

CODEN: LUTFD2/(TFRT-5359)/1-73/(1986)

**Aktiv dämpning av
svängningsmoder
i en robotarm**

Erik Mårtensson

**Institutionen för Reglerteknik
Lunds Tekniska Högskola
December 1986**

LUND INSTITUTE OF TECHNOLOGY DEPARTMENT OF AUTOMATIC CONTROL Box 118 S 221 00 Lund Sweden	Document name Master thesis	
	Date of issue December 1986	
	Document number CODEN: LUTFD2/(TFRT-5359)/1-73/(1986)	
Author(s) Erik Mårtensson	Supervisor Rolf Johansson	
	Sponsoring organization	
Title and subtitle Aktiv dämpning av svängningsmoder i en robotarm (Active damping of oscillation modes in a robot arm)		
Abstract This paper describes and investigates a method for active damping of the oscillations that occur in a flexible robot arm during motion. By this is meant a method for taking under consideration the elastic deformations of the arm during control so that their influence can be eliminated with respect to the motion of the tip of the arm. The starting point of the investigation is a model of a flexible robot arm. In order to get this model Lagrange's equations are used to derive the equations of motion for a stiff robot arm. These equations are then combined with the equation of motion of an actuator and the equations describing the static deformations of the flexible arm to give a model of a flexible robot arm with actuators. Likewise is a model of a stiff robot arm with actuators derived by combining the stiff arms equations of motion with the equation of motion for the actuator. These models of robot arms are then combined with a control law and a method for making suitable trajectories for the tip of the arm to move along so that their behaviour can be simulated with the simulation package SIMNON. By comparing the result for the flexible arm with the result for the stiff arm a clear picture is given of the efficiency of the proposed method for active damping.		
Key words		
Classification system and/or index terms (if any)		
Supplementary bibliographical information		
ISSN and key title		ISBN
Language Swedish	Number of pages 73	Recipient's notes
Security classification		

**AKTIV DÄMPNING AV
SVÄNGNINGSMODER I
EN ROBOTARM**

**Examensarbete
av
Erik Mårtensson**

Lund 1986

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

1. BESKRIVNING AV EN ROBOTARM	1
2. RÖRELSEEKVATIONER FÖR EN STEL ROBOTARM	2
3. RÖRELSEEKVATIONER FÖR DRIVDON	4
4. MODELL AV EN DRIVDONSFÖRSEDD STEL ROBOTARM	6
5. ROBOTARMENS FLEXIBILITET	7
6. MODELL AV EN DRIVDONSFÖRSEDD FLEXIBEL ROBOTARM	11
7. STYRSYSTEM	13
8. REFERENSVÄRDEN FÖR BANSTYRNING	16
9. SIMULERING OCH UTVÄRDERING	21

APPENDIX A. LAGRANGES EKVATIONER FÖR EN STEL ROBOTARM

APPENDIX B. ROBOTARMENS FLEXIBILITET

APPENDIX C. SIMULERINGSMODELLER

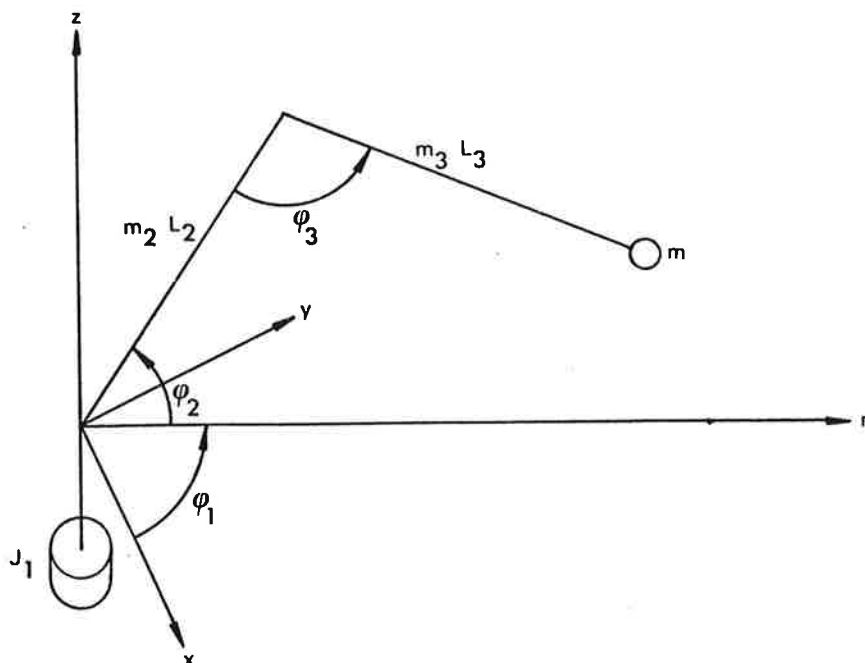
1. BESKRIVNING AV EN ROBOTARM

En robotarm består generallt av en kedja av armsegment eller länkar, sinsemellan förbundna med leder av translations- eller rotationstyp. Varje led är försedd med någon form av drivanordning med vilken man kan ändra den relativa positionen mellan de båda länkarna som är förbundna med leden.

Vanligtvis är armen försedd med tre leder vilket ger den tre frihetsgrader och alltså möjlighet att positionera dess ände i en godtycklig punkt inom arbetsrymden. Armens ände förses vanligen med ytterligare tre frihetsgrader som gör det möjligt att godtyckligt orientera ett anbringt verktyg, exempelvis ett gripdon.

I det följande ska en robotarm som har tre leder av rotationstyp beaktas. Armen återges schematiskt i figur 1:1 ur vilken det framgår hur den kan placeras i ett rätvinkligt koordinatsystem. Länkarnas inbördes lägen kan anges genom att införa så kallade ledkoordinater, vilka i detta fall består av vinkellägena i anslutning till lederna med beteckningarna φ_1 , φ_2 och φ_3 . Vinkellägena fastställer vidare armens position i förhållande till koordinatsystemet som det framgår av figuren.

Robotarmens länkar kan karakteriseras av de storheter som är nödvändiga för att formulera rörelseekvationerna för armen. I så fall karakteriseras länk 1 av sitt tröghetsmoment med avseende på z-axeln vilket kan betecknas J_1 medan länkarna 2 och 3 karakteriseras av sina längder L_2 och L_3 samt massor m_2 och m_3 . Dessutom förutsätts armen ha en last anbringad i sin ände och denna last anses kunna betraktas som en punktmasa med massa m .



Figur 1:1. Robotarm med tre frihetsgrader.

2. RÖRELSEEKVATIONER FÖR EN STEL ROBOTARM

Rörelseekvationer för en mekanisk anordning som t ex en robotarm låter sig härledas på huvudsakligen två sätt, nämligen enligt Newton-Euler eller enligt Lagrange. Dessa båda metoder förutsätter att armens länkar kan betraktas som stela. Vidare kräver de givetvis kännedom om den yttre kraftverkan på armen som i detta fall består dels av de vridmoment som verkar i armens leder och härrör från drivdonen och dels av gravitationens kraftverkan. Däremot skiljer sig metoderna i vissa andra avseenden för vilka ska redogöras kort i det följande.

Rörelseekvationer enligt Newton-Euler kräver att var länk betraktas separat och därigenom måste den interna kraftverkan mellan länkarna i lederna beaktas. Dessa reaktionskrafter och -moment i lederna är emellertid inte åtkomliga med mindre än att rörelseekvationernas samtliga komponenter formuleras, dvs för var länks samtliga frihetsgrader. Vissa av dessa rörelseekvationer ger sedan explicita uttryck för reaktionskrafterna och -momenten i lederna och dessa uttryck får sedan användas för att eliminera de okända reaktionskrafterna och -momenten ur de övriga rörelseekvationerna.

Rörelseekvationer enligt Lagrange medger däremot att den interna kraftverkan i armens leder inte behöver beaktas, detta ifall ett ytterligare antagande görs, nämligen att armens leder kan betraktas som friktionsfria. I så fall kan armens rörelseekvationer härledas direkt utifrån uttrycken för armens rörelse- och lägesenergi, där dessa uttryck formulerats i ledkoordinaterna och deras tidsderivator, samt ledmomenten som härrör från drivdonen.

Resonemanget ovan indikerar att Lagranges metod är det enklaste och rättframmaste sättet att härleda armens rörelseekvationer och väljs följaktligen i den fortsatta behandlingen.

Inför följande beteckningar

T - robotarmens rörelseenergi uttryckt i ledkoordinaterna

U - robotarmens lägesenergi uttryckt i ledkoordinaterna

Q_i - gravitationens moment i led i

M_i - yttre verkande moment i led i

φ_i - vinkelläge i led i

så ges rörelseekvationerna för den aktuella robotarmen av

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (T - U) = M_i$$

Med fördel införes beteckningen

$$Q_i = - \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}$$

varefter man får

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = Q_i + M_i$$

Detta kan visas, vilket görs i appendix A, vara ekvivalent med

$$\underline{A}(\varphi) \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} + \underline{B}(\varphi) \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1^2 \\ \dot{\varphi}_2^2 \\ \dot{\varphi}_3^2 \end{bmatrix} + \underline{C}(\varphi) \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 \\ \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1(\varphi) \\ Q_2(\varphi) \\ Q_3(\varphi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

där $\underline{A}(\varphi)$, $\underline{B}(\varphi)$ och $\underline{C}(\varphi)$ betecknar 3x3-matriser vars element är funktioner av ledvinklarna. \underline{A} -matrisens element utgörs av uttryck för tröghetsmoment medan \underline{B} - och \underline{C} -matrisernas element utgörs av uttryck som återger centrifugal- respektive corioliseffekter

3. RÖRELSEEKVATIONER FÖR DRIVDON

En vanligt förekommande typ av drivdon i mekaniska anordningar med servouppgifter är likströmsmotorn. Dess dynamiska uppförande låter sig beskrivas med följande samband

$$V = R_a i + L_a \frac{di}{dt} + k_v \frac{d\theta}{dt}$$

$$M_a = k_a i$$

där beteckningarna innebär

V - yttre pålagd spänning på ankarlindningar

i - ström genom ankarlindningar

R_a - resistans i ankarlindningar och matningsledningar

L_a - induktans i ankarlindningar och matningsledningar

M_a - elektromagnetiskt vridmoment på rotorn

θ - rotorns vridningsvinkel

k_a - proportionalitetskonstant

k_v - proportionalitetskonstant

Vanligtvis kombineras motorn med någon sorts reduktionsväxel. Med ett yttre moment M verkande på reduktionsväxels utgångsaxel blir motorns rörelseekvation

$$J_m \ddot{\theta} = M_a - \frac{M}{N}$$

där J_m betecknar motorns tröghetsmoment och N är utväxlingen hos reduktionsväxeln.

