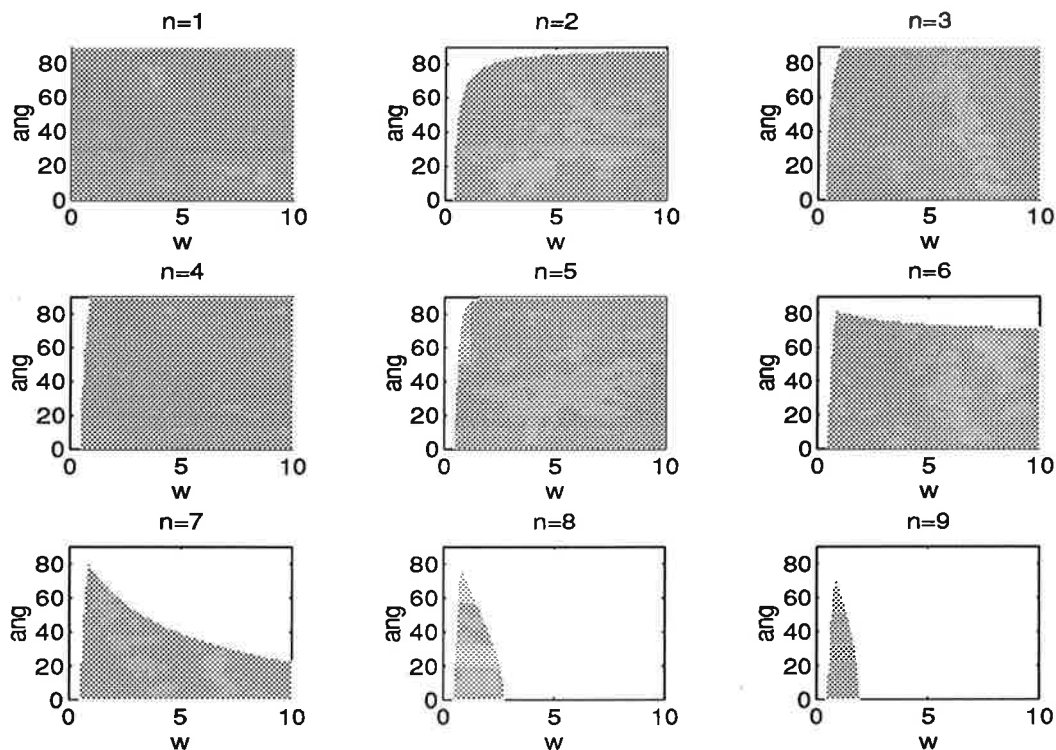
$$p_k = -we^{i\frac{\pi}{180}ang \cdot (2\frac{k-1}{n-1} - 1)} \quad k = 1..n \quad (23)$$

Det innebär att polerna placeras längs en cirkelbåge i vänster halvplan med öppningsvinkeln  $2ang$  (uttryckt i grader), med radie  $w$  och med centrum i origo. Värdet av  $w$  bestämmer snabbheten hos polerna och värdet på  $ang$  svarar mot dämpningen. Genom att variera  $w$  och  $ang$  kan man specificera en mängd olika designkrav för det slutna systemet. Uttrycken för hur stabiliteten hos regulatorn beror av  $ang$  och  $w$  blir i det allmänna fallet väldigt komplicerade då  $n$  blir stort ( $> 5$ ) och man kan inte lösa ut stabilitetsområdet för  $R$  uttryckt i  $w$  och  $ang$ . Vad man däremot kan göra är pröva stabiliteten för ett stort antal värden på  $w$  och  $ang$  och därigenom bilda sig en uppfattning om hur regulatorns stabilitet beror av designkraven. Dessa numeriska undersökningar har gjorts med hjälp av matlab. För detta har ett antal rutiner skrivits. Dessa kommer att beskrivas närmare i appendix B. Stabiliteten hos regulatorn undersöks då för angivna områden på  $w$  och  $ang$ . Studera processen

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^n}$$

för olika ordning  $n$ . Med integralverkan i regulatorn fås  $R = s(s^{n-1} + r_1s^{n-2} + \dots + r_{n-1})$  och grad  $A = \text{grad } A_m = \text{grad } A_o$ , dvs man skall placera 2grad  $A = 2n$  poler hos design polynommet  $D$ . Välj  $A_o$  så att observeraren blir dubbelt så snabb som det önskade slutna systemet, dvs  $A_o(s) = 2^n A_m(s/2)$ . Då man varierar  $n$  från 1 – 9 och för varje värde på  $n$  undersöker vilka designkrav som ger en stabil regulator fås resultatet i Figur 8.

