

ISSN 0280-5316
ISRN LUTFD2/TFRT-5481-SE

Självinställande Extremalsökare

Henrik Nilsson
Tony Sandberg

Institutionen för Reglerteknik
Lunds Tekniska Högskola
1993-09-03

**TILLHÖR REFERENSBIBLIOTEKET
UTLÅNAS EJ**

Department of Automatic Control Lund Institute of Technology P.O. Box 118 S-221 00 Lund Sweden		<i>Document name</i> MASTER THESIS	
		<i>Date of issue</i> September 1993	
		<i>Document Number</i> ISRN LUTFD2/TFRT--5481--SE	
<i>Author(s)</i> Henrik Nilsson Tony Sandberg		<i>Supervisor</i> Björn Wittenmark	
		<i>Sponsoring organisation</i>	
<i>Title and subtitle</i> Selftuning extremum control (Eng) Självinställande extremalsökare (Swe)			
<i>Abstract</i> <p>This report describes the use of selftuning concepts in the classical problem of extremum control. Different approaches are tried, both a numerical method and methods based on adaptive control. Extremum controllers are by necessity nonlinear. It is therefore of great importance how the processes are modelled. We have chosen the Hammerstein model, because it is linear in the parameters, which makes it suitable for parameter identification.</p> <p>Investigations will be made about extremum control of static nonlinear, dynamic nonlinear and time-varying dynamic nonlinear functions. In this report it is assumed that the measurement of the function is corrupted by noise. A suitable numerical method for this case is Kiefer-Wolfowitz procedure, which is a stochastic approximation method. Four adaptive methods will be used as extremum controllers, the only difference between them is the parameter estimation algorithm. The estimation algorithms are the Kulhavy-Karny method, the extended least square algorithm with forgetting factor, the exponential forgetting and resetting algorithm and the Kalman-filter method. Different model structures will also be investigated.</p> <p>Many problems can arise when an extremum controller is used e.g. dynamics, transients and non persistent excitation. In this report suggestions will be made to optimize the performance of the controller. Results shows that the methods based on adaptive control are superior the numerical method. The objective is to appreciate the problems of extremum control and to understand how self-tuning techniques can be applied in this important but neglected area of selftuning technology.</p>			
<i>Key words</i>			
<i>Classification system and/or index terms (if any)</i>			
<i>Supplementary bibliographical information</i>			
<i>ISSN and key title</i> 0280-5316		<i>ISBN</i>	
<i>Language</i> Swedish	<i>Number of pages</i> 60	<i>Recipient's notes</i>	
<i>Security classification</i>			

The report may be ordered from the Department of Automatic Control or borrowed through the University Library 2, Box 1010, S-221 03 Lund, Sweden, Fax +46 46 110019, Telex: 33248 lubbis lund.

Förord

Denna rapport avslutar ett examensarbete utfört på Institutionen för Reglerteknik vid Lunds Tekniska Högskola sommaren 1993 av två E-teknologer. Examensarbetet bygger på kunskaper i adaptiv reglering och behandlar extremalreglering av olinjära stokastiska system.

Vi hoppas de som läser rapporten skall finna den intressant och att den skall väcka till intresse för extremalreglering. Samtidigt vill vi tacka vår handledare, Björn Wittenmark, för hans engagemang och värdefulla synpunkter. Till sist vill vi också tacka de som tagit sig tid åt de samtal och diskussioner som genomförts.

Lund, en regnig sensommardag i september 1993.

Henrik Nilsson

Tony Sandberg

Innehåll

1	Inledning	1
2	Problemformulering	2
3	Statiskt system	3
3.1	Stokastisk approximation	3
3.1.1	Extremalsökning med stokastisk approximation	5
3.2	Adaptiv reglering	6
3.2.1	Extremalsökning med adaptiv reglering	7
3.2.2	Excitation av systemet	8
3.3	Resultat	10
4	Dynamiskt system	11
4.1	Stokastisk approximation	11
4.1.1	Dynamik i systemet	12
4.1.2	Faskurvor för stokastisk approximation	13
4.1.3	System med instabil invers	13
4.2	Adaptiv reglering	15
4.2.1	Dynamik i systemet	15
4.2.2	Faskurva för adaptiv reglering	18
4.2.3	System med instabil invers	18
4.2.4	System med utökad dynamik	19
4.3	Förlustfunktioner	20
4.4	Resultat	21
5	Tidsvariabelt system	22
5.1	Stokastisk approximation	22
5.1.1	Observationer vid simuleringar	22
5.2	Adaptiv reglering	23
5.2.1	Excitation av systemet	25
5.2.2	Kulhavy och Karnys metod	25
5.2.3	Extended least square	26
5.2.4	Kalmanfilter metoden	27
5.2.5	Exponential forgetting and resetting algorithm	29
5.2.6	Parameter estimering	31
5.3	Resultat	32
6	Lägre ordningens modell	34
6.1	Approximation med statiskt modell	34
6.1.1	Kalmanfilter metoden	34
6.1.2	EFRA metoden	35
6.1.3	Karakteristik för statisk modell	36
6.2	Approximation med förenklad modell	37
6.2.1	Kalmanfilter metoden	37
6.2.2	EFRA metoden	38
6.3	Resultat	39
7	Högre ordningens modell	40
7.1	Utökad modell med sju parametrar	40
7.1.1	Kalmanfilter metoden	40
7.1.2	EFRA metoden	41
7.2	Utökad modell med elva parametrar	42
7.2.1	Kalmanfilter metoden	42

7.2.2 EFRA metoden	43
7.3 Resultat	43
8 Sammanfattning	45
A Stokastisk approximation	47
B Adaptiv reglering	50

1 Inledning

Det har i många år forskats kring adaptiv reglering av linjära dynamiska system och nu finns välgrundad teori tillgänglig, se t ex Åström och Wittenmark [1]. Adaptiv reglering av olinjära system är mindre utredd och ett mycket svårare område. En stor svårighet är antagandena som måste göras för få ett väldefinierat problem.

Adaptiva metoder för linjära system kan ibland också användas för olinjära processer, förutsatt att arbetspunkten inte ändras för snabbt eller för ofta. Om däremot olinjäriteten är för stor blir det tvunget att modifiera den adaptiva algoritmen.

I de flesta reglerproblem antas det att referensvärdet är givet. Referensvärdet är i de flesta fall lättbestämt. Det kan t ex vara den önskade koncentrationen av ett ämne i en produkt, en nivå i en tank eller en tjocklek på ett papper. Vid andra tillämpningar kan det vara svårt att bestämma den önskade arbetspunkten. Referensvärdet kan då bestämmas av önskan att ha så hög effektivitet som möjligt i processen. Att följa ett varierande maximum eller minimum benämns extremalsökning. Vid extremalsökningen har den stationära kurvan som relaterar insignalen till utsignalen minst en extrempunkt. Regulatorns uppgift i ett extremalsökande system är att hålla utsignalen så nära processens extremvärde som möjligt. Det finns ett flertal processer som har detta beteende. Reglering av luft-bränsle blandningen i en förbränningsprocess är ett exempel. Luftflödet regleras då oftast till sitt optimum för ett givet bränsleflöde. Den optimala inställningen varierar, eftersom t ex temperaturen och bränslekvaliteten ändras. Ett annat exempel är vattenturbiner av Kaplan typ, där bladets vinkel på turbinen ändras för att ge max uteffekt. Samma typ av problem existerar för vindkraftverk, där bladvinkeln justeras med avseende på vindhastigheten. För att lösa problem av den här typen måste problemet formuleras på ett korrekt sätt.

I denna rapport kommer statiska olinjäriteter, dynamiska olinjäriteter och tidsvariabla dynamiska olinjäriteter undersökas. Både metoder baserade på numeriska approximationer och metoder baserade på adaptiv reglering används för att extremalsöka processen.

2 Problemformulering

För att kunna adaptivt reglera olinjära system krävs att antaganden görs gällande processens struktur. Då systemen är okända måste de först identifieras. De flesta identifieringsmetoder bygger på antagandet att modellen är linjär i parametrarna. Ett sätt att förenkla problemet är att dela upp processen i en olinjär statisk del och en linjär dynamisk del.

Approximationsmetoder har använts för att härleda de existerande typerna av systemrepresentationer för olinjära system t ex Volterra, Wiener och Uryson serier. Dessa tre serieutvecklingar har den saken gemensamt att de kan modellera processer där linjär dynamik följs av en olinjäritet. Ett specialfall av Uryson serien är Hammerstein modellen [2], vilken är den mest vanligt förekommande modellen i litteraturen om extremalreglering. En typisk Hammersteinmodell ser ut enligt följande

$$A^*(q^{-1})y(t) = B^*(q^{-1})f(u(t)) + C^*(q^{-1})e(t)$$

Där $A^*(q^{-1})$, $B^*(q^{-1})$ och $C^*(q^{-1})$ är polynom i bakåtskift operatorn q^{-1} , f är en olinjär funktion och $e(t)$ är gaussiskt vitt brus. För att ytterligare specificera kommer modellen i rapporten beskrivas av

$$A^*(q^{-1})y(t) = B_0^* + B_1^*(q^{-1})u(t-1) + B_2^*(q^{-1})u^2(t-1) + C^*(q^{-1})e(t)$$

I rapporten antas det att det är ett minimum som söks d v s B_2^* polynomet är positivt.

Målsättningen för arbetet har varit att undersöka extremalsökning av olinjära stokastiska system beskrivna av Hammersteinmodellen. Arbetet har inriktats på att jämföra befintliga numeriska metoder med adaptiva metoder.

3 Statiskt system

I många undersökningar av extremalsökande system antas det att systemet är statiskt. Detta antagande kan rättfärdigas om tiden mellan ändringarna i regler-signalen är tillräckligt lång. För statistiska system är det möjligt att använda ett flertal olika numeriska metoder för optimering. Eftersom processen påverkas av brus är metoder med stokastisk approximation lämpliga för extremalsökning. I detta kapitel beskrivs den statistiska processen enligt Hammersteinmodellen av

$$y(t) = b_0 + b_1 u(t-1) + b_2 u^2(t-1) + ce(t) \quad (3.1)$$

Där $e(t)$ är vitt brus och parametrarna ges av

$$b_0 = 2.5 \quad (3.2)$$

$$b_1 = 2.5$$

$$b_2 = 5.0$$

$$c = 1.0$$

Det statistiska svaret mellan in- och utsignal ges av

$$y_{stat} = b_0 + b_1 u_{stat} + b_2 u_{stat}^2 \quad (3.3)$$

Insignalen som minimerar ekv 3.3 fås genom derivering till

$$u_{stat} = -\frac{b_1}{2b_2} = -0.25 \quad (3.4)$$

Extremvärdet är

$$y_{stat} = b_0 - \frac{b_1^2}{4b_2} = 2.1875 \quad (3.5)$$

Först undersöks extremalsökning genom utnyttjande av stokastisk approximation, därefter används en metod som bygger på adaptiv reglering.

3.1 Stokastisk approximation

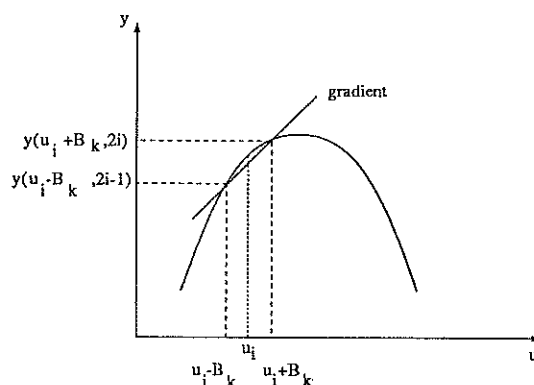
Vid sökandet efter extremvärdet för processen beskriven enligt Hammersteinmodellen används till att börja med en metod baserad på stokastisk approximation. Den metod som väljs är Kiefer-Wolfowitz procedur [3]. Processen störs av brus och beskrivs av följande modell

$$y(u, t) = f(u) + e(t)$$

Gradienten approximeras med en centraldifferens, se figur 3.1. Detta medför att man måste ha $2r$ observationer, där r är antalet insignaler, för att skatta gradienten.

Till att börja med initieras skattningen av extrempunkten till ett givet värde. För att kunna avgöra om skattningen är större eller mindre än det korrekta extremvärdet, skapas en centraldifferens. Centraldifferensen beräknas genom att signalen subtraheras med ett positivt finit tal, β_k , se ekv. 3.7 och tillhörande utsignal mäts, detta värde sparas undan för att avgöra om nästa iteration av signalen är i rätt riktning mot extremvärdet. Därefter adderas det positiva talet till signalen och tillhörande utsignal mäts och sparas.

Gradienten beräknas därefter enligt ekv. 3.8 och uppdateringen av skattningen av extrempunkten följer i nästa steg. Uppdateringen av α_k och β_k sker genom att räknaren k ökas om en extrempunkt passeras. Om en extrempunkt



Figur 3.1: Algoritmen med stokastisk approximation, steg av fix längd β_k görs tills extrempunkten passerats, därefter minskas steget och riktningen ändras.

passerats avgörs genom att jämföra föregående iteration av utsignalen mot innevarande utsignal. Är den nya utsignalen större än föregående så har en extrempunkt passerats och räknaren ökas. I algoritmen nedan så motsvaras u_i av den skattade extrempunkten och indexet i anger antalet gjorda iterationer.

För att algoritmen alltid skall konvergera ställs följande krav på steglängden α_k och insignalvariationen β_k

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k / \beta_k) < \infty$$

Låt

$$\alpha_k = \frac{k_\alpha}{k} \quad (3.6)$$

$$\beta_k = \frac{k_\beta}{\sqrt{k}} \quad (3.7)$$

Där k_α och k_β är positiva tal. Kiefer-Wolfowitz procedur i fallet med en insignal ser ut som

1. Skicka in en insignal korrigerad enligt $u_i - \beta_k$
2. Mät och spara utsignalen $y(u_i - \beta_k, 2i - 1)$
3. Skicka in en insignal korrigerad enligt $u_i + \beta_k$
4. Mät och spara utsignalen $y(u_i + \beta_k, 2i)$
5. Approximera gradienten enligt

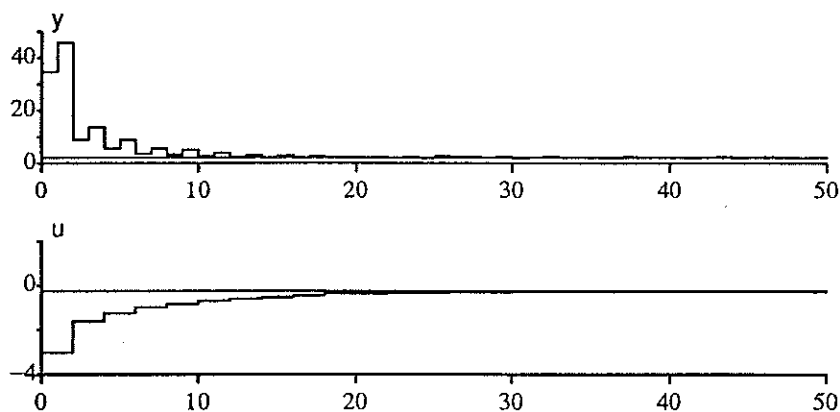
$$f_{grad}(u_i, \beta_k) = \frac{y(u_i - \beta_k, 2i - 1) - y(u_i + \beta_k, 2i)}{2\beta_k} \quad (3.8)$$

6. Uppdatera insignalen enligt

$$u_{i+1} = u_i - \alpha_k f_{grad}(u_i, \beta_k) \quad (3.9)$$

om utsignalen från föregående iteration är mindre än utsignalen från den senaste iterationen, så ökas k med ett

7. Därefter punkt 1 igen



Figur 3.2: Stokastisk approximation av statistiskt system med $\sigma = 0.2$, $u_{init} = -3$, $k_\alpha = 0.05$ och $k_\beta = 0.2$.

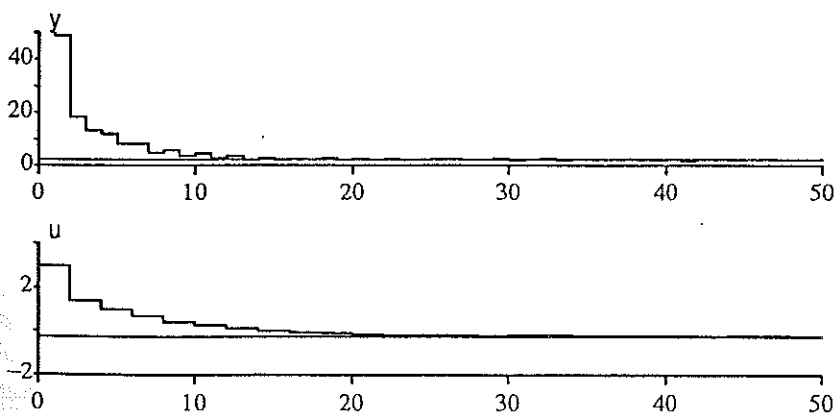
3.1.1 Extremalsökning med stokastisk approximation

I simuleringarna där det statistiska systemet, se ekv 3.1, regleras med stokastisk approximation är brusets standardavvikelse $\sigma = 0.2$. Två simuleringar utförs där skillnaden mellan simuleringarna består av olika val av extrempunktens skattning (initialvärde). I figur 3.2 är $u_{init} = -3$ medan i figur 3.3 är $u_{init} = 3$. De övriga parametrerna är $k_\alpha = 0.05$ och $k_\beta = 0.2$.

I båda simuleringarna söker sig metoden fram till rätt värde. I fallet med $u_{init} = -3$ nås $\hat{u}_{stat} = -0.26$ och för fallet med $u_{init} = 3$ nås $\hat{u}_{stat} = -0.21$ efter 50 sampel. Metoden är således inte speciellt känslig för val av initialvärde på insignalen när det gäller statistiska system. I tabell 3.1 redovisas värdet vid simuleringens slut på α_k , β_k , \hat{u}_{stat} och \hat{y}_{stat} , där \hat{u}_{stat} är den insignal som metoden konvergerat mot efter avslutad simulering och som motsvaras av u_i i teoridelen. Genom att sätta insignalen till \hat{u}_{stat} i processbeskrivningen så beräknas \hat{y}_{stat} , se ekv 3.10.

$$\hat{y}_{stat} = b_0 + b_1 \hat{u}_{stat} + b_2 \hat{u}_{stat}^2 \quad (3.10)$$

Ur processbeskrivningen kan fås att systemet har en liten derivata kring



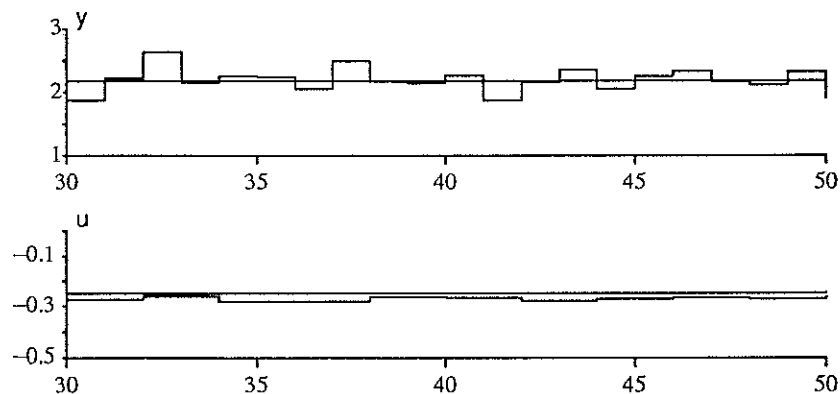
Figur 3.3: Stokastisk approximation av statistiskt system med $\sigma = 0.2$, $u_{init} = 3$, $k_\alpha = 0.05$ och $k_\beta = 0.2$.

u_{init}	\hat{u}_{stat}	\hat{y}_{stat}	α_k	β_k
3	-0.21	2.194	0.005	0.092
-3	-0.26	2.188	0.006	0.096
-6	-0.28	2.192	0.006	0.096

Tabell 3.1: Resultat från simuleringar med stokastisk approximation av statistiskt system.

minimum. Att processen har liten derivata leder till att problem uppstår när extrempunkten sökes genom att insignaler som är nära varandra ger utsignaler som är lika varandra i amplitud och därigenom kan brusets inverkan orsaka att metoden lurats att stega ifrån extrempunkten. Liten derivata för processen leder också till att om insignalen varierar kring extrempunkten så kommer felet i utsignalen att bli minimalt på den flacka extrempunkten, se tabell 3.1.