Vanligtvis är induktansen L_a försumbar i vilket fall rörelseekvationen får formen

$$J_m \ddot{\theta} + \frac{k_a k_v}{R_a} \dot{\theta} = \frac{k_a}{R_a} V - \frac{M}{N}$$

Det visar sig behändigt att införa vridningsvinkeln på reduktionsväxels utgående axel och för denna gäller

$$\varphi = \frac{\theta}{N}$$

Insättning i rörelsekvationen ger

$$N^2 J_m \ddot{\varphi} + N^2 \frac{k_a k_v}{R_a} \dot{\varphi} = N \frac{k_a}{R_a} V - M$$

Inför här beteckningarna

$$A_m = N^2 J_m$$

$$D_m = N^2 \frac{k_a k_v}{R_a}$$

$$E_m = N \frac{k_a}{R_a}$$

Rörelsekvationen kan nu skrivas

$$A_m \ddot{\varphi} + D_m \dot{\varphi} = E_m V - M$$

4. MODELL AV EN DRIVDONSFÖRSEDD STEL ROBOTARM

En modell av en drivdonsförsedd robotarm vars länkar betraktas som stela kan nu erhållas genom att kombinera den stela robotarmens rörelseekvationer med drivdonens rörelseekvationer.

Robotarmens rörelseekvationer

$$\underline{A}(\varphi) \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{bmatrix} + \underline{B}(\varphi) \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1^2 \\ \dot{\varphi}_2^2 \\ \dot{\varphi}_3^2 \end{bmatrix} + \underline{C}(\varphi) \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 \\ \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1(\varphi) \\ Q_2(\varphi) \\ Q_3(\varphi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

ska alltså kombineras med drivdonens rörelseekvationer

$$A_m \ddot{\varphi}_i + D_m \dot{\varphi}_i = E_m V_i - M_i$$

Detta låter sig göras genom att observera att robotarmens vinkellägen φ_i blir identiska med vridningsvinklarna φ_i på drivdonens utgående axlar samt att de yttre verkande momenten M_i i robotarmens leder blir identiska med de yttre moment M_i som verkar på drivdonens utgående axlar.

Man kan nu kombinera rörelseekvationerna genom att eliminera momenten M_i samtidigt som man observerar att vinklarna φ_i för arm respektive drivdon är identiska, något som för övrigt beteckningen antyder.

Den drivdonsförsedda stela robotarmens rörelseekvationer får då formen

$$[\underline{A} + A_m \underline{I}] \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{bmatrix} + \underline{B} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1^2 \\ \dot{\varphi}_2^2 \\ \dot{\varphi}_3^2 \end{bmatrix} + \underline{C} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 \\ \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} + D_m \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} + E_m \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Robotarmens styr signaler utgörs här av drivdonens motorspänningar V_i med vilka styrningen av rörelserna i armens leder alltså får utföras.

5. ROBOTARMENS FLEXIBILITET

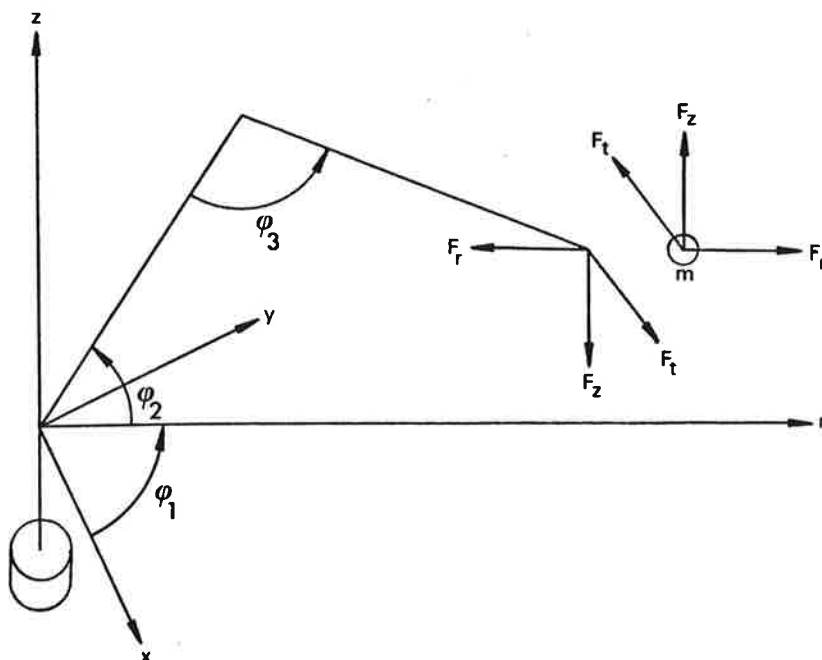
Strävan att hantera ännu tyngre laster och att utföra ännu snabbare rörelser medför att det inte längre är realistiskt att betrakta robotarmens länkar som stela. Flexibiliteten i länkarna kommer att ge sig till känna i form av svängningar i armen under dess rörelse.

Det är därför önskvärt att ta reda på vilka krafter som verkar på armen under rörelsens gång och de deformationer dessa ger upphov till. Betrakta därför kraftverkan mellan arm och last vid en godtycklig rörelse enligt figur 5:1. I armens ände uppträder som synes tre kraftkomponenter som tillsammans med ledmoment, reaktionskrafter och -moment i lederna samt armens egentyngd kommer att ge upphov till en elastisk deformation av armen vid dess rörelse.

Här vore det fördelaktigt om det ginge att formulera rörelseekvationer för en flexibel arm på ett motsvarande sätt som för en stel arm. Det visar sig emellertid att detta låter sig svårligen göras av olika orsaker av vilka kan nämnas armens variabla geometri samt dess kontinuerligt fördelade massa.

Emellertid är det inte nödvändigt att ha en fullständig beskrivning av armens elastiska beteende under gång utan det väsentliga är hur denna elasticitet yttrar sig i armens ände. I så fall kan armens flexibilitet beskrivas någorlunda väl med de samband som gäller för dess elastiska deformation i statiskt tillstånd där man bortser från den deformation som härrör från armens egentyngd. Överensstämmelsen med det verkliga elastiska beteendet kan förväntas bli bättre ju större lastens massa är i förhållande till själva armens massa.

Utgå alltså ifrån hur armen deformeras då den påverkas av krafterna F_r , F_z och F_t i ett tillstånd av jämvikt. Eftersom jämvikt anses råda är då även de övriga krafterna och momenten som verkar på armen givna och alltså kan deformationen av armen bestämmas.



Figur 5:1. Kraftverkan mellan robotarm och last vid godtycklig rörelse.

Betrakta först armens transversella utböjning, dvs den utböjning som orsakas av kraften F_t , som denna framgår av figur 5:2. För att beskriva armens flexibilitet i transversalled införs med stöd av denna figur följande beteckningar

φ_{1m} - vinkelläge i anslutning till led 1

φ_{1a} - vinkelläge som anger faktiskt läge i horisontalplanet för armens ände

Vid transversell belastning av armen uppkommer alltså en vinkeldifferens

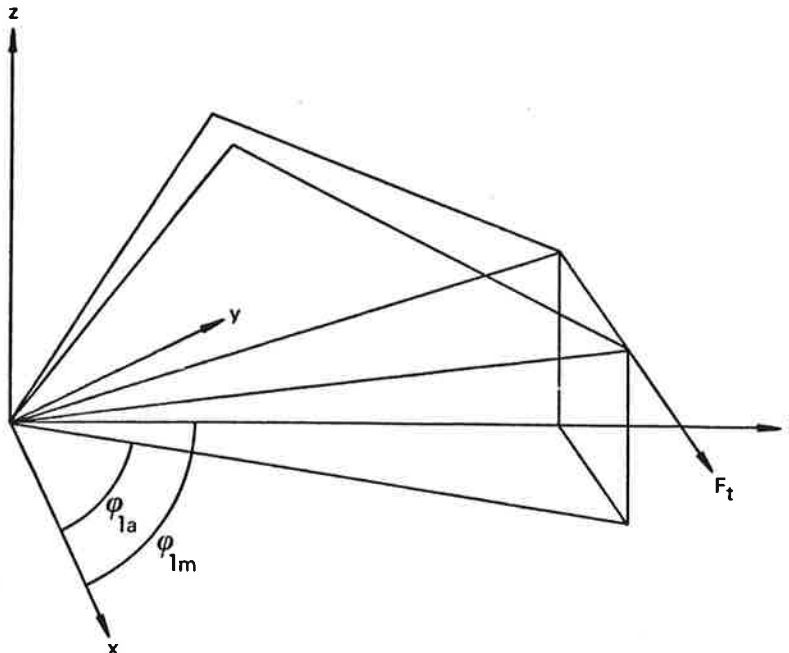
$$\varphi_{1e} = \varphi_{1m} - \varphi_{1a}$$

mellan det vinkelläge som registreras i anslutning till själva leden, dvs φ_{1m} , och det vinkelläge som återger det faktiska vinkelläget i horisontalplanet för armens ände, dvs φ_{1a} .

Här är det nu främst av intresse att bestämma hur vinkeldifferensen φ_{1e} beror av ledmomenten. Det framgår direkt att vinkeldifferensen φ_{1e} endast beror av ledmomentet M_1 och alltså gäller ett samband av följande typ

$$M_1 = k_h \varphi_{1e}$$

En härledning av flexibilitetskonstanten k_h görs i appendix B.



Figur 5:2. Robotarmens deformation i transversalled.

