

CODEN: LUTFD2/(TFRT-5420)/1-194/(1990)

# Automatisk viktreglering av ubåt med olinjära systemkomponenter

Henrik Bengtsson  
Andreas Söderstjerna

Institutionen för Reglerteknik  
Lunds Tekniska Högskola  
Januari 1990

<b>Department of Automatic Control</b> <b>Lund Institute of Technology</b> P.O. Box 118 S-221 00 Lund Sweden		<i>Document name</i> Master Thesis	
		<i>Date of issue</i> January 1990	
		<i>Document Number</i> CODEN: LUTFD2/(TFRT-5420)/1-194/(1990)	
<i>Author(s)</i> Henrik Bengtsson Andreas Söderstjerna		<i>Supervisor</i> Rolf Johansson LTH, Dan Lindelöf Kockums Marine	
		<i>Sponsoring organisation</i>	
<i>Title and subtitle</i> Automatisk viktreglering av ubåt med olinjära systemkomponenter.(Automatic weight control of submarine with nonlinear system components).			
<i>Abstract</i> <p>This is a presentation of automatic weight control of a submarine, where the use of nonlinear system components has been considered. The work was done at Lund Institute of Technology, Department of Automatic Control, with Kockums Marine, Malmö as sponsoring organization.</p> <p>The nonlinearities is due to the use of OnOff pump in the controller. This presentation consists of five different controllers. Three of them use continuous time theory- all of them with different pump capacities, one uses discrete time theory and the fifth one uses adaptive control.</p>			
<i>Key words</i>			
<i>Classification system and/or index terms (if any)</i>			
<i>Supplementary bibliographical information</i>			
<i>ISSN and key title</i>			<i>ISBN</i>
<i>Language</i> Swedish	<i>Number of pages</i> 194	<i>Recipient's notes</i>	
<i>Security classification</i>			

The report may be ordered from the Department of Automatic Control or borrowed through the University Library 2, Box 1010, S-221 03 Lund, Sweden, Telex: 33248 lubbis lund.

LUND 1989-12-29

**Automatisk viktreglering av ubåt**  
med olinjära systemkomponenter.

Henrik Bengtsson      Andreas Söderstjerna

Kockums Marine AB

1	Förord.....	4
2	Referat.....	6
3	Inledning.....	7
	3.1 Problemformulering.....	7
	3.2 Om analys och simulering.....	8
	3.3 Processbeskrivning.....	9
4	Avhandling.....	11
	4.1 Tillståndsåterkoppling.....	11
	4.2 Tillståndsbeskrivning.....	12
	4.3 Om återkoppling av $h$ , $h'$ och $h''$ .....	13
	4.4 Regulator med hysteres och tidsspärr.....	16
	4.4.1 1 - 1 systemet.....	17
	4.4.1.1 Bestämning av återkopplingsparametrar.....	18
	4.4.1.2 Tumregler.....	23
	4.4.1.3 Bestämning av hysteres.....	26
	4.4.1.4 Djuphastighetsbegränsning.....	28
	4.4.1.5 Robusthetsanalys.....	29
	4.4.1.6 Störningar.....	30
	4.4.1.7 Sammanfattning av 1 - 1 systemet.....	39
	4.4.2 1 - 10 systemet.....	42
	4.4.2.1 Återkoppling av $h$ , $h'$ och $h''$ .....	43
	4.4.2.2 Djuphastighetsbegränsning.....	45
	4.4.2.3 Robusthetsanalys.....	47
	4.4.2.4 Sammanfattning av 1 - 10 systemet.....	48
	4.4.3 10 - 10 systemet.....	50
	4.4.3.1 Bestämning av återkopplingsparametrar.....	50
	4.4.4 Sammanfattning av regulator med hysteres och tidsspärr.....	57
	4.5 Samplat system.....	58
	4.5.1 Vårt samplade system.....	58
	4.5.1.1 Approximation med styckvis konstant volym.....	58
	4.5.1.2 Tillståndsekvationer.....	59
	4.5.1.3 Systemets poler.....	61
	4.5.1.4 Återkoppling av djup och djuphastighet.....	64
	4.5.1.5 Om konstanta felet.....	68
	4.5.1.6 Införande av integrationsterm.....	71
	4.5.1.7 Allmänt om återkoppling av $h''$ .....	74

4.5.1.8	Om approximationens giltighet.....	76
4.5.1.9	Polplacering.....	78
4.5.1.10	Antireset windup.....	81
4.5.1.11	Ändring av $\Delta t$ .....	82
4.5.1.12	Sammanfattning av samplat system.....	84
4.6	Adaptiv regulator.....	85
5	Referenser.....	94
6	Bilagor.....	95
6.1	Appendix A.....	95
6.1.1	Linjärisering.....	95
6.1.2	Beskrivande funktion för olinjäritet med hysteres.....	96
6.2	Appendix B.....	99
6.2.1	Simuleringar 1-1 systemet. 1.....	99
6.2.2	Matlabanalys av 1-1.....	102
6.2.3	Simuleringar 1-1 systemet. 2.....	106
6.2.4	Hysteressimuleringar.....	112
6.2.5	Vmaxsimuleringar.....	115
6.2.6	Robusthetsanalys 1-1.....	118
6.2.7	Brus- och offsetsimuleringar.....	121
6.3	Appendix C.....	128
6.3.1	Simuleringar 1 - 10 systemet.....	128
6.3.2	Bestämning av kv.....	133
6.3.3	Robusthetsanalys 1 - 10.....	138
6.4	Appendix D.....	142
6.4.1	Simuleringar av det samplade systemet.....	142
6.5	Appendix E.....	147
6.5.1	Allmänt om samplade system.....	147
6.5.2	Beräkning av $\Phi$ .....	148
6.5.2.1	Cayley-Hamiltons metod.....	148
6.5.2.2	Laplace metod.....	150
6.5.3	Beräkning av $\Gamma$ .....	152
6.6	Appendix F.....	155
6.6.1	Simnonkod.....	155
6.7	Appendix G.....	179
6.7.1	Lågpasssekvivalent.....	179
6.8	Appendix H.....	183
6.8.1	Cirkelkriteriet.....	183
6.8.2	Popovkriteriet.....	185

6.8.3 Beskrivande funktion.....	186
6.9 Appendix I.....	190
6.9.1 Simuleringar 10-10 systemet.....	190

## 1 Förord

Då man för fram en ubåt med låga farter, har man ej tillräckliga roderstyrkrafter för att manövrera ubåten i djupled. Därför använder man sig av viktreglering för att bibehålla eller ändra djupet. Detta sker med hjälp av en pump med vilken man pumpar till eller från vatten till en viktkompensationstank. Idag är denna pump av linjär typ. Ett önskemål från Kockums Marine AB är att klara av viktregleringen med en pump som har en låg pumpkapacitet och dessutom är av till-från typ. Denna rapport behandlar införandet av en sådan olinjär pump i viktregleringssystemet till en ubåt.

Vi vill här passa på att tacka våra handledare Dan Lindelöf på Kockums Marine och Rolf Johansson på institutionen för reglerteknik i Lund, för alla tips de försett oss med under vägen. Vidare vill vi rikta ett stort tack till Karl Johan Åström för intressanta idéer och värdefulla råd kring kapitlet om det samplade systemet.

Lund oktober 1989

Författarna

**Till Anna och Stephanie**



## 2 Referat

Författarna till denna rapport har på uppdrag av Kockums Marine undersökt möjligheterna att viktreglera en ubåt med ett styrsystem i vilket olinjäriteter ingår och beaktas.

Viktreglering av en ubåt innebär, att man stillaliggande i havet pumpar vatten utifrån och in till en reglertank, för att på så sätt bibehålla ubåtens djup trots viktstörningar, och alternativt att förflytta ubåten i djupled.

I dag ingår en pump vars karakteristik är linjär i styrsystemet. Ett önskemål från uppdragsgivaren är att ersätta denna linjära pump med en olinjär så kallad tillfrån pump.

Undersökningen har resulterat i en väl fungerande regulator i vilken en pump med pumpkapaciteten 1 l/s ingår. Denna regulator bygger på tillståndsåterkoppling av djup, djuphastighet och djupacceleration.

Som alternativa lösningar har två snarlika regulatoransatser med högre flödeskapacitet undersökts. Dessutom har en regulatoransats som bygger på tidsdiskret teori studerats och slutligen har även en adaptiv regulatorform bearbetats.

Vi föreslår att ansatsen i vilken låg pumpkapacitet används, ska ligga till grund vid realiseringen av styrsystemet till viktregleringen. Anledningarna till detta är överlägsen regulatorverkan, goda servoegenskaper samt låga krav på kringutrustningens dimensionering. Dessutom kan man misstänka att denna regulator har den lägsta ljudnivån under drift.

### 3 Inledning

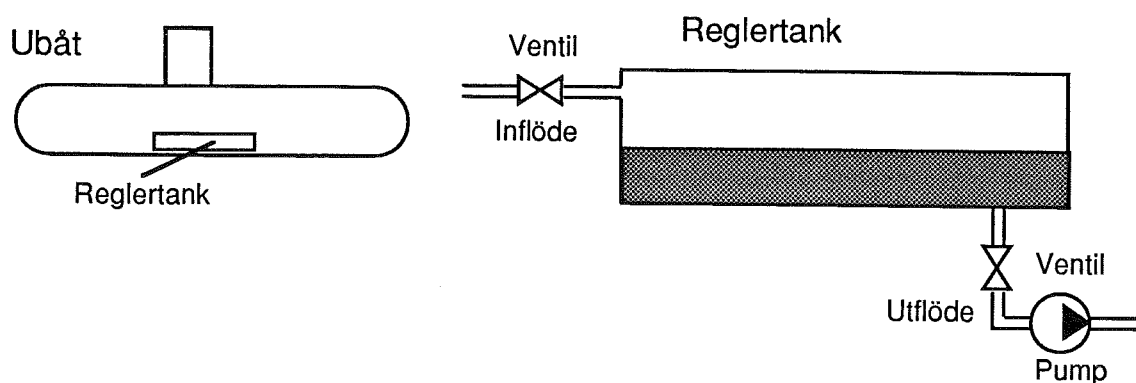
Då man för fram en ubåt med låg fart har man ej tillräckliga roderstyrkrafter för att manövrera ubåten i djupled. Man använder sig därför av viktreglering för att bibehålla eller ändra djupet. Detta åstadkomms av en pump, med vilken man pumpar till eller från vatten till en viktkompensationstank.

På Näckensystemet har denna pump varit av linjär typ med god pumpkapacitet, varpå linjär analys har kunnat tillämpas vid konstruktionen av regulatorn. Ändamålet med den här rapporten är att konstruera en regulator, som klarar av viktregleringen med en olinjär pump av till-från typ. Att pumpen är av till-från typ medför att olinjär teori måste tillämpas. Vid utprovning används också simulering som redskap. Ett antal alternativa regulatorer, med olika pumpkapacitet, beskrivs och jämförs.

#### 3.1 Problemformulering

Viktreglering av en ubåt innebär att man stillaliggande i havet pumpar vatten ut från och in till en reglertank, för att på så sätt bibehålla ubåtens djup trots viktstörningar, och alternativt att förflytta ubåten i djupled.

Intag av vatten sker genom öppning av ventiler, som på grund av det yttre trycket gör att vatten strömmar in till reglertanken. Uttag av vatten sker med hjälp av en till-från pump. Flödet ska både vid intag och utpumpning av vatten endast kunna anta två lägen, antingen fullt flöde eller inget flöde alls.



Figur 3.1.1 Till vänster visas ubåt med reglertank. Till höger visas en principskiss för reglertank med pump och ventiler.

Utpumpning av vatten sker enligt :

- Start av pump, recirkulation 2 s
- Öppning av ventil 2 s
  
- Stängning av ventil 2 s
  
- Pumpkapacitet 10 l/s eller 1 l/s

Intag av vatten sker enligt :

- Öppning av ventil 2 s
  
- Stängning av ventil 2 s
  
- Flödeskapacitet 10 l/s eller 1 l/s

Pumpen får inte starta oftare än 1 gång per minut, då det kan medföra överhettning. Vidare vill man minimera antalet starter för att undvika buller.

Vid reglering finns tillgång till uppmätta värden på djup, djuphastighet och djupacceleration.

### 3.2 Om analys och simulering

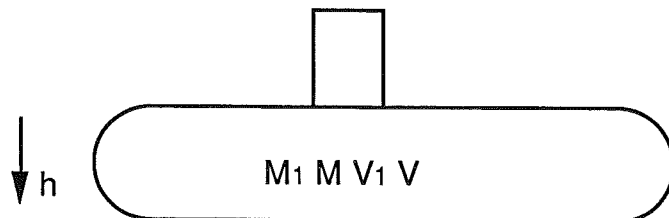
Vid analys av systemet används att antal olinjära kriterier, nämligen Cirkelkriteriet, Popovs kriterium och metoden med beskrivande funktion. Dessa kriterier finns överskådligt beskrivna i appendix H. Då systemet studeras i Nyquistdiagram, representeras tidsfördröjningarna vid pumptillslag och stängning av ventil med tillägget  $e^{-sT}$  till kretsöverföringen. Det förutsätts alltså att fördröjningarna är de samma vid frånslag och tillslag. Vi väljer fördröjningstiden  $T$  till 4 s och analyserar därmed ett svårare fall.

Det finns inget självklart sätt att analysera kravet att pumpen inte får starta oftare än 1 gång per minut. Vi har valt att jämföra denna restriktion med ett lågpasfilter. Tankesättet finns beskrivet i appendix G. Systemet analyseras både med och utan tidsspärr.

Vid simuleringsarbetet används bland annat fasplansanalys. Då studeras djup och djuphastighet i ett diagram för olika initialvärden på desamma. I ett och samma fasplan är samtliga parametrar konstanta.

### 3.3 Processbeskrivning

Under denna rubrik tänker vi klargöra vad som gäller för systemet. Vi börjar med att teckna rörelseekvationen för ubåten :



Figur 3.3.1 Schematisk bild av ubåt.

Definitioner :

Systemets tröga massa	$M_1$	(=ubåtsmassa + massan av medsvängande vatten)
Ubåtens massa	$M$	
Ubåtens Volym	$V_1$	
Volym i viktkompensationstanken	$V$	
Vattnets densitet	$\rho$	
Djupet	$h$	
Vattenflöde från pumpen	$q$	
Tyngdaccelerationen	$g$	
Dämpfaktor	$C_N$	
Längd på ubåten	$l$	
Diameter på ubåten	$d$	

Vi väljer **positiv referensriktning nedåt**.

Rörelseekvation :

$$(M_1 + \rho V) h'' = (M + \rho V) g - V_1 \rho g - F_b(h') \quad (1)$$

För densiteten antar vi ett djupberoende enligt :

$$\rho = \rho_{yt} (1 + k_p h) \quad (2)$$

Vattnets bromsande krafter inkluderas i :

$$F_b(h') = K_D h' \quad (3)$$

En bättre beskrivning av verklig bromsverkan är dock :

$$F_b(h') = \frac{1}{2} \rho C_N l d h'^2 \text{ sign}(h') \quad (3')$$

Vattenvolymen  $V$  i viktkompensationstanken utgörs av det ackumulerade in- och utflödet :

$$V(t) = \int_0^t q(\tau) d\tau \quad (4)$$

Dessa ekvationer beskriver det system vi önskar reglera.

## 4 Avhandling

### 4.1 Tillståndsåterkoppling

Vid realiseringen av vår regulator använder vi som en första ansats tillståndsåterkoppling. Till vårt förfogande har vi de uppmätta signalerna på djup  $h$ , djuphastighet  $h'$  samt djupacceleration  $h''$ . Vårt tillståndsåterkopplade system kan schematiskt beskrivas enligt figur 4.1.1.

Vi börjar med att bestämma överföringsfunktionen  $G_1(s)$  för ubåten genom att Laplacetransformera den linjäriserade differentialekvationen. Linjäriseringen utförs till sin helhet i appendix A.

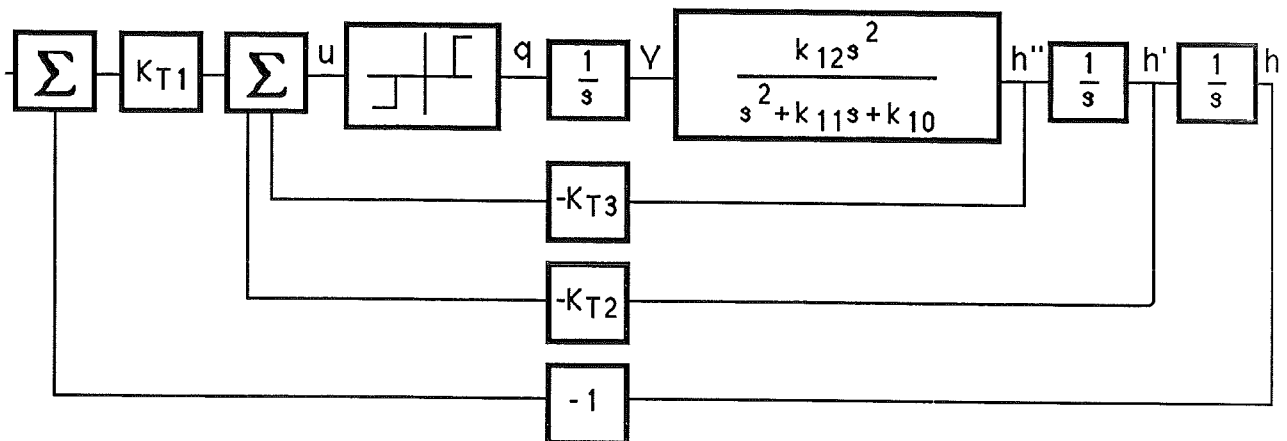
$$h'' = -k_{10} h - k_{11} h' + k_{12} V$$

Laplace ger :

$$s^2 H = -k_{10} H - s k_{11} H + k_{12} V$$

Vilket i sin tur leder oss till överföringsfunktionen :

$$G_1(s) = \frac{H}{V} = \frac{k_{12}}{s^2 + s k_{11} + k_{10}}$$



Figur 4.1.1 Det återkopplade systemet.

Vår styrlag har följande utseende:

$$u = K_{T1}(h_{ref} - h) - K_{T2}h' - K_{T3}h''$$

Slutligen får vi kretsförstärkningen för det återkopplade systemet :

$$G_K = \frac{Q}{U} = \frac{1}{s} \frac{k_{12}s^2}{s^2 + k_{11}s + k_{10}} \left( \frac{1}{s^2} K_{T1} + \frac{1}{s} K_{T2} + K_{T3} \right) =$$

$$\frac{k_{12}K_{T3}s^2 + k_{12}K_{T2}s + k_{12}K_{T1}}{s^3 + k_{11}s^2 + k_{10}s}$$

## 4.2 Tillståndsbeskrivning

När vi längre fram i rapporten ska börja med att simulera hur ubåten uppför sig för olika styrlagar, kräver bland annat simuleringspaketet att systemet presenteras på tillståndsform. Därför ska vi här göra denna omarbetning.

Vi börjar med att teckna de ekvationer som gäller för systemet :

$$(M_1 + \rho V) h'' = (M + \rho V) g - V_1 \rho g - F_b(h') \quad (1)$$

$$\rho = \rho_{yt} (1 + k_\rho h) \quad (2)$$

$$F_b(h') = \frac{1}{2} \rho C_N l d h'^2 \text{sign}(h') \quad (3)$$

$$V(t) = \int_0^t q(\tau) d\tau \quad (4)$$

Av simuleringstekniska skäl, väljer vi att representera systemet på följande tillstånd :

$$x_1 = h$$

$$x_2 = h'$$

$$x_3 = \int_0^t q(\tau) d\tau$$

Vi tecknar på differentialform varvid vi erhåller systemet på tillståndsform :

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = \frac{(M + \rho_{yt}(1 + k_{px1})x_3)g - V_1 \rho_{yt}(1 + k_{px1})g - \frac{1}{2} \rho_{yt}(1 + k_{px1})C_N |dx_2|^2 \sin(x_2)}{M_1 + \rho_{yt}(1 + k_{px1})x_3}$$

$$x_3' = q$$

### 4.3 Om återkoppling av h, h' och h''

Kretsförstärkningen har vi bestämt till :

$$G_K = \frac{k_{12}K_{T3}s^2 + k_{12}K_{T2}s + k_{12}K_{T1}}{s^3 + k_{11}s^2 + k_{10}s}$$

Vi är intresserade av vilken betydelse återkoppling av djupet h, djuphastigheten h' och djupaccelerationen h'' har.

Vi börjar med att dela upp  $G_K$  i separata termer :

$$G_K(s) =$$

$$\frac{k_{12}K_{T1}}{s^3 + k_{11}s^2 + k_{10}s} + \frac{k_{12}K_{T2}s}{s^3 + k_{11}s^2 + k_{10}s} + \frac{k_{12}K_{T3}s^2}{s^3 + k_{11}s^2 + k_{10}s}$$

Vi vill studera konsekvenserna av återkoppling i Nyquistdiagram, dvs  $G_K(i\omega)$ , där vi kan skriva  $G_K(i\omega)$  enligt :

$$G_K(i\omega) = A(i\omega) + B(i\omega) + C(i\omega)$$

men vi kan uttrycka både  $B(i\omega)$  och  $C(i\omega)$  i  $A(i\omega)$  :

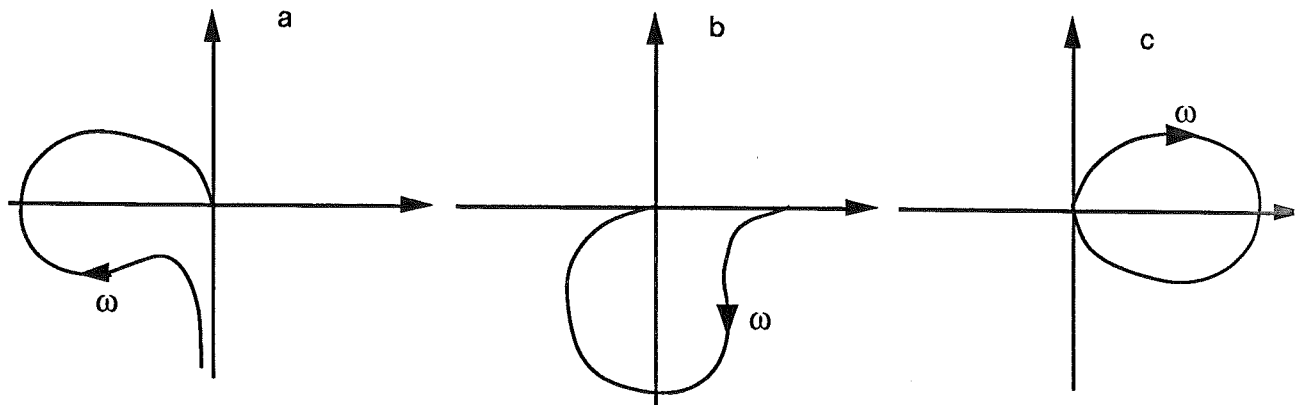
$$A(i\omega) = \frac{k_{12}K_{T1}}{(i\omega)^3 + k_{11}(i\omega)^2 + k_{10}i\omega}$$

$$B(i\omega) = i \frac{K_{T2}}{K_{T1}} \omega A(i\omega)$$

$$C(i\omega) = - \frac{K_{T3}}{K_{T1}} \omega^2 A(i\omega)$$



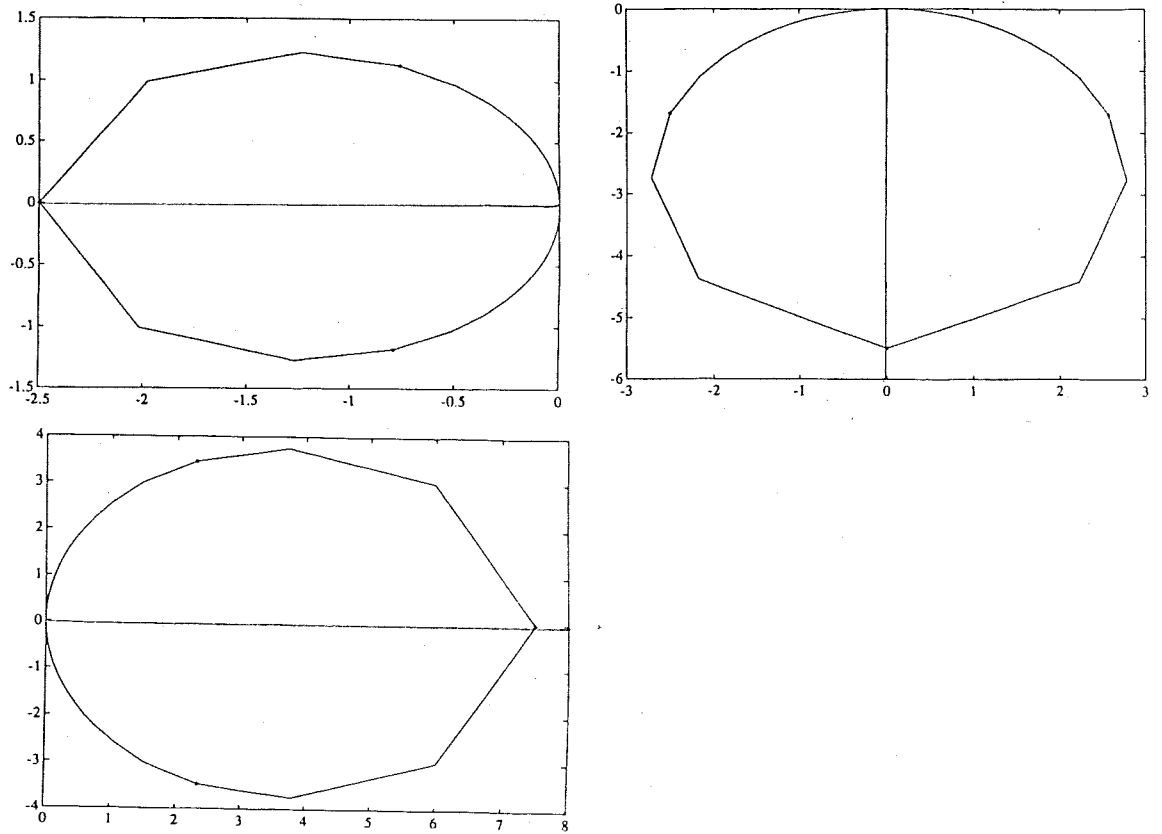
I figur 4.3.1 kan vi se vad detta innebär geometriskt.



Figur 4.3.1 a)  $A(i\omega)$  b)  $B(i\omega)$  c)  $C(i\omega)$

Vi ser att återkopplingen av  $h'$  och  $h''$  gradvis vrider Nyquistkurvan moturs, bort från vänstra halvplanet. Om vi adderar samman  $A(i\omega)$ ,  $B(i\omega)$  och  $C(i\omega)$  punktvis, dvs  $A(i\omega_1) + B(i\omega_1) + C(i\omega_1)$  osv, kommer vi att få den totala Nyquistkurvan.

Vi strävar efter att åstadkomma ett stabilt system, eller med andra ord se till att Nyquistkurvan förskjuts åt höger i  $s$ -planet. Detta låter sig göras av både  $h'$ - och  $h''$  återkoppling. Förmodligen är en väl vald kombination av de båda det bästa alternativet. I figur 4.3.2 nedan ser vi  $A(i\omega)$ ,  $B(i\omega)$  och  $C(i\omega)$  då vi återkopplat med  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2200$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ , ett val som längre fram i rapporten visar sig vara framgångsrikt.

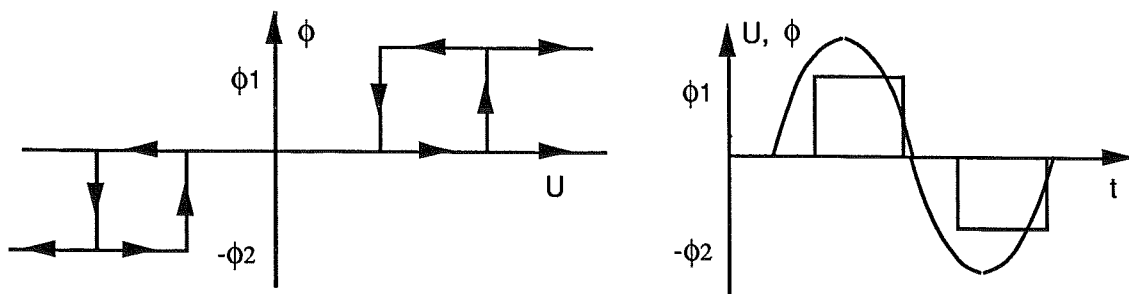


Figur 4.3.2  $A(i\omega)$ ,  $B(i\omega)$  och  $C(i\omega)$  för återkopplingen  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2200$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$

#### 4.4 Regulator med hysteres och tidsspärr.

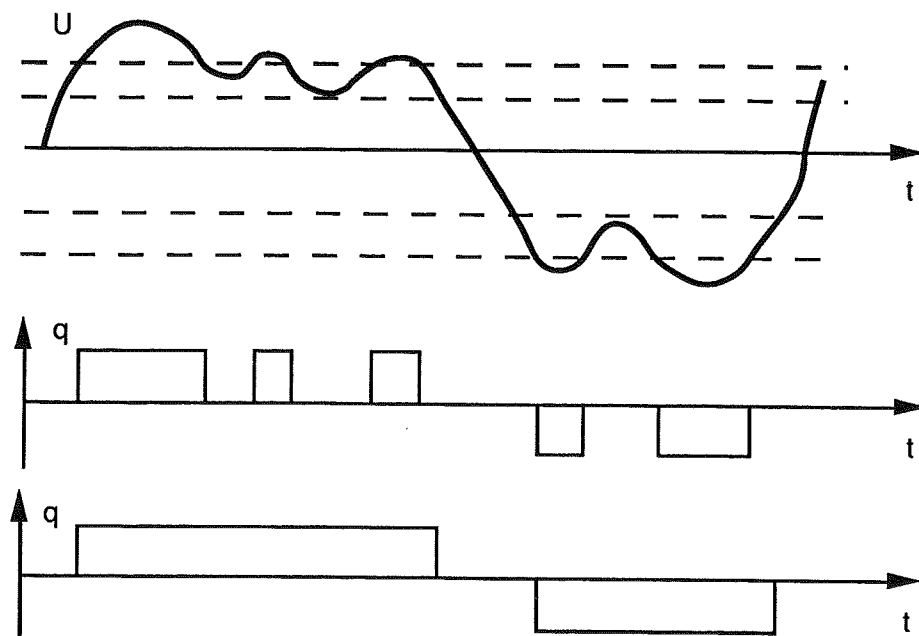
Vi erinrar oss att ett av kraven på regulatorn är att pumpen inte får slå på oftare än 1 gång per minut. Lättast uppfyller man detta krav, om man bygger en regulator, som har en kontrollfunktion, som ser till att pumpen inte kan slå till förrän det gått minst 1 minut sedan förra tillslaget. Problemet med en sådan funktion - tidsspärr, är att den blir svår att analysera.

För att göra regulatorn mindre känslig med avseende på störningar i återkopplingssignalerna, lägger vi till hysteres i karakteristiken.



Figur 4.4.1.1 a) Införande av hysteres i pumpkarakteristiken.  
b) Exempel på insignal  $U$  och utsignal  $\phi$  till pumpen.

Hysteresen medför, att omslag i flödet vilket vi i fortsättningen benämner  $q$  förlängs, eller mer korrekt, inte sker lika ofta. En bild säger mer än tusen ord.



Figur 4.4.1.2 Styrsignalen  $u$  tillsammans med flödet  $q$  utan och med hysteres.

Vi ser att hysteresen bidrar till en utsignal, som är mindre känslig för variationer i insignalen än tidigare, samtidigt som vi får färre tillslag av pumpen

inom ett visst tidsintervall. Man kan även lägga märke till att hysteresen ger en fasförskjutning till utsignalen, något som figur 4.4.1.1 förtydligar. Fasförskjutningar är som bekant av ondo, men eftersom vi har ett tidskrav, är en viss fasförskjutning ofrånkomlig.

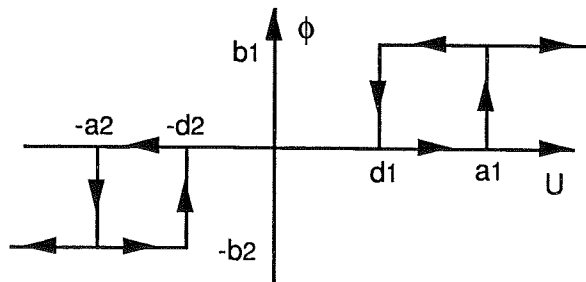
Om införandet av hysteres kan bidra till att tiden mellan tillslag för pumpen blir i samma storleksordning som tidskravet 60 sekunder, så anar vi en möjlighet att analytiskt kunna se effekten av införandet av tidsspärr. Vi återkommer till analysen av hysteresen längre fram.

Vi ska nu börja titta på vår första regulator. Den består av tillståndsåterkoppling av djupet, djuphastigheten samt djupaccelerationen. Vi låter olinjäriteten ha hysteres, och dessutom inför vi en tidsspärr i negativ flödesriktning som förhindrar att pumpen slår till oftare än 1 gång per minut. Vi låter analys med tidigare nämnda stabilitetskriterium gå hand i hand med simuleringar av systemet, när vi försöker optimera återkopplingsparametrarna. Beräkningar och simuleringar utförs för tre fall :

- i) 1 - 1 systemet. 1 liters kapacitet i båda riktningar.
- ii) 10 - 1 systemet. 10 liters kapacitet i positiv flödesriktning, 1 liters kapacitet i negativ riktning.
- iii) 10 - 10 systemet. 10 liters kapacitet i båda riktningar.

Alla regulatorer som vi fortsättningsvis använder oss av finns dokumenterade i appendix F i form av Simnonkod tillsammans med kommentarer.

#### 4.4.1 1 - 1 systemet



Figur 4.4.1.3 Karakteristik för pump med hysteres.

Vi startar med att studera en regulator, där vi förutsätter ett flöde från pumpen på 1 liter/s i båda riktningarna. Med beteckningar enligt figur 4.4.1.3 gäller  $b_1 = b_2 = 10^{-3} \text{ [m}^3\text{s}^{-1}\text{]}$ . Vi sätter  $a_1 = a_2 = a = 10$  och vidare hysteresen  $d_1 = d_2 = d$ . Valet av  $a$  är fullständigt godtyckligt och påverkar inte resultatet mer än att

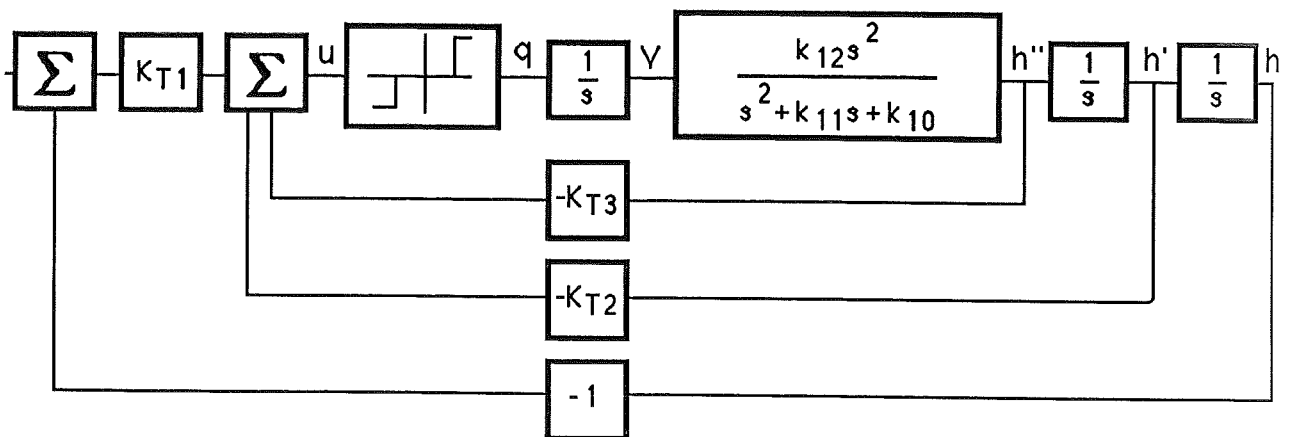
ett lägre värde på  $a$  medför lägre värden på återkopplingskonstanterna och vice versa.

#### 4.4.1.1 Bestämning av återkopplingsparametrar

Under denna rubrik ska vi ta fram en lämplig återkoppling av djup, djuphastighet och djupacceleration. Vi kommer att arbeta efter följande modell:

- i) Sätt hysteresen till noll, dvs  $d = a = 10$ .
- ii) Sök, genom att successivt sluta återkopplingslingorna inifrån och ut, upp vilket område  $K_{T1}$ ,  $K_{T2}$  och  $K_{T3}$  ska tillhöra för att uppnå ett hyfsat stegsvar.
- iii) Gör en grov uppskattning av betydelsen av hysteresen  $d$ , och tilldel  $d$  ett preliminärt värde. Kontrollera Nyquistkurvan.
- iv) Utför en systematisk bestämning av  $K_{T2}$  och  $K_{T3}$  genom upprepade simuleringar.
- v) Gör en systematisk bestämning av  $d$  med hjälp av simuleringar.
- vi) Upprepa eventuellt iv) till v) om så krävs.

Vårt system visas i figur 4.4.1.4.



Figur 4.4.1.4 Återkopplade systemet.

Inledningsvis koncentrerar vi oss på att försöka få ett hyfsat stegsvar för den innersta slingan i figur 4.4.1.4. Denna inre slinga återkopplar accelerationen, varför vi kommer att studera stegsvar i accelerationen. Vid simuleringarna skapar vi en uppåtriktad acceleration genom att momentant minska ubåtsmassan med 100 kg, vilket medför en maximal acceleration på ca  $5 \cdot 10^{-4} \text{ ms}^{-2}$ .

Simuleringarna från denna undersökning återfinns i appendix B under rubriken "Simuleringar 1 - 1 systemet. 1". Resultatet visar på att vi kan återkoppla accelerationen mycket hårt. Vi väljer att inledningsvis sätta  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ .

Vi fortsätter med att titta på slingan utanför den vi nyss studerat, dvs den som återkopplar djuphastigheten. Vid simuleringarna tilldelar vi djuphastigheten ett startvärde på  $0.03 \text{ ms}^{-1}$  och sätter referensvärdet till noll. Samtidigt väljer vi den accelerationsåterkoppling, som vi nyss funnit ovan. Simuleringarna som återfinns i appendix B visar att en lämplig återkoppling av djuphastigheten är  $K_{T2} = 2000$ .

Nu återstår att sluta den yttersta slingan i figur 4.4.1.4, dvs den som återkopplar djupet.

Vi kommer på grund av dödزونen i pumpkaraktistiken att erhålla ett statistiskt djupfel  $h_{err}$ . Storleken på detta statistiska fel kommer att bestämmas av den proportionella återkopplingen av  $h$ . Låt oss därför bestämma ett värde på djupfelet  $h_{err} = (h_{ref} - h)$  för att kunna dimensionera  $K_{T1}$ . Vi sätter djupfelet som gräns för att regulatorn ska börja reglera. Observera, att vi pratar om ett statistiskt läge, dvs  $h' = 0$  och  $h'' = 0$ . Då gäller som villkor för att vi ska reglera :

$$K_{T1} \cdot |h_{err}| \geq a \quad \Rightarrow$$

$$K_{T1} \geq \frac{a}{|h_{err}|}$$

Vi har tidigare valt  $a = 10$ . Vidare väljer vi  $h_{err} = 1 \text{ m}$ , varför vi får  $K_{T1} = 10$ .

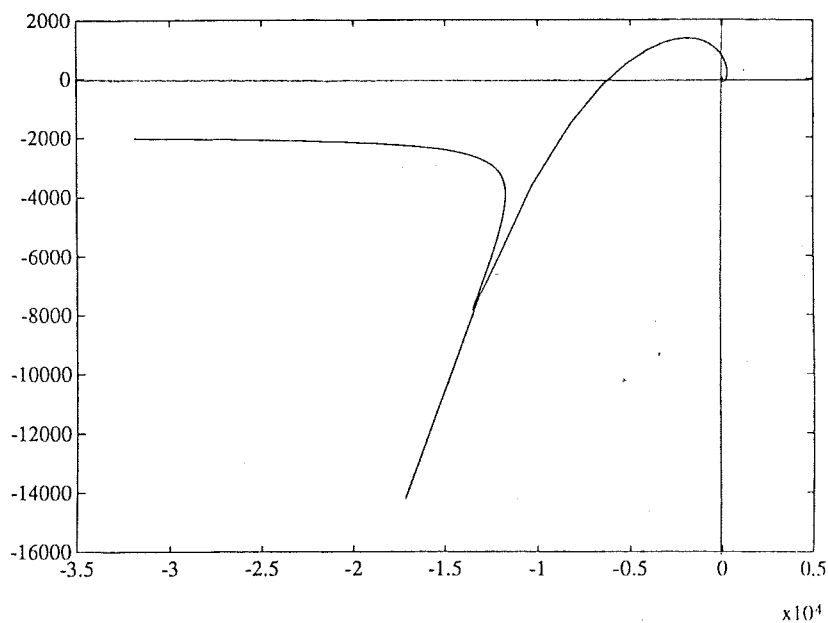
Vi har nu avslutat punkt ii) ovan och fortsätter raskt vidare med nästa punkt, som är att tilldela hysteresen  $d$  ett preliminärt.

Vi utför ett par simuleringar med ovan bestämda återkopplingsparametrar medan vi varierar  $d$ . Vi finner att redan vid mycket liten hysteres  $d = 1$ , blir flödet  $q$  mycket stabilare, än då vi inte har någon hysteres alls. Ytterligare ökning av hysteresen har mer marginell betydelse. Inledningsvis väljer vi  $d = 5$ .

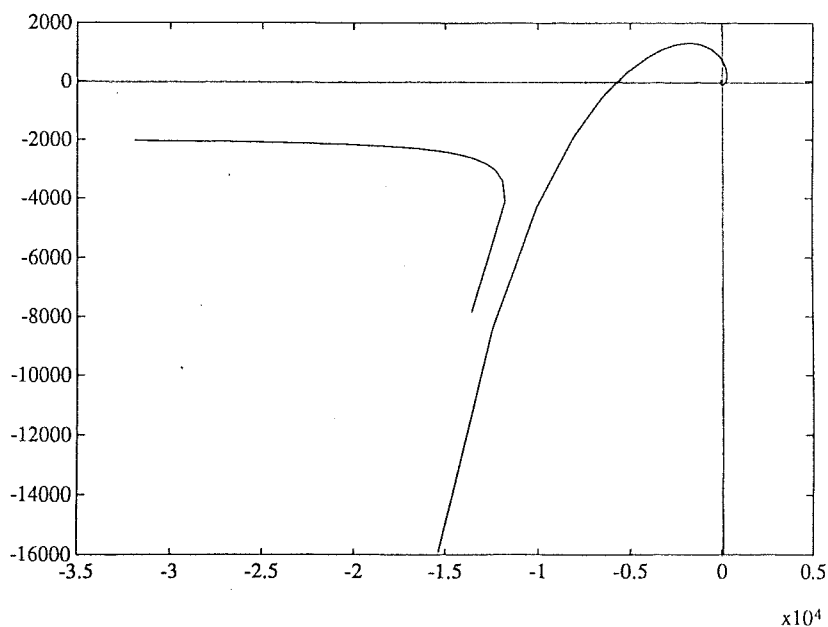
Vi fortsätter med att studera Nyquistkurvan tillsammans med beskrivande funktion för 9 olika fall av återkoppling. Vi låter återkopplingen variera med en tiopotens i taget, varvid vi får  $K_{T2} = [200 \ 2200 \ 20000]$  och  $K_{T3} = [3 \cdot 10^4 \ 3 \cdot 10^5]$

3  $10^6$ ]. Vidare antar vi en tidsfördröjning på 4 sekunder vid både intag och utsläpp av vatten, en tidsspärr på 60 sekunder som realiseras med en lågpas-länk<sup>1</sup>, och som vi tidigare kommit fram till är  $d = 5$ .

Graferna återfinns i appendix B. Av dessa nio olika fall finner vi två vara speciellt intressanta varför vi återger dem nedan.



Figur 4.4.1.5 Del av Nyquistkurva och beskrivande funktion för  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2200$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ .



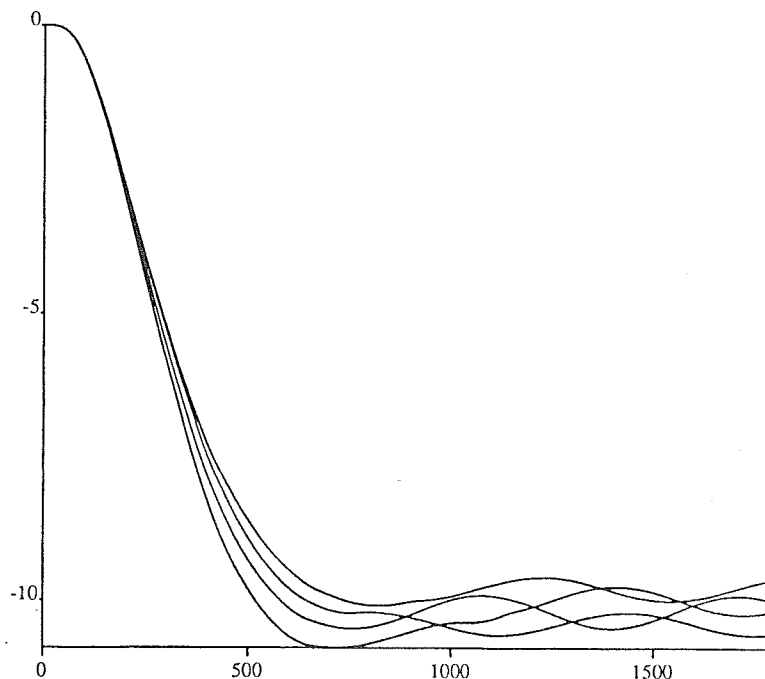
Figur 4.4.1.6 Del av Nyquistkurva och beskrivande funktion för  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 200$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ .

<sup>1</sup>Se avsnittet "Lågpasskvivalent" i appendix G.

Inget av de båda fallen garanteras stabilitet med varken Cirkelkriteriet eller Popovkriteriet, men metoden med beskrivande funktion visar på stabilitet. Parameterintervallet i den övre figuren stämmer bra överens med det val vi tidigare gjort. Med stöd av detta fortsätter vi analysen med simuleringar kring dessa parametrar.

Då vi fortsättningsvis talar om simuleringar, menar vi i allmänhet simuleringar av stegsvar med negativt referensdjup. Att vi väljer just ett negativt referensdjup beror på att för negativa förflyttningar har tidsspärren för pumpen störst inverkan. Detta innebär i sin tur att systemet är mer svårreglerat. Vi tittar med andra ord på det svårare av de två fallen.

För de två stabila fallen ovan är  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ . Vi minns att vi valde samma värde på accelerationsåterkopplingen då vi tidigare utförde simuleringar för den innersta slingan. Det är naturligt, att vi låter  $K_{T3}$  anta detta värde, medan vi gör en serie nya simuleringar, i vilka  $K_{T2}$  tillåts anta varierande värden. Simuleringarna som återfinns i appendix B, påvisar att  $K_{T2}$  bör ligga i intervallet [2000 2500]. Vi förtydligar detta i figur 4.4.1.7 nedan.



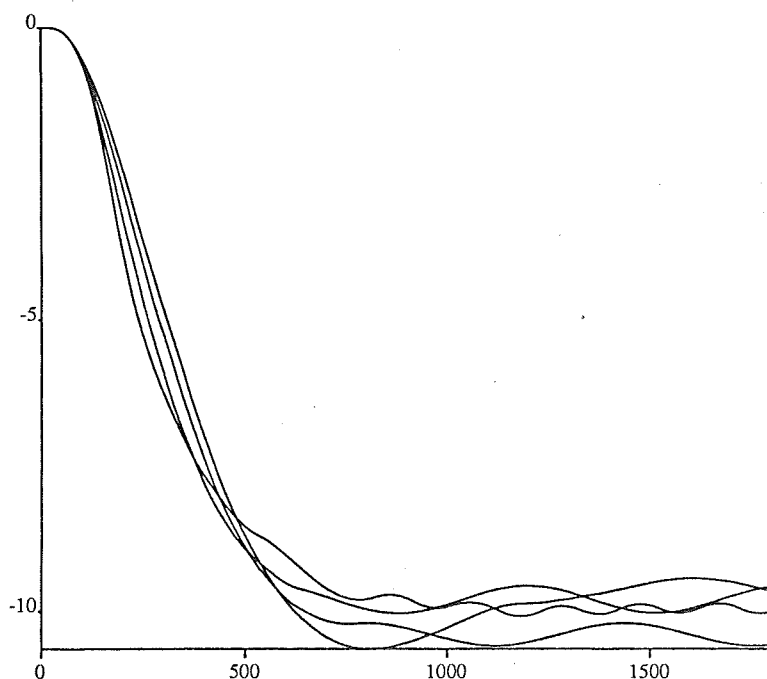
Figur 4.4.1.7 Simuleringar av stegsvar för  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$  och  $K_{T2} = 1800, 2000, 2200, 2400$  nedifrån sett.

Ur stegsvaren ovan, som alla uppfyller krav på snabbhet och liten översläng, väljer vi  $K_{T2} = 2200$ . För detta värde har vi i det närmaste obetydlig översläng, en egenskap vi prioriterar högt. Egentligen har vi redan nu ett stegsvar som vi



kan vara nöjda med, men eftersom det kan finnas ännu bättre lösningar för andra återkopplingar av  $K_{T3}$ , fortsätter vi vår undersökning med att variera återkopplingen av  $K_{T3}$ .

I appendix B återfinner vi resultatet från denna simulering. Nedan visar vi lite överskådligare delar av resultatet.



Figur 4.4.1.8 Stegsvär för  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2200$  och  $K_{T3} = 10^5, 2 \cdot 10^5, 3 \cdot 10^5, 4 \cdot 10^5$ , sett från vänster.

Man ser att för stora värden på  $K_{T3}$  får vi en icke försumbar översläng, medan mindre värden ger ett långsammare stegsvar. Därför väljer vi  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$  vilket ger en obetydlig översläng.

Vi observerar att detta värde på  $K_{T3}$  är det samma för vilket vi tidigare utförde optimeringen av  $K_{T2}$ , varför vi inte behöver göra ytterligare justering av  $K_{T2}$ .

Vi har nu kommit fram till följande återkopplingsparametrar :

$$K_{T1} = 10$$

$$K_{T2} = 2200$$

$$K_{T3} = 3 \cdot 10^5$$

#### 4.4.1.2 Tumregler

Vi ska härleda ett antal tumregler som kan användas vid dimensioneringen av återkopplingsparametrarna. Vi väljer att uttrycka dessa i systemkonstanterna som ingår i den linjäriserade modellen.

Om vi för ett ögonblick tänker oss, att vi har en linjär pump med pumpförstärkningen  $K$ , kan vi teckna överföringsfunktionen för det slutna systemet :

$$\frac{H}{H_{\text{ref}}} = \frac{K K_{12} K_{T1}}{s^3 + s^2(k_{11} + K k_{12} K_{T3}) + s(k_{10} + K k_{12} K_{T2}) + K k_{12} K_{T1}}$$

Om systemkonstanterna förändras vill vi undvika att karakteristiska ekvationen förändras. Vi får :

$$k_{11} + K k_{12} K_{T3} = C_1$$

$$k_{10} + K k_{12} K_{T2} = C_2$$

$$K k_{12} K_{T1} = C_3$$

Vi bestämmer konstanterna  $C_1$ ,  $C_2$  och  $C_3$  genom att sätta in kända värden på systemkonstanter och återkopplingskonstanter. Vidare approximerar vi pumpförstärkningen  $K$  med lutningen på den linje, som går genom origo och punkten  $(a, b_1)$  i pumpkarakteristiken. Detta ger  $K = \frac{10^{-3}}{10} = 10^{-4}$ .

Vi får tumreglerna :

$$K_{T1} = 5 \cdot 10^{-2} \frac{1}{k_{12}}$$

$$K_{T2} = (12 - 10^4 k_{10}) \frac{1}{k_{12}}$$

$$K_{T3} = (1502 - 10^4 k_{11}) \frac{1}{k_{12}}$$

Vi har infört ett fel, då vi ersatte den olinjära pumpen med en linjär i beräkningarna ovan. Följderna av den approximationen är inte självklara. Vi väljer därför att studera följande exempel.

Vi tänker oss att alla systemparametrar i den linjäriserade ekvationen förändras med 50 %. Vi har då :

$$k_{10} = 1.5 \cdot 10^{-4}$$

$$k_{11} = 3 \cdot 10^{-4}$$

$$k_{12} = 7.5 \cdot 10^{-3}$$

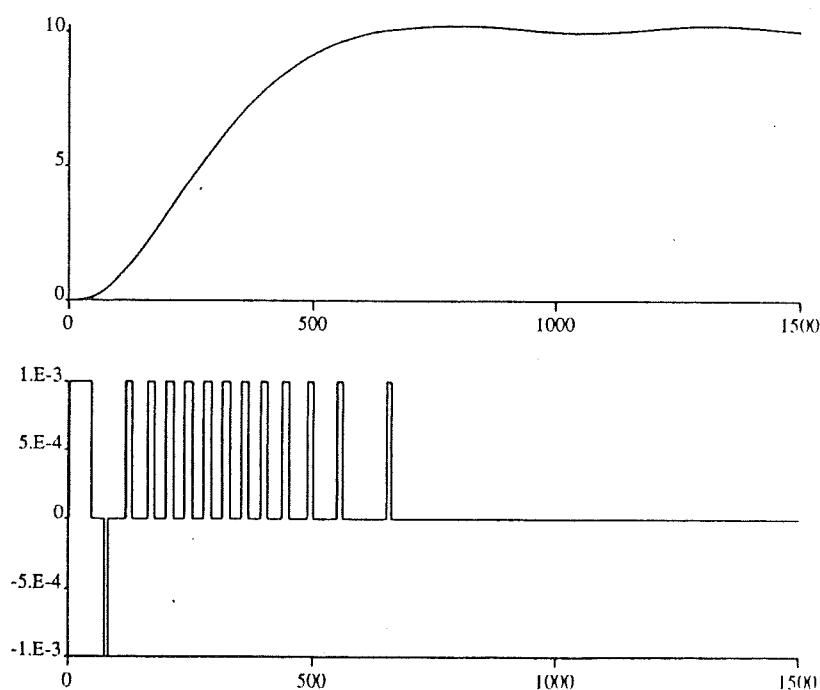
Detta ger nya värden på återkopplingsparametrarna :

$$K_{T1} = 6.7$$

$$K_{T2} = 1400$$

$$K_{T3} = 1.99 \cdot 10^5$$

När vi simulerar erhåller vi ett stegsvar enligt figur 4.4.1.9.



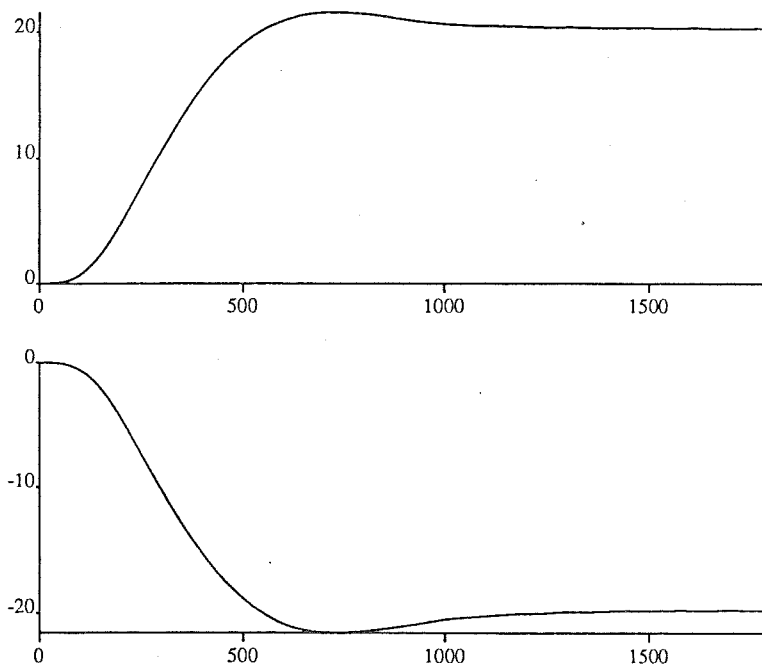
Figur 4.4.1.9 Stegsvär för återkopplingsparametrar framtagna med tumregler.

Vi sluter oss, med hänsyn tagen till figuren ovan, till att den omtalade approximationen är acceptabel i sammanhanget.

$k_{\rho} \neq 0$

Alla simuleringar ovan har utförts under förutsättningen att vattnets densitet är djupberoende dvs  $k_{\rho} \neq 0$ . Detta djupberoende är positivt för systemet, eftersom det blir lättare att reglera. I någon mening kan man påstå att en densitet som

varierar med djupet verkar dämpande på systemet. Tyvärr kan det ibland inträffa att djupberoendet är obetydligt eller till och med noll. Vi måste därför se till så att vår valda återkoppling klarar ett nollberoende av djupet i densiteten. Vad som bör inträffa vid ett sådant nollberoende är att stegsvaret får större översläng. Vi verifierar detta genom att studera två stegsvar, ett positivt och ett negativt, i figur 4.4.1.10 nedan. Vi erinrar oss att vi bara har tidsspärr i negativ pumpriktning, varför ett negativt stegsvar inte är lika med ett positivt dito speglat i tidsaxeln.



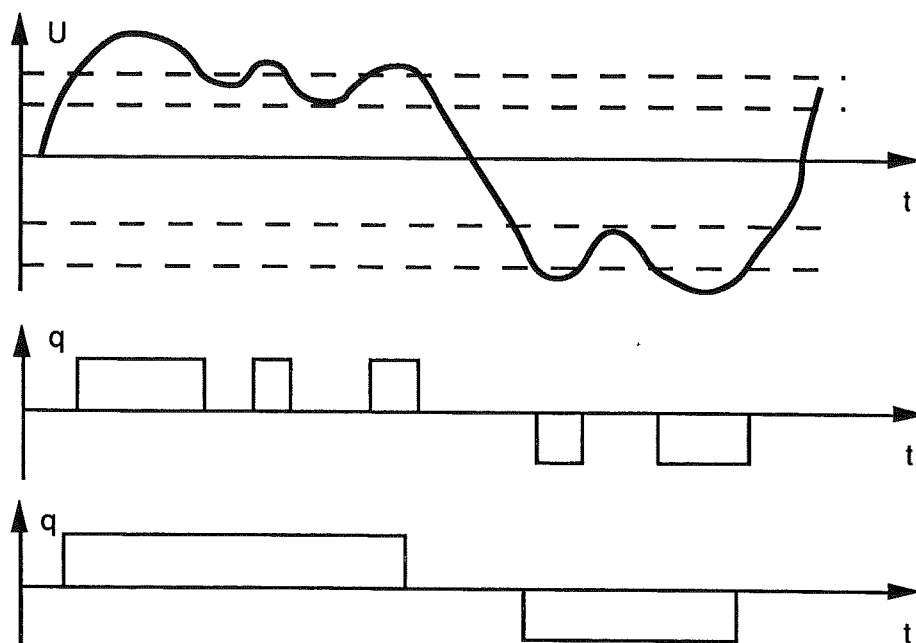
Figur 4.4.1.10 Stegsvvar för  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2200$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ . Inget djupberoende i densiteten dvs  $k_p = 0$ .

Vi ser att vi mycket riktigt får en större översläng då  $k_p = 0$ . Dock är överslängen inte större än 2 meter, vilket accepteras på grund av fallets extrema karaktär. Samtidigt minns vi att vi satte 1 meters djupfel som gräns för att vi överhuvudtaget skulle reglera, varför 2 meters fel inte är så stort i sammanhanget. Om vi istället valt att dimensionera återkopplingsparametrarna för  $k_p \neq 0$ , hade vi fått ett långsammare stegsvar vid  $k_p \neq 0$ . Vidare ser vi, att uppförandet för ett positivt stegsvar inte skiljer sig dramatiskt från ett negativt.