Valet av k_α och k_β är process- och brusberoende. Det optimala valet av k_α och k_β är ett stort k_α för snabb insvängning och ett litet k_β för att få en insignal med så små svängningar som möjligt kring extrempunkten. En iakttagelse är att β_k avtar långsamt, som $1/\sqrt{k}$, vilket leder till att ett för stort k_β ger en onödigt svängig insignal en lång tid framöver. Väljs k_β så litet att utsignalerna för en process utan brus i princip blir identiska leder det till att brusets inverkan att avgöra vilket håll insignalen skall uppdateras. Figuren 3.4 är en förstoring

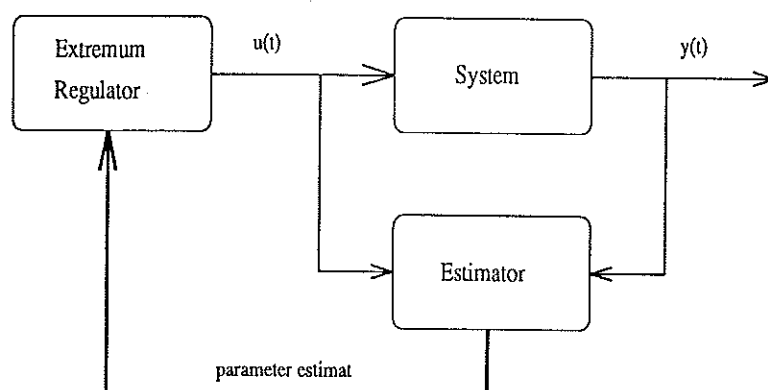


Figur 3.4: Stokastisk approximation av statistiskt system med $\sigma = 0.2$, $u_{init} = -3$, $k_\alpha = 0.05$ och $k_\beta = 0.2$. Förstoring av figur 3.2.

av figur 3.2. Den visar hur metoden uppför sig i närheten av extrempunkten. Brusets inverkan på skattningen av extrempunkten ses genom att metoden tar steg i fel riktning.

3.2 Adaptiv reglering

Ett annat sätt att göra extremalreglering är att använda sig av adaptiv reglering. Man baserar optimeringen på en olinjär dynamisk modell t ex Hammerstein modellen. Anledningen till att Hammerstein modellen väljs är att den är linjär i parametrarna. Av detta följer att det går bra att estimeras parametrarna med hjälp av t ex. extended least square eller recursive maximum likelihood. Systemet som simuleras visas i figur 3.5. I simuleringarna används extended least square med exponentiell glömska, främst på grund av dess enkelhet. Estimatorn



Figur 3.5: Adaptiv reglering av systemet.

som estimerar tre parametrar, ser ut som följande

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + P(t)\phi(t-1)\epsilon(t) \quad (3.11)$$

$$\epsilon(t) = y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1) \quad (3.12)$$

$$P(t) = \frac{1}{\lambda}(P(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t)\phi^T(t)P(t-1)}{\lambda + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)}) \quad (3.13)$$

Där $\phi(t)$ är regressionsvektorn och ser ut som följande

$$\phi^T(t) = (1 \quad u(t-1) \quad u^2(t-1))$$

och parameterestimaten $\hat{\theta}(t)$

$$\hat{\theta}(t) = (\hat{b}_0 \quad \hat{b}_1 \quad \hat{b}_2)$$

λ är glömskefaktorn och $P(t)$ är kovariansmatrisen. Regulatorns styrlag baseras på de skattade parametrarna och ser ut som

$$\hat{u}_{stat} = -\frac{\hat{b}_1}{2\hat{b}_2} \quad (3.14)$$

3.2.1 Extremalsökning med adaptiv reglering

Den adaptiva metodens uppförande vid extremalreglering av statistiskt system enligt figur 3.5 visas i figur 3.6. De initiala värdena för parametrarna var

$$b_0 = 0$$

$$b_1 = 6$$

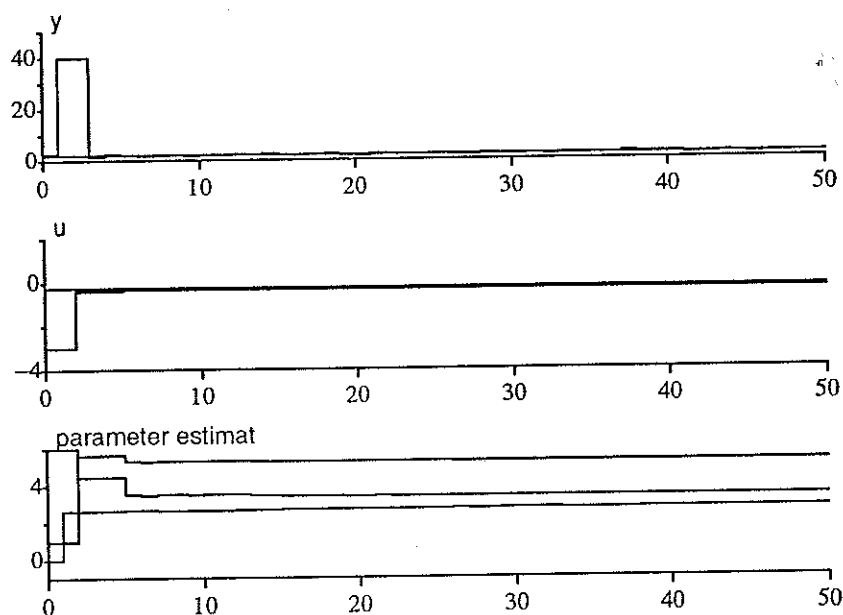
$$b_2 = 1$$

$$\lambda = 0.999$$

Vilket motsvarar

$$u_{init} = -3$$

I figur 3.6 ses att in och utsignalen konvergerar på mindre än tio sampel, vilket får anses vara mycket snabbt. Men parametrarna har inte konvergerat förrän efter ca 20 sampel. Den adaptiva metoden är känslig för val av initialvärde. Detta visar sig genom att olika initialvärde ger olika skattningar av extrempunkten. Då inte estimaten konvergerar mot exakt rätta värden, antas att tillräcklig excitation i systemet saknas. Detta beror på att insignal - utsignal förhållandet



Figur 3.6: Adaptiv reglering av statistiskt system med $u_{init} = -3$.

ställer in sig före parametrarna konvergerat. I simuleringer har följande estimat erhållits (inom parantes de korrekta värdena)

$$\hat{b}_0 = 2.72 \quad (2.5)$$

$$\hat{b}_1 = 3.36 \quad (2.5)$$

$$\hat{b}_2 = 5.26 \quad (5.0)$$

Och extremvärdet blir

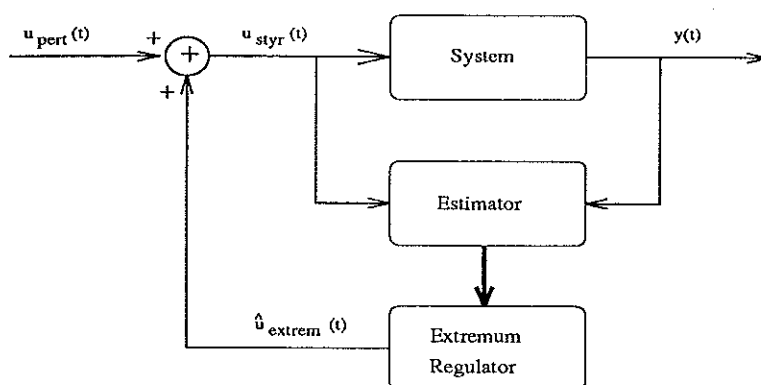
$$\hat{u}_{stat} = -0.32 \quad (-0.25)$$

$$\hat{y}_{stat} = 2.21 \quad (2.1875)$$

Valet av λ beror på vad det är för typ av process som simuleras. Om parametrarna är konstanta, så är det lämpligt att använda $\lambda = 1$. Detta kan ses om man simulerar en längre tid med $\lambda < 1$ så kommer kovariansmatrisen att växa (estimator uppvridding) och därmed bli känslig för brus. Osäkerheten blir stor eftersom en liten störningen ger en stor ändring i parametervärdet. En förutsättning för bra reglering är att god kännedomen om processens uppförande i tiden finns när λ väljs.

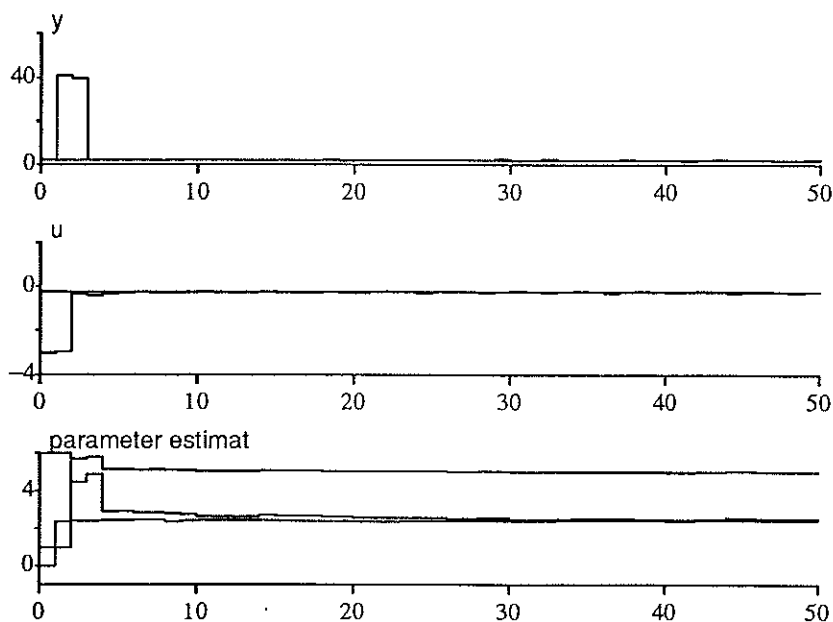
3.2.2 Excitation av systemet

En metod att underlätta sökandet efter extremunkten är att excitera systemet, genom att störa det med en signal. Störnsignalen som används är en tre-nivås signal med utseendet $u_{pert} = \rho\{\dots - 1, 0, 1, 0, -1, \dots\}$, där ρ anger amplituden på störnsignalen. Störnsignalen adderas till den signal som är framtagen för att ge exakt rätt extremvärde \hat{u}_{extrem} i teorin. Styrnsignalen blir då $u_{styr} = \hat{u}_{extrem} + u_{pert}$, se figur 3.7. Valet av störnsignalen baseras på försök gjorda av Wellstead P.E och Zarrop M.B. [4]. Nivån för störnsignalen bestäms från fall till fall. En hög amplitud på störnsignalen underlättar parameteridentifieringen och åstadkommer därigenom att korrekt extrempunkt nås. Nackdelen med en hög



Figur 3.7: Adaptiv reglering med störsignal av systemet.

amplitud på störsignalen är att styrsignalen svänger konstant kring sitt korrekta värde och därigenom ger en styrsignal som hela tiden påverkar processen. I en verklig process kan detta vara en stor nackdel. I simuleringen som redovisas i figur 3.8 erhöles resultat som var bättre än de som erhöles från metoden där ingen störsignal användes. Om upprepade försök görs med olika brussekvenser så talar resultaten till fördel för metoden med störsignal. En ytterligare fördel

Figur 3.8: Adaptiv reglering av statistiskt system där en störsignal adderats $\rho = 0.03$ och $u_{init} = -3$

med att addera till en störsignal är att systemet konstant exciteras, beroende på storleken av ρ . Om ingen yttre excitation tillförs så konvergerar parametrarna på kort tid. Då skattningen av extremvärdet snabbt konvergerar till ett ungefärligt värde kommer mindre och mindre information om systemet erhållas, eftersom insignalen i det närmaste är konstant. Om λ väljs mindre än 1, kommer det att inträffa estimator uppvriddning, vilket inte är önskvärt eftersom det förstör regleringen. I simuleringen med störsignal som gjordes för det statistiska

systemet ekv 3.1 med koefficienterna enligt ekv 3.2 valdes följande initiala värde

$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= 6 \\ b_2 &= 1 \\ \lambda &= 0.999 \end{aligned}$$

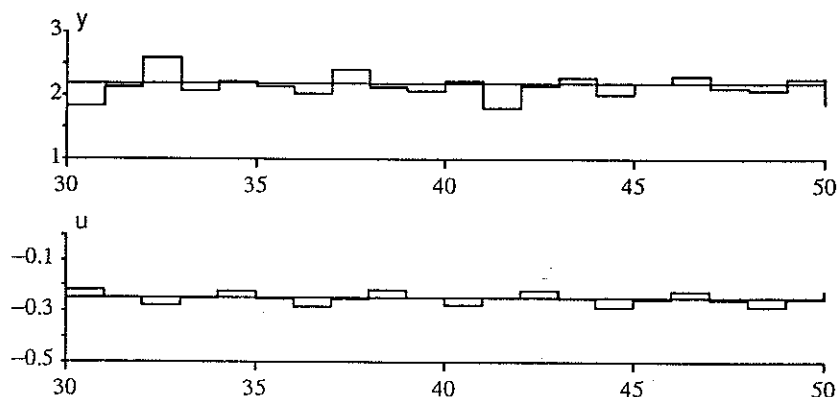
Resultatet presenteras i figur 3.8, där följande värde erhöles (värdena inom parantes är de korrekta)

$$\begin{aligned} \hat{b}_0 &= 2.45 \quad (2.5) \\ \hat{b}_1 &= 2.53 \quad (2.5) \\ \hat{b}_2 &= 5.01 \quad (5.0) \end{aligned}$$

Extremvärdet blir

$$\begin{aligned} \hat{u}_{stat} &= -0.25 \quad (-0.25) \\ \hat{y}_{stat} &= 2.1875 \quad (2.1875) \end{aligned}$$

Noteras att skillnaden mellan metoden att använda störsignal ($\hat{u} = -0.25$, $\hat{y} = -2.19$) respektive att inte använda störsignal ($\hat{u} = -0.32$, $\hat{y} = 2.22$) är relativt stor i insignalen men skillnaden i utsignalen är betydligt mindre. Figuren 3.9



Figur 3.9: Adaptiv reglering av statistiskt system där en störsignal adderats $\rho = 0.03$ och $u_{init} = -3$. Förstoring av figur 3.8.

är en förstoring av figur 3.8. Den visar hur adaptiva metoden fungerar vid extrempunkten. Det ses att utsignalen och insignalen pendlar kring extremvärdet. Detta beror på bruset respektive störsignal.

3.3 Resultat

Både metoden som utnyttjar stokastisk approximation och metoden med adaptiv reglering fungerar bra vid extremalsökning. Den adaptiva metoden är något snabbare, men i gengäld kan problem fås med excitationen. Detta undviks genom addition av en excitationssignal. Fördelen med stokastisk approximation är att metoden alltid konvergerar mot rätt värde.

4 Dynamiskt system

I verkligheten är system i regel inte statiska, utan de har en viss tröghet. I detta kapitel undersöks extremalreglering av system med dynamik. En dynamisk modell enligt Hammerstein ansätts som

$$Ay(t) = B_0 + B_1u(t-1) + B_2u^2(t-1) + Ce(t) \quad (4.1)$$

Där $e(t)$ är vitt brus samt

$$\begin{aligned} A &= 1 - 0.9q^{-1} \\ B_0 &= 0.25 \\ B_1 &= 0.50 - 0.25q^{-1} \\ B_2 &= 0.50 \\ C &= 1 - 0.5q^{-1} \end{aligned} \quad (4.2)$$

För att beräkna extremvärdet för det dynamiska systemet tillämpas ett stationärt synsätt, vilket medför att systemets stationära extremvärde fås genom att sätta skiftoperatorn lika med ett. Detta resulterar i

$$u_{stat} = -\frac{B_1(1)}{2B_2(1)} = -0.25 \quad (4.3)$$

$$y_{stat} = \frac{B_0(1) + B_1(1)u_{stat} + B_2(1)u_{stat}^2}{A(1)} = 2.1875 \quad (4.4)$$

Till att börja med används stokastisk approximation för regleringen, därefter används metoden baserad på adaptiv reglering.

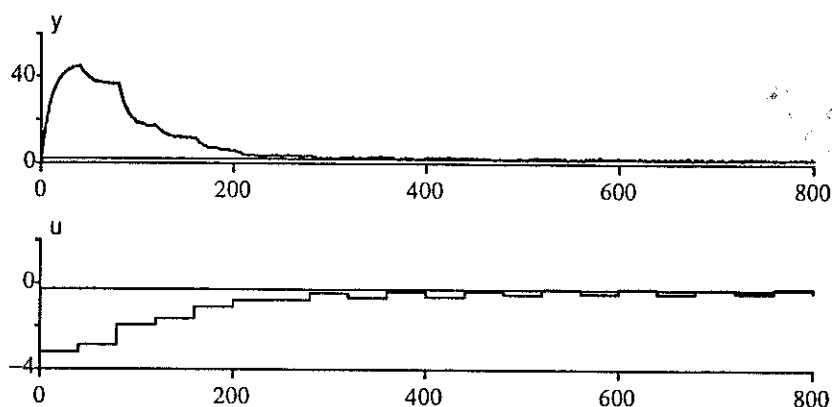
4.1 Stokastisk approximation

Med ett dynamiskt system så ökar komplexiteten hos systemet. Transienter uppkommer när signalen skickas till systemet. När extrempunkten för processen söks måste följdaktligen hänsyn tagas till transienterna och hur lång tid det tar för dessa att klinga av. Genom att invänta stationäritet för varje pålagd insignal undviks problemet med dynamiken, men tiden för metoden att konvergera mot extrempunkten blir lång.

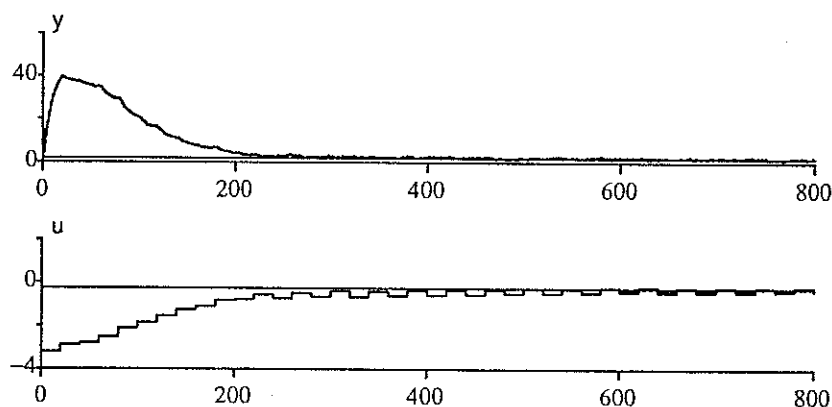
Metoden för stokastisk approximation kräver att en del parametrar väljs, för att konvergenstiden skall minimeras. De två parametrarna k_α och k_β , som även väljs när ett statiskt system simuleras, men även δ vilken anger hur många sampel som en insignal ligger på systemet oförändrad innan mätning sker av utsignalen. Om $\delta = 1$ innebär det att signalen ändras varje sampel. Parametern δ anger sålunda om signalen skall uppdateras på mätningar gjorda på transienter eller stationärt värde.

Förändringen i Kiefer-Wolfowitz procedur inskränker sig till att de fyra första punkterna ersätts av

1. Skicka in en insignal korrigerad enligt $u_i - \beta_k$, vänta δ sampel
2. Mät och spara utsignalen $y(u_i - \beta_k, \delta(2i - 1))$
3. Skicka in en insignal korrigerad enligt $u_i + \beta_k$, vänta δ sampel
4. Mät och spara utsignalen $y(u_i + \beta_k, \delta 2i)$



Figur 4.1: Stokastisk approximation av dynamiskt system. Inväntar stationäritet, $\delta = 40$ samt med $u_{init} = -3$, $k_\alpha = 0.1$ och $k_\beta = 0.2$.



