

ISSN 0280-5316
ISRN LUTFD2/TFRT-5511--SE

Etude Comparative des Performances et Propriétés de la Commande L/A

Mats Åkesson

Department of Automatic Control
Lund Institute of Technology
July 1994

Department of Automatic Control Lund Institute of Technology P.O. Box 118 S-221 00 Lund Sweden	<i>Document name</i> MASTER THESIS	
	<i>Date of issue</i> July 1994	
	<i>Document Number</i> ISRN LUTFD2/TFRT--5511--SE	
<i>Author(s)</i> Mats Åkesson	<i>Supervisor</i> A. Chéruey, E. Ferret and P. Hagander	
	<i>Sponsoring organisation</i>	
<i>Title and subtitle</i> Etude Comparative des Performances et Propriétés de la Commande L/A. (Comparative Study of Performance and Properties of L/A Control.)		
<i>Abstract</i> <p>The purpose of this study is to examine the properties of L/A control. This nonlinear control approach releases the positivity constraints of process variables through exponential and logarithmic transformations and is therefore interesting in bioprocess applications where such constraints are present. An L/A controller based on a PI controller is simulated on a fedbatch bioprocess and the results are compared with those of a conventional PI controller. The performances of L/A control laws are further investigated using the notion of control surfaces, obtained by plotting the derivative of the controller output against the control error and its derivative.</p>		
<i>Key words</i>		
<i>Classification system and/or index terms (if any)</i>		
<i>Supplementary bibliographical information</i>		
<i>ISSN and key title</i> 0280-5316		<i>ISBN</i>
<i>Language</i> French	<i>Number of pages</i> 56	<i>Recipient's notes</i>
<i>Security classification</i>		

Table des matières

1	Introduction	4
2	La commande L/A	5
2.1	Le principe de la commande L/A	5
2.2	Synthèse de la commande	7
2.3	Propriétés et extensions de la commande L/A	9
3	Les bioprocédés	12
3.1	Automatique des bioprocédés	12
3.2	Le bioréacteur	12
3.3	Modèle dynamique d'un bioprocédé	14
3.4	Modèle choisi	15
3.5	Remarques sur la linéarisation du modèle	15
4	Etude comparative des performances d'un régulateur L/A	17
4.1	Régulation du substrat en mode fed-batch	17
4.2	Analyse modale	18
4.3	Calcul et choix des régulateurs	21
4.4	Conditions de simulation et critères de performance	23
4.5	Simulations	23
4.6	Modifications apportées aux régulateurs	32
4.7	Conclusions	34
5	Surfaces de réponse des régulateurs	36
5.1	Surfaces pour des systèmes non-contraints	36
5.2	Expressions des contraintes pour un système positif	38
5.3	Surfaces pour des systèmes positifs	39
5.4	Surfaces de réponse en temps discret	45
5.5	Synthèse de régulateur à partir d'une surface	46
5.6	Etude de la commande L/A à partir des surfaces de réponse	48
5.7	Conclusions	54
6	Conclusions	55
	Références	57

1 Introduction

Pendant la dernière décennie, on a porté un intérêt croissant aux bioprocédés et à leurs commandes. Les modèles utilisés pour décrire les processus biologiques sont dans la plupart des cas non-linéaires et non-stationnaires. On rencontre aussi des problèmes de reproductibilité des expériences, puisqu'on travaille avec de la matière vivante. De plus, il y a des contraintes de positivité sur les variables décrivant le procédé; par exemple, les concentrations des divers composés et les débits entrant et sortant sont par nature positifs.

Pour prendre en compte ces contraintes, une famille des lois de commande appelée L/A a été développée. Par sa conception, cette commande non-linéaire garantit la positivité de la commande calculée. Souvent les régulateurs L/A sont basés sur des régulateurs classiques proportionnel et proportionnel-intégral et les expressions pour la commande sont alors assez simples et faciles à mettre en œuvre. Des expérimentations au niveau laboratoire ainsi que des applications industrielles ont été réalisées dans le domaine des bioprocédés mais aussi dans le domaine chimique. Les performances de ce type de commande se sont dans bien des cas avérées assez satisfaisantes comparativement à la simplicité des lois mises en œuvre. Cependant, d'un point de vue théorique, cette commande pose de nombreuses questions. Son domaine d'application privilégié reste à préciser.

Le but de ce travail est d'étudier les propriétés de cette loi de commande et de comparer en simulation un contrôleur L/A basé sur un contrôleur PI avec son correspondant classique. D'abord, dans la partie 2 nous allons présenter le principe de la commande L/A ainsi que quelques exemples de régulateurs. Ensuite, dans la partie 3, nous donnerons quelques éléments sur les bioprocédés et nous présenterons le modèle utilisé lors des simulations. La partie 4 présentera quelques résultats sur la production en mode fed-batch et traitera la synthèse des régulateurs et les résultats des simulations. Finalement, nous utiliserons une méthode graphique, appelée surface de réponse, pour étudier plus en détail les effets des non-linéarités de la commande L/A.

2 La commande L/A

Généralement en contrôle de procédé, les algorithmes de commande ne prennent en compte qu'a posteriori les contraintes physiques comme la positivité des variables, ou saturation des actionneurs. On risque ainsi de ne pas obtenir les performances souhaitées pour le système.

La commande L/A est une famille de lois de commande non-linéaire qui, pour un système positif¹, garantit par conception la positivité de la commande calculée. Elle est donc une approche intéressante pour les systèmes positifs telles que les procédés biotechnologiques, thermiques, chimiques ...

Dans un premier temps, nous présenterons le principe de cette méthode et nous donnerons quelques éléments de synthèse. Puis nous allons aussi discuter des propriétés de cette commande et des extensions possibles.

2.1 Le principe de la commande L/A

L'idée de la commande L/A, comme elle est présentée par Lakrori dans [14], est de relâcher les contraintes sur les entrées à l'aide des transformations logarithmiques et exponentielles. Cela est montré dans figure 1a où $u(t)$, $y(t)$, y^* sont respectivement, la variable de commande, la sortie et la consigne. Toutes ces variables sont strictement positives.

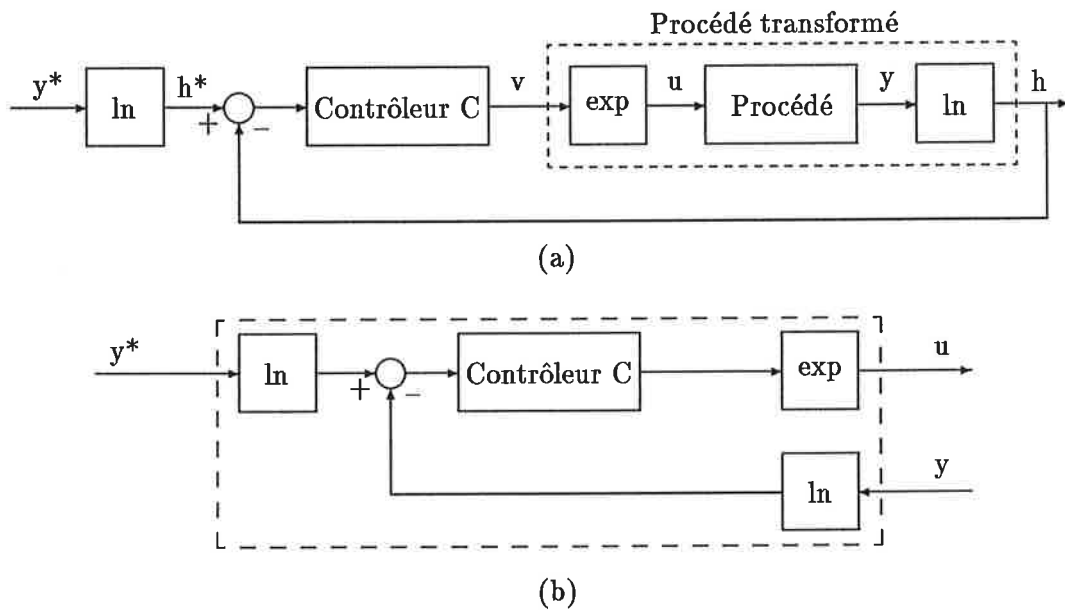


FIG. 1 - La commande L/A

¹Un système dont toutes les variables sont positives. Par exemple des concentrations, des débits ...

Le contrôleur C, qui peut être un contrôleur quelconque, est maintenant appliqué à un *procédé transformé non-contraînt*. Désormais, nous utiliserons le mot transformé pour désigner des quantités dans l'espace logarithmique.

Régulation par quotient

Une autre façon de voir la commande L/A est d'associer les transformations au contrôleur (figure 1b). Considérons le cas où le contrôleur C est un contrôleur proportionnel

$$v - v^* = K(h^* - h) \quad (1)$$

avec v^* comme la commande sortie en équilibre. Sachant que $v = \ln u$ et $h = \ln y$ on obtient

$$u = u^* \left(\frac{y^*}{y} \right)^K \quad (2)$$

On voit que dans le calcul de la commande, on ne fait plus intervenir la différence $y^* - y$ mais le rapport y^*/y . On fait alors *régulation par quotient*.

Par la suite on appellera L/A-P, ce régulateur L/A dérivé d'un régulateur proportionnel.

Régulation à gain variable

Considérons l'expression pour un L/A-P discret

$$u_k = u^* \left(\frac{y^*}{y_k} \right)^K \quad (3)$$

Dans le cas où $K = 1$ nous avons

$$u_k = u^* \left(\frac{y^*}{y_k} \right) = u^* + \frac{u^*}{y_k} (y^* - y_k)$$

Cela n'est rien d'autre que l'expression d'un *régulateur P* mais avec un *gain variable* dont la valeur est $\frac{u^*}{y_k}$. Le cas général $K \neq 1$ peut être vue comme un changement de variables $z = y^K$.

Regardons maintenant un L/A-I (L/A dérivé d'un correcteur I) dont l'expression est

$$u_k = u_{k-1} \left(\frac{y^*}{y_k} \right)^K \quad (4)$$

Dans [11] est présenté un régulateur qui est équivalent à un L/A-I avec $K = 1$. De (4) on a

$$u_k = u_{k-1} \left(\frac{y^*}{y_k} \right) = u_{k-1} + \frac{u_{k-1}}{y_k} (y^* - y_k)$$

que l'on reconnaît comme un contrôleur I avec comme gain ajustable $\frac{u_{k-1}}{y_k}$. L'idée de ce régulateur était d'estimer, à chaque pas, le gain du procédé comme $\frac{y_k}{u_{k-1}}$, et ensuite réagir avec un gain inversement proportionnel à celui-là. Comme plus haut, le cas $K \neq 1$ est vu comme un changement de variable.

Les régulateurs L/A peuvent donc dans certains cas, être exprimés comme des versions ajustables des régulateurs dont ils sont issus. Des régulateurs de structure L/A peuvent aussi se présenter dans des cas où l'on utilise des variables logarithmiques, voir [10].

2.2 Synthèse de la commande

Contrôleurs issus de PI, RST

Nous avons déjà vu l'expression d'un L/A-P, prenons maintenant l'expression d'un contrôleur PI discret².

$$v_k = v_{k-1} + K_P(y_{k-1} - y_k) + K_I(y^* - y_k) \quad (5)$$

Le contrôleur L/A correspondant est donné par

$$u_k = u_{k-1} \left(\frac{y_{k-1}}{y_k} \right)^{K_1} \left(\frac{y^*}{y_k} \right)^{K_2} \quad (6)$$

Plus général on pourrait imaginer pour le procédé transformé, un contrôleur numérique classique de type RST tel que

$$v_k = \sum_{i=1}^n r_i v_{k-i} + \sum_{j=0}^n t_j h_{k-j}^* - \sum_{l=0}^n s_l h_{k-l}$$

On obtient immédiatement la version L/A correspondant en transformant toute somme en produit, toute soustraction en division et tout produit en exponentiation. Soit

$$u_k = \prod_{i=1}^n r_i u_{k-i} \frac{\prod_{j=0}^n t_j y_{k-j}^*}{\prod_{l=0}^n s_l y_{k-l}}$$

Synthèse directe

Souvent la synthèse d'un régulateur L/A se fait sans faire intervenir les transformations précédentes. Il suffit de considérer directement une loi de commande dont la structure est similaire à celles des contrôleurs L/A précédents. C'est à dire une loi de commande qui fait intervenir les rapports au lieu des différences et les produits au lieu des sommes. Le réglage de ces contrôleurs se fait en fonction des performances statiques et dynamiques demandées.

²En fait l'expression donnée correspond à un PI avec consigne pondérée

Exemple de réglage

Prenons à titre d'exemple un réglage pour un L/A-PI qui vise à prendre en compte les contraintes de saturation des actionneurs. L'expression du contrôleur s'écrit encore

$$u_k = u_{k-1} \left(\frac{y_{k-1}}{y_k} \right)^{K_1} \left(\frac{y^*}{y_k} \right)^{K_2}$$

Considérons un actionneur dont le signal est limité par une valeur maximum u_{max} . Les paramètres K_1 et K_2 vont maintenant être choisis pour prendre en compte cette saturation.

Définissons Δy comme la variation maximum admissible autour de la consigne. Plaçons-nous, à l'instant $k-1$ autour d'un point d'équilibre (u^*, y^*) . A l'instant suivant, la sortie a atteint la valeur $y - \Delta y$ et nous calculons les paramètres pour que l'action u_k , servant à compenser cette variation, soit u_{max} . On arrive à l'expression suivante

$$K_1 + K_2 = \frac{\ln(u_{max}/u^*)}{\ln(y^*/(y^* - \Delta y))} \quad (7)$$

En posant $\alpha = K_1/K_2$, c'est à dire le rapport entre les termes intégral et proportionnel, on a maintenant deux nouveaux paramètres pour faire le réglage. Ces deux paramètres, α et Δy possèdent un certain sens physique et cela rend le réglage plus accessible au spécialiste du procédé.

Exemple de contrôleur L/A adaptif

Comme pour les régulateurs classiques on peut bien sûr envisager des contrôleurs L/A ajustables. Soit par exemple un régulateur L/A-P

$$u = G \left(\frac{y^*}{y} \right)^K \quad (8)$$

Dans ce cas, les performances statiques imposent $G = u^*$. Prenons le procédé linéaire du premier ordre défini par

$$y'(t) = ay(t) + bu(t)$$

L'équilibre statique impose $u^* = \theta y^*$ avec $\theta = -\frac{a}{b}$. Si l'on dispose d'une estimation en ligne des paramètres du modèle $\hat{\theta}$ on peut concevoir une loi de commande L/A adaptive

$$u = \hat{\theta} y^* \left(\frac{y^*}{y} \right)^K$$

On pourrait aussi, à chaque pas, refaire le calcul de K et ainsi prendre en compte des saturations de l'actionneur (voir [7]).

2.3 Propriétés et extensions de la commande L/A

Dissymétrie de la commande

Du fait que la commande L/A utilise des rapports au lieu des différences, la commande obtenue n'est plus symétrique.

Premièrement, pour un écart négatif et un écart positif de même amplitude, entre la consigne et la sortie, la variation de la commande ne sera pas la même. Cela se voit bien dans la figure 2a où $(y^*/y)^K$ est tracé comme fonction de y . Pour des valeurs de y qui sont au-dessous la consigne le contrôleur L/A va réagir plus fort que pour des valeurs au-dessus la consigne.

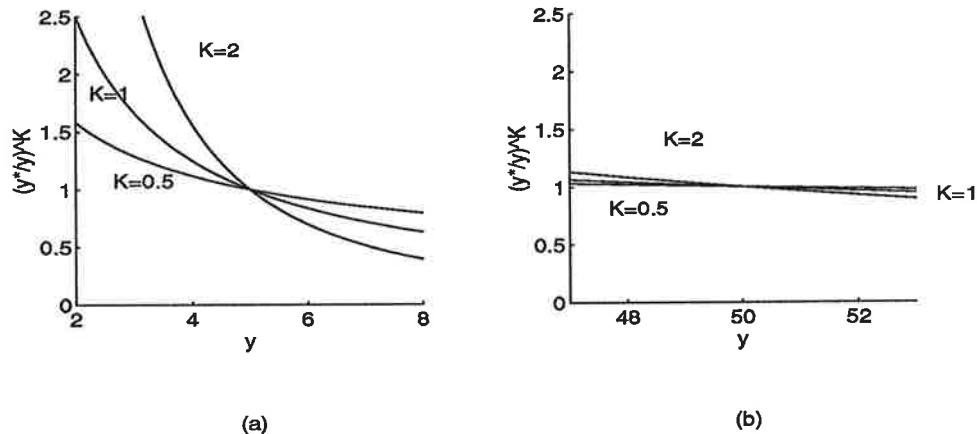


FIG. 2 - $(y^*/y)^K$ comme fonction de y pour $y^* = 5$ (a) et $y^* = 50$ (b).

Deuxièmement, l'amplitude de l'action dépend de la valeur de consigne fixée. Une même erreur absolue autour de deux consignes différentes, entrainera des actions différentes.

Dans la figure 2b on retrouve encore une fois $(y^*/y)^K$ comme fonction de y mais cette fois-ci pour une valeur de y^* qui est 10 fois plus grande. On voit bien que l'action sera nettement plus faible que dans le cas précédent.