Vi har nu kommit fram till en återkoppling som vi tills vidare kan vara nöjda med. Försättningen består i att bestämma ett slutligt värde på hysteresen  $d$ , och eventuellt därefter ytterligare optimera återkopplingen, för att sedan utföra en slutlig kontroll av det återkopplade systemet.

### 4.4.1.3 Bestämning av hysteres

Varför vill vi ha hysteres i karakteristiken? Jo, hysteresen medför mindre störkänslighet, och dessutom, vilket vi nu ska koncentrera oss på, bidrar den till att tiden mellan omslag i flödet förlängs. Vi erinrar oss bilden som tydligt visar detta.



Figur 4.4.1.11 Styrsignalen  $u$  tillsammans med flödet  $q$  utan och med hysteres.

Låt oss anta att vi kan välja en hysteres som medför att tiden mellan tillslag för pumpen blir storleksmässigt densamma som tidsspärren. Då skulle vi analytiskt kunna se konsekvensen av en tidsspärr på 60 sekunder. Vi vet ju sedan tidigare att beskrivande funktion är ett fint hjälpmedel att analysera olinjäriteter som hysteres.

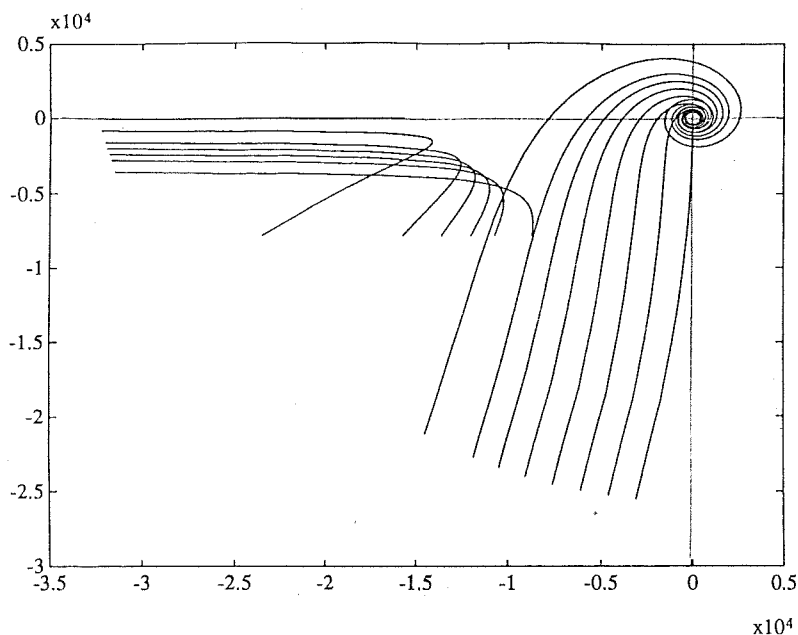
Vad vi ska göra är att försöka finna ett värde på  $d$ , se pumpkarakteristiken, som gör att vi får ca 60 sekunder mellan tillslagen. Vi låter detta kriterium dimensionera hysteresens storlek för att sedan bara acceptera hysteresens goda inverkan på störningar.

Vi simulerar ett antal stegsvar för olika värden på  $d$ , för att sedan ur dessa välja ett slutligt värde på  $d$ . Simuleringarna återfinns i appendix B.

Ur dessa simuleringar väljer vi  $d = 3$ . Detta värde på hysteresen ger en ungefärlig tid mellan pumptillslagen på ca 40 sekunder vid ett stegsvar.

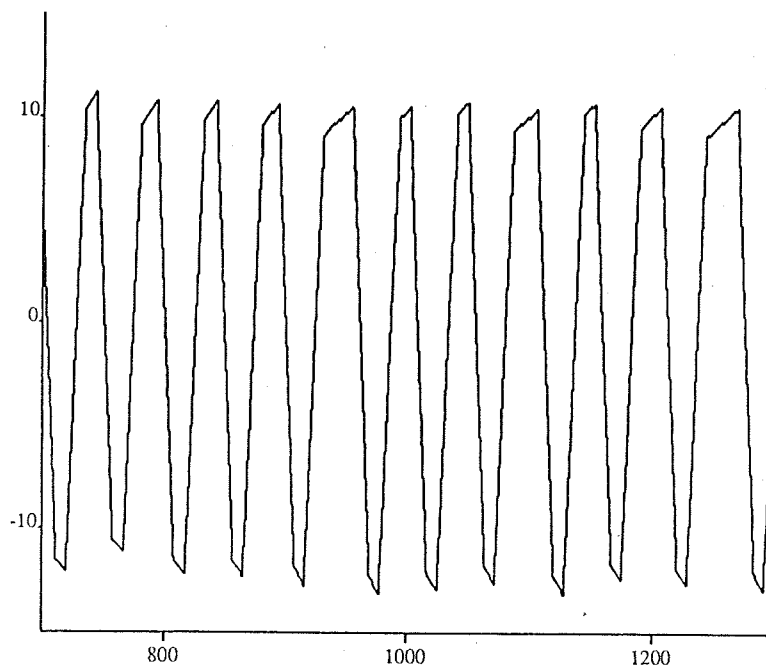
Vi ska nu kontrollera med hjälp av metoden för beskrivande funktion vad hysteresens införande innebär (och egentligen indirekt vad tidsspärren innebär). I figur 4.4.1.12 nedan, har vi Nyquistkurvan för det öppna systemet med tids-

fördröjningarna 0,1,2,3,4,5,6 och 8 sekunder (sett från höger sida), tillsammans med beskrivande funktion för  $d = 10,8,6,5,4,3$  och 1 (sett uppifrån).



Figur 4.4.1.12 Nyquistkurvan för det öppna systemet med tidsfördröjningarna 0,1,2,3,4,5,6, 8 sekunder tillsammans med beskrivande funktion för  $d = 10,8,6,5,4,3$  och 1.

Vi kan direkt följa kurvan för  $d = 3$  och se att den endast skär Nyquistkurvan då tidsfördröjningarna i systemet är större än ca 7 sekunder. Våra tidsfördröjningar är inte större än 4 sekunder och därmed skulle systemet vara stabilt vilket även våra simuleringar visar på. För att tillfredsställa vår nyfikenhet på hur bra metoden med beskrivande funktion är, gör vi en simulering då vi har en tidsfördröjning på 8 sekunder och ett värde på  $d = 1$ . För detta fall ser vi i figuren ovan att vi bör få en bestående svängning i styrsignalen  $u$ , eftersom Nyquistkurvan och beskrivande funktionen möts i en punkt. Denna punkt motsvarar en svängningstid  $T = 45$  sekunder och en amplitud  $A_U = 12.1$ . I figur 4.4.1.13 nedan har vi simulerat detta fall och vi finner att vi får en bestående svängning i  $u$  med amplituden 12.1 och svängningstiden 49 sekunder.



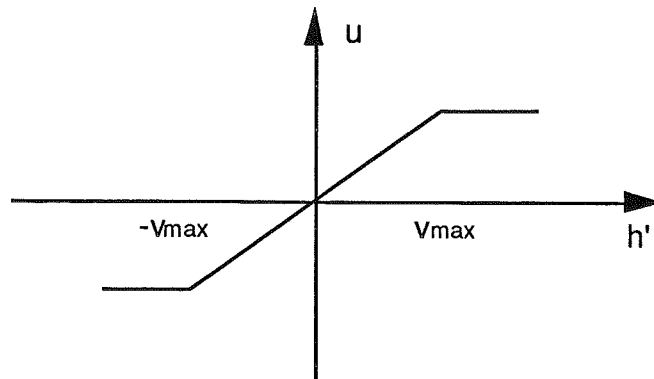
Figur 4.4.1.13 Styrsignalen  $u$  för 8 s fördröjning och  $d = 1$ .

Slutligen konstaterar vi att stegsvarets utseende för  $d = 3$  och  $d = 5$  har marginella avvikelser från varandra, varför vi låter den återkoppling vi tidigare kommit fram till vara oförändrad.

#### 4.4.1.4 Djuphastighetsbegränsning

Då vi har simulerat systemet har vi huvudsakligen tittat på stegsvar för steg om 10 eller -10 meter, och utifrån detta optimerat snabbhet utan att få nämnvärd översläng. Låt oss nu anta att vi väljer att göra ett steg som är betydligt större, låt oss säga 100 meter. Låt oss vidare anta, att vi inte har djupberoende hos densiteten. Då kommer vi med den regulator vi hittills kommit fram till att få ett stegsvar med en rejäl översläng.

Anledningen till att vi erhåller stor översläng är att djuphastigheten blir större än då vi dimensionerade återkopplingen vid stegsvar om 10 meter. Vi kan åtgärda detta genom att låta hastighetsåterkopplingen beskrivas enligt figur 4.4.1.14 nedan.



Figur 4.4.1.14 Styrsignalens beroende av djuphastigheten.

Om djuphastighetens absolutbelopp överstiger ett visst värde  $v_{max}$ , låter vi återkopplingen av densamma gå i mättning, tills vi åter erhåller en djuphastighet vars absolutbelopp understiger  $v_{max}$ .

Detta förfarande finns implementerat i regulatorn i appendix F. Det återstår att bestämma ett värde på detta  $v_{max}$ . Lättast gör man detta genom att simulera systemet för olika värden på  $v_{max}$ . Resultatet av en sådan simulering visas i appendix B.

Dessa simuleringar visar att snyggast stegsvar erhålls då vi väljer  $v_{max} = 0.09$  [ $ms^{-1}$ ].

#### 4.4.1.5 Robusthetsanalys

Vi har fått fram följande värden på återkopplingen :

$$K_{T1} = 10$$

$$K_{T2} = 2200$$

$$K_{T3} = 3 \cdot 10^5$$

Vidare har vi bestämt :

$$v_{max} = 0.09$$

$$d = 3$$

Regulatorn ska testas med avseende på parametervariationer. De parametrar för vilka variationer ska studeras är följande (se vidare regulatorn i appendix F) :

flödet från pumpen	:	$b_1, b_2$
Ubåtens massa och volym	:	$M, M_1, V_1$

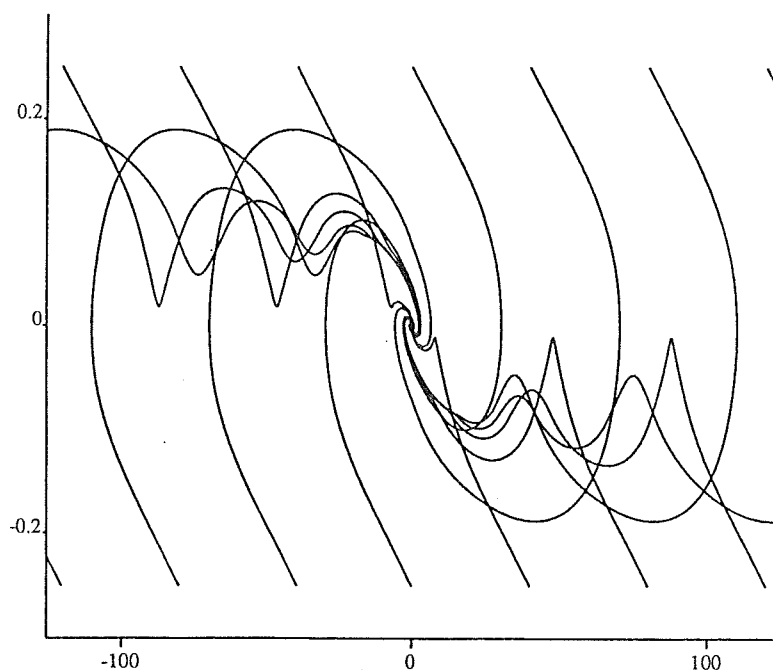


samplingstiden :  $\delta_t$

Dessa parametrar tillåts en variation på  $\pm 25\%$  frånsett samplingstiden som antar värdena 1 resp 4 s. Vidare utför vi robusthetsanalysen för ett extremt svårt fall där :

densitetens djupberoende :  $k_{ra} = 0$   
ventilfördröjningen :  $v_{delay} = 3$   
pumpfördröjningen :  $p_{delay} = 5$   
dämpfaktorn :  $C_N = 0.3$

Vi utför robusthetsanalysen genom att studera hur systemet söker sig till viloläget i origo, då vi startar med en rubbning i initialvärdena  $h_0$  och  $h'_0$ . Resultatet presenteras i form av fasplan för  $h$  och  $h'$ , och återfinns i appendix B. Vi finner med stor tillfredsställelse att systemet klarar dessa parametervariationer utan att på något sätt uppvisa instabilitet. Vi visar slutligen en fasplansanalys för systemet så som det beskrivits utan störningar, men med en djupberoende densitet, dvs  $k_{ra} = 0$ .



Figur 4.4.1.15 Fasplansanalys för slutliga systemet, utan parametervariationer. På x-axeln visas  $h$ , och på y-axeln visas  $h'$ .

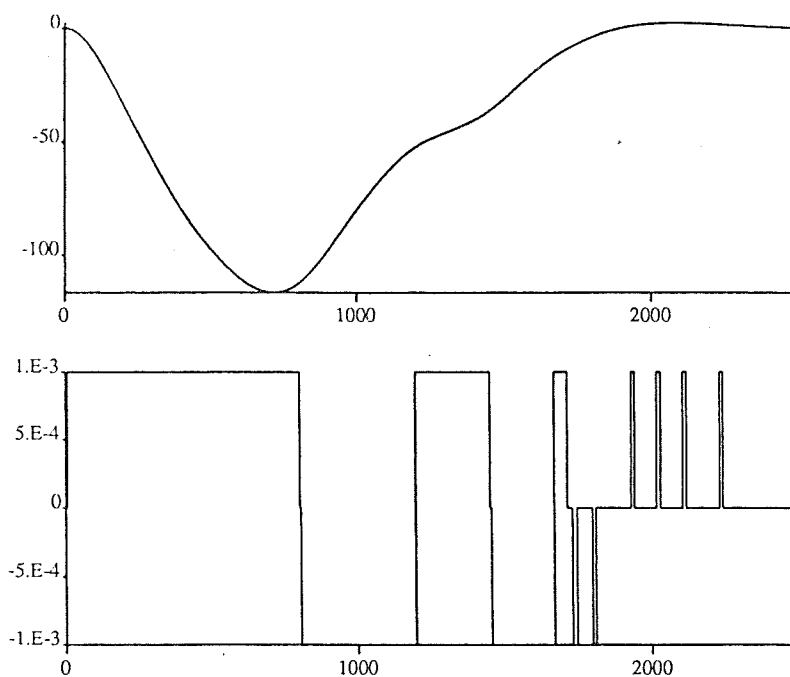
#### 4.4.1.6 Störningar

Vi ska testa regulatorn med avseende på olika störningar. De störningar vi kan tänka oss är främst av två olika karaktärer. Dessa är dels direkta viktstörningar

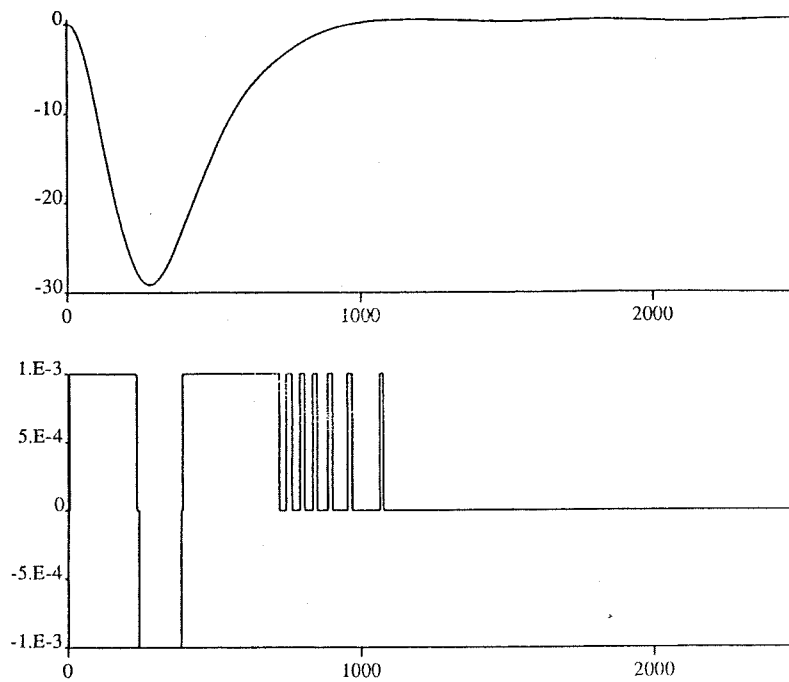
såsom förändring av ubåtens massa vid avfyrning av en torped, eller en förändring i densitet. Dels kan man tänka sig störningar i form av brus i signalöverföringen av återkopplingssignalerna. Vi ska börja med att studera fallet med viktrubbningar.

#### 4.4.1.6.1 Viktstörningar

Låt oss anta att en torped med massan 500 kg skjuts ut från ubåten. Låt oss vidare anta, att ingen annan viktreglering tar hand om kompensationen av den förlorade massan. Vi simulerar denna händelse för två fall, dels då  $k_p = 0$ , och dels då  $k_p = 2 \cdot 10^{-5}$ . Resultatet ser vi i figur 4.4.1.16 och figur 4.4.1.17 nedan.



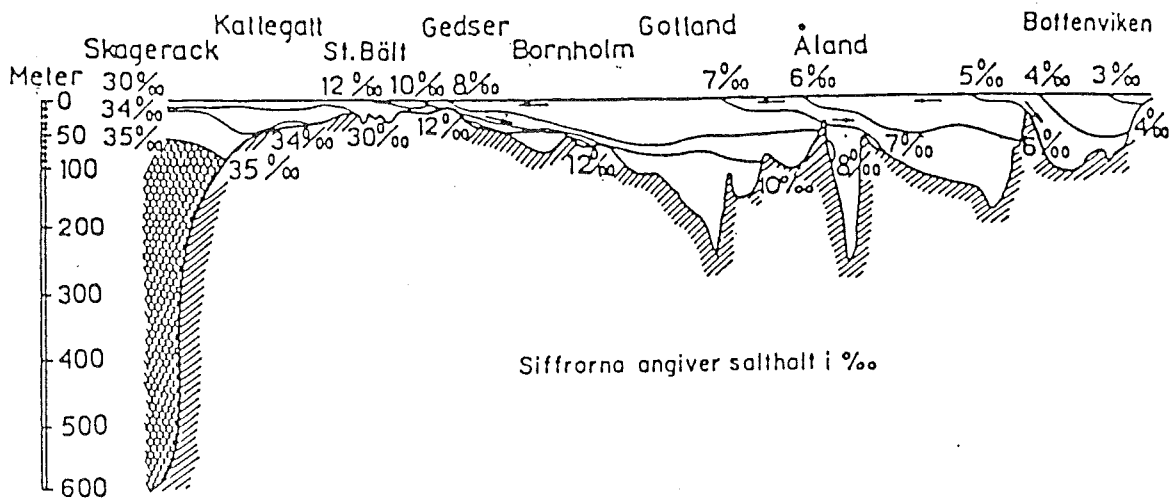
Figur 4.4.1.16 Läget  $h$  resp flödet  $q$  för en massförändring på 500 kg då  $k_p = 0$ .



Figur 4.4.1.17 Läget  $h$  resp flödet  $q$  i tanken för en massförändring på 500 kg då  $k_p = 2 \cdot 10^{-5}$ .

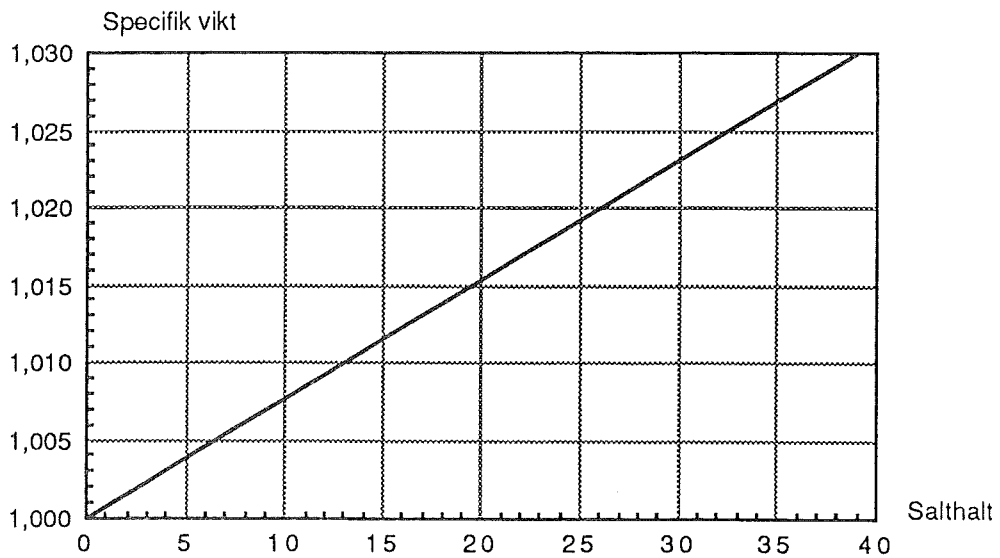
Vi finner att denna massförändring får dramatiska konsekvenser för djupet på ubåten i båda fallen. Samtidigt kan vi dock göra den iakttagelsen av vattenflödet, att viktregleringen arbetar med maximal kapacitet. Att resultatet blir nedslående beror därför på att vi har en begränsad kapacitet i vattenflödet.

Då ubåten förflyttas i vatten med densitetsskiktning uppträder också problem. Figur 4.4.1.18 nedan visar en sektion av havsbotten från Skagerack till Bottenviken. Pilarna visar hur det saltfattiga ytvattnet från Bottenviken strömmar ut mot Skagerack, medan det salthaltiga bottenvattnet följer botten i motsatt riktning. Härvid bildas markerade skiktgränser mellan lättare och tyngre vatten.



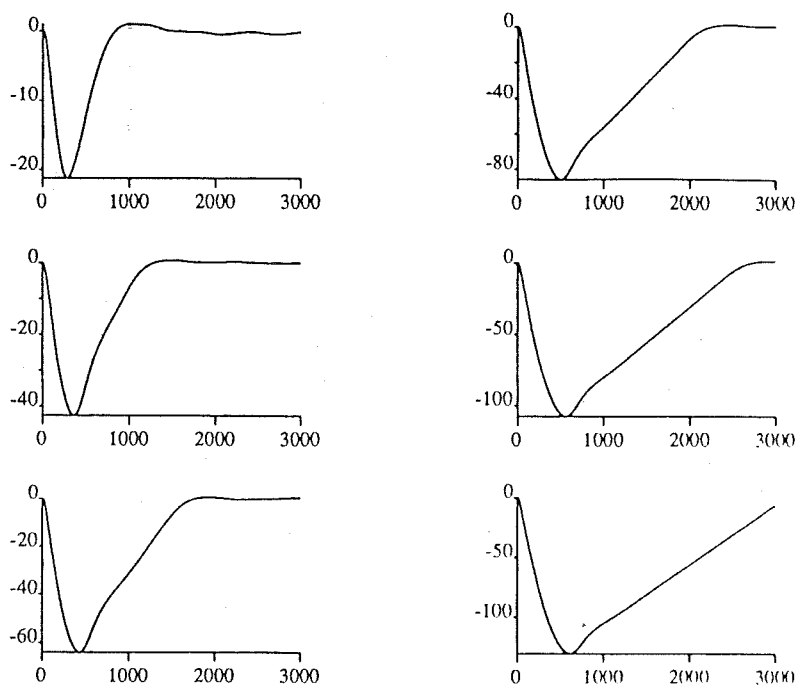
Figur 4.4.1.18 Sektion av havsbotten från Skagerack till Bottenviken.

Sambandet mellan specifika vikten och salthalten ges i figur 4.4.1.19.



Figur 4.4.1.19 Sambandet mellan specifik vikt och salthalt.

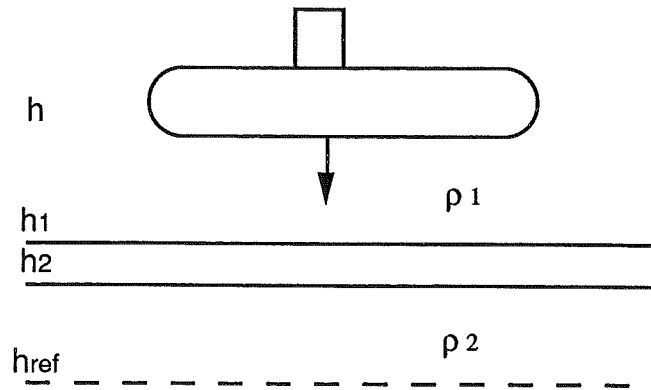
Vi antar att ubåten förflyttas i horisontell riktning in i ett nytt densitetsskikt. Om vi antar att detta densitetsskikt sker i ett steg, kommer problem att uppstå. Vi visar detta med hjälp av simuleringar från densitetsförändringar på 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 och 3.0 ‰.



Figur 4.4.1.20 Läget  $h$  för en densitetsförändring på 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 och 3.0 %  
 då  $k_p = 2 \cdot 10^{-5}$ .

Hur ska vi kommentera detta? Först och främst kan man ifrågasätta rimligheten i att densitetsförändringen sker fullständigt språngartat. Det gör den sannolikt inte. Vidare kan man se att en sådan densitetsförändring som diskuteras här uppkommer, då ubåten rör sig med en horisontell rörelse in i vatten med annan densitet. Men om ubåten har en horisontell rörelse inverkar djuproderna på ubåtens djup tillsammans med viktregleringen, varför verkligheten bör vara snällare än vad dessa simuleringar visar på. Avslutningsvis kan tilläggas att den enda möjligheten att undvika stora djupvariationer vid viktstörningar, må vara i densitet eller på grund av massförändring, är att öka vattenflödet i viktregleringen.

Ovan diskuterade vi ett regulatorproblem där ubåten utsattes för en viktstörning i egenskap av densitetsskikt. Vi ska nu titta närmare på vad som inträffar då regulatorn ska uppträda som ett servo och förflytta ubåten till ett referensdjup som ligger skilt av ett densitetsskikt.

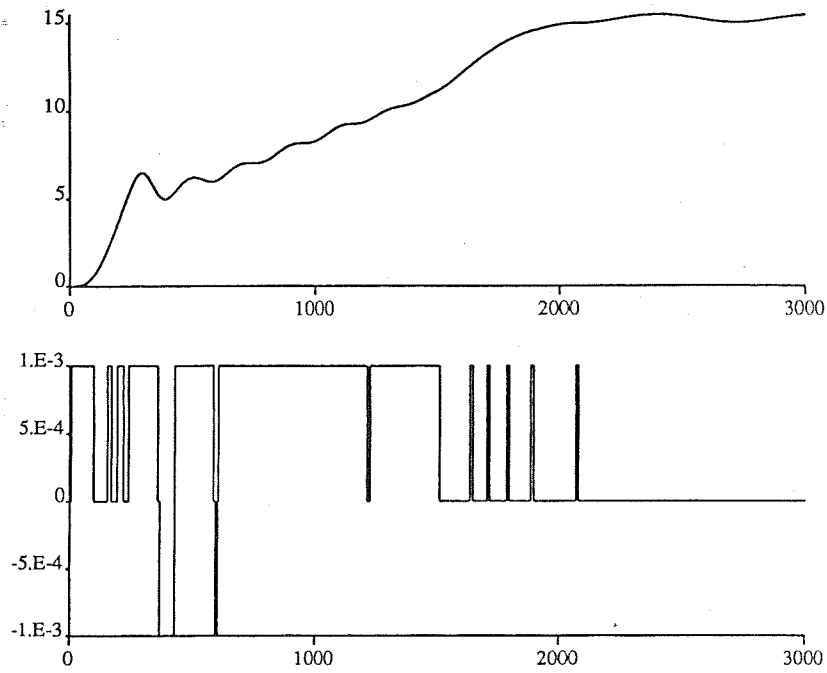


Figur 4.4.1.21 Genomträngning av densitetsskikt.

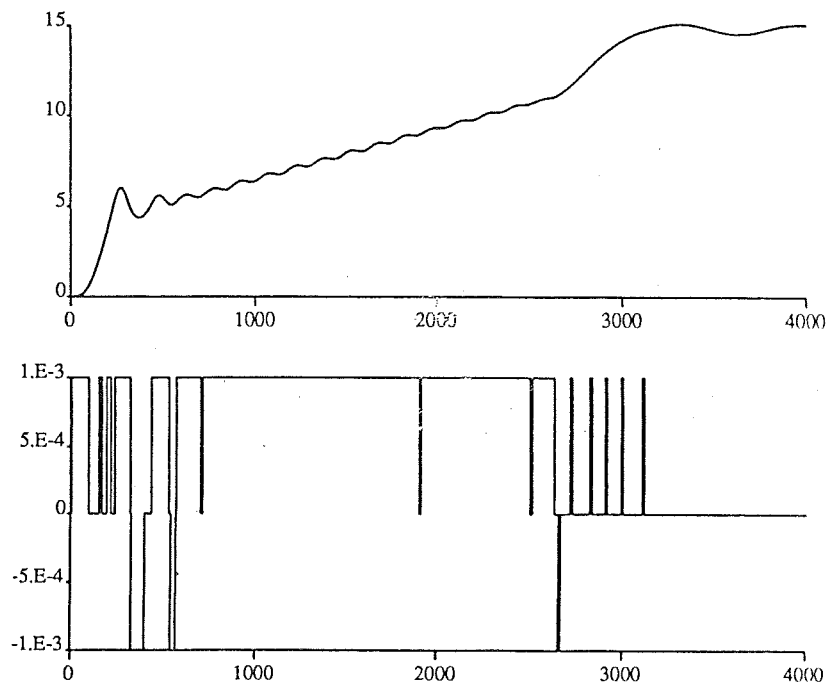
Vi tänker oss två densitetsskikt,  $\rho_1$  och  $\rho_2$ , som skiljs från varandra av en övergångszon  $[h_1, h_2]$ . I övergångszonen tänker vi oss att densiteten linjärt övergår från  $\rho_1$  till  $\rho_2$ . Vi väljer att studera det fall, då densitetsskiktet är abrupt. Praktiskt innebär detta att övergångszonen  $[h_1, h_2]$  får samma utsträckning som diametern på ubåten. Man kan resonera så här :

När ubåten precis träffar det nya densitetsskiktet  $\rho_2$  med undersidan, ligger fortfarande själva ubåtskroppen kvar i det gamla densitetsskiktet  $\rho_1$ . Därefter sjunker ubåten tills den precis omsluts av vatten med den nya densiteten. Under denna sträcka som motsvarar ubåtens diameter, ligger en del av ubåten i vatten med densiteten  $\rho_1$  och den andra delen i vatten med densiteten  $\rho_2$ . Vi kan utan att göra dramatiska fel anta att övergången från  $\rho_1$  till  $\rho_2$  beskrivs av en övergångszon med utsträckningen  $[h_1, h_2]$ , i vilken densiteten linjärt övergår från  $\rho_1$  till  $\rho_2$ .

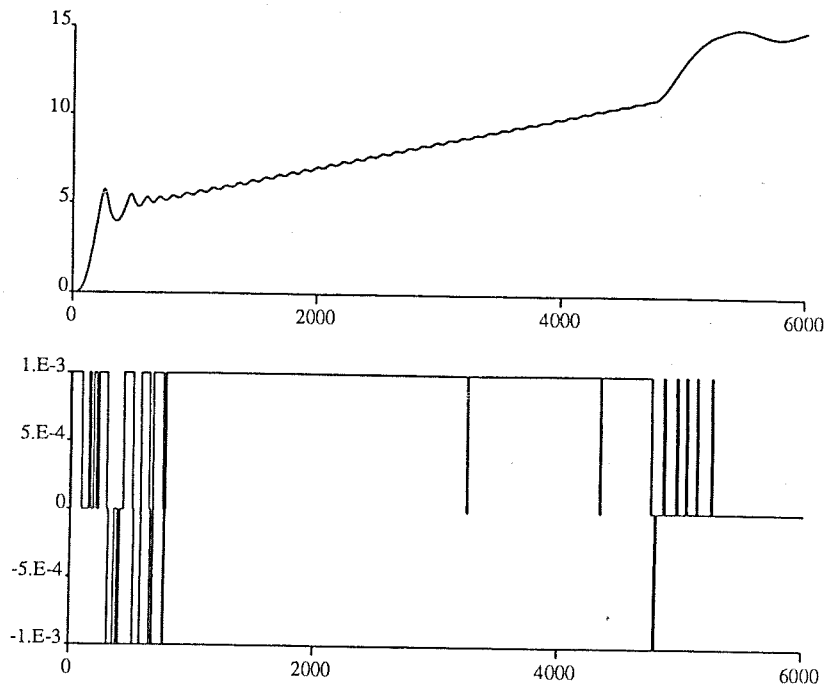
Nedan visar vi resultatet från en serie simuleringar där övergångszonens utsträckning är lika med ubåtens diameter  $d$ .



Figur 4.4.1.22 Stegsvær med densitetsskikt på 1%.  $h_{ref} = 15$ .



Figur 4.4.1.23 Stegsvær med densitetsskikt på 2%.  $h_{ref} = 15$ .



Figur 4.4.1.24 Stegsvvar med densitetsskikt på 4%.  $h_{ref} = 15$ .

#### 4.4.1.6.2 Signalstörningar

Störningar uppträder alltid vid signalöverföring. Störningarna kan dels vara slumpmässigt fördelade, men kan även vara konstanta i tiden - offset. I regel har man en kombination av bägge typerna. Vi kommer här att titta på normalfördelat brus och offset i de återkopplade signalerna.

#### 4.4.1.6.3 Brus

För en stokastisk variabel  $X$ , med fördelningsfunktionen  $f_X(x)$  gäller:

Väntevärdet av  $X$  :

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Variansen :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f_X(x) dx$$

Medeleffekten :

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx$$

Antag att bruset är normalfördelat så att :

$$u \in k N(0,1)$$



Där  $k$  är en konstant. Medeleffekten av bruset är då :

$$P = \sigma^2 = k^2$$

Vi studerar bruståligheten genom att simulera stegsvar till 20 meter med additivt, normalfördelat okorrelerat brus på hastighet och acceleration.

Vid ett stegsvar till 20 meter gäller för maxvärdena av  $h'$  och  $h''$  :

$$h'_{\max} \approx 0.05 \text{ [ms}^{-1}\text{]}$$

$$h''_{\max} \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ [ms}^{-2}\text{]}$$

Vi studerar bruspåverkan, då standardavvikelsen för bruset är 5, 10 och 50 % av maxvärdet för hastighet och acceleration.

Resultatet av dessa simuleringar återfinns i appendix B. Vi finner att för brus med en standardavvikelse som är  $\leq 10$  % av den aktuella signalen, är stegsvaret acceptabelt både beträffande brus i hastighet som brus i acceleration. I absoluta tal innebär detta att standardavvikelsen för brus i hastigheten inte får överstiga  $5 \cdot 10^{-3} \text{ [ms}^{-1}\text{]}$ , och standardavvikelsen för brus i accelerationen inte får överstiga  $4 \cdot 10^{-5} \text{ [ms}^{-2}\text{]}$ . I dessa fall är felet i djup  $\leq 1$  meter. Vid brusigare signaler kommer det konstanta felet att gradvis tillta. Vid mycket brusiga signaler kommer det faktum att vi har en tidsspärr i ena riktningen att medföra att systemet kollapsar.

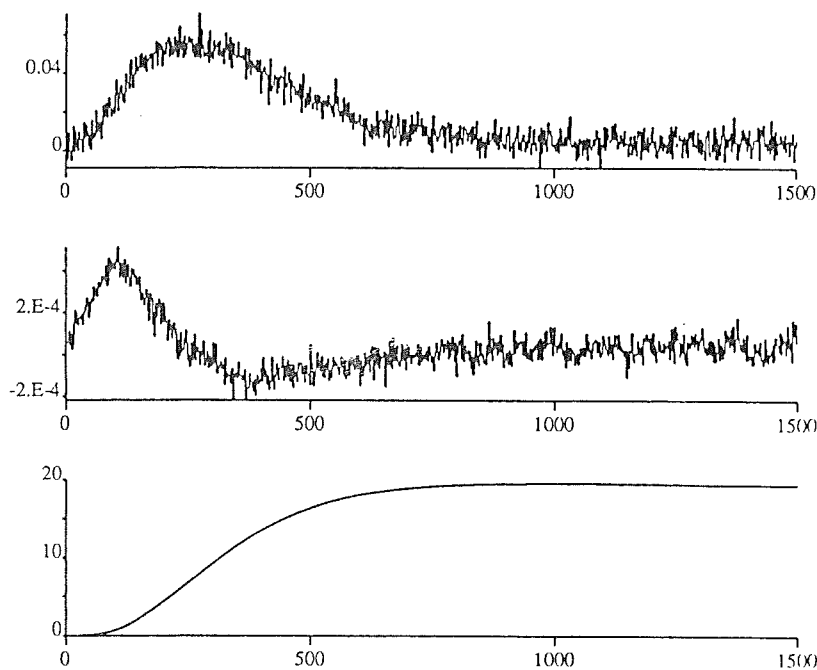
Man kan tänka så här :

Anta att vår signal är mycket brusig. Amplituden på signalen kommer därvid att snabbt variera från negativa värden till positiva värden. När signalen blir negativ, kommer den förr eller senare vara så stor att pumpen slår till. I ögonblicket senare kommer signalen att passera gränsen för hysteresen, varför pumpen åter slår från. Nu kan dock inte pumpen slå till igen förrän om 60 sekunder. Förloppet kommer att vara likartat i andra riktningen med den avgörande skillnaden, att vi inte har tidsspärr åt detta hållet! Systemet kommer som ett resultat av detta att ta in vatten oftare än det pumpar ut. Därför kommer ubåten att sjunka okontrollerat.

#### 4.4.1.6.4 Offset

Nyss tittade vi på okorrelerat brus. Vi ska nu titta på det fall, då vi har en offset i signalerna. Liksom tidigare tittar låter vi störningen inverka på hastighet och acceleration. Vi tittar på fallen då offseten är 5, 10 och 20 % av maxvärdet av signalen. Simuleringarna återfinns i appendix B. Simuleringarna visar att en offset som är mindre än 10 % av den aktuella signalen kan accepteras. I absoluta tal innebär detta för hastigheten  $5 \cdot 10^{-3}$  [ $\text{ms}^{-1}$ ] och för accelerationen  $4 \cdot 10^{-5}$  [ $\text{ms}^{-2}$ ]. Felet i djup kommer i så fall vara  $\leq 1.5$  meter.

Vi avslutar detta kapitel om störningar med att titta på ett extra störningspåverkat fall, där vi har offset i både hastighet och acceleration, samt dessutom brus i båda signalerna. Offsetnivåerna och likaså standardavvikelserna för det tillagda bruset sätts till 10 % av resp maxvärde, eller i absoluta tal  $5 \cdot 10^{-3}$  [ $\text{ms}^{-1}$ ] resp  $4 \cdot 10^{-5}$  [ $\text{ms}^{-2}$ ].



Figur 4.4.1.25 Brusig hastighetssignal med offset.  
Brusig accelerationssignal med offset.  
Stegsvar för href 20 meter.

Djupfelet i detta fall blir ca 1.3 meter.

#### 4.4.1.7 Sammanfattning av 1 - 1 systemet.

Vi har slutit oss till följande val av återkopplingsparametrar :

$$K_{T1} = 10$$

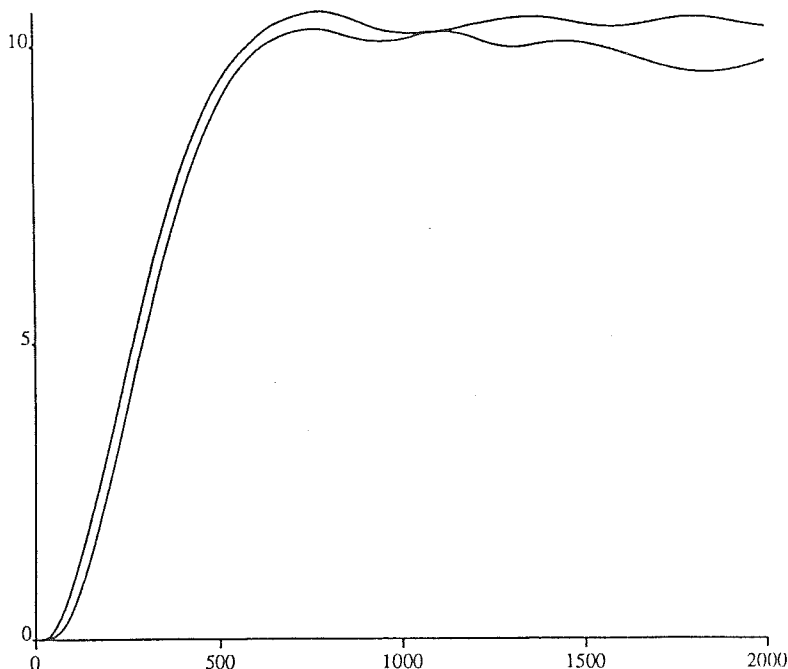
$$K_{T2} = 2200$$

$$K_{T3} = 3 \cdot 10^5$$

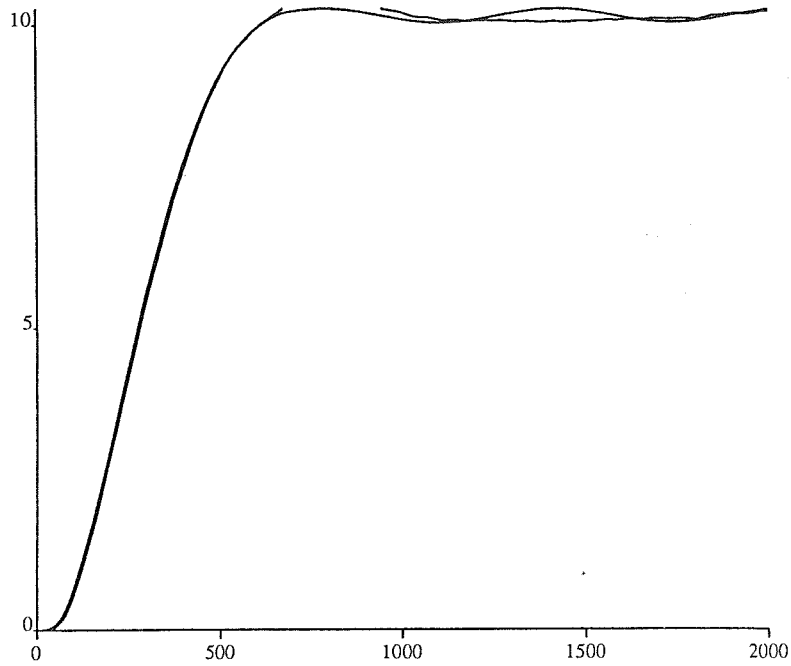
Vi har infört hysteres i störbegränsande syfte och dessutom funnit att hysteresen indirekt bidrar till att göra systemet mer lättanalyserat. Vi har testat regulatormed hysteresen  $d$  satt till 3. Vi konstaterar, att man kan erhålla bättre stabilitet genom att ha mindre hysteres, dvs större  $d$ , men att denna åtgärd knappast är befogad med hänsyn tagen till simuleringresultaten. Vidare medför minskad hysteres ökad störkänslighet.

Regulatorn har visat sig vara robust med avseende på parametervariationer. Vi har med hjälp av simuleringar testat den för parametervariationer på  $\pm 25\%$ . Dessutom har vi testat den för speciellt svårreglerade fall, varvid vi kan nämna genomträngning av densitetsskikt som det mest extrema.

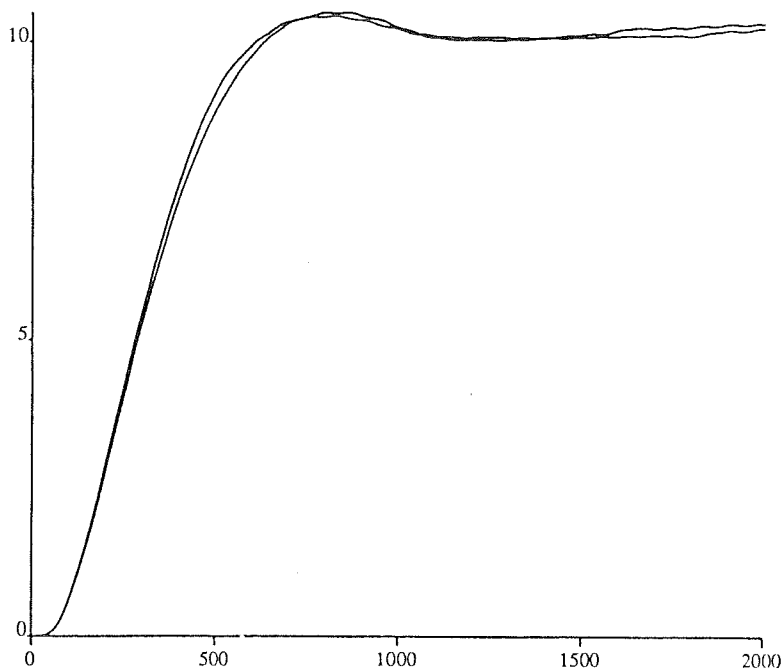
Vi avslutar diskussionen om 1 - 1 systemet genom att visa tre fall som väcker speciellt intresse. Vi tittar närmare på beroendet av parametern  $M_1$  som betecknar ubåtens massa plus medsvängande massa. Vidare tittar vi på beroendet av samplingstiden  $\Delta t$  och slutligen på beroendet av dämpkoefficienten  $c_N$ .



Figur 4.4.1.26 Stegsvär för  $M_1$  lika med 1 (vänstra kurvan) resp 3 gånger ubåtens massa  $M$ .



Figur 4.4.1.27 Stegsvär då samplingstiden är lika med 1 (vänstra kurvan) resp 10 sekunder.

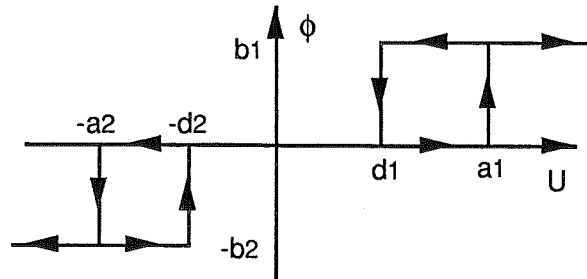


Figur 4.4.1.28 Stegsvär då dämpkoefficienten  $C_N$  är lika med 0.3 (vänstra kurvan) resp 1.2.

Stegsvaren uppvisar god robusthet med avseende på dessa parametervariationer. Observera dock den periodiska självsvängningen i flödet, då samplingstiden är 10 sekunder. Självsvängningen beror på tidsfördröjningen, som införs med längre samplingstid. Fenomenet bekräftas, om man studerar beskrivande funktion för systemet.

#### 4.4.2 1 - 10 systemet

Istället för att förutsätta att flödet är lika i båda riktningar, antar vi nu att flödet är 10 liter/s i positiv riktning och 1 liter/s i negativ riktning. Med beteckningar ur figuren nedan gäller  $b_1 = 10^{-2}$  och  $b_2 = 10^{-3} \text{ [m}^3 \text{ s}^{-1}\text{]}$ .



Figur 4.4.2.1 Karakteristik för pump med hysteres.

Innan vi ger oss i kast med att bestämma återkopplingsparametrarna funderar vi lite kring våra analysmetoder och deras giltighet. I fallet 1 - 1 hade vi stor användning av metoden med beskrivande funktion. Tyvärr kan vi inte använda metoden med beskrivande funktion i 1 - 10 fallet, eftersom olinjäriteten i det här fallet ger upphov till en subharmonisk svängning med frekvensen  $\omega = 0$ . Beträffande Cirkelkriteriet och Popovkriteriet minns vi att vi inte hade så stor glädje av dem i fallet 1 - 1. De visade sig nämligen vara så stränga, att stabilitet inte kunde garanteras. Anledningarna till detta minns vi bl a var att vi var tvungna att anta samma fördröjning i båda riktningar och även tidsspärr i båda riktningar.

Vi kommer i 1 - 10 fallet att enbart förlita oss på simuleringar på grund av vad som ovan nämnts. Detta innebär egentligen ingen större restriktion, eftersom vi med robusthetsanalys i kombination med fasplansanalys, väl kan utföra stabilitetsundersökningar.

Med våra erfarenheter från 1 - 1 systemet har vi en god utgångspunkt, då vi ska bestämma återkopplingsparametrarna för det här fallet. Vår ansats från tidigare låter vi vara kvar, dvs vi återkopplar  $h$ ,  $h'$  och  $h''$  med återkopplingsparametrarna  $K_{T1}$ ,  $K_{T2}$  och  $K_{T3}$ .

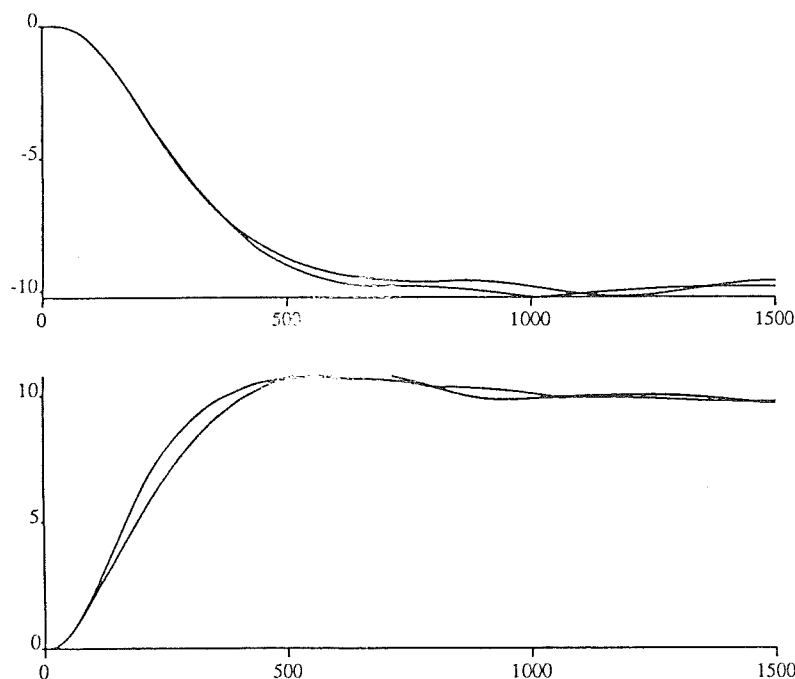
Med tanke på att vi har osymmetri i flödet, skulle man kunna tänka sig att man har två uppsättningar av återkopplingsparametrar, som används beroende på om vatten ska pumpas in eller ut. Vi väljer dock att använda den tidigare ansatsen på grund av dess tilltalande enkelhet. Osymmetrin gör att vi måste studera både negativa och positiva stegsvar vid sökandet av återkopplingsparametrar. Resulterande val kommer att bli en kompromiss av de båda stegsvaren.

#### 4.4.2.1 Återkoppling av $h$ , $h'$ och $h''$

Inledningsvis väljer vi att återkoppla höjden med  $K_{T1} = 10$ . Motiveringen är den samma som i 1 - 1 fallet. Vidare väljer vi att använda samma hysteres som i 1 - 1 fallet, dvs  $d = 3$ . Övriga parametrar  $K_{T2}$  och  $K_{T3}$  dimensionerar vi enligt tidigare mönster, möjligen med "trial and error" som ett större inslag i brist på andra analysverktyg.

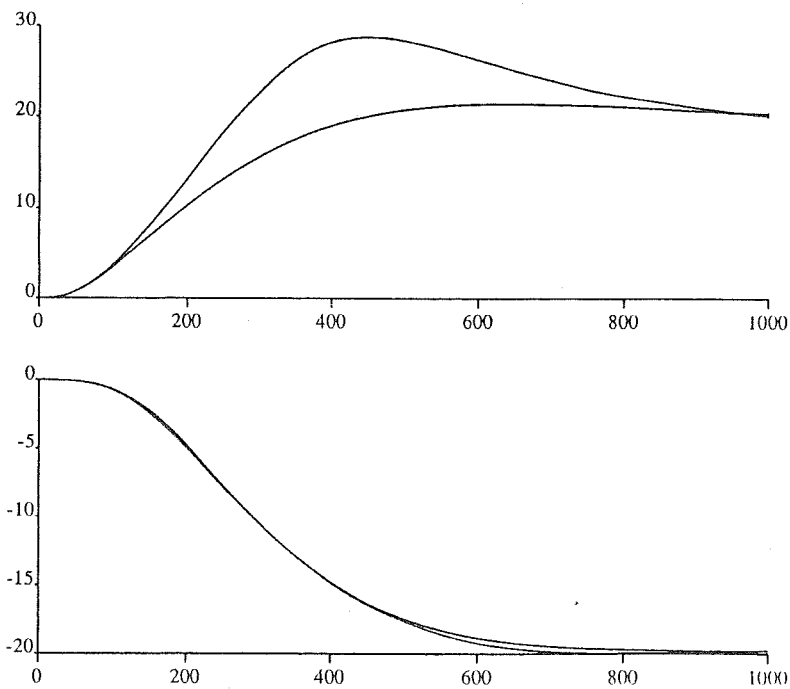
Vi erinrar oss det slutliga valet av parametrar i 1 - 1 fallet var  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2200$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ . Med dessa parametrar som utgångspunkt gör vi en serie simuleringar, där vi först låter  $K_{T1}$  och  $K_{T3}$  vara fixa, medan  $K_{T2}$  är variabelt. Simuleringarna återfinns i appendix C. Vi väljer ur dessa initialt  $K_{T2} = 2500$ .

Vi upprepar proceduren men låter nu istället  $K_{T3}$  vara variabelt. Simuleringarna finns i appendix C. Vi väljer med stöd av simuleringarna  $K_{T3} = 2 \cdot 10^5$ . I figuren nedan återfinns resultatet från en simulering, där  $h_{ref} = 10$  resp  $-10$  och  $k_p = 0$  resp  $2 \cdot 10^{-5}$  för det parameterintervall vi gjort ovan.



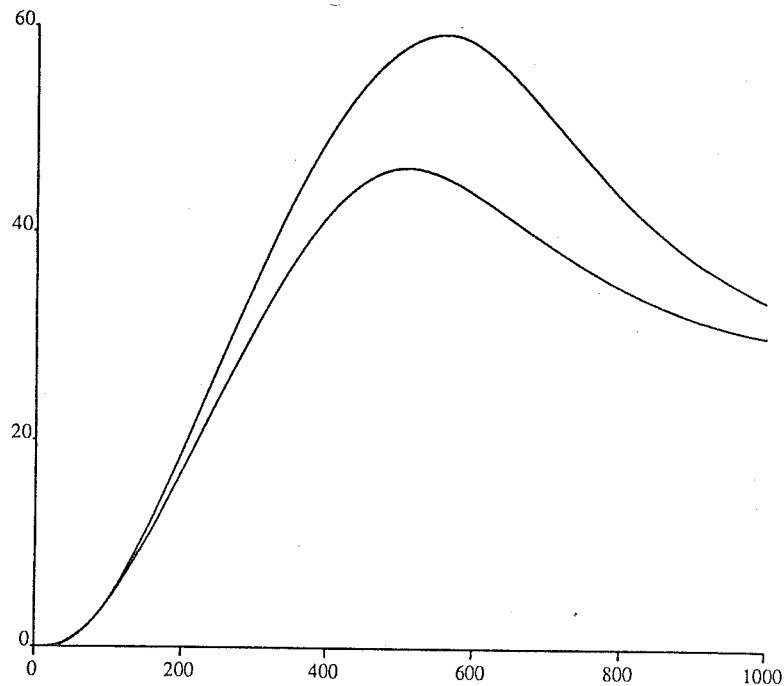
Figur 4.4.2.2 Stegsvär.  $h_{ref} = 10$  resp  $-10$ ,  $k_p = 0$  resp  $2 \cdot 10^{-5}$ .  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2200$  och  $K_{T3} = 2 \cdot 10^5$ .

Våra återkopplingsparametrar är nu anpassade för stegsvär om 10 meter. Liksom i 1 - 1 fallet erfar vi svårigheter, om vi vill göra steg som är större än så. Vi visar detta i figur 4.4.2.3 nedan, där vi gör steg om  $\pm 20$  meter för  $k_p = 0$  resp  $2 \cdot 10^{-5}$ .



Figur 4.4.2.3 Stegsvär.  $h_{ref} = 20$  resp  $-20$ ,  $k_p = 0$  resp  $2 \cdot 10^{-5}$ .  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2200$  och  $K_{T3} = 2 \cdot 10^5$ .

Att positiva steg för  $k_p = 0$  är ett kritiskt fall, ser vi tydligt på överslängen. I negativ riktning finns inte detta problem. Förklaringen till detta har sin förankring i det osymmetriska flödet i kombination med tidsfördröjningarna i systemet. Då vi vill förflytta oss i positiv riktning, börjar vi med att ta in vatten med flödet 10 l/s. När regulatören finner det dags att stänga av flödet eller till och med pumpa ut vatten, har vi en fördröjning i systemet, som resulterar i att vi fortsätter att ta in vatten i ytterligare 2 sekunder. När vi ska kompensera för denna extra mängd vatten genom att pumpa ut, har vi bara ett flöde som är en tiondel av det tidigare flödet! Resultatet blir överslängen som vi kan observera i figuren ovan. Nedan har vi simulerat ett fall med och utan tidsfördröjning då  $k_p = 0$ .



Figur 4.4.2.4 Stegsvvar med och utan tidsfördröjning.

Man skulle kunna tänka sig att man löser problemet med den stora överslängen på samma sätt som vi gjorde i 1 - 1 fallet. Vi erinrar oss att vi då hastigheten översteg ett visst värde,  $v_{max}$ , "bromsade" genom att pumpa vatten i en sådan riktning att rörelsen motverkades. Denna metod visar sig på grund av de fysiska förutsättningarna i det här fallet vara bristfällig, varför vi gör en ny ansats.

#### 4.4.2.2 Djuphastighetsbegränsning

Vårt mål är att förhindra överslängar vid stora positiva steg. Ett sätt att göra detta på, är att återkoppla djuphastigheten hårdare då den ökar. Vi tänker oss ett hastighetsberoende i  $K_{T2}$  enligt följande ansats :

$$\begin{aligned} K_{T2} &= K_{T2}^0 (1 + k_v h') & h' > 0 \\ K_{T2} &= K_{T2}^0 & h' \leq 0 \end{aligned}$$

Vi erinrar oss vår styrlag :

$$u = K_{T1}(h_{ref} - h) - K_{T2}h' - K_{T3}h''$$

Om vi sätter in det nya värdet på  $K_{T2}$  får vi :

$$u = K_{T1}(h_{ref} - h) - K_{T2}^0 (1 + k_v h')h' - K_{T3}h''$$

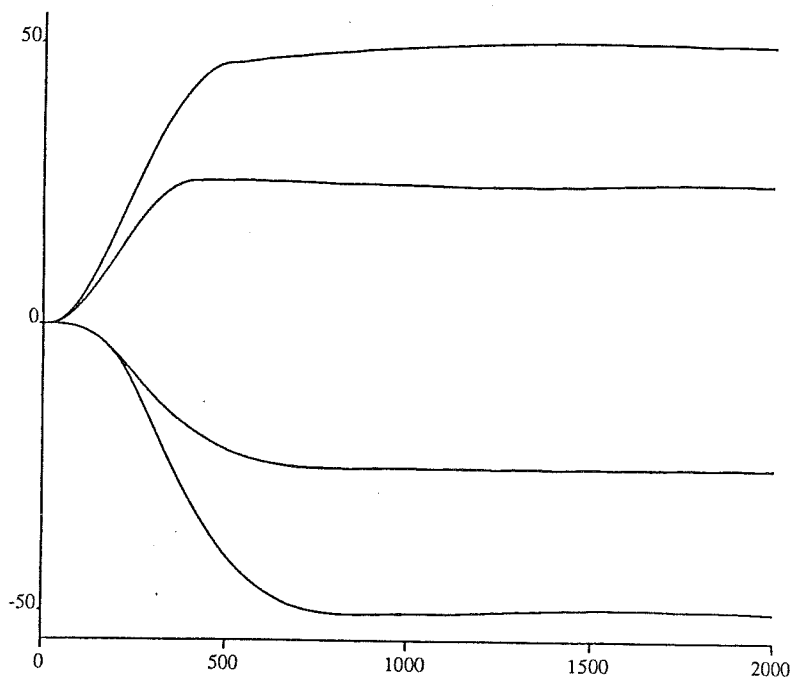


Den nya ansatsen innebär att vi återkopplar hastigheten kvadratisk då vi förflyttar oss i positiv riktning, och som tidigare linjärt i negativ riktning. Vi väljer  $K_{T2}^0 = 2500$ .