Eftersom processen saknar nollställe kan de uträkningar som gjordes tidigare för en process utan nollställe användas för att tolka bilden. Man ser i bilden att för små  $w$  fås en instabil regulator. Det beror på det nödvändiga kravet för regulator stabilitet som ges av ekvation (21). Dock gäller detta ej för  $n = 1$  ty då  $n = 1$  fås  $R' = 1$  oberoende av vilka designkrav som ställs, (under förutsättning att de gradtal på polynomen som angivits ovan inte ändras, tex genom att lägga till ytterligare observerarpoler). Man ser också att det instabila området blir mindre för  $n = 3$  än det för  $n = 2$ . Det beror också på kravet från ekvation (21), ty med den ovanstående polplaceringen fås då  $n = 2$  fyra komplexkonjugerade poler

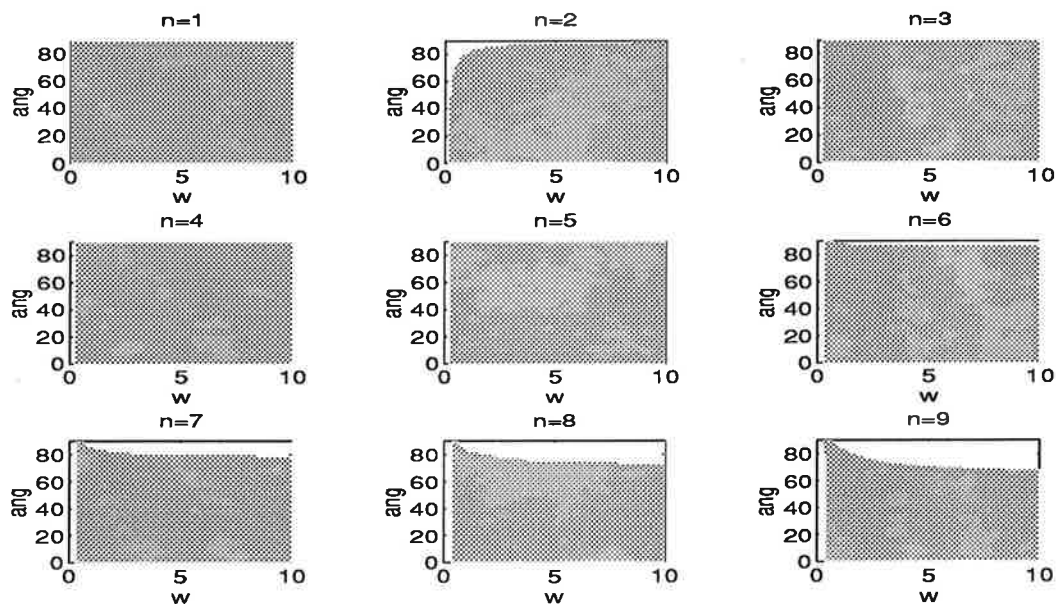


Figur 8: Principiellt stabilitetsområde skuggat för  $n=1..9$

och för stora  $ang$  kommer realdelen på polerna att vara liten, medan för  $n = 3$  fås dessutom två poler i  $-w$  och  $-2w$ . Eftersom ekvation (21) ger ett villkor på förhållandet mellan summan av realdelarna hos processens poler och summan av realdelarna hos designpolynomets poler fås ett större instabilt område för små  $w$  för  $n = 2$  än för  $n = 3$  pga av de två reella polerna då  $n = 3$ .

För större  $n$  erhålls begränsningar uppåt för det stabila området i  $(w, ang)$ -planet. Kravet på en stabil regulator begränsar då hur snabbt det slutna systemet kan göras.