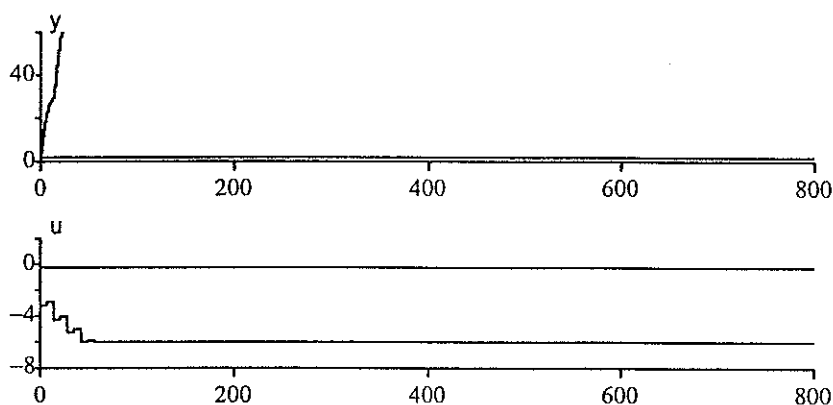
Figur 4.2: Stokastisk approximation av dynamiskt system. Inväntar ej stationäritet, $\delta = 20$ samt med $u_{init} = -3$, $k_\alpha = 0.1$ och $k_\beta = 0.2$.

4.1.1 Dynamik i systemet

I första simuleringen inväntas stationäritet, se figur 4.1, och därigenom undviks fenomen kopplade till dynamiken. För det simulerade systemet innebär det att $\delta = 40$.

För att minska konvergenstiden väljs $\delta = 20$, vilket medför att uppdateringen av signalen baseras på transienten i stället för det stationära värdet, se figur 4.2. Detta val av δ ger snabbare konvergens mot extremvärdet.

En ytterligare minskning till $\delta = 7$ visas i figur 4.3. I detta fall klarar metoden inte att konvergera utan styr mot styrsignalens ena begränsning, här $u_{lim} = \pm 6$. Till skillnad mot det statiska fallet där ingen kännedom om systemet krävdes, behövs i det dynamiska fallet vetskap om systemets uppförande. Detta kan t ex fås genom att mäta systemets stegsvar. I tabellen 4.1 redovisas resultaten för några olika val av δ . Det bästa resultatet fås för $\delta = 20$. För låga val av δ blir konvergensten långsam genom att dynamiken gör sig påmind, detta kan ses på värdena för α_k och β_k i tabellen.



Figur 4.3: Stokastisk approximation av dynamiskt system. Inväntar ej stationaritet, $\delta = 7$ samt med $u_{init} = -3$, $k_\alpha = 0.1$ och $k_\beta = 0.2$.

Antal sampel oförändrad insignal δ	\hat{u}_{stat}	\hat{y}_{stat}	α_k	β_k
8	-0.62	2.872	0.004	0.069
10	-0.46	2.408	0.006	0.076
20	-0.24	2.188	0.015	0.093
40	-0.31	2.205	0.020	0.117

Tabell 4.1: Resultat från simuleringar med stokastisk approximation.

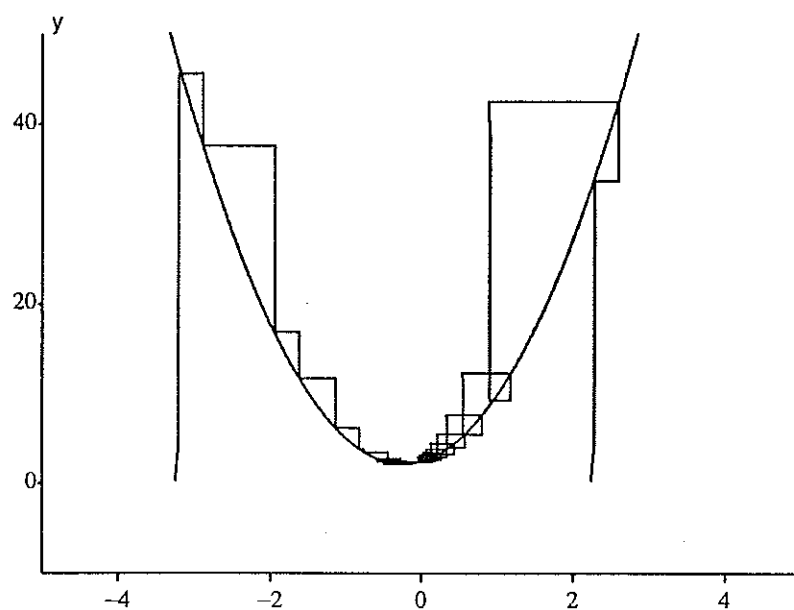
4.1.2 Faskurvor för stokastisk approximation

Ett annat sätt att presentera in- och utsignalsambandet är att plotta utsignalen som funktion av insignalen, se figur 4.4 och 4.5. I båda figurerna finns det stationära sambandet för processen inlagt för att användas som referens samt simuleringstiden är $T_{sim} = 800$ och parametrarna $\sigma = 0.2$, $k_\alpha = 0.1$ och $k_\beta = 0.2$.

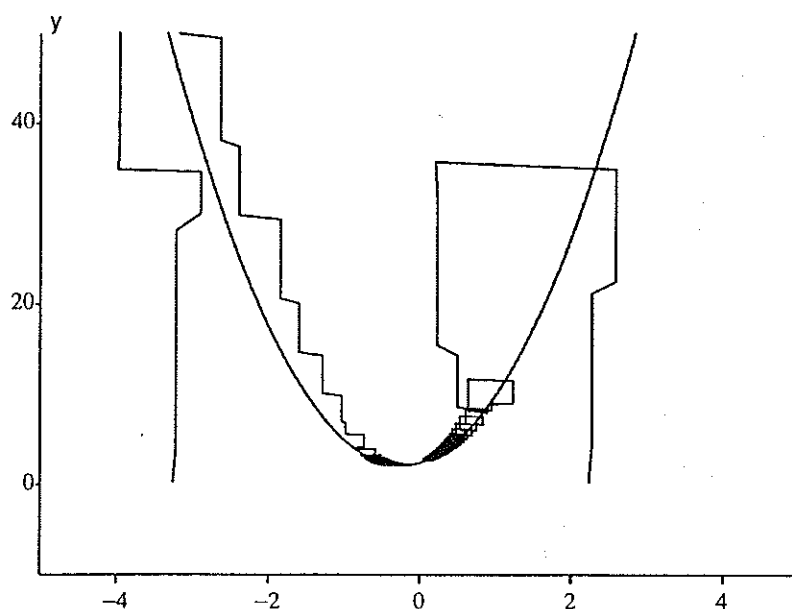
I figur 4.4 inväntas stationaritet innan insignalen ändras, detta kan läsas ut ur figuren genom att för varje insignal som läggs på systemet så tangerar tillhörande utsignal den stationära kurvan. En annan detalj att lägga märke till är att för kurvan som hör samman med $u_{init} = -3$ minskar utsignalen konstant vilket hör samman med att korrigeringen av insignalen sker enligt schemat i kapitel 3.1, d v s att för varje nytt u_i subtraheras insignalen med β_k för att därefter addera insignalen med β_k . För den andra flanken ger motsvarande schema att varje gång β_k adderas till u_i så ökar tillhörande utsignal och kurvan erhåller ett "skruvat beteende". De olika betenden på kurvorna påverkar ej konvergenshastigheten utan den blir densamma för båda. I figur 4.5 inväntas ej stationaritet vilket leder till att utsignalen inte tangerar den stationära kurvan förrän precis innan insignalen konvergerat.

4.1.3 System med instabil invers

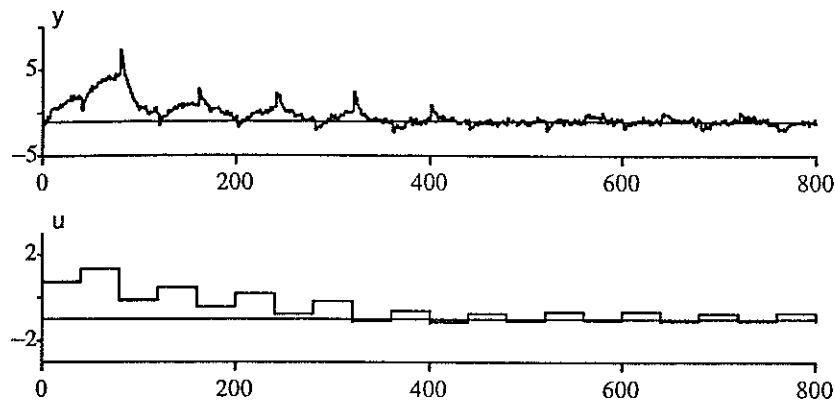
Ett svårare system att extremalsöka är ett system då B_1 polynomet har ett nollställe utanför enhetscirkeln. Med visst missbruk av notering kallas detta för ett system med instabil invers. Samma modell ansätts, se ekv 4.1, men koefficienterna är valda så att inversen blir instabil. Stegsvaret går i början (två



Figur 4.4: Stokastisk approximation av dynamiskt system med $\delta = 40$. Utsignalen plottas mot insignalen för initialvärdena $u_{init} = -3$ och $u_{init} = 2.5$ samt den stationära kurvan.



Figur 4.5: Stokastisk approximation av dynamiskt system med $\delta = 10$. Utsignalen plottas mot insignalen för initialvärdena $u_{init} = -3$ och $u_{init} = 2.5$ samt den stationära kurvan.



Figur 4.6: Stokastisk approximation av dynamiskt system med instabil invers där $u_{init} = 1$, $\delta = 40$, $\sigma = 0.2$, $k_\alpha = 0.2$ och $k_\beta = 0.3$

sampel) åt fel håll. Den nya modellen är

$$\begin{aligned} A &= 1 - 0.9q^{-1} & (4.5) \\ B_0 &= 0 \\ B_1 &= -2 + 2.2q^{-1} \\ B_2 &= 0.1 \\ C &= 1 - 0.5q^{-1} \end{aligned}$$

Parametrarna väljs så att stationaritet infinner sig för systemet, med andra ord $\delta = 40$. Anledningen till att stationaritet inväntas är att på så sätt undviks problemet med dynamiken. I figur 4.6 visas resultatet. Det går som väntat bra, men om insvängningen skall snabbas upp genom justering av δ krävs det stor försiktighet p g a den komplicerade dynamiken.

4.2 Adaptiv reglering

Den adaptiva metoden anpassas till det dynamiska systemet genom att modellen ändras till ekv 4.1. Estimatoren som används är fortfarande av typen extended least square men antalet tillstånd ändras till sex. Till skillnad från stokastisk approximation behövs stationaritet inte inväntas. Regressionsvektorn i estimatoren är

$$\phi^T(t) = (y(t-1) \quad 1 \quad u(t-1) \quad u(t-2) \quad u^2(t-1) \quad e(t-1))$$

och parameterestimaten ges av

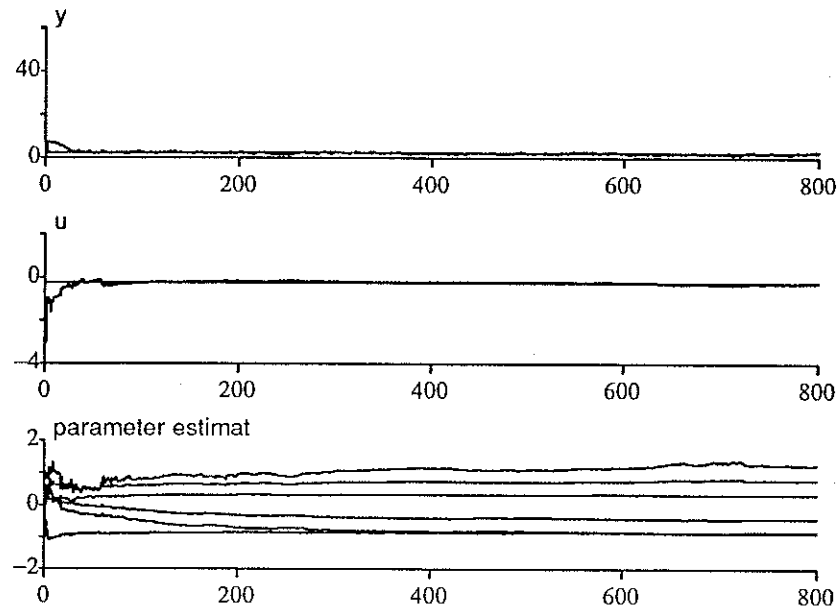
$$\hat{\theta}(t) = (\hat{a}_{11} \quad \hat{b}_0 \quad \hat{b}_{10} \quad \hat{b}_{11} \quad \hat{b}_{20} \quad \hat{c}_{11})$$

Styrlagen är

$$\hat{u}_{extrem} = -\frac{\hat{b}_{10} + \hat{b}_{11}}{2\hat{b}_{20}} \quad (4.6)$$

4.2.1 Dynamik i systemet

Den nya modellen omfattar sex okända parametrar som måste skattas. Detta ställer högre krav på excitationen än vid det statiska fallet då tre parametrar skattades. Styrlagen beräknas ur skattningarna av parametrarna enligt ekv 4.6.



Figur 4.7: Adaptiv reglering av dynamiskt system med störsignal adderad till insignalen. Valda värden $\rho = 0.01$ och $\lambda = 0.9995$

Tillräcklig excitation är en förutsättning för bra reglering och det uppnås precis som i det statiska fallet genom addition av en störsignal, d v s $u_{styr} = \hat{u}_{extrem} + u_{pert}$. Störsignalen som används beskrivs i kapitel 3.2.2. Simuleringen presenteras i figur 4.7. Resultatet från simuleringen visas i tabellen 4.2, vilket ger den skattade extrempunkten som

$$\hat{u}_{stat} = -0.26 \quad (-0.25)$$

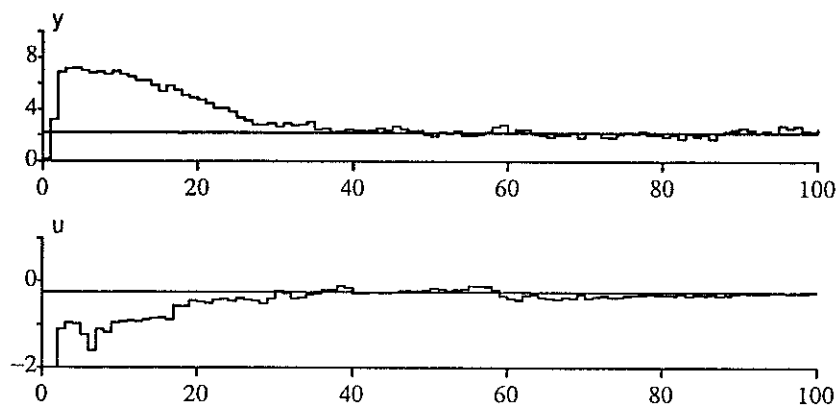
$$\hat{y}_{stat} = 2.19 \quad (2.1875)$$

Skattningen av extrempunkten är bra men parameterestimaterna har inte konvergerat mot sina korrekta värden, se tabell 4.2. Estimatoren skattar ett stationärt sett ekvivalent system med samma extrempunkt som det korrekta systemet. I figur 4.7 ses att parameterestimaterna inte konvergerar till konstanta värden men extrempunktens skattning är ändå bra. Vid jämförelse med stokastisk approximation är den adaptiva metoden klart snabbare att finna extrempunkten. För att granska insvängningsförloppet närmare visas figur 4.8, där konvergenstiden kan bestämmas till 40 sampel att jämföra med 700 sampel för stokastisk approximation. Om samma process simuleras men utan yttre excitation blir skattningen av extrempunkten brus känslig. Den adaptiva metoden kan fastna på en punkt som ej behöver vara extrempunkten p g a ingen ny information om processen fås. De observationer som hittills gjorts pekar på att estimaterna i sig

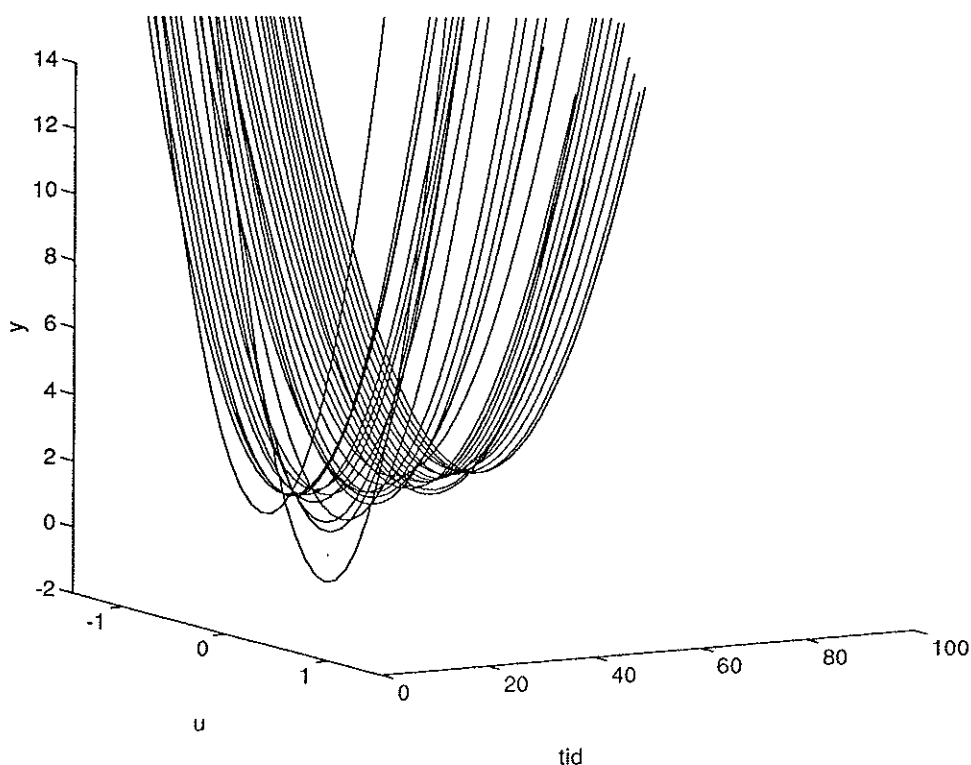
	a_{11}	b_{00}	b_{10}	b_{11}	b_{20}	c_{11}	\hat{u}_{extrem}
start	-0.5	-1	1	0.5	0.1	1	-7.50
slut	-0.87	0.34	1.25	-0.85	0.78	-0.42	-0.26
korrekt	-0.9	0.25	0.5	-0.25	0.5	-0.50	-0.25

Tabell 4.2: Simuleringar med adaptiv reglering av dynamiskt system.

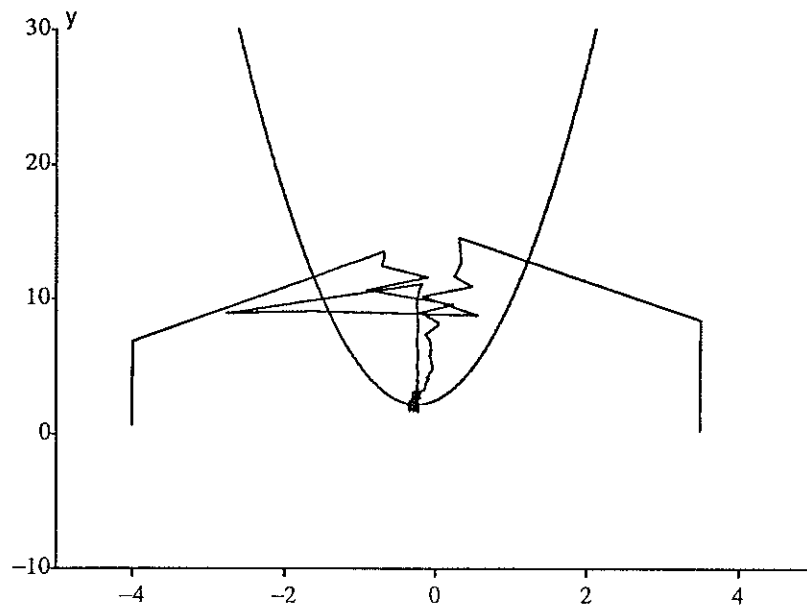
är ointressanta medan det viktiga är att extrempunkten skattas korrekt. I figur 4.9 visas den skattade stationära kurvan mot tiden (samma försök som utförts i figur 4.8). Här ses att parametrarnas variation i sig inte är farlig för regleringen, utan deras glidande beteende tar ut varandra. Att estimaten inte konvergerar till exakt rätt värde betyder sålunda inte att en dålig parameterskattning medför en dålig skattning av extremvärdet.