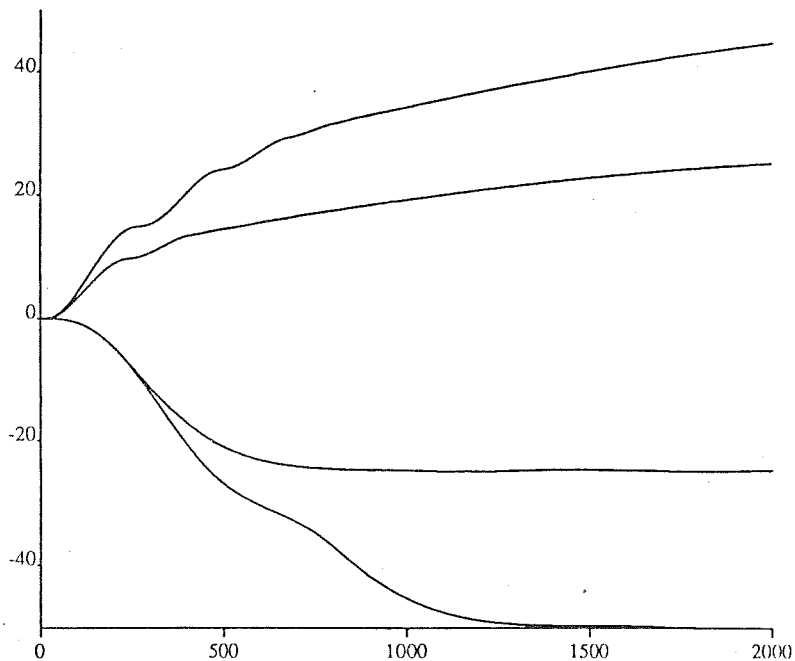
Fortsättningsvis ska vi försöka finna ett lämpligt värde på  $k_V$ . Eftersom de största problemen med överslängar uppträder då  $k_p = 0$ , evaluerar vi  $k_V$  för just detta fall. I appendix C återfinns resultatet från en serie simuleringar, där vi med ett antal olika värden på  $k_V$  har utfört stegsvar för olika referensdjup  $h_{ref}$ . Dessa simuleringar visar på att  $k_V = 500$  är ett bra val om vi vill undvika överslängar.

Nu får vi inte glömma att dessa simuleringar är utförda för det fall, då densiteten inte har djupberoende dvs  $k_p = 0$ . Detta specialfall, som vi väljer att dimensionera efter, gör att vi kommer få ett långsammare system än om vi valt att dimensionera då  $k_p > 0$ .

Nedan visar vi ett antal stegsvar för  $k_p = 0$  och  $2 \cdot 10^{-5}$  samt  $h_{ref} = \pm 25$  och  $\pm 50$  meter.



Figur 4.4.2.5 Stegsvär med  $k_p = 0$ ,  $h_{ref} = \pm 25$  och  $\pm 50$  meter.



Figur 4.4.2.6 Stegsvvar med  $k_p = 2 \cdot 10^{-5} h_{ref} = \pm 25$  och  $\pm 50$  meter.

Stegsvaren är lite väl långsamma i fallet  $k_p = 2 \cdot 10^{-5}$ . Anledningen till detta är bl a, att vi återkopplar hastighet och acceleration väldigt hårt för att gardera oss mot överslängar då  $k_p = 0$ . Man skulle eventuellt kunna tänka sig att acceptera något större översläng för att på så sätt snabba upp systemet, men en sådan förändring skulle bara få marginell effekt på snabbheten. Vårt största problem ligger i att flödet är osymmetriskt dvs  $b_1 \neq b_2$ .

För att komma åt en markant förbättring i snabbhet måste vi förändra styrlagen, så att den bättre hanterar osymmetrin i flödet. Som fallet är nu tar vi ingen hänsyn alls till att flödet är osymmetriskt mer än att djuphastighetsbegränsningen bara verkar, då vi förflyttar oss i en riktning. Man skulle kunna tänka sig att istället ha en styrlag som optimeras för det fall, då vi vill förflytta oss i en riktning, och ha en annan styrlag, då vi vill förflytta oss i den andra riktningen. På så vis skulle man hantera osymmetrin på ett mer tillfredsställande sätt. Det finns inte utrymme att i denna rapport undersöka detta förslag till förbättring, utan lämnas här enbart som idé.

#### 4.4.2.3 Robusthetsanalys

Vi har fått fram följande värden på återkopplingen :

$$K_{T1} = 10$$

$$K_{T2} = 2200$$

$$K_{T3} = 2 \cdot 10^5$$

Vidare har vi bestämt :

$$k_v = 500$$

$$d = 3$$

Regulatorn ska testas med avseende på parametervariationer. De parametrar för vilka variationer ska studeras är liksom i 1 - 1 fallet :

flödet från pumpen	:	$b_1, b_2$
Ubåtens massa och volym	:	$M, M_1, V_1$
samplingstiden	:	$\text{delta}_t$

Dessa parametrar tillåts en variation på  $\pm 25\%$  frånsett samplingstiden, som antar värdena 1 resp 4 s. Vidare utför vi robusthetsanalysen för ett extremt svårt fall där :

densitetens djupberoende	:	$k_{ra} = 0$
ventilfördröjningen	:	$v_{\text{delay}} = 3$
pumpfördröjningen	:	$p_{\text{delay}} = 5$
dämpfaktorn	:	$C_N = 0.3$

Resultatet presenteras i form av fasplan för  $h$  och  $h'$ , och återfinns i appendix C.

Systemet uppvisar robusthet för de variationer vi har nämnt ovan. Man kan lägga märke till stora överslängar i de fall, då vi befinner oss på negativt djup med negativ fart. Regulatorn tar då in vatten med stort flöde, och osymmetrin tillsammans med tidsfördröjningarna bidrar till en stor översläng. Vi ska dock tillägga att resultatet hade blivit betydligt bättre, om vi hade antagit ett djupberoende i densiteten, dvs  $k_p \neq 0$ .

#### 4.4.2.4 Sammanfattning av 1 - 10 systemet

På ett tidigt stadium har vi insett att 1 - 10 systemet är mer svårhanterligt än 1 - 1 systemet. Vi har berört anledningarna till detta, av vilka de viktigaste är tidsfördröjningarna i systemet i samband med osymmetrin i flödet. På grund av detta har vi inte ödslat krut på förbättra en lösning, som redan haltar från födseln. Vi har bland annat inte studerat störkänsligheten alls i 1 -10 fallet. Vidare erinrar vi oss att analys för 1 - 10 systemet helt har utelämnats, eftersom vettiga analysmetoder saknas. Slutligen bör påpekas att hysteres har införts i störbegränsande syfte, men då me-

toden med beskrivande funktion inte går att applicera på 1 - 10 fallet, har vi inte brytt oss om att förändra hystereseens storlek från 1 - 1 fallet.

Vi har med hjälp av omfattande simuleringar bestämt följande återkopplingsparametrar :

$$K_{T1} = 10$$

$$K_{T2} = 2200$$

$$K_{T3} = 2 \cdot 10^5$$

För att reducera överslängar vid stora steg i djup, har vi infört en form av återkoppling av hastigheten, som i praktiken innebär att den återkopplas kvadratisk. Denna åtgärd har visat sig vara nödvändig, enbart då vi utför steg i positiv riktning. Anledningen är åter igen osymmetrin i flödet kombinerat med tidsfördröjningarna i systemet.

Regulatorn har slutligen visat sig vara robust under de simuleringar som utförts.

### 4.4.3 10 - 10 systemet

Vi ändrar på förutsättningarna och tillåter ett flöde på 10 liter per sekund i båda flödesriktningarna. Systemet är, liksom 1 - 1 systemet, symmetriskt med avseende på flödeskapaciteten i de båda riktningarna, varför vi kan tillämpa metoden med beskrivande funktion vid analysen.

#### 4.4.3.1 Bestämning av återkopplingsparametrar

Vi använder samma metodik som vid 1 - 1 fallet när vi ska bestämma återkopplingskonstanterna, dvs vi sluter återkopplingslingorna inifrån och ut. Vi refererar till sidorna som behandlar detta i 1 - 1 fallet för en utförlig beskrivning.

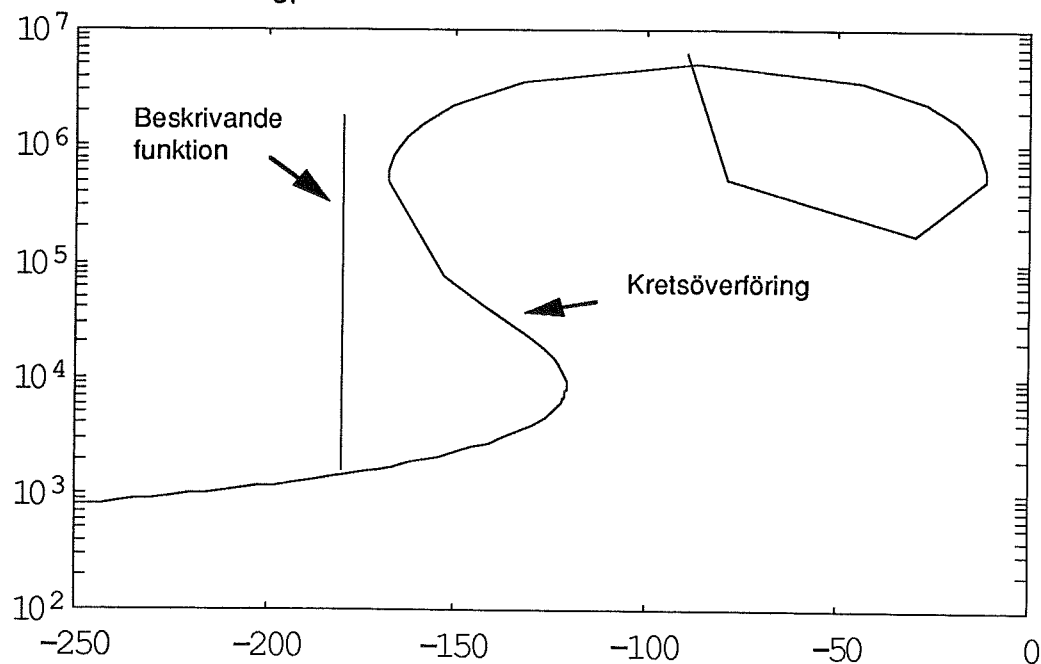
I appendix I återfinns simuleringarna som ligger till grund för följande val av återkopplingskonstanter :

$$K_{T3} = 1.1 \cdot 10^5$$

$$K_{T2} = 2000$$

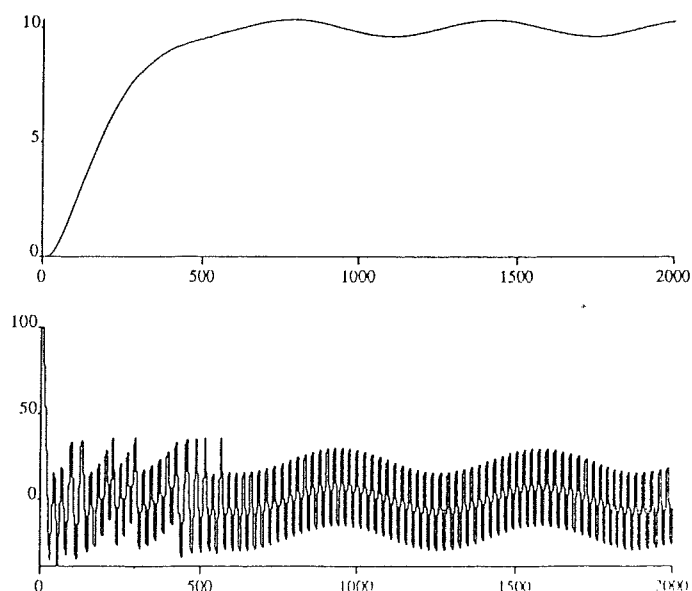
$$K_{T1} = 10$$

Vi åskådliggör systemet i ett Nicholsdiagram nedan. Tidsfördröjningarna är 4 sekunder och det existerar ingen hysteres. Ingen tidsspärr har införts, det vill säga vi använder inte lågpassekvivalenten.



Figur 4.4.3.1 Nicholsdiagram över beskrivande funktion och kretsöverföring för  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2000$ ,  $K_{T3} = 1.1e5$ ,  $d = 10$ ,  $b_1=0.01$ ,  $b_2=0.01$  och  $T = 4s$ .

Vi ser att systemet är nära en självsvängning men att den borde kunna undvikas (det existerar ju ingen skärning mellan kretsöverföring och beskrivande funktion). Vi simulerar systemet utan tidsspärr och med tidsfördröjningen 4 sek i båda riktningar. Resultat återfinns i figuren nedan.



Figur 4.4.3.2 Simulerat stegsvar 0 - 10 m med reg37.  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2000$ ,  $K_{T3} = 1.1e5$ ,  $d = 10$ ,  $b_1=0.01$ ,  $b_2=0.01$ ,  $k_{ra} = 2e-5$ ,  $t_{limit} = 0$ ,  $b = 1$ ,  $v_{delay}=0$ ,  $p_{delay}=0$ ,  $\delta_{t} = 4$ ,  $cn = 0.3$ .

Stegsvaret är snyggt men samtidigt framgår det att systemet självsvänger med en svängningstid  $T=22$  sek. Den svängningstid som Nicholsdiagrammet flaggar för är 18 sek. Att resultaten inte stämmer helt överens kan bero på integrationsmetod eller på att metoden med beskrivande funktion är en approximation.

För att undvika självsvängningar måste avståndet i Nicholsdiagrammet mellan beskrivande funktion och överföringsfunktionen ökas. Det kan åstadkommas på olika sätt.

- Vi kan ändra återkopplingsparametrarnas inbördes storlek.  
Det vill vi ogärna göra då det försämrar stegsvaret. Försök har vi gjort på dåliga resultat.
- Vi kan minska pumpkapaciteten.

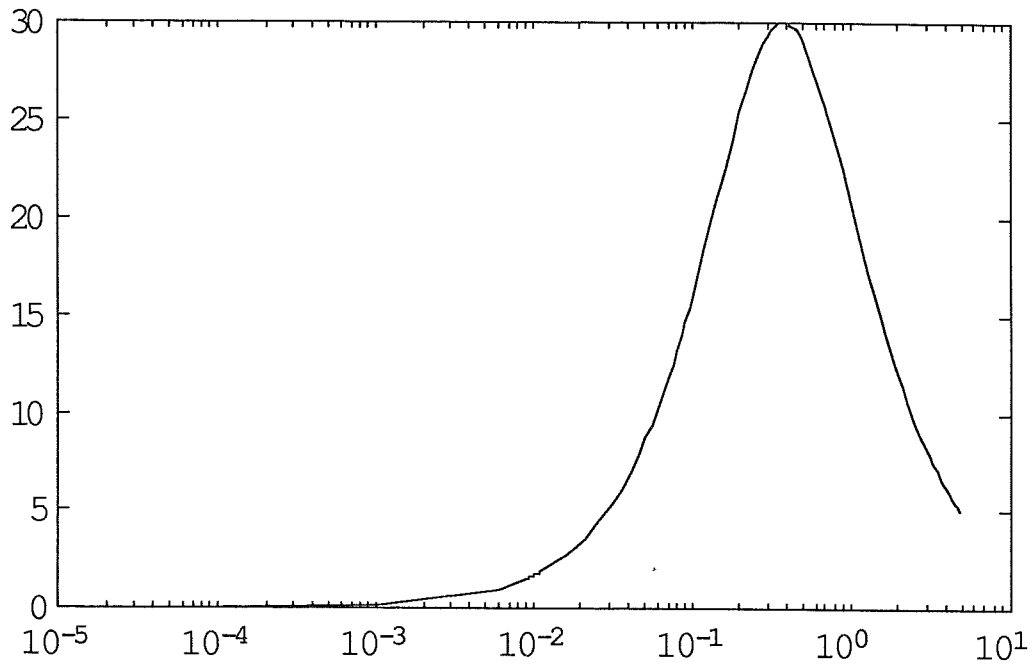
Får till följd att beskrivande funktion flyttas uppåt.

- Vi kan multiplicera hela kretsöverföringen med en faktor mindre än ett. Flyttar kretsöverföringen i Nicholsdiagrammet nedåt, men gör att det bestående felet ökar.
- Vi kan fasavancera med ett fasavancerande filter. Flyttar kretsöverföringen i Nichols åt höger vid en given frekvens.
- Vi kan minska förstärkningen med ett bandspärr-filter. Sänker kretsöverföringen i Nichols vid en given frekvens.

De två första alternativen har vi redan ägnat mycken möda och det tredje medför ett större kvarstående fel. Det mest naturliga är att nyttja det fjärde förslaget, att fasavancera med ett fasavancerande filter med överföringsfunktionen :

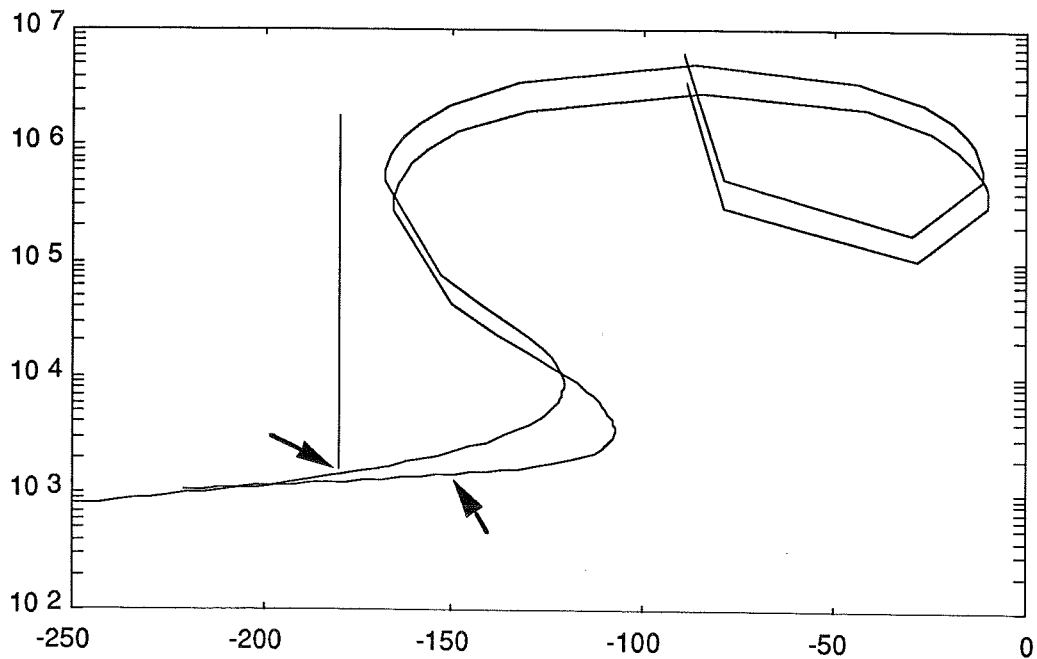
$$\frac{u}{u_1} = \frac{1 + T_d s}{\sqrt{b} \left( 1 + \frac{T_d}{b} s \right)}$$

Det har emellertid den nackdelen att systemets brus känslighet ökar. Vi dimensionerar filtret så att det ger ett faslyft på 30 grader vid vinkelfrekvensen 0.38 rad/sek, vilket motsvarar svängningstiden 17 sek och den punkt där kretsöverföringen nästan skär beskrivande funktion. Nedan visas ett fasavancerande filters faskarakteristik som funktion av frekvens.



Figur 4.4.3.3 Lead-filtrets faskarakteristik.

Vi visar systemet i ett Nicholsdiagram både med och utan fasavancering. Tidsfördröjningarna är 4 sekunder och det existerar ingen hysteres. Ingen tidsspärr har införts, det vill säga vi använder inte lågpassekvivalenten.



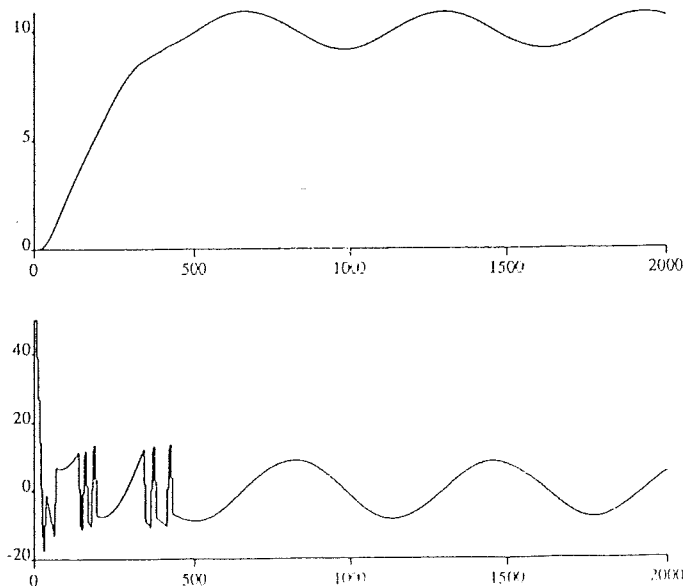
Figur 4.4.3.4 Nicholsdiagram över beskrivande funktion och kretsöverföring med och utan faskompensering 30 grader för  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2000$ ,  $K_{T3} = 1.1e5$ ,  $d = 10$ ,



$b_1=0.01$ ,  $b_2=0.01$  och  $T = 4s$ . Pilarna markerar korresponderande frekvenser före och efter kompensering.

Vi förstår av diagrammet att trots en kraftig faskompensering så har stabiliteten endast förbättrats marginellt. Det beror på att kurvan löper horisontellt vid dessa frekvenser. Simuleringar med regulator reg37 - koden återfinns i appendix F - där olika faskompenseringar vid olika frekvenser provats, visar på att lead-kompensering inte kan eliminera de bestående svängningarna.

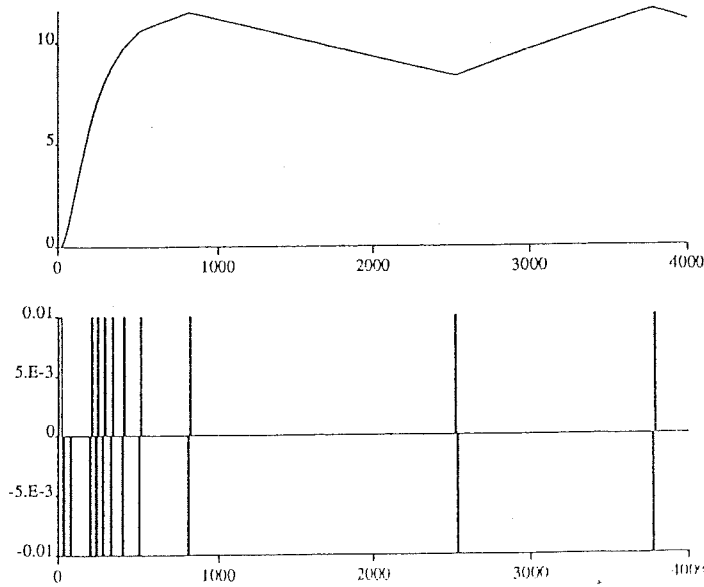
Vi går vidare med att prova alternativ 3 på tidigare sida, nämligen att multiplicera hela kretsöverföringen med en faktor mindre än ett. Detta måste vara en fungerande metod, då den flyttar ner hela kretsöverföringen, vilket i sin tur måste upphäva självsvängningarna, om faktorn görs tillräckligt liten. Nedan visas en simulering, där faktorn fkt valts till 0.5.



Figur 4.4.3.5 Simulerat stegsvar 0 - 10 m med reg37.  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2000$ ,  $K_{T3} = 1.1e5$ ,  $d = 10$ ,  $b_1=0.01$ ,  $b_2=0.01$ ,  $k_{ra} = 2e-5$ ,  $t_{limit} = 0$ ,  $b = 1$ ,  $v_{delay}=0$ ,  $p_{delay}=0$ ,  $\delta t=4$ ,  $cn=0.3$ ,  $fkt = 0.5$ .

Vi ser att systemet inte längre får några bestående svängningar men att stegsvaret inte är lika fint längre.

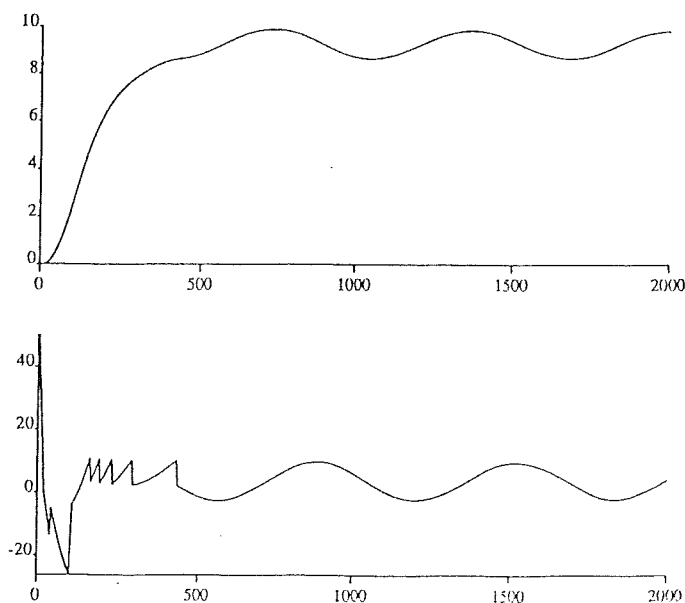
Vi genomför samma simulering men utan densitetsgradient.



Figur 4.4.3.5 Simulerat stegsvar 0 - 10 m med reg37.  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2000$ ,  $K_{T3} = 1.1e5$ ,  $d = 10$ ,  $b1=0.01$ ,  $b2=0.01$ ,  $k_{ra} = 2e-5$ ,  $t_{limit} = 0$ ,  $b = 1$ ,  $v_{delay}=0$ ,  $p_{delay}=0$ ,  $\delta t=4$ ,  $cn=0.3$ ,  $fkt = 0.5$ .

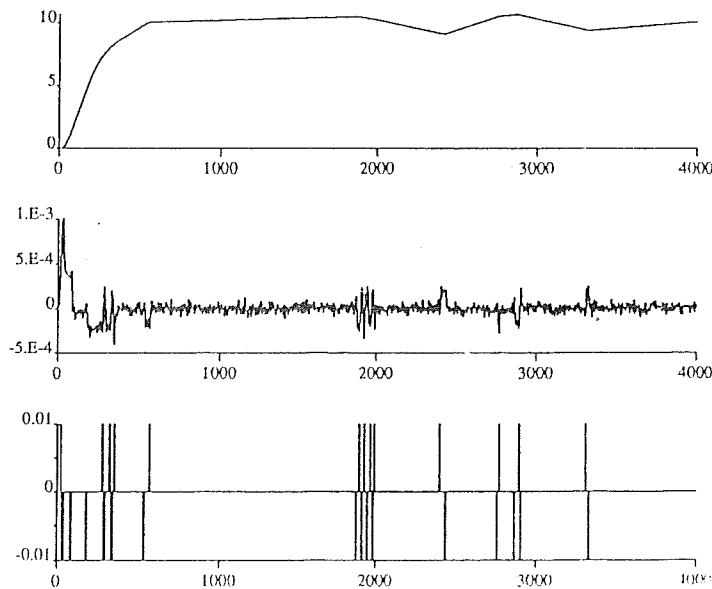
Vi ser att för det fall, då vi inte har någon densitetsgradient, blir stegsvaret acceptabelt. Emellertid sker pumptillslag oftare - var 20:e minut - för detta mer svårreglerade fall.

Slutligen visar vi en simulering gjord med det fullständiga systemet med tids-spärren på 60 sekunder och pump- och ventil-fördröjningarna realiserade. Vi låter multiplicera kretsöverföringen likt tidigare med faktorn 0.5. Vi nyttjar inte fasavancering.



Figur 4.4.3.6 Simulerat stegsvar 0 - 10 m med reg37 med densitetsgradient.  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2000$ ,  $K_{T3} = 1.1e5$ ,  $d = 10$ ,  $b1=0.01$ ,  $b2=0.01$ ,  $k_{ra} = 0$ ,  $t_{limit} = 60$ ,  $b = 1$ ,  $v_{delay}=2$ ,  $p_{delay}=4$ ,  $\delta t=0.5$ ,  $cn=0.3$ ,  $fkt = 0.5$ .

Vi visar också en simulering där vi lägger på brus i accelerationen och utan densitetsgradient.



Figur 4.4.3.7 Simulerat stegsvar 0 - 10 m med reg47 utan densitetsgradient och med brus i accelerationen.  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2000$ ,  $K_{T3} = 1.1e5$ ,  $d = 10$ ,  $b1=0.01$ ,  $b2=0.01$ ,  $k_{ra} = 0$ ,  $t_{limit} = 0$ ,  $b = 1$ ,  $v_{delay} = 2$ ,  $p_{delay} = 4$ ,  $\delta t = 0.5$ ,  $cn = 0.3$ ,  $fkt = 0.5$ ,  $noise3 = 4e-5$ .

Den femte metoden, som nämndes på tidigare sida, där vi föreslog ett bandspärrfilter, innebär att vi vid den känsliga frekvensen sänker förstärkning, för att öka avståndet mellan beskrivande funktion och kretsöverföringen. Svårigheten med att konstruera ett sådant filter ligger i att, för att resonemanget skall ha relevans, filtret inte får vara fasvidande. Vi kommer inte att penetrera detta problem utan lämnar det öppet för fortsatta studier.

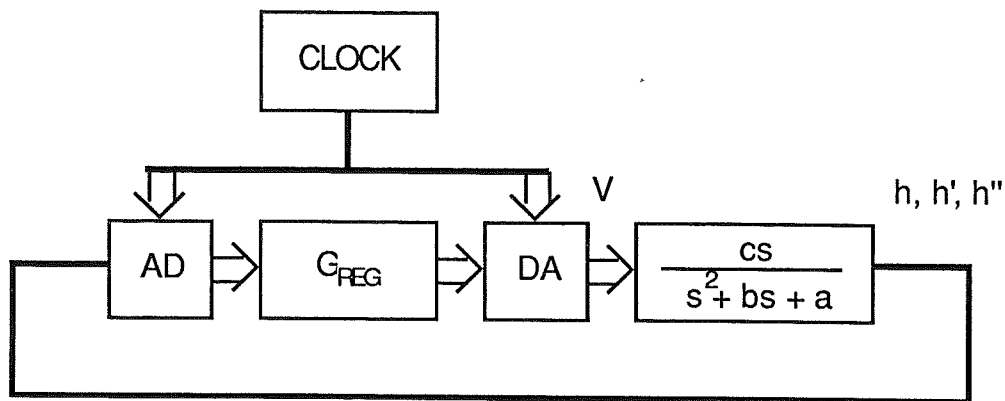
#### **4.4.4 Sammanfattning av regulator med hysteres och tidsspärr**

Om vi ska föredra något av de hittills framtagna styrsystemen, bör det stå ganska klart att vi rekommenderar 1 - 1 fallet. Detta fall är i grunden snällare att reglera än 1 - 10 fallet, framförallt beroende på symmetrin i flödet, och har inte de problem beträffande egensvängning i styrsignalen som vi fann i 10 - 10 fallet. Vi minns att den bestående egensvängningen dessutom indirekt bidrar till en annan negativ bieffekt, nämligen ett konstant fel i djup.

En väl tilltagen flödeskapacitet innebär dyrare utrustning i form av större dimensioner på pumpar, ventiler, rör och annan hårdvara. Dessutom innebär ökat flöde en förhöjd ljudnivå. Därför bör det ligga i uppdragsgivarens intresse att hålla sig till en så låg flödeskapacitet som möjligt.

## 4.5 Samplat system

Ett av kraven på styrsystemet är att pumpen inte får starta oftare än en gång per minut. Det kravet har vi hitintills tillgodosett genom införandet av tidsspärr, vilket i sin tur inneburit försämrad stabilitet och gjort systemet mer svår-analyserat. Ett helt annorlunda sätt att närma sig problemet på är att se det hela som ett samplat system med samplingstiden 60 sekunder. En gång i minuten tittar vi på ubåten och utifrån dess värden på djup, djuphastighet och djupacceleration bestämmer vi hur mycket vatten som skall pumpas in i tanken. På så vis kommer tidskravet automatiskt att tillgodoses. Vi vill alltså ha ett system likt figuren nedan.



Figur 4.5.1.1 Blockschema över systemet

Följande kapitel handlar om hur vi analyserar ett samplat system och om hur vi kommer fram till en diskret regulator. I appendix E finns att läsa allmänt om samplade system.

### 4.5.1 Vårt samplade system

Ett av problemen med realisering av en regulator är att pumpen är av till-från typ. Vi kan inte vid samplingstillfället bestämma vattenflödet under den kommande minuten. Flödet kan ju bara inta tre lägen. Däremot kan vi bestämma den önskade volymen och pumpa tills vi uppnått den.

#### 4.5.1.1 Approximation med styckvis konstant volym

Det linjäriserade systemets rörelseekvation lyder :

$$h'' = -ah - bh' + cV$$

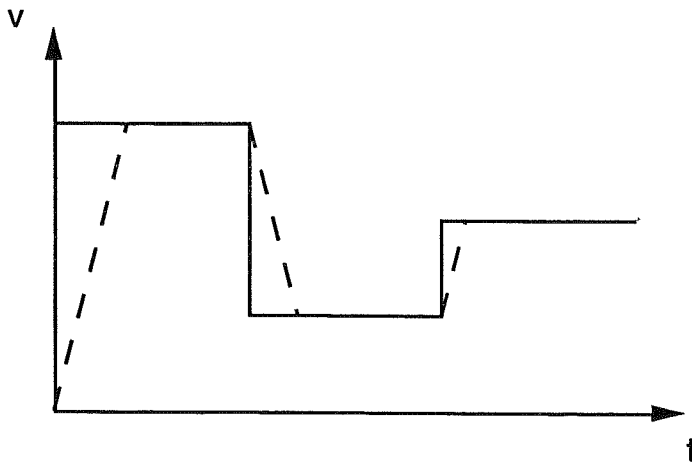
där:

$$a = k_{10} = 10^{-4}$$

$$b = k_{11} = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$c = k_{12} = 5 \cdot 10^{-3}$$

I varje samplingsögonblick bestämmer regulatorn en önskad volym,  $V$ . Vi pumpar fullt tills volymen är uppnådd och därefter stängs pumpen av. Vi betraktar  $V$  som konstant inom intervallet. Förutsatt att detta är sant kan systemet analyseras fullständigt.



Figur 4.5.1.2 Heldragen linje - önskad volym, streckad linje - verklig volym.

Det ligger alltså en approximation i att volymen är styckvis konstant. Om önskad volymändring är liten i förhållande till pumpkapaciteten, så kan man anta att approximationen är godtagbar. Se figur 4.5.1.2.

Ett annat sätt att se systemet på, är att istället för att bestämma volymen, bestämma volymsändringen vid varje samplingstillfälle. Detta behandlas dock ej här.

#### 4.5.1.2 Tillståndsekvationer

$$h'' = -ah - bh' + cV$$

$$x_1 = h$$

$$x_2 = h'$$

$$u = V$$

Allmän form :

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$x_1' = \quad x_2$$

$$x_2' = -ax_1 - bx_2 + cu$$

$$y = x_1$$

där :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Om vi samplar systemet vid tidpunkterna  $t_n$  och antar en konstant insignal,  $V$ , mellan samplingsintervallen, så kan, enligt Computer Controlled Systems, sid. 34 - 38, av K. J. Åström och B. Wittenmark, systemet skrivas på formen :

$$x(t_{n+1}) = \Phi(t_s)x(t_n) + \Gamma(t_s)u(t_n)$$

$$y(t_n) = Cx(t_n) + Du(t_n)$$

där :

$$\Phi(t_s) = e^{At_s}$$

$$\Gamma(t_s) = \int_0^{t_s} e^{A\tau} d\tau B$$

och :

$$t_s = t_{n+1} - t_n$$

Vi vill beräkna  $\Phi$  och  $\Gamma$ . Beräkningarna finns beskrivna i appendix E och ger

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.8260 & 56.127 \\ -0.005612 & 0.8148 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 8.6986 \\ 0.2806 \end{bmatrix}$$

Systemet kan alltså skrivas :

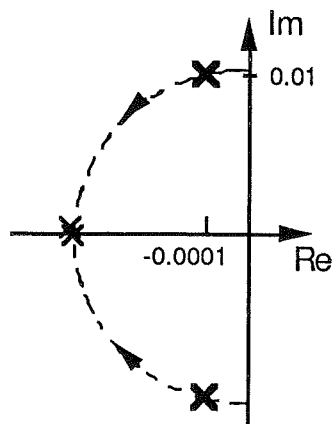
$$x(t_{n+1}) = \Phi x(t_n) + \Gamma u(t_n)$$

Problemet med att bestämma en bra regulator kan lösas med hjälp av polplacering. Om vi bestämmer en lämplig styrlag har vi faktiskt möjlighet att placera det slutna systemets poler precis var som helst. Vi börjar med att undersöka det öppna systemets poler.

#### 4.5.1.3 Systemets poler

Systemets poler är lika med systemets egenvärden och dessa har redan bestämts i appendix E i det tidskontinuerliga fallet :

$$s_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm j\sqrt{a - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = -10^{-4} \pm j10^{-2}$$



Figur 4.5.1.3 Kontinuerliga systemets poler och hur man förslagsvis placerar dem.

Vi ser i figur 4.5.1.3 att systemet egensvängningsfrekvens är 0.01 rad/s, vilket motsvarar en egensvängningstid  $T = 628$  sekunder.. Avståndet mellan origo och polerna är ett mått på systemets snabbhet. En bra tumregel när man polplacerar är att man ser till att behålla samma avstånd för det slutna systemets poler som för det öppna. Det är ett sätt att bibehålla systemets snabb-



het med minimal regulatorverkan. I vårt fall är vi intresserade av ett system som inte har några överslängar men ändå är snabbt. Därför placerar vi lämpligen våra poler på realaxeln med :

$$s_{1,2} = -0.01$$

enligt figur 4.5.1.3.

Om samplingsfrekvensen är hög så kan de kontinuerliga polernas motsvarighet i det diskreta fallet uppskattas med :

$$z = e^{-st_s}$$

där z är den diskreta motsvarigheten till Laplacevariabeln s. Det ger :

$$z_{1,2} = e^{-0.01 \cdot 60} = 0.55$$

En grov allmän rekommendation är att polerna ska hamna någonstans i intervallet 0.5 till 0.8. Hur ligger då det öppna systemets poler i z-planet?

Vi börjar med att ta fram överföringsfunktionen :

$$H(z) = \frac{x_1}{u}$$

Enligt tidigare gäller :

$$x(t_{n+1}) = \Phi x(t_n) + \Gamma u(t_n)$$

eller på fullständig form :

$$(1) \quad x_1(n+1) = \Phi_{11}x_1(n) + \Phi_{12}x_2(n) + \Gamma_1 u(n)$$

$$(2) \quad x_2(n+1) = \Phi_{21}x_1(n) + \Phi_{22}x_2(n) + \Gamma_2 u(n)$$

$$(1) \Rightarrow x_2(n) = \frac{x_1(n+1)}{\Phi_{12}} - \frac{\Phi_{11}x_1(n)}{\Phi_{12}} - \frac{\Gamma_1 u(n)}{\Phi_{12}} \Rightarrow$$

$$x_2(n+1) = \frac{x_1(n+2)}{\Phi_{12}} - \frac{\Phi_{11}x_1(n+1)}{\Phi_{12}} - \frac{\Gamma_1 u(n+1)}{\Phi_{12}}$$

Insättning i (2) ger :

$$\frac{x_1(n+2)}{\Phi_{12}} - \frac{\Phi_{11}x_1(n+1)}{\Phi_{12}} - \frac{\Gamma_1 u(n+1)}{\Phi_{12}} =$$

$$\Phi_{21}x_1(n) + \frac{\Phi_{22}x_1(n+1)}{\Phi_{12}} - \frac{\Phi_{11}\Phi_{22}x_1(n)}{\Phi_{12}} - \frac{\Gamma_1\Phi_{22}u(n)}{\Phi_{12}} + \Gamma_2 u(n)$$

Omskrivning ger :

$$x_1(n) = x_1(n-1)(\Phi_{11} + \Phi_{22}) + x_1(n-2)(\Phi_{21}\Phi_{12} - \Phi_{11}\Phi_{22}) + u(n-1)\Gamma_1$$

$$+ u(n-2)(\Gamma_2\Phi_{12} - \Gamma_1\Phi_{22})$$

Z-transformering ger :

$$x_1[1 - z^{-1}(\Phi_{11} + \Phi_{22}) - z^{-2}(\Phi_{21}\Phi_{12} - \Phi_{11}\Phi_{22})] =$$

$$u[z^{-1}\Gamma_1 + (\Gamma_2\Phi_{12} - \Gamma_1\Phi_{22})z^{-2}]$$

$$\frac{x_1}{u} = \frac{z^{-1}\Gamma_1 + z^{-2}(\Gamma_2\Phi_{12} - \Gamma_1\Phi_{22})}{1 - z^{-1}(\Phi_{11} + \Phi_{22}) - z^{-2}(\Phi_{21}\Phi_{12} - \Phi_{11}\Phi_{22})}$$

Insättning av värden ger :

$$\frac{x_1}{u} = \frac{z^{-1} 8.6986 + z^{-2} 8.6635}{1 - z^{-1} 1.6408 + z^{-2} 0.9881}$$

Vi ser att överföringsfunktionen förutom sina två poler också har ett nollställe.

Poler :

$$1 - z^{-1} 1.6408 + z^{-2} 0.9881 = 0 \Rightarrow$$

$$z^2 - z^1 1.6408 + 0.9881 = 0 \Rightarrow$$

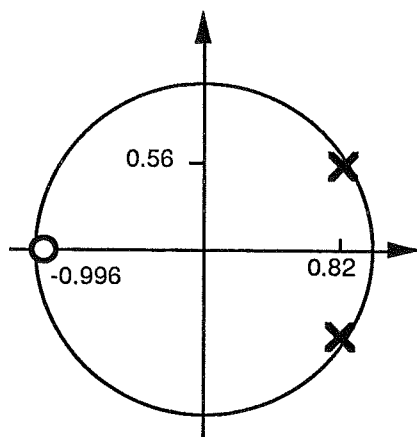
$$z_{1,2} = 0.82 \pm j0.56$$

Nollställe :

$$z^{-1} 8.6986 + z^{-2} 8.6635 = 0 \Rightarrow$$

$$z^1 8.6986 + 8.6635 = 0 \Rightarrow$$

$$z = -0.996$$



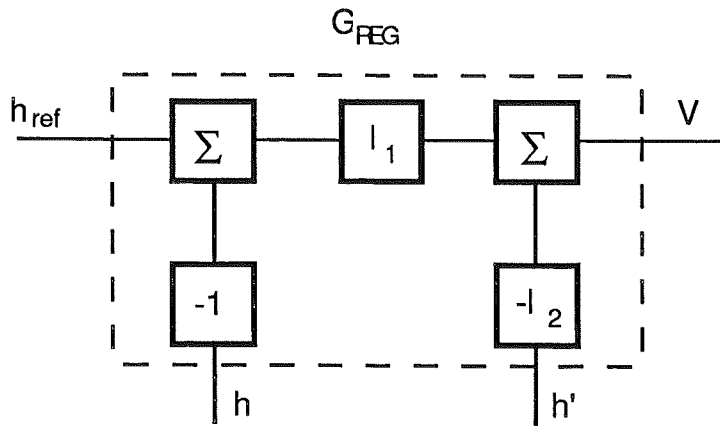
Figur 4.5.1.4 Poler och nollställe för vårt system.

Systemets polnollställeskonfigurationen visas i figur 4.5.1.4.

#### 4.5.1.4 Återkoppling av djup och djuphastighet

På något sätt vill vi reglera systemet så att det blir snabbt men ändå undviker överslängar samtidigt som vi har rimliga styrsignaler. Enligt tidigare uppfylls dessa tre krav om vi polplacerar i  $z_{1,2} = 0.55$ . Nästa steg i framtagande av regulator är således polplacering. Vi tänker oss att vi återkopplar våra tillstånd  $x_1 = h$  och  $x_2 = h'$  med återkopplingsparametrarna  $l_1$  resp  $l_2$ . Det ger en styrlag :

$$u = -l_1 x_1 - l_2 x_2 = - [l_1 \ l_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -L \cdot x$$



Figur 4.5.1.5 Regulator med återkoppling av djup och djuphastighet.

Insättning i :

$$x(t_{n+1}) = \Phi x(t_n) + \Gamma u(t_n)$$

ger :

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Gamma_1 l_1 & \Gamma_1 l_2 \\ \Gamma_2 l_1 & \Gamma_2 l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi_{11} - \Gamma_1 l_1 & \Phi_{12} - \Gamma_1 l_2 \\ \Phi_{21} - \Gamma_2 l_1 & \Phi_{22} - \Gamma_2 l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

$$= M \cdot x$$

Systemets karakteristiska ekvation är :

$$\det(zI - M)$$

Och dess egenvärden eller poler beräknas ur :

$$\det(zI - M) = 0$$

Det ger :

$$\det(zI - M) = \begin{vmatrix} z - \Phi_{11} + \Gamma_1 |_1 & -\Phi_{12} + \Gamma_1 |_2 \\ -\Phi_{21} + \Gamma_2 |_1 & z - \Phi_{22} + \Gamma_2 |_2 \end{vmatrix}$$
$$= z^2 + z(-\Phi_{22} + \Gamma_2 |_2 - \Phi_{11} + \Gamma_1 |_1) +$$
$$(-\Phi_{11} + \Gamma_1 |_1)(-\Phi_{22} + \Gamma_2 |_2) - (-\Phi_{12} + \Gamma_1 |_2)(-\Phi_{21} + \Gamma_2 |_1)$$

Antag att vi vill ha karakteristiska ekvationen :

$$z^2 + p_1 z + p_2 = 0$$

vilket ger :

$$p_1 = \Gamma_1 |_1 + \Gamma_2 |_2 - \Phi_{11} - \Phi_{22}$$

$$p_2 = (-\Phi_{11} + \Gamma_1 |_1)(-\Phi_{22} + \Gamma_2 |_2) - (-\Phi_{12} + \Gamma_1 |_2)(-\Phi_{21} + \Gamma_2 |_1)$$

$$= |_1 (-\Phi_{22} \Gamma_1 + \Phi_{12} \Gamma_2) + |_2 (-\Phi_{11} \Gamma_2 + \Phi_{21} \Gamma_1) + \Phi_{11} \Phi_{22} - \Phi_{12} \Phi_{21}$$

Insättning av siffror ger :

$$p_1 = 8.6986 |_1 + 0.2806 |_2 - 1.6408$$

$$p_2 = 8.6620 |_1 - 0.2806 |_2 + 0.9880$$

vilket i sin tur ger :

$$|_1 = \frac{(p_1 + p_2)}{17.4} + 0.037$$

$$|_2 = 1.79 (p_1 - p_2) + 4.69$$

Med poler i  $z_1$  och  $z_2$  gäller att karakteristiska ekvationen :

$$z^2 + p_1 z + p_2 = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2$$

$$p_1 = -(z_1 + z_2)$$

$$p_2 = z_1 z_2$$

Sätter vi in uttrycket i ekvationen får vi :

$$l_1 = \frac{-z_1 - z_2 + z_1 z_2}{17.4} + 0.037$$

$$l_2 = 1.79 (-z_1 - z_2 - z_1 z_2) + 4.69$$

Man ser att om systemet återkopplas med  $h$  och  $h'$ , så kan vi placera våra poler godtyckligt genom att välja rätt återkopplingskoeffecienter. Vi väljer enligt tidigare :

$$z_{1,2} = 0.55$$

Det ger :

$$l_1 = -0.008$$

$$l_2 = 2.18$$

Tydligen ger vår tidigare uppskattning av polerna inget lämpligt val, då återkopplingen av djupet blir positiv. Det innebär, att vi försöker göra systemet långsammare än vad det egentligen är. Om ubåten ligger fel i djup, så kommer den utan reglering att ta sig tillbaka till sitt rätta djup förutsatt att den från början är balanserad. Om vi återkopplar djupet negativt, så kommer den att ta sig tillbaka snabbare, och om vi återkopplar positivt, så kommer regulatorn att bromsa ubåten genom att lägga på en kraft i fel riktning. För att få en negativ återkoppling av djupet måste vi flytta polerna längre åt vänster. Vi väljer exempelvis :

$$z_{1,2} = 0.30$$

vilket ger :

$$I_1 = 0.017$$

$$I_2 = 3.90$$

och

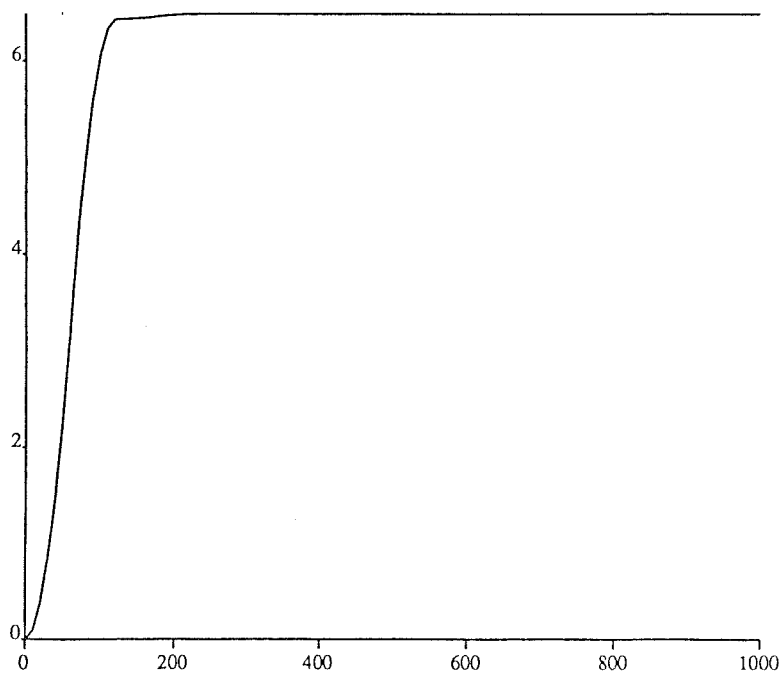
$$z_{1,2} = 0$$

vilket ger :

$$I_1 = 0.037$$

$$I_2 = 4.69$$

Vi simulerar förloppen och simuleringarna återfinns i appendix D. Den sista simuleringen visas även i figur 4.5.1.6.



Figur 4.5.1.6 stegsvar 0-10 m då  $I_1 = 0.037$  och  $I_2 = 4.69$  .  $z_{1,2} = 0$ .

Vi ser att ett konstant fel uppstår. Det är vi intresserade av att minimera.

#### 4.5.1.5 Om konstanta felet

Vi kan undvika det konstanta felet genom att välja en annan styrlag.

$$V = I_r h_{ref} - I_1 h - I_2 h'$$

Med det linjäriserade systemets rörelseekvation :

$$h'' = -ah - bh' + cV$$

fås :

$$h'' + h'(b + cI_2) + h(a + cI_1) = cI_r h_{ref}$$

Det ger ett statiskt fel :

$$(1) \quad \frac{h}{h_{ref}} = \frac{I_r}{I_1 + \frac{a}{c}}$$

Om man väljer :

$$(2) \quad I_r = I_1 + \frac{a}{c}$$

så medför det att :

$$\frac{h}{h_{ref}} = 1$$

och således får vi inget konstant fel. Det förutsätter emellertid att  $a$  inte är föränderlig. Om systemet ska vara okänsligt för variationer i  $a = k_1 0$ , så ska enligt ekvation (2)  $I_1$  vara stor. Det största värdet vi kan få på  $I_1$  med bibehållen stabilitet och polerna på högra sidan<sup>1</sup> är då vi använder deadbeatregulator<sup>2</sup> och då är enligt figur 4.5.1.6 :

$$I_1 = 0.037$$

Det ger i sin tur med ekvation (2) :

$$I_r = 0.037 + \frac{1e-4}{5e-3} = 0.057$$

<sup>1</sup>Att placera polerna på vänstra sidan är inte att rekommendera då det ger upphov till onödiga oscillationer och höga styrsignaler.

<sup>2</sup>Innebär att samtliga poler ligger i origo.



I sämsta fall gäller :

$$a = 0$$

och ekvation (1) ger :

$$\frac{h}{h_{\text{ref}}} = \frac{I_r}{I_1} = \frac{0.057}{0.037} = 1.54$$

vilket motsvarar ett konstant fel på 50%. Det är inte tilltalande. Dessutom blir styrsignalerna mycket stora. Vi löser problemet genom att införa en integrerande term.

#### 4.5.1.6 Införande av integrationsterm

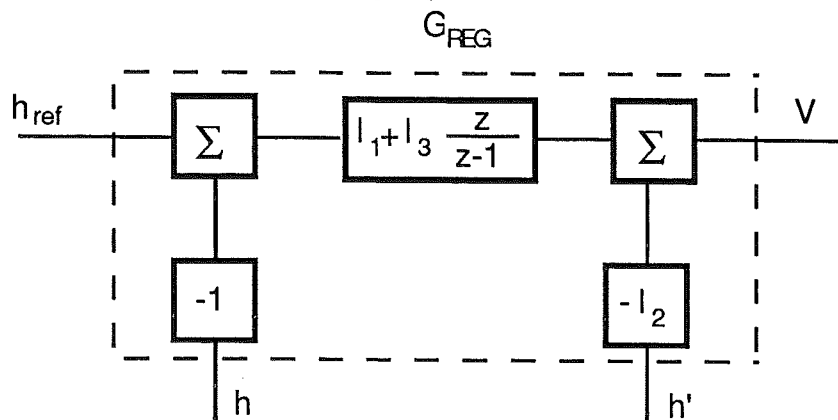
Konstanta fel kan elimineras om man väljer en styrlag som tar hänsyn till om det under en längre tid har funnits ett konstant fel på signalen. Det implementeras som bekant enklast genom att införa en term som integrerar felet i djup. En analog integrator :

$$H_i(s) = \frac{1}{s}$$

motsvaras tidsdiskret av :

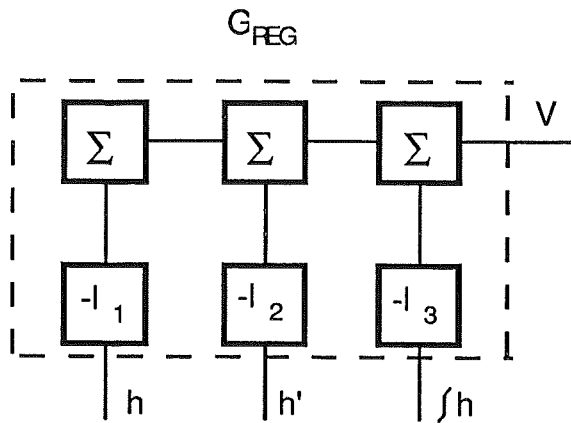
$$H_i(z) = \frac{z}{z-1}$$

Vi vill alltså ha en regulator enligt figuren nedan.



Figur 4.5.1.7 Regulator med integralverkan och med återkoppling av djup och djuphastighet.

Tills vidare antar vi att integralen av felet på förhand finns tillgänglig och med  $h_{ref} = 0$  ser systemet ut enligt nedan.



Figur 4.5.1.8 Regulator med återkoppling av djup, djuphastighet och integralen av djupet.  $h_{ref} = 0$ .

För att kunna nyttja polplacering inför vi integralen av felet som ett tillstånd och våra nya tillståndsekvationer blir med :

$$h'' = -ah - bh' + cV$$

$$x_1 = h$$

$$x_2 = h'$$

$$x_3 = \int h$$

$$u = V$$

ger :

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = -ax_1 - bx_2 + cu$$

$$x_3' = x_1$$

Allmän form :

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

där :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Samplas systemet med  $t_s = 60$  sek fås :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.80 & 56.1 & 0 \\ 0 & 0.80 & 0 \\ 56.5 & 1740 & 1.00 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 8.670 \\ 0.281 \\ 176.3 \end{bmatrix}$$

likt tidigare gäller :

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) &= \Phi(t_{n+1}, t_n)x(t_n) + \Gamma(t_{n+1}, t_n)u(t_n) \\ y(t_n) &= Cx(t_n) + Du(t_n) \end{aligned}$$

De räkningar vi utfört hittills har förutsatt att  $a = k_{10} = 10^{-4}$ . Vi vet emellertid att det är en föränderlig parameter, som under kritiska omständigheter kan antaga värdet  $a = 0$ . Därför är det också intressant för oss att ta fram  $\Gamma$  och  $\Phi$  för detta fall.

För  $a = 0$  fås :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1.00 & 59.6 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 60.0 & 1793 & 1.00 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 8.964 \\ 0.298 \\ 179.4 \end{bmatrix}$$

Vi har kommit så långt, att vi definierat det system som vi vill reglera och de tillstånd vi vill återkoppla. Att dessa återkopplingar är tillräckliga för att fritt kunna bestämma polernas lägen har vi redan konstaterat. Således återstår

valet av polplacering. Innan vi ger oss in på det vill vi säga ett par ord om en eventuell återkoppling av accelerationen.

#### 4.5.1.7 Allmänt om återkoppling av $h''$

##### 4.5.1.7.1 Analogi med fjäder

Vårt linjäriserade systems rörelseekvation lyder :

$$h'' = -ah - bh' + cV$$

Om vi multiplicerar med en konstant massa  $m$  fås kraftekvationen :

$$mh'' = -amh - bmh' + cmV$$

som kan jämföras med fjäderekvationen :

$$m\ddot{x} = -kx - d\dot{x} + F$$

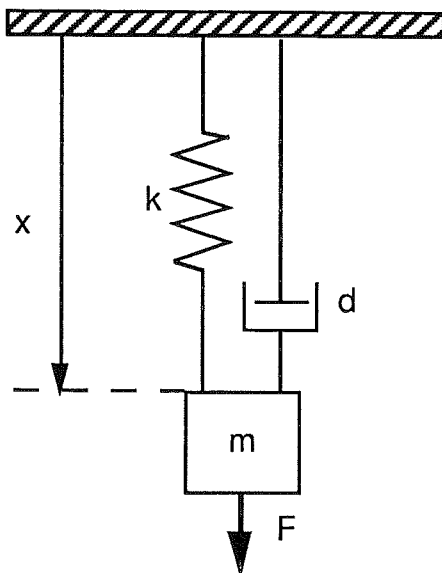
där

$m$  är massan

$k$  är fjäderkonstanten

$d$  är en dämpnings konstant

$F$  är på systemet applicerad kraft



Figur 4.5.1.9 Massa upphängd i fjäder och viskös dämpare.