Betrakta därefter armens utböjning i vertikalplanet, alltså den utböjning som uppkommer i rz-planet och orsakas av krafterna F_r och F_z och som återges i figur 5:3. För att beskriva armens flexibilitet i rz-planet införs i enlighet med denna figur beteckningarna

$\varphi_{2m}, \varphi_{3m}$ - vinkellägen i anslutning till lederna 2 och 3

$\varphi_{2a}, \varphi_{3a}$ - vinkellägen som anger faktiskt läge i rz-planet för armens ände

De elastiska deformationer som uppkommer kan skrivas som vinkeldifferenserna

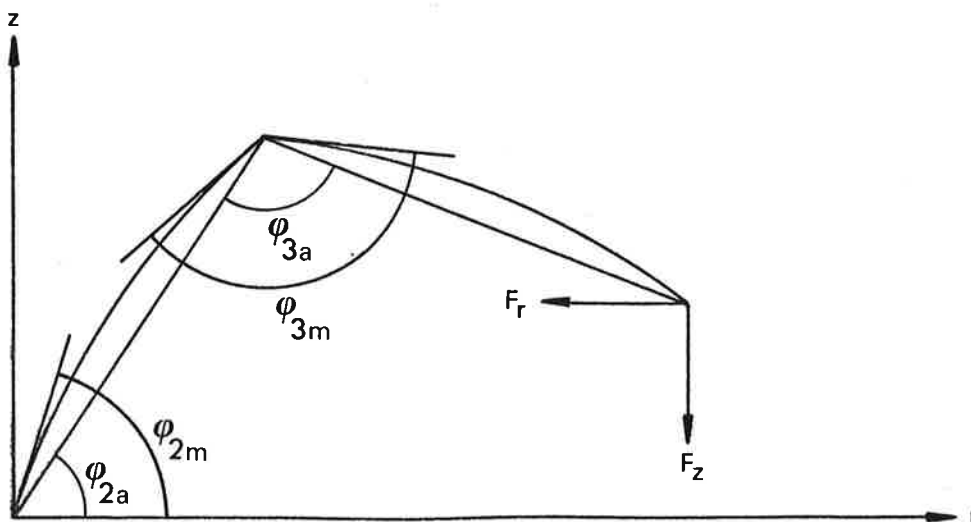
$$\varphi_{2e} = \varphi_{2m} - \varphi_{2a}$$

$$\varphi_{3e} = \varphi_{3m} - \varphi_{3a}$$

Här kommer dessa vinkeldifferenser att bero på ledmomenten M_2 och M_3 . I appendix visas att samband av följande typ gäller

$$M_2 = k_v \left[2\varphi_{2e} - \frac{1}{2}\varphi_{3e} \right]$$

$$M_3 = k_v \left[-\frac{1}{2}\varphi_{2e} + \varphi_{3e} \right]$$



Figur 5:3. Robotarmens deformation i vertikalplanet.

De härledda sambanden beskriver armens deformation under inverkan av statiska belastningar. Avsikten var emellertid att beskriva hur armen deformerades under inverkan av dynamiska belastningar, vilket antogs vara möjligt att göra utifrån de statiska deformationssambanden. Detta låter sig förvisso göras men med den inskränkningen att man inte beaktar den dämpning i svängningsrörelsen som en verklig arm skulle uppvisa.

Denna dämpningseffekt kan dock på ett enkelt sätt modelleras genom att komplettera de ursprungliga statiska deformationssambanden med termer som beror på hastigheten hos vinkeldifferenserna. Tillvägagångssättet för detta framgår av appendix B och resultatet framgår nedan

$$M_1 = k_h \varphi_{1e} + d_h \dot{\varphi}_{1e}$$

$$M_2 = k_v \left[2\varphi_{2e} - \frac{1}{2}\varphi_{3e} \right] + d_v \left[2\dot{\varphi}_{2e} - \frac{1}{2}\dot{\varphi}_{3e} \right]$$

$$M_3 = k_v \left[-\frac{1}{2}\varphi_{2e} + \varphi_{3e} \right] + d_v \left[-\frac{1}{2}\dot{\varphi}_{2e} + \dot{\varphi}_{3e} \right]$$

Dämpningskonstanterna d_h och d_v får här väljas så att dämpningen får en lämplig storlek.

6. MODELL AV EN DRIVDONSFÖRSEDD FLEXIBEL ROBOTARM

Grundideen med den förenklade beskrivningen av robotarmens flexibilitet är att beskriva den flexibla robotarmen utifrån sambanden för den stela robotarmen och drivdonen kombinerade med deformationssambanden för den flexibla armen.

Detta kan göras på så sätt att man föreställer sig att armens flexibilitet härrör från elastiska kopplingselement i lederna på den stela armen. Dessa tänkta kopplingselement utgör alltså en elastisk förbindelse mellan själva armen och drivdonet i respektive led och är således i den ena änden förbundna med den aktuella länken och i den andra änden förbundna med drivdonets utgående axel. Ifall ett yttre moment påförs leden via drivdonets axel så kommer detta kopplingselement att deformeras och därigenom uppkommer en skillnad mellan vinkelläget för drivdonets axel och vinkelläget hos själva leden.

Detta betraktelsesätt kan nu relateras till armens faktiska deformation och de beteckningar som infördes för att beskriva denna. De vinkellägen som registreras i anslutning till lederna, dvs φ_{im} , motsvaras då av vinkellägena för drivdonens axlar medan de vinkellägen som infördes för att återge det faktiska läget hos armens ände, dvs φ_{ia} , motsvaras av just länkarnas vinkellägen eftersom deformationen ansågs äga rum i förbindelsen mellan arm och drivdon.

Utifrån ovanstående utläggning är det nu uppenbart hur den flexibla robotarmen kan beskrivas utifrån rörelseekvationerna för den stela robotarmen och drivdonen i kombination med den flexibla armens deformationssamband.

Låt alltså den stela armens ledvinklar återges av vinkellägena φ_{ia} , som infördes för att ange det faktiska läget hos änden för den flexibla armen, så att armens rörelseekvationer får formen

$$\underline{A}(\varphi_a) \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_{1a} \\ \ddot{\varphi}_{2a} \\ \ddot{\varphi}_{3a} \end{bmatrix} + \underline{B}(\varphi_a) \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{1a}^2 \\ \dot{\varphi}_{2a}^2 \\ \dot{\varphi}_{3a}^2 \end{bmatrix} + \underline{C}(\varphi_a) \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{1a}\dot{\varphi}_{2a} \\ \dot{\varphi}_{1a}\dot{\varphi}_{3a} \\ \dot{\varphi}_{2a}\dot{\varphi}_{3a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1(\varphi_a) \\ Q_2(\varphi_a) \\ Q_3(\varphi_a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

Vidare får drivdonens vridningsvinklar återges av vinkellägena φ_{im} , vilka var de vinkellägen som registrerades i anslutning till lederna på den flexibla armen

$$A_m \ddot{\varphi}_{im} + D_m \dot{\varphi}_{im} = E_m V_i - M_i$$

Den elastiska kopplingen mellan arm och drivdon ges slutligen av den flexibla armens deformationssamband, där dessa kompletterats med hastighetsberoende termer för att kunna återge den dämpning som alltid förekommer i verkligheten.

$$M_1 = k_h \varphi_{1e} + d_h \dot{\varphi}_{1e}$$

$$M_2 = k_v \left[2\varphi_{2e} - \frac{1}{2}\varphi_{3e} \right] + d_v \left[2\dot{\varphi}_{2e} - \frac{1}{2}\dot{\varphi}_{3e} \right]$$

$$M_3 = k_v \left[-\frac{1}{2}\varphi_{2e} + \varphi_{3e} \right] + d_v \left[-\frac{1}{2}\dot{\varphi}_{2e} + \dot{\varphi}_{3e} \right]$$

7. STYRSYSTEM

Styrsystemets uppgift är att med styrsignalerna V_i , dvs motorspänningarna till drivdonen, få armens ände att röra sig längs föreskrivna banor. Dessa banor får förutsättas finnas specificerade i form av referensvärden för ledvinklarna. Referensvärdena som kan betecknas $\varphi_{ir}(t)$ anger alltså de ledrörelser som svarar mot den banrörelse som armens ände utför.

Styrproblemet kan till att börja med angripas utifrån modellen av den drivdonsförsedda stela robotarmen

$$\left[\underline{A} + \underline{A}_m \underline{I} \right] \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{bmatrix} + \underline{B} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} + \underline{C} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 \\ \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} + \underline{D}_m \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} + \underline{E}_m \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Det framgår av dessa rörelseekvationer att ledernas rörelser är sinsemellan kopplade dels via \underline{A} -matrisen och dels via \underline{B} - och \underline{C} -matriserna som dessutom innefattar de olinjära centrifugal- och coriolistermerna. Vidare är koefficienterna i \underline{A} -, \underline{B} - och \underline{C} -matriserna variabla och detta gäller likaledes för Q -vektorn som beskriver gravitationens inverkan.

Det ovan nämnda ger en fingervisning om styrproblemets grad av komplexitet. Det skulle krävas en ingående kännedom om de olika parametrarna som ingår i rörelseekvationerna om målet vore att fullständigt kunna beskriva de effekter som uppträder vid armens rörelse, detta för att kunna korrigera helt för dessa vid styrningen.

Det är emellertid också av intresse att utvärdera enklare angreppssätt på styrproblemet som inte utgår ifrån en fullständig kännedom om rörelseekvationernas alla termer. Det enklaste sättet att angripa styrproblemet är att betrakta lederna var för sig och bortse ifrån kopplingen mellan ledrörelserna på så vis att denna betraktas som en yttre störning. Denna yttre störning kan då även få innefatta gravitationens inverkan.

Var led's rörelseekvation kan då skrivas på formen

$$(a_{ii} + A_m) \ddot{\varphi}_i + D_m \dot{\varphi}_i = E_m V_i + W_i$$

eller

$$J_i \ddot{\varphi}_i + D_m \dot{\varphi}_i = E_m V_i + W_i$$

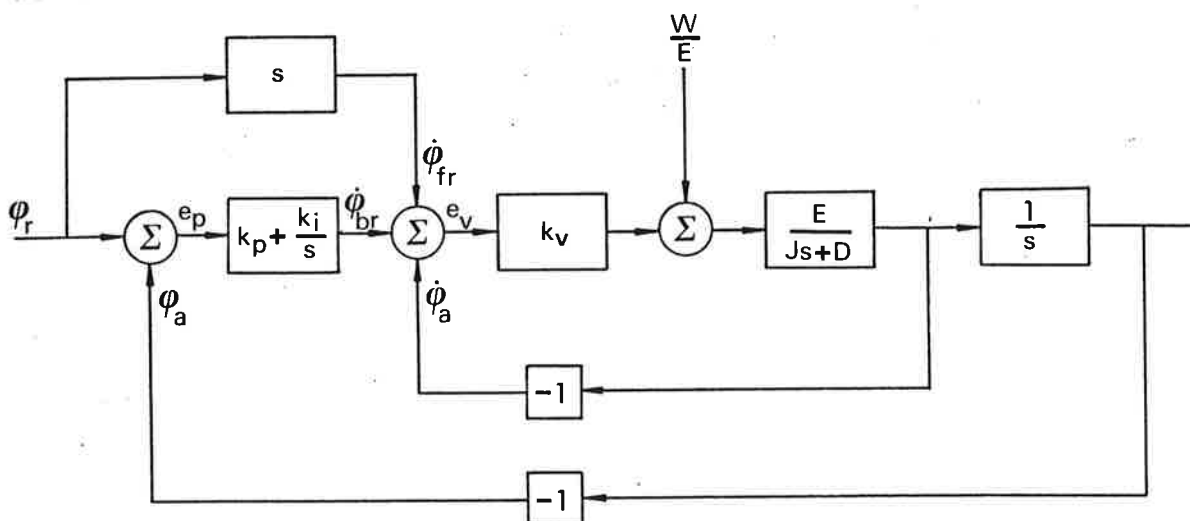
där alltså kopplingstermerna och gravitationstermen sammanförts i termen W_i som på detta sätt får karaktären av en yttre störning.