Figur 4.8: Adaptiv reglering av dynamiskt system med störsignal adderad till insignalen. Valda värden $\rho = 0.01$ och $\lambda = 0.9995$



Figur 4.9: Det skattade systemet plottas mot tiden. Adaptiv reglering av dynamiskt system med störsignal adderad till insignalen. Valda värden $\rho = 0.01$ och $\lambda = 0.9995$



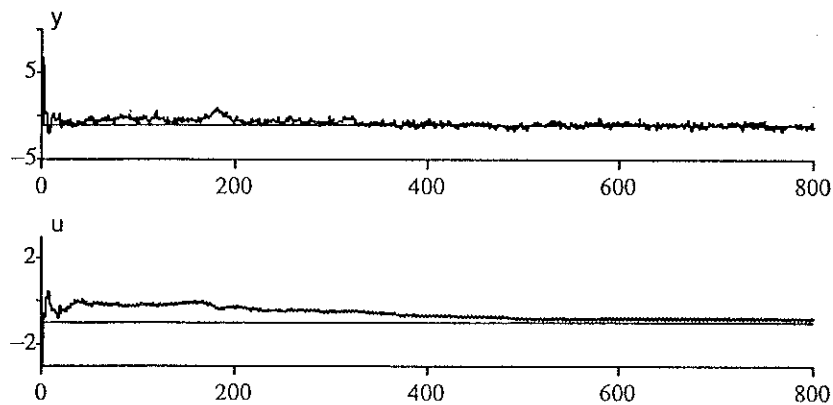
Figur 4.10: Utsignal plottad mot insignal för det adaptiva fallet. Initialvärdena är $u_{init} = -4$ och $u_{init} = 3.5$ samt $T_{sim} = 100$

4.2.2 Faskurva för adaptiv reglering

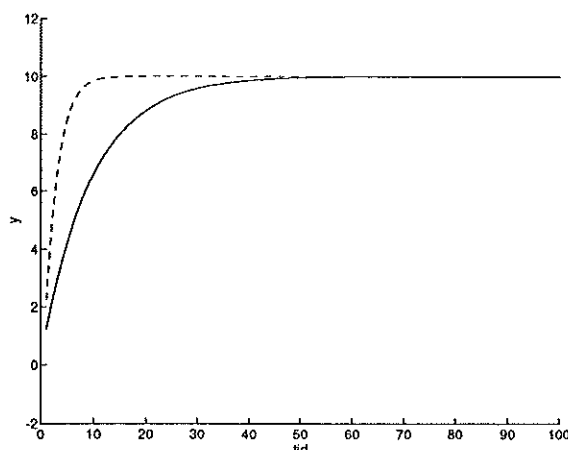
På samma sätt som för stokastisk approximation presenteras insignal-utsignal sambandet genom att plotta utsignalen som funktion av insignalen, se figur 4.10. Efter att insignalen stabiliserats kring sitt extremvärde ses hur dynamiken i systemet påverkar insvängningen genom att u är konstant medan y närmar sig sitt extremvärde. Efter insvängningen ses att systemet svänger kring extrempunkten beroende på störsignalen och bruset i processen.

4.2.3 System med instabil invers

Här provas adaptiv reglering på system med instabil invers, se figur 4.11. Modellen som används beskrivs i ekv 4.1 och systemet ges av parameterekvatio-



Figur 4.11: Adaptiv reglering av ett system med instabil invers.



Figur 4.12: Stegsvaren för de olika systemen. Där det nya är den streckade linjen och det gamla är den heldragna linjen.

nera 4.5. Glömskefaktorn väljs till $\lambda = 1$. Den skattade extrempunkten blir

$$\begin{aligned}\hat{u}_{stat} &= -1.02 \quad (-1.0) \\ \hat{y}_{stat} &= -1.00 \quad (-1.0)\end{aligned}$$

Systemet som simuleras är känsligt för skattningen av b_{20} termen, eftersom en konstant styrslag med b_{20} i nämnaren (som här är 0.1) används. Detta gör att ett litet fel i estimering av b_{20} kan ge ett stort fel i skattningen av extrempunkten. Även för detta systemet är den adaptiva metoden överlägsen stokastisk approximation.

4.2.4 System med utökad dynamik

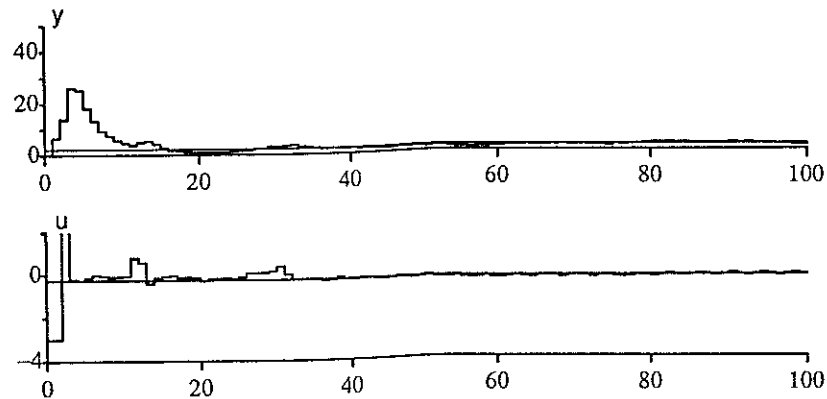
Den adaptiva metoden har hittills visat sig fungera bra. Ett krav för att metoden skall fungera är att estimatorn stationärt sett lyckas skatta systemet bra. Med utökad dynamik krävs att fler tillstånd skall skattas och därmed behövs mer excitation. Ett nytt och mer komplicerat system ansätts till

$$Ay(t) = B_0 + B_1u(t-1) + B_2u^2(t-1) + Ce(t)$$

där $e(t)$ är vitt brus samt

$$\begin{aligned}A &= 1 - 1.37q^{-1} + 0.47q^{-2} \\ B_0 &= 0.25 \\ B_1 &= 1 - 0.25q^{-1} - 0.50q^{-2} \\ B_2 &= 1 - 0.20q^{-1} - 0.30q^{-2} \\ C &= 1 - 0.50q^{-1} + 0.5q^{-2}\end{aligned}\tag{4.7}$$

Det nya systemet har valts så att det har samma extrempunkt som det gamla dvs $u_{stat} = -0.25$. Systemets poler har lagts i -0.685 (dubbelpol) istället för -0.9 (enkelpol), anledningen till detta var att systemen skulle ha ungefär samma stationära y -värde. I figur 4.12 ses stegsvaren för det nya och det gamla systemet. Att polerna valts till att ligga i -0.685 gör att det nya systemet blir klart snabbare.



Figur 4.13: Simulering av komplicerat system (mer dynamik). Estimatoren är en extended least square med 11 parametrar.

Estimatoren som används är en extended least square estimator för elva tillstånd. Den vanliga metodiken används för att beräkna styrlagen som blir

$$u = -\frac{\hat{b}_{10} + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{12}}{2(\hat{b}_{20} + \hat{b}_{21} + \hat{b}_{22})} \quad (4.8)$$

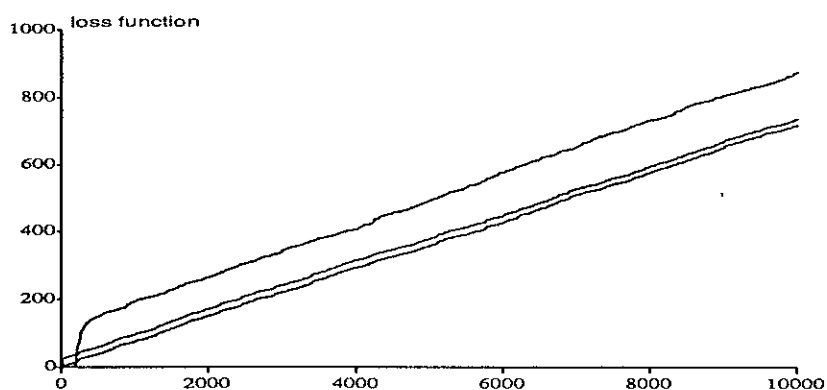
I figur 4.13 visas simuleringen, där störsignal amplituden valdes till $\rho = 0.05$. Man ser att regulatören mycket snabbt hittar extrempunkten (efter ca. 30 samplar) och därefter ligger styrsignalen och svänger med störsignalens amplitud. Den adaptiva metoden klarar således även av att reglera system med klart mer komplicerad dynamik, utan att råka ut för excitationssystem.

4.3 Förlustfunktioner

Det som bestämmer hur bra en metod extremalreglerar beror till största delen på hur bra skattning av extrempunkten som görs, men även snabbheten är väsentlig. Ett sätt att mäta detta är genom att ansätta en förlustfunktion enligt följande

$$loss = \sum_{i=1}^T (y_i - y_{stat})^2 \quad (4.9)$$

I formeln ovan är T antal samplar som simulerats och y_{stat} är det teoretiskt framräknade extremvärdet. Förlustfunktionen beskriver hur väl respektive metod finner den insignal som minimerar utsignalen i förhållande till den teoretiska minimerade utsignalen utan brus. Till att börja med ger förlustfunktionen hur snabbt metoderna konvergerar till extrempunkten. I detta fall är det transienten i början av simuleringen som avgör metodens förmåga att finna extrempunkten. Den andra viktiga informationen som kan fås ur förlustfunktionen är hur bra metoderna hittar extrempunkten. Den informationen fås genom att granska lutningen på förlustfunktionen för respektive metod i förhållande till lutningen för den optimala förlustfunktionen. En större lutning på förlustfunktionen än den optimala innebär att metoden inte har funnit rätt extremvärde. För metoden med stokastisk approximation startar beräkningen av förlustfunktionen fr o m det 200:e samplet, medan för den adaptiva metoden börjar beräkningen fr o m det 20:e samplet. Valet av olika startpunkter beror på att metoderna skall kunna jämföras i samma diagram. För stokastisk approximation ökar förlustfunktionen kraftigt i början av simuleringen. Denna transient förknippas med



Figur 4.14: Förlustfunktioner för olika metoder: översta linjen stokastisk approximation där $\delta = 20$, mellersta linjen adaptiv reglering med störsignal och nedersta linjen den optimala förlustfunktionen

att det tar δ sampel innan den första korrigeringen sker av signalen, ges då ett dåligt startvärde kommer detta följaktligen slå igenom kraftigt i förlustfunktionen. Lutningen för samtliga förlustfunktioner är lika, se figur 4.14, vilket betyder att metoderna ställt in sig korrekt. Anledningen till lutningen hos den optimala förlusten är beror på processens brus.

4.4 Resultat

Båda metoderna klarar extremalsöka ett dynamisk system. För stokastisk approximation måste dynamiken inväntas för garanterad konvergens och blir därmed relativt långsam. Den adaptiva regleringen fungerar på samma sätt som vid statiska system med ungefär samma konvergenstid. Ju fler parametrar som skattas desto svårare får estimatorn att särskilja dem. Detta resulterar i felaktiga parameterestimater med ett glidande beteende, men skattningen av extrempunkten blir ändå bra. För att kunna jämföra de olika metoderna för extremalsökning med varandra har förlustfunktionen introducerats.

5 Tidsvariabelt system

I detta kapitel görs ytterligare anpassningar till verkligheten genom att införa tidsvarierande system, vilket medför nya svårigheter för extremalsökningen. Nya krav på metoderna ställs när det gäller känslighet för ändringar av systemet. Processen är

$$Ay(t) = B_0 + B_1u(t-1) + B_2u^2(t-1) + Ce(t) \quad (5.1)$$

Där $e(t)$ är vitt brus. Förloppet indelas i tre faser där

Fas 1: 1-10000 sampel.

Fas 2: 10001-20000 sampel.

Fas 3: 20001-35000 sampel.

Fas 1 och fas 3 ser ut som

$$\begin{aligned} A &= 1 - 0.9q^{-1} \\ B_0 &= 0.25 \\ B_1 &= 0.50 - 0.25q^{-1} \\ B_2 &= 0.50 \\ C &= 1 - 0.5q^{-1} \end{aligned} \quad (5.2)$$

och fas 2 som

$$\begin{aligned} A &= 1 - 0.8q^{-1} \\ B_0 &= 0.5 \\ B_1 &= 1.7 - 0.2q^{-1} \\ B_2 &= 0.7 \\ C &= 1 - 0.5q^{-1} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Till att börja med undersöks hur väl stokastisk approximation uppfyller de nya kraven, därefter provas olika adaptiva metoder.

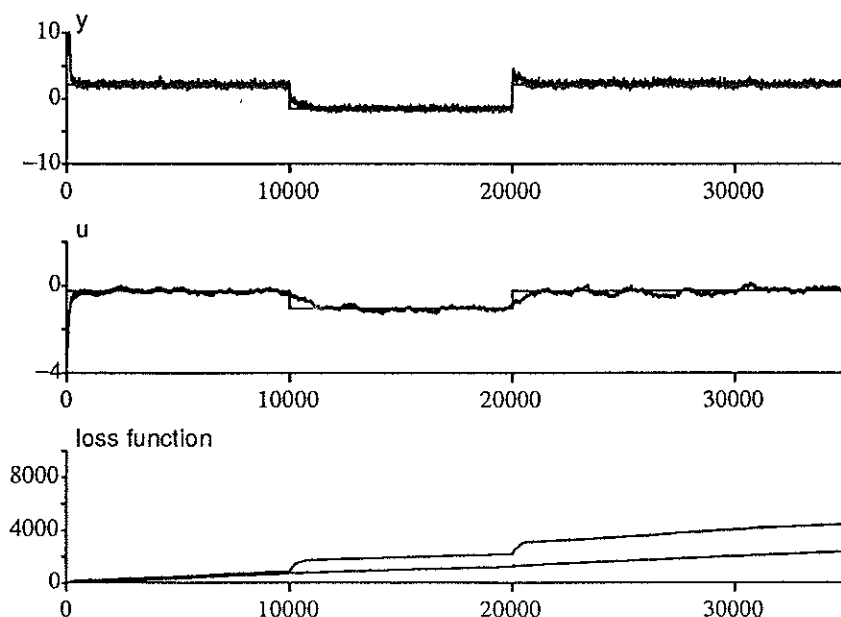
5.1 Stokastisk approximation

När det gäller stokastisk approximation fungerar den på det sättet att den hela tiden söker sig till extrempunkten genom att minska förstärkningen α_k (steglängden) och insignalsvariationen β_k . Om ett system som utnyttjar stokastisk approximation kör en längre tid, så kommer förstärkningen och insignalsvariationen att efterhand bli mycket små. När en processändring inträffar är metodens anpassningsförmåga dålig, vilket gör att det kommer ta lång tid att ställa in den nya extrempunkten. Eftersom en processändring kan ske när som helst så måste förstärkningen resp. insignalsvariationen begränsas.

Genomgående för försöken med stokastisk approximation är att de initiala förlusterna försummas (genom att kasta förlustfunktionens 200 första värde), eftersom det intressanta är processändringarna. Valet av begränsning för förstärkning och insignalsvariation har gjorts så att förlustfunktionen minimeras.

5.1.1 Observationer vid simuleringar

I simuleringen som visas i figur 5.1 har antalet sampel med oförändrad insignal δ valts till 20 (stationaritet inväntas ej). Detta medför att man inte har fullt så



Figur 5.1: Processändring med stokastisk approximation där $\delta = 20$. Steglängden är begränsad till $\alpha_{limit} = 0.008$ och insignalvariationen är begränsad till $\beta_{limit} = 0.03$.

god kännedom om vart nästa steg skall tas jämfört med fallet då stationäritet inväntas. Men för detta system som simuleras visar det sig att det är fullt tillräckligt att ha kännedom om de första 20 sampelna. Insignalvariationen valdes att begränsas till 0.03 och förstärkningen till 0.008. I figur 5.1 ses att metoden klarar av att hantera processändringar. Av förlustfunktionen ses att tillskotten i förlusten gentemot den optimala förlusten sker vid processändringarna, därefter är lutningarna samma. Att lägga märke till är att det tar längre tid att finna det stationära värdet vid processändringar än vid den initiala inställningen. Detta beror naturligtvis på att värdena för förstärkning och insignalvariation når sin begränsning under fas 1.

Om stationäritet inväntas finns större kännedom om systemet, vilket gör att den längre väntetiden kan kompenseras med ett större steg. I tabell 5.1 presenteras en sammanställning av olika försök med stokastisk approximation, där α_{limit} och β_{limit} valts så att förlustfunktionen minimeras.

Oförändrad insignal δ	α_{limit}	β_{limit}	Förlust
10	0.005	0.03	5539
20	0.008	0.03	4507
40	0.010	0.03	8989

Tabell 5.1: Resultat från simuleringar med stokastisk approximation av dynamiskt system med processändringar.

5.2 Adaptiv reglering

Det centrala i extremalregleringen är estimeringen av processen, eftersom styr-lagen som beräknas är baserad på de estimerade parametrarnas värde. Detta

ställer höga krav på estimatorn, eftersom man vill hitta extremvärdet så snabbt som möjligt. Vid rekursiv parameteridentifiering är minsta kvadrat algoritmer centrala. Varje algoritm i den här kategorin beskrivs generellt av två uppdateringsekvationer: en för parameterestimatoren och en för kovariansmatrisen. Stabiliteten, konvergensen och de dynamiska egenskaperna för algoritmen är starkt beroende på vilket sätt kovariansmatrisen uppdaterats. Kovariansmatrisen ger även information om hur väl algoritmen fungerar, se Isermann och Lachmann [5].

Den grundläggande rekursiva minsta kvadrat algoritmen (RLS) är känd för att ha perfekta egenskaper då parametrarna är tidsinvarianta. Men den är direkt olämplig då det gäller att spåra tidsvarianta parametrar, eftersom algoritmens förstärkning går mot noll. Därför har betydande forskningsansträngningar lagts ned på att utveckla och modifiera metoder för att kunna estimeras tidsvarianta parametrar

Den mest kända av dessa modifierade RLS algoritmer är den som är baserad på exponentiell data viktning, se Goodwin och Payne [6]. I fall där det råder dålig excitation leder denna algoritm till estimator uppvridnings problem, se Fortescue [7], vilket medför att man blir tvungen att göra ytterligare modifieringar av algoritmen. En idé som beaktar detta är algoritmen med variabel glömskefaktor, vilken lyckas att hålla en konstant mängd information lagrad i algoritmen.

Ett alternativt synsätt på exponentiell data viktning är att direkt modifiera kovariansmatrisen. Den enklaste av dessa algoritmer utnyttjar periodisk reset av kovariansmatrisen till en konstant gånger enhetsmatrisen, se Goodwin [8]. Alternativt kan man modifiera kovariansmatrisen genom att addera till en annan icke-negativt definit matris, se Goodwin och Sin [9]. Mer sofistikerade metoder av den senare typen av algoritm är möjliga. Till exempel, den adderade matrisen kan vara en funktion av detekterad förändring i parametrarna, se Hägglund [10]. Det är även möjligt att addera övervakande korrekationer som exempelvis spår justeringar, se Goodwin [11].

Ett annat sätt att utföra kovarians modifiering har utretts av Kulhavy och Karny [12], vilka använde sig av ett bayesiskt synsätt. Ett av målen för den resulterande algoritmen är att försäkra att bara information som bytts ut mot ny blir glömd. Ett liknande mål uppnås av Hägglund, genom att utnyttja variabel data viktning. De här två senare algoritmerna leder till många intressanta aspekter, men har som nackdel att de är komplexa och har många ändringsbara konstanter som måste vara specificerade.