Man vill reglera fjädern med en styrlag :

$$F = -I_H \ddot{x} - I_V \dot{x} - I_A \ddot{x}$$

insättning ger :

$$m\ddot{x} = -kx - d\dot{x} - I_H \ddot{x} - I_V \dot{x} - I_A \ddot{x}$$

och

$$\ddot{x}(m+I_A) = -x(k+I_H) - \dot{x}(d + I_V)$$

Man konstaterar att en återkoppling av läget motsvarar en ökning av fjäderkonstanten, en återkoppling av hastigheten motsvarar en större dämpning och en återkoppling av accelerationen motsvarar en större massa, vilket i sin tur innebär, att systemet blir mindre känsligt för masstörningar. Om en fluga exempelvis sätter sig på massan kommer systemet att påverkas mindre om massan är stor, eller analogt med ubåten - om en torped avfyras, så att ubåtens massa minskar blir påverkan mindre om man har en hög återkoppling av djupaccelerationen. Å andra sidan innebär en större massa, att systemet blir trögare. Man kan leka med tanken att återkoppla accelerationen positivt, med följd att den skenbara massan minskar. Om man väljer :

$$I_A = -m$$

blir rörelseekvationen :

$$\dot{x}(d + I_V) = -x(k+I_H)$$

vilket är ett första ordningens system. En sådan accelerationsåterkoppling skulle emellertid göra systemet otroligt känsligt för störningar, samtidigt fås ofantligt stora styrsignaler. Vi bryr oss inte om att presentera några simuleringar utan nöjer oss med att nämna för läsaren, att vi inte påvisat några positiva effekter då vi återkopplat accelerationen.

En förutsättning för att vår analys är riktig är att volymen är styckvis konstant. I själva verket är fallet inte så. Vad vi istället måste göra är att i varje samplingsögonblick bestämma den tid som vatten ska tas in eller ut för att nå den önskade volymen. Det förutsätter att vi vet hur stor volymen är i samplingsögonblicket. Volymen måste alltså mätas. En återkoppling av djupacceleration är i

mångt och mycket likvärdigt med en återkoppling av volymen. Det förstår man ur följande resonemang.

Rörelseekvation :

$$h'' = -ah - bh' + cV$$

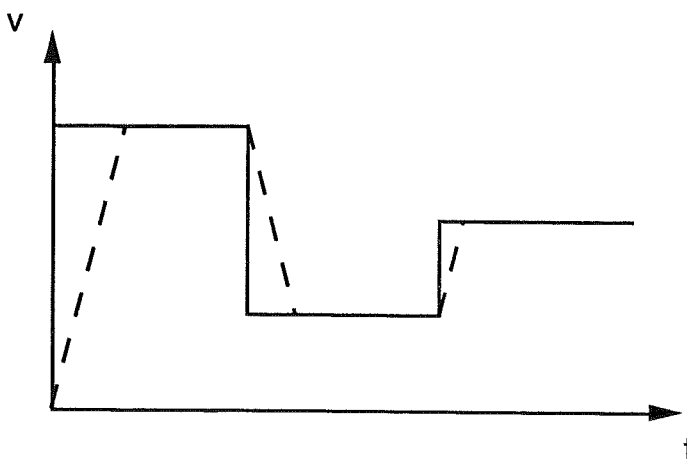
Lös ut V :

$$V = \frac{h'' + ah + bh'}{c}$$

Om  $h$ ,  $h'$  och  $h''$  är kända kan alltså volymen beräknas, förutsatt att parametrarna  $a$ ,  $b$ ,  $c$  är kända.

#### 4.5.1.8 Om approximationens giltighet

Vi har under hela analysen förutsatt att volymen är konstant under ett samplingsintervall. Det är inte sant men låt oss anta, att det är en god approximation.



Figur 4.5.1.10 Heldragen linje - önskad volym, streckad linje - verklig volym

Om ändringen av styrsignalen - önskad volym - i ett samplingsögonblick är stor så kommer approximationen att vara dålig. När vi bestämmer oss för lämpliga återkopplingsparametrar, så är ett av våra önskemål att påverkan av förändringar i  $a = k_{10}$  är små. Vad innebär då det?

Rörelseekvationen säger :

$$h'' = -ah - bh' + cV$$

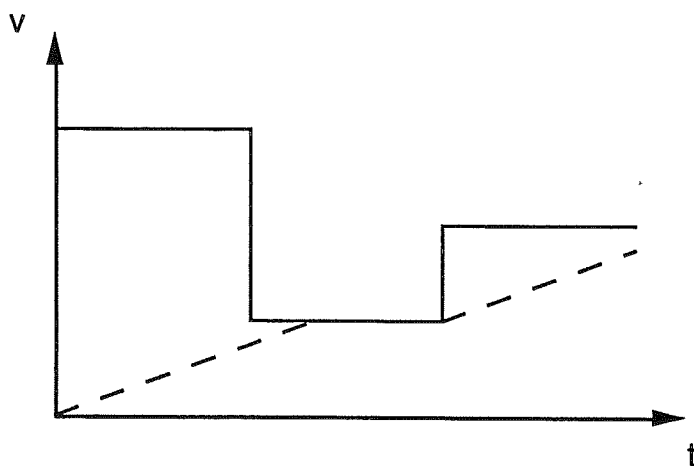
Antag en styrlag :

$$V = -I_1 h + V_1$$

Insättning ger :

$$h'' = -h(a + cI_1) - bh' + cV_1$$

Återkoppling av djupet är således avgörande för oberoende av  $a = k_{10}$ . Ett stort värde på djupåterkopplingen  $I_1$  innebär emellertid att ändringar i styrsignalerna blir stora och då gäller ej längre vår approximation. Se figur 4.5.1.11.



Figur 4.5.1.11 Heldragen linje - önskad volym, streckad linje - verklig volym

Anta att rätt volym ska ha uppnåtts efter högst 10 % av samplingsintervallet, dvs 6 sekunder, för att approximationen ska vara godkänd. Låt oss samtidigt anta, att för att regulatoren ska klara både  $a = 0$  och  $a = 1e-4$ , så ska  $cI_1$  i ekvationen ovan vara minst tio gånger större än  $a = k_{10}$ . Dvs :

$$cI_1 > 10 \cdot a \Rightarrow$$

$$I_1 > 0.2$$

Om vi vill att systemet ska klara en stegsvar från 0 till 10 meter blir önskad volym vid  $t = 0$  :

$$I_1(h_{ref} - h) = 0.2 \cdot 10 = 2 \text{ m}^3$$

Med pumpkapaciteten 10 liter per sekund blir tiden :

$$\frac{2}{0.01} = 200s$$



vilket är alldeles för mycket. Lösningen av problemet måste således bli en jämkning mellan olika krav.

Antag att istället att en stigtid på 30 % eller 18 sekunder är tillåtet och att vi vill klara ett steg från 0 till 10 meter med en pumpkapacitet,  $q$ , på 10 liter per sekund. Det ger en tillåten volymändring :

$$\begin{aligned}\Delta V &= q t = I_1 (h_{ref} - h) \\ 0.01 \cdot 18 &= I_1 \cdot 10 \Rightarrow \\ I_1 &= 0.018\end{aligned}$$

Vidare ger det att :

$$cI_1 = 0.005 \cdot 0.018 \approx 0.9e-4$$

vilket är i samma storleksordning som  $a = 1e-4$  och därför blir systemet också känsligt för variationer i  $a$ . När vi ägnar oss åt polplacering kan vi misstänka att lösningar med  $I_1 \gg 0.018$  gör approximationen dålig, och systemet kommer inte längre att reagera som vi väntat.

#### 4.5.1.9 Polplacering

Att polplacera är en enkel och rak metod som gör sig bra, då parametrarna är välbestämda, då systemet saknar fördröjningar, och då det inte finns något som begränsar styrsignalens derivator. I vårt fall uppfylls inget av dessa tre önskemål. Parametrarna är dåligt bestämda och dessutom föränderliga. Fördröjningarna är små men de finns. Och framförallt är momentana förändringar i volymen omöjliga.

Vi bestämmer oss för följande tillvägagångssätt.

- i) Bestäm genom polplacering  $I_1$ ,  $I_2$  och  $I_3$  för  $a = 1e-4$ .
- ii) Undersök vad det innebär för polerna då  $a = 0$ .
- iii) Simulera stegsvar med styckvis konstant volym. Gå tillbaks till i) om det är dåligt.
- iiii) Simulera stegsvar i den fullständiga modellen. Gå tillbaks till i) om det är dåligt.

Vi upprepar proceduren åtskilliga gånger, innan vi prickar in en lösning, som vi tror är den bästa. I appendix D presenteras tre stegsvar för olika polpla-

ceringar med tillhörande styrsignal - önskad volym - samt verklig volym för  $a = k_{10} = 0$  och  $a = k_{10} = 1e-4$ . Vi bestämmer oss för polplaceringen :

$$z_{1,2} = 0.4$$

$$z_3 = 0.6$$

vilket ger polerna då  $a = 0$  :

$$z_{1,2} = 0.82 \pm 0.35$$

$$z_3 = 0.045$$

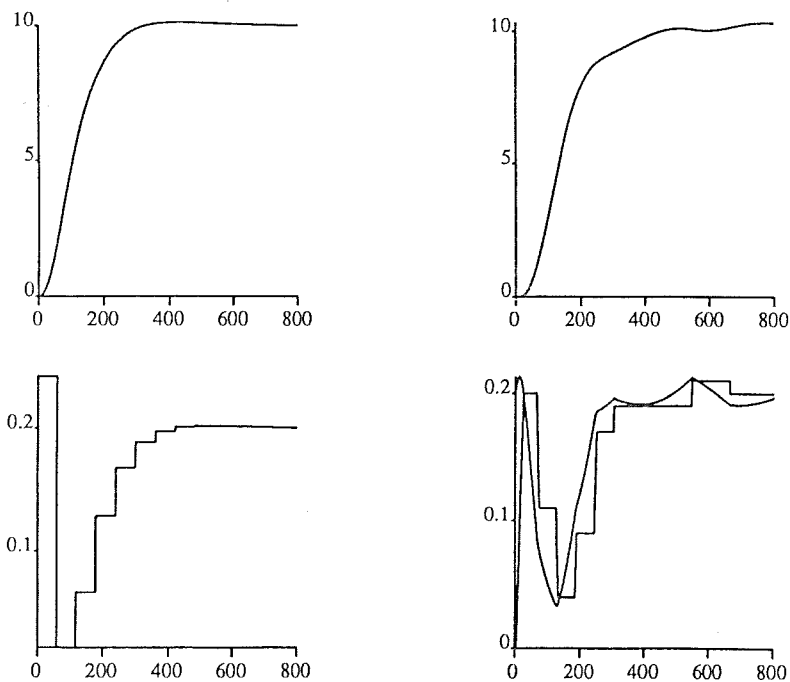
och återkopplingsparametrarna :

$$l_1 = 0.0201$$

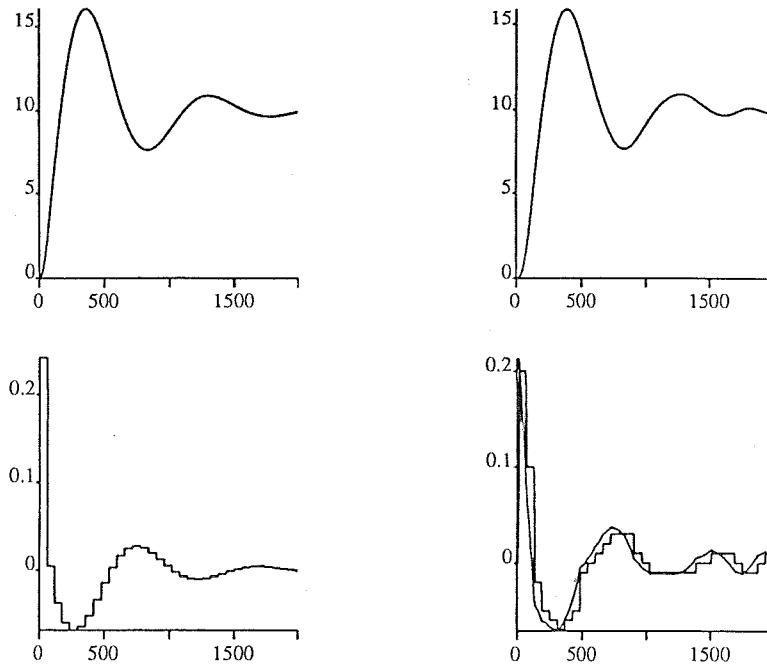
$$l_2 = 3.71$$

$$l_3 = 1.38e-4$$

Nedan visas stegsvar från 0 till 10 meter för vårt val.



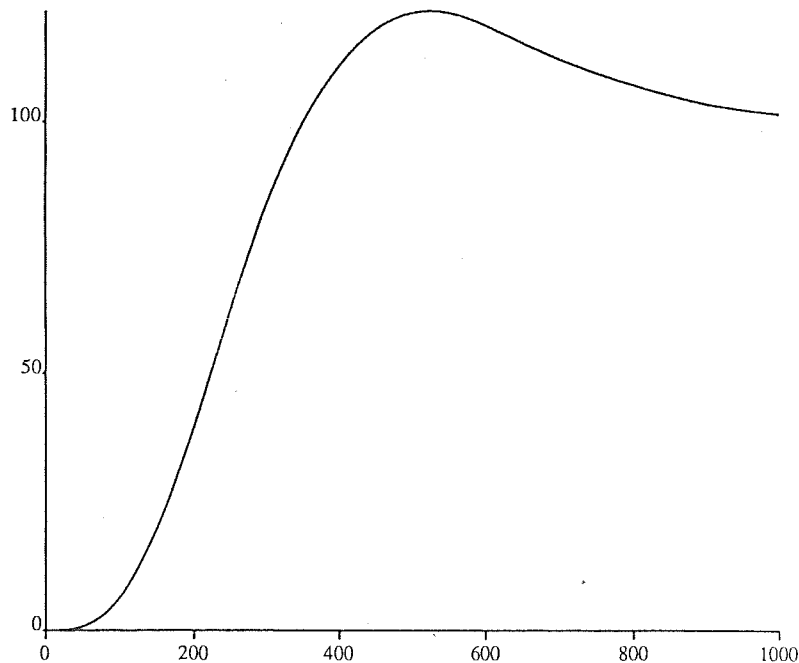
Figur 4.5.1.12 Stegsvär 0 - 10 m för  $l_1 = 0.0201$ ,  $l_2 = 3.71$  och  $l_3 = 1.38e-4$  då  $k_{10} = 1e-4$  och  $k_{ra} = 2e-5$ . Till vänster visas djupet och volymen då  $V$  är styckvis konstant. Till höger visas motsvarande och dessutom önskad volym, då  $V$  inte är styckvis konstant. Den rundade kurvan motsvarar önskad volym, och den andra motsvarar den verkliga volymen. Observera att kurvan faktiskt har en lutning  $\neq \infty$ .



Figur 4.5.1.13 Stegsvvar 0 - 10 m för  $l_1 = 0.0201$ ,  $l_2 = 3.71$  och  $l_3 = 1.38e-4$  då  $k_{10} = 1e-4$  och  $k_{ra} = 0$ . Till vänster visas djupet och volymen då  $V$  är styckvis konstant. Till höger visas motsvarande och dessutom önskad volym då  $V$  inte är styckvis konstant.

Vi ser en icke obetydlig översläng då  $k_{10} = 0$  och  $k_{ra} = 0$ . Vi vill direkt påpeka, att om man istället dimensionerar för detta fall, så får man problem med stora svängningar då  $k_{10} = 1e-4$  och  $k_{ra} = 2e-5$ . Vi konstaterar vidare att approximationen med styckvis konstant volym är godtagbar för dessa återkopplingsparametrar. I appendix visas en del fall där den inte är godtagbar.

Vi vill se vad som händer vid stegsvvar 0 - 100 meter eller mer.

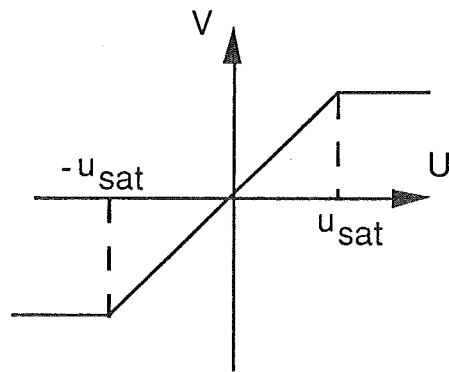


Figur 4.5.1.14 Stegsvär 0 - 100 m för  $k_{ra} = 2e-5$  och  $I_1 = 0.0201$ ,  $I_2 = 3.71$  och  $I_3 = 1.38e-4$ .

#### 4.5.1.10 Antireset windup

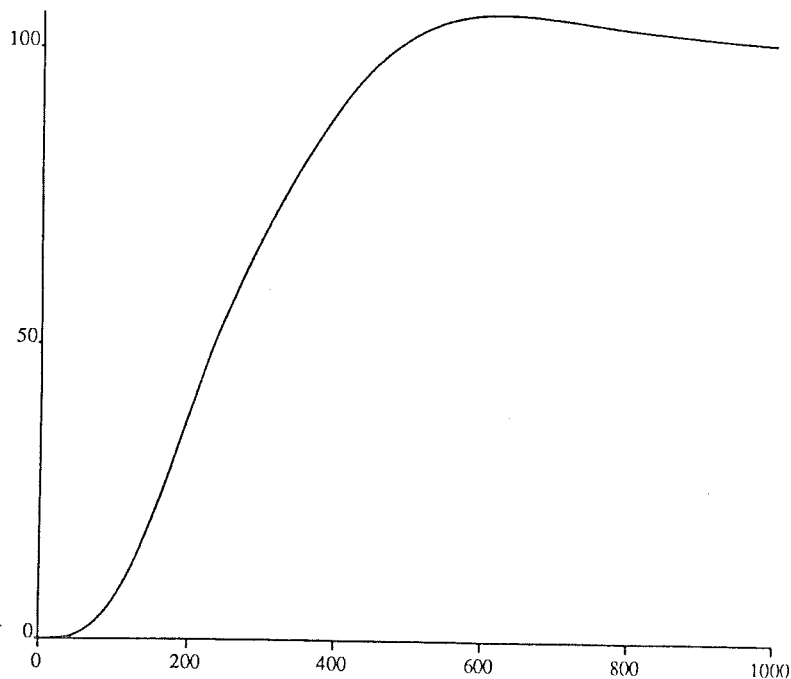
Teorin i detta avsnitt är hämtat ur Computer Controlled Systems, sid 184 - 185, av Karl J. Åström och Björn Wittenmark.

Vi ser i figur 4.5.1.14 en större översläng. Anledningen till detta är att den integrerande termen blir mycket stor på grund av att det tar så lång tid innan ubåten kommit upp till sitt rätta värde. Om volymändringar hade kunnat ske snabbare, så hade ubåten snabbare nått sitt riktiga värde, och integraltermen hade inte hunnit bli lika stor. Detta kan man lösa genom att stänga av integratormen då volymändringarna är för stora - detta kallas allmänt antireset windup. I Computer Controlled Systems, sid 184 - 185, av Karl J. Åström och Björn Wittenmark finns att läsa om antireset windup. Låt oss än en gång anta att vi har en styckvis konstant volym, och att förhållandet mellan volym och styrsignal är enligt figuren nedan.



Figur 4.5.1.15 Förhållande mellan styrsignal och volym då volymen är styckvis konstant.

Då styrsignalen når värdet  $u = u_{\text{sat}}$ , så går systemet i mättning. Då stängs integratorn av. Detta synsätt tillämpar vi på vårt system. En gång per minut bestämmer regulatorn önskad volym. Om volymändringen är så stor att vi inte inom ett samplingsintervall, det vill säga 60 sekunder, kan uppnå rätt volym, så stängs integratorn av. Man kan tänka sig att välja andra värden på maxtiden men 60 sekunder har visat sig vara det bästa. Nu får vi följande stegsvar från 0 till 100 meter.



Figur 4.5.1.16 Stegsvär 0 - 100 m för  $k_{\text{ra}} = 2e-5$  och  $l_1 = 0.0201$ ,  $l_2 = 3.71$  och  $l_3 = 1.38e-4$  och med antireset windup.

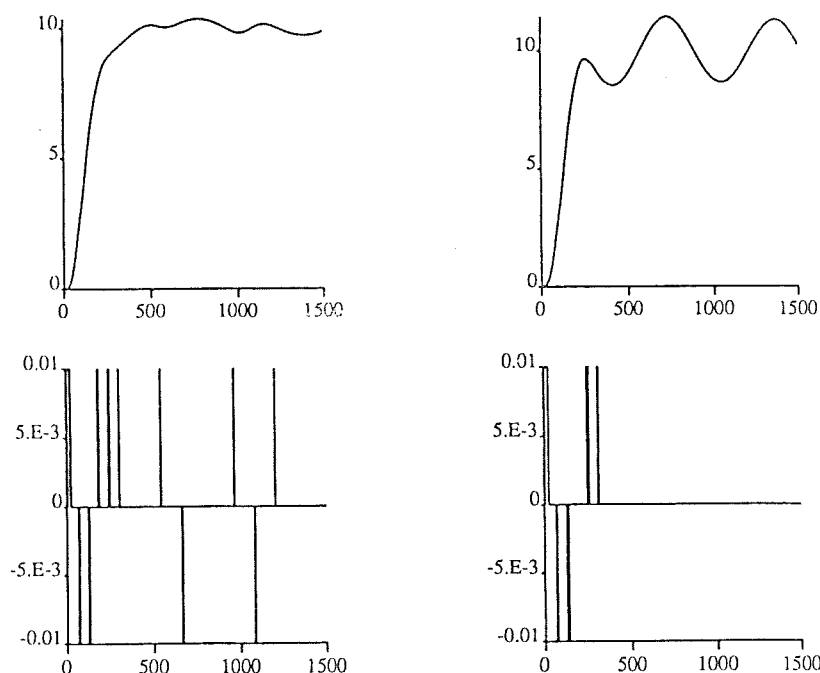
#### 4.5.1.11 Ändring av $\Delta t$

En gång i minuten bestämmer regulatorn hur stor vattenvolymen ska vara i tanken. Därefter beräknar den hur lång tid vatten ska tas in eller ut för att uppnå den nya volymen. Ett problem vid reglering med denna regulator är att

vi bara kan ge order om att stänga av flödet vid diskreta tidpunkter. Det får till följd att vi aldrig kommer att ta in respektive ut rätt mängd vatten. Vi tar ett enkelt exempel.

Antag att vår styrlag vid ett samplingsögonblick beslutar att vi ska pumpa ut 64,5 liter vatten. Med kapaciteten 10 l/s så motsvarar det att vi ska pumpa ut vatten i 6.45 sekunder. Om regulatoren utför sina beräkningar en gång per sekund, så kan den bara besluta vid varje jämn sekund, om pumpen ska pumpa eller inte. Vi måste alltså välja om vi vill ta in 60 eller 70 liter vatten.

Vi väljer att alltid göra en volymändring som är mindre än den önskade. Den variabel som bestämmer hur ofta regulatoren ska besluta om flödet ska vara på eller av kallas i regulatoren  $\Delta t$ . Om  $\Delta t$  är litet kommer vi att ta in i stort sett rätt mängd vatten. Om vi väljer  $\Delta t$  lite större så uppnår vi en annan positiv effekt. På grund av att vi bestämt att alltid göra en volymändring som är mindre än den önskade så kommer vi inte få några volymändringar då vi ligger nära  $h_{ref}$ . Om vi ökar värdet på  $\Delta t$  kommer volymändringar att ske mer sällan. Se figur 4.5.1.16.



Figur 4.5.1.17 Stegsvär från 0 - 10 m för  $k_{ra} = 2e-5$  och  $I_1 = 0.0201$ ,  $I_2 = 3.71$  och  $I_3 = 1.38e-4$  med tillhörande flöde. Till vänster för  $\Delta t = 1$  och till höger för  $\Delta t = 5$ .

Man ser att pumpen går mer sällan för  $\Delta t = 5$ , men vi får istället ett konstant fel på ca 1 meter. Detta fel kommer att vara det samma oberoende av stegsvarets börvärde.

#### 4.5.1.12 Sammanfattning av samplat system

Regulatorn använder återkopplingar av volymen i tanken, djupet och djuphastigheten för att bestämma flödet. Vi har sett, att regulatorn fungerar mycket bra då  $k_{ra} = 2e-5$  men inte fullt lika bra då  $k_{ra} = 0$ .

Regulatorn har tagits fram på analytisk väg, där den enda approximationen varit, att volymen är konstant mellan två samplingsintervall. Det har visat sig vara en godtagbar approximation, då förändringar i styrsignalen är små. Kravet att pumpen inte får starta mer än en gång per minut och kravet att en till-från pump används har inte medfört några komplikationer. Analysen har fullständigt tagit hänsyn till detta.

Genom att ändra på variabeln  $\delta_t$  i vår regulator kan man bestämma vid vilket djupfel man vill att pumpen ska starta. Pumpen kommer alltså inte nödvändigtvis att starta vid varje samplingstillfälle. Slutligen kan sägas att denna regulator fungerar sämre än regulatorn med hysteres och tidsspärr med pumpkapacitet 1 liter i båda riktningarna, men kan på grund av sin fullständigare analys sägas vara en bättre garant för stabilitet.

## 4.6 Adaptiv regulator

Framställningen nedan följer R. Johansson, Adaptive Control of Robot Manipulator Motion, IFAC Symp. Nonlinear Control Systems Design. Capri, Italien, 1989.

Vi ska här närma oss reglerproblemet på ett lite annorlunda sätt. Grundidén är att teckna en energifunktion - Lyapunovfunktion, som anger systemets energi i förhållande till referensvärdet. Om avvikelser från önskat läge ökar, ökar värdet på Lyapunovfunktionen  $u$ . Om man kan se till att tidsderivatan  $u'$  av denna funktion alltid är mindre eller lika med noll, och energifunktionen själv alltid är större eller lika med noll, där likhet gäller då vi befinner oss på referensnivån, kommer systemet alltid att svänga in sig mot referensnivån  $h_{ref}$ .

Vi erinrar oss rörelseekvationen :

$$(M_1 + \rho V) h'' = (M + \rho V) g - V_1 \rho g - K_D h'$$

Vidare ansätter vi en Lyapunovfunktion enligt : (jämför med energin för en fjäder!)

$$u = \frac{1}{2} (M_1 + \rho V) \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right)^2 + \frac{1}{2} k \tilde{h}^2$$

där :

$$\tilde{h} = h - h_{ref}$$

Vi har infört två designparametrar :

- $\tau$       positiv konstant
- $k$         positiv konstant

Om vi nu deriverar denna energifunktion med avseende på tiden erhåller vi :

$$\dot{u} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (M_1 + \rho V) \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right)^2 + (M_1 + \rho V) \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right) \left( \ddot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \dot{\tilde{h}} \right) + k \tilde{h} \dot{\tilde{h}} \quad \Rightarrow$$



$$\dot{u} = \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right) \left[ (M_1 + \rho V) \left( \ddot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \dot{\tilde{h}} \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (M_1 + \rho V) \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right) + k \tilde{h} \right] - \frac{k \tilde{h}^2}{\tau}$$

Ur detta uttryck löser vi ut accelerationstermen :

$$(M_1 + \rho V) \ddot{\tilde{h}} = -\frac{1}{\tau} (M_1 + \rho V) \dot{\tilde{h}} - k \tilde{h} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (M_1 + \rho V) \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right) + \frac{\dot{u} + \frac{1}{\tau} k \tilde{h}^2}{\dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h}}$$

Vi skriver om så att vi får :

$$(M_1 + \rho V) \ddot{\tilde{h}} = -\frac{1}{\tau} (M_1 + \rho V) \dot{\tilde{h}} - k \tilde{h} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (M_1 + \rho V) \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right) - \mu \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right)$$

Där  $\mu$  är en ny designparameter :

$\mu$  positiv konstant

Vi löser ut  $\dot{u}$  :

$$\dot{u} = -\frac{1}{\tau} k \tilde{h}^2 - \mu \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right)^2$$

Man ser att då  $\tau$ ,  $\mu$  och  $k$  väljs positiva så kommer tidsderivatan av  $u$  alltid att vara negativ.

Enligt rörelseekvationen gäller :

$$(M_1 + \rho V) \ddot{\tilde{h}} = -(M_1 + \rho V) \dot{\tilde{h}}_r + (M + \rho V) g - V_1 \rho g - K_D \dot{\tilde{h}}$$

Om vi kombinerar detta uttryck med ekvationen ovan får vi önskat beteende :

$$\begin{aligned} & -(M_1 + \rho V) \dot{\tilde{h}}_r + (M + \rho V) g - V_1 \rho g - K_D \dot{\tilde{h}} = \\ & = -\frac{1}{\tau} (M_1 + \rho V) \dot{\tilde{h}} - k \tilde{h} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (M_1 + \rho V) \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right) - \mu \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(M_1 + \rho V) \ddot{h}_r + (M + \rho V) g + \frac{1}{\tau} \dot{\tilde{h}} (M_1 + \rho V) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (M_1 + \rho V) \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right) = \\
& = -k \tilde{h} - \mu \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right) + V_1 \rho g + K_D \dot{h}
\end{aligned}$$

Här antar vi att termen :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (M_1 + \rho V)$$

är liten varför vi försummar den i våra fortsatta räkningar. Vi får då följande förenklade uttryck :

$$(-M_1 \ddot{h}_r + M g + \frac{1}{\tau} M_1 \dot{\tilde{h}}) + \rho V (-\ddot{h}_r + g + \frac{1}{\tau} \dot{\tilde{h}}) - \rho V_1 g = -k \tilde{h} - \mu \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right) + K_D \dot{h}$$

Ur detta uttryck löser vi ut volymen V. Vi får :

$$V = \frac{1}{\rho} \frac{-k \tilde{h} - \mu \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right) + K_D \dot{h} - (-M_1 \ddot{h}_r + M g + \frac{1}{\tau} M_1 \dot{\tilde{h}}) + \rho V_1 g}{-\ddot{h}_r + g + \frac{1}{\tau} \dot{\tilde{h}}}$$

Detta är en styrlag för volymen som har åtminstone en mycket god egenskap. Om man, enligt tidigare, väljer de tre designparametrarna  $\lambda$ ,  $\mu$  och  $k$  positiva så kommer systemet alltid att vara stabilt. I övrigt kan sägas att :

- $k$  är en styvhetskoefficient - motsvarande en fjäderkonstant.
- $\tau$  är en tidskonstant som säger något om hur fort det ska gå.
- $\mu$  är en form av dämpfaktor.

Omskrivning ger :

$$V = \frac{1}{\rho} \frac{-k \tilde{h} - \mu \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right)}{-\ddot{h}_r + g + \frac{1}{\tau} \dot{\tilde{h}}} + \frac{K_D}{\rho} \frac{\dot{h}}{-\ddot{h}_r + g + \frac{1}{\tau} \dot{\tilde{h}}}$$

$$-\frac{M_1}{\rho} \frac{-\dot{\tilde{h}}_r + \frac{1}{\tau} \tilde{h}}{-\ddot{h}_r + g + \frac{1}{\tau} \tilde{h}} - \frac{M}{\rho} \frac{g}{-\dot{\tilde{h}}_r + g + \frac{1}{\tau} \tilde{h}} + \frac{V_1 g}{-\ddot{h}_r + g + \frac{1}{\tau} \tilde{h}}$$

Detta skriver vi om på matrisform :

$$V = \Theta^T \Psi + \Psi_0$$

där :

$$\Theta^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} & \frac{K_D}{\rho} & -\frac{M_1}{\rho} & -\frac{M}{\rho} \end{bmatrix} \quad \Psi = \frac{1}{-\dot{\tilde{h}}_r + g + \frac{1}{\tau} \tilde{h}} \begin{bmatrix} -k \tilde{h} - \mu \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right) \\ \dot{\tilde{h}} \\ -\ddot{h}_r + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \\ g \end{bmatrix}$$

$$\Psi_0 = \frac{V_1 g}{-\ddot{h}_r + g + \frac{1}{\tau} \tilde{h}}$$

Vi har spaltat upp uttrycket av volymen i viktkompensationstanken  $V$ , som en funktion av en vektor  $\Theta^T$  innehållandes parametrar vilka vi inte kan bestämma exakt och två andra vektorer  $\Psi$  och  $\Psi_0$  som innehåller parametrar som vi direkt kan mäta eller redan känner.

Nu ska vi införa den utlovade adaptiviteten i regulatoransatsen. Eftersom vi inte känner vektorn  $\Theta^T$  som innehåller parametrar som kan förändras i tiden, ska vi här nedan göra en skattning av den och därefter bygga adapteringen på denna skattade vektor.

Vi inleder med att införa parameterfelet :

$$\tilde{\Theta}^T = \hat{\Theta}^T - \Theta^T$$

där  $\hat{\Theta}^T$  anger skattningen av  $\Theta^T$ .

Därefter inför vi variansen av parameterfelet i vår ursprungliga Lyapunovfunktion så att vi får :

$$u_1 = \frac{1}{2} (M_1 + \rho V) \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right)^2 + \frac{1}{2} k \tilde{h}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^T K_{\Theta} \tilde{\Theta}$$

Vi deriverar med avseende på tiden :

$$\dot{u}_1 = \dot{u} + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^T K_{\Theta} \tilde{\Theta} = -\frac{1}{\tau} k \tilde{h}^2 - \mu \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right)^2 + \tilde{\Theta}^T K_{\Theta} \dot{\tilde{\Theta}} =$$

$$-\frac{1}{\tau} k \tilde{h}^2 + \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right) \left[ -\mu \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right) + (V - \Theta^T \Psi - \Psi_0) (-\dot{h}_r + g + \frac{1}{\tau} \dot{\tilde{h}}) \right] + \tilde{\Theta}^T K_{\Theta} \dot{\tilde{\Theta}}$$

$$V = \hat{\Theta}^T \Psi + \Psi_0 \quad \Rightarrow \quad [(\hat{\Theta}^T - \Theta^T) \Psi = \tilde{\Theta}^T K_{\Theta} \dot{\tilde{\Theta}}]$$

$$u_1 = -\frac{1}{\tau} k \tilde{h}^2 - \mu \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right)^2 + \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right) (-\dot{h}_r + g + \frac{1}{\tau} \dot{\tilde{h}}) \tilde{\Theta}^T \Psi + \tilde{\Theta}^T K_{\Theta} \dot{\tilde{\Theta}}$$

$$u_1 = \dot{u} \quad \Rightarrow$$

$$-\left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right) (-\dot{h}_r + g + \frac{1}{\tau} \dot{\tilde{h}}) \tilde{\Theta}^T \Psi = \tilde{\Theta}^T K_{\Theta} \dot{\tilde{\Theta}}$$

$$\dot{\tilde{\Theta}} \approx \dot{\tilde{\Theta}} \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\tilde{\Theta}} = -\frac{1}{K_{\Theta}} \Psi (-\dot{h}_r + g + \frac{1}{\tau} \dot{\tilde{h}}) \left( \dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau} \tilde{h} \right)$$

Vi har nu fått fram en ekvation som skattar de parametrar som vi inte känner.

Vi sammanfattar vad vi hittills kommit fram till :

$$V = \Theta^T \Psi + \Psi_0$$

där :

$$\Theta^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} & \frac{K_D}{\rho} & -\frac{M_1}{\rho} & -\frac{M}{\rho} \end{bmatrix} \quad \Psi = \frac{1}{-\dot{h}_r + g + \frac{1}{\tau}\dot{\tilde{h}}} \begin{bmatrix} -k\tilde{h} - \mu(\dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau}\tilde{h}) \\ \dot{\tilde{h}} \\ -\dot{h}_r + \frac{1}{\tau}\dot{\tilde{h}} \\ g \end{bmatrix}$$

$$\Psi_0 = \frac{V_1 g}{-\dot{h}_r + g + \frac{1}{\tau}\dot{\tilde{h}}}$$

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{K_\Theta} \Psi (-\dot{h}_r + g + \frac{1}{\tau}\dot{\tilde{h}}) (\dot{\tilde{h}} + \frac{1}{\tau}\tilde{h})$$

Vi har alltså kommit fram till en styrlag för volymen, som grundar sig på en skattning av i rörelseekvationen ingående parametrar. Vi har vidare infört ytterligare en designparameter.

$K_\Theta$  anger hur snabbt adapteringen ska gå.

Det återstår att implementera och simulera systemet. Ett tekniskt problem uppstår emellertid då derivator av djuppreferensen ingår i styrlagen. Vi måste alltså explicit generera referensvärden för djupacceleration och djuphastighet. Det låter sig enklast göras genom filtrering av djuppreferensen enligt :

$$\ddot{h}_{ref} + d_{ref}\dot{h}_{ref} + k_{ref}h_{ref} = k_{ref} \text{ ratt}$$

Karakteristiska ekvationen kan skrivas på formen :

$$s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$$

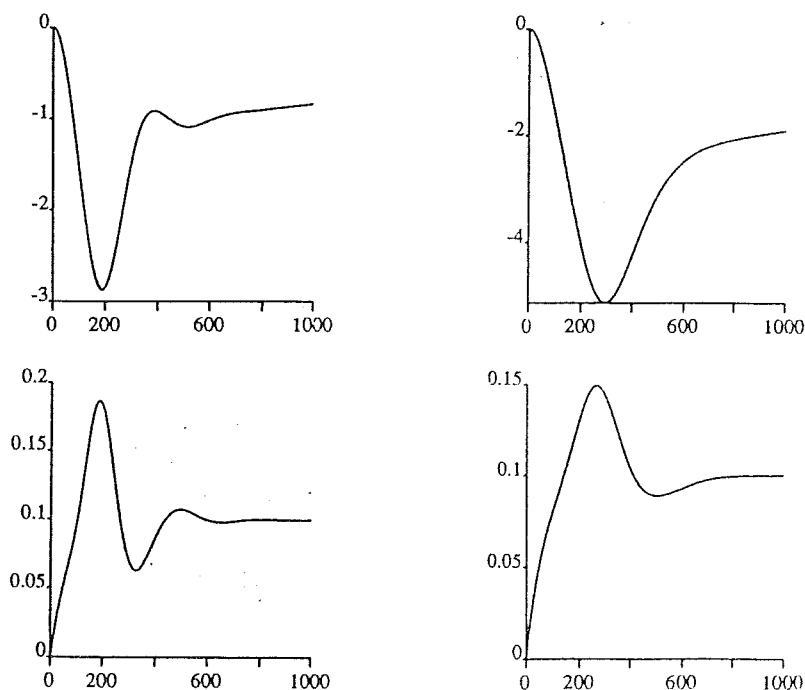
Vi väljer  $\zeta = 1$ , vilket ser till att inga oönskade överslängar i djuppreferensen uppstår, och vidare  $\omega = 0.3$  som ger lagom snabbhet.

Insignal till filtret är önskat djup, här kallat ratt. Ut från filtret får vi djuppreferens, djuphastighetsreferens och djupaccelerationsreferens. Rattvärdet kan alltså

vara ett steg medan referensvärdet  $h_{ref}(t)$  blir en kontinuerlig och snäll funktion.

Räkningarna har förutsatt att volymen kan ändras momentant, och tills vidare tänker vi oss att det är tillåtet. Nedan visas en figurserie, där vi simulerat det linjäriserade systemet med en styrlag enligt tidigare. Designparametrarna har bestämts på empirisk väg, och figurserien är endast till för att visa att adapteringen fungerar och att modellen är riktig.

Först visar vi, hur det genom att ändra på parametern  $k$  är möjligt att anpassa styrsignalen  $V$ . Vi har i simuleringen antagit att en massa på 100 kg, vid tiden noll, skjuts ut från ubåten.

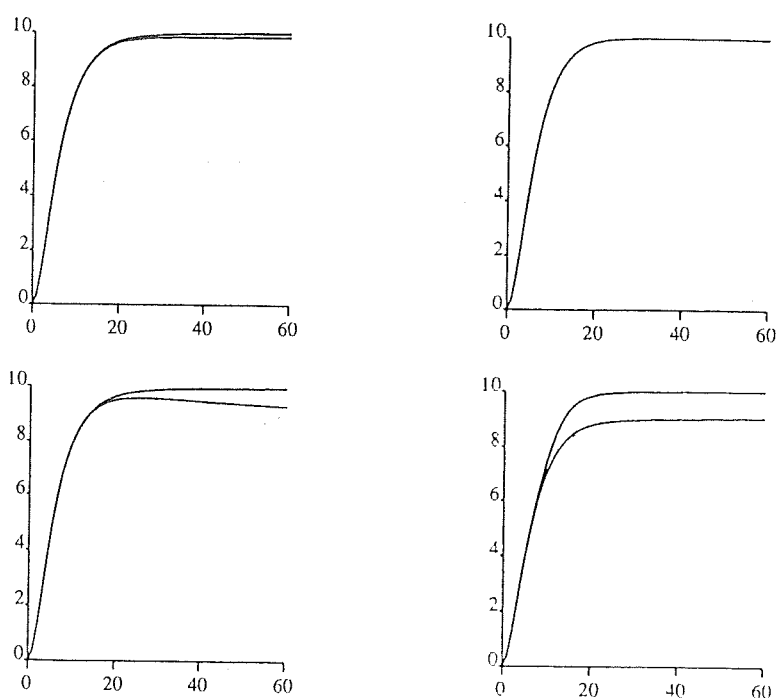


Figur 4.6.1 Överst stegsvar, därunder volymen  $V$ . Till vänster  $k = 50$ . Till höger  $k = 5$ .  
Övriga parametrar :  $\mu = 1000$ ,  $\tau = 71$  och  $K_{\Theta} = 10^5$ .

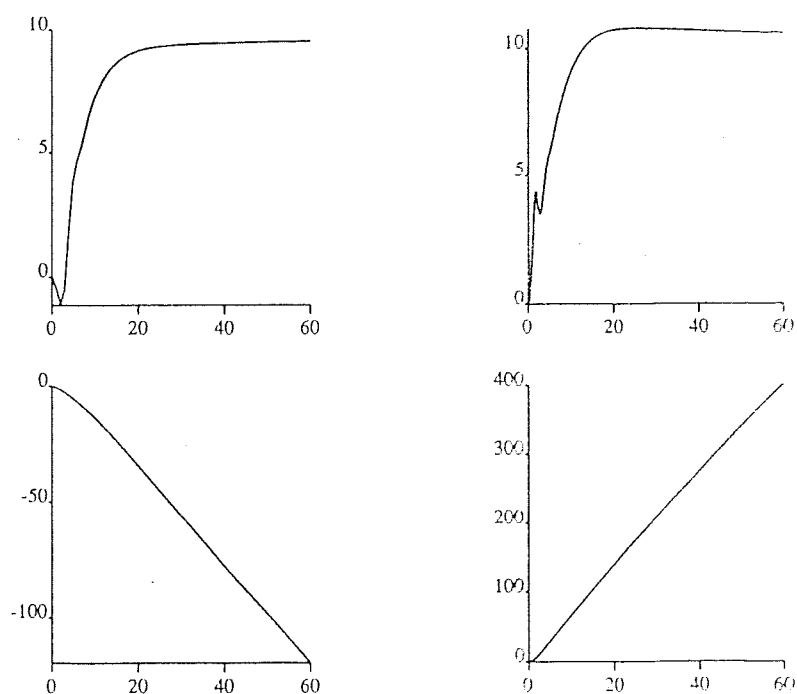
Vi fortsätter med att demonstrera hur vi med adapteringens hjälp kan lösa de problem som uppstår, då de i rörelseekvationen ingående parametrarna är föränderliga. Vi väljer designparametrarna :

$$\begin{aligned} k &= 5000 \\ \tau &= 1.25 \\ \mu &= 1000 \\ K_{\Theta} &= 10^5 \end{aligned}$$

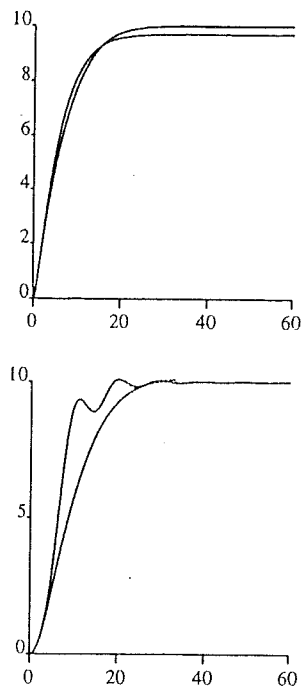
Figurerna nedan visar hur systemet reagerar på ett stegsvar,  $ratt = 10$ , då vi låter densitetsgradienten  $k_p$ , dämpningsfaktorn  $C_N$ , ubåtens massa  $M$  och systemets tröga massa  $M_1$  variera kraftigt. Stegsvaret visas både med och utan adaptering.



Figur 4.6.2 Vänster upp  $k_p = 0$ . Adaptering övre kurvan. Vänster ner  $k_p = 2e-4$ . Adaptering övre kurvan. Höger upp  $C_N = 0$ . Kurvorna blir samma med och utan adaptering. Höger ner  $C_N = 2$ . Adaptering övre kurvan.



Figur 4.6.3 Vänstra figurerna  $M = 5e5$ . Adaptering övre kurvan. Högra figurerna  $M = 2e6$ . Adaptering övre kurvan.



Figur 4.6.4 Vänstra övre  $M_1 = 5e5$ . Adaptering övre kurvan. Vänstra nedre  $M_1 = 8e6$ . Adaptering övre kurvan.

Vi konstaterar till vår belåtenhet att systemet har blivit okänsligt för parametervariationer, men det skall samtidigt påpekas att styrsignalerna blir mycket stora. Det problemet kan man åtgärda genom att välja andra värden på designparametrarna. Nästa steg i förverkligande av modellen är att låta flödet vara utsignal från regulatorn istället för volymen. Det lämnar vi ogjort.



## 5 Referenser

Ur följande litteratur har kunskap hämtats :

- Elmqvist, H. Åström, K.J.  
Schönthal, T.                      *Simnon User's Guide*, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology 1986.
- Johansson, R.                      *Adaptive Control of Robot Manipulator Motion*, IFAC Symp. Nonlinear Control Systems Design, Capri, Italien 1989.
- Lindgren, G. Rootzén, H.                      *Stationära stokastiska processer*, Lund 1984.
- Petersson, I                      *Några erfarenheter av det generaliserade cirkelkriteriet*, LiTH-ISY-EX-0596, 1985
- Schmidtbauer, B.                      *Analog och digital reglerteknik*, Studentlitteratur, Lund 1988.
- Åström, K.J. Wittenmark, B.                      *Computer Controlled Systems*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, NJ 1984.
- Åström, K.J.                      *Reglerteknik Olinjära System*, Lund 1971.
- Åström, K.J.                      *Reglerteori*, Almqvist & Wiksell, Stockholm 1968.

## 6 Bilagor

### 6.1 Appendix A

#### 6.1.1 Linjärisering

För att kunna göra en analys med rimlig arbetsinsats måste vi linjärisera den modell vi satt upp för systemet. Vid linjäriseringen utgår vi från en modell där vi har ett linjärt beroende av djuphastigheten  $h'$ , nämligen :

$$(M_1 + \rho V) h'' = (M + \rho V) g - V_1 \rho g - K_D h'$$
$$\rho = \rho_{yt} (1 + k_\rho h)$$

Tillsammans ger dessa ekvationer :

$$(M_1 + \rho_{yt} (1 + k_\rho h) V) h'' = (M + \rho_{yt} (1 + k_\rho h) V) g - V_1 \rho_{yt} (1 + k_\rho h) g - K_D h'$$

Då  $M_1 \gg \rho_{yt} (1 + k_\rho h) V$  får vi följande förenklade uttryck<sup>1</sup> :

$$M_1 h'' = (M + \rho_{yt} (1 + k_\rho h) V) g - V_1 \rho_{yt} (1 + k_\rho h) g - K_D h'$$

Vidare förenkling ger :

$$h'' = f(h, h', V) = \frac{M g}{M_1} + \frac{\rho_{yt} g (1 + k_\rho h) (V - V_1)}{M_1} - \frac{K_D}{M_1} h'$$

Denna funktion  $f(h, h', V)$  linjäriserar vi kring någon nollpunkt  $(h_0, h'_0, V_0)$ .

$$f(h, h', V) \approx f(h_0, h'_0, V_0) + \frac{\partial f}{\partial h}(h_0, h'_0, V_0) \cdot (h - h_0) + \frac{\partial f}{\partial h'}(h_0, h'_0, V_0) \cdot (h' - h'_0)$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial V}(h_0, h'_0, V_0) \cdot (V - V_0)$$

Vi tänker oss linjäriseringspunkten  $(h_0, h'_0, V_0) = (0, 0, 0)$ .

Den linjäriserade modellen blir :

$$h'' = -k_{10} h - k_{11} h' + k_{12} V$$

---

<sup>1</sup> $M_1 \approx 2 \cdot 10^6$ ,  $\rho_{yt}(1 + k_\rho h) V \approx 10^4$

där koefficienterna  $k_{10}$ ,  $k_{11}$  och  $k_{12}$  erhålls ur :

$$k_{10} = -\frac{\partial f}{\partial h}(h_0, h'_0, V_0) = -\frac{\rho_{yt} g k_p (V_0 - V_1)}{M_1} = \frac{\rho_{yt} g k_p V_1}{M_1}$$

$$k_{11} = -\frac{\partial f}{\partial h'}(h_0, h'_0, V_0) = \frac{K_D}{M_1}$$

$$k_{12} = \frac{\partial f}{\partial V}(h_0, h'_0, V_0) = \frac{\rho_{yt} g (1 + k_p h_0)}{M_1} = \frac{\rho_{yt} g}{M_1}$$

Insättning av kända konstanter ger :

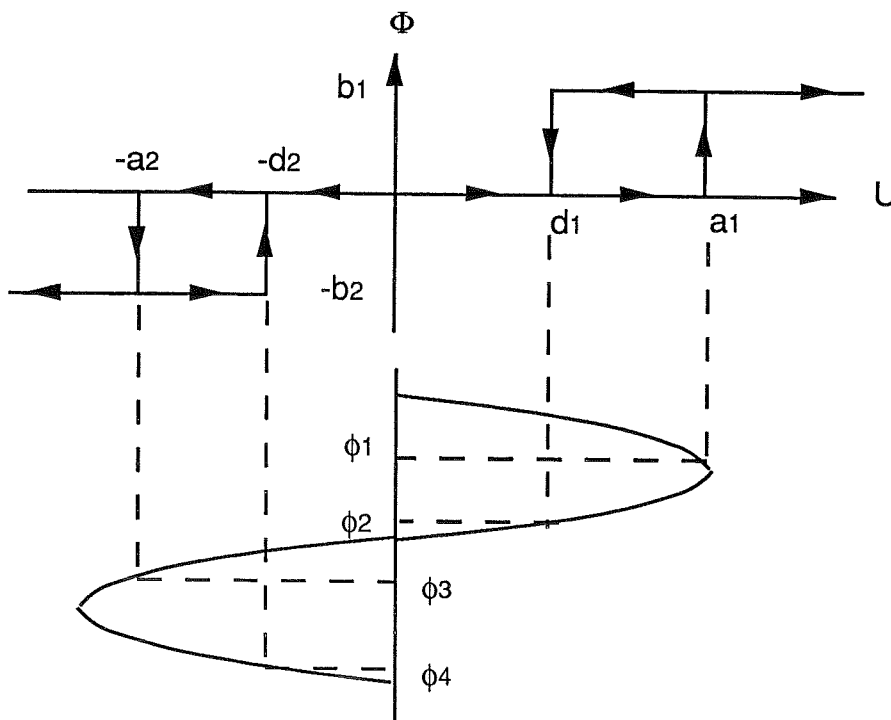
$$k_{10} = 1 \cdot 10^{-4}$$

$$k_{11} = 2 \cdot 10^{-4}$$

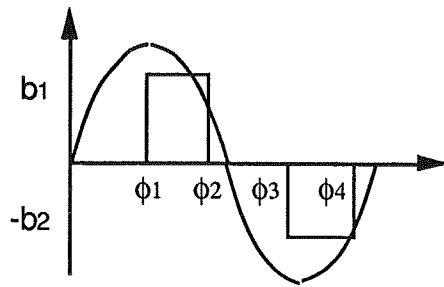
$$k_{12} = 5 \cdot 10^{-3}$$

### 6.1.2 Beskrivande funktion för olinjäritet med hysteres.

Vi ska bestämma beskrivande funktionen för en olinjär karakteristik enligt figur 6.1.1.



Figur 6.1.1 Pumpkarakteristik med hysteres.



Figur 6.1.2 In- och utsignal från pump med hysteres.

Vi antar en periodisk insignal  $U(t) = C \sin \omega t$  på ingången till olinjäriteten. Den beskrivande funktionen  $Y_N(C)$  för olinjäriteten blir då  $Y_N(C) = \frac{1}{C} (B_1 + i A_1)$ , där  $B_1$  resp  $A_1$  erhålls som fourierkoefficienterna för grundtonen i utsignalen från olinjäriteten.

Vi bestämmer  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  samt  $\phi_4$  :

$$\phi_1 : C \sin \phi_1 = a_1 \qquad \phi_1 = \arcsin\left(\frac{a_1}{C}\right)$$

$$\phi_2 : C \sin \phi_2 = d_1 \qquad \phi_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{d_1}{C}\right)$$

$$\phi_3 : C \sin \phi_3 = a_2 \qquad \phi_3 = \pi + \arcsin\left(\frac{a_2}{C}\right)$$

$$\phi_4 : C \sin \phi_4 = d_2 \qquad \phi_4 = 2\pi - \arcsin\left(\frac{d_2}{C}\right)$$

Fourierkoefficienterna  $A_1$  och  $B_1$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) \cos \omega d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\phi_1}^{\phi_2} b_1 \cos \omega d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{\phi_3}^{\phi_4} -b_2 \cos \omega d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ b_1 \sin\left(\pi - \arcsin\left(\frac{d_1}{C}\right)\right) - b_1 \frac{a_1}{C} - b_2 \sin\left(2\pi - \arcsin\left(\frac{d_2}{C}\right)\right) + \right. \\ &\quad \left. + b_2 \sin\left(\pi + \arcsin\left(\frac{a_2}{C}\right)\right) \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ b_1 \frac{d_1}{C} - b_1 \frac{a_1}{C} + b_2 \frac{d_2}{C} - b_2 \frac{a_2}{C} \right] = \frac{1}{\pi C} (b_1 d_1 - b_1 a_1 + b_2 d_2 - b_2 a_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) \sin \omega d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\phi_1}^{\phi_2} b_1 \sin \omega d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{\phi_3}^{\phi_4} -b_2 \sin \omega d\omega = \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ b_1 \cos\left(\pi - \arcsin \frac{a_1}{c}\right) - b_1 \cos\left(\pi - \arcsin \frac{d_1}{c}\right) + \right. \\
&\quad \left. + b_2 \cos\left(2\pi - \arcsin \frac{d_2}{c}\right) - b_2 \sin\left(\pi + \arcsin \frac{d_2}{c}\right) \right] = \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ b_1 \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{c^2}} + b_1 \sqrt{1 - \frac{d_1^2}{c^2}} + b_2 \sqrt{1 - \frac{d_2^2}{c^2}} + b_2 \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{c^2}} \right]
\end{aligned}$$

Detta leder till uttrycket för den beskrivande funktionen :

$$\begin{aligned}
Y_N(C) &= \frac{1}{C} (B_1 + iA_1) = \\
&\frac{1}{\pi C} \left[ b_1 \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{c^2}} + b_1 \sqrt{1 - \frac{d_1^2}{c^2}} + b_2 \sqrt{1 - \frac{d_2^2}{c^2}} + b_2 \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{c^2}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{C} (b_1 d_1 - b_1 a_1 + b_2 d_2 - b_2 a_2) \right]
\end{aligned}$$

Vi koncentrerar oss på följande specialfall :

$$d_1 = d_2 = d \quad a_1 = a_2 = a$$

$$\begin{aligned}
Y_N(C) &= \frac{1}{\pi C} \left[ (b_1 + b_2) \left( \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} + \sqrt{1 - \frac{d^2}{c^2}} \right) + \frac{i}{C} (b_1 + b_2)(d - a) \right] = \\
&= \frac{(b_1 + b_2)}{\pi C} \left[ \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} + \sqrt{1 - \frac{d^2}{c^2}} + \frac{i}{C} (d - a) \right]
\end{aligned}$$

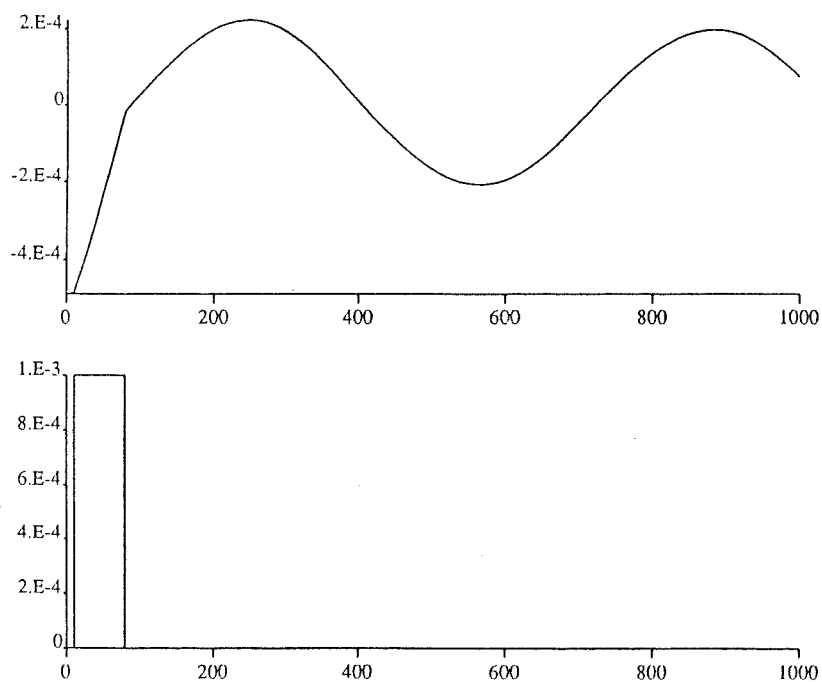
## 6.2 Appendix B

### 6.2.1 Simuleringar 1-1 systemet. 1

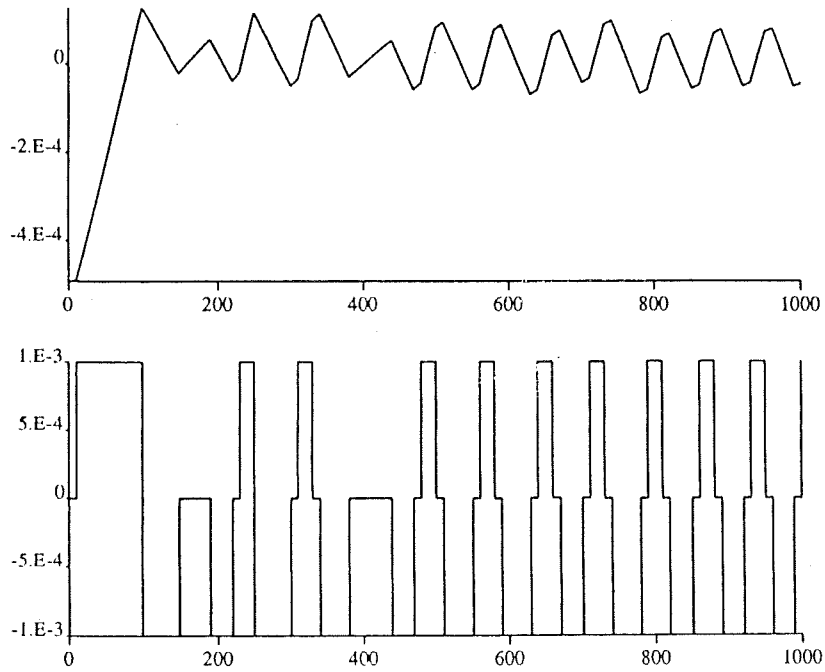
För simuleringarna nedan gäller :

$b_1$	$= 10^{-3}$
$b_2$	$= 10^{-3}$
$k_p$	$= 2 \cdot 10^{-5}$
$d$	$= 10$
$v\_delay$	$= 2$
$p\_delay$	$= 4$
$t\_limit$	$= 0$
$delta\_t$	$= 2$
$cn$	$= 0.3$

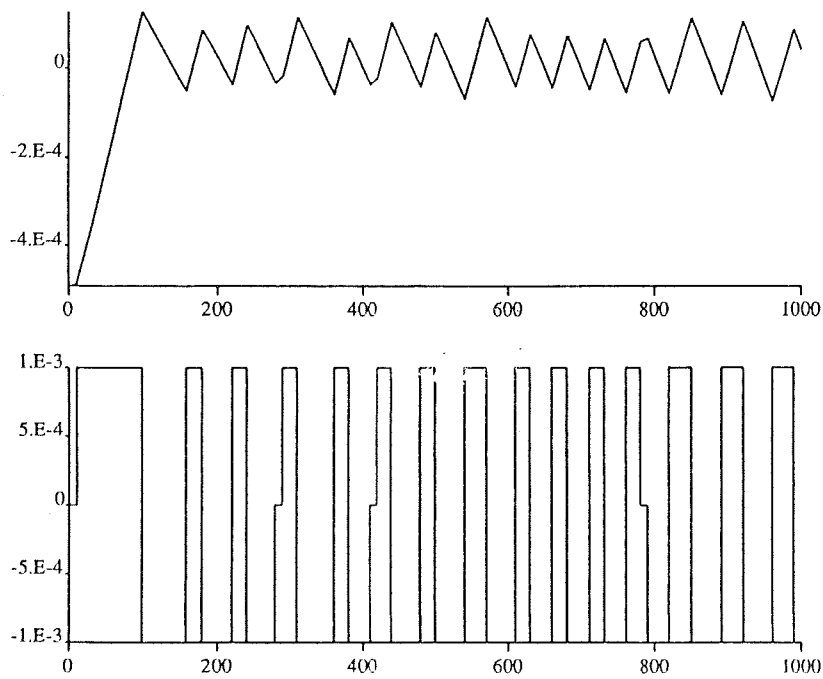
Simuleringarna är utförda med Reg33 och sub2.