Utifrån denna modell av den enskilda ledens dynamik är det uppenbart hur olika styrlagar kan appliceras på leden. De styrlagar som rimligen kan komma ifråga torde vara de av mera konventionellt snitt, detta på grund av att det förenklade sättet att betrakta leddynamiken, där varken ledrörelsernas koppling eller gravitationens inverkan beaktades explicit, gör det mindre meningsfullt att använda mer avancerade varianter.

De krav som måste uppfyllas av en styrlag för att denna ska kunna komma ifråga i detta fall är först och främst att den förmår att hantera dels verkningarna av störtermen W_i dels variationen hos tröghetsmomentet J_i .

En möjlig sådan styrlag återges i figur 7:1. Det rör sig här om en typ av styrlag med återkoppling från både läge och hastighet hos ledvinkeln. Här kan noteras att den inre återkopplingsslingan, dvs återkopplingen av ledvinkelhastigheten, kan reducera verkningarna av variationen hos tröghetsmomentet J_i . Vidare ingår en integralterm i den yttre återkopplingsslingan, alltså återkopplingen av ledvinkelläget, där denna har till sin främsta uppgift att eliminera det statiska fel i vinkelläget som annars skulle uppstå på grund av gravitationens bidrag till störtermen W_i . Slutligen kan noteras den framkoppling som görs av referensvärdet. I detta fall kan denna utföras utan att någon derivering av referensvärdessignalen behöver ske, detta eftersom banrörelserna är kända på förhand och därigenom även de motsvarande värdena på ledvinklar och ledvinkelhastigheter.

Styrning av en arm i vilken flexibiliteten gör sig gällande kan givetvis ske på samma sätt som för en stel arm. I detta fall uppträder dock den komplikationen att ledvinklarna, alltså de vinkellägen som registreras i anslutning till lederna och därigenom är direkt åtkomliga genom mätningar, inte längre beskriver läget hos armens ände. Därigenom kommer de svängningar som uppstår i armen under dess rörelse att uppträda utan att kunna registreras och åtgärdas av styrsystemet.



Figur 7:1. Styrlag för ledvis styrning av robotarm.

Storleken hos dessa svängningar måste begränsas om armen ska kunna utföra rörelser med tillräcklig precision. Det enda sätt som står till buds under dessa omständigheter är att begränsa hastigheten hos armens rörelser så att det inte uppkommer någon nämnvärd elastisk deformation. Detta kan dock tyckas innebära onödiga restriktioner och därför är det av intresse att utvärdera andra metoder att bemästra verkningarna av armens flexibilitet.

Rent generellt skulle verkningarna av armens flexibilitet kunna bemästras om de elastiska deformationerna beaktades explicit vid styrningen. Denna skulle alltså utföras så att armens ände fås att röra sig längs specificerad bana trots de elastiska deformationerna och de svängningar i armen som blir en konsekvens av dessa. Styrningen syftar alltså till att eliminera verkningarna av armens flexibilitet i armens ände eftersom det inte går att undvika att själva armen deformeras vid rörelsen.

Ett sätt att styra som beaktar armens deformation är att styra med avseende på de vinklar och vinkelhastigheter som beskriver det faktiska läget och hastigheten hos armens ände, alltså de vinklar och vinkelhastigheter som infördes för att beskriva armens deformation. Dessa vinklar och vinkelhastigheter är inte åtkomliga genom mätningar av samma typ som ger vinklar och vinkelhastigheter i anslutning till lederna men kan erhållas genom mätningar av de mekaniska påkänningarna i armen. De framtagna värdena på dessa vinklar och vinkelhastigheter hos den flexibla armen kan sedan användas i den föreslagna styrlagen på samma sätt som ledvinklar och ledvinkelhastigheter används hos den stela armen. Styrning på detta sätt av den flexibla armen borde om inte eliminera så åtminstone reducera verkningarna av armens flexibilitet i armens ände.

8. REFERENSVÄRDEN FÖR BANSTYRNING

Robotarmen har tillordnats ett rätvinkligt koordinatsystem i vilket det faller sig naturligt att specificera de banor som robotarmens ände ska röra sig längs med. Emellertid förutsätter styrsystemet att banrörelserna specificerats i form av ledrörelserna, något som gör det nödvändigt att finna uttryck för sambanden mellan läge och hastighet hos robotarmens ände uttryckta i rumskoordinaterna och de motsvarande värdena på ledvinklarna och ledvinkelhastigheterna.

I detta speciella fall gäller för läge och hastighet hos robotarmens ände

$$x = f_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = [L_2 \cos \varphi_2 - L_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_3)] \cos \varphi_1$$

$$y = f_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = [L_2 \cos \varphi_2 - L_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_3)] \sin \varphi_1$$

$$z = f_3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = L_2 \sin \varphi_2 - L_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_3)$$

och

$$\dot{x} = \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} \dot{\varphi}_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_3} \dot{\varphi}_3$$

$$\dot{y} = \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2} \dot{\varphi}_2 + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_3} \dot{\varphi}_3$$

$$\dot{z} = \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1 + \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_2} \dot{\varphi}_2 + \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_3} \dot{\varphi}_3$$

Det som är av intresse är emellertid de inversa sambanden

$$\varphi_1 = g_1(x, y, z)$$

$$\varphi_2 = g_2(x, y, z)$$

$$\varphi_3 = g_3(x, y, z)$$

och

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\partial g_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial g_1}{\partial z} \dot{z}$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\partial g_2}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial g_2}{\partial z} \dot{z}$$

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{\partial g_3}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial g_3}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} \dot{z}$$

Dessa samband förefaller dock att vara svåråtkomliga men utan att bedrövas observerar man att sambandet mellan hastigheten hos armens ände och ledvinkelhastigheterna kan uttryckas på formen

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{pmatrix} = \underline{J}(\varphi) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{pmatrix}$$

och alltså gäller ifall $\underline{J}(\varphi)$ är inverterbar

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{pmatrix} = \underline{J}^{-1}(\varphi) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

Här gäller för övrigt för \underline{J} -matrisens element

$$J_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} = - [L_2 \cos \varphi_2 - L_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_3)] \sin \varphi_1$$

$$J_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2} = [-L_2 \sin \varphi_2 + L_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_3)] \cos \varphi_1$$

$$J_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_3} = L_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) \cdot \cos \varphi_1$$

$$J_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} = [L_2 \cos \varphi_2 - L_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_3)] \cos \varphi_1$$

$$J_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2} = [-L_2 \sin \varphi_2 + L_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_3)] \sin \varphi_1$$

$$J_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_3} = L_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) \cdot \sin \varphi_1$$

$$J_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_1} = 0$$

$$J_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_2} = L_2 \cos \varphi_2 - L_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_3)$$

$$J_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial \varphi_3} = -L_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_3)$$

Givet hastigheten hos armens ände kan således på detta sätt de tillhörande ledvinkelhastigheterna erhållas. Ledvinklarna kan därefter erhållas genom integration av ledvinkelhastigheterna.

Banrörelserna förutsattes ovan vara specificerade i form av hastigheten hos armens ände uttryckt i rumskoordinaterna. Hur detta ska göras i ett rent allmänt fall är inte helt elementärt och därför är det praktiskt att inskränka sig till banor som består av några enkla typer av geometriska grundelement som exempelvis linjestycken och cirkelsegment. Genom att kombinera dessa grundelement kan man på ett enkelt sätt beskriva banor som svarar mot helt realistiska tillämpningar.

I fallet rörelse längs ett linjestycke kan man för enkelhets skull begränsa sig till fallen konstant banhastighet och konstant banacceleration.

I det första fallet specificeras då banhastighetskomponenterna

$$v = (v_x, v_y, v_z)$$

som direkt ger ledvinklar och ledvinkelhastigheter på tidigare nämnt sätt.

I det andra fallet specificeras banaccelerationskomponenterna

$$a = (a_x, a_y, a_z)$$

i vilket fall banhastighetskomponenterna erhålles medelst integration varefter dessa används som tidigare.

I fallet rörelse längs ett cirkelsegment kan man nöja sig med de fall där banhastigheten är konstant och rörelsen sker i plan som är parallella med något av koordinatplanen. Under dessa omständigheter gäller att banaccelerationsvektorn är vinkelrät mot banhastighetsvektorn.

Om då rörelsen sker i ett plan parallellt med xy-planet så ges banhastighetsvektorn av

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$$

vilket medför att banaccelerationsvektorn får formen

$$\mathbf{a} = \pm \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|} (-v_y, v_x, 0)$$

Positivt tecken innebär här att banaccelerationsvektorn är så riktad att rörelsen sker moturs.

Dessutom gäller

$$|\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{v}|^2}{r}$$

där r betecknar cirkelsegmentets radie samt

$$\varphi \cdot r = |\mathbf{v}| \cdot t$$

där φ betecknar cirkelsegmentets båginkel och t står för tid.

Detta medför att

$$\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|\mathbf{v}|}{r} = \frac{\varphi}{t}$$

och alltså kan man skriva

$$\mathbf{a} = \pm \frac{\varphi}{t} (-v_y, v_x, 0)$$

På motsvarande sätt gäller för rörelse parallellt med yz-planet

$$\mathbf{a} = \pm \frac{\varphi}{t} (0, -v_z, v_y)$$

och för rörelse parallellt med zx-planet

$$\mathbf{a} = \pm \frac{\varphi}{t} (-v_z, 0, v_x)$$

Denna form på uttrycket för banaccelerationsvektorn vid rörelse längs ett cirkelsegment visar sig praktisk vid simulering. Utifrån ett givet värde på banhastighetsvektorn är det möjligt att specificera rörelsen längs ett cirkelsegment genom att ange dess båginkel och den tid rörelsen ska vara eller, kanske mera egentligt uttryckt, genom att ange båginkelhastigheten varefter simuleringen får fortgå den tid som erfordras för att båginkeln ska uppnå önskat värde.