Enligt tidigare räkningar kommer  $R'(s) \rightarrow D_{n-1}(s)$ , då  $w \rightarrow \infty$ , dvs regulatorns stabilitet för stora  $w$  kommer bara att bero på polkonfigurationen hos det slutna systemet. Således har polkonfigurationen valts på olämpligt sätt om man vill erhålla ett snabbt slutet system med en stabil regulator. Man borde istället tex pröva med att låta observeraren bli snabbare relativt  $A_m$ :s poler då processens ordning ökas. Låter man observeraren vara  $3n$  gånger snabbare än  $A_m$ :s poler, där  $n$  är processordningen, fås stabilitets-områdena i Figur 9.



Figur 9: Principiellt stabilitetsområde skuggat för  $n=1..9$

I figuren ser man att man med den föreslagna polkonfigurationen kan göra det slutna systemet godtyckligt snabbt utan att erhålla en instabil regulator.

### 3.5 Exempel för system med nollställen

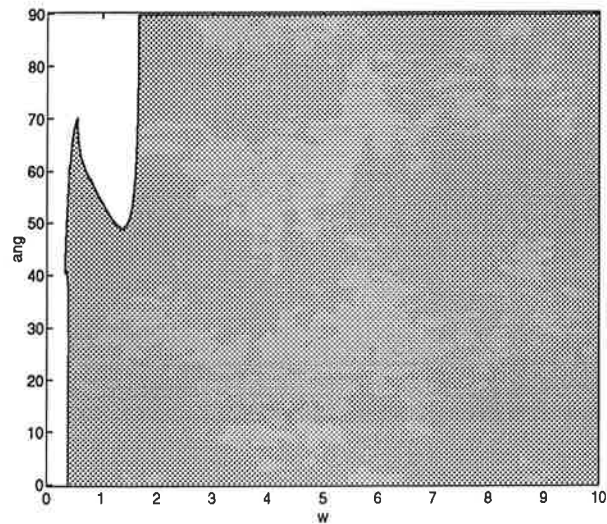
Då man har system med nollställen blir det komplicerat att bestämma de designkrav som ger en stabil regulator. Man hittar relativt enkla system för vilka man erhåller komplicerade områden vilkas struktur är känsliga för ändringar i systemet. Ett exempel som visar detta är följande tredje ordningens system.

$$G(s) = \frac{s^2 + 4 \cos(\theta)s + 4}{(s + 1)(s^2 + \sqrt{2}s + 1)}$$

Även i detta fall används polkonfigurationen som ges av ekvation (23), och observeraren görs dubbelt så snabb som det önskade slutna systemet. Studerar man vilka designkrav som ger en stabil respektive instabil regulator ser man att strukturen på stabilitetsområdet hos regulatorn är starkt beroende av  $\theta$ . När  $\theta = 0$  har vi processen:

$$G(s) = \frac{s^2 + 4s + 4}{(s + 1)(s^2 + \sqrt{2}s + 1)}$$

Då fås stabilitetsområdet i  $(w, ang)$ -planet som visas i Figur 10. I figuren syns att det slutna systemet kan göras snabbt utan att regulatorn blir instabil. För små  $w$  och stora  $ang$  blir regulatorn instabil.

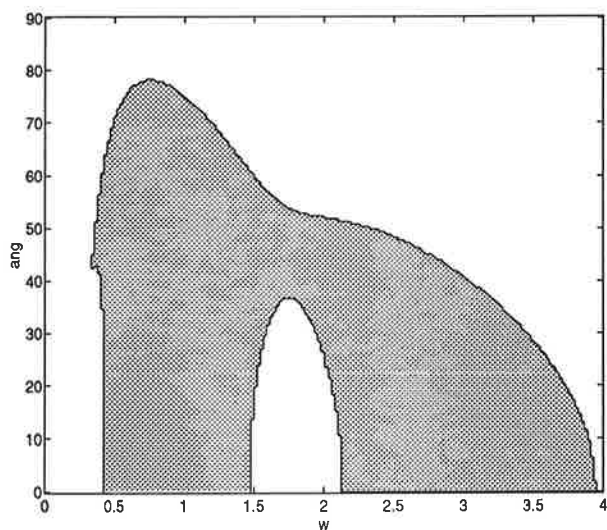


Figur 10: Principiellt stabilitetsområde skuggat

Detta innebär inte någon större begränsning i designen av det slutna systemet, ty små  $w$  och stora  $ang$  innebär ett långsamt och dåligt dämpat slutet system. När  $\theta = 45$  har vi processen:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2\sqrt{2}s + 4}{(s + 1)(s^2 + \sqrt{2}s + 1)}$$

Då fås bilden av stabilitetsområdet i  $(w, ang)$ -planet, som visas i Figur 11.