Det finns även metoder som utnyttjar både exponentiell data viktning och exponentiell reset mot en oförutbestämd behandling av ny data. Metoden kallas för EFRA, se Salgado [13], vilket står för exponential forgetting and resetting algorithm. En av idéerna med metoden är att addera till en icke-negativ matris till den inversa kovariansmatrisen, för att begränsa kovariansen. Metoden garanterar att det maximala och det minimala egenvärdet till kovariansmatrisen är begränsade.

Ett av de största problemen med extremvärdesreglering är att när insignalen blir konstant så upphör excitationen, vilket försvårar för estimatorn. Ett sätt att komma runt detta problem är som vi beskrivit tidigare att addera till en störsignal till insignalen. Först undersöks Kulhavy och Karnys metod, som skulle eliminera behovet av yttre störsignal. Därefter undersöks metoder som behöver störsignal för att fungera, i nämnd ordning Extended least square, Kalman filter metoden och Exponential forgetting and resetting algorithm. För jämförelsens skull simuleras samma processändringar som för stokastisk approximation.

5.2.1 Excitation av systemet

För att en estimator ska kunna estimera rätt måste tillräcklig excitation tillföras systemet. Tidigare har brusekvensensen $u_{pert1} = \rho\{\dots -1, 0, 1, 0, -1, \dots\}$ använts, där amplituden ρ varit en varierbar konstant. En annan excitationssignal förordas av Wellstead och Scotson [14]. Det nya bruset har variabel amplitud och ser ut som $u_{pert2} = \text{random}\rho\{\dots 1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$. Där random är en funktion som genererar gaussiskt brus, vilket medför att ρ anger standardavvikelsen för bruset. Detta gaussiska brus har i simuleringar gjorda i artikel [14] visat sig vara mer exciterande än om man jämför med ett brus med konstant amplitud. I resten av kapitlet kommer förlust 1 vara förlusten för metoden exciterad med u_{pert1} och förlust 2 är förlusten för metoden exciterad med u_{pert2} .

5.2.2 Kulhavy och Karnys metod

Då man vill extremalreglera utan att med hjälp av någon yttre störkälla excitera systemet, så måste mycket höga krav ställas på estimatorn. Ur detta fås att när en processändring sker skall estimatorn skatta den nya extrempunkten och därefter vara konsistent i sin skattning tills ny processändring inträffar. En estimator som vid första anblicken skulle kunna klara detta är Kulhavy och Karnys metod [12]. En av fördelarna med denna metod är att den bara glömmet i vissa riktningar s k directional forgetting. Estimatorns utseende är

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)\epsilon(t) \quad (5.4)$$

$$\epsilon(t) = y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1) \quad (5.5)$$

$$K(t) = \frac{P(t-1)\phi(t)}{1 + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)} \quad (5.6)$$

$$P(t) = P(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t)\phi^T(t)P(t-1)}{\gamma^{-1}(t) + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)} \quad (5.7)$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \lambda - \frac{1-\lambda}{\phi^T(t)P(t-1)\phi(t)}, & \phi^T(t)P(t-1)\phi(t) > 0; \\ 1, & \phi^T(t)P(t-1)\phi(t) = 0; \end{cases} \quad (5.8)$$

Där $\phi(t)$ är regressionsvektorn och ges av

$$\phi^T(t) = (y(t-1) \quad 1 \quad u(t-1) \quad u(t-2) \quad u^2(t-1) \quad e(t-1))$$

och parameterestimaten $\hat{\theta}(t)$

$$\hat{\theta}(t) = (\hat{a}_{11} \quad \hat{b}_0 \quad \hat{b}_{10} \quad \hat{b}_{11} \quad \hat{b}_{20} \quad \hat{c}_{11})$$

Glömskefaktorn är samma gamla vanliga λ och ligger mellan gränserna $0 \leq \lambda \leq 1$. Kulhavy och Karny introducerar en ny glömskefaktor γ , där $\gamma \leq 1$ (observera att γ kan bli negativt). Metoden bygger på att enbart ha exponentiell glömska i den riktning varifrån man får ny information om systemet vid den senaste dataobservationen. För att veta om systemet har fått excitation måste ett kriterium för excitation introduceras. I denna algoritm har de valt att använda $\phi^T(t)P(t-1)\phi(t) > 0$ som excitationvillkor (i en annan artikel av Kulhavy används den euklidiska normen av regressionsvektorn som excitationvillkor). Problemet med metoden är att i detta fall alltid finns excitation p g a bruset, vilket medför att någon större uppdatering av kovariansmatrisen aldrig inträffar. Detta beror på att när väl kovariansmatrisen blivit liten, ligger γ och svänger kring noll p g a bruset. Metoden visar sig alltså var direkt olämplig för extremalreglering av systemet. Slutstatsen blir att det är tvunget att "rucka" (excitera) systemet för hitta rätt extrempunkt.

5.2.3 Extended least square

En annan metod som provas är extended least square metoden, vilken bygger på den vanliga minsta kvadrat metoden. Utökningen av metoden innebär att man använder sig av exponentiell glömska och även modellerar bruset. Anledningen till att bruset modelleras är att på så sätt undviks bias vid korrelerat brus. Estimatoren med sex tillstånd ges av

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + P(t)\phi(t-1)\epsilon(t) \quad (5.9)$$

$$\epsilon(t) = y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1) \quad (5.10)$$

$$P(t) = \frac{1}{\lambda}(P(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t)\phi^T(t)P(t-1)}{\lambda + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)}) \quad (5.11)$$

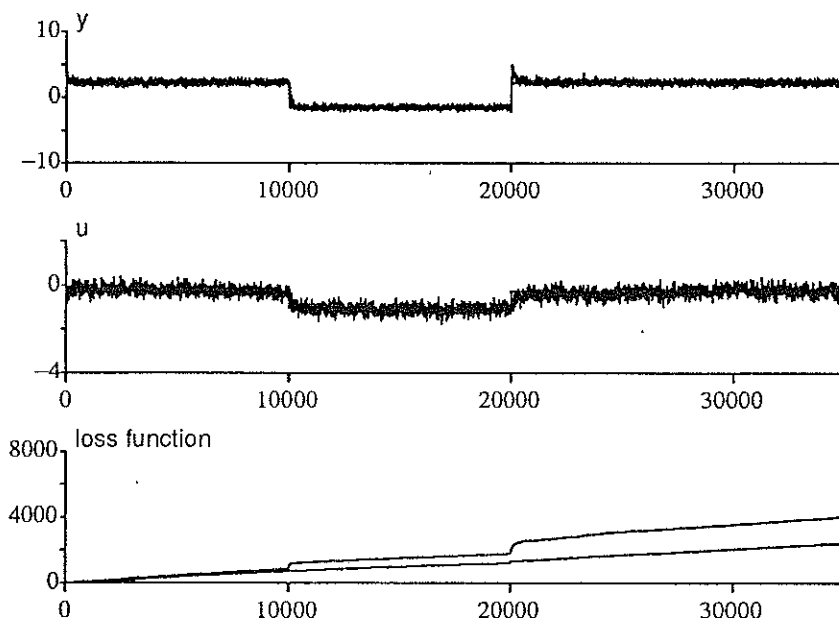
Där $\phi(t)$ är regressionsvektorn och ges av

$$\phi^T(t) = (y(t-1) \quad 1 \quad u(t-1) \quad u(t-2) \quad u^2(t-1) \quad e(t-1))$$

och parameterestimaten $\hat{\theta}(t)$

$$\hat{\theta}(t) = (\hat{a}_{11} \quad \hat{b}_0 \quad \hat{b}_{10} \quad \hat{b}_{11} \quad \hat{b}_{20} \quad \hat{c}_{11})$$

För att få metoden att fungera behövs att systemet exciteras, eftersom exponentiell glömska används. Annars skulle inställningen som gjorts glömmas bort och den styrlag som beräknas blir baserad på en estimering utan tillräcklig excitation. De justerbara parametrarna är glömskefaktorn λ och störsignalamplituden ρ . Den verkliga kvalitetsfaktorn på metoden är som innan förlustfunktionen. Ett högt värde på glömskefaktorn λ gör att systemet blir långsamt



Figur 5.2: Processändring med adaptiv reglering för extended least square. Brussekvensen u_{pert2} används med $\rho = 0.20$ och $\lambda = 0.999$.

vid processändringar, medan ett lågt värde gör att det blir brus känsligt. Ett av problemen med metoden är estimator uppvridningen (estimator windup), som uppkommer när systemet har för lite excitation så börjar kovariansmatrisen att

Störsignalsamplitud ρ	Glömskefaktor λ	Förlust 1	Förlust 2
0.10	0.999	10204	7697
0.15	0.999	8922	5470
0.20	0.999	6553	4031
0.25	0.999	6222	4944

Tabell 5.2: Resultat från simuleringar med adaptiv reglering med extended least square estimator av dynamiskt system med processändringar. Optimal förlust är 2439.

växa. Detta medför stora förändringar i estimaten när ny information kommer, vilket resulterar i signalspikar. Ett sätt att komma undan skulle vara att begränsa kovariansmatrisen med t ex en konstant spår algoritim. I figur 5.2 ses att metoden klarar av processförändringar. Genom att välja glömskefaktorn konstant till $\lambda = 0.999$, kan störsignalens amplitud justeras för att minimera förlustfunktionen.

En sammanställning över de simulerade försöken ges av tabell 5.2. Det ses att brussekvensen u_{pert2} med $\rho = 0.20$ minimerar förlustfunktionen och överlag erhålls bäst resultat för u_{pert2} . Antagandet att u_{pert2} ger bäst excitation överensstämmer med simuleringarna.

5.2.4 Kalmanfilter metoden

Det speciella med Kalmanfilter metoden [15] är att en modell ansätts för parametrarnas tidsvariation. Parameter modellen använder sig av en "random-walk" funktion och ser ut enligt följande

$$\theta(t+1) = \theta(t) + v(t)$$

Där $v(t)$ är normalfördelat brus enligt

$$v(t) \in N(0, \sigma^2 R(t))$$

Utsignals ekvationen sätts till

$$y(t) = \phi^T \theta(t) + e(t)$$

Då erhålls Kalmanfilter metoden som

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)\epsilon(t) \quad (5.12)$$

$$\epsilon(t) = y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1) \quad (5.13)$$

$$K(t) = \frac{P(t-1)\phi(t)}{1 + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)} \quad (5.14)$$

$$P(t) = P(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t)\phi^T(t)P(t-1)}{1 + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)} + R(t) \quad (5.15)$$

$$(5.16)$$

Där $\phi(t)$ är regressionsvektorn och ges av

$$\phi^T(t) = (y(t-1) \quad 1 \quad u(t-1) \quad u(t-2) \quad u^2(t-1) \quad e(t-1))$$

och parameterestimaten $\hat{\theta}(t)$

$$\hat{\theta}(t) = (\hat{a}_{11} \quad \hat{b}_0 \quad \hat{b}_{10} \quad \hat{b}_{11} \quad \hat{b}_{20} \quad \hat{c}_{11})$$

Matrisen $R(t)$ som adderas till uppdateringen av kovariansmatrisen, $P(t)$, skall ange parametrarnas kovarianser. Parametrarnas kovarianser är i de flesta fall okända, vilket medför att $R(t)$ oftast väljs till en konstant diagonalmatris

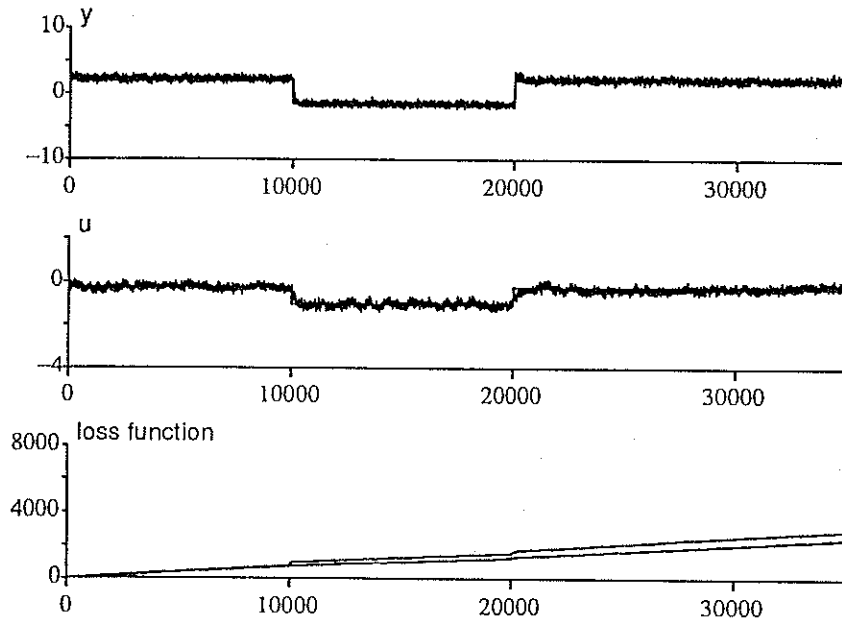
$$R(t) = R = \text{diag}(r_{ii})$$

Där diagonalelementen blir de justerbara konstanterna för metoden, och bör väljas som respektive parameters θ_i förväntade varians. Finns inte kännedom om respektive parameters variation väljs

$$R(t) = \kappa I$$

Där κ är en positiv konstant. En förutsättning för att Kalmanfilter metoden skall fungera bra är att parameter modellen stämmer väl överens med parametrarnas variation.

Att notera är att om $P\phi = 0$ så växer kovariansmatrisen linjärt med faktorn R , i jämförelse med extended least square metoden som växer exponentiellt med $1/\lambda$, blir Kalmanfilter metoden robustare och orsakar inte så lätt estimator uppvridning. Fördelen med Kalmanfilter metoden är att bara en parameter, κ , behöver väljas förutom störsignalens amplitud.



Figur 5.3: Processändring med adaptiv reglering för Kalmanfilter metoden. Brussekvensen u_{pert2} används med $\rho = 0.10$ och $\kappa = 0.0005$.

I figur 5.3 presenteras en simulering som visar att metoden fungerar bra. Det ses att förlustfunktionen får tillskotten vid processändringarna men annars är ökningstakten densamma som för den optimala förlusten. En annan observation är att metoden snabbt skattar den nya extrempunkten efter en processändring därav det låga värdet på förlustfunktionen.

I tabell 5.3 redovisas förlusterna för olika val av brussekvenser, kovarianskonstanten κ och störsignalens amplitud ρ . Vid samtliga simuleringar beräknas förlusterna från och med det 100:e samplet, d v s $t_{loss} = 100$. Ur tabellen ses att om kovarianskonstanten är stor så skall störsignalens amplitud vara liten samt vice versa. Att den ackumulerade förlusten ökar snabbare än den optimala förlusten när processparametrarna är konstanta är något som vill undvikas. Kan det ej undvikas att den ackumulerade förlusten ökar snabbare än den

Störsignalamplitud ρ	Kovarianssk. κ	Förlust 1	Förlust 2
0.05	0.01	3691	3408
0.10	0.01	7609	3517
0.05	0.001	3578	4342
0.10	0.001	3320	2880
0.05	0.0005	3924	4696
0.10	0.0005	2908	2827

Tabell 5.3: Resultat från simuleringar av dynamiskt system med processförändringar med kalmanfiltermetoden. Optimal förlust är 2439.

optimala förlusten så är det bättre att den ackumulerade förlusten ökar kraftigt vid processförändringar och därefter har samma ökningstakt som den optimala förlusten.

5.2.5 Exponential forgetting and resetting algorithm

Denna algoritm är en modifierad RLS algoritm och kallas exponential forgetting and resetting algorithm [13]. Algoritmens kvalitativa egenskaper består av:

- Exponentiell glömska och reset.
- En övre gräns för kovariansmatrisen.
- En undre gräns för kovariansmatrisen.

Det första av dessa krav uppnås genom den vanliga exponentiella glömskefaktor metodiken, det andra kravet medför att en positivt definit matris måste adderas till inversen av kovariansmatrisen $P^{-1}(t)$ vid uppdateringen och det tredje kravet medför addition av en positivt definit matris till kovariansmatrisen $P(t)$ vid uppdateringen. Dessa modifieringar leder till algoritmen

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)\epsilon(t) \quad (5.17)$$

$$\epsilon(t) = y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1) \quad (5.18)$$

$$K(t) = \frac{\alpha P(t-1)\phi(t)}{1 + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)} \quad (5.19)$$

$$P(t) = \frac{1}{\lambda}P(t-1) - \frac{\alpha P(t-1)\phi(t)\phi^T(t)P(t-1)}{1 + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)} + \beta I - \delta P^2(t-1) \quad (5.20)$$

Där $\phi(t)$ är regressionsvektorn och ser ut som

$$\phi^T(t) = (y(t-1) \quad 1 \quad u(t-1) \quad u(t-2) \quad u^2(t-1) \quad e(t-1))$$

och parameterestimatens $\hat{\theta}(t)$

$$\hat{\theta}(t) = (\hat{a}_1 \quad \hat{b}_0 \quad \hat{b}_{10} \quad \hat{b}_{11} \quad \hat{b}_{20} \quad \hat{c}_1)$$

I ekvationerna är α , β , λ och δ positiva konstanter. Specialfallet när $\alpha = \lambda = 1$ och $\beta = \delta = 0$ resulterar algoritmen i den ursprungliga RLS algoritmen. Konstanterna förklaras på följande sätt

α : Justerar algoritmens steglängd.

λ : Motsvarar den sedvanliga glömskefaktorn.

βI : Addition av en positivt definit matris var uppdatering, säkrar att den nedre gränsen för kovariansmatrisen egenvärde begränsas.

$\delta P^2(t-1)$: Subtraktion av denna term i kovarians uppdateringsformeln innebär detsamma som addition av en positivt definit matris till kovariansmatris inversen. Detta resulterar i att den övre gränsen för kovariansmatrisens egenvärde säkras.

Introducera γ som

$$\gamma \triangleq \frac{1-\lambda}{\lambda}$$

Om α , β , λ och δ väljs enligt

$$0 < \gamma < \alpha < 1$$

$$\beta > 0$$

$$\delta > 0$$

och kovariansmatrisens begränsningar som

$$\bar{\sigma} I \leq P(0) \leq \bar{\nu} I$$

Där begränsningarna ges av

$$\bar{\nu} \triangleq \frac{\gamma}{2\delta} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta\delta}{\gamma^2}} \right)$$

$$\bar{\sigma} \triangleq \frac{\alpha - \gamma}{2\delta} \left(\sqrt{1 + \frac{4\beta\delta}{(\alpha - \gamma)^2}} - 1 \right)$$

Då kommer det för en godtycklig sekvens $\{\phi(t)\}$ att gälla

$$\bar{\sigma} I \leq P(t) \leq \bar{\nu} I \quad t \geq 0$$

Om $\phi(t) = 0$ för alla t kommer kovariansen

$$P(t) \rightarrow \bar{\nu} I$$

Vid första anblicken kan man få intrycket att det är svårt att välja de fyra konstanterna, men det visar sig att det inte är så komplicerat, eftersom det finns bra riktvärde på vilken storleksordning de bör ha. Salgado [13] rekommenderar intervallen

$$0.1 \leq \alpha \leq 0.5$$

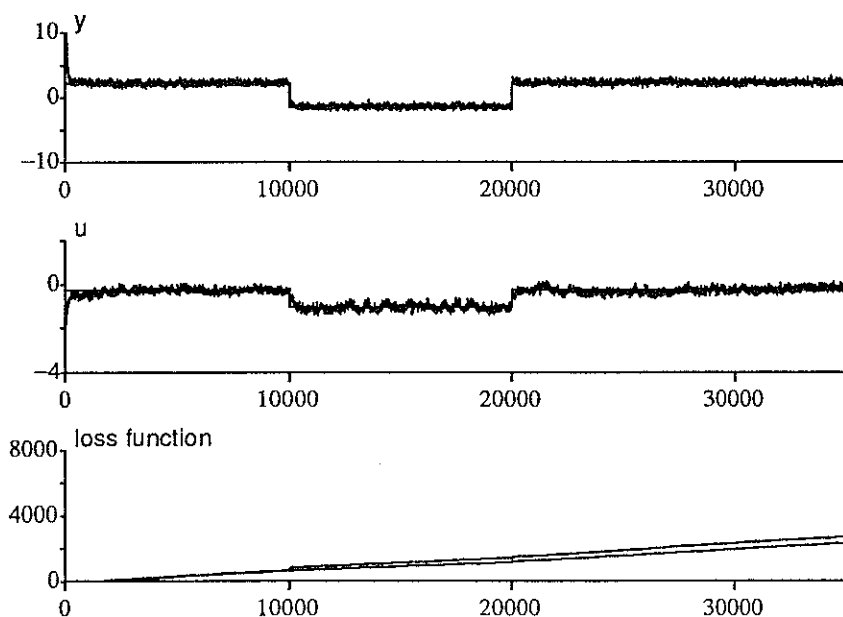
$$0 \leq \beta \leq 0.01$$

$$0.9 \leq \lambda \leq 0.99$$

$$0 \leq \delta \leq 0.01$$

I simuleringar som gjorts med EFRA har det laborerats med alla parametrarna. Det visar sig att en klart acceptabel grundinställning snabbt görs, därefter kan genom smärre modifikationer fininställning ske.