Detta sätt att beskriva rörelse längs ett cirkelsegment har den fördelen att det inte kräver några koordinatangivelser i form av start-, slut- och centrumpunkter för cirkelsegmentet. Därigenom blir det okomplicerat att beskriva banor i vilka rörelse längs cirkelsegment ingår. Dessutom kan observeras att banor som specificerats sålunda inte beror på startpunktens läge. Detta gör det möjligt att specificera en viss typ av bana utan att behöva fixera dess läge i arbetsrymden. Banan kan därefter ges den önskade placeringen i arbetsrymden genom att välja robotarmens startposition.

9. SIMULERING OCH UTVÄRDERING

Väl kommen så här långt kan det vara värt att göra en kort sammanfattning av vad som egentligen har åstadkommit. Till att börja med togs fram modeller för en stel och en flexibel robotarm. Vidare föreslogs en styrlag och redogjordes för hur denna skulle kunna användas i de båda fallen. Speciellt för den flexibla armens vidkommande diskuterades verkningarna av armens flexibilitet. I detta fall noterades att armens styrning kunde utföras både utan och med beaktande av de deformationer som på grund av armens flexibilitet uppkommer under dess rörelse. Slutligen föreslogs så ett sätt att styra den flexibla armen med beaktande av flexibiliteten i syfte att reducera dess verkningar med avseende på rörelsen hos armens ände.

Det som nu återstår att utföra är alltså att klarlägga dels verkningarna av armens flexibilitet i det fall denna inte tas i beaktande vid styrningen, dels i vilken omfattning dessa verkningar låter sig reduceras i det fall armens flexibilitet beaktas vid styrningen på det sätt som föreslagits.

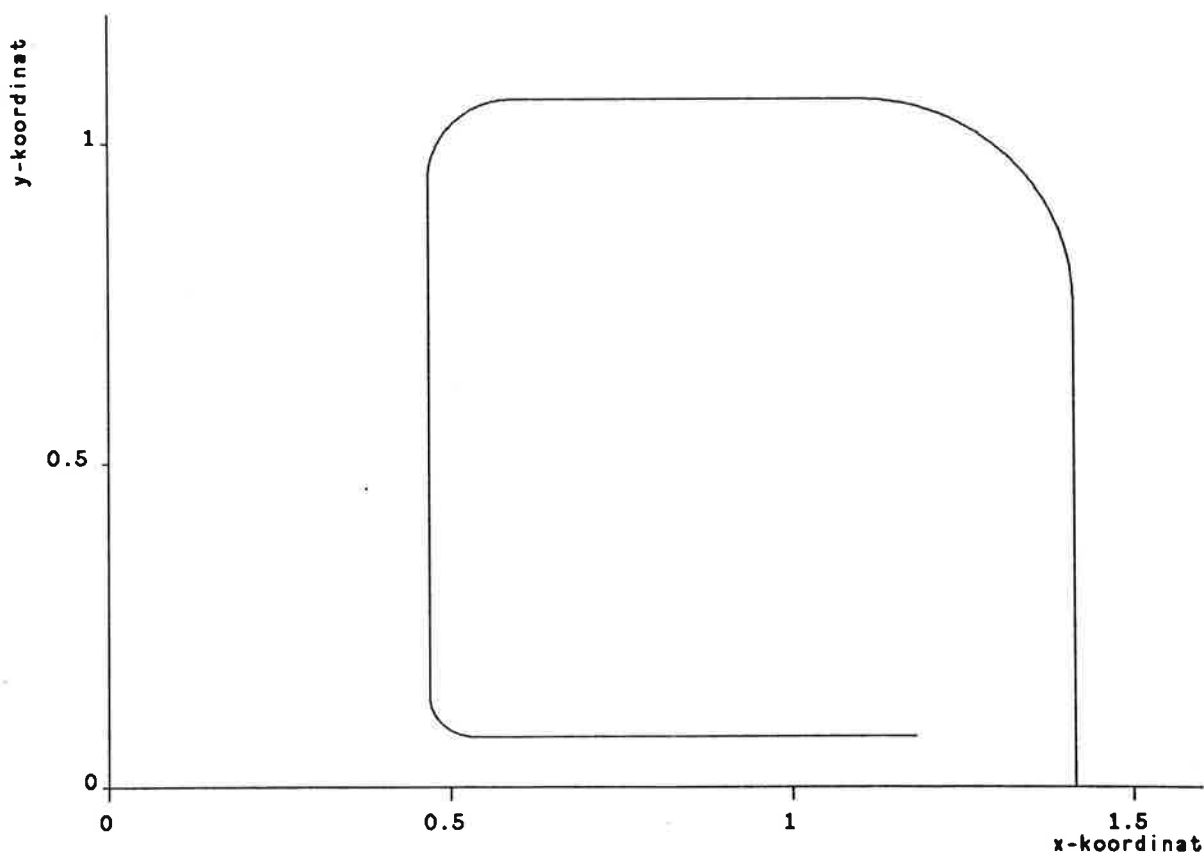
Utvärderingen enligt ovan utförs lämpligen genom simulering. Detta fordrar då i sin tur att uttrycken för den stela och den flexibla robotarmen, uttryck för styrlag samt uttryck för samband mellan referensvärden och bankoordinater, vilka samtliga återgetts tidigare i framställningen, överförs på en simuleringsbar form. Hur detta låter sig göras i simuleringsspråket SIMNON framgår i detalj av appendix C. Där framgår vidare hur simuleringen lämpligen kan organiseras så att man får en fullständig dokumentation av gjorda förutsättningar, valt tillvägagångssätt och resultatredovisningsmetod.

Innan simuleringarna kan genomföras är det nödvändigt att göra vissa förutsättningar beträffande de parametrar som ingår i ekvationerna för den stela respektive den flexibla robotarmen samt drivdonen. I fallet den stela robotarmen ingår parametrar som betecknar längder, massor samt tröghetsmoment. I fallet den flexibla robotarmen tillkommer ytterligare parametrar för att ange böj- och vridstyvhet hos armens länkar. Drivdonens ekvationer innehåller parametrar som betecknar diverse mekaniska och elektriska karaktäristika. Samtliga dessa parametrar har här helt enkelt tillordnats värden som kan betraktas som typiska vad beträffar faktiskt existerande robotarmer.

Det är också nödvändigt att bestämma lämpliga värden på regulatorparametrarna innan det är möjligt att genomföra och utvärdera resultaten av simuleringarna. Ett möjligt förfarande att bestämma regulatorparametrar i ett fall som detta är helt enkelt att prova olika värden och välja de värden som ger ett godtagbart resultat. Den omsorg som ägnas parametervälet får ställas i relation till den avsikt som föreligger med att utföra simuleringarna. Eftersom avsikten här närmast är att demonstrera hur armens flexibilitet yttrar sig och klargöra i vilken omfattning dessa yttringar låter sig reduceras snarare än att undersöka och utvärdera själva valet av regulatorparametrar så har dessa helt enkelt tilldelats värden som har visat sig ge rimliga resultat vad beträffar robotarmens uppförande, närmare bestämt vad beträffar förhållandet mellan snabbhet och storlek på styrsignaler.

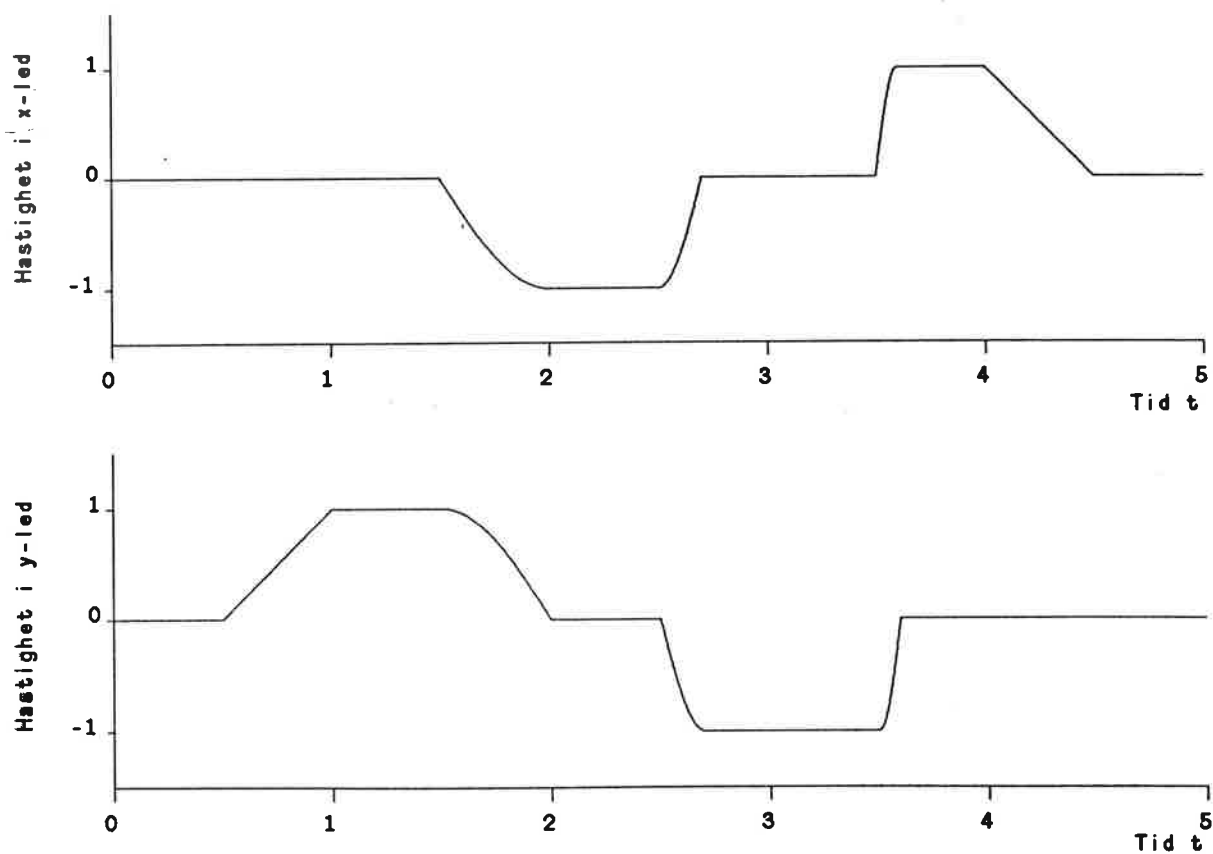
Hur själva simuleringen ska genomföras är heller inte helt uppenbart. Ett möjligt förfarande är att låta armens ände genomlöpa en lämpligt vald testbana, vald så att den kan tänkas svara mot någon form av tillämpning och vidare medger en enkel utvärdering av simuleringsresultatet. Dessutom är det angeläget att den valda testbanan inbegriper samtidig rörelse i alla armens leder, så att man inte bara kan klargöra den enskilda ledens uppträdande utan även bilda sig en uppfattning om i vilken grad kopplingseffekter mellan lederna gör sig gällande. En bana som uppfyller detta torde förmå att ge en god illustration av de effekter som uppträder vid robotarmens rörelse.