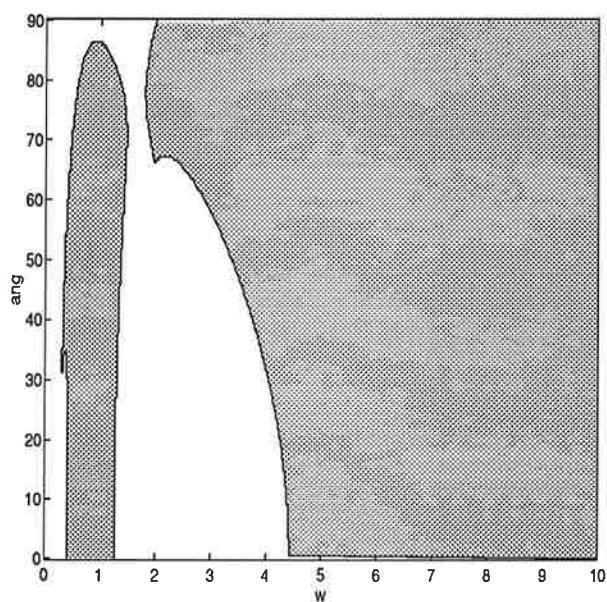
Figur 11: Principiellt stabilitetsområde skuggat

I ovanstående figur syns att regulatorn blir instabil om man väljer att göra det slutna systemet snabbt, dvs då  $w$  väljs stort. Stabilitetsområdet är litet vilket innebär att man har begränsad frihet att välja det slutna systemets beteende om man vill att regulatorn ska vara stabil.

När  $\theta = 70$  har vi processen:

$$G(s) = \frac{s^2 + 4 \cos(70)s + 4}{(s + 1)(s^2 + \sqrt{2}s + 1)}$$

Då fås stabilitetsområdet i  $(w, \text{ang})$ -planet som visas i Figur 12.



Figur 12: Principiellt stabilitetsområde skuggat

För  $\theta = 70$  fås åter fallet att det slutna systemet kan göras godtyckligt snabbt utan att regulatorn blir instabil. Dock finns en begränsning för  $1.25 < w < 4.5$  om man inte vill ha ett dåligt dämpat slutet system.

I figurerna syns att strukturen på stabilitetsområdena är komplicerad. Detta tyder på att det för system med nollställen är det mycket svårare att ge generella regler för vilka designkrav som ger en instabil respektive stabil regulator.

## 4 Sammanfattning och kommentarer

Endast linjära, tidsinvarianta och kontinuerliga processer har behandlats i detta arbete. Främst processer utan nollställe har undersökts. Fallet med stabila processer av godtycklig ordning  $n$  med integrerande regulator har undersökt i detalj. (Resultaten gäller även för en regulator utan integralverkan, men då blir det totala antalet poler som måste placeras i det slutna systemet  $2n - 1$ .)

För dessa har visats att:

- Regulatorns poler beror bara av koefficienterna  $a_1, \dots, a_{n-1}$  hos processen och koefficienterna  $d_1, \dots, d_{n-1}$  hos det önskade slutna systemet.
- Ett nödvändigt men ej tillräckligt villkor för regulatorstabilitet är att summan av realdelarna hos det önskade systemets poler är mindre än  $n_A/n_D$  gånger summan av realdelarna hos processens poler, där  $n_A$  är antalet processpoler och  $n_D$  antalet poler i det slutna systemet.
- Låter man polerna hos det önskade slutna systemet bli godtyckligt snabba blir regulatorns poler oberoende av processen och endast beroende av de  $n - 1$  första koefficienterna i  $D$ .
- Definiera för en given låg bandbredd en polstruktur  $D^\circ(s)$ . Låt sedan  $D$ :s poler bli snabba och väljas som  $D(s) = w^{2n} D^\circ(s/w)$ . Då är det rötterna till det polynom som bildas av de  $n - 1$  första koefficienterna i  $D^\circ(s)$  som avgör om regulatorn blir instabil eller stabil då slutna systemet görs snabbt.
- När man definierar en polstruktur  $D^\circ(s)$  kan man dela upp polerna i  $n_s$  snabba respektive  $n_d$  dominerande poler. Låt det totala antalet poler i  $D^\circ(s)$  vara konstant  $2n$ . För att erhålla godtycklig snabbhet hos det slutna systemet med stabil regulator krävs att de snabba polerna väljs tillräckligt mycket snabbare än de dominerande polerna. Ett minimum fås för högre processordningar, då  $n_d = n + 3$ ,  $n_s = n - 3$ .