Terme de décalage

On peut remarquer que le régulateur L/A ne peut pas calculer l'action si l'une des variables du dénominateur est nulle. Or, lors de la mise en œuvre d'une commande, on risque, à cause de mesures bruitées etc, de rendre les variables

utilisées au dénominateur nulles. Pour éviter cela, on peut ajouter un terme additif R sur toutes variables. Nous montrerons comme exemple l'expression d'un L/A-PI que l'on a modifié.

$$u_k = u_{k-1} \left(\frac{y_{k-1} + R}{y_k + R} \right)^{K_1} \left(\frac{y^* + R}{y_k + R} \right)^{K_2} \quad (9)$$

Cependant, on changera ainsi les propriétés de la commande. Car, comme on vient de le voir, celles-ci dépendent de la valeur absolue de y^* , et l'addition de R n'est rien d'autre qu'un changement de variable. Ceci peut permettre aussi d'obtenir les mêmes performances pour des différents niveaux de consignes en fixant $y^* + R = \text{constante}$.

Choix des transformations

Comme on a fait la transformation logarithmique pour s'affranchir de la contrainte de positivité, on pourrait également s'envisager d'autres transformations pour prendre aussi en compte une contrainte supérieure sur l'actionneur. On n'est pas non plus contraint à conserver la borne inférieure à zéro. Prenons par exemple la transformation tangente/arctangente

$$u = E(v) = \frac{u_{max} + u_{min}}{2} + \frac{u_{max} - u_{min}}{2} \arctan v$$

$$h = S(y) = \tan\left(\frac{\pi}{y_{max} - y_{min}} \left(y - \frac{y_{max} + y_{min}}{2}\right)\right)$$

qui transforme le système initial $u \in [u_{min}, u_{max}]$, $y \in [y_{min}, y_{max}]$ en un système $v \in \mathcal{R}$, $h \in \mathcal{R}$.

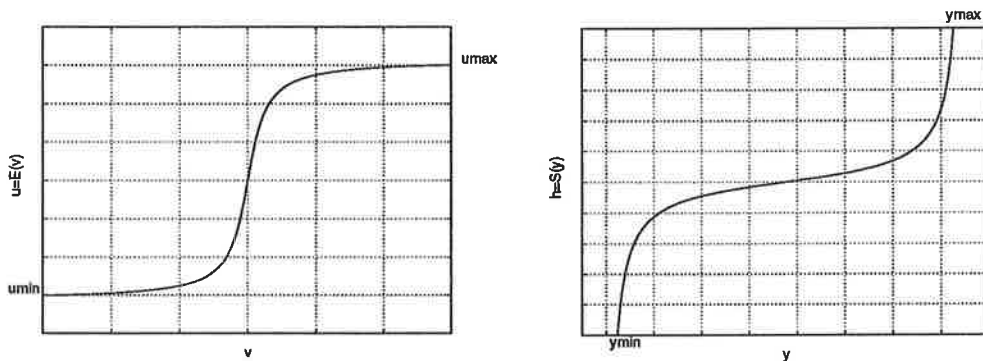


FIG. 3 - Exemple de transformation tangente/arctangente

On voit ici les rôles différents des fonctions d'entrée et de sortie. La fonction d'entrée E permet de garantir le respect des contraintes du procédé tandis que S agit plutôt pour simplifier l'expression de la commande. Mais il faut dire qu'en

renonçant aux transformations exponentielles et logarithmiques, on a déjà perdu beaucoup de la simplicité de la commande L/A et la synthèse ne se fera plus aussi facilement.

De plus, nous ne sommes pas obligés de choisir des fonctions E/S liées et on pourrait ainsi utiliser la fonction S pour des soucis de linéarisation. Nous parlerons des possibilités de linéarisation dans section 3.5.

3 Les bioprocédés

Les bioprocédés sont des systèmes mettant en œuvre des microorganismes à des fins de production, de traitement ou de bioconversion. Parmi les applications on retrouve le traitement de déchets, la production des antibiotiques pour prendre quelques exemples.

Cette section présentera tout d'abord quelques notions sur des bioprocédés ainsi que l'automatique qui lui est associée. Puis, dans un second temps, nous étudierons plus en détail le modèle utilisé dans ce rapport.

3.1 Automatique des bioprocédés

L'apport de l'automatique est évident; comme pour d'autres procédés industriels on souhaite obtenir un fonctionnement stable. Pour ce faire, souvent on se contente de contrôler les variables d'environnement (pH, température ...) avec des méthodes de régulation classiques. Or si l'on règle les variables d'état du procédé (concentration en biomasse, concentration en substrat, ...), on pourra d'avantage obtenir un gain de rendement et une productivité plus élevée. Cependant, dans ce cas, les méthodes classiques ont souvent été mises en défaut. Plusieurs raisons l'expliquent:

- La modélisation des bioprocédés est assez compliquée et de plus les modèles obtenus sont presque toujours *non-linéaires et non-stationnaires*.
- Le fait que souvent on *ne possède pas de mesures en ligne* des variables occasionne des problèmes lors de la mise en œuvre des commandes développées. Actuellement, on développe des capteurs logiciels (figure 4), c'est à dire que l'on estime la variable cherchée à partir de mesures d'une autre variable.
- On rencontre des choix délicats de stratégie à utiliser pour réaliser les objectifs. Quelle variable va-t'on va réguler? Quelle variable de commande utiliser? ...
- Une fois la stratégie choisie, il faut choisir la méthode. Comment allons-nous réguler notre procédé? Puisque les variables utilisées sont par nature positives (concentrations, débits ...) on a des *contraintes de positivité*, qui compliquent encore les choses.

Voilà quelques questions auxquelles il n'y a pas de réponse standard dans le domaine des bioprocédés.

3.2 Le bioréacteur

Le cœur d'un bioprocédé est le bioréacteur. C'est un réservoir où des réactions biologiques se déroulent simultanément dans milieu de culture en phase liquide. Le schéma d'un bioréacteur de base est montré dans figure 5.

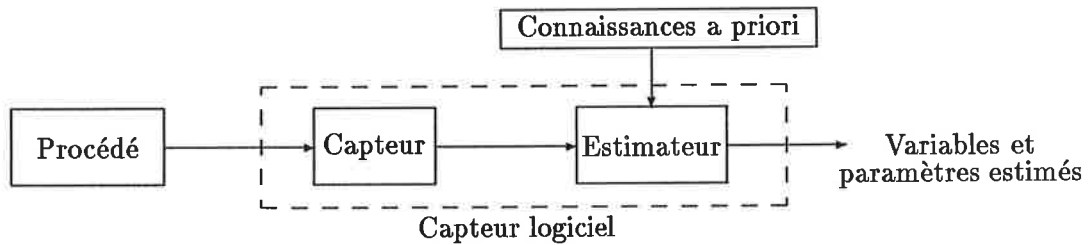


FIG. 4 - Schéma d'un capteur logiciel

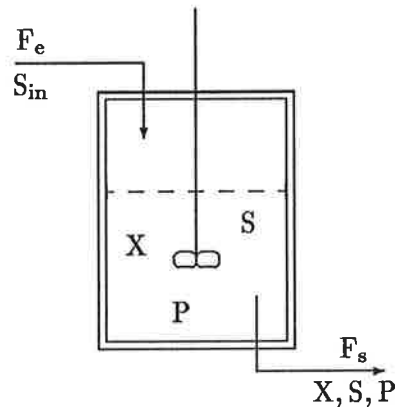


FIG. 5 - Schéma d'un bioréacteur de base

Dans le milieu on retrouve un mélange de substrat S , de microorganismes (ou biomasse) X et produit(s) P . La biomasse croît en consommant des substrats (oxygène, glucose etc.) pourvu que les conditions environnantes soient favorables. Associées à la croissance ou non, des réactions forment des produits finaux.

Soit un débit d'entrée F_e avec lequel on alimente en substrat le procédé et un débit de sortie F_s avec lequel on soutire le milieu mélangé. Selon l'utilisation des débits on définit pour le réacteur trois modes de fonctionnement.

Mode batch

Un réacteur sans débit d'entrée ni débit de sortie. Au début on introduit une grande quantité de substrat et une petite quantité de biomasse. On arrête le processus quand suffisamment de substrat a été consommé.

On peut seulement agir sur les variables d'environnement. Ce mode de fonctionnement ne possède pas d'état d'équilibre.

Mode fed-batch

Réacteur avec débit d'entrée mais sans débit de sortie. Le réacteur contient au début des petites quantités de substrat et de biomasse, et on alimente au fur

et à mesure en substrat.

On peut maintenant agir sur F_e et S_{in} . Ce mode de fonctionnement ne possède pas d'état d'équilibre.

Mode continu

En mode continu le réacteur est continuellement alimenté en substrat et le milieu est soutiré. Le débit d'entrée est égal au débit de sortie.

Les variables d'action sont les mêmes que dans le mode fed-batch. On travaille ici en régime stationnaire.

3.3 Modèle dynamique d'un bioprocédé

A partir des considérations des bilans de masse pour les différents composés on dérive un ensemble d'équations non-linéaires qui décrivent l'évolution du bioprocédé. Les équations ci-dessous négligent des termes qui décrivent la mortalité et la maintenance des microorganismes cependant elles sont valables dans tous³ les modes de fonctionnement. A noter que toutes les variables sont non-négatives.

$$\frac{dX}{dt} = (\mu - D)X \quad (10)$$

$$\frac{dS}{dt} = \nu_s X + D(S_{in} - S) \quad (11)$$

$$\frac{dP}{dt} = \nu_p X - DP \quad (12)$$

$$\frac{dV}{dt} = DV - F_s \quad (13)$$

avec

- X : concentration de biomasse [g/l]
- S : concentration de substrat [g/l]
- P : concentration de produit [g/l]
- D : taux de dilution [h^{-1}]
- S_{in} : concentration de substrat d'entrée [g/l]
- μ : taux de croissance de biomasse spécifique [h^{-1}]
- ν_s : taux de consommation de substrat spécifique [h^{-1}]
- ν_p : taux de production spécifique [h^{-1}]

Le taux de dilution est défini par $D = F_e/V$. Ce qui rend le modèle non-linéaire, en plus des bilinéarités $DX, DS \dots$, ce sont les expressions cinétiques μ et ν . Celles-ci dépendent en général de l'état du procédé, l'environnement

³Bien entendu avec $D = 0$ et $F_s = 0$ en mode batch etc ...

etc. et elles sont des fonctions du type $\mu = f(t, S, X, P, T, pH, \dots)$. Or, lors de la synthèse d'une commande on fait souvent l'hypothèse que la dépendance d'une des variables est plus forte ou que les autres variables sont constantes ($\mu = f(S), \mu = f(pH)$). Il existe dans la littérature une multitude de modèles cinétiques proposés, voir par exemple [3].

3.4 Modèle choisi

Le modèle simulé correspond à un procédé expérimental où l'on utilise *Thiobacillus Ferrooxidans*. Ce microorganisme effectue un processus d'oxydation de Fe^{2+} en Fe^{3+} en présence d'oxygène. Cela implique que le Fe^{2+} est notre substrat et Fe^{3+} notre produit.

$$\frac{dX}{dt} = (\mu - D)X \quad (14)$$

$$\frac{dS}{dt} = -k_1\mu X + D(S_{in} - S) \quad (15)$$

$$\frac{dP}{dt} = k_2\mu X - DP \quad (16)$$

$$\frac{dV}{dt} = DV - F_s \quad (17)$$

Ici on a fait l'hypothèse que le taux de croissance de biomasse μ est proportionnel à la consommation de substrat ν_s . Puisque le substrat est transformé directement en produit nous avons aussi proportionnalité entre μ et ν_p . Les valeurs des constantes de proportionnalité sont $k_1 = 2.0$ et $k_2 = 2.0$.

L'expression cinétique est une loi de Haldane modifiée (voir figure 6)

$$\mu(S) = \frac{\mu_{max}S}{K_s + S + S^3/K_i}$$

avec $\mu_{max} = 0.276 \text{ h}^{-1}$, $K_s = 4.85 \text{ g/l}$, $K_i = 4.5 \text{ g}^3/\text{l}^3$. La modification (terme en S^3) a été faite pour mieux correspondre au procédé expérimental (voir [5]).

La variable de commande choisie sera le taux de dilution D et la variable contrôlée sera le substrat S . L'objectif de commande sera l'obtention d'une croissance maximale, c'est à dire que l'on réglera S afin de rendre μ maximal.

3.5 Remarques sur la linéarisation du modèle

Dans un premier temps dans ce projet nous avons étudié une commande linéarisante, tout en prenant en compte les contraintes de positivité sur l'entrée. L'idée était de faire un changement de variable pour s'affranchir de la contrainte et puis de linéariser le procédé transformé.

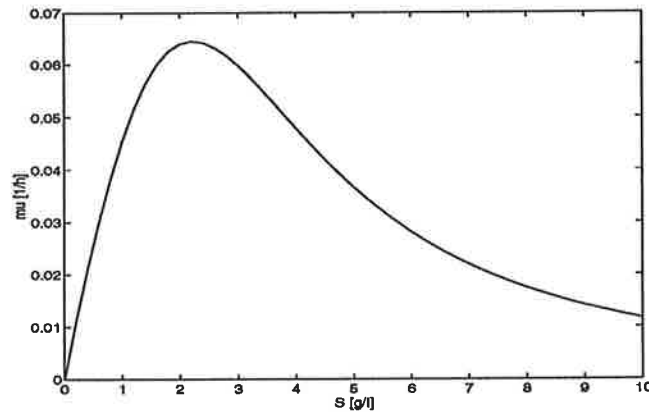


FIG. 6 - Taux de croissance de biomasse spécifique. Loi de Haldane modifiée

La technique de linéarisation externe que propose Bastin dans [3] ne s'applique pas immédiatement ici. Cela parce que cette méthode exige une équation entrée/sortie qui est linéaire en la commande, ce qui n'est pas notre cas. Par exemple avec des transformations L/A, ($\tilde{S} = \ln S$ etc...), la relation entrée/sortie (15) devient

$$\frac{d\tilde{S}}{dt} = -k_1\mu e^{\tilde{X}-\tilde{S}} + e^{\tilde{D}}(S_{in}e^{-\tilde{S}} - 1)$$

qui n'est pas linéaire en \tilde{D} . Si l'on procède quand même on retrouve que l'on ne dispose plus de tout l'espace transformé pour la commande. Dans l'espace réel, la loi de commande s'écrit

$$D = \frac{\lambda_1 S (\ln S^* - \ln S) + k_1 \mu X}{S_{in} - S}$$

Une quantité qui n'est pas forcément positive. Donc on est revenu au point de départ et les transformations n'ont rien changé. L'intérêt de cette démarche est alors limité.

Plus généralement, il est impossible dans la plupart de cas de linéariser globalement le système avec une transformation quelconque et un bouclage statique. On montre que le système XSP, en configuration monoentrée/monosortie, n'est pas complètement linéarisable. La dimension maximale du sous-espace linéarisable est 2, et celle-ci ne peut pas être augmentée quelle que soit la transformation choisie, voir [8].

4 Etude comparative des performances d'un régulateur L/A

Nous allons dans cette section comparer un régulateur L/A-PI avec un régulateur PI classique. Ils vont être simulés sur notre modèle en mode fed-batch. L'objectif de régulation sera de réguler le substrat S afin de rendre le taux spécifique de croissance μ maximal. On obtiendra ainsi le maximum de biomasse et de produit possible à la fin de la simulation. Dans certaines simulations nous ferons varier la consigne pour étudier les performances en poursuite. La variable de commande sera le taux de dilution D .

Premièrement, nous parlerons des particularités de la régulation en fed-batch. Ensuite, nous allons linéariser le procédé pour pouvoir calculer les fonctions de transfert en boucle fermée et puis nous allons choisir nos régulateurs. Finalement, nous présenterons les résultats des simulations et des modifications motivées.

4.1 Régulation du substrat en mode fed-batch

Le fait que l'on rende la croissance de biomasse maximale correspond à une déstabilisation du procédé. On veut que la biomasse totale XV croisse sans arrêt. La croissance de la biomasse entraîne une demande de substrat et pour conserver la concentration en substrat S constante, il faut que le taux de dilution D suive un profil ressemblant à celui⁴ de X . Dans la figure 7 on voit l'évolution de la concentration en biomasse X et du taux de dilution D lors d'une régulation parfaite de S .

Au début ces profils croissent exponentiellement pour s'aplanir vers la fin. Si le réacteur n'a pas un volume limitant et s'il n'y a pas de contraintes sur la pompe d'alimentation, on atteindra asymptotiquement les valeurs maximales

$$\begin{aligned} X_{\infty} &= \frac{S_{in} - S^*}{k_1} \\ D_{\infty} &= \mu^* \end{aligned}$$

Dans les applications en boucle ouverte on alimente en substrat d'après un profil prédéterminé en D (ou F_e). Lors de la conception d'une boucle de régulation on a le choix d'utiliser un tel profil ou non. Dans [2], on l'utilise et le régulateur ne calcule alors que les écarts de commande par rapport à ce profil. Or, il est souvent assez difficile de déterminer les expressions cinétiques de son procédé et donc le profil optimal. Nous faisons ici le choix de ne pas l'utiliser. Cependant, le profil doit alors être fourni par le régulateur même et il peut donc être vu comme une perturbation⁵. Plus haut, nous avons vu que le profil idéal a une évolution

⁴Solution d'une équation de Riccati

⁵Les fonctions de transfert sont calculées autour d'une trajectoire (X_0, S_0, D_0) où D_0 correspond au profil.