Avslutningsvis återstår så blott att närmare i detalj specificera den testbana som ska användas vid simuleringarna. Ett exempel på en bana med de efterfrågade egenskaperna framgår av figur 9:1. Figuren visar hur rörelsen för armens ände försiggår i xy-planet. Någon rörelse i höjdlid förekommer inte utan armens ände befinner sig i samma plan under hela rörelsen. Banan är som synes uppbyggd av banelement av typ linjestycken och cirkelsegment för vilka det gäller, förutom för det första och sista av dessa, att banhastigheten är konstant. Det första och sista av banelementen, som för övrigt är linjestycken, karakteriseras å sin sida av att banaccelerationen är konstant.



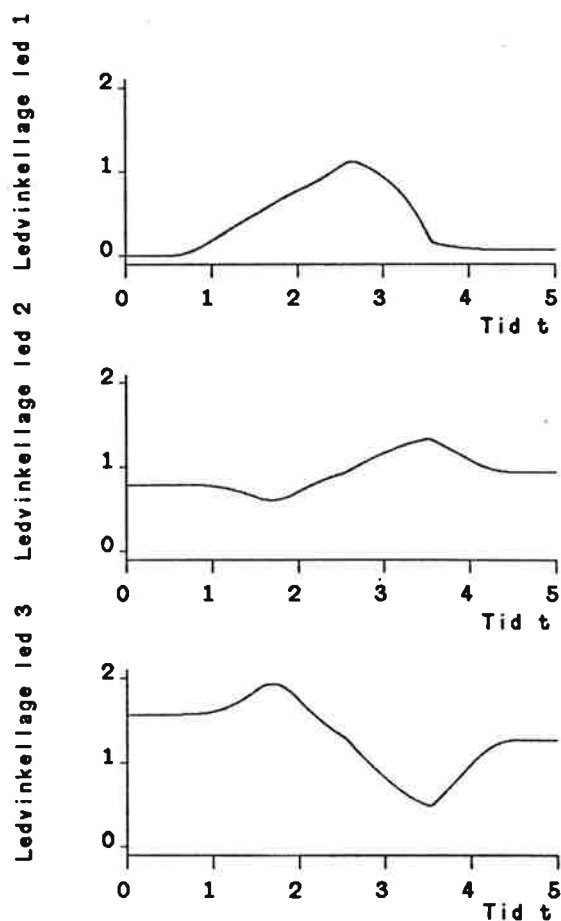
Figur 9:1. Referensbana i xy-planet.

För att ytterligare belysa rörelsen för armens ände längs den givna banan visas i figur 9:2 hur hastighetskomponenterna för armens ände varierar med tiden.

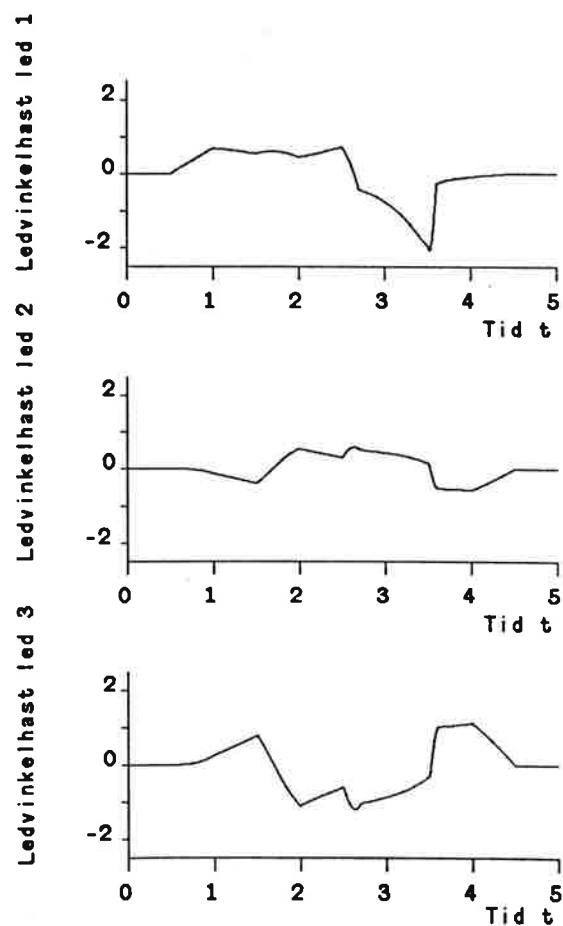


Figur 9:2. Hastigheter i x-led och y-led hos robotarmens ände för given testbana.

Bilden av banrörelsen kan slutligen göras fullständig genom att återge tidsvariationen hos de referensvärden för ledvinklar och ledvinkelhastigheter vilka svarar mot den aktuella banan. Dessa referensvärden för ledvinklar och ledvinkelhastigheter redovisas ledvis var för sig i figur 9:3 och figur 9:4. Dessa figurer ger samtidigt en möjlighet att kontrollera att den valda banan uppfyller kraven på samtidiga ledrörelser.



Figur 9:3. Referensvärden för ledvinklar.

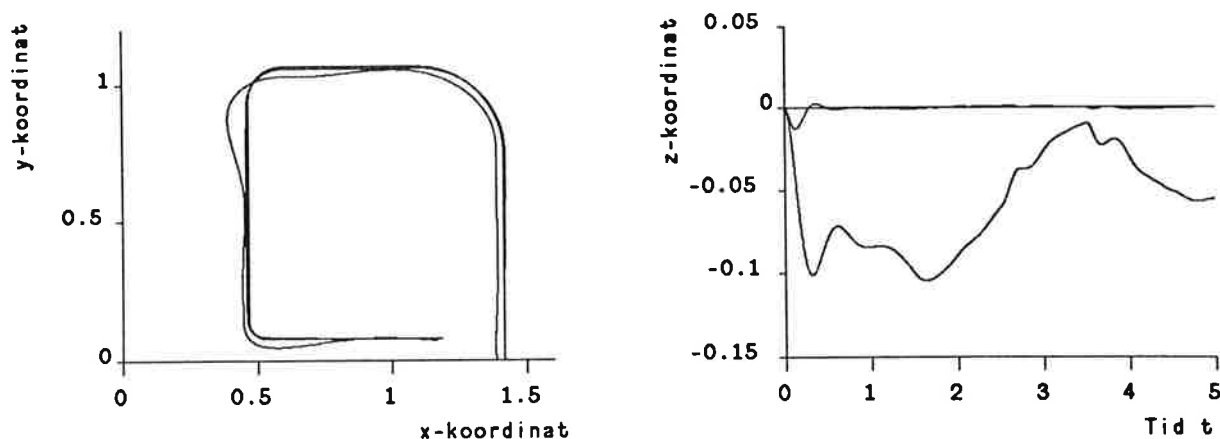


Figur 9:4. Referensvärden för ledvinkelhastigheter.

Simuleringarna kan nu genomföras och resultaten därav redovisas på det sätt som framgår nedan. Till att börja med undersöks det fall där den flexibla robotarmen styrs utan beaktande av flexibiliteten. En uppfattning om verkningarna av flexibiliteten kan så erhållas genom att jämföra den flexibla armens resultat med motsvarande resultat för den stela armen.

Det kan här vara lämpligt att först undersöka hur de respektive armarnas ändrar förmår att följa den givna testbanan. Resultatet framgår av figur 9:5. I figurens vänstra del visas den bana som respektive arms ände genomlöper i xy-planet och i den högra delen av figuren visas den variation i höjdled som respektive arms ände genomgår längsmed samma bana. I den vänstra delen av figuren har också markerats den givna referensbanan i xy-planet och i den högra delen av figuren referensvärdet i höjdled.

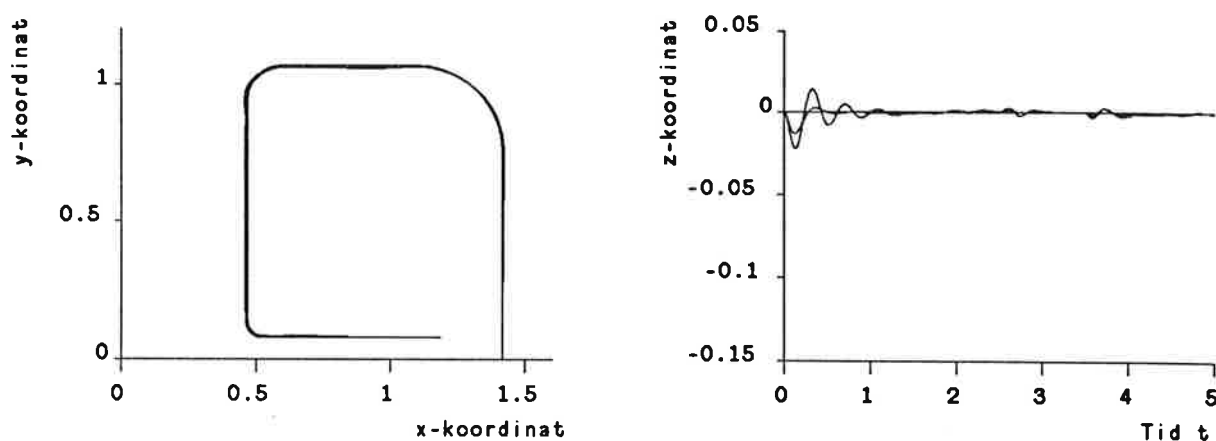
Här framgår det med all önskvärd tydlighet av figurerna att den flexibla armens ände inte förmår att följa den givna referensbanan varken med avseende på rörelsen i xy-planet eller med avseende på givna höjd. Den stela armen å sin sida förmår att följa testbanan med god precision både med avseende på rörelsen i xy-planet och med avseende på höjden.