I figur 5.4 visas en simulering med EFRA metoden där brussekvensen u_{pert2} används som excitationssignal. Det ses att metoden reglerar mycket bra, vilket visar sig i förlustfunktionen. Den ackumulerade förlusten för simuleringen blir 2727 att jämföras med den optimala förlusten som är 2356. I jämförelse med



Figur 5.4: Processändring med adaptiv reglering för EFRA. Med konstanterna $\rho = 0.10$, $\alpha = 0.10$, $\beta = 0.005$, $\delta = 0.01$ och $\lambda = 0.99$.

extended least square och kalmanfilter metoden har överslängsbeteendet reducerats p g a den snabbare skattningen av extrempunkten vid processändringar.

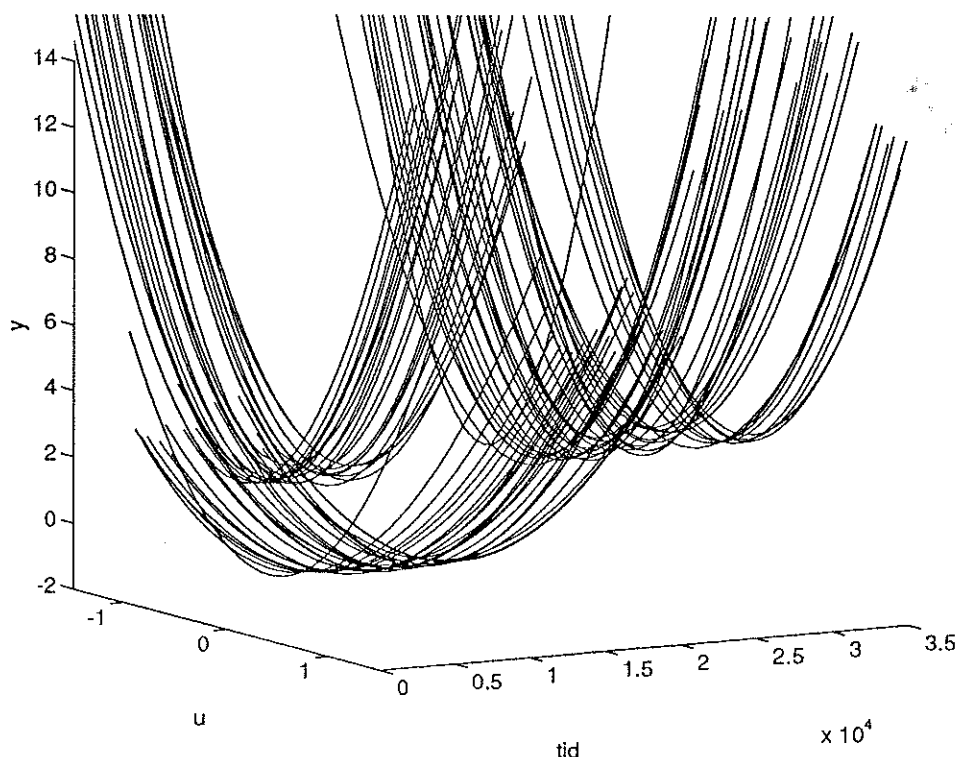
En sammanställning av försöken med EFRA visas i tabell 5.4. Samtliga försök har utförts med störsignalsamplituden 0.1, vilken visat sig ge tillräcklig excitation för den simulerade processen. Många parametrar är justerbara, vilket gör det svårt att förklara och redovisa hur parametrarna bör väljas dock fås snabbt ett tillfredsställande resultat genom lite experimenterande. Som bäst erhöles en ackumulerad förlust på 2709. I tabellen ses också att alla värden på förlusten är klart acceptabla. Simuleringarna visar att valet av excitationssignal är mindre viktigt för denna metod.

α	β	δ	λ	Förlust 1	Förlust 2
0.07	0.005	0.0001	0.995	2849	2967
0.07	0.0005	0.001	0.995	2739	3010
0.07	0.0005	0.0005	0.995	2749	2968
0.10	0.005	0.001	0.98	2835	2718
0.10	0.005	0.001	0.99	2770	2726
0.10	0.0005	0.001	0.995	2709	2920

Tabell 5.4: Resultat från simuleringar av dynamiskt system med processförändringar med EFRA metoden. Optimal förlust är 2356 och $t_{loss} = 1250$.

5.2.6 Parameter estimering

Tidigare har det nämnts att estimaten inte är de rätta men de approximerar det verkliga systemet bra, d v s att extrempunkten skattas korrekt. Detta innebär att det inte är intressant att plotta parameterestimaten i tiden,



Figur 5.5: Processändring med adaptiv reglering. Det skattade systemet plottas mot tiden. Samma simulering som fig 5.4.

eftersom de kan glida inbördes. Som tidigare sagts, se kapitel 4.2.1, är parameterestimaterna inte det centrala, utan om rätt extrempunkt skattas eller inte. När parametrarna glider så ändras kurvans utseende, men extrempunkten ligger i princip stilla. I figur 5.5 har den stationära kurvan skattats (parametrarna) och plottats mot tiden (samma försök som i figur 5.4). I figuren ses som väntat att extrempunkten ligger stilla.

5.3 Resultat

Extremalreglering av tidsvariabla processer fungerar bra för både stokastisk approximation och adaptiva metoder. Stokastisk approximation ger dock överlag sämre resultat än metoderna baserade på adaptiv reglering, vilket beror på de avvägningarna som måste göras angående snabbhet och precision. Fördelen med metoden är att yttre excitation inte behöver tillföras systemet.

Först av de adaptiva metoderna att utvärderas var en metod som ej skulle behöva yttre excitation, Kulhavy och Karnys metod. Det visade sig att denna var olämplig för extremalreglering av processer med brus. För de andra adaptiva metoderna utnyttjas yttre excitation för regleringen. Det visade sig att en brussekvens med variabel amplitud i regel gav bättre resultat än den med konstant amplitud. Nästa metod som testades var extended least square, vilken gav ett något bättre resultat än stokastisk approximation. Fördelen med metoden är att den är enkel att hantera eftersom enbart två parametrar behöver ställas in. De klart bästa resultaten erhöles för EFRA och Kalmanfilter metoden. Båda metoderna ger en förlust som är en fjärdedel av förlusten för extended least square. En fördel med Kalmanfilter metoden kan tyckas vara att det räcker att

Metod	Förlust	Optimal förlust
Stokastisk approximation	4507	2439
Extended least square	4031	2439
Kalmanfilter	2827	2439
EFRA	2709	2356

Tabell 5.5: Bästa erhållna resultat för respektive metod.

ställa in två parametrar gentemot fyra för EFRA metoden, men det visade sig vara lika enkelt med EFRA metoden. Detta p g a väldefinierade riktlinjer för parametrarnas inverkan. Nackdelen hos EFRA metoden är att den fordrar klart mer beräkningar än de övriga metoderna. Antalet beräkningar som görs för EFRA kan förenklat sägas vara proportionellt mot $2n^3$, där n är antal parametrar. Kalmanfilter metoden och Extended least square är däremot proportionella mot n^3 . En sammanställning av metoderna finns i tabell 5.5.

6 Lägre ordningens modell

Vid de simuleringar som hittills gjorts med adaptiv reglering har rätt modellstruktur ansatts för systemet. För att ansätta rätt modellstruktur krävs stor kännedom om processen. Även om rätt modell ansatts, så har parameterestimaten avvikit en hel del från de korrekta värdena. Att de estimerade parametrarna avviker från de korrekta är mindre viktigt så länge som de estimerade parametrarna genererar ett system som statistiskt efterliknar det korrekta systemet. Eftersom de estimerade parametrarna avviker från de korrekta så behövs kanske inte alla parametrar estimeras fram, utan en enklare modell kan ansättas. Den tidsvariabla processen som används är

$$Ay(t) = B_0 + B_1u(t-1) + B_2u^2(t-1) + Ce(t) \quad (6.1)$$

och beskrivs i kapitel 5. I detta kapitel kommer två olika modeller ansättas, där den ena är statisk och den andra är en något förenklad dynamisk modell. De metoder som prövas är de som fungerat bäst när rätt modell för processen ansatts, d v s Kalmanfilter och EFRA metoden. Både excitation Brus med konstant och variabel amplitud används.

6.1 Approximation med statiskt modell

Det radikalaste sättet att approximera en dynamisk process är att bortse från dynamik och tidsfördröjningar genom att ansätta en statisk modell. Den dynamiska processen approximeras med följande statistiska modell

$$y(t) = b_0 + b_1u(t-1) + b_2u^2(t-1) \quad (6.2)$$

Där den dynamiska processens sex parametrar har reducerats till tre. Den statistiska modellen ger styrlagen

$$\hat{u}_{extrem} = -\frac{\hat{b}_1}{2\hat{b}_2} \quad (6.3)$$

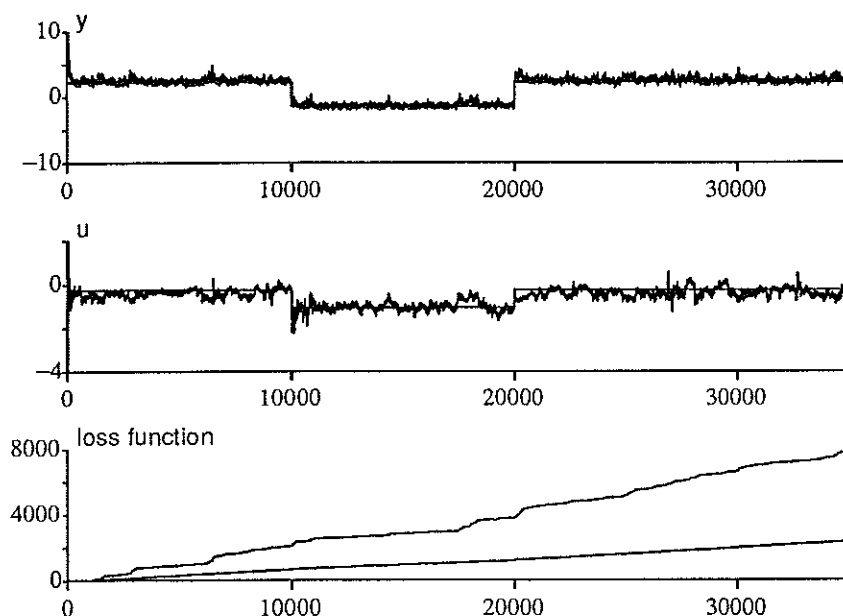
6.1.1 Kalmanfilter metoden

Av figur 6.1 framgår det att metoden ej fungerar då den dynamiska processen skattats med en statisk modell. Styrsignal är väldigt brusig vilket innebär att skattningen av extrempunkten är osäker, vilket ses i förlustfunktionen. Observera att under fas 2 verkar förlustfunktionernas lutning vara ungefär lika.

I simuleringarna som redovisas i tabell 6.1 ses att samtliga val av parametrarna ger ett dåligt resultat. En observation vid simuleringarna är att det

Störsignalamplitud ρ	Kovariansskonst. κ	Förlust 1	Förlust 2
0.02	0.10	26242	31045
0.05	0.10	34048	10942
0.02	0.50	14989	82931
0.05	0.50	23718	7820
0.02	1.00	15312	16053
0.05	1.00	33439	31846

Tabell 6.1: Resultat från simuleringar av dynamiskt system med statisk processmodell för Kalmanfilter metoden.



Figur 6.1: Dynamiskt process approximeras med statistisk modell där Kalmanfilter metoden används i estimatorn. Brussekvens u_{pert2} med $\rho = 0.05$ och $\kappa = 0.5$.

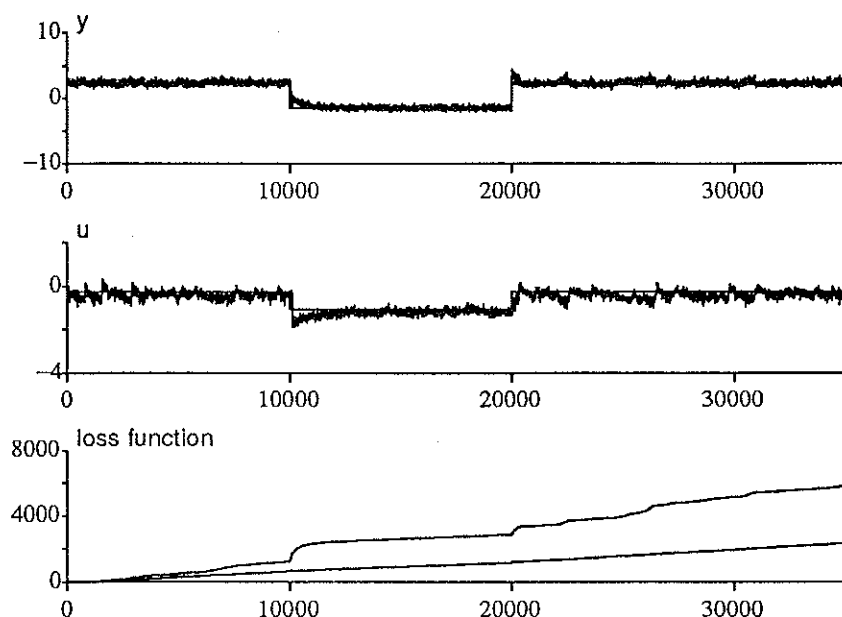
överlag är mycket brus känsligt. För att överhuvudtaget komma ner i en acceptabel förlust måste många och tidsödande fininställningar göras. Lägsta förlust som erhöles var 7820, vilket är dåligt jämfört med stokastisk approximation (se tabell 5.1). Trots de föregående justeringarna så är de flesta simuleringarnas ackumulerade förlust betydligt över 10000. Jämförs det med när korrekt modell ansätts så är skillnaden betydande, vilket ger slutsatsen att den statistiska modellen inte kan ersätta den korrekta modellen. I tabellen ses ett något bättre resultat för det gaussiska bruset, men det är inte på långa vägar tillfredställande. Kalman metoden visar sig vara svårinställd och olämplig om en klart förenklad modell av processen väljs.

6.1.2 EFRA metoden

Simuleringarna presenteras i tabell 6.2. Anmärkningsvärt är att den ackumulerade förlusten inte i något fall understiger 20000 för excitationbruset med konstant amplitud. För excitationbruset med variabel amplitud reduceras förlusten till värden under 6000, att jämföras med 4500 för stokastisk approximation.

α	β	δ	λ	förlust 1	förlust 2
0.07	0.01	0.0005	0.995	72520	8627
0.07	0.01	0.001	0.99	82466	8410
0.10	0.01	0.001	0.985	20917	5808
0.10	0.05	0.001	0.995	84234	26287
0.20	0.05	0.001	0.98	30530	18856
0.20	0.05	0.001	0.99	29748	20992

Tabell 6.2: Resultat från simuleringar av dynamiskt system med statistisk processmodell för EFRA metoden.



Figur 6.2: Dynamiskt system approximeras med statisk modell för EFRA metoden. Brussekvens u_{pert2} med $\rho = 0.10$, $\alpha = 0.10$, $\beta = 0.01$, $\delta = 0.001$ och $\lambda = 0.985$.

Av figur 6.2 framgår det att EFRA metoden fungerar dåligt under fas 1 och 3 medan den fungerar bra under fas 2. Detta är ett konstaterande som gäller för alla simuleringar med såväl EFRA som Kalmanfilter metoden när statisk modell använts. EFRA metoden fungerar något bättre än Kalmanfiltermetoden, men att förlustfunktionen glider iväg är oacceptabelt.

Jämförelsen med stokastisk approximation leder till slutsatsen att det varken för kalmanfilter eller EFRA metoden är tillräckligt att modellera en dynamisk process med en statisk modell. Det som dömer ut försöken med att approximera processen med en statisk modell är att extrempunkten aldrig hittas, utan förlustfunktionen kommer hela tiden att växa.

6.1.3 Karakteristik för statisk modell

Genomgående för simuleringarna med statisk modell är att den 2:a fasen blir den som ger minst ökning för den ackumulerade förlusten. Skillnaderna beror på att 2:a fasens dynamiska process innehåller mindre dynamik än den ursprungliga processen. Granskas processerna statistiskt ges följande för fas 1 och 3

$$a_{11} = -0.9 \quad b_0 = 0.25 \quad b_{10} = 0.5 \quad b_{11} = -0.25 \quad b_{20} = 0.5$$

Vilket ger

$$y(t) = \frac{b_0}{1 + a_{11}} + \frac{b_{10} + b_{11}}{1 + a_{11}} u + \frac{b_{20}}{1 + a_{11}} u^2 = 2.5 + 2.5u + 5u^2$$

Processen i fas 2 ger följande

$$a_{11} = -0.8 \quad b_0 = 0.5 \quad b_{10} = 1.7 \quad b_{11} = -0.2 \quad b_{20} = 0.7$$

Vilket ger

$$y(t) = \frac{b_0}{1 + a_{11}} + \frac{b_{10} + b_{11}}{1 + a_{11}} u + \frac{b_{20}}{1 + a_{11}} u^2 = 2.5 + 7.5u + 3.5u^2$$

Den kvadratiske termen i fas 2 är statistiskt sett mindre än det ursprungliga systemets kvadratiske term. Detta leder till att det ursprungliga systemet är mer känsligt för korrekt inställning än för systemet i fas 2.

Ju större kvadratisk term statistiskt sett desto känsligare är det att hitta rätt extrempunkt. En felaktig extrempunkt straffas således hårdare i den ackumulerade förlusten för ett system med en stor kvadratisk term. Ur detta fås att för ett dynamiskt system räcker det inte med att granska den kvadratiske termen utan dynamiken i systemet måste även granskas eftersom den kommer in som nämnare till samtliga andra parametrar statistiskt sett. Bli summan av det dynamiska systemets dynamikparametrar nära noll leder det till att systemet automatiskt får en stor kvadratisk term och den ackumulerade förlusten växer snabbt om inte rätt extrempunkt beräknas.