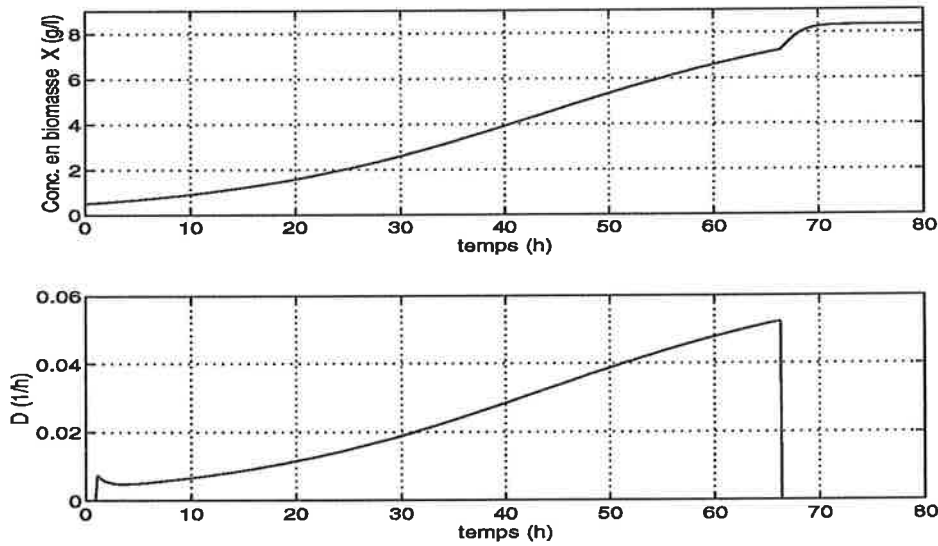


FIG. 7 - Concentration en biomasse X et taux de dilution correspondant, lors d'une régulation optimale du substrat en fedbatch.

exponentielle au début et nous pouvons nous attendre à des erreurs statiques lors des simulations. Cela parce qu'un ou même plusieurs intégrateurs dans la boucle de régulation ne peuvent pas compenser complètement une telle perturbation.

4.2 Analyse modale

Nous calculons d'abord les systèmes linéarisés en boucle fermée pour le PI et ensuite pour le L/A-PI.

Linéarisation du procédé

Comme le produit P n'a aucune influence sur le substrat S dans notre modèle les équations intéressantes sont (14) et (15).

Nous allons calculer le système linéarisé tangent autour du point (X_0, S_0, D_0) en faisant l'hypothèse que S est égal à S^* et constant. Maintenant, avec (15) et $\frac{dS}{dt} = 0$, on a

$$k_1 \mu(S_0) X_0 = D_0 (S_{in} - S_0) \quad (18)$$

Avec les variables normalisées, $x = \Delta X / X_0 \dots$, le système linéarisé tangent devient

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 - D_0 & \left(\frac{\partial \mu}{\partial S}\right)_0 S_0 \\ -\left(\frac{S_{in} - S_0}{S_0}\right) D_0 & -(k_1 \left(\frac{\partial \mu}{\partial S}\right)_0 X_0 + D_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -D_0 \\ \left(\frac{S_{in} - S_0}{S_0}\right) D_0 \end{bmatrix} d \quad (19)$$

Le système obtenu dépend des valeurs (X_0, S_0) et donc du temps⁶. Comme le système linéaire dépend du temps, les fonctions de transfert correspondant en dépendront aussi. Nous considérons ici le transfert entre d et s . Le point S_0 est choisi pour rendre μ maximal et nous avons $\left(\frac{\partial \mu}{\partial S}\right)_0 = 0$. La fonction de transfert en boucle ouverte en ce point devient

$$G_p(s) = \frac{k_1 \mu_0 X_0}{S_0} \frac{s + 2D_0 - \mu_0}{(s + D_0 - \mu_0)(s + D_0)} \quad (20)$$

où s , maintenant et dans la suite, est la variable de la transformation de Laplace. On voit que le gain est proportionnel à X_0 .

Boucle fermée

Le transfert pour un PI est

$$K_r \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)$$

où K_r est le gain avant normalisation. La fonction de transfert normalisée sera

$$K \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)$$

avec $K = K_r \frac{S_0}{D_0}$. Le gain normalisé sera donc, à cause de D_0 , plus faible à la fin de la simulation et comme D_0 est proportionnel à X_0 on va en fait compenser l'accroissement du gain du procédé. Le gain pour le fonction de transfert en boucle ouverte sera alors constant quand X_0 augmente. On note aussi que le gain normalisé du PI dépend de S_{in} puisque D_0 en dépend.

Lorsqu'on calcule le polynôme caractéristique, on obtient un polynôme du troisième ordre

$$s^3 + as^2 + bs + c$$

où

$$c = \frac{k_1 \mu_0 X_0}{S_0} \frac{K}{T_i} (2D_0 - \mu_0)$$

Puisque D_0, S_0, K, T_i sont tous positifs et $(S_{in} - S_0)$ toujours positif dans la pratique, la signe de c est celui de $(2D_0 - \mu_0)$. Comme c est le produit des valeurs propres, on voit que, si $(2D_0 - \mu_0) < 0$ alors le système en boucle fermée a 1 ou 3 pôles instables. C'est à dire que le système linéarisé tangent régulé par un PI sera *localement instable* tant que $D_0 < \mu_0/2$ ou $X_0 < \frac{S_{in} - S_0}{2k_1} \approx 4.4 \text{ g/l}$. Plus loin, nous allons voir que ce pôle est très lent et qu'il se stabilise avant qu'on puisse voir son influence.

⁶ D_0 peut être exprimée en S_0 et X_0 .

Linéarisation du procédé transformé

Pour pouvoir calculer les pôles et les zéros pour le système avec un L/A-PI, nous appliquons les transformations L/A au procédé. Nous calculerons ensuite la fonction de transfert dans l'espace transformé avec un PI doté des paramètres du L/A-PI. Puisque les transformations utilisées ne changent que l'échelle, les caractéristiques comme temps de réponse, stabilité etc, s'étudient aussi bien dans l'espace transformé que dans l'espace réel.

Les équations correspondantes à (14) et (15) après les transformations⁷ sont

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \mu - e^{\tilde{D}} \quad (21)$$

$$\frac{d\tilde{S}}{dt} = -k_1\mu e^{\tilde{X}-\tilde{S}} + e^{\tilde{D}}(S_{in}e^{-\tilde{S}} - 1) \quad (22)$$

A noter que les variables transformées sont déjà normalisées. Le système linéarisé tangent correspondant au point (X_0, S_0, D_0) dans l'espace réel devient

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{\partial\mu}{\partial S}\right)_0 S_0 \\ -\left(\frac{S_{in}-S_0}{S_0}\right)D_0 & -(k_1\left(\frac{\partial\mu}{\partial S}\right)_0 X_0 + D_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -D_0 \\ \left(\frac{S_{in}-S_0}{S_0}\right)D_0 \end{bmatrix} \tilde{d} \quad (23)$$

On retrouve presque le même résultat que pour le système non-transformé mais les transformations ont rendu nul le premier élément dans la matrice du système.

La fonction de transfert du procédé transformé est

$$G_{pt}(s) = \frac{k_1\mu_0 X_0}{S_0} \frac{s + D_0}{s^2 + (k_1\left(\frac{\partial\mu}{\partial S}\right)_0 X_0 + D_0)s + (S_{in} - S_0)D_0\left(\frac{\partial\mu}{\partial S}\right)_0}$$

Pour $\left(\frac{\partial\mu}{\partial S}\right)_0 = 0$ cette fonction de transfert devient, à cause d'une simplification pôle-zéro stable, un intégrateur

$$G_{pt}(s) = \frac{k_1\mu_0 X_0}{S_0} \frac{s + D_0}{s(s + D_0)} = \frac{k_1\mu_0 X_0}{S_0} \frac{1}{s} \quad (24)$$

Boucle fermée, espace transformé

Si l'on ferme la boucle de régulation avec un PI, on retrouve cette fois-ci un polynôme caractéristique du deuxième ordre où les pôles peuvent être choisis stables à l'aide de K et T_i . Or, le point $\left(\frac{\partial\mu}{\partial S}\right)_0 = 0$ est un point singulier et on y sera pratiquement jamais. Lorsqu'on calcule les pôles numériquement avec MATLAB on retrouve un polynôme caractéristique du troisième ordre.

Le gain du PI dans l'espace transformé est par définition sans dimension et comme il n'y a pas besoin de normalisation, il reste constant. Le transfert en

⁷ $\tilde{X} = \ln X, \dots$

boucle ouverte du système L/A-PI aura donc un gain normalisé plus élevé à la fin de la simulation par rapport au système PI dont le gain normalisé du PI est diminué par D_0 . On peut donc s'attendre que les pôles de la boucle fermée vont se déplacer plus pour le L/A-PI que pour le PI classique lors de la simulation. De plus, le gain normalisé K pour le PI classique se modifie lors d'une perturbation en S_{in} alors que le gain pour le L/A-PI reste constant. Pour des perturbations en S_{in} on s'attend donc à ce que les pôles du système linéarisé PI vont se déplacer plus que pour le système L/A.

4.3 Calcul et choix des régulateurs

Les régulateurs seront réalisés en temps discret et nous utiliserons la structure utilisée dans les L/A-PI habituels

$$u_k = u_{k-1} + K_p(y_{k-1} - y_k) + K_i(y^* - y_k)$$

avec $K_p = K$ et $K_i = \frac{K}{T_i} t_e$. La fonction de transfert en z correspondante entre $e_k = y^* - y_k$ et u_k est

$$H(z) = \frac{(K_p + K_i)z - K_p}{z - 1}$$

A l'aide de MATLAB Control System Toolbox les systèmes linéarisés tangents sont échantillonnés et les pôles et zéros discrets en boucle fermée sont calculés. Pour choisir les paramètres des régulateurs, les pôles et les zéros sont calculés pour plusieurs valeurs de X_0 . Le choix s'avère difficile car les pôles du système L/A se déplacent beaucoup lorsque X_0 varie. Ici on a essayé d'obtenir un système rapide au début sans qu'il devienne instable à la fin. Les régulateurs suivants sont retenus

$$\text{PI} \quad K_r = 0.1 \text{ l/gh} \quad T_i = 2 \text{ h}$$

$$\text{L/A-PI} \quad K = 20 \quad T_i = 2 \text{ h}$$

Nous donnons dans les tableaux 1 et 2 les pôles, les zéros et le gain, ainsi que les fréquences naturelles et amortissements correspondants, pour quelques valeurs de X . On voit que le pôle instable du système PI devient stable et qu'il est effectivement très lent. Le pôle correspondant dans le système L/A est aussi lent mais stable. Dans les deux systèmes, il y a une simplification numérique de ce pôle. A cause de sa lenteur, on ne voit aucune influence de ce dipôle pendant la durée des simulations.

Dans cette analyse linéaire, le système PI paraît plus rapide au début. A cause du déplacement des pôles du système L/A et son gain qui augmente avec X , les performances du système L/A s'améliorent et le système L/A serait au moins aussi rapide que le système PI à la fin de la simulation.

TAB. 1 - Système PI. Pôles, zéros et gains avec fréquences continues et amortissements correspondants pour différentes valeurs de X_0

X g/l	Pôles/zéros	Valeur	Norme	ω_0 rad/h	ζ	gain
1.0	pôles	1.0050	1.0050	0.0500	-1	0.1868
		$0.9066 \pm 0.0129i$	0.9897	0.9899	0.9897	
	zéros	1.0050	1.0050	0.0500	-1	
		0.9524	0.9524	0.4879	1	
4.5	pôles	0.9999	0.9999	0.0008	1	0.1868
		$0.9065 \pm 0.0122i$	0.9066	0.9895	0.9906	
	zéros	0.9999	0.9999	0.0008	1	
		0.9524	0.9524	0.4879	1	
8.0	pôles	0.9949	0.9949	0.0515	1	0.1868
		$0.9065 \pm 0.0121i$	0.9066	0.9899	0.9909	
	zéros	0.9949	0.9949	0.0515	1	
		0.9524	0.9524	0.4879	1	

TAB. 2 - Système L/A. Pôles, zéros et gains avec fréquences continues et amortissements correspondants pour différentes valeurs de X_0

X g/l	Pôles/zéros	Valeur	Norme	ω_0 rad/h	ζ	Gain
1.0	pôles	0.9993	0.9993	0.0072	1	0.1226
		$0.9387 \pm 0.0456i$	0.9398	0.7880	0.7878	
	zéros	0.9993	0.9993	0.0072	1	
		0.9524	0.9524	0.4879	1	
4.5	pôles	0.9967	0.9967	0.0326	1	0.5515
		0.9474	0.9474	0.5406	1	
		0.5010	0.5010	6.9110	1	
	zéros	0.9967	0.9967	0.0326	1	
0.9524		0.9524	0.4879	1		
8.0	pôles	0.9942	0.9942	0.0580	1	0.9803
		0.9498	0.9498	0.5148	1	
		0.0696	0.0696	26.6494	1	
	zéros	0.9942	0.9942	0.0580	1	
0.9524		0.9524	0.4879	1		

4.4 Conditions de simulation et critères de performance

Conditions de simulation

Les valeurs initiales du procédé seront généralement

$$\begin{aligned} X_{init} &= 0.5 \text{ g/l} \\ S_{init} &= 2.21 \text{ g/l} \\ P_{init} &= 0.1 \text{ g/l} \\ V_{init} &= 1.0 \text{ l} \end{aligned}$$

Par défaut, la consigne et la concentration en substrat alimenté seront

$$\begin{aligned} S^* &= 2.21 \text{ g/l} \\ S_{in} &= 20 \text{ g/l} \end{aligned}$$

où S^* est la valeur qui rend μ optimal, μ^* .

Le réacteur sera en mode batch, (pas de commande appliquée), jusqu'à $t = 1 \text{ h}$ et le procédé sera arrêté à $t = t_{fin}$, lorsque le volume maximal 5 l sera atteint. Les débits F_e admissibles seront entre 0 l/h et 1.2 l/h , ce qui correspond à la pompe au procédé expérimental. Pour chaque simulation des valeurs initiales "optimales" seront fournies aux régulateurs.

Nous allons simuler sous MATLAB/SIMULINK et la méthode d'intégration utilisée sera Runge-Kutta de 5^{ème} ordre avec une tolérance de 0.001 et un pas maximal 0.1 h . Le temps d'échantillonnage t_e sera 0.1 h .

Critères de performances

Afin de pouvoir juger les performances des deux régulateurs nous allons utiliser trois critères, à savoir

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{t_{fin}} X(t_{fin}) \\ C_2 &= \frac{1}{t_{fin}} \int_0^{t_{fin}} |S^*(t) - S(t)| dt \\ C_3 &= \frac{1}{t_{fin}} \int_0^{t_{fin}} |D(t)| dt \end{aligned}$$

qui mesurent, respectivement, la productivité, la déviation moyenne de la consigne et l'effort du régulateur.

4.5 Simulations

Nous présentons ici les résultats des simulations. Dans toutes les courbes le L/A-PI trace une ligne continue et le PI une ligne pointillée, si rien d'autre est indiqué.

Démarrage au-dessous de la consigne

Nous démarrons ici avec une concentration initiale $S_0 = 1.0 \text{ g/l}$. Dans la figure ci-dessous nous voyons que le PI est capable de monter plus vite que le L/A-PI, ce que l'on pouvait attendre d'après les pôles et les zéros des systèmes linéarisés. Mais le L/A-PI devrait être plus lent. L'explication est que la dissymétrie, qui ne se voit pas dans l'analyse linéaire, donne plus de force lorsqu'on est au-dessous la consigne.

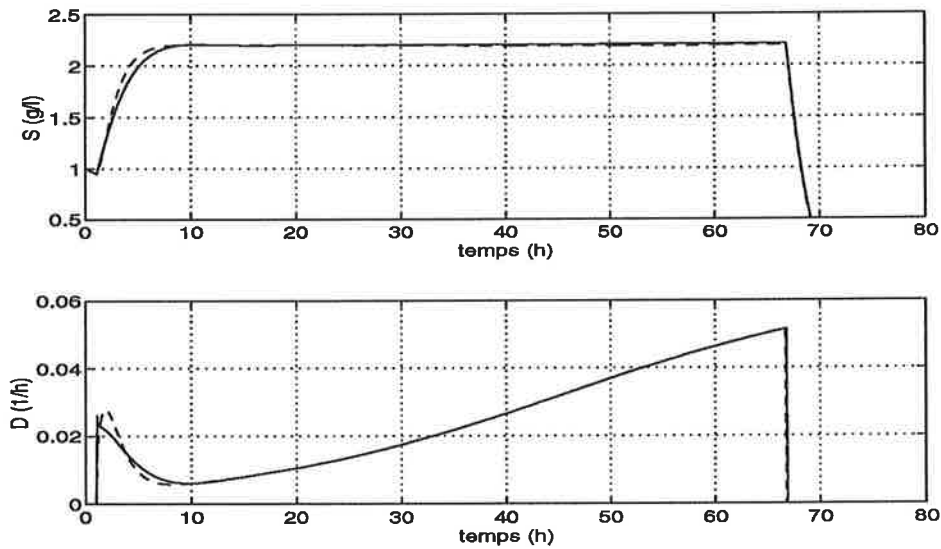


FIG. 8 - Concentration en substrat S et le taux de dilution D . Démarrage au-dessous la consigne. L/A-PI (—), PI (- - -)

De plus, cette dissymétrie réduit l'erreur statique et on peut entrevoir que le L/A est légèrement plus haut que le PI. Grâce à cela, il arrive à montrer une productivité un peu plus élevée que le PI. Par contre, la déviation moyenne est plus grande à cause du démarrage plus lent.