För processer med nollställena har bara första ordningens processer behandlats utförligt. Dock kan sägas att det verkar vara mycket svårare att ge generella regler för vilka designkrav som ger en instabil respektive stabil regulator.

Instabila processer och icke minimum-fas processer har bara behandlas i samband med första ordningens processer. För instabila processer och icke-minfas processer gäller att villkoret "parity interlace property" måste vara uppfyllt för att processen skall kunna stabiliseras med en stabil regulator [2]. Parity interlace property innebär att det mellan varje par av reella nollställena i höger halvplan (inkluderat oändligheten om processen är strikt proper) skall finnas ett jämt antal poler. Gradtalet på denna stabila regulator är dock inte alltid begränsat enligt [3]. Om ordningen på en stabiliserande regulator handlar även [4]-[6].

I [7] beskrivs en algoritm för att erhålla en stabil regulator till  $H^2$ -optimeringsproblemet. I [8] visas att det finns linjära strikt instabila system med begränsningar på ingången som inte är globalt stabiliserbara med någon reglermetod. I [9] utreds hur många poler hos en process som kan placeras med en regulator av en given ordning.

## Referenser

- [1] Åström, K. J., Wittenmark, B. (1990), *Computer Controlled Systems*. Englewood Cliffs, N,J: Prentice Hall, Inc.
- [2] Youla, D. C., Bongiorno, J. J., och Lu, C. N. (1974), "Single Loop Feedback Stabilization of Linear Multivariable Dynamical Plants", *Automatica*, **10**, 159-173
- [3] Ohta, Y., Maeda, H., Kodama S. (1991), "Unit Interpolation in  $H_\infty$ : Bounds of Norm and Degree of Interpolants", *Systems & Control Letters*, **17**, 251-256
- [4] Smith, M. C., Sontag, K. P. (1986), "On the Order of Stable Compensators", *Automatica*, **22**, 127-129
- [5] Smith, Malcolm C. (1986), "On Minimal Order Stabilization of Single Loop plants", *Proc. American Control Conference*, 978-979
- [6] Smith, Malcolm C. (1991), "Stabilization by Reduced-Order Controllers", *IEEE Transactions on Automatic Control*, **36**, 120
- [7] Ganesh, C., Pearson, J., B. (1989), " $H^2$ -Optimization with Stable Controllers", *Automatica*, **25**, 629-634
- [8] Ma, C. C. H. (1991), "Unstabilizability of Linear Unstable Systems", *Proc. American Control Conference*, 130-131
- [9] Ahmari, R., Vacroux, A. G. (1973), "On the Pole Assignment in Linear Systems with Fixed Order Compensators", *International Journal of Control*, **17**, 726-729



## A SIMNON-filer

### Processen

```
CONTINUOUS SYSTEM proc
STATE x1 x2 x3
DER dx1 dx2 dx3
INPUT u
OUTPUT y
TIME t
dx1=-3*x1+1*x2+1*u
dx2=-3*x1+1*x3+3.4641*u
dx3=-1*x1+4*u
y=x1
END
```

### Regulatorn

```
CONTINUOUS SYSTEM reg
STATE x1 x2 x3 x4
DER dx1 dx2 dx3 dx4
INPUT y
INPUT uc
OUTPUT dv
TIME t
dx1=-37*x1+1*x2+2269.15*y +64*uc
dx2=1711.15*x1+1*x3+4589.46*y +1536*uc
dx3=1284.57*x1+1*x4+16999.2*y +12288*uc
dx4=0+32768*y +32768*uc
v=x1
dv=dx1
END
```