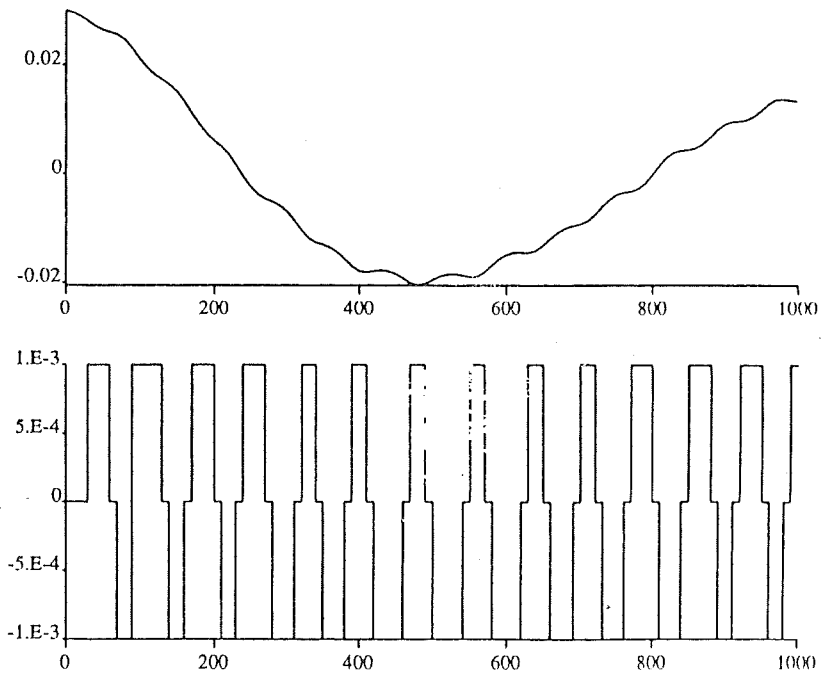
Figur 6.2.1.1 Stegsvär för accelerationen.  $K_{T3} = 3 \cdot 10^4$



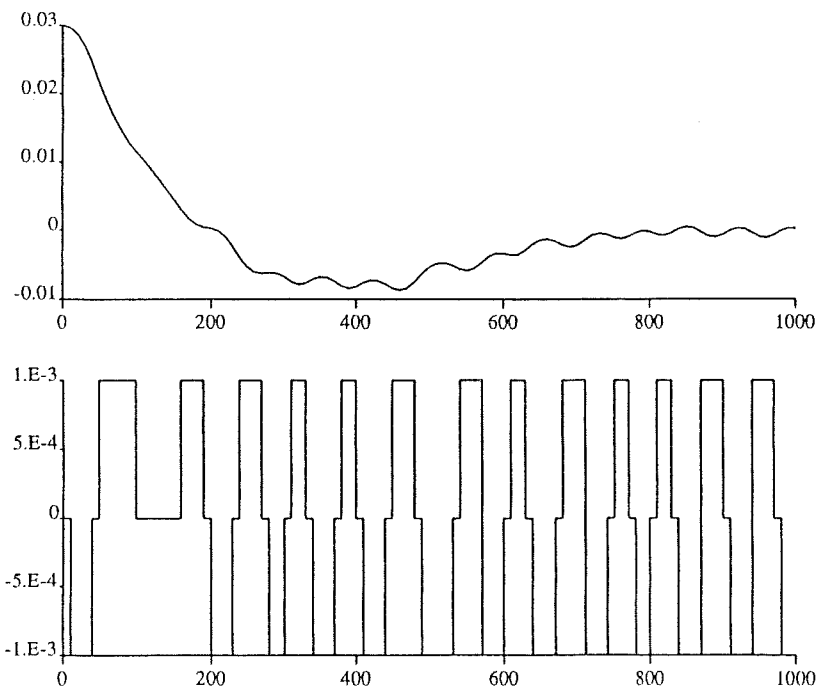
Figur 6.2.1.2 Stegsvär för accelerationen.  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$



Figur 6.2.1.3 Stegsvär för accelerationen.  $K_{T3} = 3 \cdot 10^6$

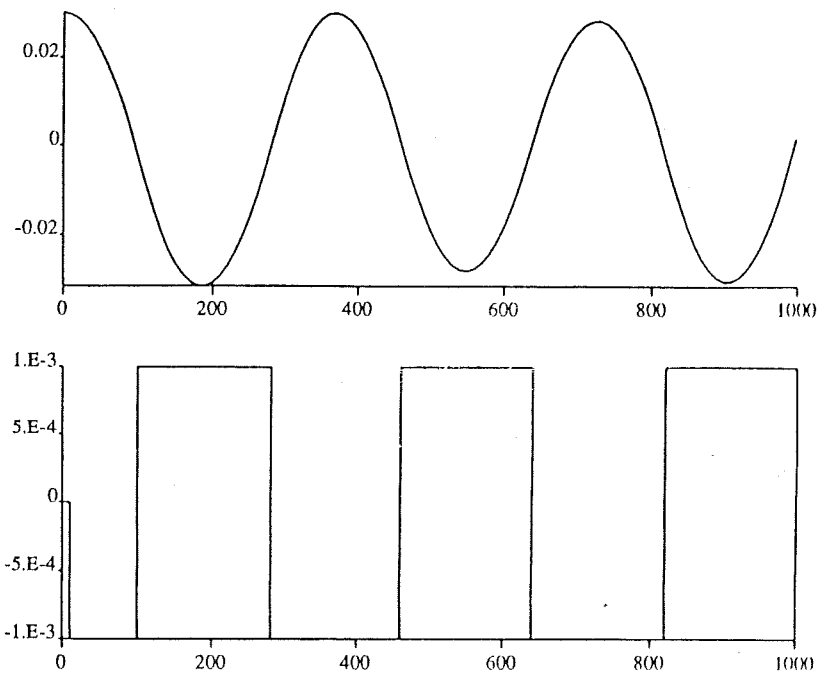


Figur 6.2.1.4 Stegsvär för djuphastigheten.  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$  och  $K_{T2} = 200$ .



Figur 6.2.1.5 Stegsvär för djuphastigheten.  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$  och  $K_{T2} = 2000$ .



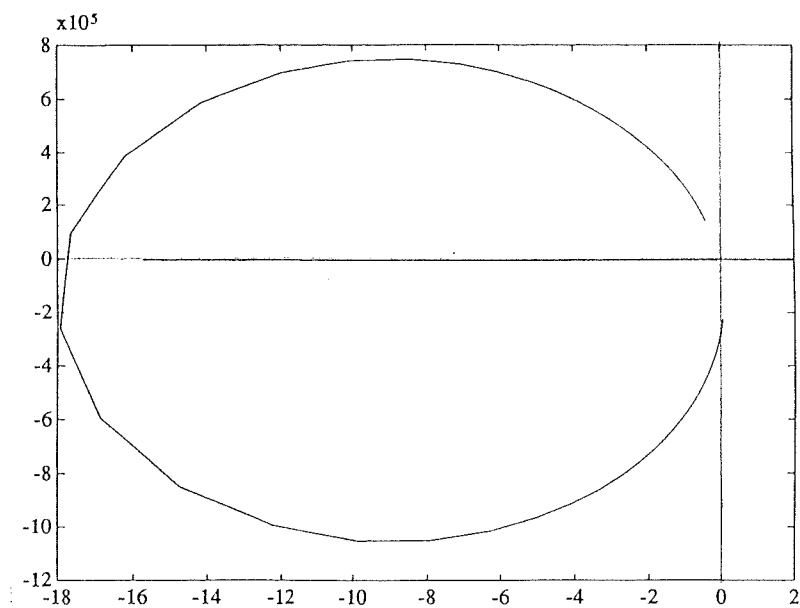


Figur 6.2.1.6 Stegsvär för djuphastigheten.  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$  och  $K_{T2} = 20000$ .

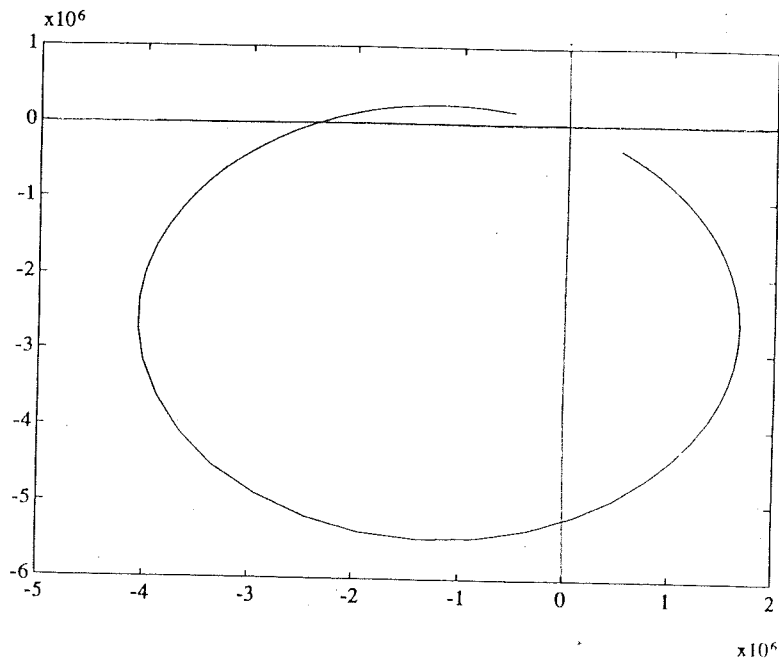
## 6.2.2 Matlabanalys av 1-1

För följande Matlabutskrifter gäller :

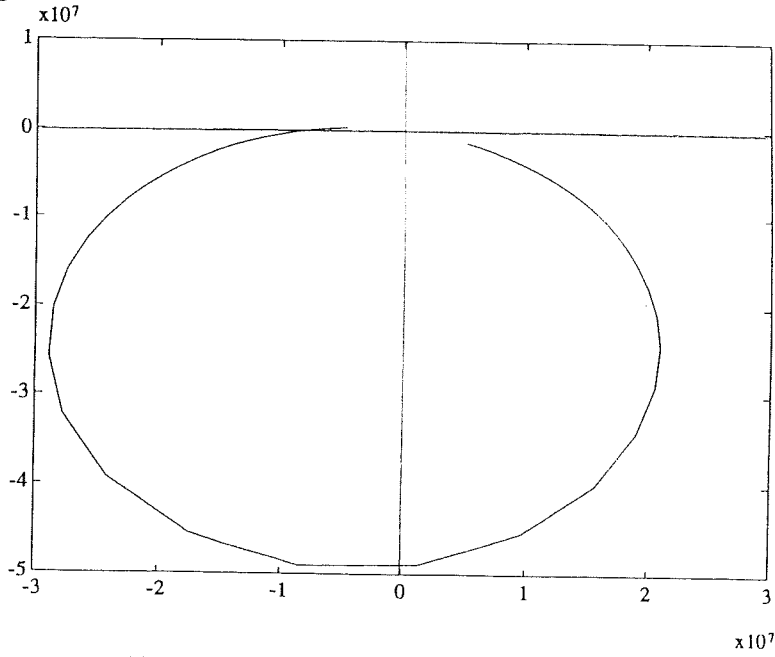
Tidsfördröjning på 4 sekunder, tidsspärr  $T_D = 60$  sekunder och  $d = 5$ . Tidsspärrs inverkan är analyserad med lågpasfilter. Den enligt Cirkelkriteriet förbjudna zonen, ligger till vänster om  $-3000$ . Vi har valt att inte rita ut den på grund av rent avläsningstekniska skäl.



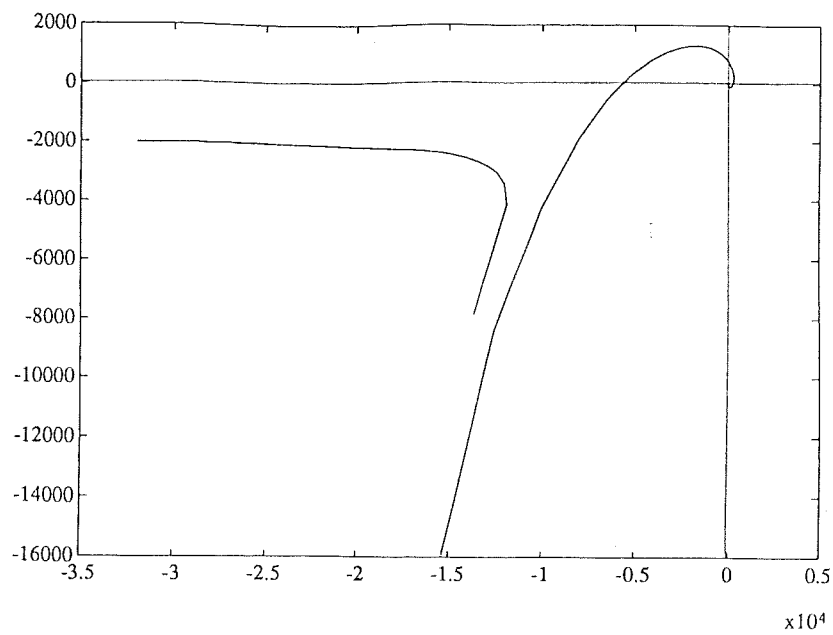
Figur 6.2.2.1 Nyquistkurvan och beskrivande funktion för  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 200$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^4$ .



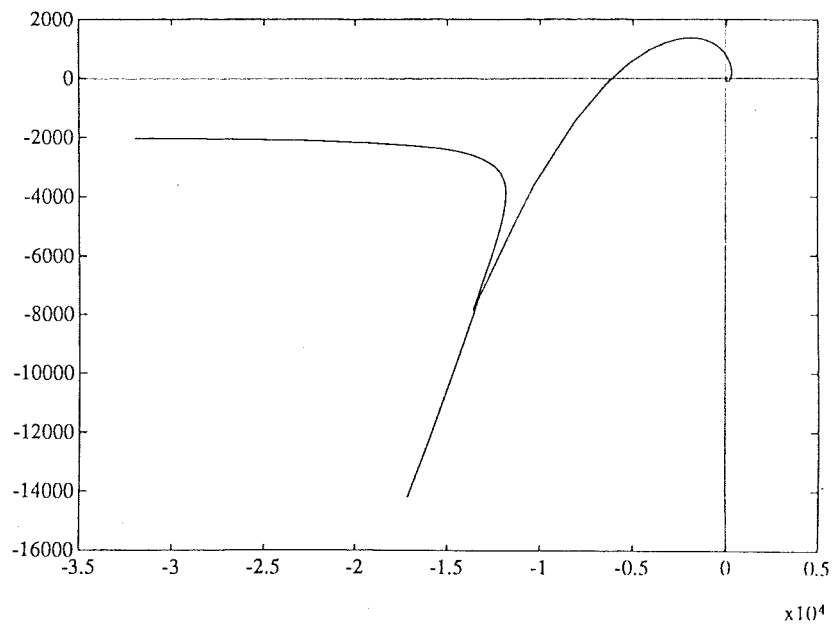
Figur 6.2.2.2 Nyquistkurvan och beskrivande funktion för  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2200$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^4$ .



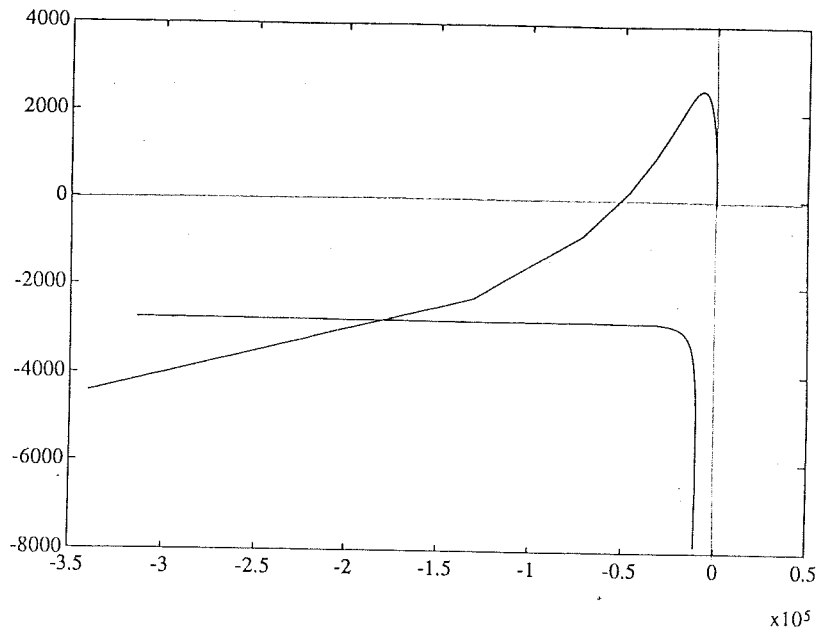
Figur 6.2.2.3 Nyquistkurvan och beskrivande funktion för  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 20000$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^4$ .



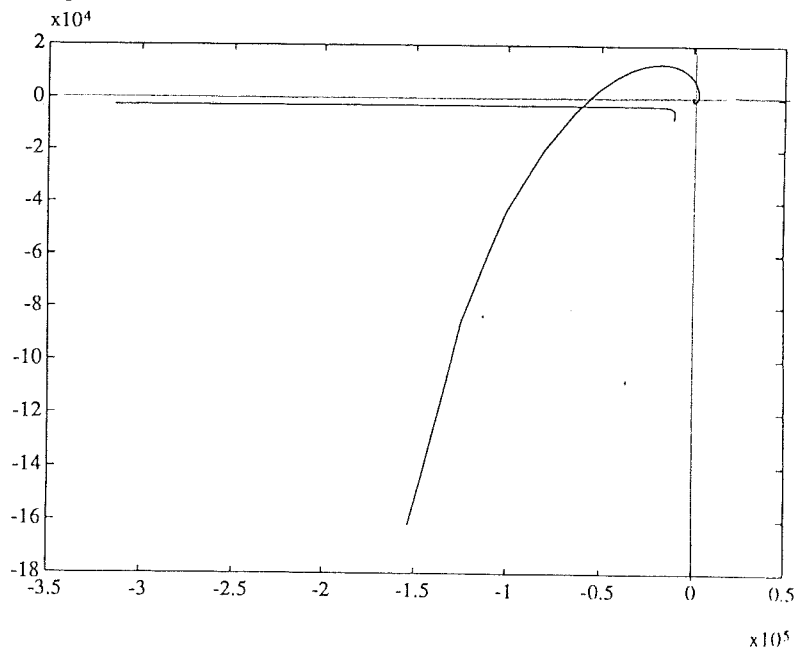
Figur 6.2.2.4 Del av Nyquistkurva och beskrivande funktion för  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 200$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ .



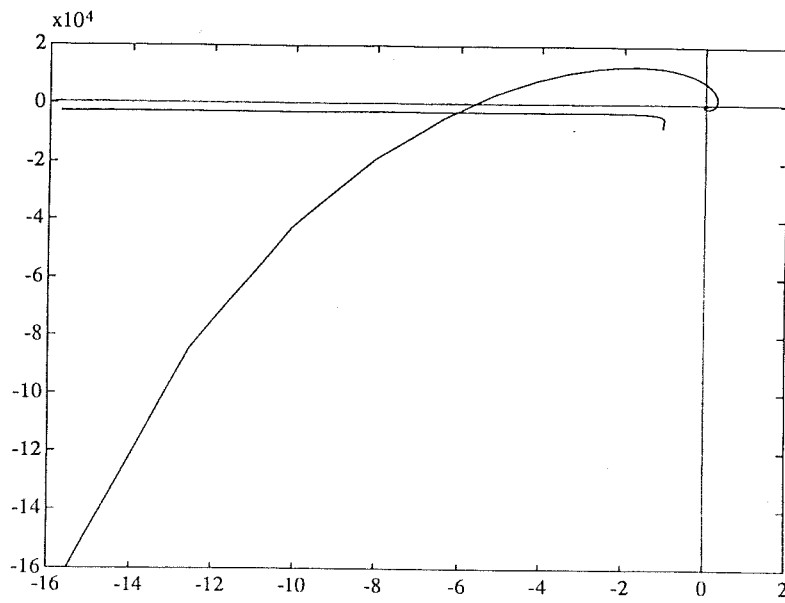
Figur 6.2.2.5 Del av Nyquistkurva och beskrivande funktion för  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2200$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ .



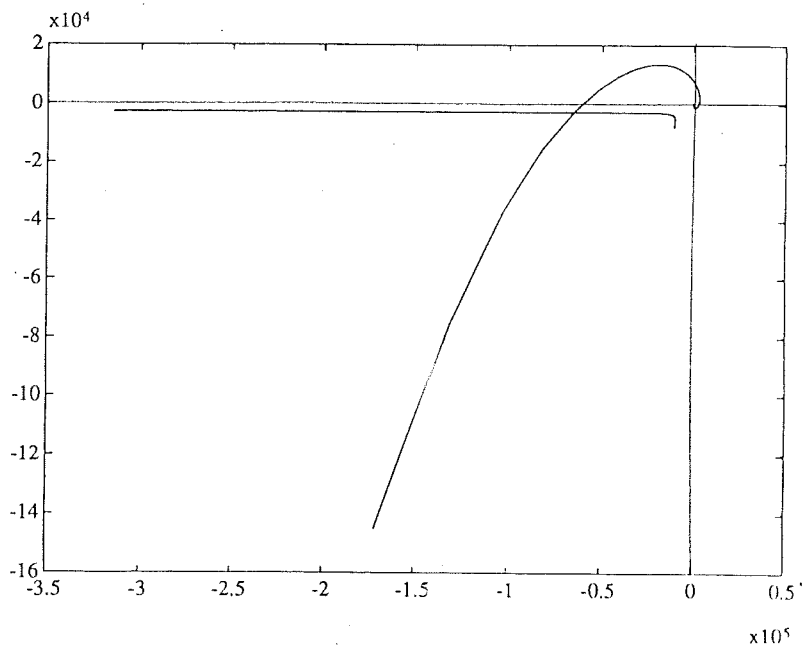
Figur 6.2.2.6 Del av Nyquistkurva och beskrivande funktion för  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 20000$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ .



Figur 6.2.2.7 Del av Nyquistkurva och beskrivande funktion för  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 200$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^6$ .



Figur 6.2.2.8 Del av Nyquistkurva och beskrivande funktion för  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2200$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^6$ .



Figur 6.2.2.9 Del av Nyquistkurva och beskrivande funktion för  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 20000$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^6$ .

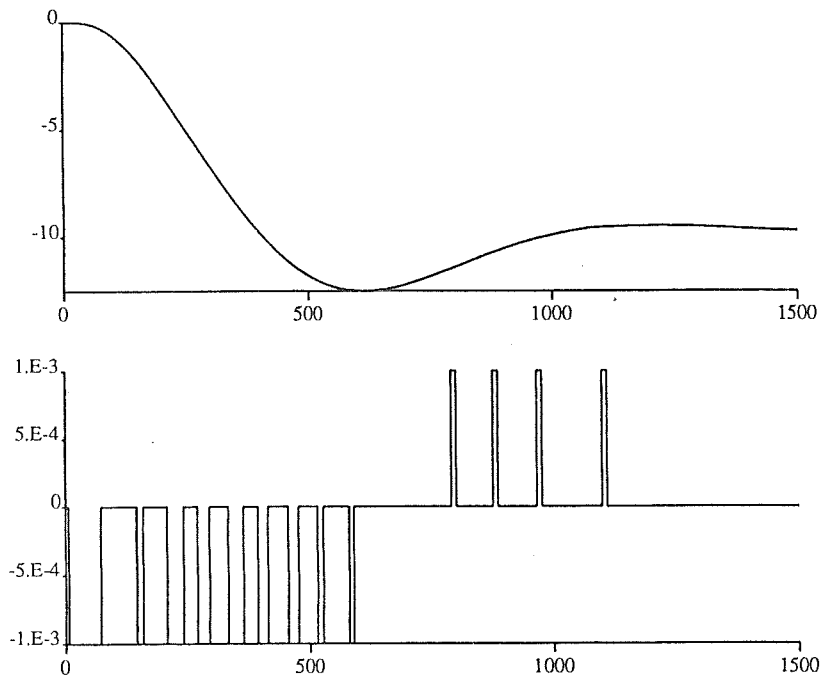
### 6.2.3 Simuleringar 1-1 systemet. 2

För simuleringarna nedan gäller :

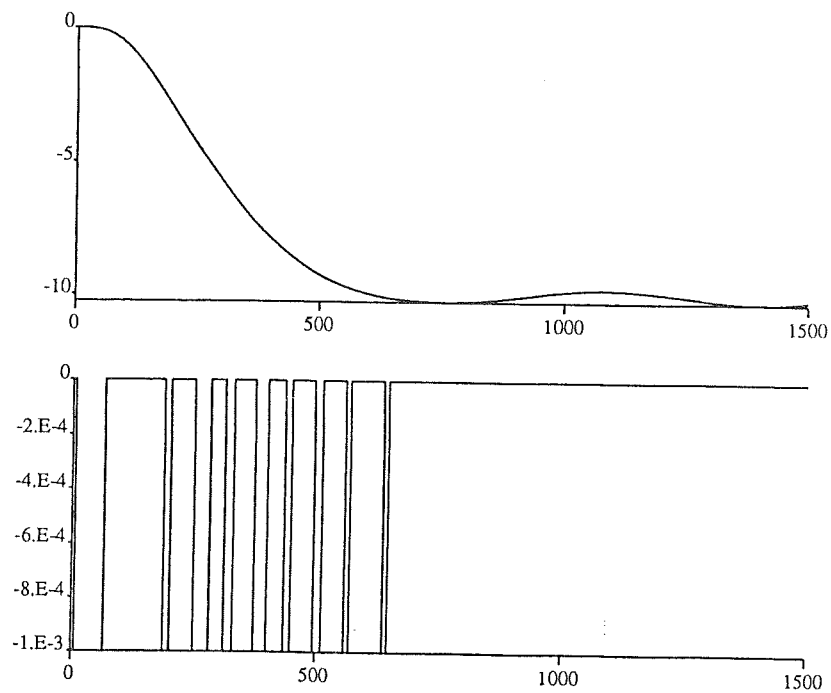
$$\begin{aligned}
 b_1 &= 10^{-3} \\
 b_2 &= 10^{-3} \\
 k_p &= 2 \cdot 10^{-5} \\
 d &= 3 \\
 v\_delay &= 2
 \end{aligned}$$

$p\_delay = 4$   
 $t\_limit = 60$   
 $delta\_t = 2$   
 $cn = 0.3$

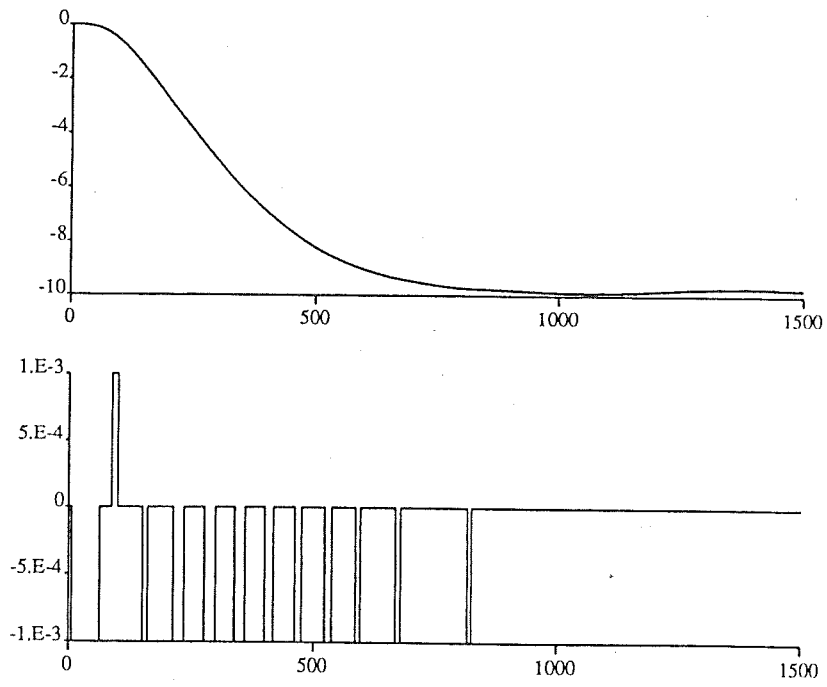
Simuleringarna utförda med Reg33 och Sub2.



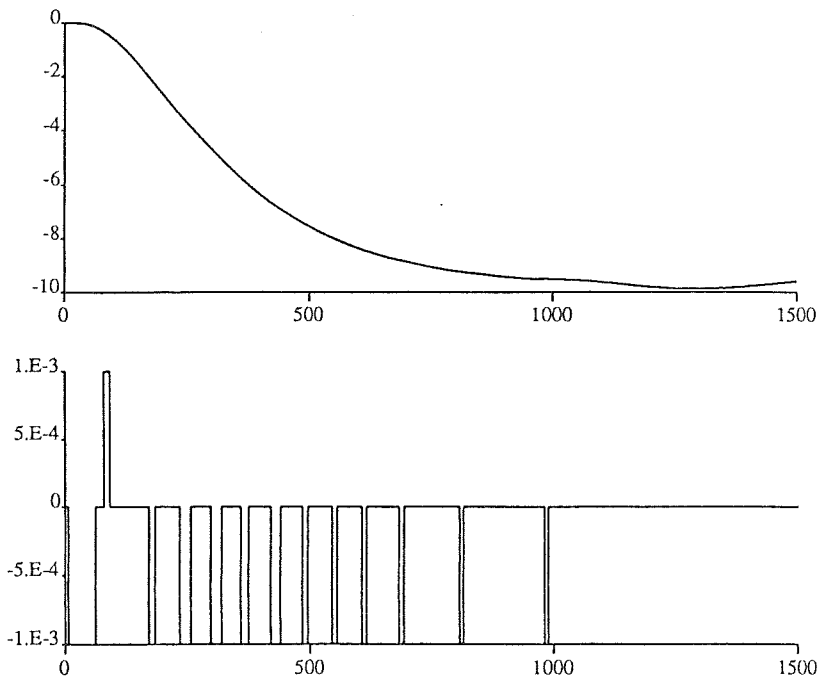
Figur 6.2.3.1  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 1000$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ .



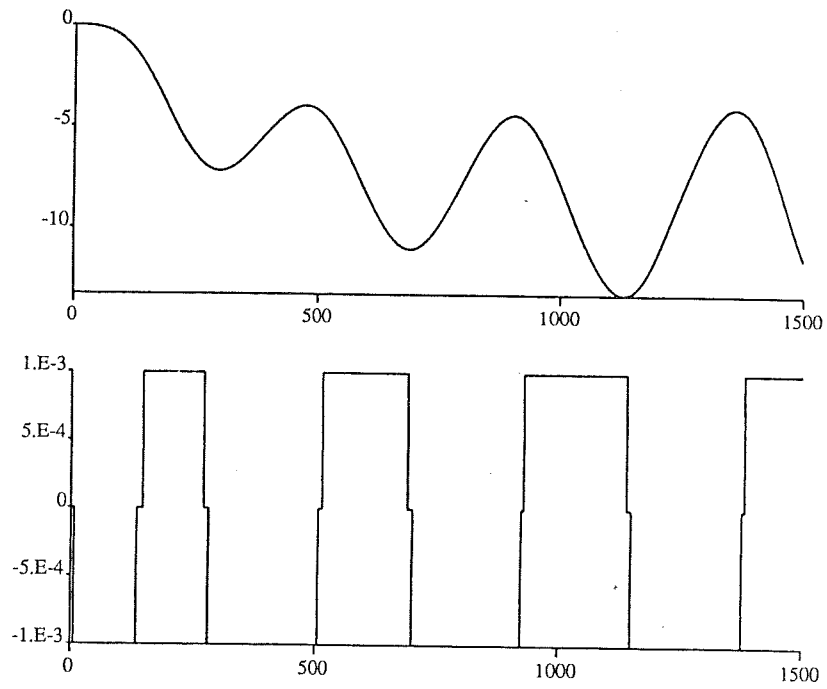
Figur 6.2.3.2  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2000$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ .



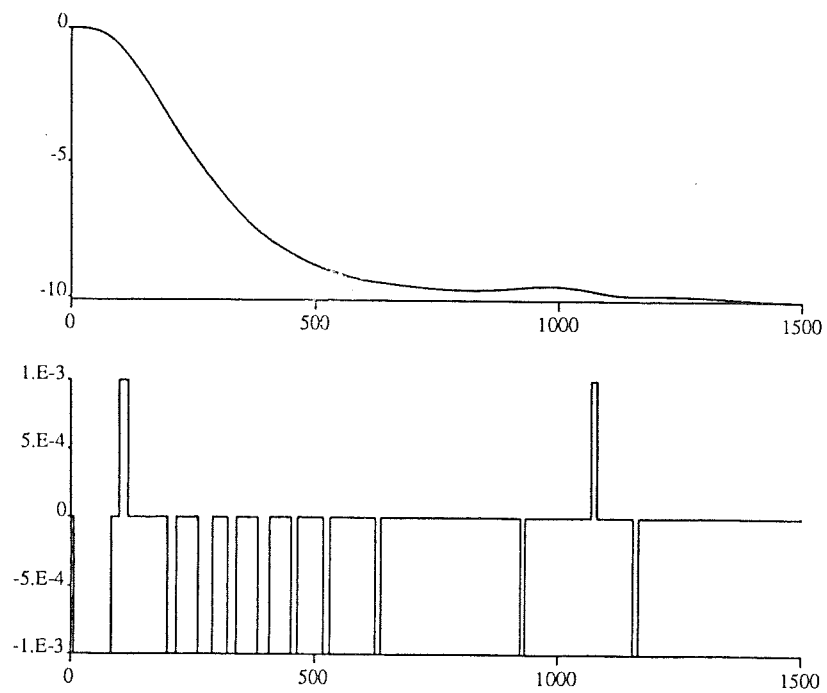
Figur 6.2.3.3  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2500$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ .



Figur 6.2.3.4  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 3000$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ .

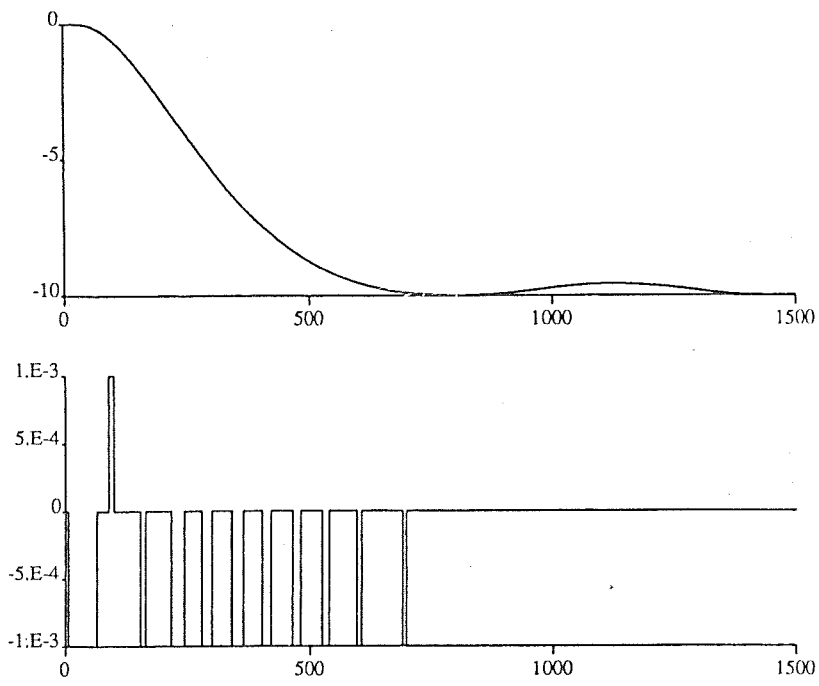


Figur 6.2.3.5  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2200$  och  $K_{T3} = 2 \cdot 10^4$ .

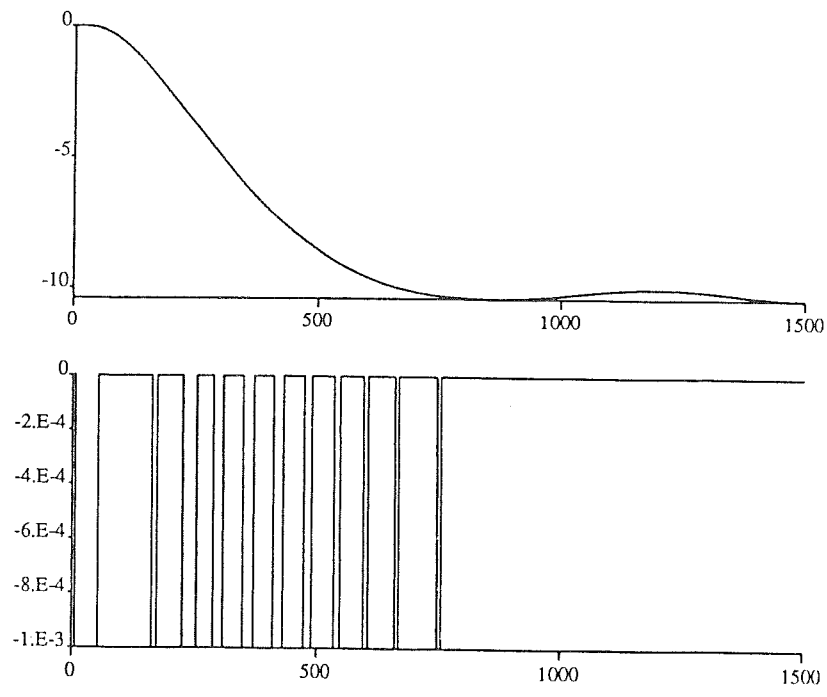


Figur 6.2.3.6  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2200$  och  $K_{T3} = 2 \cdot 10^5$ .

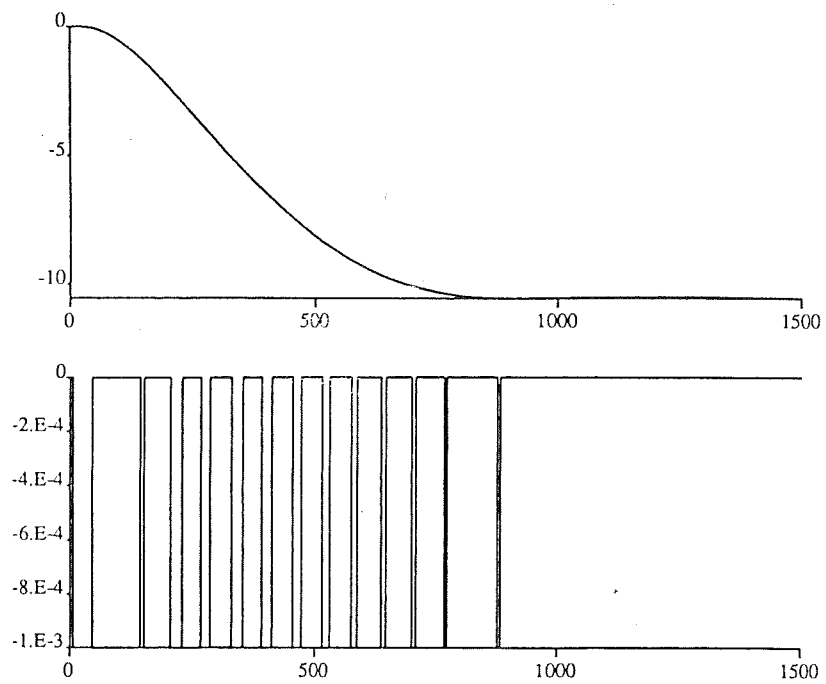




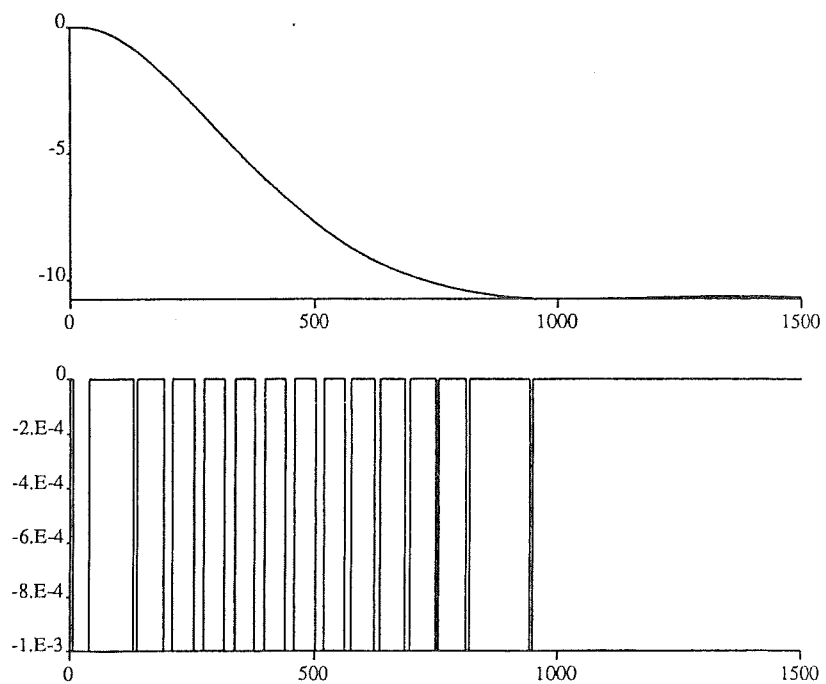
Figur 6.2.3.7  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2200$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ .



Figur 6.2.3.8  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2200$  och  $K_{T3} = 4 \cdot 10^5$ .



Figur 6.2.3.9  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2200$  och  $K_{T3} = 5 \cdot 10^5$ .



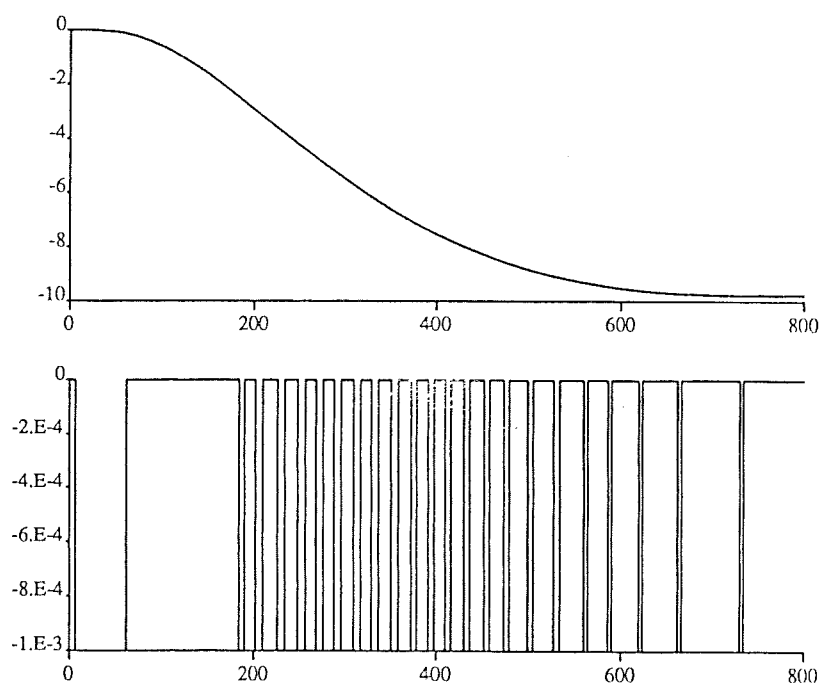
Figur 6.2.3.10  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2200$  och  $K_{T3} = 6 \cdot 10^5$ .

## 6.2.4 Hysteressimuleringar

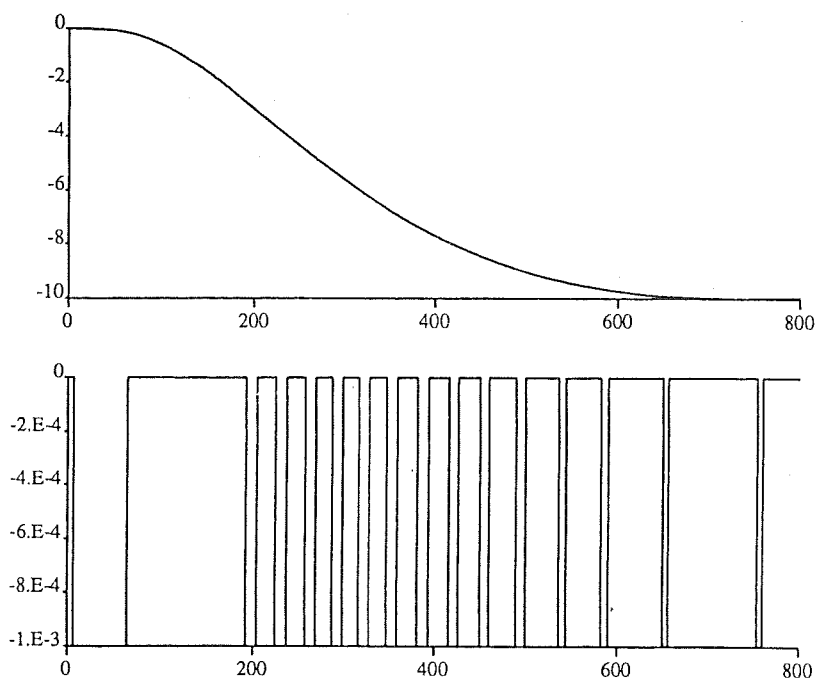
Följande val av parametrar har använts :

$b_1$	$= 10^{-3}$
$b_2$	$= 10^{-3}$
$k_p$	$= 2 \cdot 10^{-5}$
$v\_delay$	$= 2$
$p\_delay$	$= 4$
$t\_limit$	$= 0$
$delta\_t$	$= 2$
$cn$	$= 0.3$

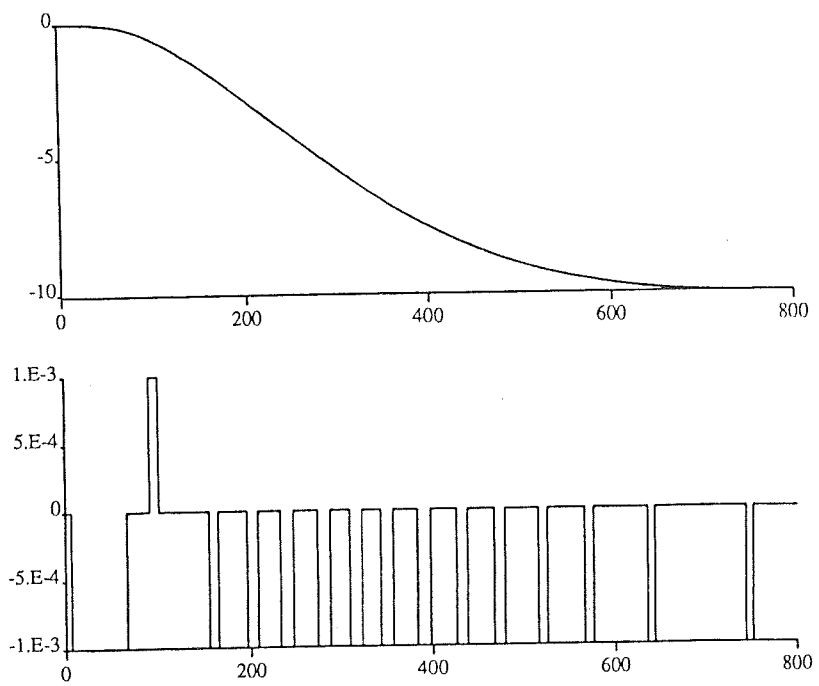
Simuleringarna utförda med Reg33 och Sub2.



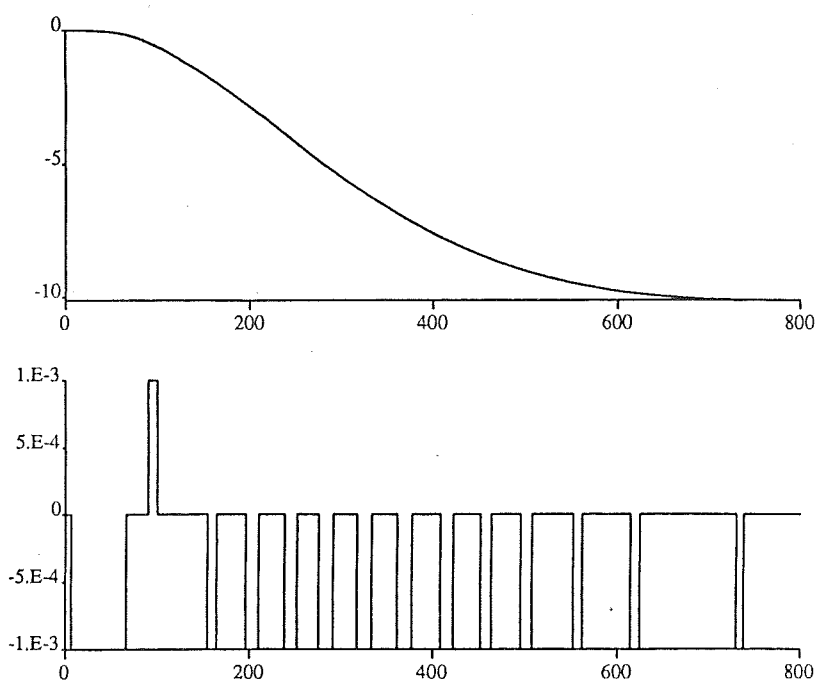
Figur 6.2.4.1  $d = 10$



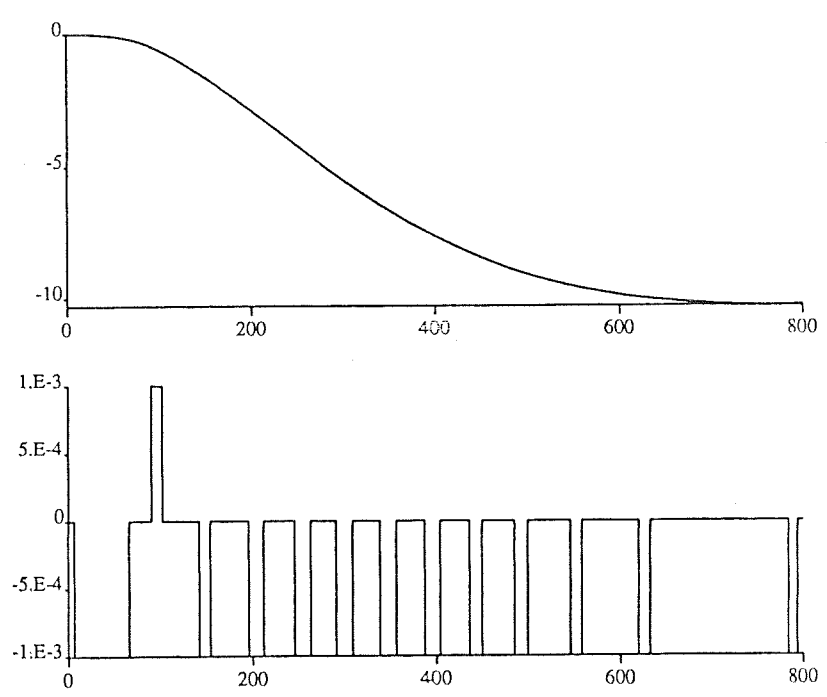
Figur 6.2.4.2  $d = 6$



Figur 6.2.4.3  $d = 4$



Figur 6.2.4.4  $d = 3$

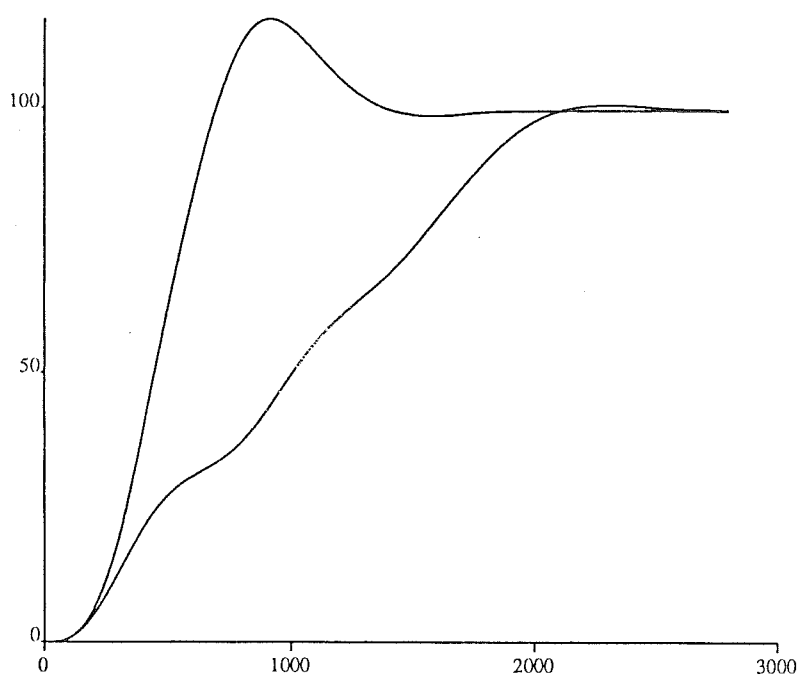


Figur 6.2.4.5  $d = 1$

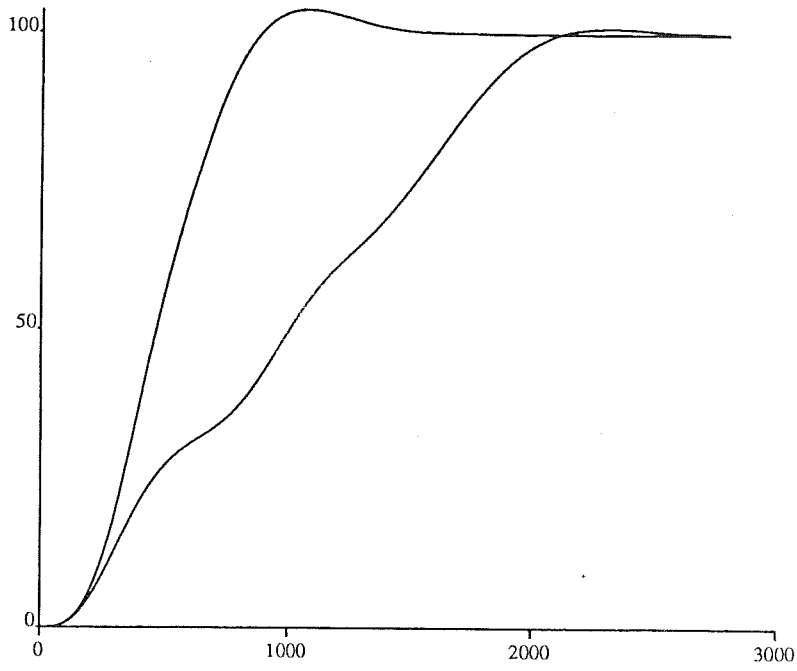
## 6.2.5 Vmaxsimuleringar

$b_1$	$= 10^{-3}$	
$b_2$	$= 10^{-3}$	
$k_p$	$= 0,2 \cdot 10^{-5}$	<b>två fall</b>
$d$	$= 3$	
$v\_delay$	$= 2$	
$p\_delay$	$= 4$	
$t\_limit$	$= 60$	
$delta\_t$	$= 4$	
$cn$	$= 0.3$	

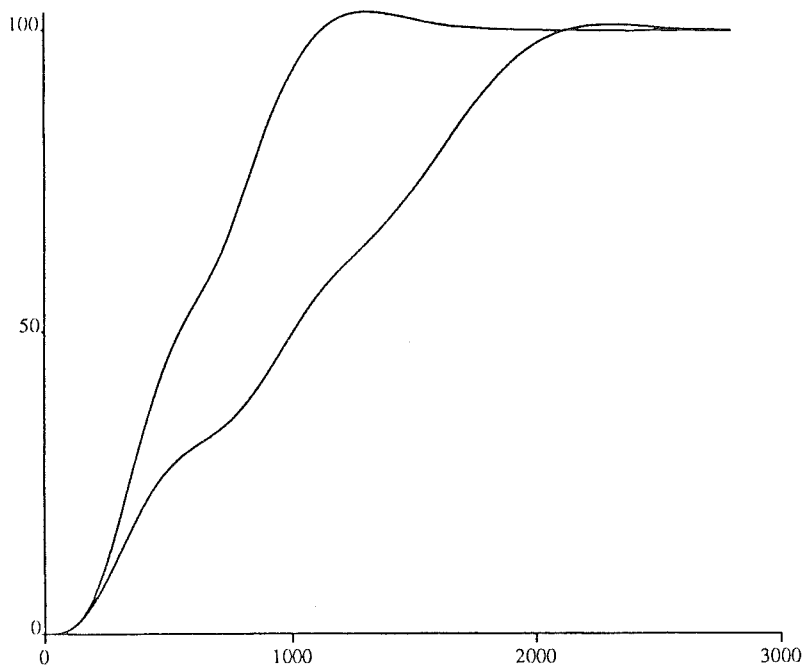
Simuleringarna utförda med Reg33 och Sub2.



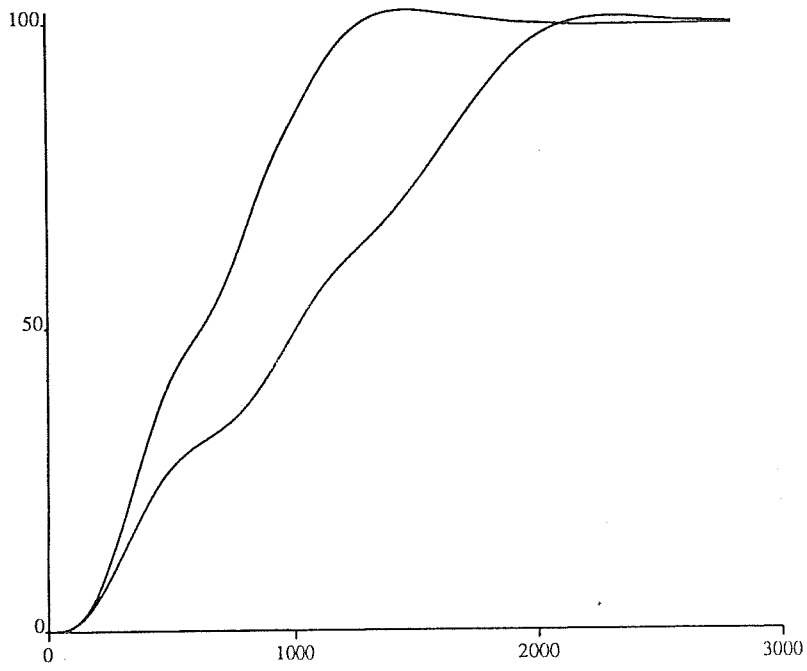
Figur 6.2.5.1  $V_{max} = 0.2$ .