Figure 8	PI	L/A - PI
C_1	0.1062	0.1065
C_2	0.0500	0.0507
C_3	0.0241	0.0241

Démarrage au-dessus de la consigne

On voit dans figure 9 que les deux régulateurs montre un dépassement très grand. Ce dépassement est dû aux effets "windup". Le PI reste avec la commande mise à zéro même s'il dépasse la consigne à cause du passé. Cependant, il est

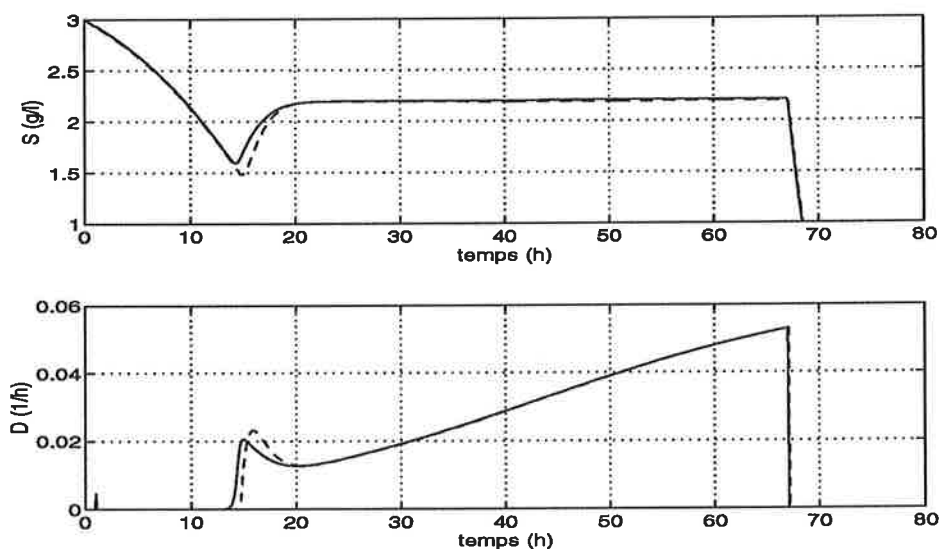


FIG. 9 - Concentration en substrat S et le taux de dilution D . Démarrage au-dessus la consigne.

intéressant de noter que le L/A-PI n'évite pas des tels phénomènes même s'il ne sature pas. Le problème est ici plutôt de nature numérique. Au lieu de saturer à zéro, le L/A-PI calcule des valeurs très petites, théoriquement infiniment près de zéro. La nature multiplicative de la commande L/A fait ensuite que la commande sortie reste petite plus longtemps que désirée. Nous allons plus loin examiner des possibilités d'éviter des tels effets.

Le L/A-PI a cependant ici une déviation moyenne de la consigne nettement plus petite que le PI classique. L'effort du régulateur et la productivité sont les mêmes.

Figure 9	PI	L/A - PI
C_1	0.1091	0.1090
C_2	0.1132	0.0985
C_3	0.0240	0.0240

Perturbations en substrat alimenté

Premièrement pour une perturbation positive on suivra le profil suivant

$$S_{in} = \begin{cases} 60 \text{ g/l} & 20 \text{ h} < t < 40 \text{ h} \\ 20 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Dans figure 10 nous voyons les effets de la dissymétrie. Le L/A-PI supprime les déviations au-dessous de la consigne plus vite que le PI et vice versa.

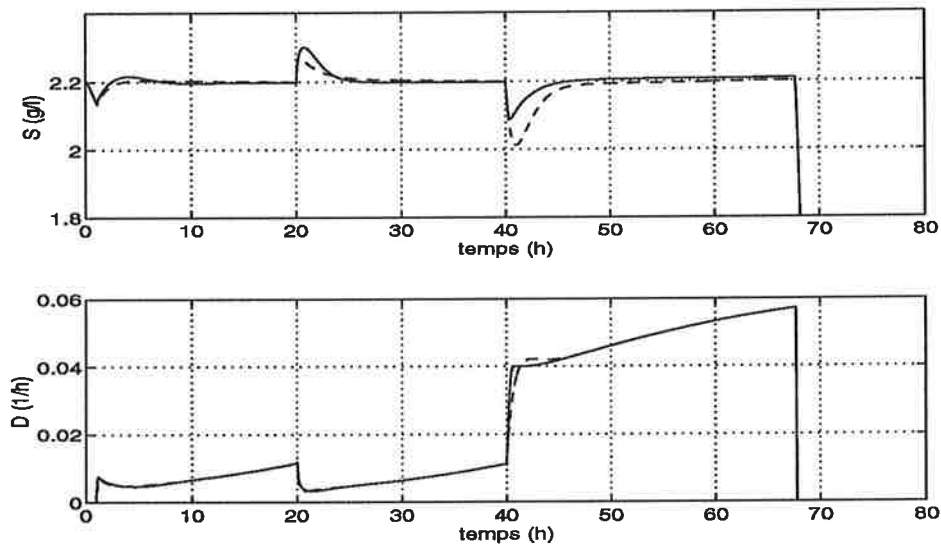


FIG. 10 - Perturbation en $S_{in} +200\%$

Nous faisons maintenant une perturbation négative en S_{in}

$$S_{in} = \begin{cases} 5 \text{ g/l} & 15 \text{ h} < t < 35 \text{ h} \\ 20 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Nous constatons en regardant la figure 11 que le L/A-PI supprime mieux la perturbation quand elle survient ainsi que quand elle disparaît. Pour une concentration en S_{in} de 5 g/l le système linéarisé PI devient lent et mal amorti (cf Analyse modale). De plus, la dissymétrie aide le L/A-PI à remonter. Cela se voit aussi bien dans les courbes. Lorsque la perturbation disparaît les performances du système L/A sont améliorées suffisamment pour descendre plus vite que le système PI.

Nous donnons ici les critères pour les deux simulation et nous remarquons que, pour l'écart moyen du substrat, l'avantage est au PI mais que la productivité et l'effort du régulateur sont les mêmes.

Figure 10	PI	L/A - PI
C_1	0.1165	0.1165
C_2	0.0199	0.0145
C_3	0.0238	0.0238

Figure 11	PI	L/A - PI
C_1	0.0639	0.0635
C_2	0.0514	0.0207
C_3	0.0291	0.0291

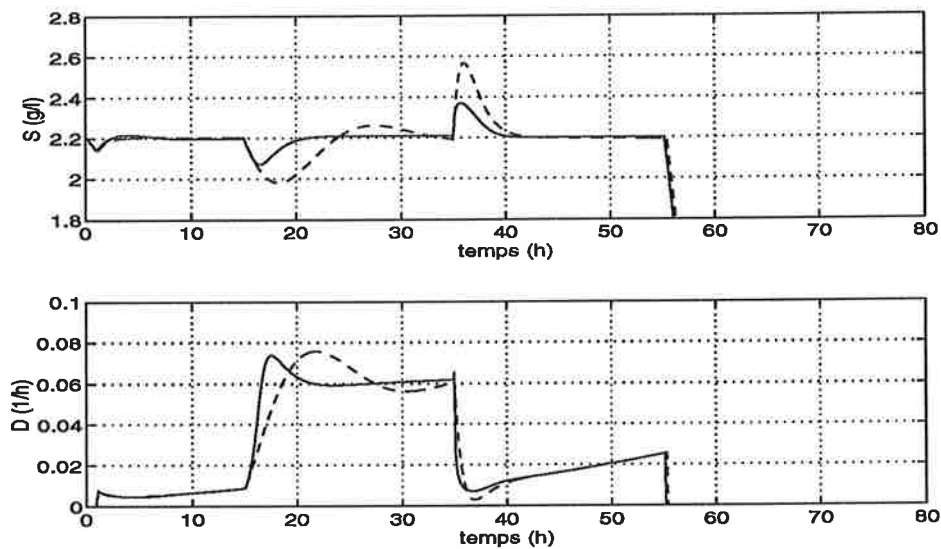


FIG. 11 - Perturbation en S_{in} -75%

Poursuite

Nous examinons maintenant les performances en poursuite. D'abord, nous varions la consigne S^* comme suit

$$S^* = \begin{cases} 3.0 \text{ g/l} & 10 \text{ h} < t < 40 \text{ h} \\ 2.21 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Les résultats (figure 12) pour les deux régulateurs sont tout à fait comparables. Au début, où le PI devrait être plus rapide, la dissymétrie aide le L/A-PI à monter vite. A la fin, les performances du système L/A sont suffisamment améliorées pour qu'il puisse faire concurrence au système PI.

Pour un changement de consigne négatif,

$$S^* = \begin{cases} 1.4 \text{ g/l} & 10 \text{ h} < t < 40 \text{ h} \\ 2.21 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

on revoit les effets windup. Le PI ainsi que le L/A-PI montrent à cause de cela un dépassement dans la figure 13. Encore une fois, le PI devrait plus rapide au début mais comme il sature la commande à zéro, le L/A-PI arrive à descendre aussi vite même s'il a un gain plus faible au-dessus la consigne.

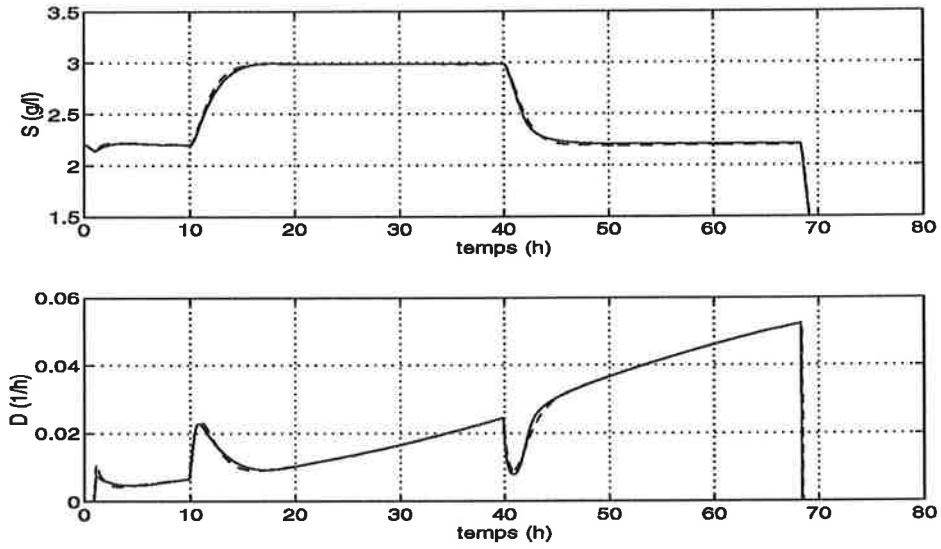


FIG. 12 - Performances en poursuite

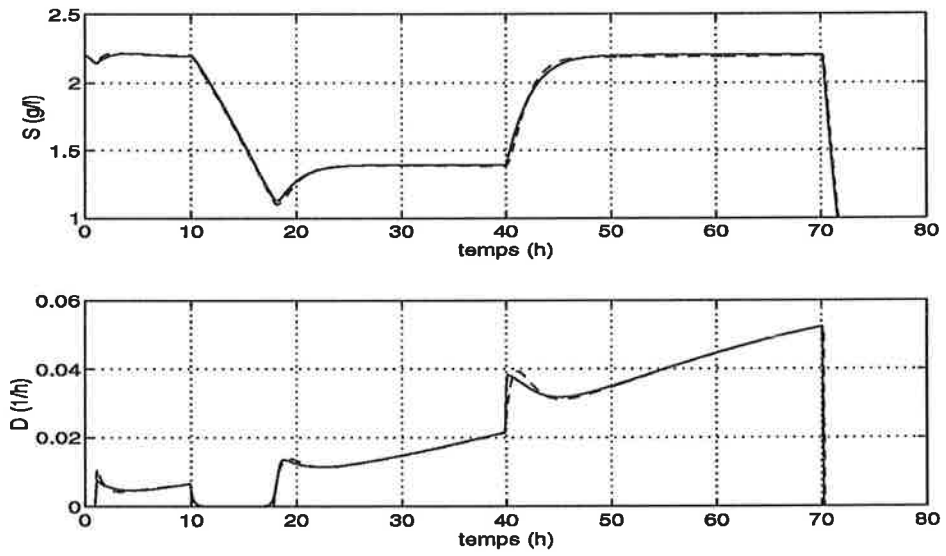


FIG. 13 - Performances en poursuite

Encore une fois les deux montrent des performances semblables. Le L/A montre toujours une déviation de la consigne plus petite que le PI grâce à la dissymétrie qui le "pousse" vers la consigne.

Figure 12	PI	L/A - PI
C_2	0.0558	0.0534
C_3	0.0236	0.0236

Figure 13	PI	L/A - PI
C_2	0.0859	0.0816
C_3	0.0229	0.0230

Bruit de mesure

Pour se mettre dans un environnement plus réaliste, nous avons introduit un bruit de mesure sur S . Nous utilisons des bruits blancs $N(0, 0.1)$ et $N(0, 0.2)$ ce qui correspondent aux niveaux de bruit de 5% et 10%. Nous reprenons les profils de consigne du paragraphe précédent et les résultats sont dans les figures 14 à 17.

Ici, on voit que le PI est plus robuste contre le bruit. Il arrive à suivre la consigne pour un niveau de 5% ainsi que pour 10% de bruit. Le L/A marche assez bien pour 5% de bruit mais pour un niveau de 10% il n'arrive plus à contrôler le procédé. On voit aussi dans les courbes pour le L/A que l'influence du bruit est petite au début et grande à la fin. C'est à dire que l'influence pour le L/A suit un profil croissant alors que pour le PI l'influence semble être constante.

On peut le comprendre si l'on regarde les expressions des deux régulateurs. Le PI qui lui travaille en "mode additif" amplifie les perturbations avec un gain constant. Au contraire, le L/A-PI multiplie à chaque pas les perturbations avec la commande précédente. Comme nous sommes en mode fed-batch, le niveau de commande augmente au cours du temps et avec lui le facteur qui multiplie les perturbations. Cela était une première explication dans les variables originales. Si l'on regarde les systèmes normalisés, on se rend compte que le gain, à cause de la auto-normalisation, augmente pour le système L/A par rapport au système PI. Cette normalisation, qui est due aux transformations, intervient bien sûr aussi dans des autres régulateurs L/A. En simulation, on a aussi vu la même tendance pour l'influence du bruit pour un régulateur L/A proportionnel en mode fed-batch. Dans la section suivante nous allons voir l'influence d'une terme de décalage sur le niveau de bruit.

Figure 14, 15	PI	L/A - PI
C_2	0.1192	0.1344
C_3	0.0236	0.0235

Figure 16, 17	PI	L/A - PI
C_2	0.2033	0.3716
C_3	0.0236	0.0235

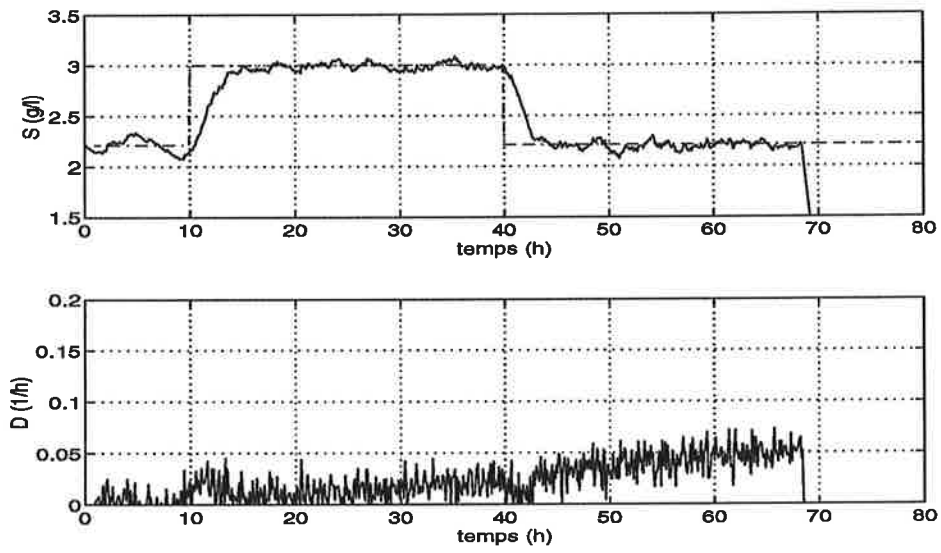


FIG. 14 - PI. 5% bruit de mesure.