### Derivatabegränsning

```
CONTINUOUS SYSTEM dsat
STATE x1
DER dx1
INPUT dv
OUTPUT u
TIME t
dx1=if abs(dv)>maxdu then sign(dv)*maxdu else dv
du=dx1
```

```
u=x1
maxdu:42.015920636
END
```

## Sammankoppling av delsystemen

```
CONNECTING SYSTEM conn
TIME t
y[reg]=-y[proc]
uc[reg]=uc
uc=if t<0.5 then 0 else step*(sqw((t-0.5)/per))/2
dv[dsat]=dv[reg]
u[proc]=u[dsat]
step:1
per:7
END
```

## B MATLAB-rutiner

### stabreg.m

```
function [stab,w,ang]=stabreg(B,A,wmin,wmax,angmin,angmax,npoints,argtosyl,polytype,c);
%
% [stab,w,ang]=stabreg(B,A,wmin,wmax,angmin,angmax,npoints,argtosyl,polytype,c)
%
% Calculates the region in the (w,ang)-plane where a stable
% controller is obtained then placing the closedloop-poles
% in Am=ButterWorth(nam,w,ang) and Ao=ButterWorth(nao,2*w,ang)
% npoints is the number points that stability is tested for
% between wmin and wmax and between angmin and angmax
% i. e. stability is tested for values of w and ang on grid with
% the total number of points=npoints*npoints
% The stability region is plotted with 'o' and the region of an
% instable controller is plotted by 'x'
%
% ----- outputs -----
% stab: boolean row vector of controller stability
% w: values of w used in calculations
% ang: values of ang used in calculations
%
% ----- inputs -----
% B: zero polynomial of process
% A: pole polynomial of process
% wmin: minimum value of w
% wmax: maximum value of w
% angmin: minimum value of ang
% angmax: maximum value of ang
% npoints: number of different values of w and ang
% argtosyl: additional arguments for the function sylvester
% is an array containing [1,nbml,mindegAm,mindegAo,ancel]
% polytype: type of poleplacement parametrize
% 1: butterworth
% c: observer poles will c times faster than those in Am
%
% ----- default values -----
% wmin=0; wmax=10; angmin=0; angmax=10; npoints=30; argtosyl=' ';
% polytype=1 ; c=2;
if (nargin<2)
    error('Not enough input arguments')
end
if (nargin<8)
    sylarg=' ';
else
    sylarg=sprintf(',%g',argtosyl);
end
if (nargin <3) wmin=0; end
if (nargin <4) wmax=10; end
if (nargin <5) angmin=0; end
if (nargin <6) angmax=90; end
if (nargin <7) npoints=30; end
if (nargin <3) argtosyl=' '; end % default sylvestermatrix
if (nargin <9) polytype=1; end % polypolybutt
if (nargin <10) c=2; end

if (polytype<4)
    par1='w';
    par2='ang';
else
    par1='pam';
    par2='pao';
end
end
```

```

% ----- calculate grid points -----
dw=(wmax-wmin)/npoints;
dang=(angmax-angmin)/npoints;
w=(wmin:dw:wmax)';
ang=(angmin:dang:angmax)';
[w,ang]=meshdom(w,ang);

% ----- calculate sylvester matrix -----
eval(sprintf('[M,nam,nao,nr]=sylvester(B,A%s);',sylarg));

if (nr==0) % ----- R has no zeros -----
    title('R has no zeros')
    xlabel(par1)
    ylabel(par2)
    return;
end

% -----calculate D-----

if (polytype==1)
    D=polypolybutt(nam,nao,w(:),ang(:),c);
elseif (polytype==2)
    D=calcpoly(nam,nao,w(:),ang(:),c);
elseif (polytype==3)
    D=calcbutt(nam,nao,w(:),ang(:),c);
elseif (polytype==4)
    D=mypoly(nam,nao,w(:),ang(:));
elseif (polytype==5)
    D=calcspecpoly(nam,nao,w(:),ang(:));
else
    D=alphapoly(nam,A,w(:),ang(:),c); % only for second order processes
end

% -----calculate R -----
% global R M RS
RS=D/M';
%RS=RS./(RS(:,1)*ones(1,1+nao+nam));
R=RS(:,1:nr+1);
clear RS G D M; % just to save memory

%----- stability domain -----
stab=mrouth(R);
is=find(stab);
ii=find(~stab);
xs=w(is);
ys=ang(is);
xi=w(ii);
yi=ang(ii);
if (nargout==0)
    plot(xs,ys,'o',xi,yi,'cix')
    title('controller stability (stable o unstable x)')
    xlabel(par1)
    ylabel(par2)
end
end