Figur 9:5. Banrörelse och höjdvariation för stel arm respektive flexibel arm utan beaktande av flexibiliteten.

På samma vis kan det fall där den flexibla armen styrs med beaktande av flexibiliteten utvärderas. Fortsätt alltså med att klargöra hur den flexibla armens ände i detta fall förmår att följa den givna testbanan och jämför som tidigare resultatet med den stela armens motsvarande resultat. Här framgår resultatet av figur 9:6. I likhet med det tidigare fallet visas i figurens vänstra del den bana som respektive arms ände genomlöper i xy -planet och i den högra delen av figuren den motsvarande variationen i höjdlängs banan. Som tidigare visas även referensbanan och referensvärdet i höjdlängs i figurens vänstra respektive högra del.

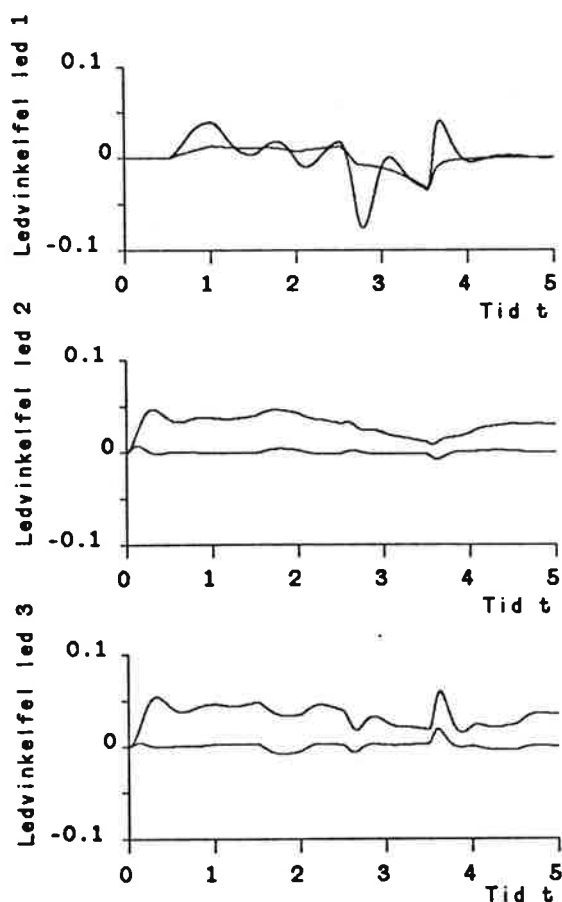
Det framgår här att skillnaden mellan den flexibla armens uppträdande och den stela armens uppträdande praktiskt taget har kunnat elimineras genom det sätt på vilket den flexibla armens deformation beaktats vid styrningen. Trots att det alltså inte går att undvika att den flexibla armen deformeras vid rörelse så visar det sig likväl möjligt att kraftigt reducera verkningarna av dessa deformationer med avseende på rörelsen hos armens ände.



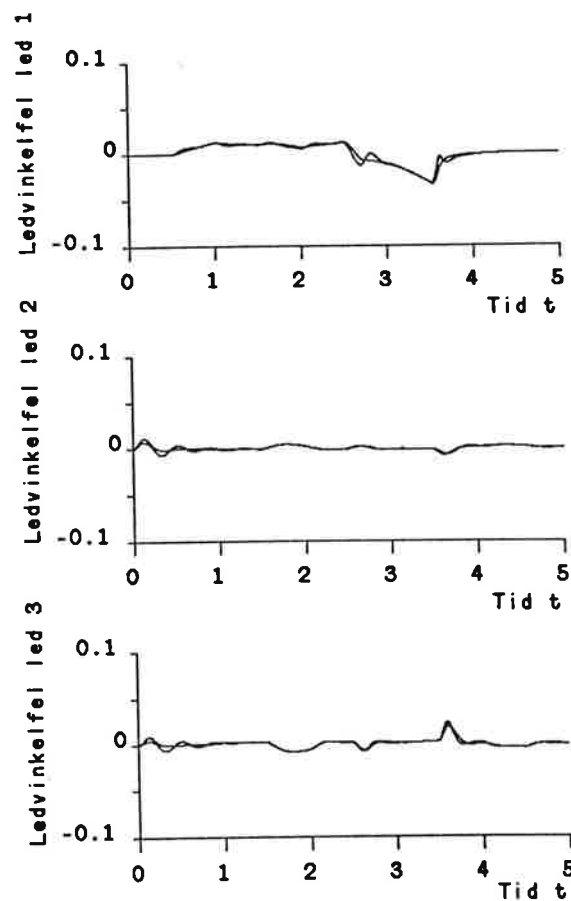
Figur 9:6. Banrörelse och höjdvaryation för stel arm respektive flexibel arm med beaktande av flexibiliteten.

Det kan avrundningsvis vara intressant att mera i detalj undersöka hur flexibiliteten yttrar sig i det fall den flexibla armen styrs utan beaktande av flexibiliteten. Detta kan göras genom att betrakta det vinkelfel som uppkommer mellan ledvinkellägets börvärde och vinkelläget hos armens ände för var enskild led. En jämförelse mellan den flexibla armen och den stela armen visar då hur stor del av det totala vinkelfelet för den flexibla armen det är som det är som härrör från dess elastiska deformation. Vinkelfelen kan studeras i figur 9:7 som ledvis visar dessa för den flexibla respektive den stela armen.

Det framgår att för den flexibla armen gäller att deformationen i led 1 närmast har karaktären av en svängningsrörelse kring ett jämviktsläge medan deformationen i lederna 2 och 3 till övervägande del är av statisk art. Detta är naturligt då deformationen i led 1 endast beror av armens rörelse medan deformationen i lederna 2 och 3 till stor del kommer av gravitationens inverkan.



Figur 9:7. Vinkelfel för stel arm respektive flexibel arm utan beaktande av flexibiliteten.



Figur 9:8. Vinkelfel för stel arm respektive flexibel arm med beaktande av flexibiliteten.

För fullkomlighetens skull kan även vinkelfelen i det fall den flexibla armen styrs med beaktande av flexibiliteten studeras. En jämförelse med den stela armen i det här fallet ger ytterligare vittnesbörd om den utsträckning som det valda sättet att beakta armens flexibilitet vid styrningen förmår att eliminera verkningarna av flexibiliteten med avseende på rörelsen hos armens ände. Vinkelfelen här framgår av figur 9:8 återgivna ledvis som tidigare.

Här framgår det än tydligare hur flexibilitetens verkningar låter sig reduceras. Vinkelfelen för den flexibla armen avviker blott obetydligt från den stela armens vinkelfel, vilket alltså innebär att den flexibla armens ände förmår att följa den givna testbanan praktiskt taget lika väl som den stela armens ände.

Sammanfattningsvis blir den slutsats som kan dras av det redovisade materialet att ifall en flexibel robotarm styrs utan beaktande av flexibilitetens verkningar och alltså i praktiken betraktas som stel, så kommer de elastiska deformationer som uppkommer i armen under dess rörelse att medföra att armens ände inte kommer att kunna utföra de avsedda banrörelserna med erforderlig noggrannhet.

Emellertid är det möjligt att beakta dessa elastiska deformationer vid styrningen av armen. Trots att även i detta fall det inte går att undvika att armen deformeras så visar det sig likväl möjligt att i hög grad reducera deformationens verkningar med avseende på det som är väsentligt i det här sammanhanget, nämligen med avseende på rörelsen hos armens ände.

Det kan som avslutning vara påkallat med några reflektioner över de erfarenheter som gjorts under arbetets gång. Tillfälle kan också tas i akt att ge några riktlinjer att arbeta vidare efter.

Till en början ska kort redogöras för de erfarenheter som gjorts vid användandet av Lagranges ekvationer för härledning av robotarmens rörelseekvationer och vid det därpå följande bruket av dessa rörelseekvationer för simulering med simuleringspråket SIMNON.

Lagranges ekvationer framstår som en enkel och rättfram om än något arbetskrävande metod att härleda robotarmens rörelseekvationer. De erhållna rörelseekvationerna visar sig vara olinjära och kopplade. I förstone kan därför SIMNON tyckas väl lämpat för ändamålet. En komplikation som uppkommer är emellertid den koppling som rörelseekvationerna uppvisar med avseende på derivatorna av högst förekommande ordning, alltså ledvinkelaccelerationerna. Detta är liktydigt med att \underline{A} -matrisen i rörelseekvationerna inte är diagonal och följdaktligen blir det nödvändigt att överföra ekvationerna på en form där ledvinkelaccelerationerna är okopplade för att SIMNON ska kunna användas.

I föreliggande fall gjordes detta genom direkt uträkning av \underline{A} -matrisens invers. Detta förfarande kan dock knappast användas för modeller av högre ordning. Allt detta visar på svårigheter att använda SIMNON i mer omfattande fall än det aktuella.

Några riktlinjer att arbeta vidare efter skulle kunna vara dels att utvidga modellen för robotarmen, dels att mer ingående undersöka och utvärdera andra typer av styrlagar. Möjliga utvidgningar av robotarmsmodellen vore förslagsvis dels att inkludera ett gripdon i armens ände, dels att modellera själva robotarmens elastiska beteende vid dynamisk belastning, detta lämpligen genom betrakta armen som ett system av fördelade massor. Båda dessa typer av utvidgningar av robotarmsmodellen innebär dock en ökning av modellens ordning så problem kan förutses då det gäller att överföra rörelseekvationerna till SIMNON.

APPENDIX A. LAGRANGES EKVATIONER FÖR EN STEL ROBOTARM

Lagranges rörelseekvationer härleds utifrån uttrycken för rörelse- och lägesenergi hos den aktuella anordningen. I detta fall ska dessa uttryck vara formulerade i de ledkoordinater och tillhörande tidsderivator som införts för att beskriva vinkellägen och vinkelhastigheter i robotarmens leder.