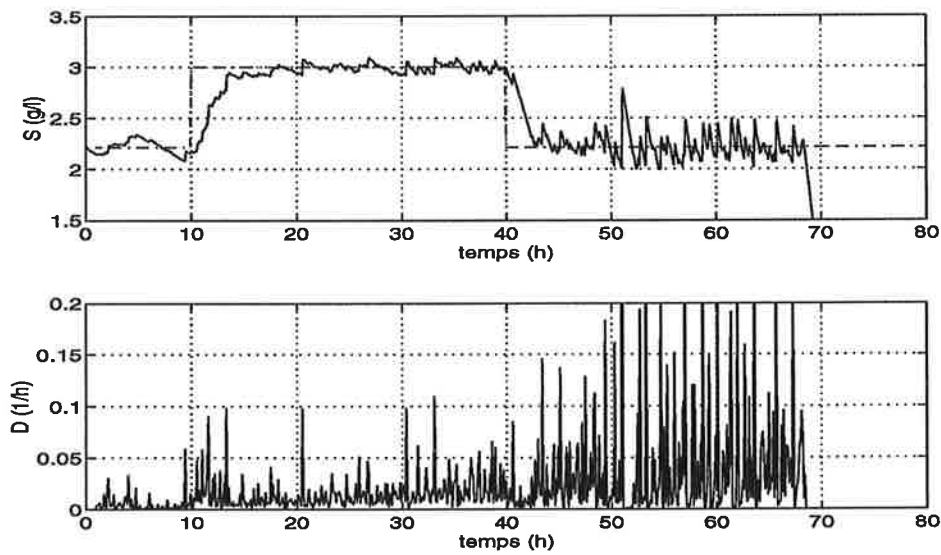


FIG. 15 - L/A-PI. 5% bruit de mesure.

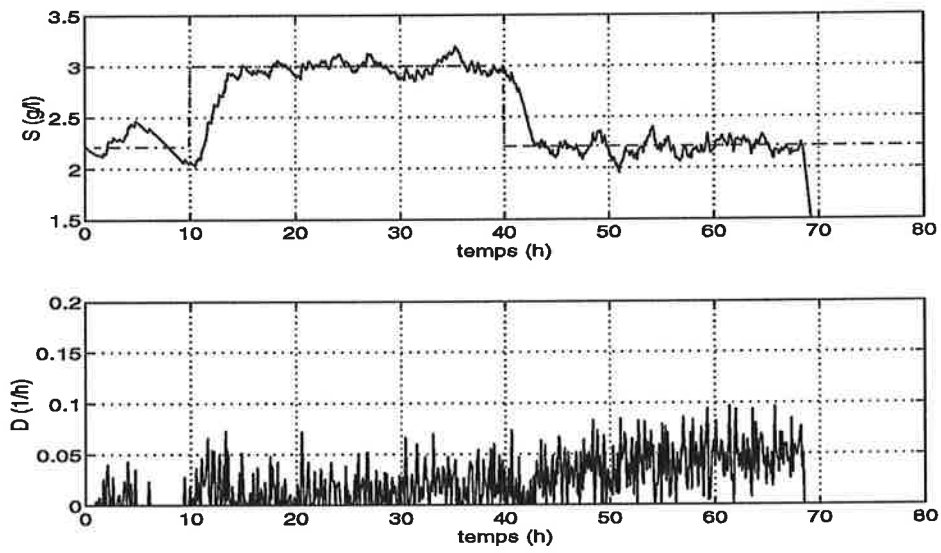


FIG. 16 - PI. 10% bruit de mesure.

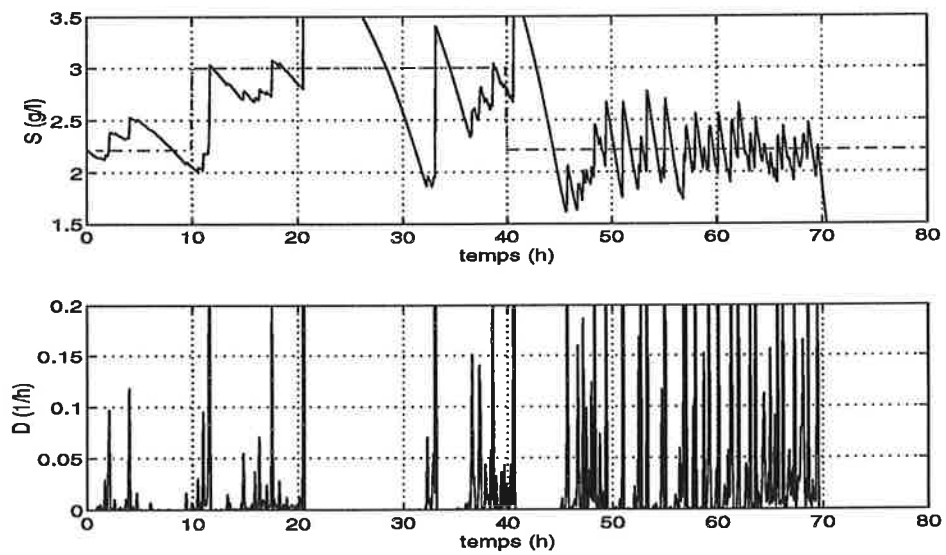


FIG. 17 - L/A-PI. 10% bruit de mesure.

4.6 Modifications apportées aux régulateurs

Anti-windup

Nous venons de voir que les deux régulateurs montrent des problèmes de windup. Pour le PI, la solution classique est de retrancher de la partie intégrale, la partie de la commande⁸ qui n'est pas applicable, voir par exemple [1].

Dans le cas L/A, cette solution n'est pas immédiatement applicable, car toutes ses commandes sont par définition applicables au procédé. Une possibilité est d'introduire un seuil positif artificiel au-dessous duquel on retranche la commande d'intégration. Or, cela revient pratiquement à limiter la sortie même. Un tel seuil est aussi souhaitable pour la stabilité numérique lors de la mise en œuvre d'un régulateur L/A-PI. Car, une fois calculée une commande considérée comme nulle par la machine, toutes les commandes suivantes seront nulles à cause de la multiplicité.

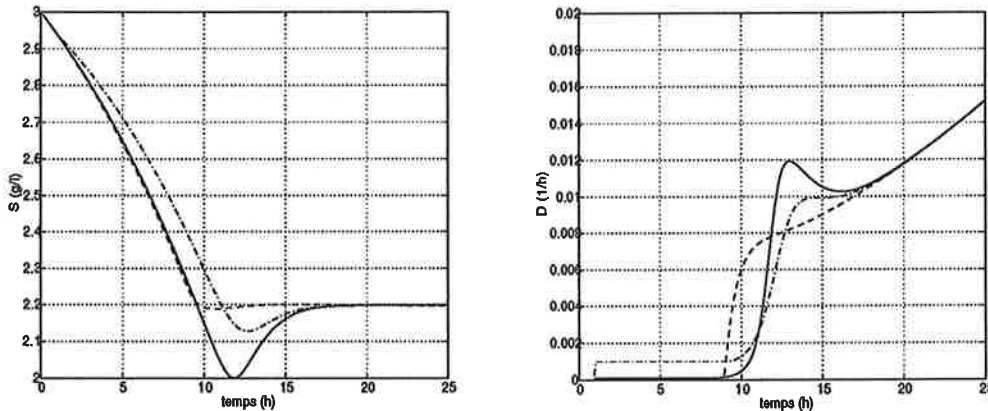


FIG. 18 - Démarrage au-dessus de la consigne. PI anti-windup (- - -), L/A-PI1 (—), L/A-PI2 (· - · - ·).

Evidemment ce seuil va ralentir notre procédé et il faut faire un choix entre vitesse et effet anti-windup. Dans la figure 18 nous présentons la solution PI avec la solution L/A pour deux valeurs différentes du seuil. Le L/A-PI1 avec comme seuil $D_{min} = 0.0001 \text{ h}^{-1}$ et L/A-PI2 avec $D_{min} = 0.001 \text{ h}^{-1}$. Le PI atteint la consigne plus vite que les L/A et on voit bien que les L/A-PI limitent les effets windup au prix d'une descente ralentie. En effet, le L/A-PI1 a une déviation moyenne plus petite que le L/A-PI2 même si ce dernier a moins de dépassement.

⁸Multiplié par un gain à régler

Figure 18	PIaw	L/A - PI1	L/A - PI2
C_1	0.1094	0.1095	0.1093
C_2	0.0635	0.0673	0.0704
C_3	0.0241	0.0241	0.0241

Terme de décalage

Nous avons déjà envisagé un terme de décalage pour les commandes L/A. Nous allons maintenant l'utiliser pour réduire les effets du bruit. Le même L/A-PI que précédemment est modifié avec une terme de décalage $R = 3$. Dans la figure 19, nous voyons que le résultat pour un niveau du bruit de 10% est comparable à celui du PI. Cependant, à la fin, on voit toujours des effets croissants du bruit.

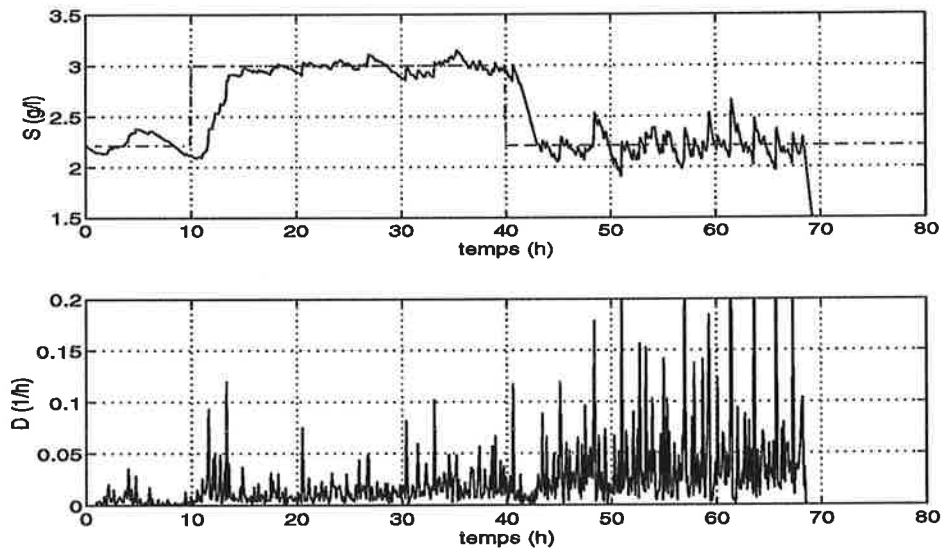


FIG. 19 - L/A-PI avec terme de décalage. Bruit de mesure 10% .

Les performances ont aussi été changées. On voit dans figure 20 la différence entre le L/A-PI original et celui avec terme R . On voit un léger dépassement lors des deux changements de consigne.

Figure 19	L/A - PI(R)	L/A - PI
C_2	0.2088	0.3716
C_3	0.0236	0.0235

Figure 20	L/A - PI(R)	L/A - PI
C_2	0.0670	0.0534
C_3	0.0236	0.0236

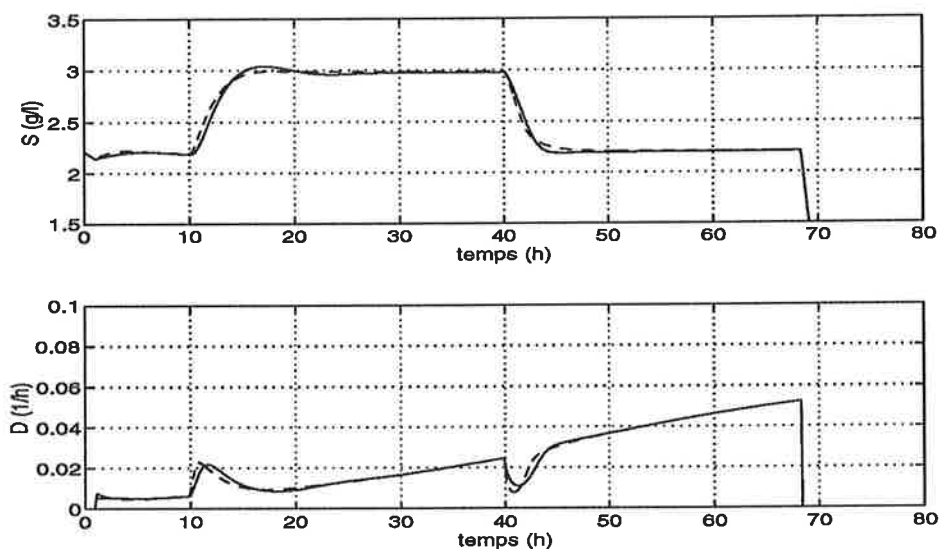


FIG. 20 - Comparaison entre L/A-PI (- - -) et L/A-PI (—) avec terme de décalage.

4.7 Conclusions

Dans cette section, nous avons comparé un contrôleur L/A-PI avec un contrôleur PI. D'abord, nous avons vu les effets des transformations exponentielles et logarithmiques sur le système linéarisé. La dépendance en temps de la fonction de transfert est plus forte pour le L/A-PI que pour le PI, parce que les paramètres du L/A-PI sont définis sans dimension. Cette normalisation intrinsèque rend aussi la fonction de transfert plus robuste par rapport aux perturbations sur S_{in} .

Les performances des deux régulateurs sont tout à fait comparables. Parmi les critères utilisés, c'est seulement la déviation moyenne de la consigne qui nous a montré des différences. Le procédé semble, au niveau de conduite, assez robuste, car la productivité ne varie pas beaucoup, quelle que soit la qualité de la régulation en substrat. L'erreur statique attendue est pratiquement négligeable dans tous les cas et la dissymétrie de la commande L/A aide ici à la réduire encore plus que le PI.

On note que le L/A-PI résiste mieux aux perturbations en S_{in} et que ses performances s'améliorent le long de la simulation, ce qui était prévu. L'amélioration des performances est accompagnée par une augmentation de l'influence du bruit de mesure. Avec un terme de décalage on réduit cette influence au prix d'une dégradation des performances, mais l'augmentation de l'influence du bruit reste.

On a aussi des effets windup pour les deux régulateurs. La positivité de la commande L/A complique ici les possibilités d'enlever cet effet sans ralentir

le procédé. La dissymétrie du L/A-PI, qui est liée à la positivité, a dans certains cas amélioré les performances et dans la section suivante nous allons utiliser un outil graphique pour examiner plus en détail cette dissymétrie.

5 Surfaces de réponse des régulateurs

On a utilisé, pour analyser les non-linéarités de la commande L/A, les surfaces de réponse qui décrivent graphiquement le comportement d'un régulateur. L'idée est de tracer la dérivée de la commande calculée \dot{u} , comme fonction de l'erreur e et la dérivée de l'erreur \dot{e} , en considérant que la consigne y^* est constante. Ainsi on obtient une surface dans l'espace (\dot{u}, e, \dot{e}) .

Il est bien évident que tous les régulateurs ne peuvent être exprimés uniquement comme une fonction de e et \dot{e} . On travaillera alors avec des surfaces instantanées ou paramétrisées qui peuvent quand même fournir une idée qualitative du comportement.

On pourrait aussi tracer d'autres variables comme la commande elle-même u et utiliser les variables d'état du système au lieu de l'erreur etc Le choix que nous avons fait ici est basé sur l'intention de comparer avec un contrôleur PI qui s'exprime dans les variables choisies.

Tout d'abord, nous montrerons quelques surfaces pour des systèmes non-contraints et puis nous continuerons avec des systèmes contraints. Finalement nous étudierons plus en détail les surfaces correspondant à la commande L/A.

5.1 Surfaces pour des systèmes non-contraints

Ici, on montrera, pour un système non-contraint, l'allure des surfaces de réponse des régulateurs P,PI ainsi que celle d'une loi de commande non-linéaire linéarisante. Les surfaces de la commande L/A ne seront pas montrées ici puisqu'elles ne sont valables que pour des systèmes positifs.

Pour faciliter la visualisation des surfaces, nous avons tracé des courbes de niveau sous les surfaces.

Contrôleur P

De l'expression d'un correcteur proportionnel⁹, $u = K_p e$, on arrive immédiatement à l'expression pour la surface

$$\dot{u} = K_p \dot{e} \quad (25)$$

Evidemment cette équation représente un plan dont la pente est orientée dans la direction de l'axe de \dot{e} (figure 21), une caractéristique P. Plus K_p est grande, plus la pente sera raide.

⁹On pourrait aussi prendre $u = u^* + K_p e$ comme expression pour un P mais l'action dérivant supprime des valeurs constantes dans les surfaces pour un système non-contraint

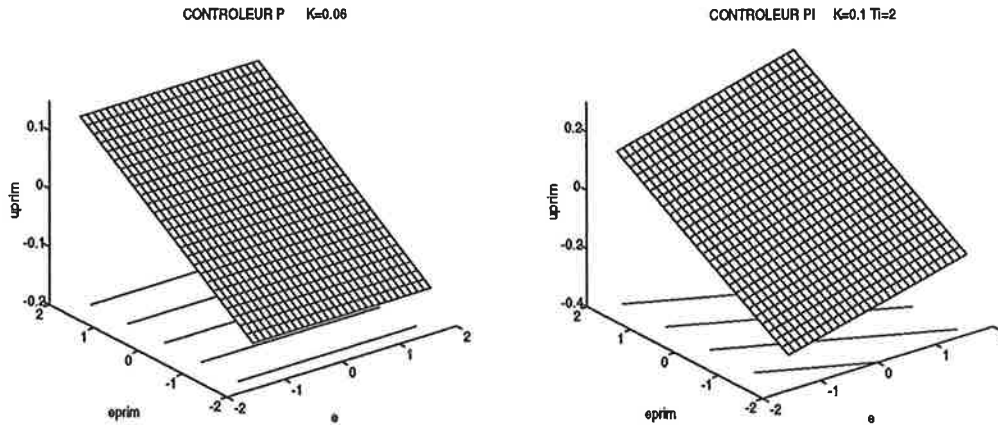


FIG. 21 - Surfaces de réponse typiques pour contrôleur proportionnel (gauche) et contrôleur proportionnel-intégral (droite).