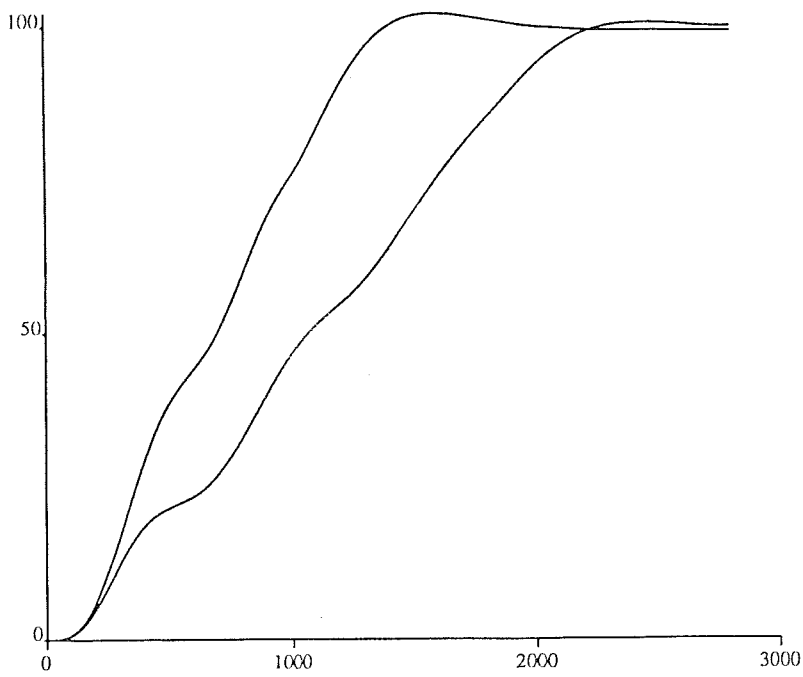
Figur 6.2.5.2  $V_{max} = 0.15$ .



Figur 6.2.5.3  $V_{max} = 0.10$ .



Figur 6.2.5.4  $V_{max} = 0.09$ .



Figur 6.2.5.5  $V_{max} = 0.08$ .

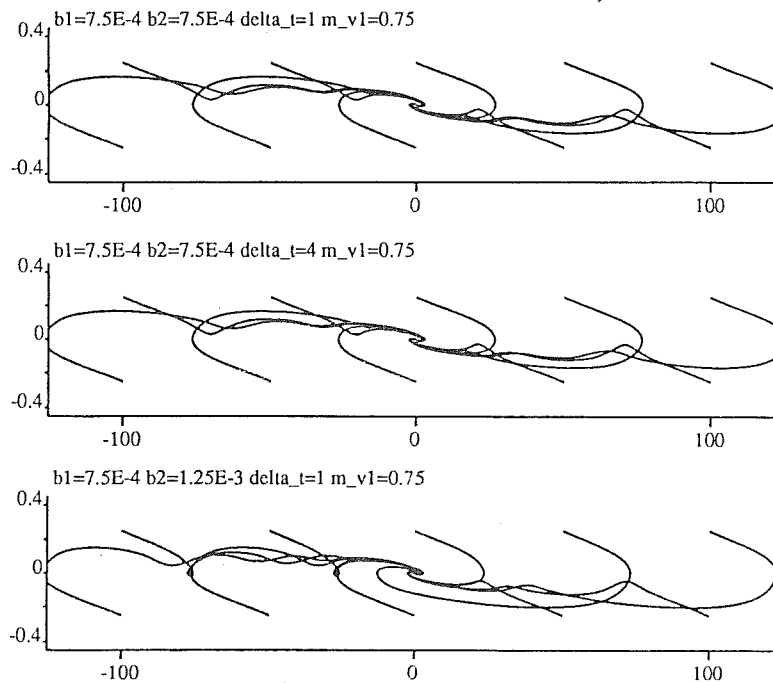


## 6.2.6 Robusthetsanalys 1-1

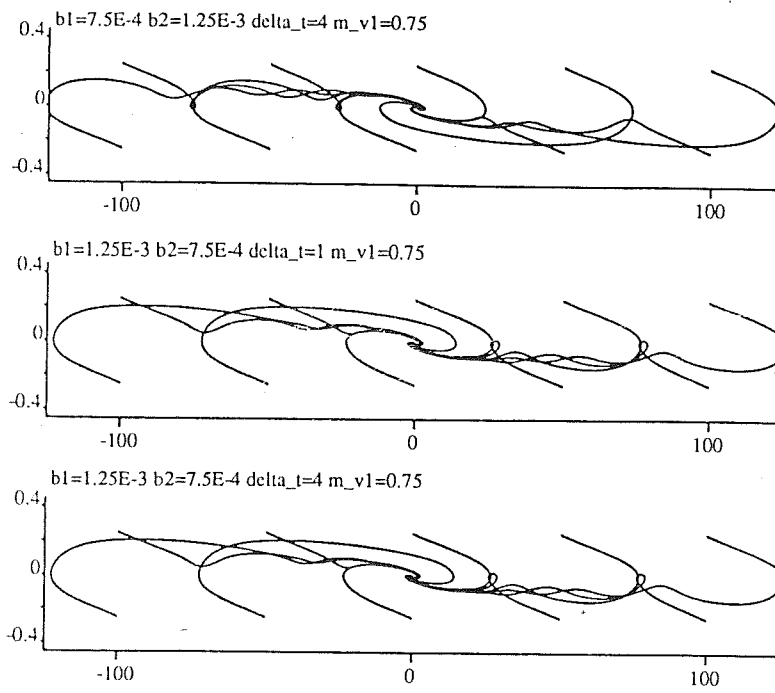
För robusthetsanalysen gäller följande parameterintervall :

$k_p$	= 0
$d$	= 3
$v\_delay$	= 3
$p\_delay$	= 5
$t\_limit$	= 60
$cn$	= 0.3

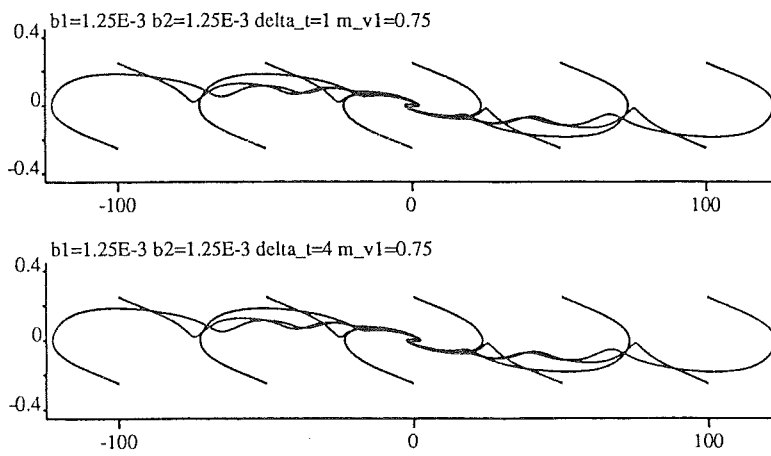
Simuleringarna utförda med Reg33 och Sub2.



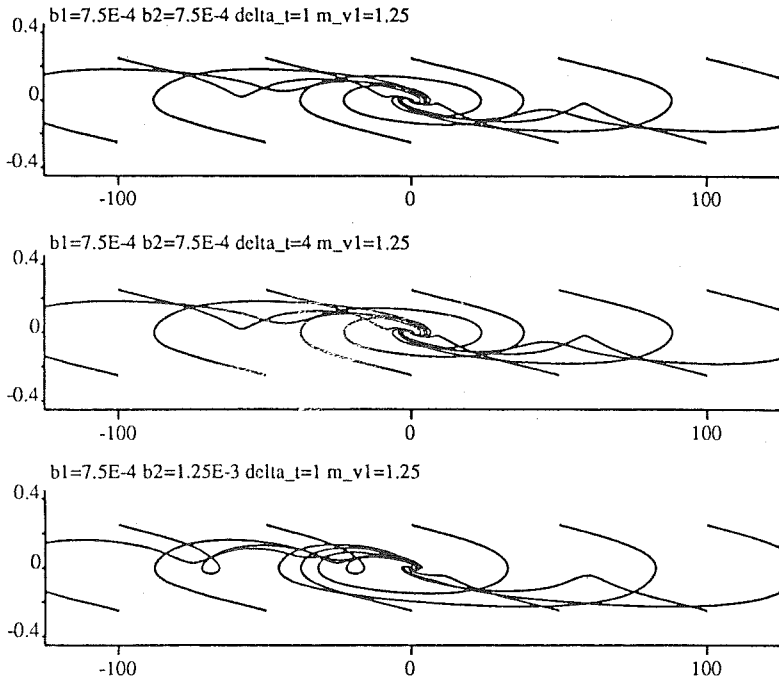
Figur 6.2.6.1



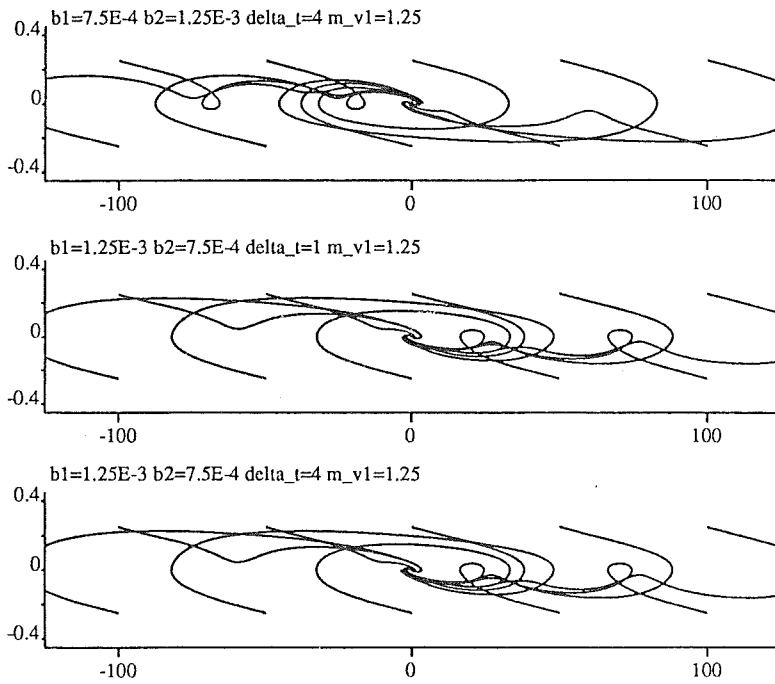
Figur 6.2.6.2



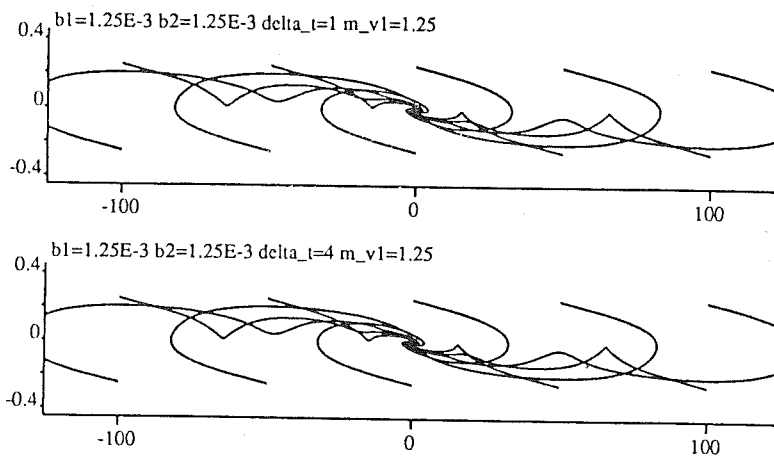
Figur 6.2.6.3



Figur 6.2.6.4



Figur 6.2.6.5

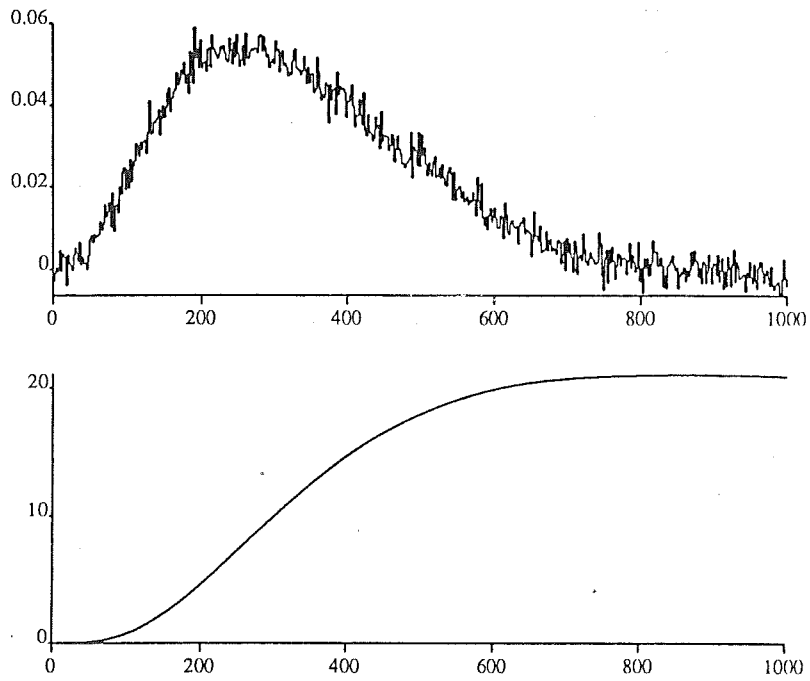


Figur 6.2.6.6

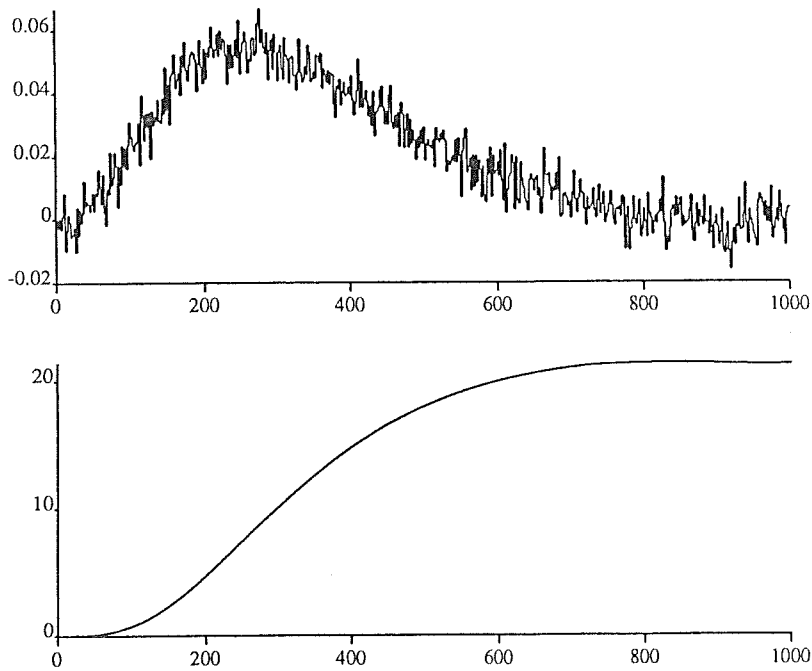
### 6.2.7 Brus- och offsetsimuleringar

$b_1$	$= 10^{-3}$
$b_2$	$= 10^{-3}$
$k_p$	$= 2 \cdot 10^{-5}$
$d$	$= 3$
$v\_delay$	$= 2$
$p\_delay$	$= 4$
$t\_limit$	$= 60$
$delta\_t$	$= 2$
$href$	$= 20$
$cn$	$= 0.3$

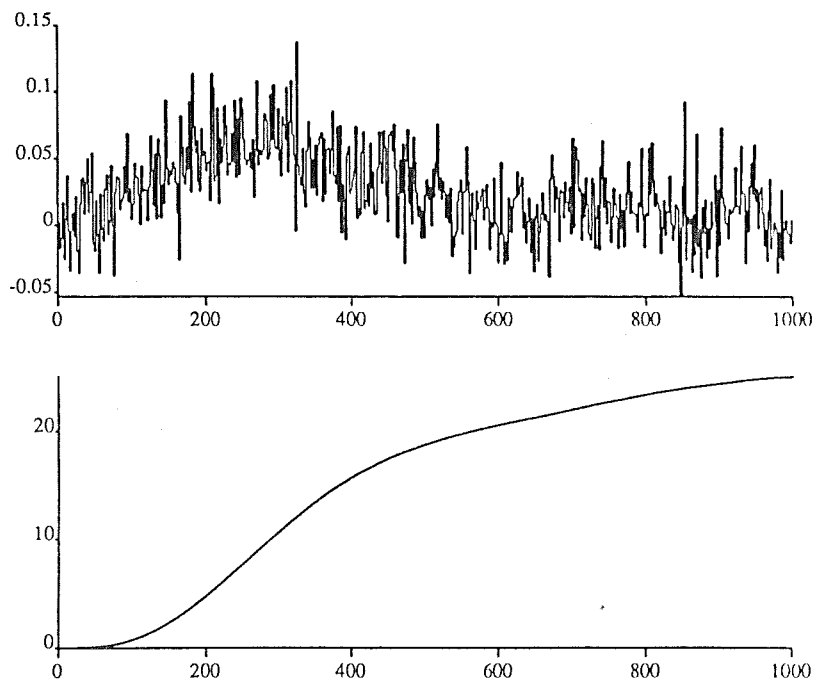
Simuleringarna utförda med Reg40 och Sub2. Figureerna visar den störda återkopplingssignalen överst och stegsvaret underst.



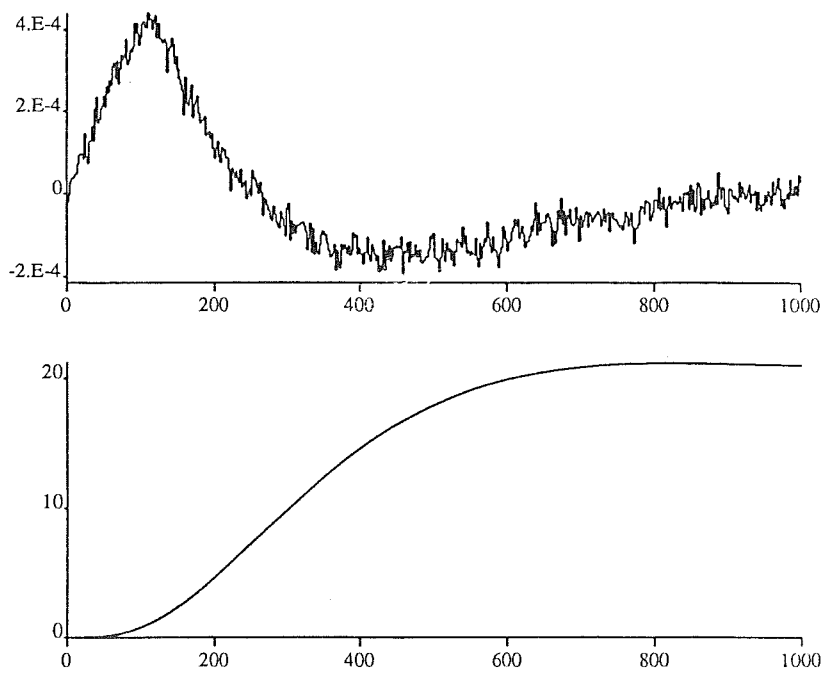
Figur 6.2.7.1 Hastighetsåterkoppling med brus. Standardavvikelsen  $\sigma = 2.5 \cdot 10^{-3}$ .



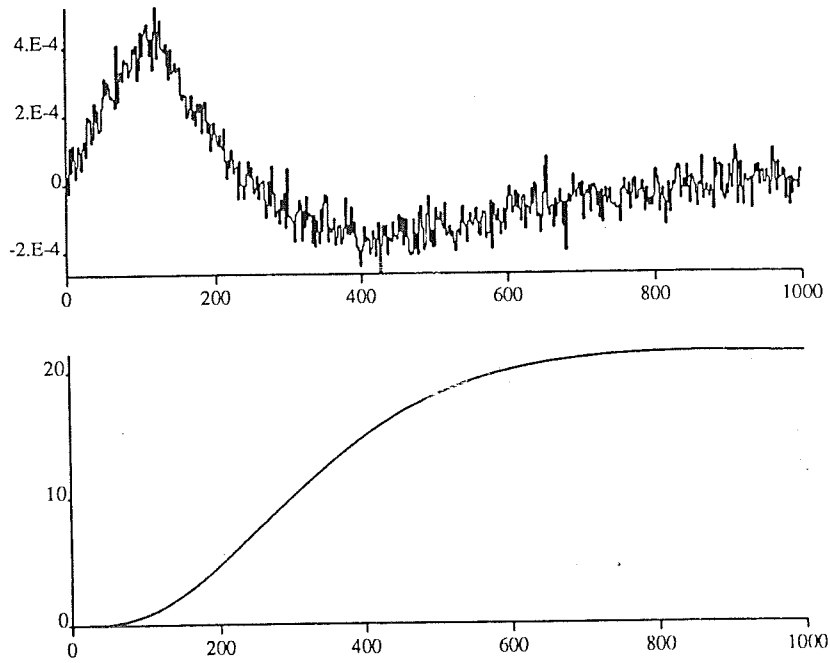
Figur 6.2.7.2 Hastighetsåterkoppling med brus. Standardavvikelsen  $\sigma = 5 \cdot 10^{-3}$ .



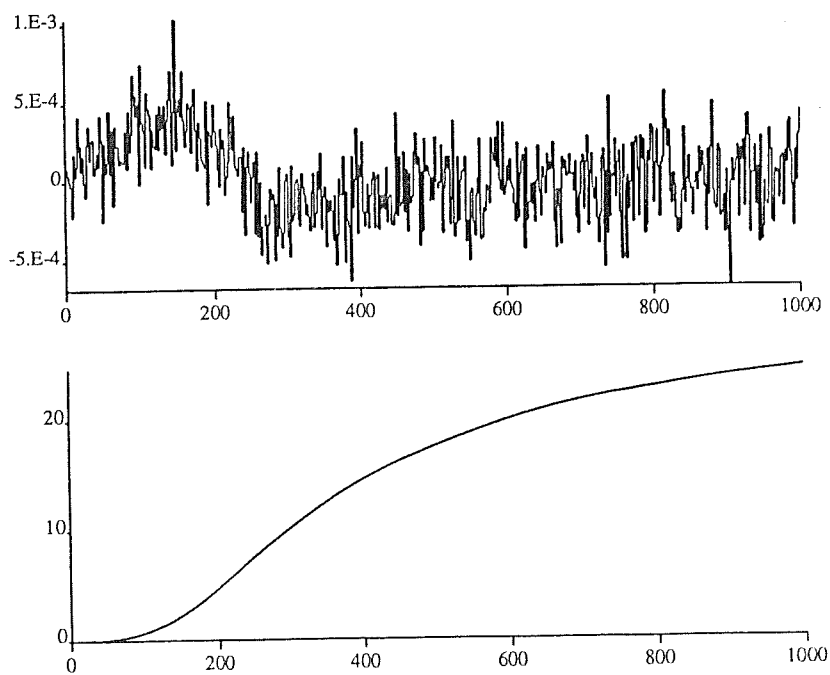
Figur 6.2.7.3 Hastighetsåterkoppling med brus. Standardavvikelsen  $\sigma = 2.5 \cdot 10^{-2}$ .



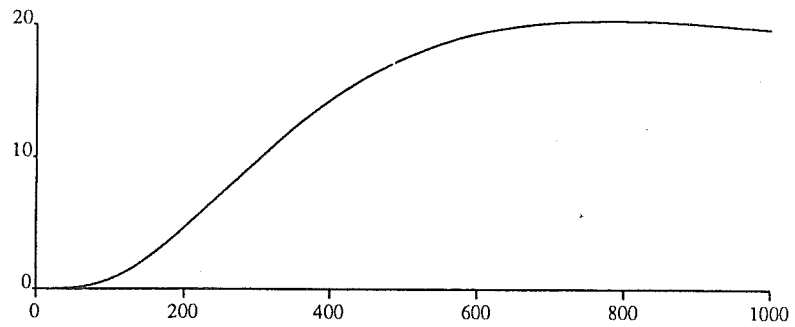
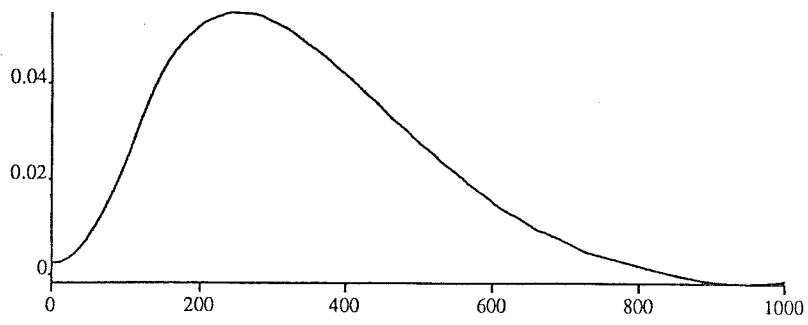
Figur 6.2.7.4 Accelerationssåterkoppling med brus. Standardavvikelsen  $\sigma = 2 \cdot 10^{-5}$ .



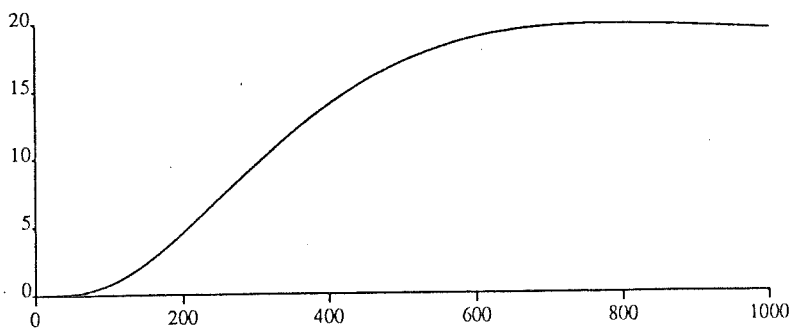
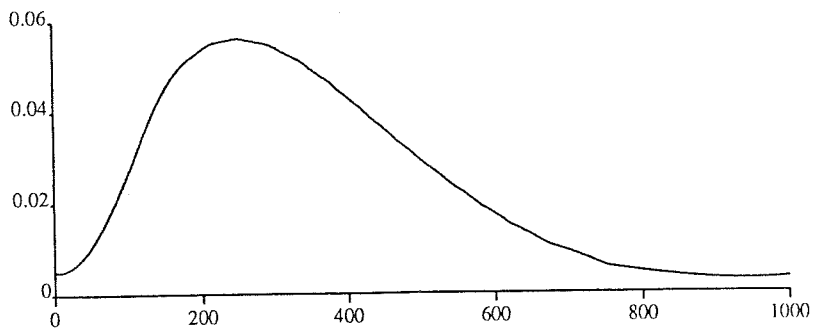
Figur 6.2.7.5 Accelerationssåterkoppling med brus. Standardavvikelsen  $\sigma = 4 \cdot 10^{-5}$ .



Figur 6.2.7.6 Accelerationssåterkoppling med brus. Standardavvikelsen  $\sigma = 2 \cdot 10^{-4}$ .

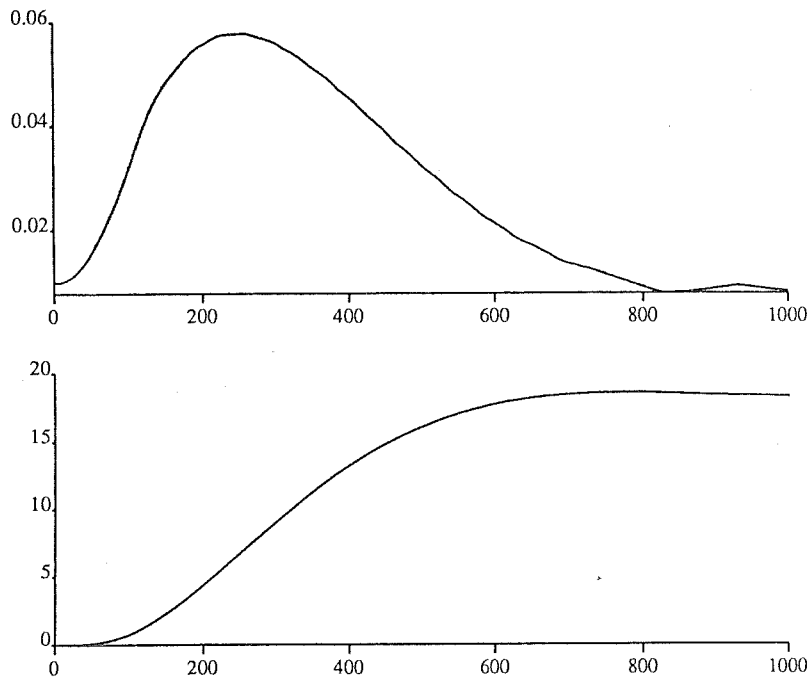


Figur 6.2.7.7 Hastighetsåterkoppling med offset =  $2.5 \cdot 10^{-3}$ .

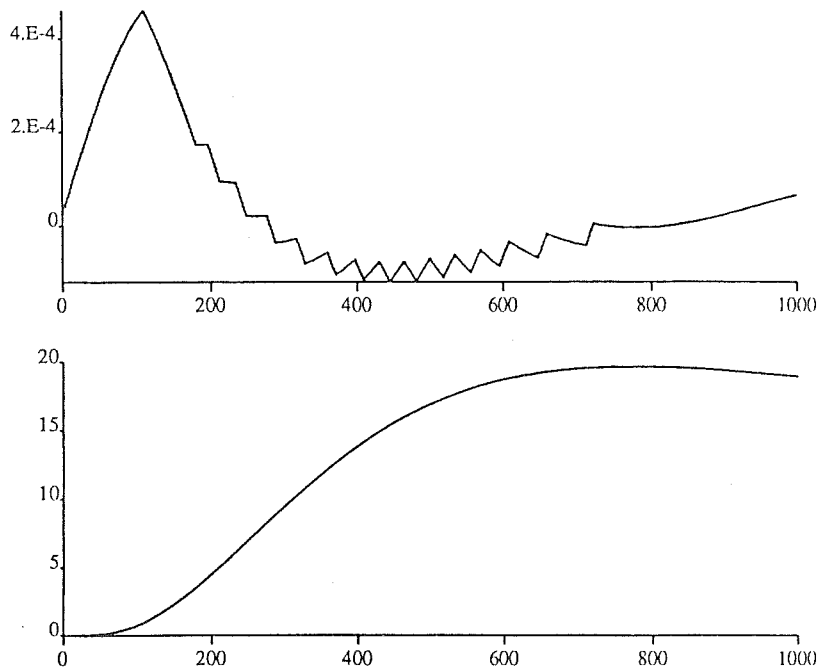


Figur 6.2.7.8 Hastighetsåterkoppling med offset =  $5 \cdot 10^{-3}$ .

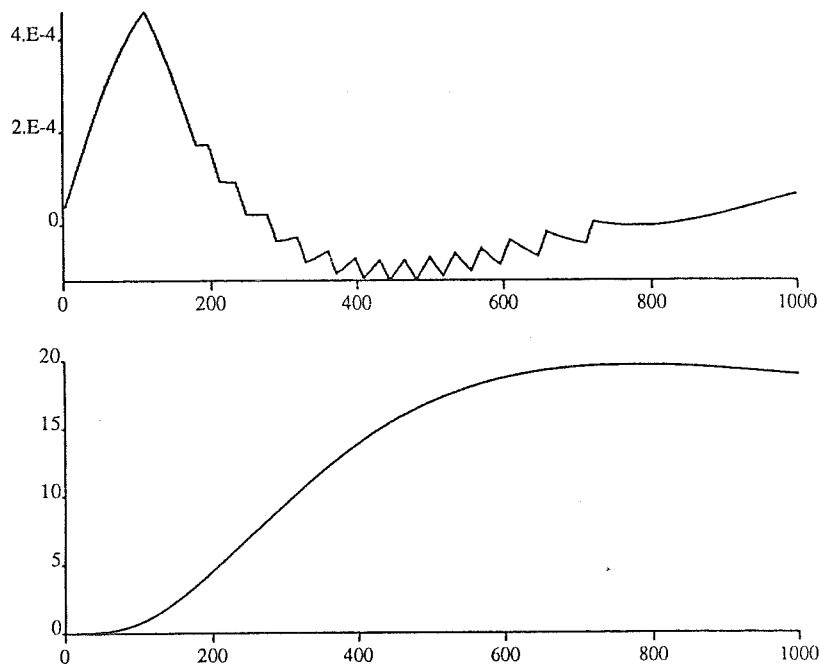




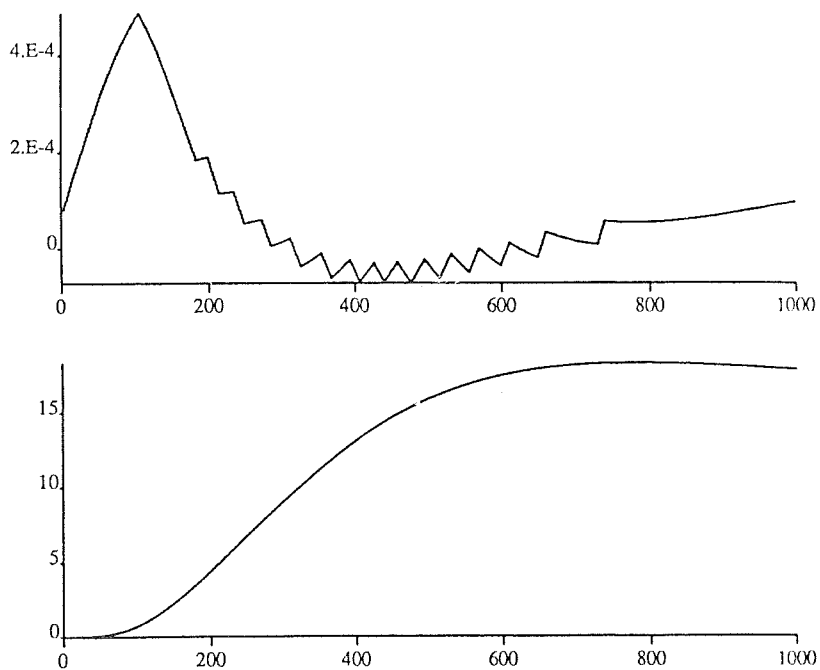
Figur 6.2.7.9 Hastighetsåterkoppling med offset =  $10^{-2}$ .



Figur 6.2.7.10 Accelerationssåterkoppling med offset =  $2 \cdot 10^{-5}$ .



Figur 6.2.7.11 Accelerationssåterkoppling med offset =  $4 \cdot 10^{-5}$ .



Figur 6.2.7.12 Accelerationssåterkoppling med offset =  $8 \cdot 10^{-5}$ .

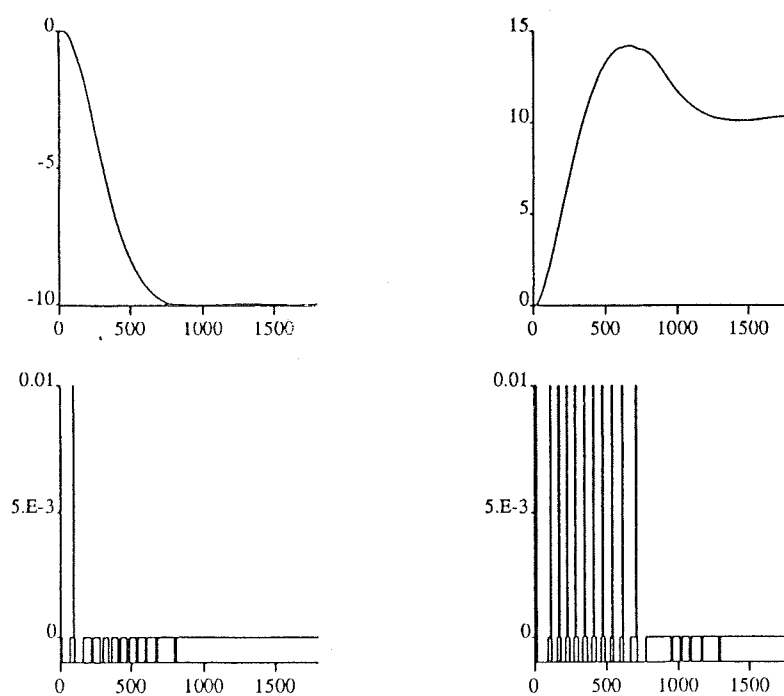
## 6.3 Appendix C

### 6.3.1 Simuleringar 1 - 10 systemet

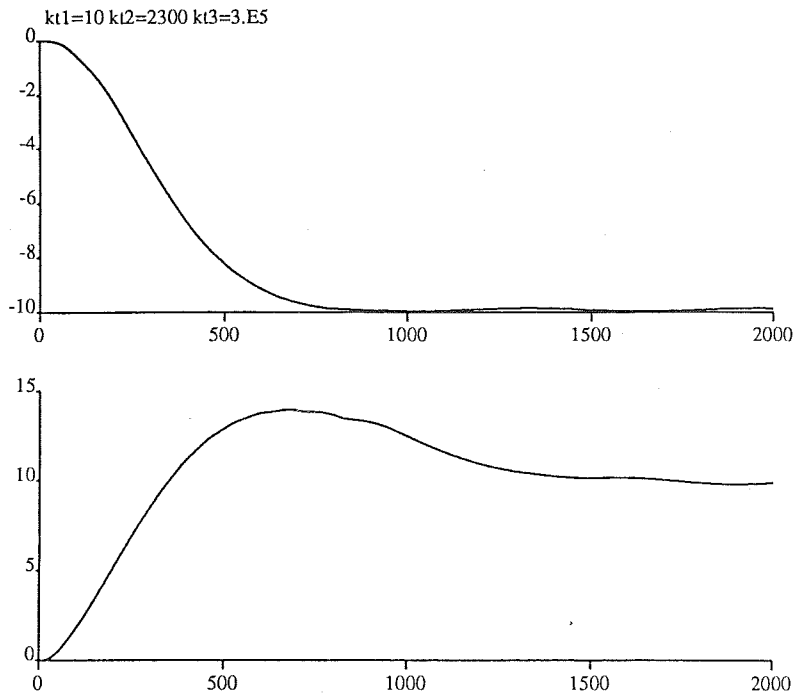
För simuleringarna nedan gäller om inte annat anges :

$b_1$	$= 10^{-2}$
$b_2$	$= 10^{-3}$
$k_p$	$= 2 \cdot 10^{-5}$
$d$	$= 3$
$v\_delay$	$= 2$
$p\_delay$	$= 4$
$t\_limit$	$= 60$
$delta\_t$	$= 2$

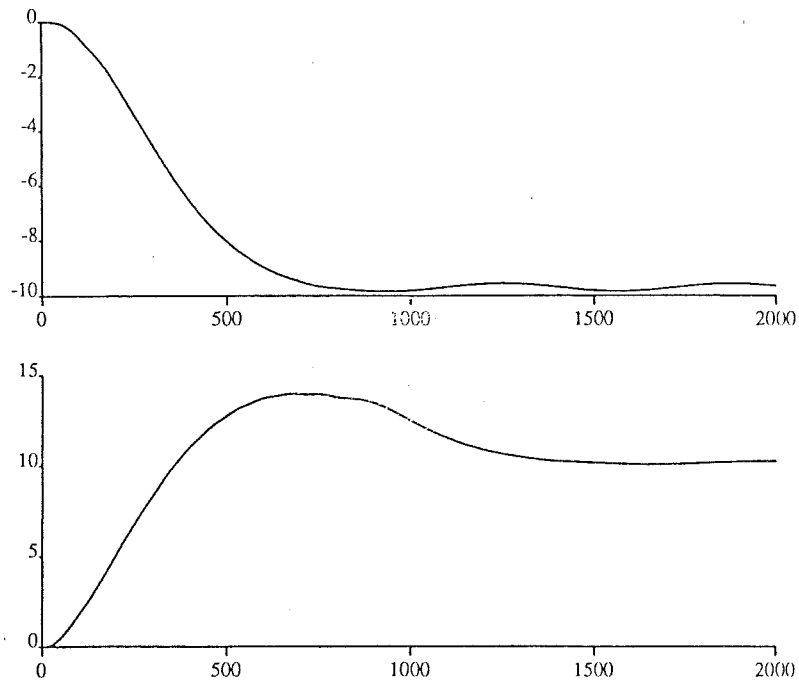
Simuleringarna utförda med Reg34 och Sub2.



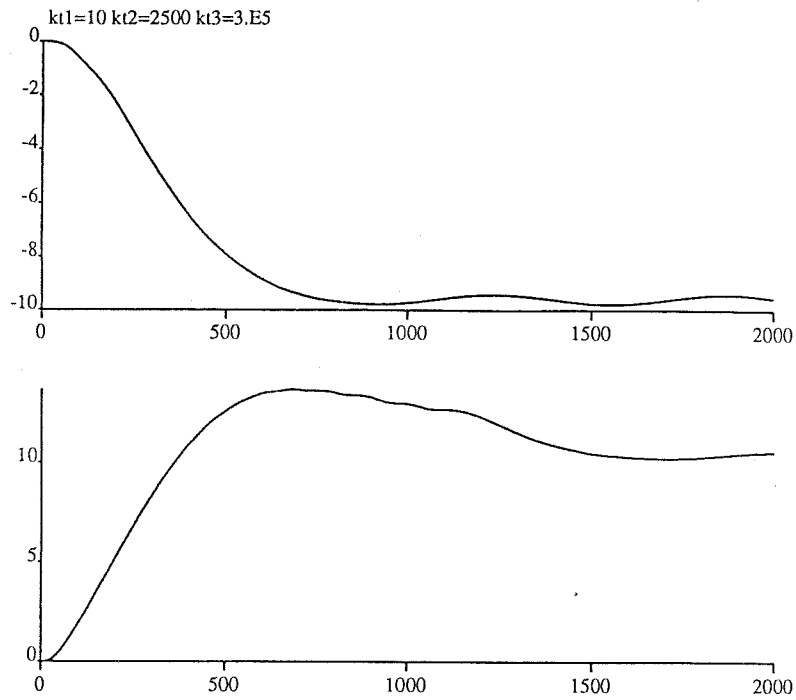
Figur 6.3.1.1  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2200$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ .



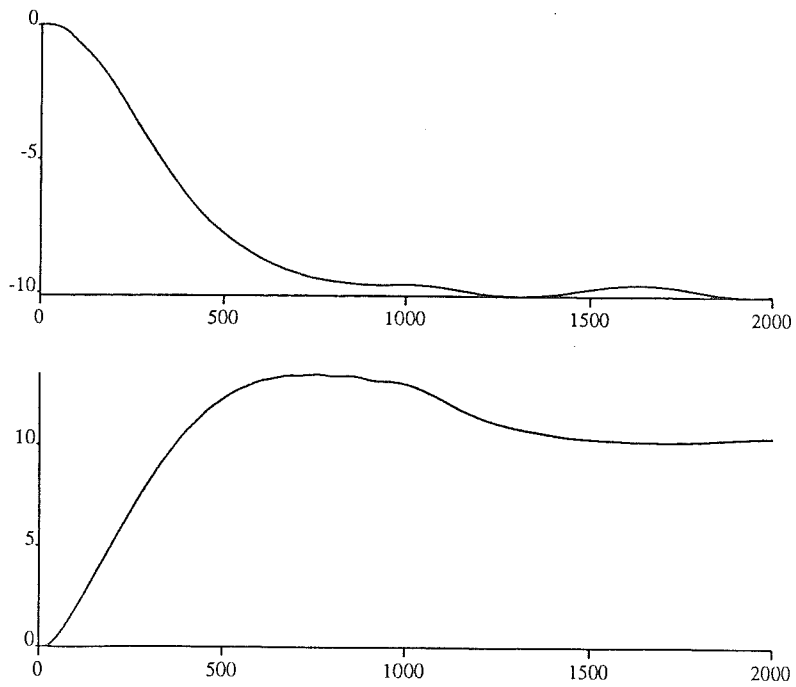
Figur 6.3.1.2  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2300$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ .



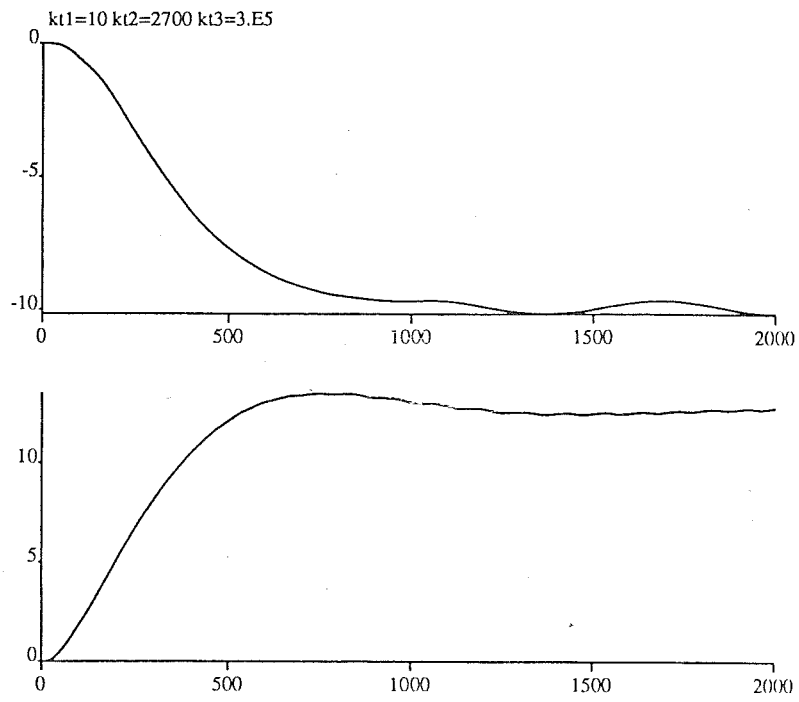
Figur 6.3.1.3  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2400$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ .



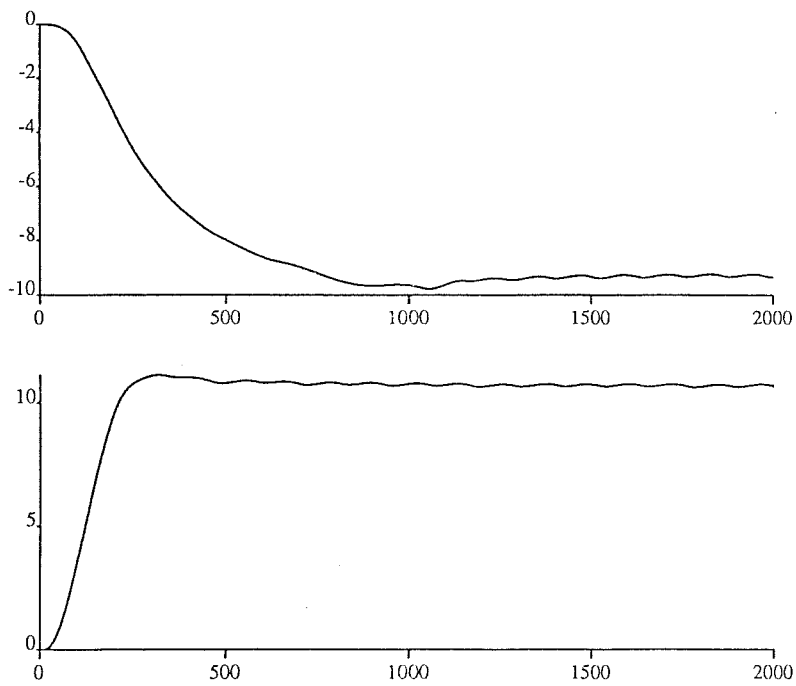
Figur 6.3.1.4  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2500$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ .



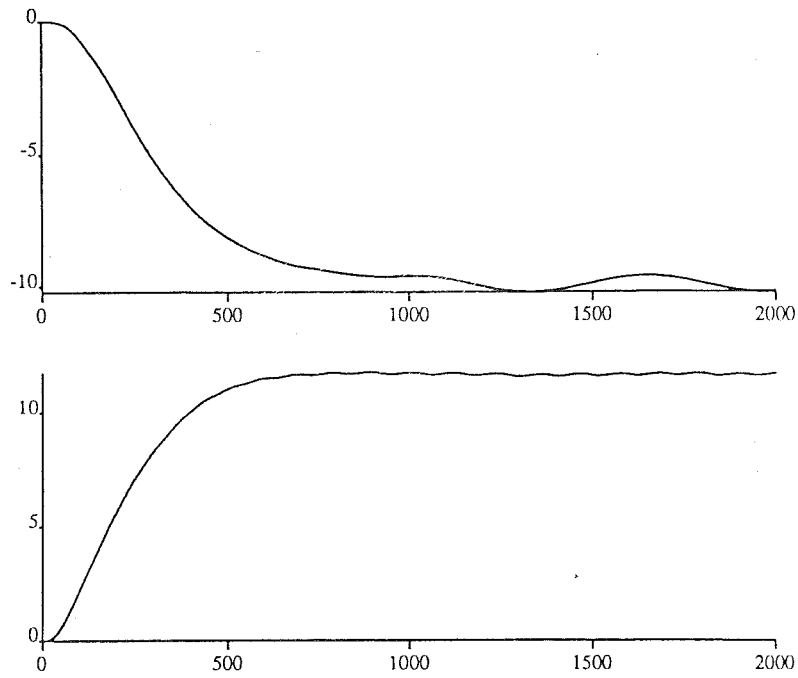
Figur 6.3.1.5  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2600$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ .



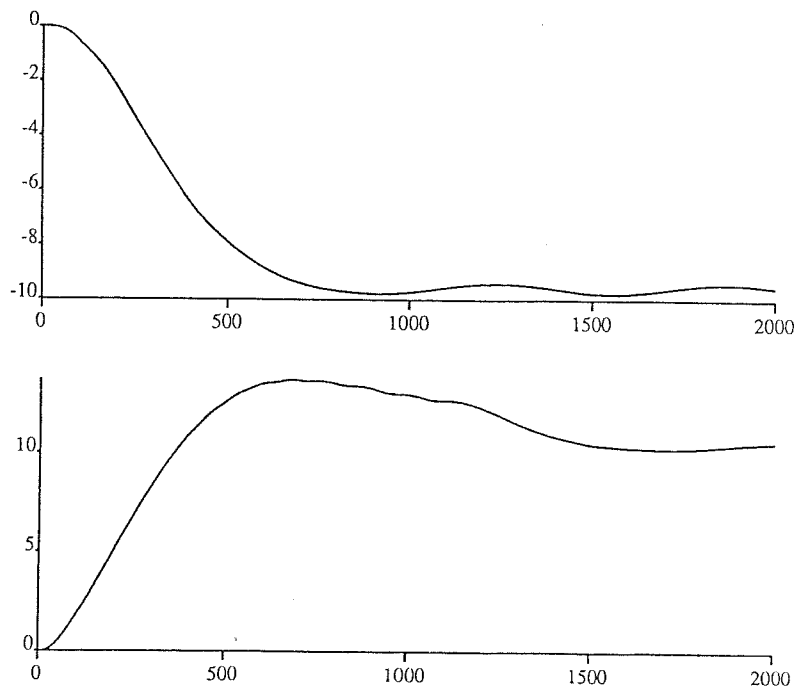
Figur 6.3.1.6  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2700$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ .



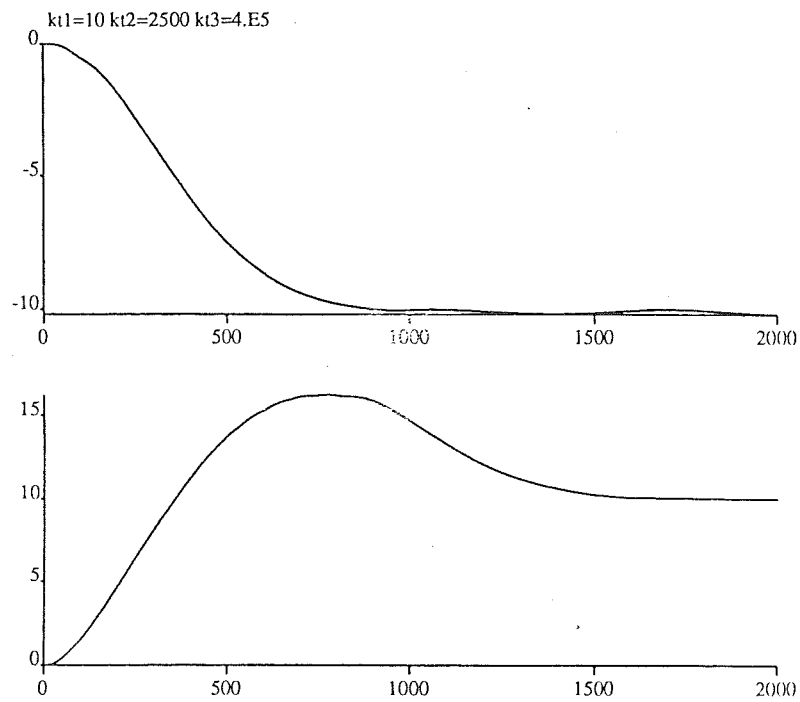
Figur 6.3.1.7  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2500$  och  $K_{T3} = 1 \cdot 10^5$ .



Figur 6.3.1.8  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2500$  och  $K_{T3} = 2 \cdot 10^5$ .



Figur 6.3.1.9  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2500$  och  $K_{T3} = 3 \cdot 10^5$ .



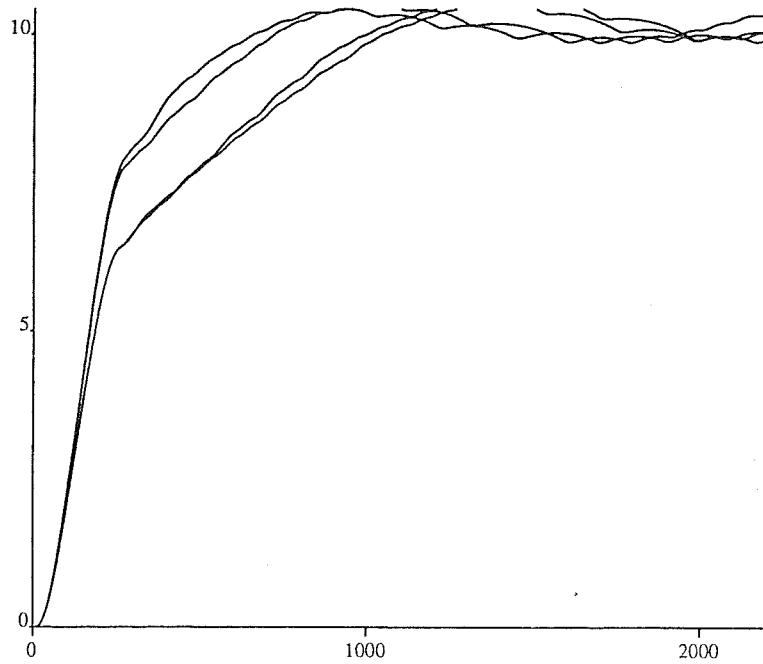
Figur 6.3.1.10  $K_{T1} = 10$ ,  $K_{T2} = 2500$  och  $K_{T3} = 4 \cdot 10^5$ .

### 6.3.2 Bestämning av $k_V$ .

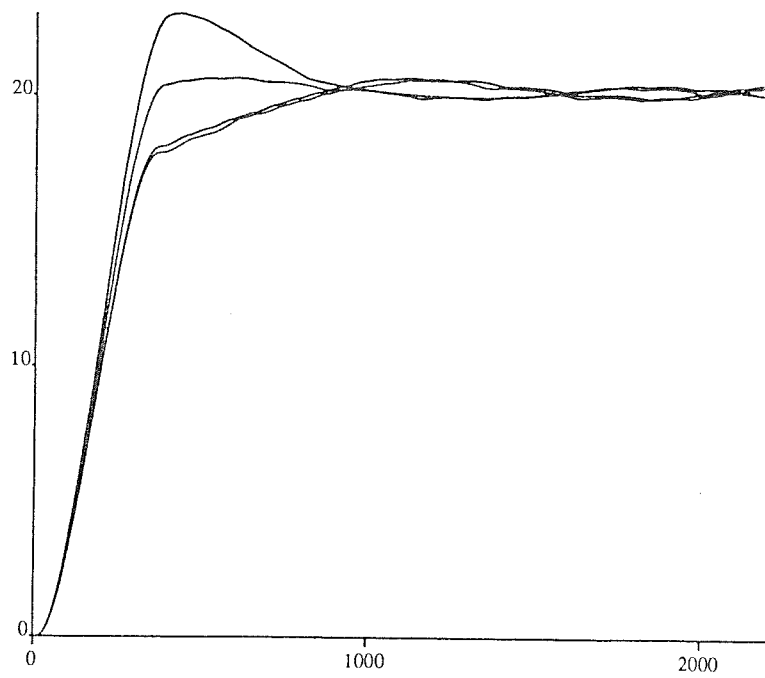
$b_1$	$= 10^{-2}$
$b_2$	$= 10^{-3}$
$k_p$	$= 0$
$d$	$= 3$
$v\_delay$	$= 2$
$p\_delay$	$= 4$
$t\_limit$	$= 60$
$delta\_t$	$= 1$

Simuleringarna utförda med Reg40 och Sub2.

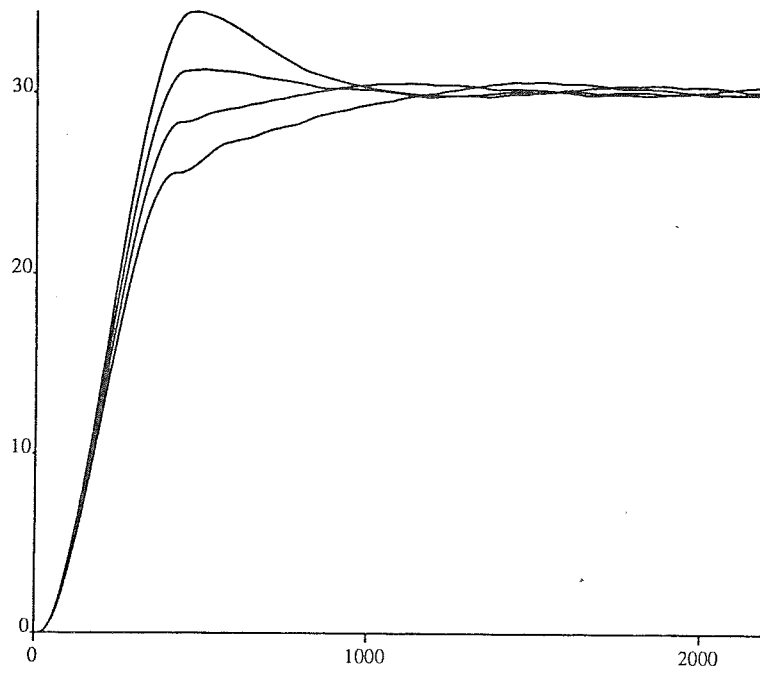




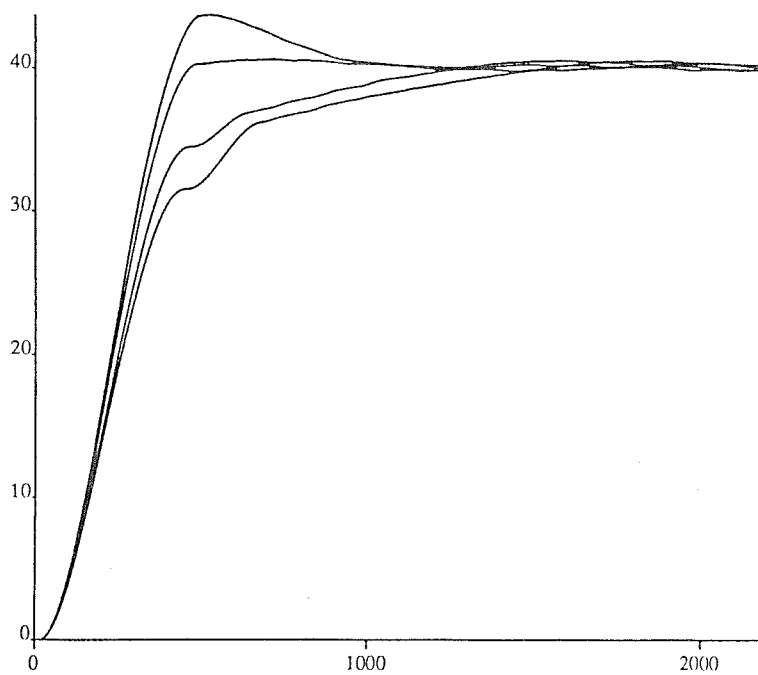
Figur 6.3.2.1 Stegsvär  $h_{ref} = 10$ . Från vänster  $k_v = 300, 500, 600$  och  $700$ .