```

## sylvester.m

```

function [M,nam,nao,nrprim]=sylvester(B,A,l,nbm1,mindegAm,mindegAo,cancel);
% file sylvester.m
%

```

```

% [M,nam,nao,nr]=sylvester(B,A,l,nbmi,mindegAm,mindegAo,cancel);
%
% calculates the minimal sylvester matrix corresponding to B and A
% given that degree Ao >= mindegAo, degree Am >= mindegAm,
% R contains a factor s^-1 and that nbmi closed loop zeros
% is added
%
%----- outputs -----
% M:      sylvester matrix
% nam:    degree of Am
% nao:    degree of Ao
% nrprim: degree of Rprim
%
%----- inputs -----
% B:      zero polynomial of process
% A:      pole polynomial of process
% l:      number of integrators in R
% nbmi:   number of additional closed loop zeros
% mindegAo: minimal degree of observer polynomial Ao
% mindegAm: minimal degree of desired closed loop polynomial Am
% cancel  : if cancel=1 then LHP-zeros in B will be canceled
%
%----- default values -----
% l=0 ; nbmi=0; mindegAo=0; mindegAm=0 ; cancel=1;

if (nargin<2) % we need atleast a process to work with
    error('Not enough input arguments')
end

% ----- set defaults -----
if (nargin<3)
    l=0;
end
if (nargin<4)
    nbmi=0;
end
if (nargin<5)
    mindegAo=0;
end
if (nargin<6)
    mindegAm=0;
end
if (nargin<7)
    cancel=1;
end

% ----- check that B/A is proper -----
if (length(B)>length(A))
    error('B/A is not a proper transferfunction')
end
if ((length(A)<=1)|all(B==0))
    error('B/A is not a process')
end

% ----- if cancelation allowed then split B -----
if (cancel)
    [BPLUS,BMINUS]=splitpoly(B); % split B in LHP- and RHP-zeros
else
    BPLUS=1;
    BMINUS=B;
end

% ----- calculate degrees of A, BMINUS and BPLUS -----
na=length(A)-1;
nbmi=length(BMINUS)-1;

```

```

nbpl=length(BPLUS)-1;

% ----- calculate minimal degrees of Am and Ao -----
nam=na-nbpl+nbml;
nao=2*na-nbpl-nam+1-1;
if (na==nbpl) % to fix degree problems then deg BPLUS=deg A
    if (nam==0)
        nam=nam+1; % if Am=1 then add one pole to Am
    else
        nao=nao+1; % else add one pole to Ao
    end
end
if ((nam+nao)<=(mindegAo+mindegAm))
    nam=mindegAm;
    nao=mindegAo;
end

% ----- calculate degrees of Rprim and S -----
ns=na+1-1;
nrprim=nam+nao-ns-1;
nr=nrprim+nbpl+1;
nt=nao+nbml+nbml;
if ((nr<nt)|(nr<ns))
    error('controller not proper')
end

% ----- calculate sylvester matrix -----
A=[A zeros(1,1)];
BMINUS=[zeros(1,na+1+nrprim-ns-nbml) BMINUS]; % adjust BMINUS
za=zeros(1,nam+nao-na-1);
zb=zeros(1,nam+nao-length(BMINUS)+1);
ma=toeplitz([A za],[A(1) zeros(1,nrprim)]);
mb=toeplitz([BMINUS zb],[BMINUS(1) zeros(1,ns)]);
M=[ma mb];

```

## polystab.m

```

function stab=polystab(p);
% calculates if the zeros of polynomials in each row of the polynomial
% matrix p is in the left halfplane. Routh's algorithm is used to
% determine if the zeros is in the left half-plane.
%
%-----output -----
% stab: boolean row vector 1 (true) if all zeros corresponding to that
%       row polynomial is in the left half-plane
%
n=size(p);
n1=n(1);
n2=n(2);
if (n2==1) % just one row in p use ordinary routh
    stab=ones(n1,1);
    return
end
if (n1==1)
    p=p/p(1);
    a=[p(1:2:n2)]; na=length(a);
    b=[p(2:2:n2)]; nb=length(b);
    b=[b zeros(1,na-nb)];
    if (b(1)>0)
        for k=1:n2-2
            if (b(1)>0)
                c=[a(2:na)-a(1)/b(1)*b(2:na) 0];
                a=b;
                b=c;
            end
        end
    end
end