Contrôleur PI

Comme on l'avait fait pour le régulateur P on dérive de l'expression d'un PI, $u = K_p e + K_i \int^t e \, d\tau$, l'équation décrivant la surface de réponse

$$\dot{u} = K_p \dot{e} + K_i e \quad (26)$$

Ce qui représente aussi l'équation d'un plan, mais maintenant aussi avec une pente orientée dans la direction de e , une caractéristique I. Le PI pourrait aussi être vu comme un ensemble de régulateur P mais avec un terme additif qui dépend de l'erreur.

Un PI fait aussi appel au bon sens; plus l'erreur est grande et plus la dérivée est grande, plus on augmente la commande et vice versa.

Commande non-linéaire linéarisante

Contrairement à ce que nous avons vu précédemment, nous allons maintenant présenter une loi de commande qui dépend du modèle. L'idée de cette commande est de faire en sorte que l'erreur suive une équation différentielle linéaire désirée. Nous ne donnerons ici que l'équation pour la commande. La théorie est par exemple présentée dans [3].

Si la méthode est applicable, elle sera dans un certain sens la meilleure mais il faut avoir une connaissance complète du modèle. On utilisera ici le modèle d'équations (14)–(17) sans considérer les contraintes de positivité. L'équation de la commande s'écrit alors

$$u = \frac{1}{S_{in} - S} (k_1 \mu X + \lambda_1 (S^* - S)) \quad (27)$$

où λ_1 est un paramètre de synthèse. Dans ce cas l'erreur suivra l'équation différentielle $\frac{de}{dt} + \lambda_1 e = 0$. On calcule ensuite l'expression décrivant la surface

$$\dot{u} = \frac{1}{(S_{in} - S^* + e)^2} \left\{ -\dot{e} [k_1 \mu X + k_1 \frac{d\mu}{dS} X (S_{in} - S^* + e) + \lambda_1 (S^* - S_{in})] + k_1 \mu X [\mu (S_{in} - S^* + e) - k_1 \mu X - \lambda_1 e] \right\} \quad (28)$$

où μ dépend de l'erreur. Puisque la réponse, outre e et \dot{e} , dépend des variables comme $X(t)$, S_{in} et des paramètres comme k_1 , μ , la surface ne sera valable que localement. Néanmoins, elle fournit tout de même une idée du comportement.

Dans la figure 22 nous montrons la surface pour des valeurs $X = 4 \text{ g/l}$, $S_{in} = 20 \text{ g/l}$, $S^* = 2.21 \text{ g/l}$ et on voit bien une forte caractéristique P. Si l'on regarde encore l'expression (28) en considérant les ordres de grandeurs numériques, on trouve

$$\dot{u} \sim \frac{1}{(S_{in} - S^* + e)^2} \lambda_1 (S^* - S_{in}) \dot{e}$$

Soit une proportionnalité à \dot{e} avec un gain qui varie avec l'erreur et qui est plus faible pour des erreurs positives. Ces propriétés se visualisent sur la surface.

CONTROLEUR LINEARISANT contraint X=4 Sin=20 y*=2.21

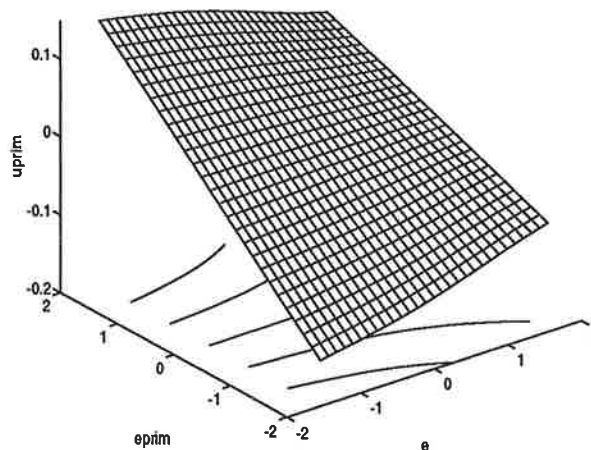


FIG. 22 - Exemple de surface de réponse pour un régulateur non-linéaire linéarisant

5.2 Expressions des contraintes pour un système positif

On reprend ce que nous entendons par système positif un système dont toutes les variables sont positives. Par la suite, nous parlerons d'un système mono-entrée/monosortie avec comme entrée u , sortie y et consigne y^* .

Contraintes sur l'erreur pour un système positif

L'erreur e est définie par $e = y^* - y$. Une quantité qui est évidemment moins grande que la consigne y^* . On a alors

$$e < y^* \quad (29)$$

Cette expression est valable en temps continu aussi bien qu'en temps discret.

En temps discret une autre contrainte se présente. Sous l'hypothèse que la consigne est constante, la différence de l'erreur $\Delta e_k = e_k - e_{k-1}$ est soumise à la contrainte suivante pour une erreur e_k donnée

$$\Delta e_k > e_k - y^* \quad (30)$$

Ceci s'obtient en considérant l'expression suivante pour Δe_k

$$\Delta e_k = e_k - e_{k-1} = e_k - y^* + y_{k-1} > e_k - y^* \quad (31)$$

L'inégalité s'écrit aussi $y_{k-1} > 0$ et elle exprime la connaissance que y_{k-1} était positive.

Ces deux conditions doivent être prises en compte lorsqu'on trace les surfaces de réponse afin de considérer seulement des valeurs de e, e_k et Δe_k qui sont admissibles.

Contraintes sur la commande pour un système positif

Dès que l'on calcule une commande négative pour un système positif on est obligé d'appliquer une commande nulle au procédé. En faisant cela, la dérivée devient aussi nulle et elle n'est plus forcément continue. *Une commande négative se traduit alors par un niveau zéro lors de sa représentation en surface.*

Il faut aussi remarquer que nous considérons ici seulement la contrainte de positivité sur la commande et non pas d'autres contraintes imposées par l'actionneur.

5.3 Surfaces pour des systèmes positifs

Dans cette section, nous présenterons les contrôleurs L/A puisqu'ils s'appliquent seulement à des systèmes positifs.

Contrôleur L/A-P

De l'expression d'un L/A-P (8) et en utilisant $e = y^* - y$, on dérive l'expression de la surface de réponse pour y^* constante

$$\dot{u} = GK \frac{1}{\left(1 - \frac{e}{y^*}\right)^{K+1}} \frac{\dot{e}}{y^*} \quad (32)$$

Tout d'abord, on peut dire que contrairement à un régulateur P non-contraint, la réponse dépend de la consigne ainsi que l'erreur même. Le L/A-P peut être vu comme un P avec un gain équivalent qui varie avec l'erreur car l'expression (32) est en fait de la forme $\dot{u} = k(e)\dot{e}$. On retrouve ici, d'une autre façon, ce que l'on a déjà vu à la page 6.

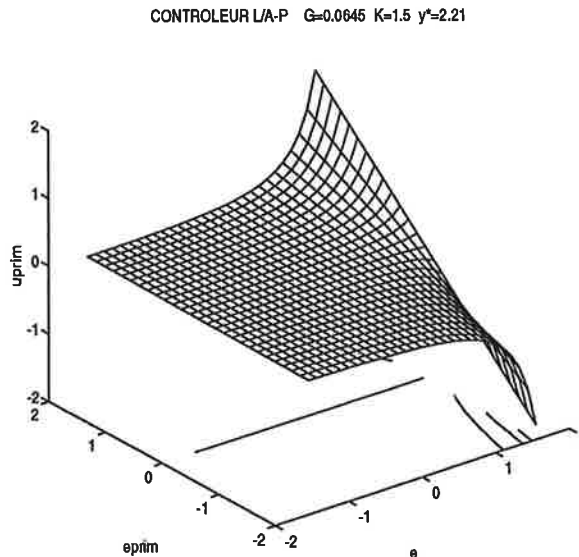


FIG. 23 - Surface de réponse typique pour un régulateur L/A-P

Dans la surface on retrouve un ensemble de droites qui pivotent autour de l'axe de e , un peu comme une surface que l'on a tordue.

Le fait qu'il y ait un plateau dans le demi-plan gauche de e correspond à la contrainte de positivité sur la commande. C'est à dire que pour des erreurs négatives (au-dessus de la consigne) on veut diminuer¹⁰ la commande et on risque de sortir une commande négative. Or, dans cette région, la dérivée de la commande est très petite et on n'atteindra pas des valeurs négatives. Au contraire, dans le demi-plan droite de e , la dérivée \dot{u} peut prendre des valeurs très grandes, ce qui permet de répondre vite pour des erreurs positives. Encore une fois, nous avons vu la dissymétrie de la commande L/A.

On voit aussi dans (32) que e et \dot{e} n'apparaissent que dans les rapports e/y^* , \dot{e}/y^* , une propriété générale pour la commande L/A. De ce fait, on est tenté de tracer des surfaces pour des erreurs relatives, c'est à dire des erreurs normalisées par la consigne. Or, si l'on veut comparer avec d'autres régulateurs, par exemple un PI, on rencontre des problèmes. Comme le PI ne dépend pas de la consigne, il en dépendra après la normalisation mais dans la réalité c'est bien le contrôleur L/A qui en dépend.

¹⁰Si le gain du procédé est positif

Contrôleur P, système contraint positif

L'équation sera la même que pour un système non-contraint à laquelle s'ajoute une équation décrivant la contrainte, à savoir

$$u = u^* + K_p e > 0 \tag{33}$$

Donc pour des erreurs telles que $e < -u^*/K_p$ on appliquera la commande zéro. Dans la surface de réponse on retrouve le plateau rencontré dans le cas L/A mais

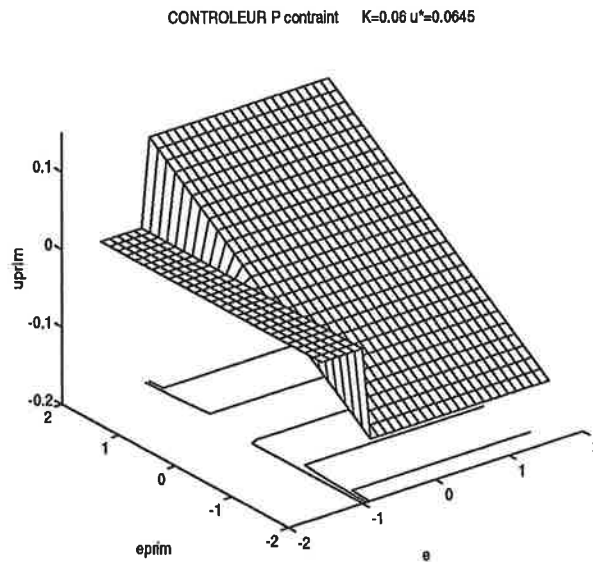


FIG. 24 - P-contraint

maintenant avec une transition discontinue. Cette discontinuité vient du fait que l'on ne prend en compte qu'a posteriori la contrainte de positivité. La question qui se pose est de savoir si la discontinuité est dégradante pour les performances du contrôleur.

Puisque l'équation qui décrit la discontinuité dépend de l'erreur, la surface du régulateur proportionnel, comme pour le L/A proportionnel, dépend maintenant aussi de l'erreur. Or, la position du seuil est fixe et négative.

Contrôleur L/A-PI

C'est un régulateur qui est rarement réalisé en temps continu dont l'expression sera

$$u = \left(\frac{y^*}{y}\right)^{K_1} e^{K_2 \int^t \ln(y^*/y) d\tau} \tag{34}$$

Avec y^* constante on arrive à l'expression de la surface suivante

$$\dot{u} = e^{K_2 \int^t \ln(y^*/(y^*-e)) d\tau} \left\{ K_1 \frac{1}{(1 - \frac{e}{y^*})^{K+1}} \frac{\dot{e}}{y^*} - K_2 \frac{\ln(1 - e/y^*)}{(1 - e/y^*)^{K_1}} \right\} \quad (35)$$

La réponse dépend toujours de y^* , e et \dot{e} , mais il faut maintenant aussi connaître e dans tout l'intervalle de temps $[0, t]$. Donc les surfaces ne sont que des images instantanées, mais comme c'est une expression de la forme

$$\dot{u} = f(e[0, t]) \{k(e)\dot{e} + m(e)\}$$

c'est seulement l'amplitude qui varie avec le temps.

On voit que c'est encore, pour e donnée, l'équation d'une droite, mais une droite qui ne passe pas forcément par l'axe \dot{e} . La surface (figure 25) ressemble beaucoup à celle d'un L/A-P mais si l'on regarde les courbes de niveau il y a une modification due à l'écart de l'axe \dot{e} .

CONTROLEUR L/A-PI K1=1.5 K2=0.75 y*=2.21 int=0.0645

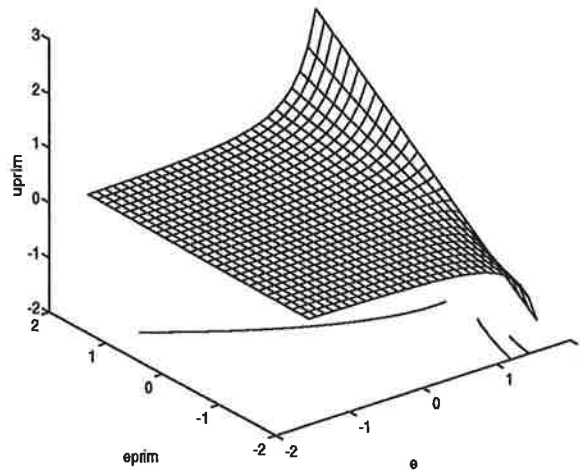


FIG. 25 - Surface de réponse pour L/A-PI

Contrôleur PI, système contraint positif

Pour le PI la contrainte de positivité sera

$$u = K_p e + K_i \int^t e d\tau > 0 \quad (36)$$

Donc pour des erreurs telles que

$$e < -\frac{K_i}{K_p} \int^t e d\tau$$

on appliquera la commande zéro. Cette fois-ci le seuil est fonction du temps¹¹ et de plus on ne connaît pas son signe. C'est à dire que le seuil se déplace dans la direction de l'axe e . Par exemple pour une intégrale négative le seuil se trouvera à droite de l'origine. Ceci nous permet d'expliquer les effets dits "windup". Si le seuil se trouve à droite de l'origine, on appliquera la commande zéro, même pour des états où l'on veut obtenir une commande positive. Il faut, dans ce cas-là, attendre que le seuil recule suffisamment avant que l'on reprenne le contrôle du procédé.

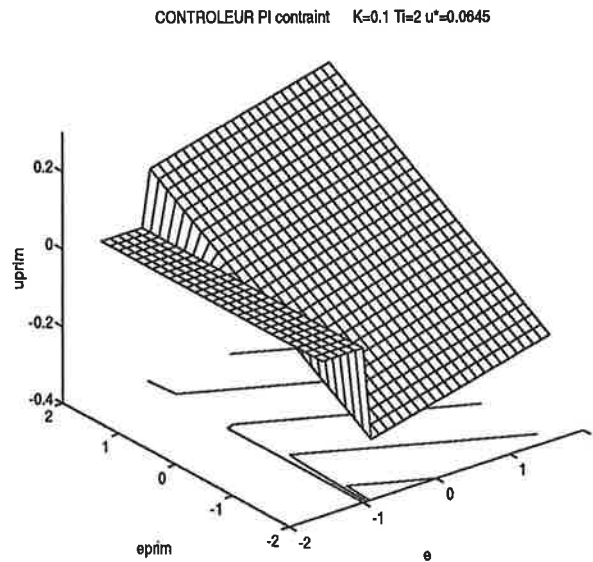


FIG. 26 - PI-contraint. La position de la discontinuité est fonction du temps.

Les surfaces nous permettent également d'expliquer le comportement "windup" d'un L/A-PI vu lors des simulations. Le cas d'une composante intégrale négative ici correspond dans le cas L/A à une composante intégrale petite et donc un facteur multiplicatif très petit. C'est à dire que l'allure de la surface de réponse va être proche d'un plateau aussi du côté positif de l'origine (voir figure 27). Comme nous l'avons vu dans 4.5, la compensation d'un état windup peut être aussi longue dans le cas L/A que dans le cas PI.

Commande non-linéaire linéarisante, système contraint positif

De l'équation (27), on déduit la contrainte sur la commande

$$u = \frac{k_1 \mu X + \lambda_1 (S^* - S)}{S_{in} - S} = \frac{k_1 \mu X + \lambda_1 e}{S_{in} - S^* + e} > 0 \quad (37)$$

¹¹Comme pour le L/A-PI il faut maintenant connaître e dans l'intervalle de temps $[0, t]$ pour caractériser le comportement.