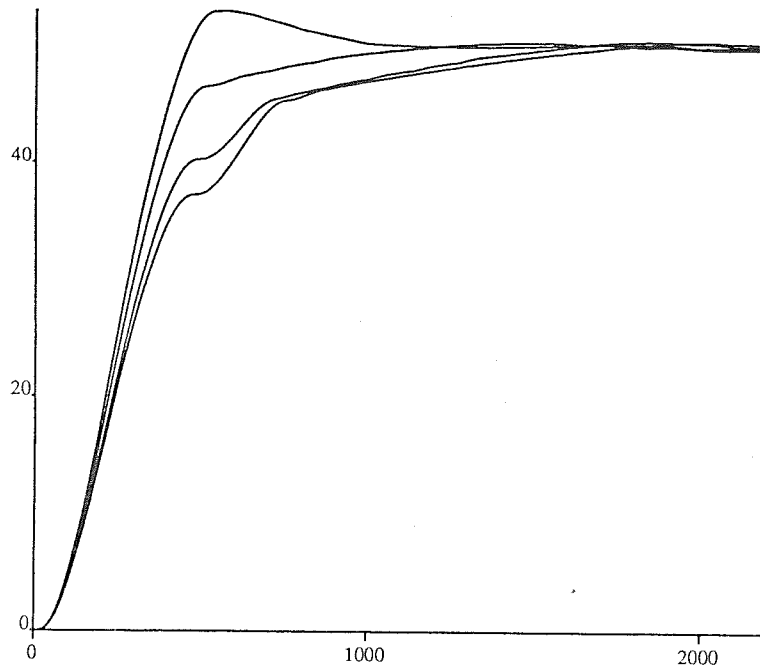
Figur 6.3.2.2 Stegsvär  $h_{ref} = 20$ . Från vänster  $k_v = 300, 500, 600$  och  $700$ .



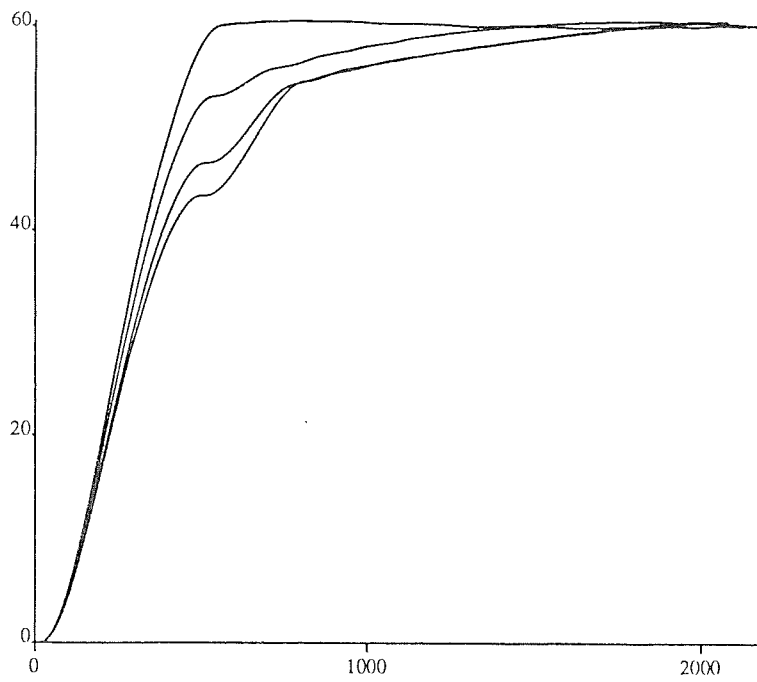
Figur 6.3.2.3 Stegsvär  $h_{ref} = 30$ . Från vänster  $k_v = 300, 500, 600$  och  $700$ .



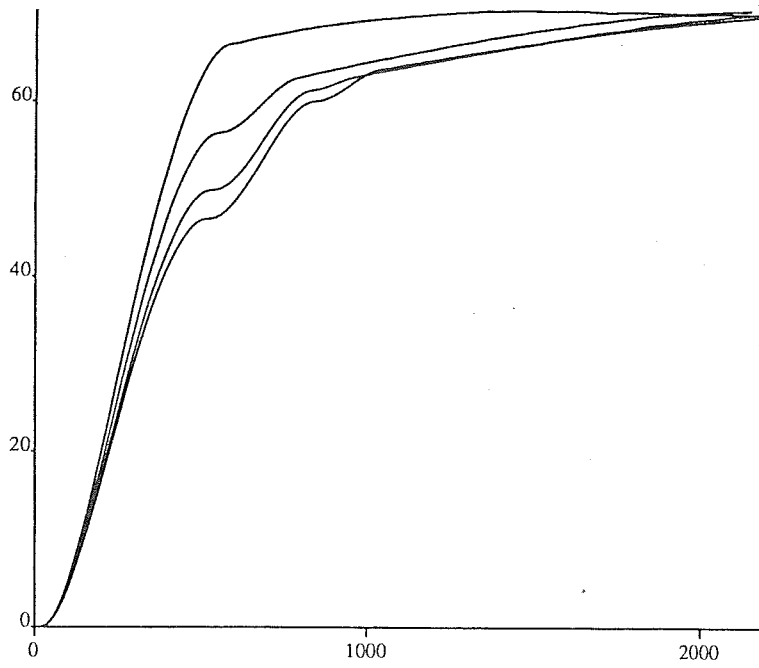
Figur 6.3.2.4 Stegsvär  $h_{ref} = 40$ . Från vänster  $k_v = 300, 500, 600$  och  $700$ .



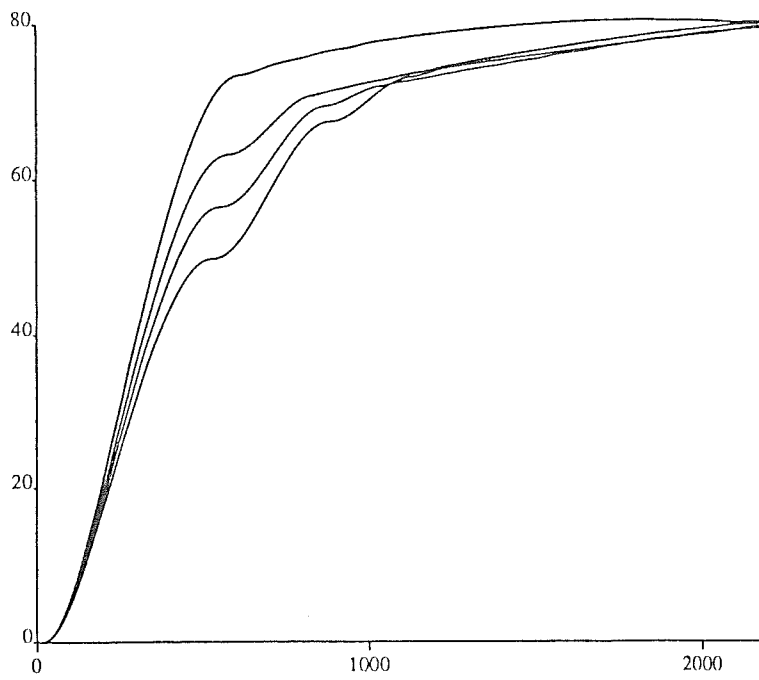
Figur 6.3.2.5 Stegsvär  $h_{ref} = 50$ . Från vänster  $k_v = 300, 500, 600$  och  $700$ .



Figur 6.3.2.6 Stegsvär  $h_{ref} = 60$ . Från vänster  $k_v = 300, 500, 600$  och  $700$ .



Figur 6.3.2.7 Stegsvar  $h_{ref} = 70$ . Från vänster  $k_V = 300, 500, 600$  och  $700$ .



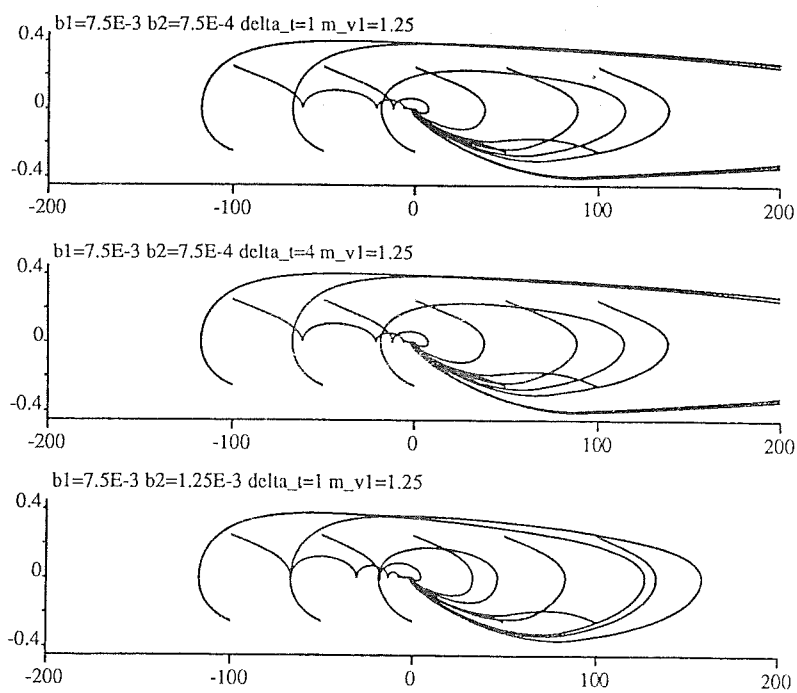
Figur 6.3.2.8 Stegsvar  $h_{ref} = 80$ . Från vänster  $k_V = 300, 500, 600$  och  $700$ .

### 6.3.3 Robusthetsanalys 1 - 10

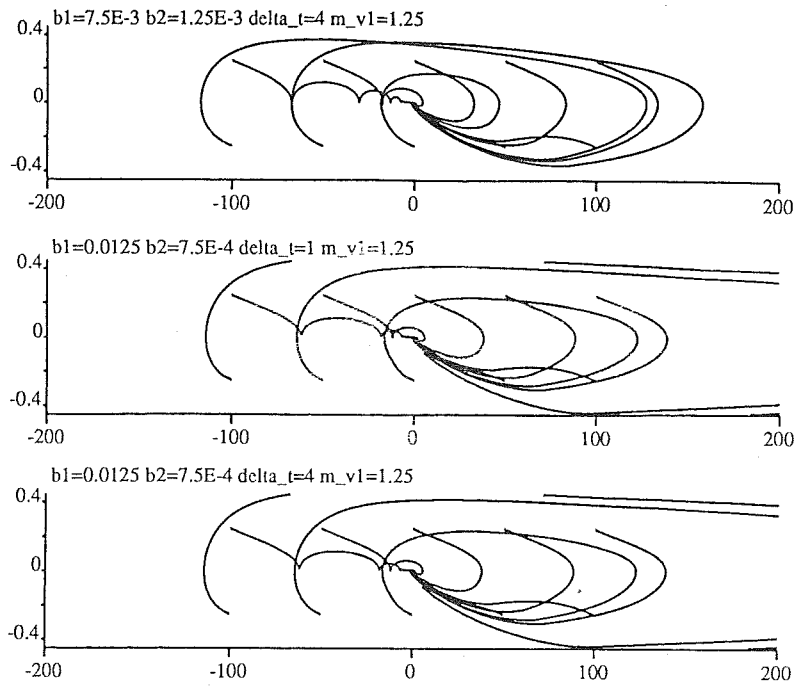
För robusthetsanalysen gäller följande parameterintervall :

$k_p$	= 0
$d$	= 3
$v\_delay$	= 3
$p\_delay$	= 5
$t\_limit$	= 60
$cn$	= 0.3

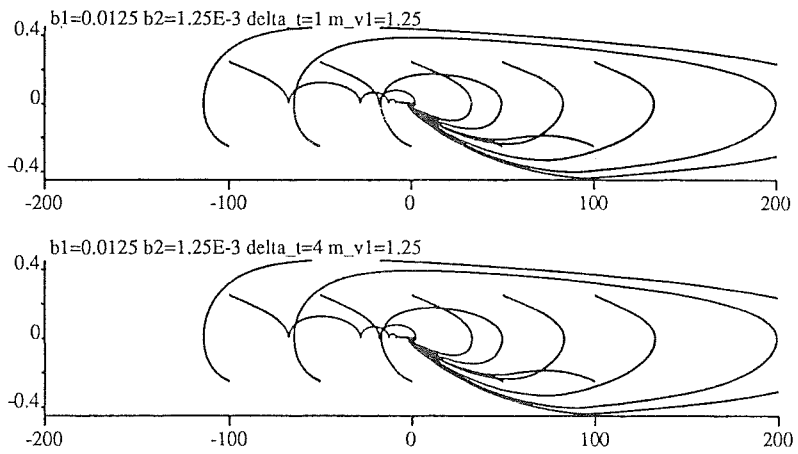
Simuleringarna utförda med Reg33 och Sub2.



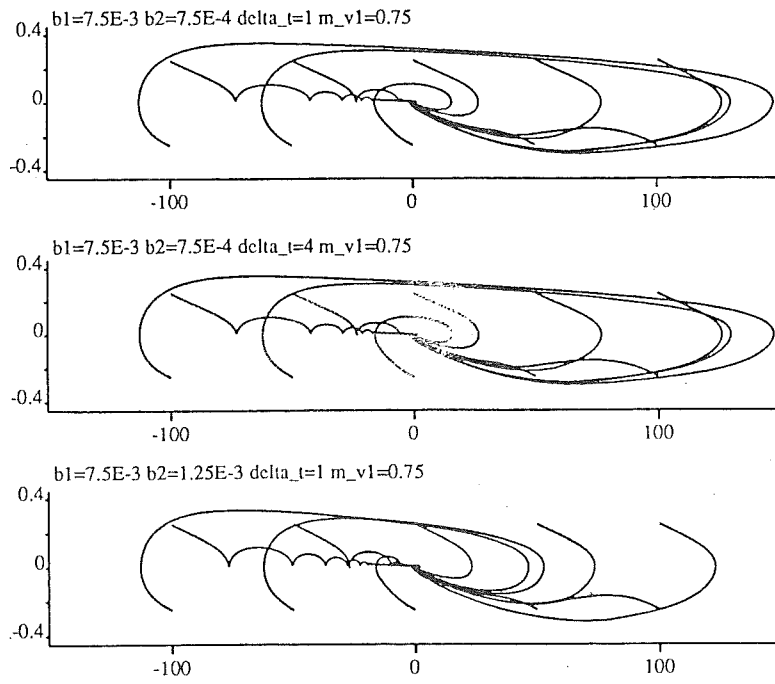
Figur 6.3.3.1



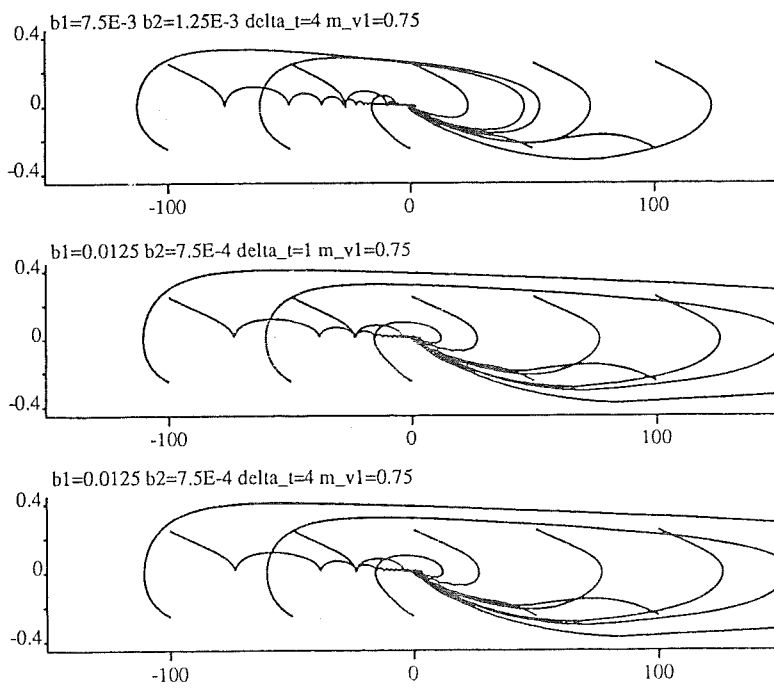
Figur 6.3.3.2



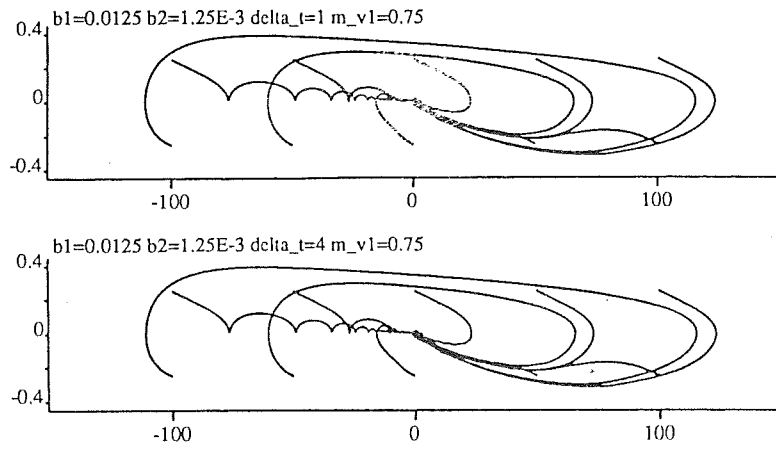
Figur 6.3.3.3



Figur 6.3.3.4



Figur 6.3.3.5



Figur 6.3.3.6

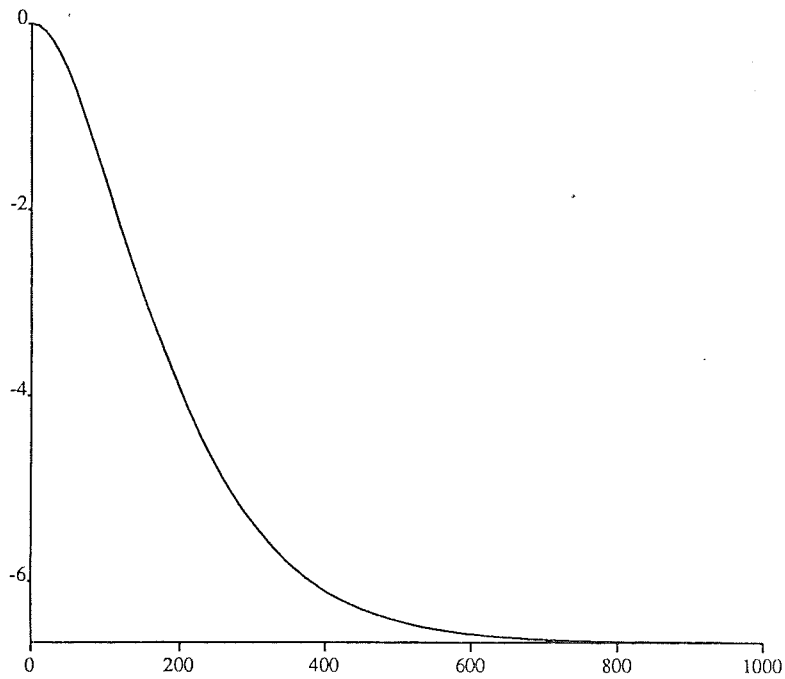


## 6.4 Appendix D

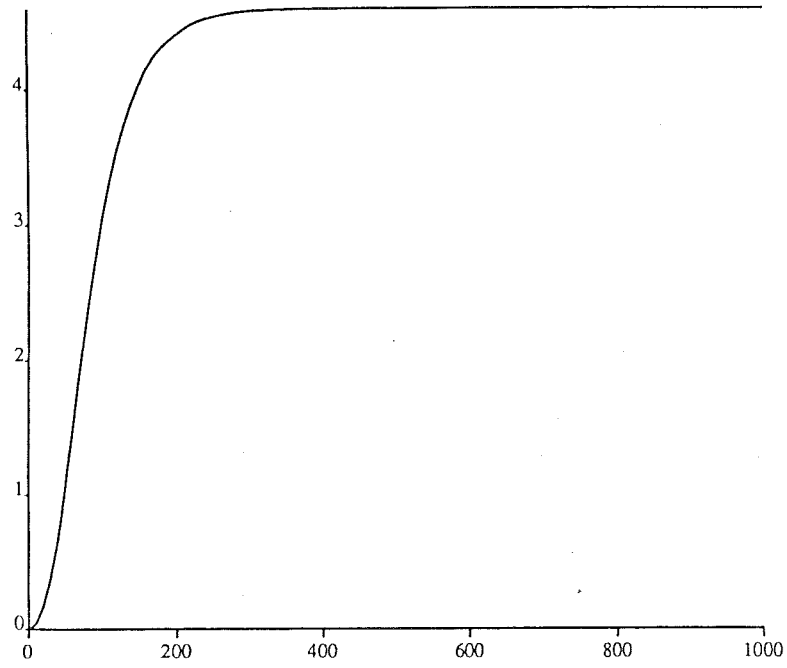
### 6.4.1 Simuleringar av det samplade systemet

För simuleringarna nedan har systemmodell Sub3LinV och regulatormodell Reg61 använts. Vidare gäller :

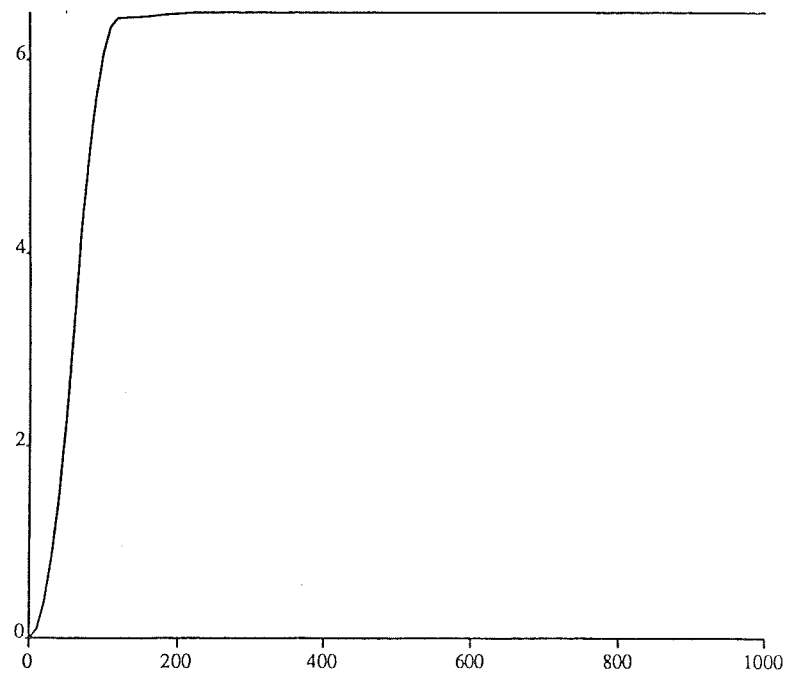
$$\begin{aligned}h_{\text{ref}} &= 10 \\ \text{delta\_t} &= 60 \\ k_{10} &= 1e-4\end{aligned}$$



Figur 6.4.1.1  $I_1 = KT1 = -0.008$ ,  $I_2 = KT2 = 2.18$ . Polplacering  $z_{1,2} = 0.55$ .



Figur 6.4.1.2  $I_1 = KT1 = 0.017$ ,  $I_2 = KT2 = 3.90$ . Polplacering  $z_{1,2} = 0.3$ .



Figur 6.4.1.3  $I_1 = KT1 = 0.037$ ,  $I_2 = KT2 = 4.69$ . Polplacering  $z_{1,2} = 0$ .

För simuleringarna nedan har systemmodell Sub3LinV och regulatormodell Reg65 använts för de vänstra figurerna och systemmodell sub2 och regulatormodell reg64 använts för de högra figurerna. Vidare gäller :

$$h_{ref} = 10$$

För de vänstra figurerna gäller :

$$\text{maxandr} = 9e9$$

$$\text{delta}_t = 60$$

För de högra figurerna gäller :

$$b_1 = 10^{-2}$$

$$b_2 = 10^{-2}$$

$$k_p = 2 \cdot 10^{-5}$$

$$v\_delay = 4$$

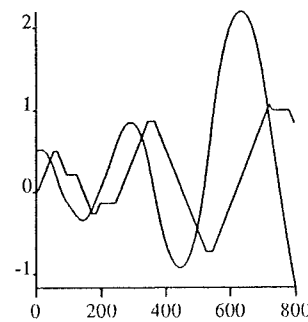
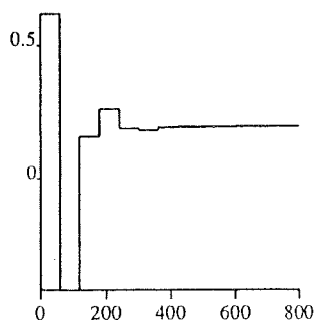
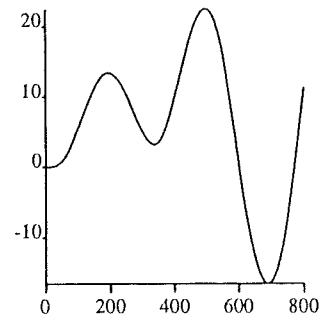
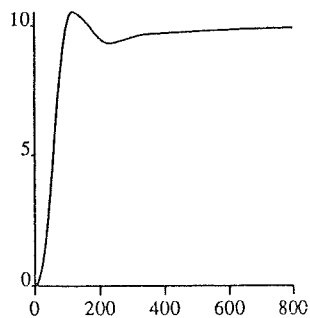
$$p\_delay = 4$$

$$\text{delta}_t = 1$$

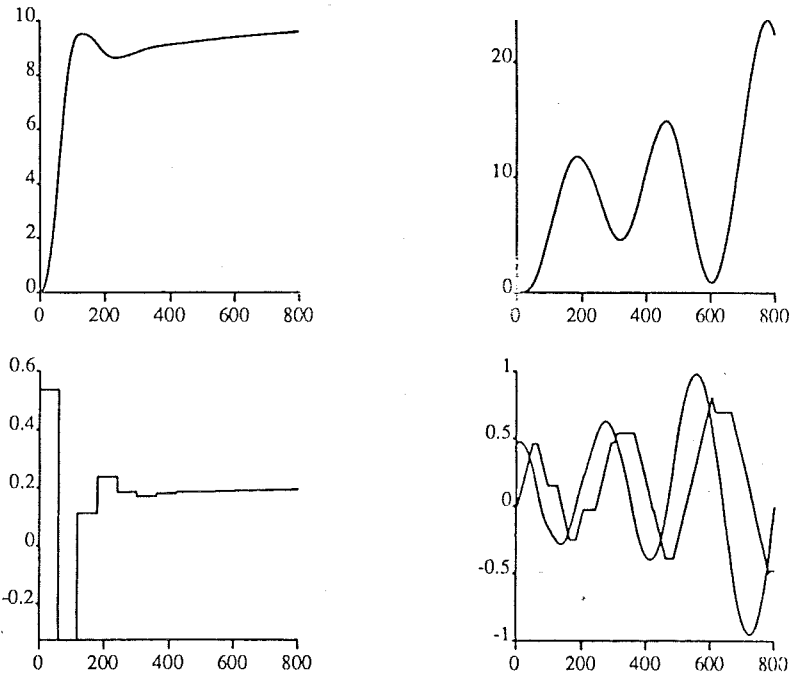
$$cn = 0.3$$

$$\text{sampt} = 60$$

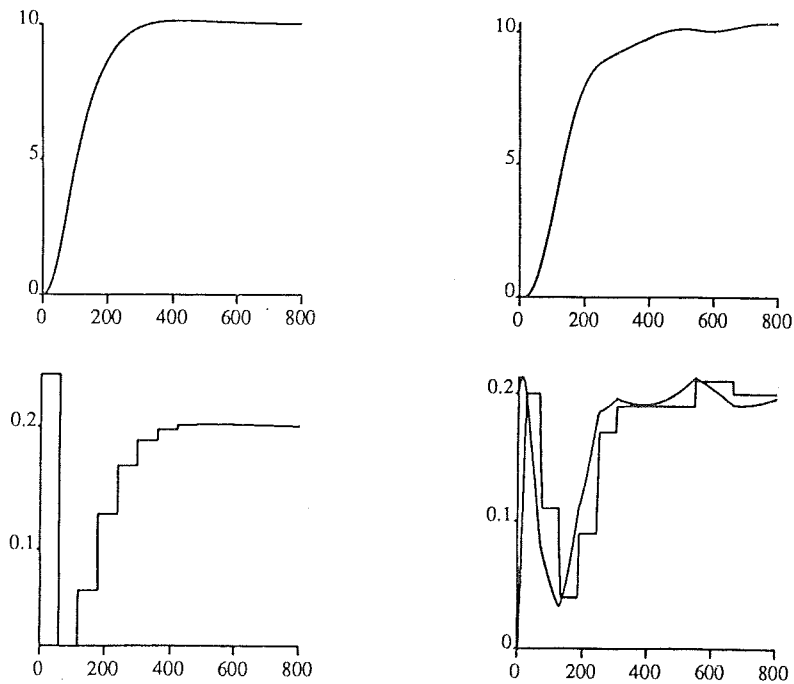
$$\text{maxv} = 9e9$$



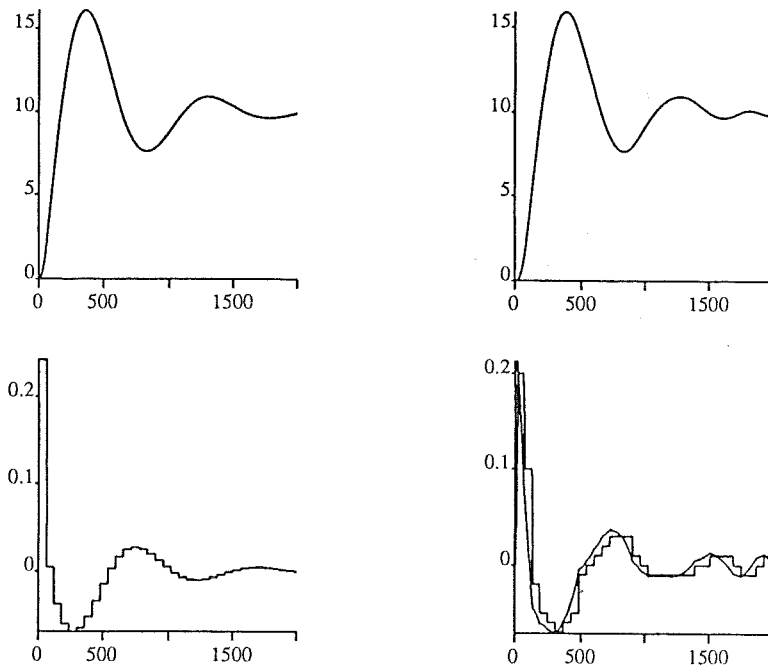
Figur 6.4.1.4 Övergång från momentant föränderligt V, vänstra figuren, till icke momentant föränderligt V, högra figuren.  $k_{10} = 1e-4$  och  $k_{ra} = 2e-5$ . Polplacering  $z_{1,2} = 0.55$  och  $z_3 = 0$ .  $l_1 = 0.0503$ ,  $l_2 = 4.71$  och  $l_3 = 1.9e-4$ .



Figur 6.4.1.5 Övergång från momentant föränderligt V, vänstra figuren, till icke momentant föränderligt V, högra figuren.  $k_{10} = 1e-4$  och  $k_{ra} = 2e-5$ . Polplacering  $z_{1,2} = 0.8$  och  $z_3 = 0.2$ .  $l_1 = 0.0465$ ,  $l_2 = 4.53$  och  $l_3 = 1.19e-4$ .



Figur 6.4.1.6 Övergång från momentant föränderligt V, vänstra figuren, till icke momentant föränderligt V, högra figuren.  $k_{10} = 1e-4$  och  $k_{ra} = 2e-5$ . Polplacering  $z_{1,2} = 0.4$  och  $z_3 = 0.6$ .  $l_1 = 0.0201$ ,  $l_2 = 3.71$  och  $l_3 = 1.38e-4$ .



Figur 6.4.1.7 Övergång från momentant föränderligt  $V$ , vänstra figuren, till icke momentant föränderligt  $V$ , högra figuren.  $k_{10} = 0$  och  $k_{ra} = 0$ . Polplacering  $z_{1,2} = 0.4$  och  $z_3 = 0.6$ .  $l_1 = 0.0201$ ,  $l_2 = 3.71$  och  $l_3 = 1.38e-4$ .

## 6.5 Appendix E

### 6.5.1 Allmänt om samplade system

Teorin i detta avsnitt är hämtad från Computer Controlled Systems, sid 34 - 38, av Karl J. Åström och Björn Wittenmark.

Antag att vi har ett kontinuerligt system givet på följande form :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

där  $x$  är en vektor.

Givet tillståndet,  $x$ , vid tiden  $t_n$  så är framtida tillstånd vid tiden  $t$  fullständigt bestämda av:

$$x(t) = e^{A(t-t_n)}x(t_n) + \int_{t_n}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

och tillståndet vid tiden  $t_{n+1}$ :

$$x(t_{n+1}) = e^{A(t_{n+1}-t_n)}x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{A(t_{n+1}-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Vi önskar sampla systemet vid tidpunkterna:

$$t = t_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

och mellan samplingstiderna förutsätts en konstant insignal  $u$ . Det innebär att :

$$\begin{aligned}x(t_{n+1}) &= e^{A(t_{n+1}-t_n)}x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{A(t_{n+1}-\tau)}d\tau Bu(\tau) \\ &= \Phi(t_{n+1}, t_n)x(t_n) + \Gamma(t_{n+1}, t_n)u(t_n)\end{aligned}$$

där :

$$\Phi(t_{n+1}, t_n) = e^{A(t_{n+1}-t_n)}$$

$$\Gamma(t_{n+1}, t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{A(t_{n+1}-\tau)} d\tau B$$

Det samplade systemets ekvation är då :

$$x(t_{n+1}) = \Phi(t_{n+1}, t_n)x(t_n) + \Gamma(t_{n+1}, t_n)u(t_n)$$

$$y(t_n) = Cx(t_n) + Du(t_n)$$

Systemet kan alltså uttryckas som differensekvationer. Notera att det inte finns någon approximation i resonemanget.

## 6.5.2 Beräkning av $\Phi$

### 6.5.2.1 Cayley-Hamiltons metod

Vi börjar med att bestämma egenvärdena till matrisen A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ a & \lambda + b \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ a & \lambda + b \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + b) + a = \lambda^2 + \lambda b + a$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm j \sqrt{a - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = -\frac{b}{2} \pm j \omega_0$$

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2} + j \omega_0 \quad \lambda_2 = -\frac{b}{2} - j \omega_0$$

Vi ansätter  $e^{At}$  som ett förstgradspolynom i A:

$$e^{At} = a_0 I + a_1 A$$

$a_0$  och  $a_1$  erhåller vi ur följande villkor:

$$e^{t\lambda_1} = a_0 + a_1 \lambda_1$$

$$e^{t\lambda_2} = a_0 + a_1 \lambda_2$$

Vi får :

$$a_0 = \frac{\lambda_2 e^{t\lambda_1} - \lambda_1 e^{t\lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad a_1 = \frac{e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$a_0 = \frac{\left(-\frac{b}{2} - j\omega_0\right) e^{\left(\frac{b}{2} + j\omega_0\right)t} - \left(-\frac{b}{2} + j\omega_0\right) e^{\left(-\frac{b}{2} - j\omega_0\right)t}}{\frac{b}{2} - j\omega_0 + \frac{b}{2} - j\omega_0} =$$

$$e^{-\frac{b}{2}t} \left[ \frac{b}{2\omega_0} \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) + \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \right] =$$

$$e^{-\frac{b}{2}t} \left( \frac{b}{2\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right)$$

$$a_1 = \frac{e^{\left(-\frac{b}{2} + j\omega_0\right)t} - e^{\left(-\frac{b}{2} - j\omega_0\right)t}}{\frac{b}{2} + j\omega_0 + \frac{b}{2} + j\omega_0} = \frac{e^{-\frac{b}{2}t}}{\omega_0} \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) =$$

$$e^{-\frac{b}{2}t} \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$



Slutligen får vi :

$$e^{At} = e^{-\frac{b}{2}t} \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t + \frac{b}{2\omega_0} \sin \omega_0 t & \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \\ -\frac{a}{\omega_0} \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t - \frac{b}{2\omega_0} \sin \omega_0 t \end{bmatrix}$$

### 6.5.2.2 Laplace metod

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

Det gäller att :

$$L(e^{At}) = (sI - A)^{-1}$$

således :

$$e^{At} = \{L^{-1}(sI - A)^{-1}\} = L^{-1} \begin{bmatrix} s & -1 \\ a & s+b \end{bmatrix}^{-1} = L^{-1} \frac{1}{s^2 + sb + a} \begin{bmatrix} s+b & 1 \\ -a & s \end{bmatrix} = P$$

$$\frac{s+b}{s^2 + sb + a} = \frac{s+b}{(s + \frac{1}{2}b)^2 + a - \frac{1}{4}b^2} =$$

$$= \frac{s + \frac{1}{2}b}{(s + \frac{1}{2}b)^2 + a - \frac{1}{4}b^2} + \frac{\frac{1}{2}b}{(s + \frac{1}{2}b)^2 + a - \frac{1}{4}b^2} =$$

$$= \frac{s + \frac{1}{2}b}{(s + \frac{1}{2}b)^2 + a - \frac{1}{4}b^2} + \frac{\frac{1}{2}b}{\sqrt{(a - \frac{1}{4}b^2)}} \frac{\sqrt{(a - \frac{1}{4}b^2)}}{(s + \frac{1}{2}b)^2 + a - \frac{1}{4}b^2} = A + B$$

$$L^{-1}\{A\} = e^{-\frac{1}{2}bt} \cos \sqrt{\left(a - \frac{1}{4}b^2\right)} t = A_t$$

$$L^{-1}\{B\} = e^{-\frac{1}{2}bt} \frac{\frac{1}{2}b}{\sqrt{\left(a - \frac{1}{4}b^2\right)}} \sin \sqrt{\left(a - \frac{1}{4}b^2\right)} t = B_t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\left(a - \frac{1}{4}b^2\right)}$$

$$p_{11} = A_t + B_t = e^{-\frac{1}{2}bt} \left( \cos \omega_0 t + \frac{\frac{1}{2}b}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)$$

$$p_{12} = \frac{2}{b} B_t = e^{-\frac{1}{2}bt} \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$$p_{21} = -\frac{2a}{b} B_t = -e^{-\frac{1}{2}bt} \frac{a}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$$p_{22} = A_t - B_t = e^{-\frac{1}{2}bt} \left( \cos \omega_0 t - \frac{\frac{1}{2}b}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)$$

$$e^{At} = e^{-\frac{b}{2}t} \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t + \frac{b}{2\omega_0} \sin \omega_0 t & \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \\ -\frac{a}{\omega_0} \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t - \frac{b}{2\omega_0} \sin \omega_0 t \end{bmatrix}$$

Till vår stora tillfredsställelse får vi samma resultat som Cayley-Hamilton gav. Vi fortsätter med att beräkna  $\Gamma$ .

### 6.5.3 Beräkning av $\Gamma$

$$\Gamma(t_s) = \int_0^{t_s} e^{A\tau} d\tau B$$

Vi börjar med att beräkna :

$$F(t_s) = \int_0^{t_s} e^{(-\alpha+j\omega)\tau} d\tau = \left[ \frac{e^{(-\alpha+j\omega)\tau}}{-\alpha+j\omega} \right]_0^{t_s} =$$

$$\frac{(e^{-\alpha t_s} (\cos \omega t_s + j \sin \omega t_s) - 1) (-\alpha - j\omega)}{\alpha^2 + \omega^2} =$$

$$\frac{-\alpha(e^{-\alpha t_s} \cos \omega t_s - 1) + \omega e^{-\alpha t_s} \sin \omega t_s}{\alpha^2 + \omega^2} +$$

$$j \frac{-\omega(e^{-\alpha t_s} \cos \omega t_s - 1) - \alpha e^{-\alpha t_s} \sin \omega t_s}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Låt :

$$M = \int_0^{t_s} e^{A\tau} d\tau$$

Då gäller :

$$\Gamma = M B = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{12} c \\ m_{22} c \end{bmatrix}$$

Med  $\alpha = \frac{b}{2}$  och  $\omega = \omega_0$  fås :

$$m_{12} = \int_0^{t_s} e^{-\alpha\tau} \frac{\sin \omega\tau}{\omega} d\tau = \operatorname{Im} \frac{F(t_s)}{\omega} =$$

$$\frac{-\omega(e^{-\alpha t_s} \cos \omega t_s - 1) - \alpha e^{-\alpha t_s} \sin \omega t_s}{\omega(\alpha^2 + \omega^2)}$$

$$m_{22} = \int_0^{t_s} e^{-\alpha \tau} \left( \frac{-\alpha \sin \omega \tau}{\omega} + \cos \omega t_s \right) d\tau =$$

$$\operatorname{Im} \frac{-\alpha}{\omega} F(t_s) + \operatorname{Re} F(t_s) =$$

$$\frac{\alpha \omega (e^{-\alpha t_s} \cos \omega t_s - 1) - \alpha^2 e^{-\alpha t_s} \sin \omega t_s}{\omega(\alpha^2 + \omega^2)} +$$

$$\frac{-\alpha \omega (e^{-\alpha t_s} \cos \omega t_s - 1) + \omega^2 e^{-\alpha t_s} \sin \omega t_s}{\omega(\alpha^2 + \omega^2)} =$$

$$\frac{(\alpha^2 + \omega^2) e^{-\alpha t_s} \sin \omega t_s}{\omega(\alpha^2 + \omega^2)} = \frac{e^{-\alpha t_s} \sin \omega t_s}{\omega}$$

Således :

$$\Phi = e^{-\alpha t_s} \begin{bmatrix} \cos \omega t_s + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t_s & \frac{1}{\omega} \sin \omega t_s \\ -\frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega} \sin \omega t_s & \cos \omega t_s - \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t_s \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \frac{c}{\omega} \begin{bmatrix} \frac{-\omega(e^{-\alpha t_s} \cos \omega t_s - 1) - \alpha e^{-\alpha t_s} \sin \omega t_s}{\alpha^2 + \omega^2} \\ e^{-\alpha t_s} \sin \omega t_s \end{bmatrix}$$

där :

$$\alpha = \frac{b}{2} , \omega = \sqrt{a - \frac{1}{4}b^2}$$

vilket ger :

$$\alpha = 10^{-4} , \omega = 9.9995 \times 10^{-3} \approx 10^{-2}$$

Insättning av värden ger :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.8260 & 56.127 \\ -0.005612 & 0.8148 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 8.6986 \\ 0.2806 \end{bmatrix}$$

## 6.6 Appendix F

### 6.6.1 Simnonkod

#### REGULATOR reg33 - 1-1 system -

För reglering av sub2

Använder ubåtens djup, djuphastighet och djupacceleration för reglering. Regulatorn bestämmer kontinuerligt om vatten ska tas in eller ut eller inte alls. Pumpens och ventilernas fördröjningar är implementerade. Är i första hand avsedd för flödeskapacitet 1 liter/sek i båda riktningar. Använder sig av hysteres i pumpen. Det finns en hastighetsbegränsare implementerad.

DISCRETE SYSTEM reg33

"Författare : Andreas Söderstjerna och Henrik Bengtsson

"Datum : 890725

"Reviderad : 890725

"Version : 1.0

"Indata : djup, y1 [m], djuphastighet, y2 [ $\text{ms}^{-1}$ ], djupacceleration, y3 [ $\text{ms}^{-2}$ ]

"Utdata : flöde ,q [ $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ ]

"Algoritmref. : avsnitt 4.2, 4.4.1.3, 4.4.1.4

INPUT y1 y2 y3 "Djup, djuphastighet och djupacceleration

OUTPUT q "Flöde

STATE fi klocka tb1 tb2 fb1 fb2

TIME t

TSAMP ts

new nfi

new nklocka

new ntb1

new ntb2

new nfb1

new nfb2

"BERÄKNING AV FLÖDET

err = href - y1

```

u = err*kt1 - kt2*y2 - kt3*y3
q1 = if fi > (b1 - eps) then b1 else 0
q2 = if fi < (-b2 + eps) then -b2 else 0
q11 = if u > -d then 0 else if fi > -b2 then 0 else -b2
q12 = if fi < b1 then 0 else b1
midp = if u < d then q11 else q12
midn = if ((u > -d) and (u < a)) then q1 else if ((u > -a) and (u < d)) then q2 else fi
mid = if d > 0 then midp else midn
nfi1 = if klocka > (t_limit - 1) then -b2 else if fi < (-b2 + eps) then -b2 else 0
nfi2 = if u < -a then nfi1 else if u > a then b1 else mid

```

"OM HASTIGHETEN ÄR FÖR HÖG SÅ MOTVERKAR VI DET

```

nfi = if (y2 < -vmax) then b1 else if (y2 > vmax) then -b2 else nfi2 .
nystart = if ((nfi < (-b2 + eps)) and (fi > -b2)) then 1 else 0
nklocka = if nystart > 0 then 0 else (klocka + delta_t)

```

"FÖRDRÖJER FLÖDET MED v\_delay ELLER p\_delay

```

ntb1 = if ((nfi - eps) > 0) and not((fi - eps) > 0) then ts + v_delay else tb1
ntb2 = if ((nfi + eps) < 0) and not((fi + eps) < 0) then ts + p_delay else tb2
nfb11 = if (nfi < (b1 - eps)) and ((fi - eps) > 0) then ts + v_delay else fb1
nfb1 = if abs(ntb1 - tb1) > eps then tmax else nfb11
nfb22 = if (nfi > (-b2 + eps)) and ((fi + eps) < 0) then ts + v_delay else fb2
nfb2 = if abs(ntb2 - tb2) > eps then tmax else nfb22

```

```

ok1 = (ts > (tb1 - eps)) and (ts < (fb1 + eps))
ok2 = (ts > (tb2 + eps)) and (ts < (fb2 - eps))
q = ok1*b1 - ok2*b2

```

```
ts = t + delta_t
```

v_delay : 2	"Ventilfördröjning
p_delay : 4	"Pumpfördröjning
tmax : 1e9	
vmax : .09	"Max tillåten hastighet innan flödet börjar motverka
t_limit : 60	"Minsta tid mellan pumptillslag
eps : 0.00001	"Litet tal
href : 0	"Önskat djup
kt1 : 10	"Djupåterkoppling

```

kt2 : 2200 "Hastighetsåterkoppling
kt3 : 300000 "Accelerationsåterkoppling
a : 10 "Se kapitlet om hysteres
d : 3 "Se kapitlet om hysteres
b1 : 1e-3 "Vattenintagningskapacitet
b2 : 1e-3 "Pumpkapacitet
delta_t : 1 "Hur ofta regulatorproceduren går igenom

klocka : 60 "Tiden från förra pumpstart
fi : 0 "Håller reda på gamla värdet av flödet
tb1 : 1e9 "För fördröjningsprocedur
tb2 : 1e9 "För fördröjningsprocedur
fb1 : 1e9 "För fördröjningsprocedur
fb2 : 1e9 "För fördröjningsprocedur
end

```

## REGULATOR reg34 - 1-10 SYSTEM

För reglering av sub2

Använder ubåtens djup, djuphastighet och djupacceleration för reglering. Regulatorn bestämmer kontinuerligt om vatten ska tas in eller ut eller inte alls. Pumpens och ventilernas fördröjningar är implementerade. Är i första hand avsedd för flödeskapaciteten 10 liter per sekund in och 1 liter per sekund ut. Använder hysteres i pumpen. Hastighetsåterkopplingen är kvadratisk i positiv referensriktning. Det finns en hastighetsbegränsare i samma riktning.

DISCRETE SYSTEM reg34

```

"Författare : Andreas Söderstjerna och Henrik Bengtsson
"Datum : 890725
"Reviderad : 890725
"Version : 1.0
"Indata : djup, y1 [m], djuphastighet, y2 [ms-1], djupacceleration, y3 [ms-2]
"Utdata : flöde ,q [m3s-1]
"Algoritmref. : avsnitt 4.2, 4.4.1.3, 4.4.1.4, 4.4.2.3

```

INPUT y1 y2 y3 "Djup, djuphastighet och djupacceleration

OUTPUT q "Flöde

STATE fi klocka tb1 tb2 fb1 fb2



TIME t  
TSAMP ts

new nfi  
new nklocka  
new ntb1  
new ntb2  
new nfb1  
new nfb2

"BESTÄMMER HASTIGHETSÅTERKOPPLINGEN

kt20 = if y2 > 0 then (kt2\*(1 + kv\*y2)) else kt2

"BERÄKNAR FLÖDET

err = href - y1  
u = err\*kt1 - kt20\*y2 - kt3\*y3  
q1 = if fi > (b1 - eps) then b1 else 0  
q2 = if fi < (-b2 + eps) then -b2 else 0  
q11 = if u > -d then 0 else if fi > -b2 then 0 else -b2  
q12 = if fi < b1 then 0 else b1  
midp = if u < d then q11 else q12  
midn = if ((u > -d) and (u < a)) then q1 else if ((u > -a) and (u < d)) then q2 else fi  
mid = if d > 0 then midp else midn  
nfi1 = if klocka > (t\_limit - 1) then -b2 else if fi < (-b2 + eps) then -b2 else 0  
nfi2 = if u < -a then nfi1 else if u > a then b1 else mid

"OM HASTIGHETEN ÄR FÖR HÖG I POSITIV RIKTNING SÅ MOTVERKAR VI  
"DET

nfi = if (y2 > vmax) then -b2 else nfi2  
nystart = if ((nfi < (-b2 + eps)) and (fi > -b2)) then 1 else 0  
nklocka = if nystart > 0 then 0 else (klocka + delta\_t)

"FÖRDRÖJER FLÖDET MED v\_delay ELLER p\_delay

ntb1 = if ((nfi - eps) > 0) and not((fi - eps) > 0) then ts + v\_delay else tb1  
ntb2 = if ((nfi + eps) < 0) and not((fi + eps) < 0) then ts + p\_delay else tb2  
nfb11 = if (nfi < (b1 - eps)) and ((fi - eps) > 0) then ts + v\_delay else fb1  
nfb1 = if abs(ntb1 - tb1) > eps then tmax else nfb11

```
nfb22 = if (nfi > (-b2 + eps)) and ((fi + eps) < 0) then ts + v_delay else fb2
```

```
nfb2 = if abs(ntb2-tb2) > eps then tmax else nfb22
```

```
ok1 = (ts > (tb1 - eps)) and (ts < (fb1 + eps))
```

```
ok2 = (ts > (tb2 + eps)) and (ts < (fb2 - eps))
```

```
q = ok1*b1 - ok2*b2
```

```
ts = t + delta_t
```

```
kv      : 500      "Storlek på kvadratisk hastighetsåterkoppling
```

```
v_delay : 2        "Ventilernas fördröjning
```

```
p_delay : 4        "Pumpens fördröjning
```

```
tmax    : 1e9
```

```
vmax    : 10      "Max tillåten hastighet i positiv referensriktning
```

```
t_limit : 60      "Minsta tid mellan pumptillslag
```

```
eps     : 0.00001 "Litet tal
```

```
href    : 0       "Önskat djup
```

```
kt1     : 10      "Djupåterkoppling
```

```
kt2     : 2200    "Hastighetsåterkoppling
```

```
kt3     : 200000  "Accelerationsåterkoppling
```

```
a       : 10      "Se avsnittet om hysteres
```

```
d       : 3       "Se avsnittet om hysteres
```

```
b1      : 1e-2    "Kapacitet vid intag av vatten
```

```
b2      : 1e-3    "Pumpkapacitet
```

```
delta_t : 1       "Hur ofta regulatorproceduren går igenom
```

```
klocka  : 60      "Tiden från förra pumptillslaget
```

```
fi      : 0       "Håller reda på vad flödet var förra gången
```

```
tb1     : 1e9     "Slaskvariabel for fördröjningsprocedur
```

```
tb2     : 1e9     "Som ovan
```

```
fb1     : 1e9     "Som ovan
```

```
fb2     : 1e9     "Som ovan
```

```
end
```

## **REGULATOR reg40 - 1-1 system**

För reglering av sub2

Samma som reg34 med med möjlighet att addera brus och bias till djuphastighet och djupacceleration.

DISCRETE SYSTEM reg40

"Författare : Andreas Söderstjerna och Henrik Bengtsson  
"Datum : 890725  
"Reviderad : 890725  
"Version : 1.0  
"Indata : djup, y1 [m], djuphastighet, y2 [ $\text{ms}^{-1}$ ], djupacceleration, y3 [ $\text{ms}^{-2}$ ]  
"Utdata : flöde ,q [ $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ ]  
"Algoritmref. : avsnitt 4.2, 4.4.1.3, 4.4.1.4, 4.4.1.6

INPUT y1 y2 y3

OUTPUT q

STATE fi klocka tb1 tb2 fb1 fb2

TIME t

TSAMP ts

new nfi

new nklocka

new ntb1

new ntb2

new nfb1

new nfb2

"ADDERAR BRUS OCH BIAS TILL DJUPHASTIGHET OCH  
"DJUPACCELERATION

n2 = norm(t)\*noice2 "Normalfördelat brus

n3 = norm(t)\*noice3 "Normalfördelat brus

y2p = y2 + bias2 + n2

y3p = y3 + bias3 + n3

"HÄR BERÄKNAS FLÖDET

err = href - y1

u = err\*kt1 - kt2\*y2p - kt3\*y3p

q1 = if fi > (b1 - eps) then b1 else 0

q2 = if fi < (-b2 + eps) then -b2 else 0

q11 = if u > -d then 0 else if fi > -b2 then 0 else -b2

```

q12 = if fi < b1 then 0 else b1
midp= if u<d then q11 else q12
midn= if ((u>-d) and (u<a)) then q1 else if((u>-a) and (u<d)) then q2 else fi
mid = if d>0 then midp else midn
nfi1 = if klocka >(t_limit - 1) then -b2 else if fi <(-b2+eps) then -b2 else 0
nfi2 = if u < -a then nfi1 else if u >a then b1 else mid

```

## "HASTIGHETSBEGRÄNSNING

```

nfi = if (y2<-vmax) then b1 else if(y2>vmax) then -b2 else nfi2
nystart = if ((nfi <(-b2+eps)) and (fi > -b2)) then 1 else 0
nklocka = if nystart > 0 then 0 else (klocka + delta_t)

```

## "FÖRDRÖJNING

```

ntb1 = if ((nfi - eps) > 0) and not(( fi - eps) > 0) then ts + v_delay else tb1
ntb2 = if ((nfi + eps) < 0) and not(( fi + eps) < 0) then ts + p_delay else tb2
nfb11 = if (nfi <(b1 - eps)) and ((fi - eps) > 0) then ts + v_delay else fb1
nfb1 = if abs(ntb1-tb1) > eps then tmax else nfb11
nfb22 = if (nfi >(-b2 + eps)) and ((fi + eps) < 0) then ts + v_delay else fb2
nfb2 = if abs(ntb2-tb2) > eps then tmax else nfb22

```

```

ok1 = (ts > (tb1 - eps)) and (ts < (fb1 + eps))
ok2 = (ts > (tb2 + eps)) and (ts < (fb2 - eps))
q = ok1*b1 - ok2*b2

```

```
ts = t + delta_t
```

```

v_delay : 2
p_delay : 4
tmax    : 1e9
vmax    : .09
t_limit : 60
eps     : 0.00001
href    : 0
kt1     : 10
kt2     : 2200
kt3     : 300000
a       : 10
d       : 3

```

```

b1      : 1e-3
b2      : 1e-3
delta_t : 1
noice2  : 0      "Djuphastighetsbrusets storlek
noice3  : 0      "Djupaccelerationsbrusets storlek
bias2   : 0      "Offset i djuphastighet
bias3   : 0      "Offset i djupacceleration

```

```

klocka  : 60
fi      : 0
tb1     : 1e9
tb2     : 1e9
fb1     : 1e9
fb2     : 1e9
end

```

## LEADFILTER 10-10 system

CONTINUOUS SYSTEM lead

```

"Författare : Andreas Söderstjerna och Henrik Bengtsson
"Datum      : 891229
"Reviderad  : 891229
"Version    : 1.0
"Indata     : u1
"Utdata     : u

```

```

STATE u2
DER du2
INPUT u1
OUTPUT u
TIME t

```

```

du2 = -b * u2/td + (1/td - b/td) * u1
u = sqrt(b)*fkt*(u1 + u2)

```

```

b      : 1
td     : 1
fkt    : 1

```

end

## REGULATOR reg47 - 10-10 system

För reglering av sub2 tillsammans med modulen Lead.

Med möjlighet att addera brus och bias till djuphastighet och djupacceleration.

DISCRETE SYSTEM reg47

"Författare : Andreas Söderstjerna och Henrik Bengtsson

"Datum : 891229

"Reviderad : 891229

"Version : 1.0

"Indata : djup, y1 [m], djuphastighet, y2 [ $\text{ms}^{-1}$ ], djupacceleration, y3 [ $\text{ms}^{-2}$ ]

"Utdata : flöde ,q [ $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ ]

"Algoritmref. : avsnitt 4.2, 4.4.1.3, 4.4.1.4, 4.4.1.6

INPUT y1 y2 y3 u

OUTPUT q u1

STATE fi klocka tb1 tb2 fb1 fb2

TIME t

TSAMP ts

new nfi

new nklocka

new ntb1

new ntb2

new nfb1

new nfb2

"ADDERAR BRUS OCH BIAS TILL DJUPHASTIGHET OCH

"DJUPACCELERATION

n2 = norm(t)\*noice2 "Normalfördelat brus

n3 = norm(t)\*noice3 "Normalfördelat brus

y2p = y2 + bias2 + n2

y3p = y3 + bias3 + n3

"HÄR BERÄKNAS FLÖDET

```

err = href - y1
u1 = err*kt1 - kt2*y2p - kt3*y3p
"U BERÄKNAS I MODULEN LEAD MED U1 SOM INDATA
q1 = if fi > (b1 - eps) then b1 else 0
q2 = if fi < (-b2 + eps) then -b2 else 0
q11 = if u > -d then 0 else if fi > -b2 then 0 else -b2
q12 = if fi < b1 then 0 else b1
midp = if u < d then q11 else q12
midn = if ((u > -d) and (u < a)) then q1 else if ((u > -a) and (u < d)) then q2 else fi
mid = if d > 0 then midp else midn
nfi1 = if klocka > (t_limit - 1) then -b2 else if fi < (-b2 + eps) then -b2 else 0
nfi2 = if u < -a then nfi1 else if u > a then b1 else mid

```

### "HASTIGHETSBEGRÄNSNING

```

nfi = if (y2 < -vmax) then b1 else if (y2 > vmax) then -b2 else nfi2
nystart = if ((nfi < (-b2 + eps)) and (fi > -b2)) then 1 else 0
nklocka = if nystart > 0 then 0 else (klocka + delta_t)

```

### "FÖRDRÖJNING

```

ntb1 = if ((nfi - eps) > 0) and not((fi - eps) > 0) then ts + v_delay else tb1
ntb2 = if ((nfi + eps) < 0) and not((fi + eps) < 0) then ts + p_delay else tb2
nfb11 = if (nfi < (b1 - eps)) and ((fi - eps) > 0) then ts + v_delay else fb1
nfb1 = if abs(ntb1 - tb1) > eps then tmax else nfb11
nfb22 = if (nfi > (-b2 + eps)) and ((fi + eps) < 0) then ts + v_delay else fb2
nfb2 = if abs(ntb2 - tb2) > eps then tmax else nfb22

```

```

ok1 = (ts > (tb1 - eps)) and (ts < (fb1 + eps))
ok2 = (ts > (tb2 + eps)) and (ts < (fb2 - eps))
q = ok1*b1 - ok2*b2

```

```
ts = t + delta_t
```

```

v_delay : 0
p_delay : 0
tmax    : 1e9
vmax    : 10
t_limit : 0
eps     : 0.00001

```

```
href : 10
kt1 : 10
kt2 : 2000
kt3 : 110000
a : 10
d : 10
b1 : 1e-2
b2 : 1e-2
delta_t : 1
noice2 : 0 "Djuphastighetsbrusets storlek
noice3 : 0 "Djupaccelerationsbrusets storlek
bias2 : 0 "Offset i djuphastighet
bias3 : 0 "Offset i djupacceleration
```

```
klocka : 60
fi : 0
tb1 : 1e9
tb2 : 1e9
fb1 : 1e9
fb2 : 1e9
end
```

## **REGULATOR reg61 - SAMPLAT SYSTEM -**

För reglering av sub3linv

Använder djup och djuphastighet för reglering. Regulatorn bestämmer var 60'de sekund hur stor volymen ska vara. Utsignal är volymen. Volymen ändras momentant. Regulatorn använder integralverkan.