```

```

else
    stab=0;
    return;
end
end
end
stab=(b(1)>0);
else % more than one row in p use special vector routh
    si=1:n1;
    I=ones(1,n2);
    p=p./(p(:,1)*I);
    a=[p(:,1:2:n2)];
    na=size(a); na=na(2);
    b=[p(:,2:2:n2)];
    nb=size(b); nb=nb(2);
    b=[b zeros(n1,na-nb)];
    I2=ones(1,na-1);
    stab=zeros(n1,1);
    for k=1:n2-2
        m=find(b(:,1)>0);
        if (length(m)>0)
            si=si(m)';
            c=[a(m,2:na)-(a(m,1)./b(m,1))*I2.*b(m,2:na) zeros(length(m),1)];
            a=b(m,:);
            b=c;
        end
    end
    m=find(b(:,1)>0);
    si=si(m)';
    stab(si)=ones(length(si),1);
end
end

```

## polypoly.m

```

function P=polypoly(R)
% function P=polypoly(R)
%
% calculates the coefficients in polynomial matrix p
% corresponding to the roots in R
% each row in R is treated like a vector of roots
% polypoly is the invers of polyroots
n=size(R);
nr=n(1);
nc=n(2);
P=[ones(nr,1) zeros(nr,nc)];
for j=1:nc
    P(:,2:(j+1)) = P(:,2:(j+1)) - (R(:,j)*ones(1,j)).*P(:,1:j);
end
if (imag(sum(sum(R)))==0)
    P=real(P);
end
end
end

```

## polypolybutt.m

```

function a=polypolybutt(nam,nao,w,ang,c);
% function a=polypolybutt(nam,nao,w,ang,c);
%
% Calculates a polynomialmatrix where each row is a polynomial
% corresponding to the values of w and ang of that row
% the nam+nao zeros of the polynomial are placed according to
%  $Z_k = -w \exp(i \pi / 180 \cdot \text{ang} \cdot (2 \cdot (k-1) / (n-1) - 1))$   $k=1..nam$ 

```

```

% Zj= -c*w*exp(i*pi/180*ang*(2*(j-1)/(n-1)-1) j=1..nao
% i. e. the zeros are placed in the left halfplane on two circlesegments
% one with radius w and one with radius c*w the openingangle of the
% circlesegments is 2*ang
%
% ----- outputs -----
% a: the polynomialmatrix described above
%
% ----- inputs -----
% nam: number of zeros in Am (for desired closedloop poles)
% nao: number of zeros in Ao (for desired observer poles)
% w: for each row in w the radius of of the zeros
% ang: for each row in ang the (opening angle)/2 for the circlesegment
% on wich the zeros arte placed
% c: the zeros in Ao will be c times larger than those in Am
%
% ----- default values -----
% c=2
if (nargin<4)
    error('Not enough input arguments')
end
if (nargin<5)
    c=2;
end
% ----- Am -----
if (nam==1)
    pm=[-w];
else
    nw=length(w);
    Ik=ones(nw,1);
    Iw=ones(1,nam);
    k=0:(nam-1);
    pm=-w*Iw.*exp(i*(ang*Iw).*(Ik*(2*k/(nam-1)-Iw))*pi/180);
    %pm=-w*Iw.*exp(i*Ik*(-ang:(2*ang/(nam-1)):ang)*pi/180);
end
if (nao>0)
%----- Ao -----
if (nao==1)
    po=[-w];
else
    nw=length(w);
    Ik=ones(nw,1);
    Iw=ones(1,nao);
    k=0:(nao-1);
    po=-w*Iw.*exp(i*(ang*Iw).*(Ik*(2*k/(nao-1)-Iw))*pi/180);
    %po=-w*Iw.*exp(i*Ik*(-ang:(2*ang/(nao-1)):ang)*pi/180);
end
a=real(polypoly([pm c*po]));
else
a=real(polypoly([pm]));
end

```