6.2 Approximation med förenklad modell

Ett annat sätt att förenkla modellen är att ta hänsyn till processdynamik, men ignorera tidsfördröjningar. Den dynamiska processen approximeras med följande förenklade modell

$$y(t) = -a_{11}y(t-1) + b_0 + b_1u(t-1) + b_2u^2(t-1) + e(t) + c_{11}e(t-1) \quad (6.4)$$

Tidigare observationer har visat att parametrarna inte skattas korrekt, men approximerar ändå stationärt ett system som efterliknar det korrekta så väl att det kan användas till att beräkna extrempunkten. Regulatorn för den korrekta modellen är

$$\hat{u}_{extrem} = -\frac{\hat{b}_{10} + \hat{b}_{11}}{2\hat{b}_{20}}$$

Idén är då att eftersom summan av parametrarna b_{10} och b_{11} är exaktare än värdena var för sig om korrekt modell ansätts så skulle dessa kunna slås samman till en parameter, b_1 . Följs föregående idé kommer modellen att se ut som ekv 6.4 och regulatorn enligt

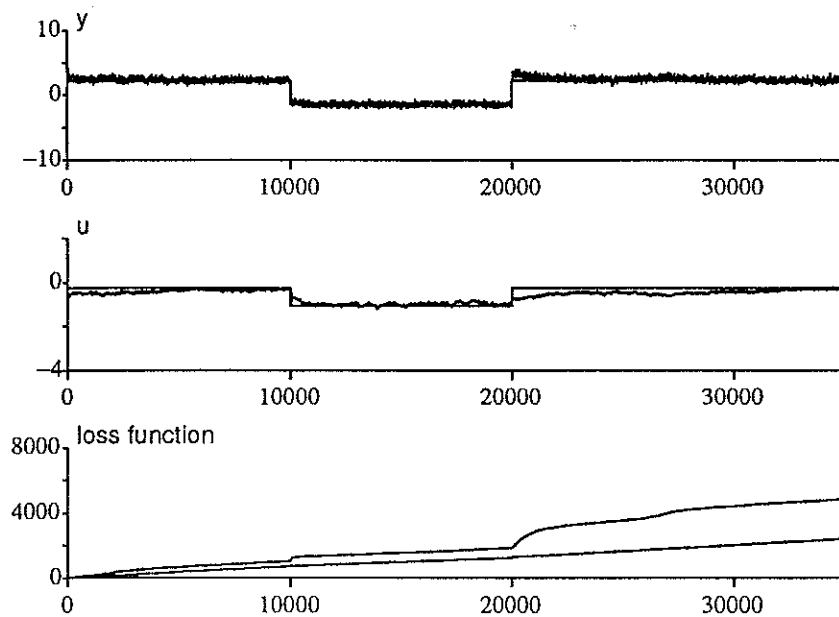
$$\hat{u}_{extrem} = -\frac{\hat{b}_1}{2\hat{b}_2}$$

6.2.1 Kalmanfilter metoden

I figur 6.3 presenteras en simulering med Kalmanfilter metoden där en förenklad modell använts. Här ses att metoden svarar långsamt på processförändringar men konvergens sker mot korrekt extrempunkt. När processen väl är stabil så uppför sig den förenklade metoden lika bra som den korrekta modellen. I tabell 6.3 ses att excitationssignalen med variabel amplitud i de flesta fall ger

Störsignalamplitud ρ	Kovariansskonst. κ	Förlust 1	Förlust 2
0.02	0.001	6544	9232
0.05	0.001	11421	5516
0.02	0.0005	6140	5705
0.05	0.0005	10873	5212
0.02	0.0002	12351	4856
0.05	0.0002	13105	5202

Tabell 6.3: Resultat från simuleringar av dynamiskt system med förenklad processmodell för Kalmanfilter metoden.



Figur 6.3: Dynamiskt system approximeras med förenklad modell för Kalmanfilter metoden. Brussekvens u_{pert2} med $\rho = 0.02$ och $\kappa = 0.0002$.

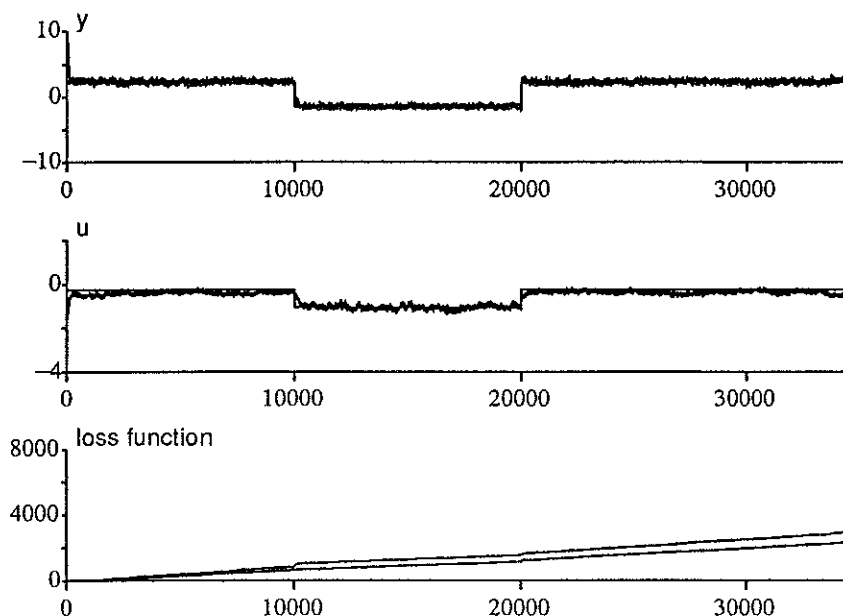
bättre resultat än med konstant amplitud på excitationssignalen. Jämförs korrekt modell med den förenklade modellen så är den senare klart sämre, men fullt i klass med stokastisk approximation. En iakttagelse är att det krävs mindre amplitud på excitationssignalen då färre parametrar skall estimeras, vilket ses om tabell 5.3 och 6.3 jämförs.

6.2.2 EFRA metoden

En simulering där EFRA metoden med förenklad modell används visas i figur 6.4. I denna visar metoden ett klart acceptabelt uppförande, där förlusterna uppkommer vid processändringarna och stannar vid 3129. Om excitation Brus med konstant amplitud används för att excitera systemet vid användande av EFRA metoden tillsammans med förenklad modell, så ses i tabell 6.4 att det som bäst resulterar i en ackumulerad förlust på ca 5700. Om istället gaussiskt brus används för att excitera systemet fås ett helt annat resultat, förlustfunktionen reduceras lätt ned till ca 3200, vilket är godkänt. Den är helt överlägsen både Kalmanfiltermetoden med motsvarande modell och metoden med stocas-

ρ	α	β	δ	λ	förlust 1	förlust 2
0.05	0.10	0.001	0.001	0.98	5691	3129
0.05	0.10	0.001	0.001	0.99	6004	3280
0.10	0.07	0.0005	0.0001	0.995	10515	4584
0.10	0.07	0.0005	0.0005	0.995	11993	4829
0.10	0.10	0.0005	0.001	0.95	14904	4979
0.10	0.10	0.0005	0.001	0.99	10597	4513

Tabell 6.4: Resultat från simuleringar av dynamiskt system med förenklad processmodell för EFRA metoden.



Figur 6.4: Dynamiskt system approximeras med förenklad modell för EFRA metoden. Brussekvensen u_{pert2} används med $\rho = 0.05$, $\alpha = 0.10$, $\beta = 0.001$, $\delta = 0.001$ och $\lambda = 0.98$.

tisk approximation. I tabellen ses att liten amplitud på störsignalen är fördelaktigt och att parameterinställning inte är speciellt kritisk, eftersom dessa kan variera utan att det slår igenom för mycket på resultatet. Försöken visar att om en något förenklad modell ansätts så fås ändå ett relativt bra resultat.

6.3 Resultat

Att approximera en dynamisk process med en statisk modell fungerar ej acceptabelt. Modellering av dynamiken krävs för bra extremalreglering. Betydligt bättre resultat erhöles för approximationen av den dynamiska processen med en förenklad dynamisk modell. Trots att bara en parameter mindre att skattas så blir resultaten för den förenklade modellen klart sämre än när korrekt modell ansätts. Det är således viktigt att få reda på så mycket information om systemet så att rätt modell kan ansättas för att bästa möjliga resultat skall erhållas. Om begränsningar finns i beräkningskapacitet vilket gör att t ex enbart fem parametrar kan skattas så är den förenklade modellen ett bra alternativ till stokastisk approximation. Man bör välja EFRA metoden med excitation av gaussiskt brus för att nå bästa möjliga resultat.

En skillnad mellan EFRA metoden och Kalmanfilter metoden är att den senare är känsligare för att rätt modell ansätts. Att jämföra EFRA metoden och Kalmanfilter metoden rätt över är något missvisande, eftersom EFRA metoden är mer beräkningskrävande än Kalmanfilter metoden. Man kan alltså ansätta en mer komplicerad modell med Kalmanfilter metoden än med EFRA metoden utan att för den delen kräva mer beräkningar än vad EFRA metoden kräver dvs Kalmanfilter metoden är snabbare. Men om antalet beräkningar sätts som begränsning på estimatorn, så kan en mer komplicerad modell ansättas för Kalmanfilter metoden än med EFRA metoden. Detta resulterar i att Kalmanfilter metoden ändå kan var ett alternativ till EFRA metoden, vilket utreds i nästa kapitel som handlar om högre ordningens modell.

7 Högre ordningens modell

För att ytterligare utröna extremalregleringens känslighet vad det gäller modellval, väljs att utöka modellen. Modellen utökas dels genom att addera ytterligare en kvadratisk term, dels genom att skapa en processmodell med elva parametrar. Det intressanta är om estimatorn lyckas estimerera fram parameterkombinationer som efterliknar det statistiska sambandet för processen. Att parametrarna var för sig är skilda från de korrekta värdena är troligt eftersom detta gäller när korrekt modell är ansatt. När estimatorerna innehåller fler parametrar ställs det större krav på störsignalen som skall excitera systemet. Skulle resultatet från att använda en större modell bli lika bra som om korrekt modell användes leder det till att modellen som ansätts skall vara väl tilltagen. Ett problem med att ansätta modeller som är komplexa är att de ställer stora krav på beräkningskapaciteten hos estimatorn, där nästan all beräkning sker. Den tidsvariabla processen som används är

$$Ay(t) = B_0 + B_1u(t-1) + B_2u^2(t-1) + Ce(t) \quad (7.1)$$

och beskrivs i kapitel 5. De metoder som provas är de som fungerat bäst när rätt modell för processen ansatts, d v s kalmanfilter och EFRA metoden. Både excitation Brus med konstant och variabel amplitud används.

7.1 Utökad modell med sju parametrar

Här adderas en tidsförskjuten kvadratisk term till processmodellen. Detta för att undersöka vad som händer när en felaktig, komplexare modell ansätts. Modellen blir enligt ekv 7.1, där polynomen beskrivs av

$$\begin{aligned} A &= 1 + a_{11}q^{-1} \\ B_0 &= b_0 \\ B_1 &= b_{10} + b_{11}q^{-1} \\ B_2 &= b_{20} + b_{21}q^{-1} \\ C &= 1 + c_{11}q^{-1} \end{aligned}$$

Styrlagen som baseras på den utökade modellen ges av

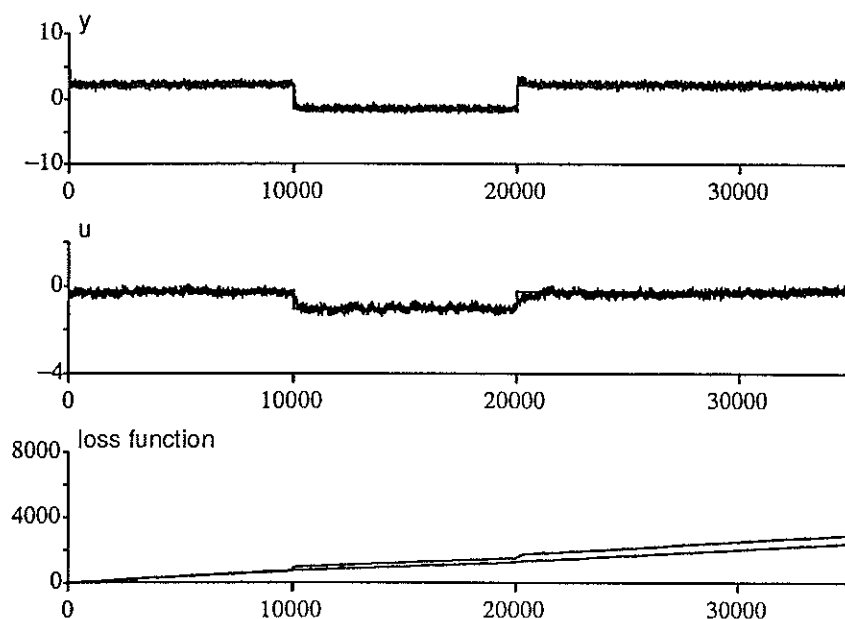
$$\hat{u}_{extrem} = -\frac{\hat{b}_{10} + \hat{b}_{11}}{2(\hat{b}_{20} + \hat{b}_{21})} \quad (7.2)$$

7.1.1 Kalmanfilter metoden

Simuleringarna som gjorts på utökad modell för Kalmanfilter metoden visas i tabell 7.1, där det ses att de båda excitationssignalerna ger likvärdiga resultat.

Störsignalamplitud ρ	Kovarianssk. κ	Förlust 1	Förlust 2
0.05	0.001	3302	4588
0.10	0.001	2972	3073
0.05	0.0005	4207	5892
0.10	0.0005	2928	3002
0.05	0.0002	4521	3461
0.10	0.0002	2966	2915

Tabell 7.1: Resultat från simuleringar av dynamiskt system med utökad processmodell (sju parametrar) för Kalmanfilter metoden.



Figur 7.1: Dynamiskt system approximeras med utökad modell för Kalmanfilter metoden. Störnsignalen u_{pert2} används med $\rho = 0.1$ och $\kappa = 0.0002$.

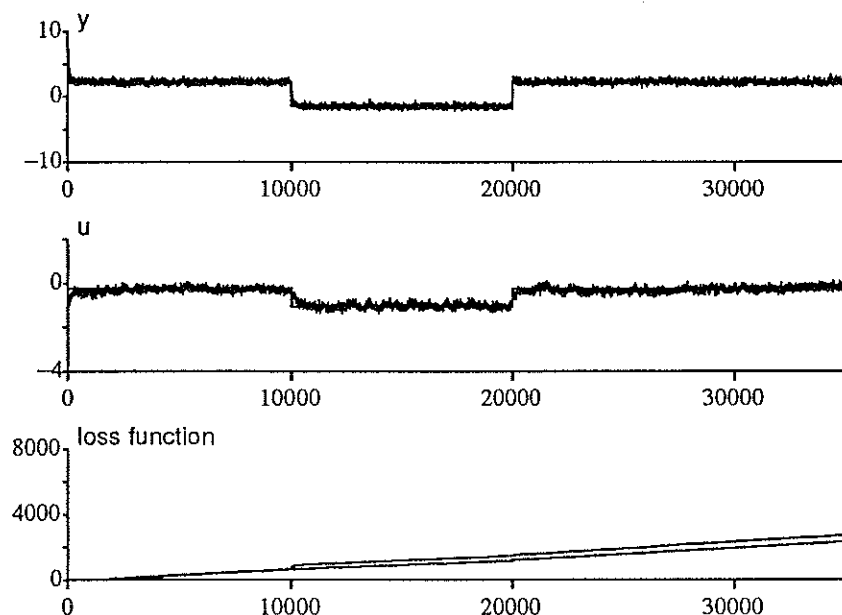
I figur 7.1 ses att extremalregleringen fungerar bra, jämför figur 5.3. Den slutliga förlusten stannar vid ca 2900, vilket motsvarar förlusten då rätt modell av processen ansatts. Vad det gäller Kalmanfilter metoden visar resultaten att det går bra att extremalreglera en process fastän en utökad modell ansatts. Metoden skattar processen så att den utökade modellen beskriver de korrekta stationära sambanden.

7.1.2 EFRA metoden

I figur 7.2 visas resultatet när EFRA metoden används. Även här fungerar extremalreglering bra, vilket kan ses av att förlusten stannar vid 2726. Någon större skillnad på resultaten då utökad eller korrekt modell ansatts finns ej. Av tabell 7.2 framgår det att båda excitationssignalerna fungerar och ger likvärdiga resultat. För både den utökade och den korrekta metoden gäller det att EFRA metoden är robust vad det gäller val av estimatorns parametrar.

ρ	α	β	δ	λ	Förlust 1	Förlust 2
0.10	0.07	0.0005	0.002	0.98	2626	2766
0.10	0.07	0.0005	0.002	0.99	2845	2974
0.10	0.10	0.0005	0.002	0.98	2640	2726
0.10	0.10	0.0005	0.002	0.99	2772	2863
0.10	0.20	0.001	0.001	0.99	2889	2726
0.10	0.20	0.001	0.001	0.995	2862	2726

Tabell 7.2: Resultat från simuleringar av dynamiskt system med utökad processmodell (sju parametrar) för EFRA metoden.



Figur 7.2: Dynamiskt system approximeras med utökad modell för EFRA metoden. Brussekvens u_{pert2} med $\rho = 0.10$, $\alpha = 0.10$, $\beta = 0.0005$, $\delta = 0.002$ och $\lambda = 0.98$.

7.2 Utökad modell med elva parametrar

Denna modell är till för att prova om resultaten för den utökade modellen även gäller för en modell, ekvation 7.3, som är klart komplexare än processen. I detta fall utökas modelldynamiken till andra ordningens A-polynom. B-polynomen utökas med b_{12} och b_{22} termer vilket motsvaras av insignalen och insignalen kvadrerad blir tidsförskjuts ytterligare ett sampel. C-polynomet utökas med c_{12} termen. Modellen blir således

$$Ay(t) = B_0 + B_1u(t-1) + B_2u^2(t-1) + Ce(t) \quad (7.3)$$

Där $e(t)$ är vitt brus samt

$$\begin{aligned} A &= 1 + a_{11}q^{-1} + a_{12}q^{-2} \\ B_0 &= b_0 \\ B_1 &= b_{10} + b_{11}q^{-1} + b_{12}q^{-2} \\ B_2 &= b_{20} + b_{21}q^{-1} + b_{22}q^{-2} \\ C &= 1 + c_{11}q^{-1} + c_{12}q^{-2} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Styrlagen för den utökade modellen ges av

$$\hat{u}_{extrem} = -\frac{\hat{b}_{10} + \hat{b}_{11} + \hat{b}_{12}}{2(\hat{b}_{20} + \hat{b}_{21} + \hat{b}_{22})} \quad (7.5)$$

7.2.1 Kalmanfilter metoden

Att använda sig av en betydligt mer komplicerad modell inverkar ej på metodens förmåga att extremalreglera. Resultaten av simuleringarna presenteras i tabell 7.3. I tabellen ses det att excitationsbruset med varierande amplitud är klart bättre än bruset med konstant amplitud. Detta beror på att här estimeras

Störsignalamplitud ρ	Kovariansskonst. κ	Förlust 1	Förlust 2
0.05	0.001	6528	3194
0.10	0.001	4224	2810
0.05	0.0005	3880	3021
0.10	0.0005	4444	2762
0.05	0.0002	5253	2925
0.10	0.0002	5865	2758

Tabell 7.3: Resultat från simuleringar av dynamiskt system med utökad modell (elva parametrar) för Kalmanfilter metoden.

elva parametrar, vilket ställer högre krav på excitationen. Bäst resultat erhålls för det mest exciterande bruset d v s bruset med varierande amplitud. Någon större skillnad i resultat mellan korrekt och utökad modell finns ej, men den utökade modellen kräver mer beräkningar.

7.2.2 EFRA metoden

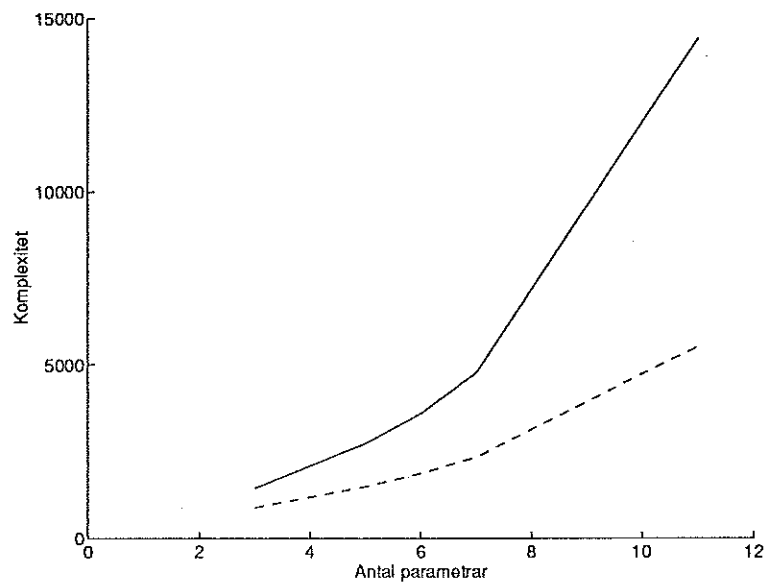
Tabell 7.4 visar resultaten som erhöles för EFRA metoden. Något problem med excitation fanns ej, vilket ses i de likvärdiga resultaten för de olika excitation Bruserna. Extremalregleringen fungerar bra, lika bra som för den korrekta modellen. Valet av parametrar för EFRA estimatorn är som tidigare relativt okänt. Även här är nackdelen med den utökade modellen att den kräver mer beräkningar.