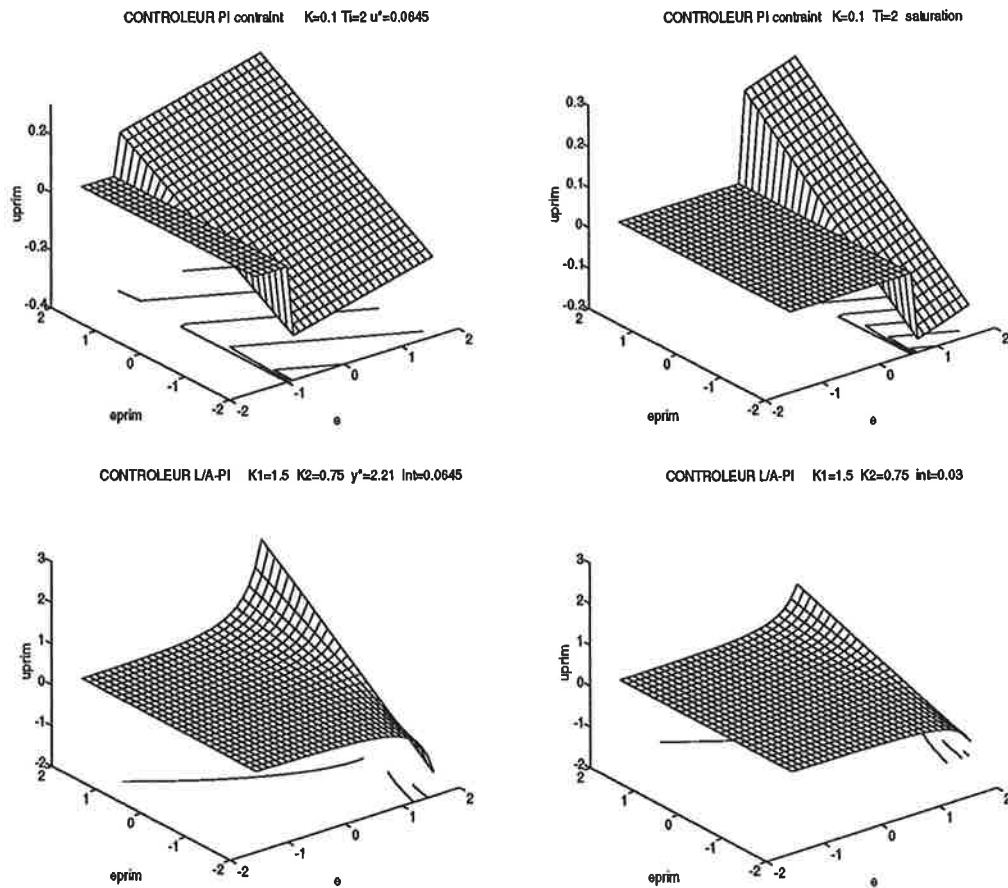


FIG. 27 - Surfaces de réponse pour régulateurs en état "normal" (gauche) et en état "windup" (droite)

Sous la condition que $S_{in} - S > 0$, ce qui est presque toujours vérifié, la région pour laquelle on sort $u = 0$ est donnée par

$$e < -\frac{k_1 \mu X}{\lambda_1}$$

Encore une fois la position du seuil est fonction du temps et de l'état mais elle est ici toujours positive ou nulle, car k_1 , μ et X sont toujours non-négatifs.

CONTROLEUR LINEARISANT contraint $X=4$ $\text{Sin}=20$ $\gamma^*=2.21$

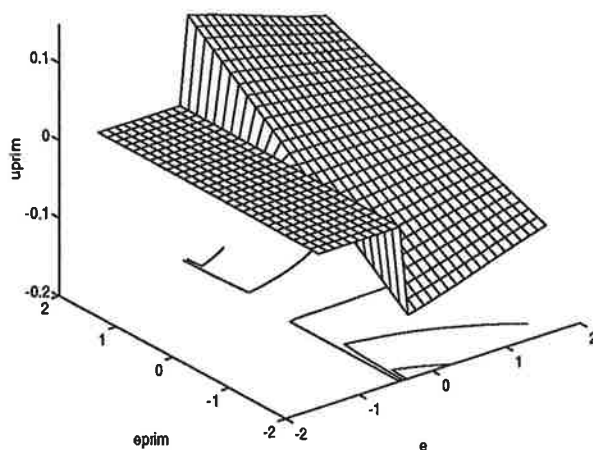


FIG. 28 - Commande non-linéaire linéarisante contrainte. La position de la discontinuité est fonction du temps mais négative.

Conclusions

Nous avons dans les surfaces de réponse revu la dissymétrie de la commande L/A. Le respect de la positivité se traduit par un plateau vers lequel la transition est lisse. Les contrôleurs classiques montre ici une discontinuité. On a aussi vu les effets windup comme un mouvement de cette discontinuité ou dans le cas L/A comme un aplanissement d'une surface. Dans un premier temps, il semblait que un régulateur L/A utilisait plus d'information que son correspondant classique. Par exemple, la surface d'un régulateur P dépend de \dot{e} alors que celle d'un régulateur L/A-P dépend de e et \dot{e} . Cependant, lorsqu'on considère aussi la contrainte de positivité, le P dépend aussi de e . Pour le PI et le L/A-PI, une connaissance de e dans un intervalle de temps est nécessaire pour caractériser le comportement. Alors, si l'on prend en compte la contrainte a priori ou a posteriori, le nombre de variables pour décrire le comportement est le même.

5.4 Surfaces de réponse en temps discret

Nous avons aussi cherché à élargir la notion de surfaces de réponse en temps discret. On tracerait alors les différences Δu , Δe_k au lieu des dérivées.

Pour des régulateurs classiques tels que P et PI ça ne pose aucun problème, cependant pour les régulateurs L/A ce n'est pas le cas. Les expressions obtenues dans le cas L/A dépendent toujours des commandes passées et de plus, on trouve plusieurs expressions pour un même contrôleur qui semblent toutes aussi raisonnables les unes que les autres. Par exemple, pour le L/A-PI on peut exprimer Δu en fonction de $u_{k-1}, e_k, \Delta e_k$ ou $u_{k-2}, e_k, \Delta e_k$. Ces deux solutions ont des surfaces très différentes.

En conclusion, nous utiliserons les surfaces provenant du temps continu à condition que le temps d'échantillonnage soit assez court.

5.5 Synthèse de régulateur à partir d'une surface

Pour mettre en évidence la correspondance comportement-surface, nous allons faire quelques manipulations. Nous allons donc effectuer la synthèse d'un régulateur afin que sa surface de réponse corresponde à une surface donnée.

Commençons avec un régulateur optimal et sa surface correspondante. Nous allons chercher une nouvelle expression d'une commande dont la surface s'approche de la surface optimale. Ensuite on vérifiera en simulation si leurs comportements se ressemblent.

Notre surface optimale sera celle d'une commande linéarisante. Elle ressemble, à chaque instant, à une surface provenant d'un régulateur proportionnel mais plus encore à celle d'un L/A-P que l'on aurait symétrisé par rapport à l'axe \dot{e} .

Nous avons donc modifié (8) avec des changements de signes et en ajoutant des termes de décalage pour obtenir la surface désirée. L'expression résultante paraît dans un premier temps assez originale

$$u = G \left(1 - \left(\frac{y^* + R}{2y^* - y + R} \right)^K \right) + u^* \quad (38)$$

La surface correspondante s'approche vraiment de celle de la commande linéarisante. Il ne faut pas oublier que cette dernière dépend du temps et que, de ce fait, le régulateur correspondant évite ainsi des erreurs statiques. Avec notre régulateur pseudo-proportionnel, le seul moyen de réduire les erreurs statiques serait d'augmenter les gains G ou K . Nous avons donc augmenté le gain G d'un facteur 2 et les deux surfaces se différencient alors un peu plus.

Simulation

Nous avons simulé les deux régulateurs sur notre modèle en réacteur continu et en temps continu. Les valeurs initiales étaient $(S_0, X_0, P_0) = (2.21, 8.88, 8.88)$ g/l, ce qui correspond à un équilibre. Le volume du réacteur était 5 l et les valeurs mises dans l'expression (38) étaient $G = 0.2, K = 6, R = 12$. La consigne a été

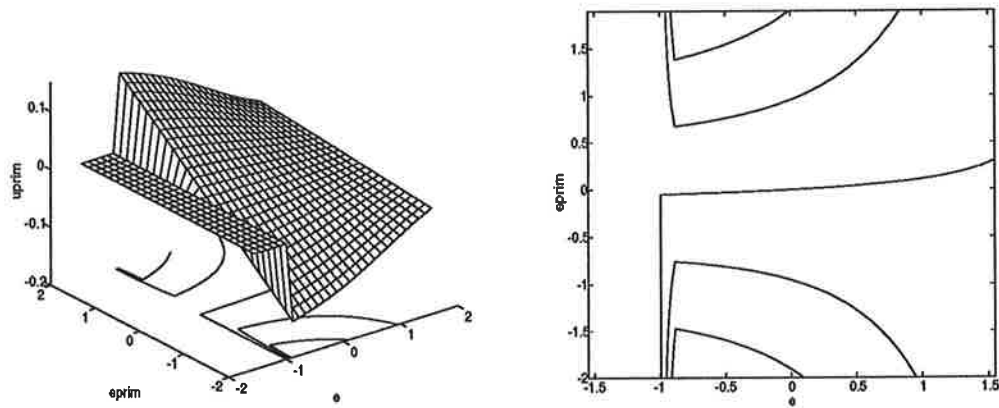


FIG. 29 - Surface optimale avec courbes de niveau.

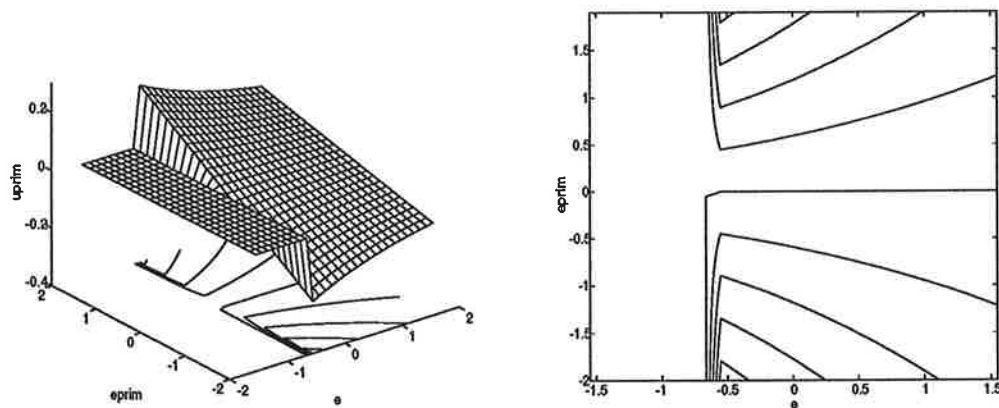


FIG. 30 - Surface provenant du régulateur L/A modifié avec courbes de niveau.

définie comme suit

$$S^* = \begin{cases} 1.4 \ g/l & 50 < t < 80 \\ 2.21 & 0 < t < 10, \ 30 < t < 50 \\ 3 & 10 < t < 30 \end{cases}$$

Dans la figure 31 on voit que le régulateur (38) arrive à réguler le substrat mais avec une erreur statique, comme nous l'avons prévue. Il est aussi plus rapide que le régulateur linéarisant, ceci vient du fait que l'on a augmenté le gain d'un facteur 2 (la surface de réponse est plus raide).

On a vu que deux régulateurs avec des expressions très différentes mais avec des surfaces semblables ont des comportements comparables. A partir d'une surface "optimale", on cherche une expression qui imite cette surface et dont le régulateur correspondant arrive à contrôler le procédé. Peut-être le concept de

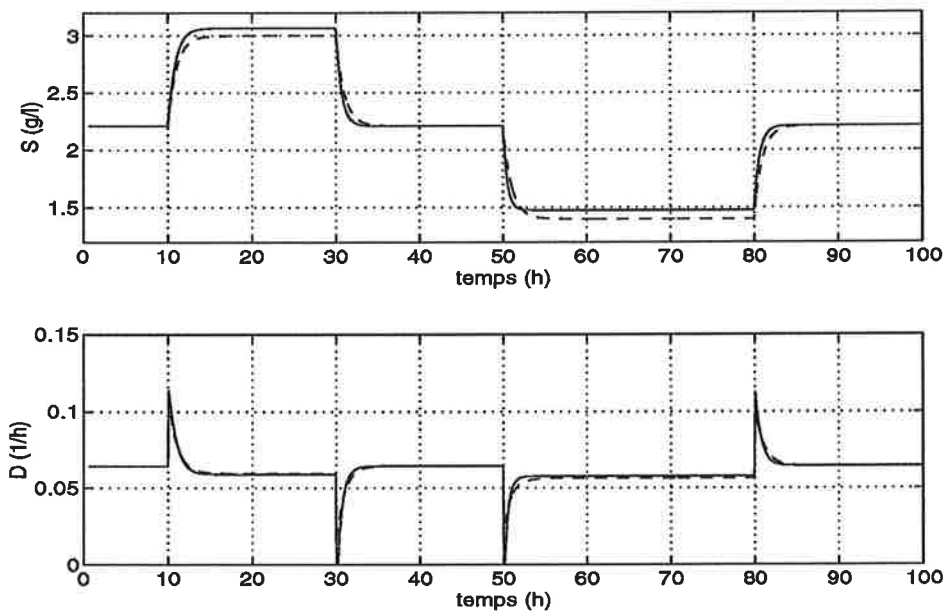


FIG. 31 - Résultat de simulation. Régulateur L/A modifié (—). Régulateur linéarisant (- - -).

surfaces de réponse pourrait-il servir comme aide à la synthèse des contrôleurs flous ou interpolants¹².

5.6 Etude de la commande L/A à partir des surfaces de réponse

Nous allons ici étudier les effets de la dissymétrie de la commande L/A et plus spécialement son influence sur des oscillations

Pour donner une idée des conséquences de la dissymétrie dans les surfaces L/A, nous avons d'abord simulé un régulateur P et un L/A-P en réacteur continu. Ils sont réglés afin d'obtenir la même pente dans les surfaces pour une erreur nulle. Nous montrons ici les résultats d'une simulation où on a fait une perturbation de type échelon en S_{in} de +200% pendant 40 h.

Conditions de simulation

On règle le substrat S autour de $(X, S, P) = (6.395, 2.21, 6.395) \text{ g/l}$, qui correspond à un équilibre, avec le taux de dilution D comme variable de commande. Le volume V est 5 l.

¹²Pour des régulateurs interpolants voir [12].

Le régulateur P est donné par $u = u^* + K_p(y^* - y)$ avec $K = 0.5$, $u^* = 0.0645$. Le L/A-P est défini par $u = u^*(y^*/y)^K$ avec $K = 17$, $u^* = 0.0645$. On vérifie que la pente à $e = 0$ est la même avec $u^*K/y^* = 0.496 \approx 0.5 = K_p$.

Le substrat alimenté est défini comme suit

$$S_{in} = \begin{cases} 15 \text{ g/l} & 0 < t < 10, \quad 50 < t < 100 \\ 45 & 15 < t < 50 \end{cases}$$

Résultats

On voit sur la figure 32 que le régulateur P réagit plus vite pour des erreurs négatives (au-dessus de la consigne) et le L/A-P pour des erreurs positives. Ce résultat était prévu par l'examen des surfaces de réponse. Car la surface du L/A-P a une pente plus raide que le P pour les erreurs positives et vice versa. C'est à dire que le L/A-P possède un gain proportionnel équivalent plus élevé que le P pour les erreurs positives et il peut ainsi réagir plus vite.

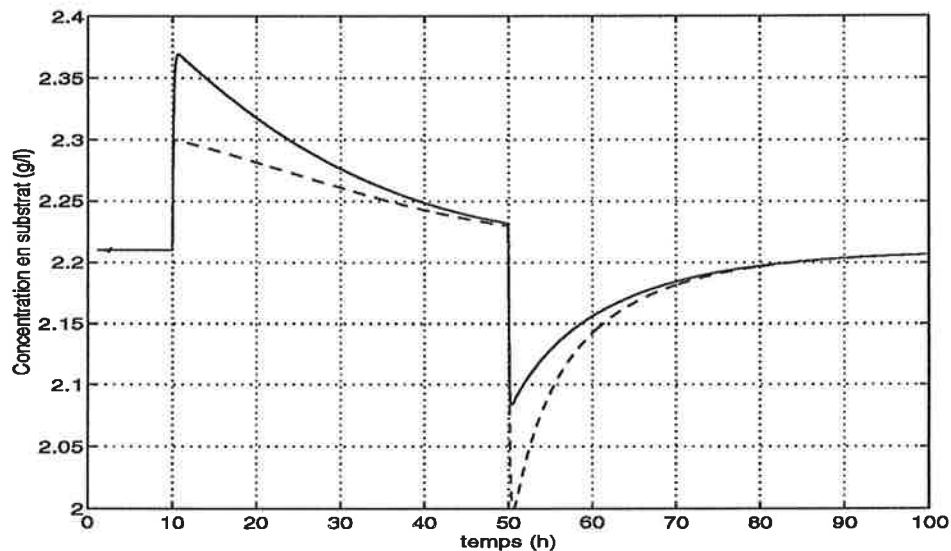


FIG. 32 - Régulation de concentration en substrat. — L/A-P. - - - - P.

Une autre façon de voir ce phénomène est de regarder le plan de phase (e, \dot{e}) . Le L/A-P a des trajectoires plus petites que le P dans le demi-plan droit et inversement.

On devrait retrouver les mêmes résultats pour des autres comparaisons entre régulateurs L/A et leurs équivalents classiques. Ceci parce que la différence principale entre la commande L/A et des commandes classiques est sa dissymétrie.