DISCRETE SYSTEM reg61

```
"Författare : Andreas Söderstjerna och Henrik Bengtsson
"Datum : 890725
"Reviderad : 890725
"Version : 1.0
"Indata : djup, y1 [m], djuphastighet, y2 [ms-1]
"Utdata : volym, v [m3]
"Algoritmref. : avsnitt 4.5.1.4
```



INPUT y1 y2            "Djup och djuphastighet  
OUTPUT v              "Volym

TIME t  
TSAMP ts

"RÄKNAR UT VOLYMEN

$v = -kt1*(y1-href) - y2*kt2$

$ts = t + delta\_t$

href    : 0            "Önskat djup  
kt1     : 0            "Djupåterkoppling  
kt2     : 0            "Djuphastighetsåterkoppling  
delta\_t : 60           "Samplingstid  
end

## **REGULATOR Reg64 - SAMPLAT SYSTEM -**

För reglering av Sub2

Använder ubåtens djup, djuphastighet och tankvolym för reglering. Regulatorn bestämmer var 60'de sekund hur stor volym vatten som ska tas in eller ut. Därefter beräknar erforderlig flödestid för att nå rätt volym. Pumpens och ventilernas fördröjningar är implementerade.

DISCRETE SYSTEM reg64

"Författare    : Andreas Söderstjerna och Henrik Bengtsson  
"Datum        : 890725  
"Reviderad    : 890725  
"Version      : 1.0  
"Indata       : djup, y1 [m], djuphastighet, y2 [ $ms^{-1}$ ], djupacceleration, y3 [ $ms^{-2}$ ]  
               volym,v [ $m^3$ ]  
"Utdata       : flöde ,q [ $m^3s^{-1}$ ]  
"Algoritmref. : avsnitt 4.5.1.6, 4.5.1.10

INPUT y1 y2 y3 y4            "Djup djuphastighet djupacc och volym  
OUTPUT q                    "Flöde  
STATE fi tpulseg i tb1 tb2 fb1 fb2

TIME t

TSAMP ts

new nfi

new ntpulseg ni ntb1 ntb2 nfb1 nfb2

"ADDERAR BRUS OCH BIAS TILL y2 OCH y3

n2 = norm(t)\*noice2

n3 = norm(t)\*noice3

y2p = y2 + bias2 + n2

y3p = y3 + bias3 + n3

BERÄKNAR FLÖDET

maxandr=b2\*sampt\*maxv "Anger max tillåten ändring innan antireset windup

e = href - y1

ip = e\*delta\_t

ni = if abs(l1\*e/100-y2\*I2+l3\*(i+ip)/10000-y4)>maxandr then i else i+ip

v = l1\*e/100-y2\*I2+l3\*ni/10000 - l4\*y3

minusi = -ni

vandr=v-y4 "Volymändring

t1 = vandr/b1-delta\_t "Minska med delta\_t

t2 = vandr/b2+delta\_t "Annars går den for länge

a = delta\_t\*b2

fi1 = if abs(vandr)<a then 0 else if vandr > a then b1 else -b2 "Flödet

tpulse = if (fi1 > 0) then t1 else if (fi1 < 0) then -t2 else 0 "Flödestid

dax = abs(mod(ts,sampt)-delta\_t)<delta\_t "Sant en gång per  
"minut

ntpulseg = if dax then tpulse else tpulseg

nfi = if dax then fi1 else if (mod(ts,sampt)-delta\_t)<ntpulseg then fi else 0 "Slår av flödet  
"efter rätt tid

"FÖRDRÖJER FLÖDET MED v\_delay ELLER p\_delay

ntb1 = if ((nfi - eps) > 0) and not(( fi - eps) > 0) then ts + v\_delay else tb1

ntb2 = if ((nfi + eps) < 0) and not(( fi + eps) < 0) then ts + p\_delay else tb2

nfb11 = if (nfi <(b1 - eps)) and ((fi - eps) > 0) then ts + v\_delay else fb1

nfb1 = if abs(ntb1-tb1) > eps then tmax else nfb11

nfb22 = if (nfi >(-b2 + eps)) and ((fi + eps) < 0) then ts + v\_delay else fb2

nfb2 = if abs(ntb2-tb2) > eps then tmax else nfb22

ok1 = (ts > (tb1 - eps)) and (ts < (fb1 - eps))

ok2 = (ts > (tb2 - eps)) and (ts < (fb2 - eps))

q = ok1\*b1 - ok2\*b2    "Flödet

ts = t + delta\_t

## "PARAMETRAR

v_delay : 4	"Fördröjning tills att vatten kan tas in
p_delay : 4	"Fördröjning tills att vatten kan pumpas ut
eps    : 0.00001	"Används vid jämförelser. Epsilon.
href    : 0	"Önskat djup
I1      : 0	"Djupåterkopplingens förstärkning
I2      : 0	"Djuphastighetsåterkopplingens förstärkning
I3      : 0	"Integralen av djupfelets förstärkning
I4      : 0	"Djupaccelerationsåterkopplingens förstärkning
b1      : 1e-3	"Kapacitet vid intag av vatten
b2      : 1e-3	"Pumpkapacitet
delta_t : 1	"Anger hur ofta regulatorprocedur genomräknas
noice2  : 0	"Möjlighet till att lägga brus på hastigheten
noice3  : 0	"Möjlighet till att lägga brus på integralterm
bias2   : 0	"Möjlighet till offset i hastighet
bias3   : 0	"Möjlighet till offset i integralterm
sampt   : 60	"Samplingstid - Ger hur ofta volymändring beräknas
fi      : 0	"Håller reda på vad flödet var förra gången
maxv    : 1e9	"Anger när anti-reset windup ska kopplas in.
tb1     : 1e9	"Slaskvariabel for fördröjningsprocedur.
tb2     : 1e9	"Slaskvariabel for fördröjningsprocedur.
fb1     : 1e9	"Slaskvariabel for fördröjningsprocedur.
fb2     : 1e9	"Slaskvariabel for fördröjningsprocedur.

end

## REGULATOR Reg65 - SAMPLAT SYSTEM -

För reglering av Sub3LinV

Använder djup och djuphastighet för reglering. Regulatorn bestämmer var 60'de sekund har stor volymen ska vara. Utsignal ar volymen. Regulatorn använder integralverkan. Volymen ändras momentant.

DISCRETE SYSTEM reg65

"Författare : Andreas Söderstjerna och Henrik Bengtsson  
"Datum : 890725  
"Reviderad : 890725  
"Version : 1.0  
"Indata : djup, y1 [m], djuphastighet, y2 [ $\text{ms}^{-1}$ ]  
"Utdata : volym, v [ $\text{m}^3$ ]  
"Algoritmref. : avsnitt 4.5.1.6, 4.5.1.10

INPUT y1 y2 "Djup och djuphastighet  
OUTPUT v "Volym  
STATE v1 i "Volym och integralterm  
NEW nv1 ni

TIME t

TSAMP ts

"RÄKNAR UT VOLYMEN

e = href-y1

ni = i+e\*delta\_t

v = I1\*e/100 - I2\*y2 + I3\*(i+ni)/2/10000

minusi =-i

ts = t + delta\_t

href : 0 "Önskat djup  
I1 : 0 "Återkoppling av höjd  
I2 : 0 "Återkoppling av hastighet  
I3 : 0 "Återkoppling av integral av fel  
delta\_t : 60 "Samplingstiden  
end

**REGULATOR adap3 - ADAPTERING -**  
För reglering av Sub5LinV

Använder djup och djuphastighet för reglering. Volymen ändras momentant.

## CONTINUOUS SYSTEM adap3

"Författare : Andreas Söderstjerna och Henrik Bengtsson  
"Datum : 890905  
"Reviderad : 890905  
"Version : 1.0  
"Indata : djup, y1 [m], djuphastighet, y2 [ $\text{ms}^{-1}$ ], djupref, xr1 [m] ,  
djuphastref, xr2 [ $\text{ms}^{-1}$ ], djupaccref, xr3 [ $\text{ms}^{-2}$ ]  
"Utdata : volym, v [ $\text{m}^3$ ]  
"Algoritmref. : avsnitt 4.6

STATE t1 t2 t3 t4

DER dt1 dt2 dt3 dt4

TIME t

INPUT y1 y2 xr1 xr2 xr3

OUTPUT v

href = xr1

hrefp = xr2

hrefpp = xr3

h\_tilde = y1 - href

h\_tpr = y2 - hrefp

"Bestämning av Psi-matrisen och Psi0

$\text{psi}_n = -\text{hrefpp} + g + \lambda \cdot \text{h\_tpr}$

$\text{psi}_1 = (-k \cdot \text{h\_tilde} - m \cdot (\text{h\_tpr} + \lambda \cdot \text{h\_tilde})) / \text{psi}_n$

$\text{psi}_2 = y_2 / \text{psi}_n$

$\text{psi}_3 = (-\text{hrefpp} + \lambda \cdot \text{h\_tpr}) / \text{psi}_n$

$\text{psi}_4 = g / \text{psi}_n$

$\text{psi}_0 = v_1 \cdot g / \text{psi}_n$

"Bestämning av Teta-matrisen

$\text{dtalla} = (-\text{hrefpp} + g + \lambda \cdot \text{h\_tpr}) \cdot (\text{h\_tpr} + \lambda \cdot \text{h\_tilde}) / k_{\text{teta}}$

$\text{dt}_1 = -\text{psi}_1 \cdot \text{dtalla}$

$\text{dt}_2 = -\text{psi}_2 \cdot \text{dtalla}$

$\text{dt}_3 = -\text{psi}_3 \cdot \text{dtalla}$

dt4 = -psi4\*dtalla

v = t1\*psi1 + t2\*psi2 + t3\*psi3 + t4\*psi4 + psi0

k : 1e-4

lambda : .06

my : .5

k\_teta : 12

m1 : 2e6

m : 1e6

v1 : 1000

g : 9.81

t1 : .001

t2 : .4

t3 : -2000

t4 : -1000

END

### SYSTEMMODELL sub2 - FULLSTÄNDIGA MODELLEN -

Beskriver ubåtens verkliga rörelseekvation. Utsignal är ubåtens djup, djuphastighet, djupacceleration och tankens volym. Insignal är flödet.

CONTINUOUS SYSTEM sub2

"Författare : Andreas Söderstjerna och Henrik Bengtsson

"Datum : 890725

"Reviderad : 890725

"Version : 1.0

"Indata : flöde, q [ $m^3s^{-1}$ ]

"Utdata : djup, y1 [m], djuphastighet, y2 [ $ms^{-1}$ ], djupacceleration, y3 [ $ms^{-2}$ ]  
volym, v [ $m^3$ ]

"Algoritmref. : avsnitt 3.2

STATE x1 x2 x3 "Djup, djuphastighet och djupacceleration.

DER dx1 dx2 dx3

TIME t

INPUT q "Flöde

OUTPUT y1 y2 y3 y4 "Djup, djuphastighet, djupacceleration och  
"tankvolym.

```

ra_step = if x1 < h_skikt then 1 else ra_koeff           "Möjlighet till steg i densitet
ra = ra_yt*(1+k_ra*x1)*ra_step
h = (m+ra*x3)*g
si = if x2>0 then 1 else -1                             "Signum av x2
e = .5*ra*cn*I*d*x2*x2*si                               "Kvadratiska
hastighetsberoendet
b = -v1*ra*g-e
c = m1+ra*x3

dx1 = x2
dx2 = (h+b)/c
dx3 = q

y1 = x1
y2 = x2
y3 = dx2
y4 = x3

m1   : 2e6           "Systemets tröga massa
m    : 1e6           "Ubåtens massa
v1   : 1000          "Ubåtens volym
ra_yt : 1000         "Vattnets ytdensitet
ra_koeff: 1          "Ger möjlighet till steg i densitet
h_skikt : 10000      "Talar om var steget skall ske
kd   : 400           "Vid linjärt dämpningsberoende (används ej)
k_ra  : .2e-4        "Densitetens djupberoende
g     : 9.81
l     : 50           "Ubåtens längd
d     : 6            "Ubåtens bredd
cn    : .3           "Dämpfaktor för kvadratisk dämpning

x1 : 0
x2 : 0
x3 : 0
end

```

**SYSTEMMODEL sub21 - FULLSTÄNDIGA MODELLEN -**

Samma som sub2 med den skillnad att man i denna kan undersöka hur ubå-  
ten tar sig igenom en region där densiteten kraftigt förändras.

CONTINUOUS SYSTEM sub21

"Författare : Andreas Söderstjerna och Henrik Bengtsson  
"Datum : 890725  
"Reviderad : 890725  
"Version : 1.0  
"Indata : flöde, q [ $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ ]  
"Utdata : djup, y1 [m], djuphastighet, y2 [ $\text{ms}^{-1}$ ], djupacceleration, y3 [ $\text{ms}^{-2}$ ]  
volym, v [ $\text{m}^3$ ]  
"Algoritmref. : 3.3

STATE x1 x2 x3

DER dx1 dx2 dx3

TIME t

INPUT q

OUTPUT y1 y2 y3 y4

"RÄKNAR UT DENSITETEN

ra1 = ra\_yt\*(1+k\_ra\*x1)

ra\_mid = ra1\*(ra\_koeff\*(x1 - h1)/(abs(h2)-abs(h1)) + 1)

ra\_max = (1 + sign(h2)\*ra\_koeff)\*ra1

ra\_neg = if x1 < h2 then ra\_max else if x1 > h1 then ra1 else ra\_mid

ra\_pos = if x1 > h2 then ra\_max else if x1 < h1 then ra1 else ra\_mid

ra = if h2 < 0 then ra\_neg else ra\_pos

h = (m+ra\*x3)\*g

si = if x2>0 then 1 else -1

e = .5\*ra\*cn\*1\*d\*x2\*x2\*si

b = -v1\*ra\*g-e

c = m1+ra\*x3

dx1 = x2

dx2 = (h+b)/c

dx3 = q



```

y1 = x1
y2 = x2
y3 = dx2
y4 = x3

m1 : 2e6
m : 1e6
v1 : 1000
ra_yt : 1000
ra_koeff: 0 "Möjliggör densitetändringsregion. ra_koeff = 0 ger
"normalfall.
h1 : 10000 "Anger var regionen ska börja.
h2 : 100010 "Anger var regionen ska sluta. .abs(h2) > abs(h1)
kd : 400
k_ra : .2e-4
g : 9.81
l : 50
d : 6
cn : .3

x1 : 0
x2 : 0
x3 : 0
end

```

### **SYSTEMMODELL sub3linv**

Beskriver ubåtens linjäriserade rörelseekvation. Djup och djuphastighet är ut-signal. Volymen är insignal.

```

"Författare : Andreas Söderstjerna och Henrik Bengtsson
"Datum : 890725
"Reviderad : 890725
"Version : 1.0
"Utdata : djup, y1 [m], djuphastighet, y2 [ms-1]
"Indata : volym, v [m3]
"Algoritmref. : avsnitt 6.1.1

```

CONTINUOUS SYSTEM sub3linv

state x1 x2            "Djup och djuphastighet  
der dx1 dx2  
time t  
input v                "Volym  
output y1 y2           "Djup och djuphastighet

dx1 = x2  
dx2 = -k10\*x1 - k11\*x2 + k12\*v

y1 = x1  
y2 = x2  
y3 = dx2

k10 : 1e-4  
k11 : 2e-4  
k12 : 5e-3

x1 : 0  
x2 : 0  
x3 : 0  
end

### **SYSTEMMODELL sub22vin - FULLSTÄNDIGA MODELLEN**

Beskriver ubåtens verkliga rörelseekvation.

CONTINUOUS SYSTEM sub2

"Författare : Andreas Söderstjerna och Henrik Bengtsson  
"Datum : 890905  
"Reviderad : 890905  
"Version : 1.0  
"Indata : flöde, V [m<sup>3</sup>]  
"Utdata : djup, y1 [m], djuphastighet, y2 [ms<sup>-1</sup>], djupref, xr1 [m] ,  
          djuphastref, xr2 [ms<sup>-1</sup>], djupaccref, xr3 [ms<sup>-2</sup>]  
"Algoritmref. : avsnitt 6.1.1

STATE x1 x2 xxr1 xxr2

DER dx1 dx2 dxxr1 dxxr2  
TIME t  
INPUT V  
OUTPUT y1 y2 xr1 xr2 xr3

"Tillståndsekvationer

ra\_step = if x1 < h\_skikt then 1 else ra\_koeff

"Möjlighet till steg i densitet

ra = ra\_yt\*(1+k\_ra\*x1)\*ra\_step

h = (m+ra\*V)\*g

si = if x2>0 then 1 else -1

"Signum av x2

e = .5\*ra\*cn\*I\*d\*x2\*x2\*si

"Kvadratiska

b = -v1\*ra\*g-e

"hastighetsberoendet

c = m1+ra\*V

dx1 = x2

dx2 = (h+b)/c

dx3 = q

"För beräkning av referensvärden

dxxr1= xxr2

dxxr2= kref\*ratt - kref\*xxr1 - dref\*xxr2

y1 = x1

y2 = x2

xr1 = xxr1

xr2 = xxr2

xr3 = dxxr2

m1 : 2e6

"Systemets tröga massa

m : 1e6

"Ubåtens massa

v1 : 1000

"Ubåtens volym

ra\_yt : 1000

"Vattnets ytdensitet

ra\_koeff: 1

"Ger möjlighet till steg i densitet

h\_skikt : 10000

"Talar om var steget skall ske

kd : 400

"Vid linjärt dämpningsberoende (används ej)

k\_ra : .2e-4

"Densitetens djupberoende

g : 9.81

```

l      : 50          "Ubåtens längd
d      : 6           "Ubåtens bredd
cn     : .3         "Dämpfaktor för kvadratisk dämpning
x1     : 0
x2     : 0
x3     : 0
kref   : 0.09       "För referensekvation
dref   : 0.6        "För referensekvation
end

```

### SYSTEMMODELL sub1

Beskriver ubåtens linjäriserade rörelseekvation. Används vid bestämning av en tumregel för återkopplingsparametrarna. Djup, djuphastighet och djupacceleration är utsignal. Flödet är insignal.

```

"Författare : Andreas Söderstjerna och Henrik Bengtsson
"Datum      : 890725
"Reviderad  : 890725
"Version    : 1.0
"Indata     : flöde, q [m3s-1]
"Utdata     : djup, y1 [m], djuphastighet, y2 [ms-1], djupacceleration, y3 [ms-2]
"Algoritmref. : avsnitt 3.3

```

### CONTINUOUS SYSTEM sub1

```

state x1 x2 x3      "Djup, djuphastighet och djupacceleration
der dx1 dx2 dx3
time t
input q             "Flöde
output y1 y2 y3    "Djup, djuphastighet och djupacceleration

```

```

dx1 = x2
dx2 = -k10*x1 - k11*x2 + k12*x3

```

```

y1 = x1
y2 = x2
y3 = dx2
k10 : 1e-4
k11 : 2e-4

```

k12 : 5e-3

x1 : 0

x2 : 0

x3 : 0

end

## 6.7 Appendix G

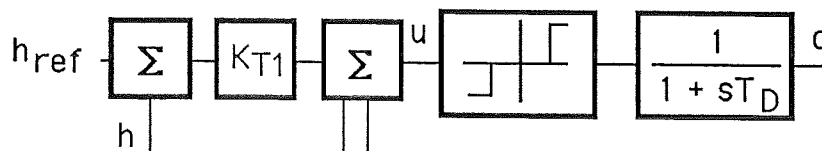
### 6.7.1 Lågpasskvivalent

De analysverktyg vi hittills har använt har inte tagit hänsyn till att pumpen har en tidsspärr. Införandet av hysteres har förvisso medfört att pumpen inte startat oftare än 1 - 2 gånger per minut, och effekten av det har vi analyserat med hjälp av beskrivande funktion. Men tidskravet är absolut, och därför måste vi explicit i regulatorn se till pumpen inte startar för ofta. Man kan tänka sig att man inte bryr sig om att vidare analysera tidsspärren, och istället låter robusthetsanalysen visa att systemet är stabilt. Det finns dock ett sätt som kan möjliggöra en analys, nämligen att likna tidsspärren vid ett lågpassfilter.

Låt oss göra följande tankeexperiment. Vi har en styrsignal  $u$ , som varierar i tiden med en frekvens som är mycket liten, exempelvis  $f = 0.001$  Hz. Det motsvaras av en periodtid  $T = 1000$  s, och med en tidsspärr på 60 s kommer pumpen att gå som vanligt. Vi tänker oss istället att styrsignalen  $u$  varierar med en relativt hög frekvens, exempelvis  $f = 1$  Hz, vilket motsvarar periodtiden  $T = 1$  s. Det medför att tidsspärren ser till att pumpen, istället för att starta 60 gånger per minut, endast startar 1 gång varje minut.

Om styrsignalens varierar med en frekvens lägre än  $f = \frac{1}{60}$  Hz, så kommer inte tidsspärren att påverka systemet och vice versa. Eller mer exakt formulerat : då styrsignalen  $u$  innehåller frekvenser lägre än  $\frac{1}{60}$  Hz kommer dessa att passera obehindrat, medan styrsignaler med högre frekvenser kommer att förvängas. Denna funktion liknar i mångt och mycket funktionen för ett vanligt lågpassfilter. Vi kan därför i ett blockschema representera tidsspärren med en lågpasslänk av typen :

$$G_{LP}(s) = \frac{1}{1 + sT_D}$$



Figur 6.7.1 Kretsschema med lågpasskvivalent.

Brytfrekvensen för lågpassekvivalenten ska ligga på  $\omega_B = \frac{2\pi}{60}$  vilket ger :

$$|G(j\omega_B)| = \left| \frac{1}{1 + j\omega_B T_D} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_B^2 T_D^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$T_D = \frac{30}{\pi}$$

Innan vi går vidare ska nämnas att lågpasfiltret som modell för tidsspärren har stora brister. Överföringsfunktionen för ett lågpasfilter beskriver förhållandet mellan utsignalens och insignalens amplitud - vid höga frekvenser är det förhållandet mycket litet. Utsignalens amplitud från tidsspärren är vid höga frekvenser densamma som för låga. Den överföringsfunktion som vi diskuterat för tidsspärren beskriver snarare förhållandet mellan utsignalens och insignalens frekvens. Vad mer kan sägas är att en mycket högfrekvent styrsignal dämpas kraftigt i lågpasfiltret, medan tidsspärren vid samma styrsignal kommer att ge ifrån sig en puls per minut, och en puls innehåller som bekant mycket höga frekvenser.

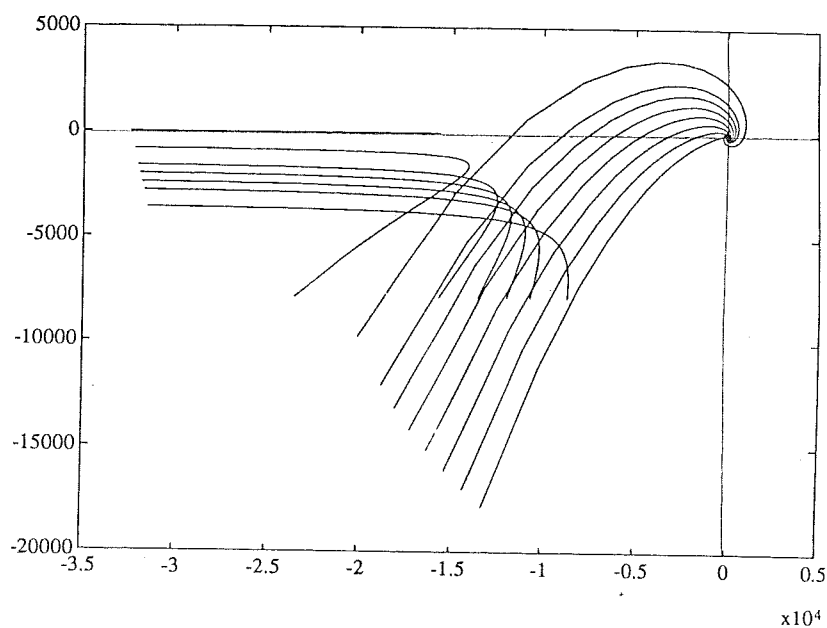
Trots lågpassekvivalentens brister är vi intresserade att studera hur den påverkar Nyquistkurvan.

Efter införandet av lågpaslänken blir kretsöverföringen :

$$G_K(s) = \frac{k_{12}K_T3s^2 + k_{12}K_T2s + k_{12}K_T1}{s^3 + k_{11}s^2 + k_{10}s} \frac{1}{1 + sT_D} e^{-sT} =$$

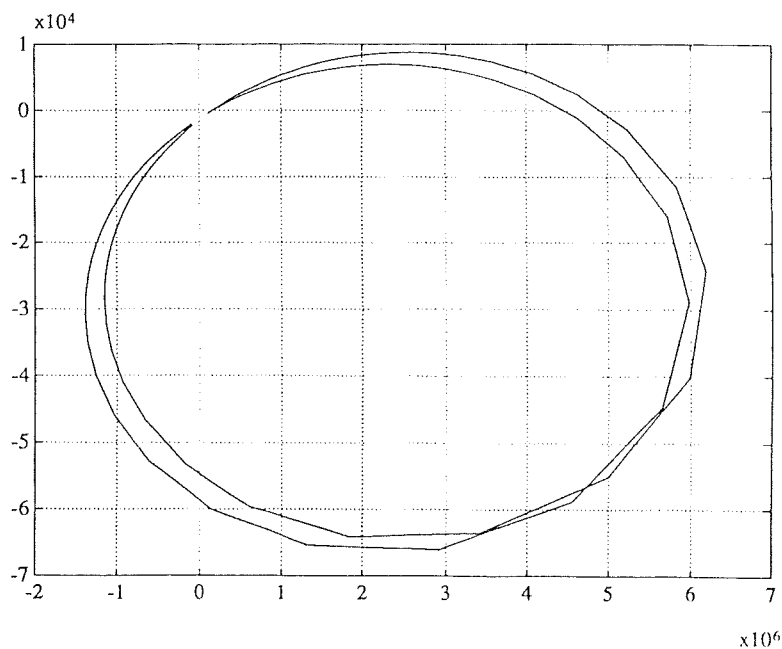
$$\frac{k_{12}K_T3s^2 + k_{12}K_T2s + k_{12}K_T1}{s^4T_D + s^3(1 + k_{11}T_D) + s^2(k_{11} + k_{10}T_D) + sk_{10}} e^{-sT}$$

Nyquistkurvan för denna modifierade kretsöverföring visas nedan.



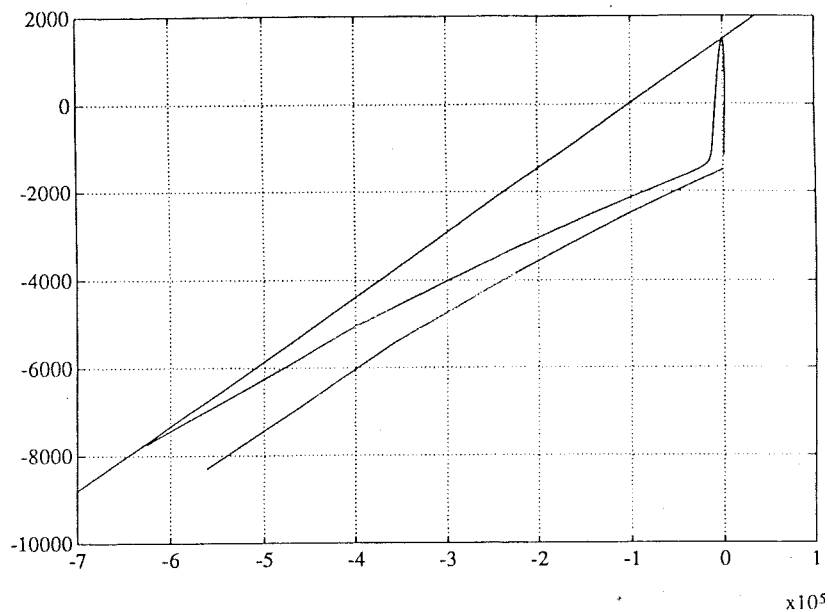
Figur 6.7.2 Nyquistkurvan för det öppna systemet med lågpassekvivalent, där tidsfördröjningarna är 0,1,2,3,4,5,6 och 8 sekunder, tillsammans med beskrivande funktion för  $d = 10,8,6,5,4,3,1$ .

Vi väljer att visa samma fall som ovan med Popovkurvan för tidsfördröjningarna 0 och 4 sekunder. I figur 6.7.3 visas hela kurvan och i i figur 6.7.4 visas den intressanta delen tillsammans med tangeringslinjen för fallet med 4 sekunders tidsfördröjning.



Figur 6.7.3 Popovkurvan för det öppna systemet med lågpassekvivalent, där tidsfördröjningarna är 0 och 4 sekunder.





Figur 6.7.4 Uppförstorad del av Popovkurvan för det öppna systemet med lågpassekvivalent, där tidsfördröjningarna är 0 och 4 sekunder.

Som synes ovan har lågpasseqlänken bidragit till att vrida hela Nyquistkurvan medurs. Detta medför att systemet verkar mer instabilt. Om vi tittar på fallet  $d = 3$  och fördröjningen 4 sekunder ovan, förutsäger beskrivande funktionen en bestående svängning i insignalen  $u$ . När vi simulerar finner vi dock inte någon sådan. Orsakerna till detta är främst tre. Dessa är :

- i) Lågpasseqlivalenten innebär en hårdare restriktion än tidsspärren.
- ii) Tidsfördröjningen är inte 4 sekunder mer än för pumptillslag, för övrigt är fördröjningen 2 sekunder.
- iii) Lågpasseqlivalenten förutsätter att tidsspärren går i båda riktningar, dvs att vi har tidsspärr både då vi ska ta in och ta ut vatten. I själva verket har vi bara tidsspärr då vi ska pumpa ut vatten.

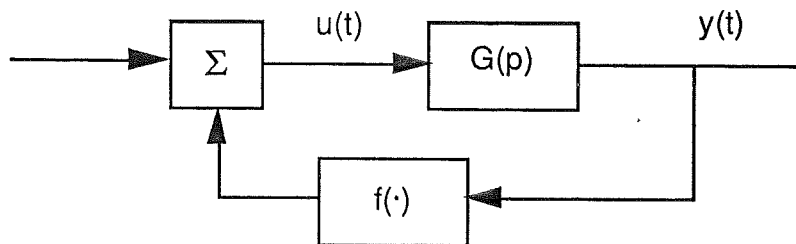
Om vi trots allt vill rätta oss efter analysen finner vi att vi måste välja  $d \geq 5$  för att inte riskera att erhålla bestående svängningar i  $u$ .

## 6.8 Appendix H

Följande framställning sammanfattar delar av innehållet i Karl Johan Åströms "Reglerteknik Olinjära System".

### 6.8.1 Cirkelkriteriet

För att kontrollera stabiliteten hos ett system i vilket olinjäriteter ingår, kan man använda Cirkelkriteriet. Teorin bygger på att man delar upp det återkopplade systemet i två delar, dels det linjära systemet och dels återkopplingslänken i vilken olinjäriteten ingår.



Figur 6.8.1 Uppdelning i en linjär och en olinjär länk enligt Cirkelkriteriet.

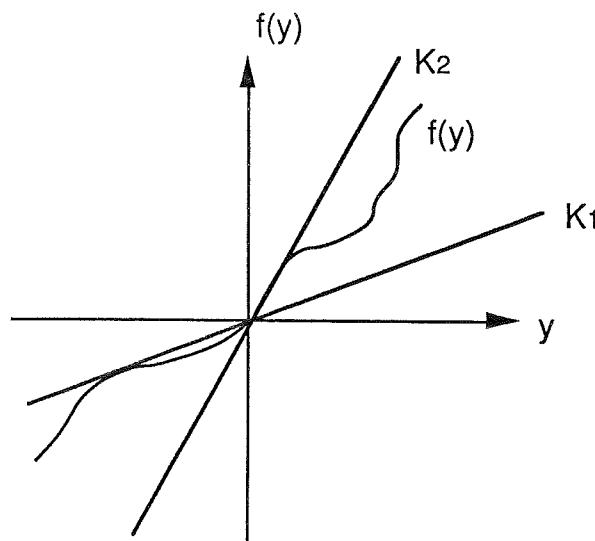
Antag att olinjäriteten kan stängas in enligt :

$$K_1 \sigma^2 \leq \sigma f(\sigma, t) \leq K_2 \sigma^2$$

där

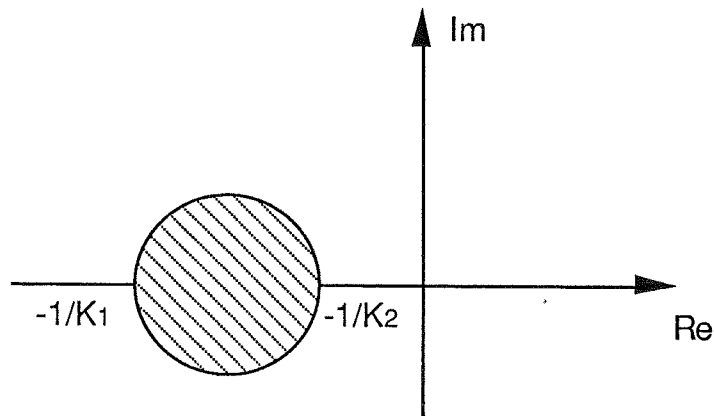
$$0 \leq K_1 \leq K_2 < \infty$$

Detta innebär att vi begränsar olinjäriteten med en sektor enligt figuren nedan.



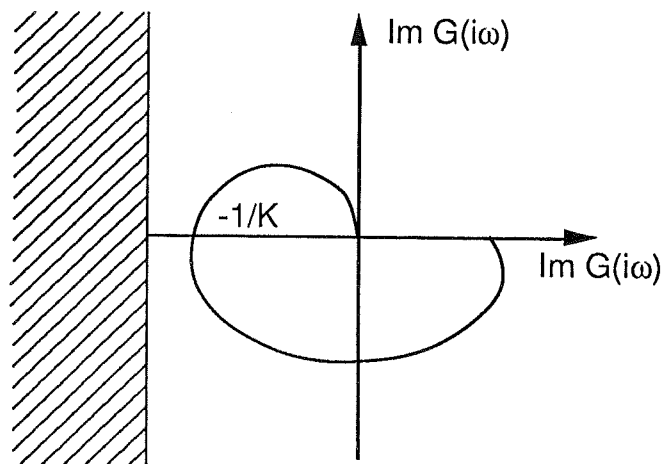
Figur 6.8.2 Olinjäriteten instängd mellan  $K_1$  och  $K_2$ .

Om  $G(p)$  har alla poler i vänster halvplan, och olinjäriteten  $f(\cdot)$  kan stängas in enligt ovan, utlovar Cirkelkriteriet globalt asymptotisk stabilitet för systemet, om Nyquistkurvan för  $G(p)$  inte berör eller omcirklar den cirkel i det komplexa talplanet, som begränsas av  $-\frac{1}{K_1}$  och  $-\frac{1}{K_2}$ .



Figur 6.8.3 Det förbjudna området i form av en cirkel.

Ett specialfall av Cirkelkriteriet är då  $K_1 = 0$ . Det förbjudna cirkelområdet urartar då enligt figuren nedan.



Figur 6.8.4 Det förbjudna området i s-planet tillsammans med Nyquistkurvan.

### 6.8.2 Popovkriteriet

Ett annat stabilitetskriterium som också är frekvensanalytiskt är Popovkriteriet. Popovkriteriets definition lyder :

Sats. Popov :

$$\frac{dx}{dt} = Ax - b f(y,t) \quad (1)$$

$$y = Cx$$

Om det gäller att :

- i) A har alla egenvärden i öppna vänstra halvplanet VHP och  $0 \leq \sigma f(\sigma,t) \leq K\sigma^2$

eller att

- ii) A har alla egenvärden i slutna VHP och  $0 < \sigma f(\sigma,t) \leq K\sigma^2$

Då är nolllösningen till (1) globalt asymptotiskt stabil om det existerar ett reellt tal  $\beta$  så att :

$$(1 + \beta s) [G(s) + \frac{1}{K}] \text{ P.R}$$

Villkoret lyder :

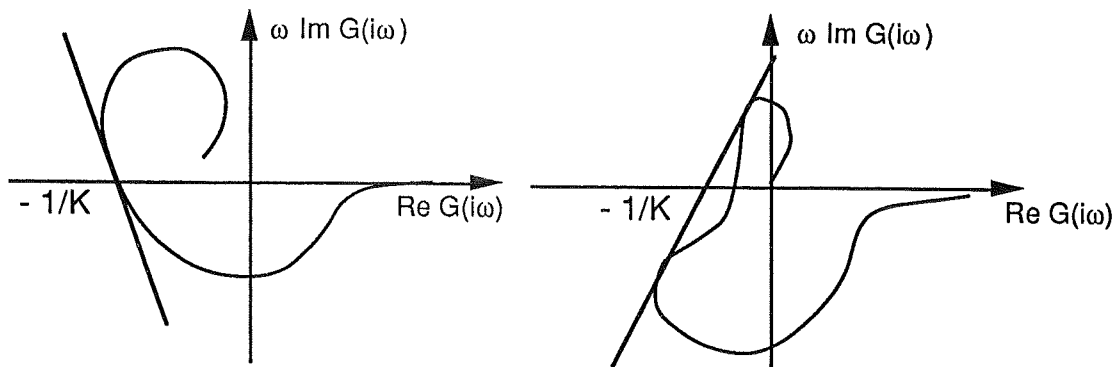
$$\operatorname{Re} (1 + \beta s) [G(s) + \frac{1}{K}] \geq 0 \quad \text{för } s = i\omega$$

dvs

$$\operatorname{Re} G(i\omega) - \beta \omega \operatorname{Im} G(i\omega) \geq -\frac{1}{K}.$$

Detta innebär att Popovkurvan som beskrivs av  $[\operatorname{Re} G(i\omega), \omega \operatorname{Im} G(i\omega)]$ ,  $\omega \geq 0$ , ska ligga till höger om någon linje genom  $(-\frac{1}{K}, 0)$  med lutning  $\neq 0$ , för att stabilitet enligt Popov ska kunna utlovas.

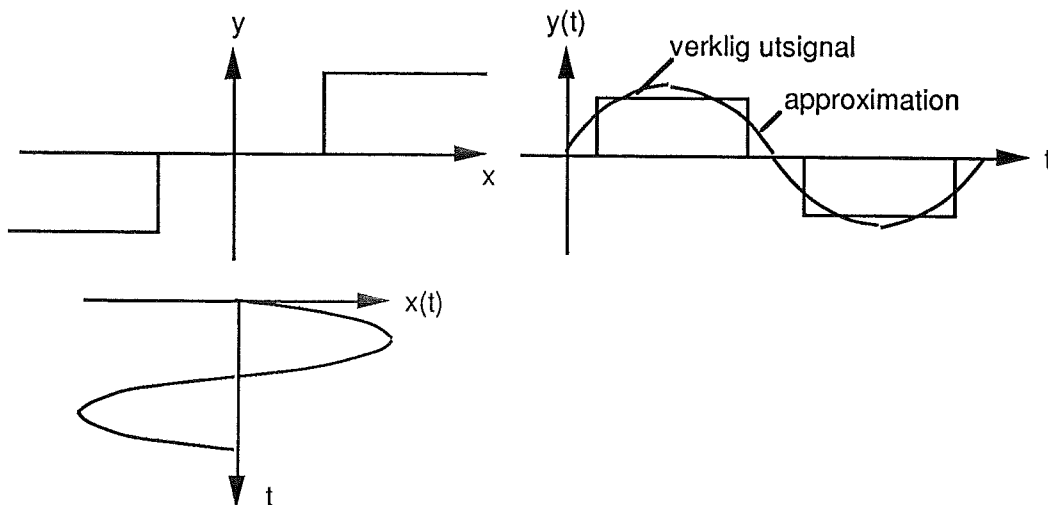
Nedan visas två tillämpningar på Popovs sats.



Figur 6.8.5 Två tillämpningar på Popovs kriterium. Systemet är stabilt för återkopplingar  $\leq K$ .

### 6.8.3 Beskrivande funktion

Vi ska här nedan ge en sammanfattning om hur man använder metoden med beskrivande funktion som stabilitetskriterium, vars giltighetsområde man inte känner utan att simulera systemet.



Figur 6.8.6 Schematiskt bild över insignalen  $x(t)$  till en olinjäritet tillsammans med utsignalen  $y(t)$ . Approximationen är identisk med grundtonen för utsignalen.

Def 3 : Med beskrivande funktion  $Y_N(C)$  för ett olinjärt system menas det komplexa talet :

$$Y_N(C) = (b_1 + i a_1) / C$$

där  $b_1$  och  $a_1$  är koefficienterna i fourierutvecklingen av utsignalen  $y(t)$  då insignalen är  $C \sin \omega t$ .

Fysikaliskt kan beskrivande funktionen tolkas som en av insignalens amplitud beroende överföringsfunktion från sinusformad insignal till grundtonen i utsignalen.

En erinran om hur man beräknar fourierkoefficienterna :

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) \cos \omega d\omega$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) \sin \omega d\omega$$

Regler för att fortsättningen ska gälla :

- i) Den olinjära länken ska vara tidsinvariant och dess beskrivande funktion oberoende av vinkelfrekvensen  $\omega$ .
- ii) Olinjäriteten får ej ge upphov till subharmoniska svängningar eller likrikta insignalen.
- iii) Den linjära delen i överföringsfunktionen ska vara av lågpasstyp.

Det andra villkoret är ekvivalent med att det inte får finnas komponenter i utsignalen med lägre frekvens än  $\omega$ .

Eftersom beskrivande funktionen  $Y_N(C)$  är en komplex storhet, som liksom en vanlig överföringsfunktion anger amplitud resp fasändring för en sinusformad insignal, och dessutom är definierad för alla  $\omega$ , kan man formellt räkna som om den vore en vanlig överföringsfunktion. Detta ger insignal - utsignal sambandet för det återkopplade systemet :

$$\frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{Y_N(C) G(s)}{1 + Y_N(C) G(s)} = \frac{G(s)}{1/Y_N(C) + G(s)}$$

För att avgöra om det återkopplade systemet är stabilt, finns ett enkelt sätt som nära anknyter till Nyquist kriterium. Instabilitet beror på rötter med positiv realdel. Vi vill därför för varje värde på  $C$  undersöka om den karakteristiska ekvationen:

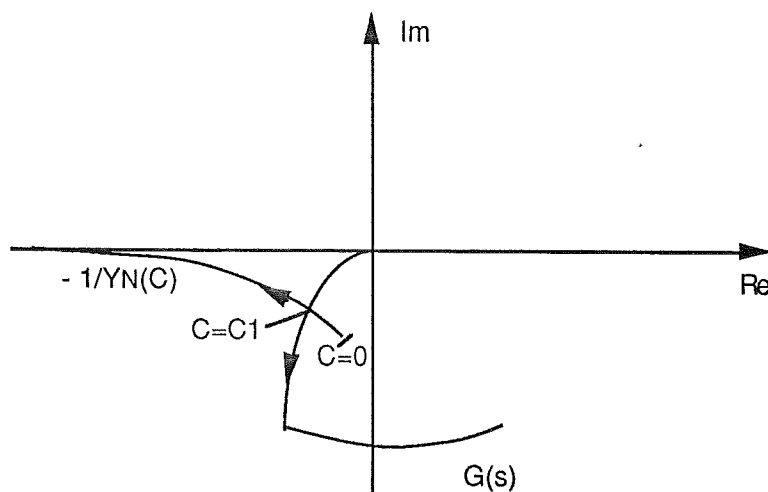
$$1/Y_N(C) + G(s) = 0$$

har rötter med positiv realdel.

I det komplexa talplanet ritar vi :

- 1) Nyquistkurvan för systemet.
- 2)  $-1/Y_N(C)$  som funktion av amplituden  $C$ .

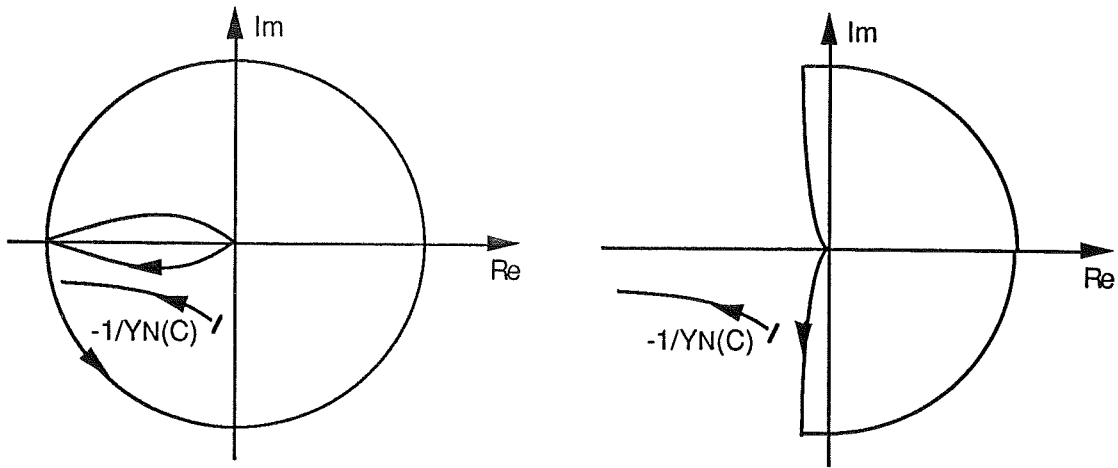
Stabilitet kan sedan avgöras genom att studera Nyquistkurvans läge i förhållande till kurvan  $-1/Y_N(C)$ . Om Nyquistkurvan helt ligger till höger om  $-1/Y_N(C)$  säger metoden med beskrivande funktion att systemet är stabilt.



Figur 6.8.7 Bilden av beskrivande funktionen tillsammans med Nyquistkurvan.

I figur 6.8.7 kommer svängningar med amplituder mindre än  $C_1$  att växa eftersom Nyquistkurvan omsluter alla punkter på  $-1/Y_N(C)$ . För svängningar med amplituder större än  $C_1$  kommer dessa att avta eftersom Nyquistkurvan ligger till höger om  $-1/Y_N(C)$ . Därför kommer systemet att ställa in sig så att det svänger med en amplitud  $C_1$  och vinkelfrekvens  $\omega_1$ . Vi har då fått vad man kallar för egensvängning. Vid simulering kan man visa att så verkligen är fallet.

Vi kan tydligen genom att rita Nyquistkurvan tillsammans med beskrivande funktionen förutsäga systemet med avseende på stabilitet och eventuella egensvängningar. Lagg märke till att systemet kan vara insignal - utsignalstabil även om styrsignalen egensvänger.



Figur 6.8.8 Exempel på instabilt system till vänster och ett för varje amplitud stabilt system till höger.



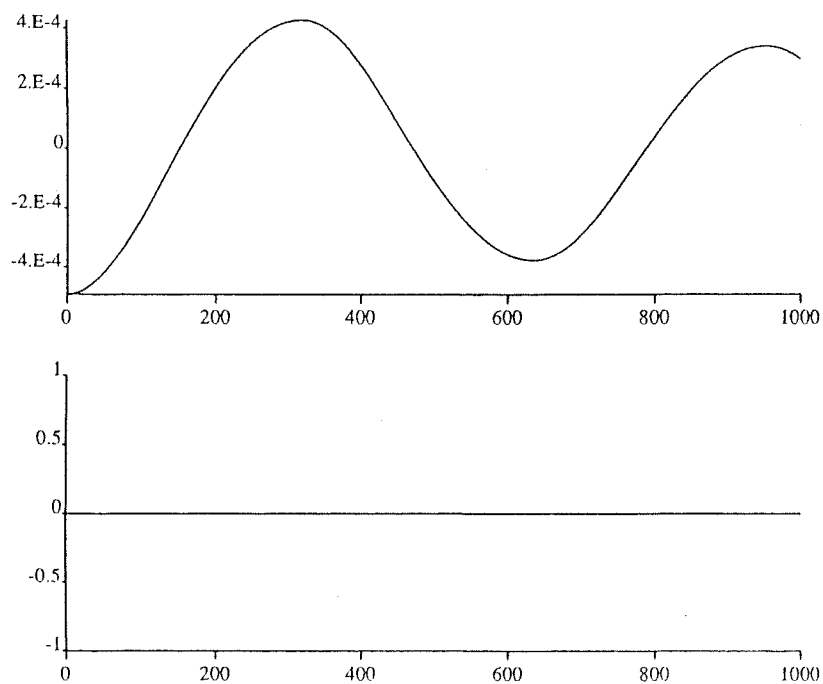
## 6.9 Appendix I

### 6.9.1 Simuleringar 10-10 systemet

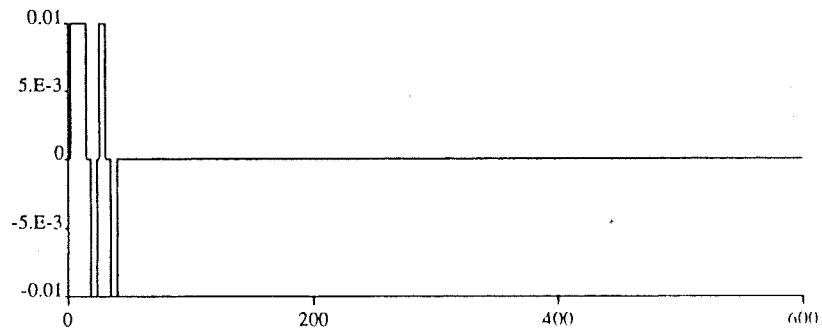
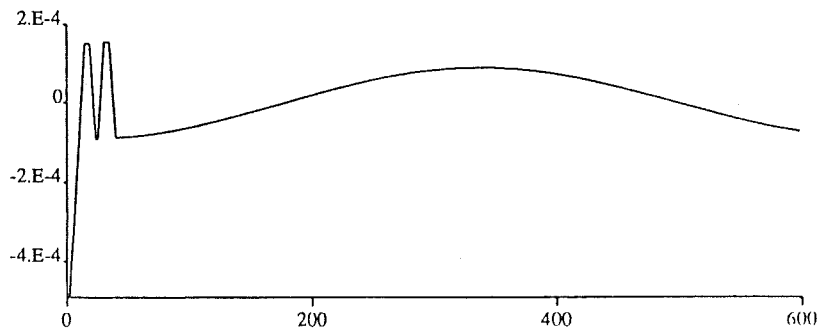
För simuleringarna nedan gäller :

$b_1$	$= 10^{-2}$
$b_2$	$= 10^{-2}$
$k_p$	$= 2 \cdot 10^{-5}$
$d$	$= 10$
$v\_delay$	$= 2$
$p\_delay$	$= 4$
$t\_limit$	$= 0$
$delta\_t$	$= 1$
$cn$	$= 0.3$

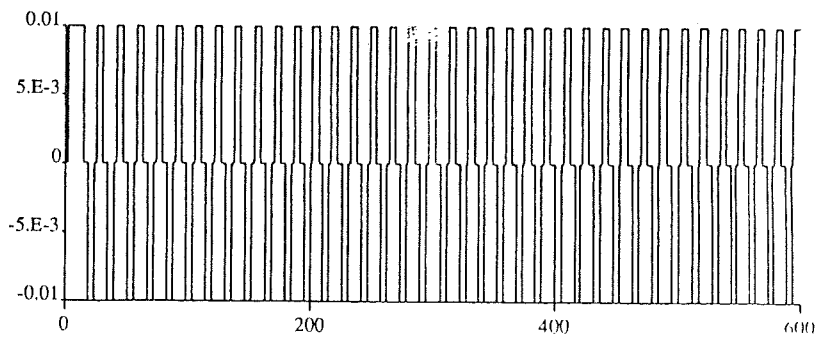
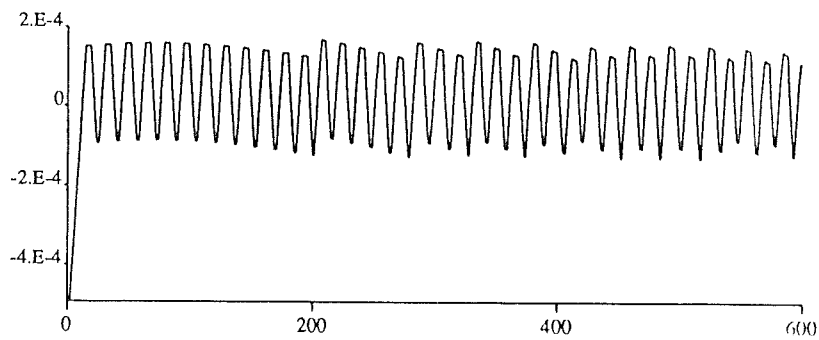
Simuleringarna är utförda med Reg33 och sub2.



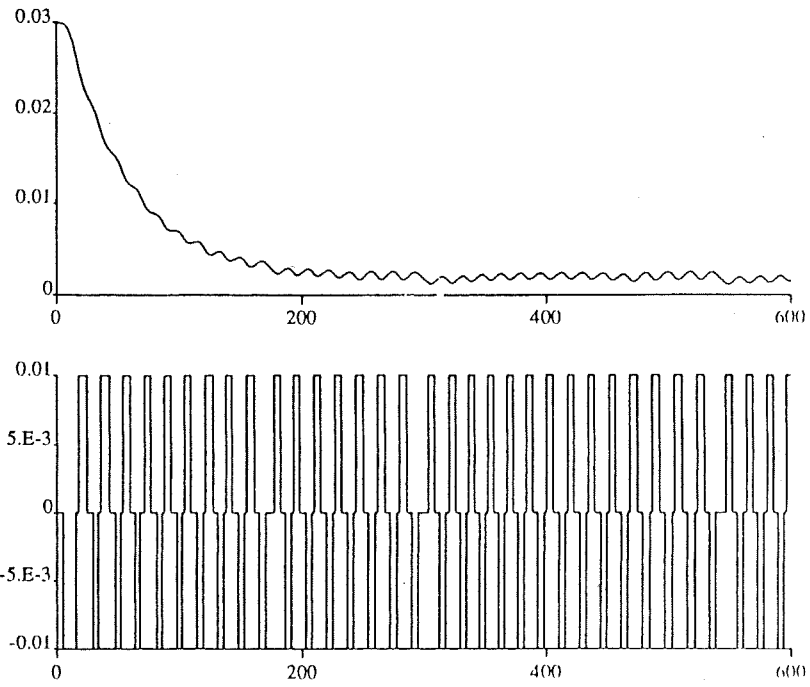
Figur 6.9.1.1 Stegsvär för accelerationen.  $K_{T3} = 10^4$ .



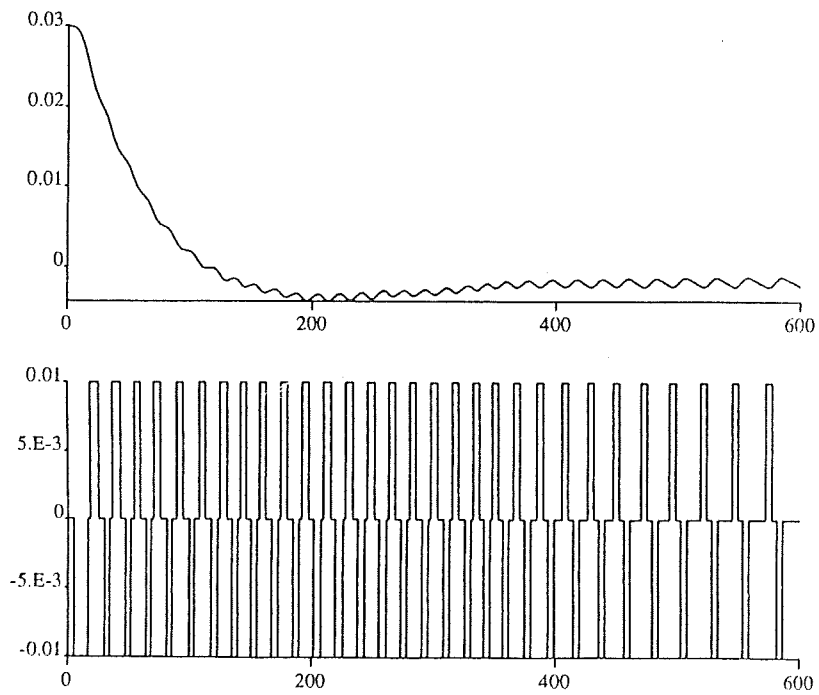
Figur 6.9.1.2 Stegsvär för accelerationen.  $K_{T3} = 1.1 \cdot 10^5$ .



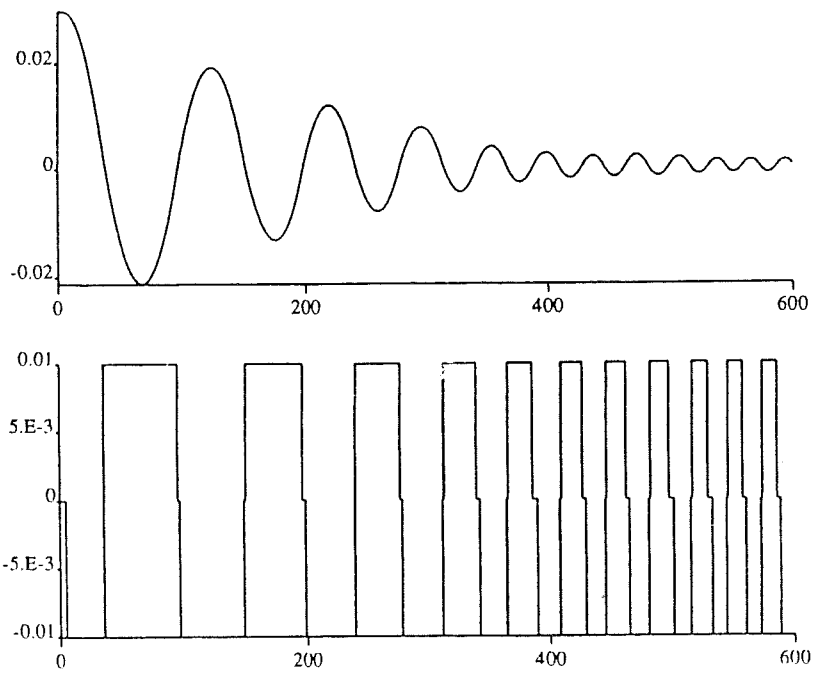
Figur 6.9.1.3 Stegsvär för accelerationen.  $K_{T3} = 10^6$ .



Figur 6.9.1.4 Stegsvär för djuphastigheten.  $K_{T3} = 1.1 \cdot 10^5$  och  $K_{T2} = 200$ .



Figur 6.9.1.5 Stegsvär för djuphastigheten.  $K_{T3} = 1.1 \cdot 10^5$  och  $K_{T2} = 2000$ .



Figur 6.9.1.6 Stegsvär för djuphastigheten.  $K_{T3} = 1.1 \cdot 10^5$  och  $K_{T2} = 20000$ .