ρ	α	β	δ	λ	Förlust 1	Förlust 2
0.05	0.10	0.001	0.001	0.99	2686	2625
0.05	0.10	0.001	0.001	0.995	2621	2649
0.10	0.10	0.001	0.001	0.99	2727	2544
0.10	0.10	0.001	0.001	0.995	2694	2582
0.10	0.20	0.001	0.001	0.99	2961	2610
0.10	0.20	0.001	0.001	0.995	2777	2601

Tabell 7.4: Resultat från simuleringar av dynamiskt system med utökad modell (elva parametrar) för EFRA metoden.

7.3 Resultat

Finns det osäkerhet gällande processens komplexitet och valet är mellan två estimatorer där den enda skillnaden är antalet parametrar som skattas så bör den komplexare modellstrukturen väljas. En klart mer komplicerad modell ger enligt simuleringarna inte ett sämre resultat än vad som fås när korrekt modell ansätts. Ett problem finns dock med högre ordningens modeller och det är det högre kravet på excitation av systemet. Simuleringar har visat att excitation Brus med variabel amplitud är klart mer exciterande och därför att föredra. Nackdelen med att välja komplexare modeller än processen är antalet beräkningar växer snabbt, se figur 7.3 vilken visar estimatorns storlek i byte, vilket förenklat kan sägas motsvaras komplexiteten. Ur bilden framgår det att EFRA estimatorn fordrar mer beräkningar än Kalmanfilter estimatorn för samma modellval, m a o kan en komplexare modell ansättas för Kalmanfilter metoden.



Figur 7.3: De olika estimatorernas komplexitet. Den heldragna linjen är för EFRA estimatorn medan den streckade är för Kalmanfilter metoden.

8 Sammanfattning

I denna rapport ges en överblick över några metoder och problem vid extremalreglering. Den första svårigheten som dyker upp är att välja en lämplig modell som kan användas med den adaptiva teorin. Den vanligast förekommande i litteraturen är Hammersteinmodellen, vilken har fördelen att vara linjär i parametrarna. Detta ger att parametrarna kan estimeras fram genom att använda någon rekursiv estimeringsalgoritm.

Det finns två olika grupper av algoritmer vid extremalsökning, nämligen de metoder baserade på numerisk approximation och de baserade på adaptiv reglering. Som exempel på en numerisk approximationsmetod har metoden för stokastisk approximation behandlats. När det gäller metoder baserade på adaptiv reglering är det estimatorerna som skiljer sig åt. I rapporten har följande estimatorer använts: Kulhavy och Karnys metod, Extended least square med glömskefaktor, Kalmanfilter metoden och Exponential forgetting and resetting algorithm.

I rapporten utreds extremalsökning av statiska olinjäriteter, dynamiska olinjäriteter och tidsvariabla dynamiska olinjäriteter. Statiska olinjäriteter vållade inga problem för stokastisk approximation, men den adaptiva metoden hade problem med identifierbarhet. Problemet är att då extrempunkten närmar sig blir insignal-utsignal förhållandet konstant, d v s ny information om systemet saknas. Detta löses genom att introducera en excitationssignal.

Dynamik i systemet ger korrelerade mätningar vid olika tidpunkter, vilket medför problem för stokastisk approximation. Ett sätt att undvika problem förknippade med dynamiken är att vänta tills stationärt värde ställt in sig. Detta gör metoden långsam. Ett bättre sätt är då att använda adaptiva metoder, där den dynamiska modellens parametrar estimeras för att användas i styrlagen. Som kvalitetsmått på metoderna introduceras förlustfunktionen, vilken beskriver den kvadratiske avvikelsen från extrempunkten.

För det tidsvariabla dynamiska systemet används stokastisk approximation som norm eftersom den är enkel och beprövad. I och med att systemen är tidsvariabla så ställs nya krav på estimatorerna för de adaptiva metoderna. Estimatoren skall snabbt finna de nya parametrarna efter processbyte och därefter ligga stabil på den nya extrempunkten. De adaptiva metoder som fungerar bäst är Kalmanfilter metoden och Exponential forgetting and resetting algorithm, vilka är överlägsna stokastisk approximation.

En av fördelarna med stokastisk approximation är att någon modell av processen ej behövs. De adaptiva metoderna fordrar god processkännedom vid val av modell. Om det finns dynamik i systemet måste den modelleras för att ett önskat beteende ska erhållas. Att välja en förenklad modell är riskabelt, vilket medför ett dåligt resultat. Det visar sig resultatmässigt inte vara någon nackdel att välja en komplexare modell än den korrekta. Nackdelen med att välja komplexare modell är att den fordrar mer beräkningar. Bäst resultat erhöles för metoderna baserade på adaptiv reglering då korrekt eller utökad modell valts.

Generellt är det mycket svårt att analysera problem vid extremalsökning och att härleda den optimala regultorn, när systemet störs av stokastiskt brus. Aspekterna hur en metod värderas är olika beroende på tillämpningen, därför kan inget enhetligt kvalitetsmått ges. Extremalsökande metoder är trots allt av stort praktiskt intresse eftersom även små förbättringar i regleringen kan ge stora besparingar av råmaterial och energikonsumtion.

Referenser

- [1] Åström K.J. and B. Wittenmark, 1989. "Adaptive Control", Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- [2] Isermann R, K-H Lachmann and D Matko, 1992. "Adaptive Control Systems", Prentice Hall International, pp. 448-450.
- [3] Kiefer and Wolfowitz, 1952. "Stochastic estimation of a regression function", *Annals of math. Stat.* 23, pp. 462-466.
- [4] Wellstead P.E. and M.B. Zarrop, 1991. "Self-tuning Systems", Wiley, pp. 499-523.
- [5] Isermann R and K-H Lachmann, 1985. *Automatica*, Vol. 21, p. 625.
- [6] Goodwin G.C. and R.L. Payne, 1977. "Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis", Academic press, New York.
- [7] Fortescue T.R., Kerschenbaum L.S. and B.E. Ydstie, 1981. *Automatica*, Vol. 17, p. 831.
- [8] Goodwin G.C., Elliot H and E.K. Teoh, 1983. *Proc. Inst. elect. Engrs*, Pt D, 130, 6.
- [9] Goodwin G.C. and K.S. Sin, 1984. "Adaptive filtering prediction and control", Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [10] Hägglund T., 1983. "New Estimation techniques for adaptive control", Ph.D. thesis, Lund Institute of Technology, Sweden.
- [11] Goodwin G.C., Hill D.J. and M. Palaniswami, 1985. "Towards an adaptive robust controller", *7th IFAC Symp. on Identification and System Parameter Identification*, York.
- [12] Kulhavy Rudolf, 1987. "Restricted Exponential Forgetting in Real-time Identification", *Automatica*, Vol. 23, No 5, pp. 589-600.
- [13] Salgado M.E. et al, 1988. "Modified least square algorithm incorporating exponential resetting and forgetting", *Int. J. Control*, Vol 47, No 2, pp. 477-481.
- [14] Wellstead P.E. and P.G. Scotson, 1990. "Self-tuning extremum control", *IEE PROCEEDINGS*, Vol. 137, Pt D, No 3, pp. 165-175.
- [15] Parkum Jens Ejnar, 1988. "Selektiv glemsel", IMSOR DTH, pp. 71-72.

A Stokastisk approximation

Alla simuleringar för stokastisk approximation har gjorts i programmet SIM-NON. Här redovisas ett exempel på ett makro för stokastisk approximation, vilket genererar figur 4.2.

```
*****
macro SA

" Macro för stokastisk approximation
" Modell  $A*y(t)=B_0+B_1*u(t-1)+B_2*u(t-1)^2+C*e(t)$ 

syst KW                "aktiva delsystem

turn seed              "initiera slumpsekvens

let tend=800          "simuleringens längd

par ka:0.1             "stegfaktor
, kb:0.2              "signalsfaktor
, limit:20            "antal sampel med oförändrad insignal
, sig:0.2             "brusets standardavvikelse
, tloss:100          "förlustfunktionens starttid
, ulim:6              "styrsignalens begränsning
, a1:-0.9            "processparametrar
, b0:0.25
, b10:0.5
, b11:-0.25
, b20:0.5

init u:-3             "initial insignal
, k:1                 "räknare

split 2 1             "delar upp skärmen i två delar
store u y ustat ystat ttu "lagra variabler
axes h 0 tend v 0 60 "skalor diagram
axes v -4 2
area 1 1              "definerar vilken del
text'y'              "axeltext
plot y ystat         "rita
simu 0 tend          "simulera
area 2 1
text'u'
show ustat ttu      "rita

end

*****
```

discrete system KW

"System som simulerar Kiefer-Wolfowitz stokastiska
"approximation metod.

```

state u k uold uoold yold yoold loss ploss      "tillstånd
state yiold y2old i df ypold eold
new nu nk nuold nuoold nyold nyoold nloss nploss
                                                    "nya tillstånd

new nyiold ny2old ni ndf nypold neold
time t
tsamp ts

e=sig*norm(t)                                     "processbruset

alfa=ka/k                                         "steglängd
beta=kb/k^(1/3)                                   "insignalvariation
tu=if i<limit then (if i<1 then u-alfa*tdf-beta else u-beta) else u+beta
                                                    "insignal
ttu=if tu<-ulim then -ulim else (if tu>ulim then ulim else tu)
                                                    "begränsad insignal
tdf=(y-yiold)/(2*beta)                            "gradienten
y=-a1*yold+b0+b10*uold+b11*uoold+b20*uold*uold+e+c11*eold
                                                    "utsignal
ustat=-(b10+b11)/(2*b20)                          "optimal insignal
ystat=(b0+(b10+b11)*ustat+b20*ustat*ustat)/(1+a1)
                                                    "optimal utsignal
yp=-a1*ypold+b0+b10*ustat+b11*ustat+b20*ustat*ustat+e+c11*eold
                                                    "perfekt utsignal
ndf=if i<1 then df else tdf                       "uppdatering av tillstånd
nu=if i<1 then u-alfa*tdf else u
nk=if i<1 then (if y-y2old>0 then k+h else k) else k
nuold=ttu
nuoold=uold
nyold=y
nyoold=yold
nyiold=if i<limit+1 then y else yiold
ny2old=if i<1 then y2old else y
nypold=yp
neold=e
nloss=if t<tloss then 0 else loss+(y-ystat)*(y-ystat)
nploss=if t<tloss then 0 else ploss+(yp-ystat)*(yp-ystat)
ni=if i<limit*2-1 then i+1 else 0
ts=t+h                                             "uppdatering av tid

a1:-0.9                                           "parameter värde
b0:0.25
b10:0.5
b11:-0.25
b20:0.50
c11:-0.5
h:1

```

ka:.05
kb:0.5
sig:0
tloss:10
i:0
df:0
limit:1
y1old:0
y2old:0
ulim:0

end

B Adaptiv reglering

Alla simuleringar för adaptiva metoder har gjorts i programmet SIMNON. Här redovisas ett exempel på ett makro för adaptiva metoden, vilket genererar figur 4.7.

```
*****
macro ADAPTIV

" Macro för adaptiv reglering
" Modell  $A*y(t)=B_0+B_1*u(t-1)+B_2*u(t-1)^2+C*e(t)$ 

syst REGUL PROCESS ESTIM CONNECT      "aktiva delsystem

turn seed                              "initiera slumpsekvens

let p0=100                              "kovarianskonstant
,tend=800                               "simuleringens längd

par lam:0.9995                          "glömskefaktorn
,sig[PROCESS]:0.2                       "brusets standardavvikelse
,umin:-3                                 "styrsignalens begränsning
,umax:3
,ps:0.01                                "excitationssignalens amplitud
,b0[PROCESS]:0.25                       "processparametrar
,b10[PROCESS]:0.5
,b11[PROCESS]:-0.25
,b20[PROCESS]:0.5

init p11:p0                             "initiering av kovariansmatrisen
,p22:p0
,p33:p0
,p44:p0
,p55:p0
,p66:p0
,th1[ESTIM]:-0.5                        "initering av estimatorn
,th2[ESTIM]:-1
,th3[ESTIM]:1
,th4[ESTIM]:0.5
,th5[ESTIM]:0.1
,th6[ESTIM]:0

split 3 1                                "dela upp skärmen i tre delar
axes h 0 tend v 0 60                    "skalar diagram
axes v -4 2
axes v -2 2
store th1 th2 th3 th4 th5 th6           "lagra variabler
store y[PROCESS] ystat[PROCESS] u[PROCESS] ustat[PROCESS] -add
area 1 1                                 "definiera vilken del
text 'y'                                 "axeltext
plot y[PROCESS] ystat[PROCESS]          "rita
simu 0 tend /dat 0                       "simulera
area 2 1
```

```

text 'u'
show u[PROCESS] ustat[PROCESS]      "rita
area 3 1
text 'parameter estimat'
show th1 th2 th3 th4 th5 th6

end

*****

discrete system REGUL

" Diskret tid extremalsökare

state i          "tillstånd
new ni          "nya tillstånd
input b10 b11 b20 "insignaler
output u        "utsignal
time t
tsamp ts

ni=if i<3 then i+1 else 0          "uppdatering av räknare

"ttu är styrsignalen framräknad enligt optimal-kriteriet
ttu = -(b10+b11)/(2*b20)

"tu är den störda styrsignalen, enligt sekvensen -1 0 1 0 -1
tu=if i<1 then ttu-ps else (if i<2 then ttu
    else (if i<3 then ttu+ps else ttu))

"u är den begränsade styrsignalen
u = if tu>umax then umax else if tu<umin then umin else tu

ts=t+h          "uppdatering av tid

h:1             "parametervärde
umin:-5
umax:5
sig:0.00
ps:1
i:0
alfa:1

end

*****

discrete system PROCESS

" Den simulerade processen

state yold uold uoold eold loss ypold lossp
                                "tillstånd
new nyold nuold nuoold neold nloss nypold nlossp

```



```

input u                                "nya tillstånd
output y                               "insignal
time t                                  "utsignal
tsamp ts

e=sig*norm(t)                          "processbruset

ustat=- (b10+b11)/(2*b20)               "optimal insignal
ystat=(b0+(b10+b11)*ustat+b20*ustat*ustat)/(1+a1)
                                           "optimal utsignal
y=-a1*yold+b0+b10*uold+b11*uoold+b20*uold*uold+e+c1*eold
                                           "utsignal
yp=-a1*ypold+b0+b10*ustat+b11*ustat+b20*ustat*ustat+e+c1*eold
                                           "perfekt utsignal

nyold=y                                "uppdatering av tillstånd
nuold=u
nuoold=uold
neold=e
nloss=if t<tloss then 0 else loss+(y-ystat)*(y-ystat)
nlossp=if t<tloss then 0 else loss+(yp-ystat)*(yp-ystat)
nypold=yp

ts=t+h                                  "uppdatering av tid

a1:-0.9                                "parametervärde
b0:0.25
b10:0.5
b11:-0.25
b20:0.5
c1:-0.5
sig:0.2
h:1
tloss:10
unoll:0

end

*****

discrete system ESTIM

" Extended least square estimator
" sex parametrar

"tillstånd
state th1 th2 th3 th4 th5 th6
state p11 p12 p13 p14 p15 p16 p22 p23 p24 p25 p26
state p33 p34 p35 p36 p44 p45 p46 p55 p56 p66
state uold uold2 yold eold

"nya tillstånd
new nth1 nth2 nth3 nth4 nth5 nth6

```

```

new np11 np12 np13 np14 np15 np16 np22 np23 np24 np25 np26
new np33 np34 np35 np36 np44 np45 np46 np55 np56 np66
new nuold nuold2 nyold neold

```

```

"insignaler
input y u

```

```

time t
tsamp ts

```

```

"regressionsvektor

```

```

fii=-yold
fi2=1
fi3=uold
fi4=uold2
fi5=uold*uold
fi6=eold

```

```

"residual

```

```

eps=y-(th1*fii+th2*fi2+th3*fi3+th4*fi4+th5*fi5+th6*fi6)

```

```

"P*fi

```

```

Pfi1=p11*fii+p12*fi2+p13*fi3+p14*fi4+p15*fi5+p16*fi6
Pfi2=p12*fii+p22*fi2+p23*fi3+p24*fi4+p25*fi5+p26*fi6
Pfi3=p13*fii+p23*fi2+p33*fi3+p34*fi4+p35*fi5+p36*fi6
Pfi4=p14*fii+p24*fi2+p34*fi3+p44*fi4+p45*fi5+p46*fi6
Pfi5=p15*fii+p25*fi2+p35*fi3+p45*fi4+p55*fi5+p56*fi6
Pfi6=p16*fii+p26*fi2+p36*fi3+p46*fi4+p56*fi5+p66*fi6

```

```

"Nämnare

```

```

den=lam+fii*Pfi1+fi2*Pfi2+fi3*Pfi3+fi4*Pfi4+fi5*Pfi5+fi6*Pfi6

```

```

"Förstärknings vektor

```

```

k1=Pfi1/den
k2=Pfi2/den
k3=Pfi3/den
k4=Pfi4/den
k5=Pfi5/den
k6=Pfi6/den

```

```

"Kovarians uppdatering

```

```

np11=(p11-Pfi1*Pfi1/den)/lam
np12=(p12-Pfi1*Pfi2/den)/lam
np13=(p13-Pfi1*Pfi3/den)/lam
np14=(p14-Pfi1*Pfi4/den)/lam
np15=(p15-Pfi1*Pfi5/den)/lam
np16=(p16-Pfi1*Pfi6/den)/lam
np22=(p22-Pfi2*Pfi2/den)/lam
np23=(p23-Pfi2*Pfi3/den)/lam
np24=(p24-Pfi2*Pfi4/den)/lam
np25=(p25-Pfi2*Pfi5/den)/lam
np26=(p26-Pfi2*Pfi6/den)/lam
np33=(p33-Pfi3*Pfi3/den)/lam
np34=(p34-Pfi3*Pfi4/den)/lam

```

```
np35=(p35-Pfi3*Pfi5/den)/lam
np36=(p36-Pfi3*Pfi6/den)/lam
np44=(p44-Pfi4*Pfi4/den)/lam
np45=(p45-Pfi4*Pfi5/den)/lam
np46=(p46-Pfi4*Pfi6/den)/lam
np55=(p55-Pfi5*Pfi5/den)/lam
np56=(p56-Pfi5*Pfi6/den)/lam
np66=(p66-Pfi6*Pfi6/den)/lam
```

```
"Parameter uppdatering
```

```
nth1=th1+k1*eps
nth2=th2+k2*eps
nth3=th3+k3*eps
nth4=th4+k4*eps
nth5=th5+k5*eps
nth6=th6+k6*eps
```

```
"regressionsvektor uppdatering
```

```
nuold=u
nuold2=uold
nyold=y
neold=eps
ts=t+h
```

```
"parametervärde
```

```
lam:1
h:1
```

```
end
```

```
*****
```

```
connecting system CONNECT
```

```
" sammanbindning av systemet
```

```
u[PROCESS]=u[REGUL]
u[ESTIM]=u[PROCESS]
y[ESTIM]=y[PROCESS]
b10[REGUL]=th3[ESTIM]
b11[REGUL]=th4[ESTIM]
b20[REGUL]=th5[ESTIM]
```

```
end
```

```
*****
```