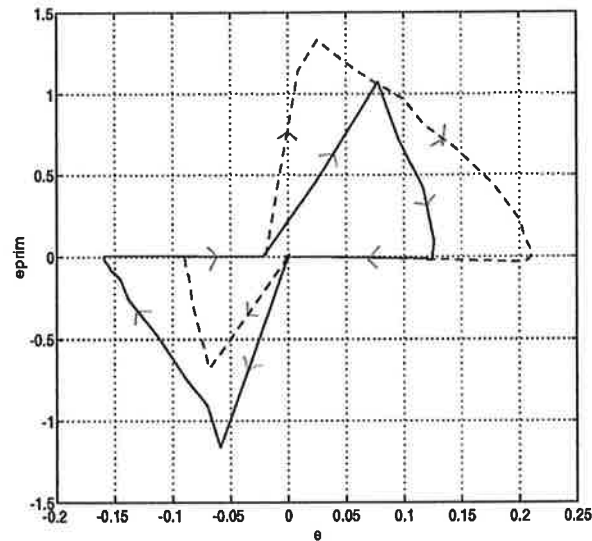


FIG. 33 - Trajectoires dans le plan (e, \dot{e}) — L/A-P. - - - - P.

Influence de la dissymétrie sur des oscillations

Dans [15] on a trouvé qu'un régulateur L/A arrivait à éliminer des perturbations en S_{in} , tandis qu'un régulateur PI et un régulateur flou commençaient à osciller. On a aussi trouvé dans [13], lors de l'étude d'un contrôleur PI, que le fait de réduire l'amplitude de la surface de réponse dans la région marquée (figure 34) permettait de réduire ces oscillations. La modification était réalisée avec un contrôleur flou. Or, on remarque qu'avec de telles modifications, la surface résultante s'approche de celle d'un contrôleur L/A. Il semble donc que cette propriété, outre la robustesse des pôles vis-à-vis S_{in} , aussi est liée à la dissymétrie de la commande L/A.

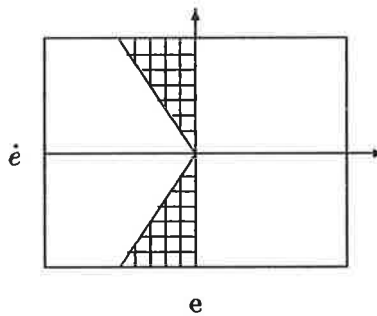


FIG. 34 - Régions de modification pour un contrôleur flou.

Simulation

Dans l'esprit d'essayer d'expliquer ce phénomène, nous avons simulé notre procédé en fedbatch en faisant des perturbations sur S_{in} . Les régulateurs utilisés sont ceux de la section 4.

Même pour des perturbations de 200% nous n'avons pas réussi à faire osciller le système. Vu que dans [15] on a utilisé un temps d'échantillonnage t_e de 0.5 h, nous avons aussi augmenté le temps d'échantillonnage. Pour $t_e = 0.3$ h, le PI montre une oscillation amortie lorsqu'on envoie une perturbation en S_{in} de 200% (figure 35). Une explication est donnée par les pôles du système linéarisé tangent.

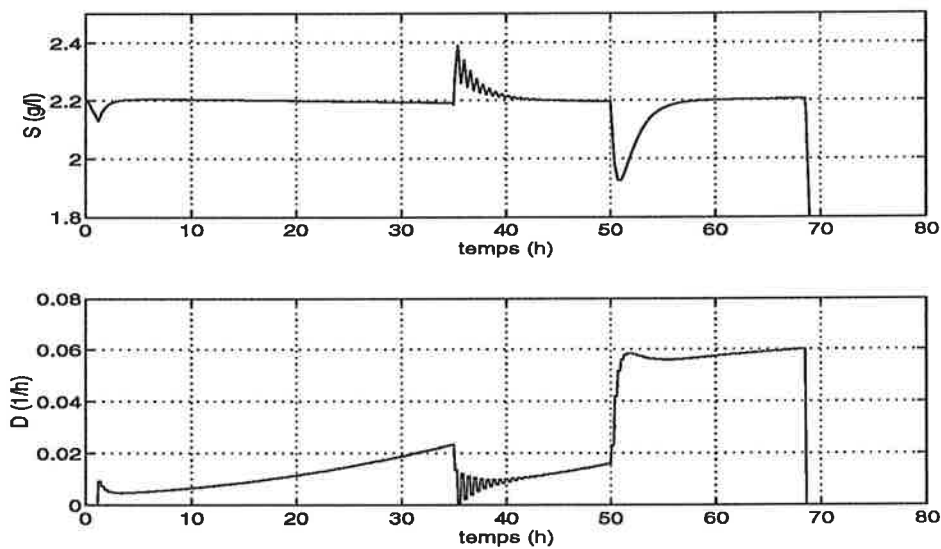


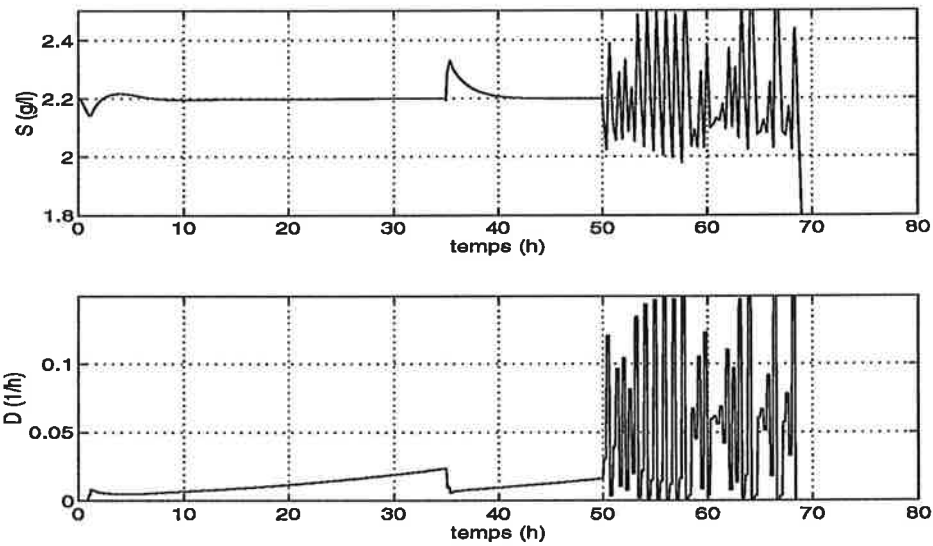
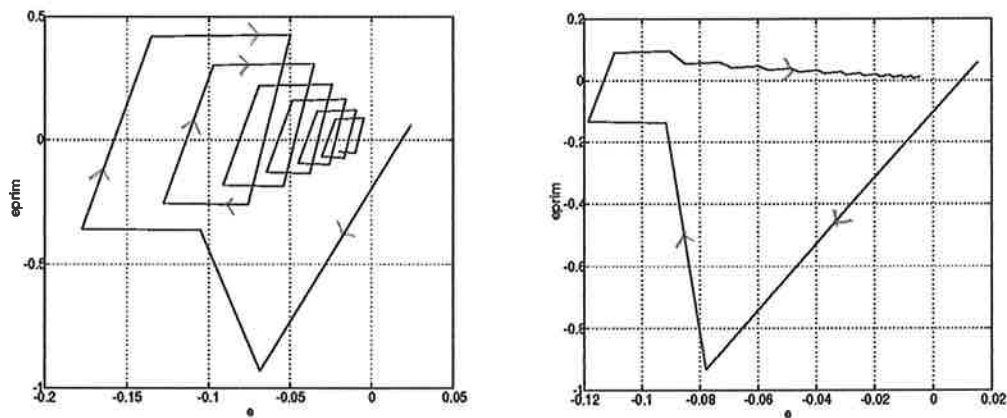
FIG. 35 - Régulation de substrat avec PI. Perturbation en S_{in} de +200%.

Lorsque S_{in} augmente de 20 g/l à 60 g/l, un pôle stable devient un pôle stable oscillant (axe réel négatif). Quand S_{in} est rétabli, le système est à nouveau stable non-oscillant.

Par contre le L/A, qui a lui aussi un pôle stable oscillant pour $t = 35$ h et $S_{in} = 60$ g/l, n'oscille pas (figure 36). Quand S_{in} redescend à 20 g/l le système a des pôles oscillants et même des pôles instables après $t \approx 45$ h, ce qui explique les oscillations à la fin de la simulation.

Mais pourquoi le L/A-PI n'oscille-t-il pas? La réponse se trouve dans la dissymétrie. Dans figure 37 on a tracé les trajectoires dans le plan (e, \dot{e}) pour 34 h $< t < 39$ h. On sait que que les surfaces de réponse de la commande L/A sont assez plates dans le demi-plan gauche. C'est à dire que les gains équivalents sont faibles, ce qui nous explique intuitivement l'absence d'oscillations.

Si l'on calcule les pôles du système linéarisé tangent avec les gains qui correspondent à la trajectoire, on retrouve des pôles stables non-oscillants. On peut

FIG. 36 - L/A-PI. Régulation de substrat. Perturbation en $S_{in} +200\%$ FIG. 37 - Trajectoires correspondants aux simulations dans figures 35 et 36 dans le plan (e, \dot{e}) pour $34 h < t < 39 h$. PI (droite) et L/A-PI (gauche).

aussi entrevoir dans la figure 37 des petites ondelettes lorsque l'erreur s'approche de zéro, autrement dit, le gain équivalent augmente à nouveau. La dissymétrie a donc étouffé l'oscillation attendue.

La dissymétrie ne peut-elle pas avoir l'effet contraire pour une perturbation qui entraîne une erreur initiale négative? Un exemple est donné par la simulation suivante. Le même procédé a été utilisé mais le régulateur est maintenant un L/A-PI avec $K = 6$, $T_i = 2.6 h$ pour $t_e = 0.5 h$. On envoie une perturbation en S_{in} de 200% de $t = 20 h$ à $t = 33 h$.

Même si le système tangent est stable non-oscillant au moins jusqu'à $t = 40 h$, on voit une oscillation causée par le changement en S_{in} à partir de $33 h$. Dans le plan de phase, la trajectoire dans le demi-plan droit correspond à l'oscillation initiale. On retrouve ceci en examinant dans cette zone la surface de réponse qui est raide et le gain équivalent qui est grand. Un calcul des pôles du système linéarisé tangent avec le gain équivalent exhibe un pôle sur l'axe réel négatif, ce qui explique l'oscillation initiale.

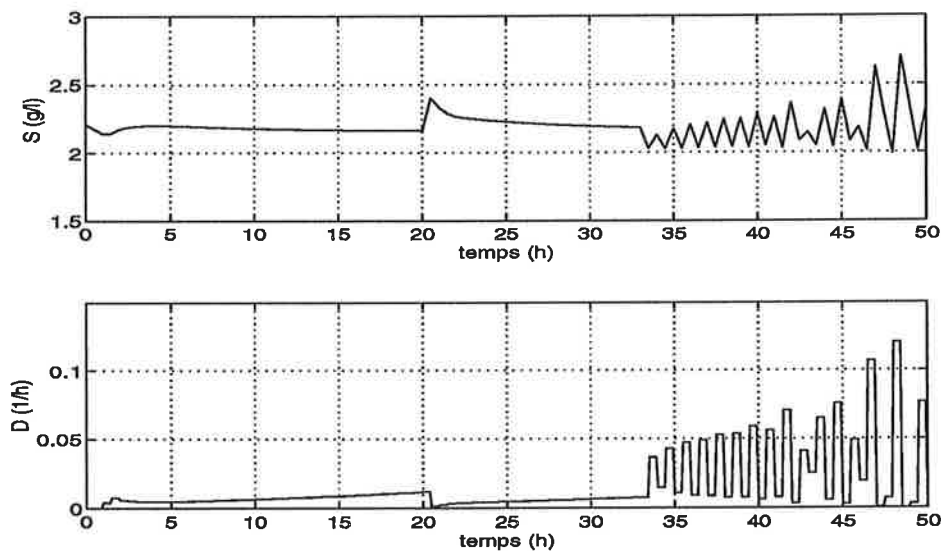


FIG. 38 - Régulation de substrat avec perturbation en S_{in} . L/A-PI $K = 6$, $T_i = 2.6 h$, $t_e = 0.5 h$.

Nous avons cherché des exemples qui nous ont montré que dans certaines conditions *il peut arriver que* la commande L/A:

- évite des oscillations quand une analyse du système linéarisé tangent prédit un système oscillant.
- cause des oscillations quand une analyse du système linéarisé tangent prédit un système non-oscillant.

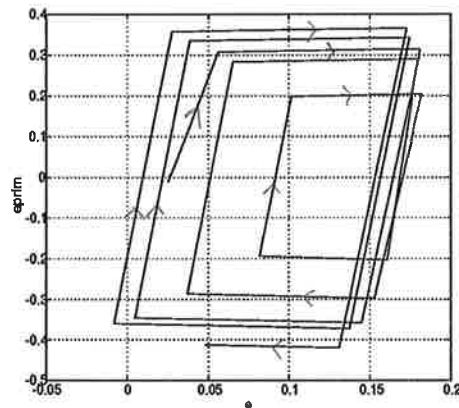


FIG. 39 - Trajectoire correspondante à figure 38 dans (e, \dot{e}) pour $33 h < t < 38 h$

Il serait donc intéressant d'examiner cet aspect de la commande L/A pour un procédé linéaire.

5.7 Conclusions

Nous avons dans cette section utilisé les surfaces de réponse pour décrire les comportements des régulateurs. Cette méthode graphique consiste à tracer la dérivée de la commande comme fonction de l'erreur entre la sortie et la consigne et la dérivée de cette erreur. Elle permet de mettre en évidence certaines non-linéarités d'un régulateur.

Dans un premier temps il semblait qu'il fallait utiliser plus de variables pour caractériser le comportement d'un contrôleur L/A que pour son correspondant classique. Or, lorsqu'on introduit la contrainte de positivité, le nombre de variables est le même. La contrainte de positivité apparaît dans les surfaces comme un plateau. Si l'on prend en compte cette contrainte a posteriori avec les régulateurs classiques, la transition vers ce plateau est discontinue. Le fait que la commande L/A par conception respecte la positivité se traduit par une transition continue lisse au lieu d'une discontinuité.

On a aussi vu l'aspect windup comme un phénomène dynamique; pour le PI classique, le seuil ou la discontinuité se déplace augmentant ainsi la région plate dans la surface de réponse; pour le L/A-PI la surface s'aplanit continument.

Nous avons fait la synthèse d'un régulateur à partir d'une surface et finalement nous avons étudié la dissymétrie de la commande L/A. Cette dissymétrie entraîne que la commande L/A a des trajectoires moins grandes dans le demi-plan droit du plan de phase (e, \dot{e}) que le régulateur classique correspondant et vice versa. Cela nous a aidé lors de l'analyse d'oscillations. On a trouvé, pour notre procédé, qu'un régulateur peut éviter des oscillations quand une analyse linéaire les prévoit et qu'au contraire, il peut causer des oscillations quand on ne s'y attend pas.

6 Conclusions

Un des problèmes que l'on rencontre en commande des bioprocédés est les contraintes de positivité sur les variables. Dans ce travail, nous avons étudié une commande conçue pour prendre en compte ces contraintes, la commande L/A. A l'aide d'un changement de variables, on s'affranchit des contraintes et on peut, dans les variables transformées, appliquer les techniques de commande bien connues. Dans la première partie, est présenté le principe de cette commande ainsi que quelques exemples. Ensuite nous avons fait un bref rappel sur les bioprocédés et présenté le modèle utilisé lors des simulations.

Puis nous avons comparé un régulateur de type L/A provenant d'un régulateur PI avec son correspondant classique. Les performances des deux régulateurs en boucle fermée varient avec le temps du fait des variations de la biomasse. A cause de la définition des paramètres du L/A-PI qui sont sans dimension, cette variation de performance est plus grande pour le L/A-PI. Les performances en poursuite s'améliorent au cours du temps tandis que l'influence du bruit augmente. On remarque aussi que les propriétés varient moins pour le système L/A que pour le système PI lors des changements de la concentration en substrat dans la alimentation. On observe des effets windup pour les deux régulateurs mais dans le cas L/A, ils sont difficiles à supprimer.

Pour l'analyse de régulateurs, nous avons étudié une approche graphique, donnée par les surfaces de réponse. Ces surfaces représentent la dérivée de la commande en fonction de l'erreur de la sortie et sa dérivée. Le fait que les régulateurs classiques ne prennent en compte qu'a posteriori la contrainte de positivité apparaît dans les surfaces comme une discontinuité tandis que les régulateurs L/A possèdent des surfaces continues. Il reste à décider si cette discontinuité a des effets dégradants pour les performances d'un régulateur. Ces surfaces nous ont également permis de visualiser le phénomène windup, aussi bien dans le cas PI que L/A-PI. Finalement, une analyse des effets de la dissymétrie de la commande L/A a été faite, qui montre qu'une analyse du système linéarisé tangent n'est pas suffisante pour prédire des oscillations, voire même la stabilité locale du système.

Les effets des transformations L/A sont donc divers et contrastés:

- Le respect de la positivité est intéressant mais complique les dispositifs anti-windup.
- Les transformations induisent une dissymétrie qui permet, dans certains cas, d'améliorer les performances mais qui rend aussi plus difficile l'analyse de stabilité.
- Finalement, les paramètres qui correspondent aux gains dans les régulateurs classiques sont par définition sans dimension, ce qui peut donner des propriétés différentes par rapport à ces derniers.