Robotarmens rörelse uppdelas naturligt i en rörelse runt den vertikala z-axeln och en rörelse i det vertikala rz-planet. De respektive hastighetskomponenterna är då vinkelräta och alltså gäller för rörelseenergin T följande

$$T = T_h + T_v$$

där beteckningarna innebär

T_h - rörelseenergi hörande till rörelse runt z-axeln (i horisontalplanet)

T_v - rörelseenergi hörande till rörelse i rz-planet (i ett vertikalt plan)

Med beteckningarna

J_1 - länk 1:s tröghetsmoment map z-axeln

J_2 - länk 2:s tröghetsmoment map z-axeln

J_3 - länk 3:s tröghetsmoment map z-axeln

J_m - massan m:s tröghetsmoment map z-axeln

så gäller för den första rörelseenergikomponenten

$$T_h = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2} (J_1 + J_2 + J_3 + J_m) \dot{\varphi}_1^2$$

där J_1 har ett på förhand givet värde och det för de övriga termerna gäller

$$J_2 = \frac{1}{3} m_2 L_2^2 \cos^2 \varphi_2$$

$$J_3 = \frac{1}{12} m_3 L_3^2 \cos^2 (\varphi_2 + \varphi_3) + m_3 \left[L_2 \cos \varphi_2 - \frac{1}{2} L_3 \cos (\varphi_2 + \varphi_3) \right]^2$$

$$J_m = m \left[L_2 \cos \varphi_2 - L_3 \cos (\varphi_2 + \varphi_3) \right]^2$$

På motsvarande sätt gäller för den andra rörelseenergikomponenten

$$T_v = T_{v2} + T_{v3} + T_{vm}$$

Inför beteckningarna

J_c - tröghetsmoment map en axel genom masscentrum, vinkelrätt mot rz-planet

ω_c - dito vinkelhastighet

v_c - masscentrums hastighet i rz-planet

så kan termerna i den andra rörelseenergikomponenten uttryckas på följande vis

$$T_{v2} = \frac{1}{2} J_{c2} \omega_{c2}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{c2}^2 = \frac{1}{2} m_2 \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right] L_2^2 \dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{6} m_2 L_2^2 \dot{\varphi}_2^2$$

$$T_{v3} = \frac{1}{2} J_{c3} \omega_{c3}^2 + \frac{1}{2} m_3 v_{c3}^2 = \frac{1}{2} m_3 \left[\frac{1}{12} L_3^2 (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3)^2 + v_{c3}^2 \right]$$

$$T_{vm} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2$$

Inför vidare

v_a - länk 3:s axiella hastighet i rz-planet i anslutning till led 2

v_t - länk 3:s transversella hastighet i rz-planet i anslutning till led 2

så erhålles

$$v_{c3}^2 = v_a^2 + \left[v_t + \frac{1}{2} L_3 \omega_{c3} \right]^2 = v_a^2 + \left[v_t + \frac{1}{2} L_3 (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3) \right]^2$$

$$v_{cm}^2 = v_a^2 + \left[v_t + L_3 \omega_{c3} \right]^2 = v_a^2 + \left[v_t + L_3 (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3) \right]^2$$

Vidare gäller

$$v_a = L_2 \dot{\varphi}_2 \sin(180^\circ - \varphi_3) = L_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_3$$

$$v_t = L_2 \dot{\varphi}_2 \cos(180^\circ - \varphi_3) = -L_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_3$$

vilket avslutningsvis ger

$$v_{c3}^2 = \left[L_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_3 \right]^2 + \left[-L_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_3 + \frac{1}{2} L_2 (\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3) \right]^2 =$$

$$= \left[L_2^2 + \frac{1}{2} L_3^2 - L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right] \dot{\varphi}_2^2 + \left[\frac{1}{2} L_3^2 - L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right] \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 + \frac{1}{2} L_3^2 \dot{\varphi}_3^2$$

$$v_{cm}^2 = \left[L_2^2 + L_3^2 - 2L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right] \dot{\varphi}_2^2 + 2 \left[L_3^2 - L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right] \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 + L_3^2 \dot{\varphi}_3^2$$

Robotarmens totala rörelseenergi kan nu skrivas på den efterfrågade formen

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left\{ \frac{1}{3} L_2^2 \cos^2 \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{3} L_2^2 \dot{\varphi}_2^2 \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} m_3 \left\{ \left[\frac{1}{12} L_3^2 \cos^2 (\varphi_2 + \varphi_3) + \left(L_2 \cos \varphi_2 - \frac{1}{2} L_3 \cos (\varphi_2 + \varphi_3) \right)^2 \right] \dot{\varphi}_1^2 + \right. \\
 & + \left. \left[L_2^2 + \frac{1}{3} L_3^2 - L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right] \dot{\varphi}_2^2 + \left[\frac{2}{3} L_3^2 - L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right] \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 + \frac{1}{3} L_3^2 \dot{\varphi}_3^2 \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} m \left[\left(L_2 \cos \varphi_2 - L_3 \cos (\varphi_2 + \varphi_3) \right)^2 \dot{\varphi}_1^2 + \left(L_2 + L_3 - 2 L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right) \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 + \right. \\
 & + \left. 2 \left[L_3^2 - L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right] \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 + L_3^2 \dot{\varphi}_3^2 \right]
 \end{aligned}$$

Vidare ges robotarmens lägesenergi av

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{1}{2} m_2 g L_2 \sin \varphi_2 + \\
 & + m_3 g \left[L_2 \sin \varphi_2 - \frac{1}{2} L_3 \sin (\varphi_2 + \varphi_3) \right] + \\
 & + m g \left[L_2 \sin \varphi_2 - \sin (\varphi_2 + \varphi_3) \right]
 \end{aligned}$$

Lagranges rörelseekvationer för robotarmen ges nu av sambanden

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = Q_i + M_i$$

där M_i är ett yttre verkande ledmoment och

$$Q_i = - \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}$$

Rättframma räkningar ger nu vidare

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = & \left\{ J_1 + \frac{1}{3} m_2 L_2^2 \cos^2 \varphi_2 + \right. \\ & + m_3 \left[\frac{1}{12} L_3^2 \cos^2 (\varphi_2 + \varphi_3) + \left[L_2 \cos \varphi_2 - \frac{1}{2} L_3 \cos (\varphi_2 + \varphi_3) \right]^2 \right] + \\ & \left. + m \left[L_2 \cos \varphi_2 + L_3 \cos (\varphi_2 + \varphi_3) \right]^2 \right\} \dot{\varphi}_1 \end{aligned}$$

varur följer

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = & \left\{ J_1 + \frac{1}{3} m_2 L_2^2 \cos^2 \varphi_2 + \right. \\ & + m_3 \left[\frac{1}{12} L_3^2 \cos^2 (\varphi_2 + \varphi_3) + \left[L_2 \cos \varphi_2 - \frac{1}{2} L_3 \cos (\varphi_2 + \varphi_3) \right]^2 \right] + \\ & + m \left[L_2 \cos \varphi_2 - L_3 \cos (\varphi_2 + \varphi_3) \right] \left. \right\} \ddot{\varphi}_1 + \\ & - \left\{ \frac{2}{3} m_2 L_2^2 \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_2 + \right. \\ & + m_3 \left[\frac{1}{6} L_3^2 \cos (\varphi_2 + \varphi_3) \sin (\varphi_2 + \varphi_3) + \right. \\ & + 2 \left[L_2 \cos \varphi_2 - \frac{1}{2} \cos (\varphi_2 + \varphi_3) \right] \left[L_2 \sin \varphi_2 - \frac{1}{2} L_3 \sin (\varphi_2 + \varphi_3) \right] \left. \right\} + \\ & + 2m \left[L_2 \cos \varphi_2 - \frac{1}{2} \cos (\varphi_2 + \varphi_3) \right] \left[L_2 \sin \varphi_2 - \frac{1}{2} L_3 \sin (\varphi_2 + \varphi_3) \right] \left. \right\} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \\ & - \left\{ m_3 \left[\frac{1}{6} L_3^2 \cos (\varphi_2 + \varphi_3) \sin (\varphi_2 + \varphi_3) + \right. \right. \\ & - \left. \left. \left[L_2 \cos \varphi_2 - \frac{1}{2} \cos (\varphi_2 + \varphi_3) \right] \cdot L_3 \sin (\varphi_2 + \varphi_3) \right] + \right. \\ & \left. - 2m \left[L_2 \cos \varphi_2 - \frac{1}{2} \cos (\varphi_2 + \varphi_3) \right] \cdot L_3 \sin (\varphi_2 + \varphi_3) \right\} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 \end{aligned}$$

Vidare fås

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0$$

samt

$$Q_1 = - \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = 0$$

På likartat sätt erhålles

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = \left[\frac{1}{3} m_2 L_2^2 + m_3 \left(L_2^2 + \frac{1}{3} L_3^2 - L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right) + m \left(L_2^2 + L_3^2 - 2 L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right) \right] \dot{\varphi}_2 +$$

$$+ \left[m_3 \left(\frac{1}{3} L_3^2 - \frac{1}{2} L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right) + m \left(L_3^2 - L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right) \right] \dot{\varphi}_3$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = \left[\frac{1}{3} m_2 L_2^2 + m_3 \left(L_2^2 + \frac{1}{3} L_3^2 - L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right) + \right.$$

$$+ \left. m \left(L_2^2 + L_3^2 + 2 L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right) \right] \ddot{\varphi}_2 +$$

$$+ \left[m_3 \left(\frac{1}{3} L_3^2 - \frac{1}{2} L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right) + m \left(L_3^2 - L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right) \right] \ddot{\varphi}_3 +$$

$$+ \left(m_3 L_2 L_3 \sin \varphi_3 + 2 m L_2 L_3 \sin \varphi_3 \right) \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} m_3 L_2 L_3 \sin \varphi_3 + m L_2 L_3 \sin \varphi_3 \right) \dot{\varphi}_3^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = - \left\{ \frac{1}{3} m_2 L_2^2 \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_2 + \right.$$

$$+ m_3 \left[\frac{1}{12} L_3^2 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_3) + \right.$$

$$+ \left. \left(L_2 \cos \varphi_2 - \frac{1}{3} L_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) \right) \left(L_2 \sin \varphi_2 - \frac{1}{3} L_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) \right) \right] +$$

$$+ \left. m \left(L_2 \cos \varphi_2 - L_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) \right) \left(L_2 \sin \varphi_2 - L_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) \right) \right\} \dot{\varphi}_1^2$$

$$Q_2 = - \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = \frac{1}{2} m_2 g L_2 \cos \varphi_2 +$$

$$+ m_3 g \left(L_2 \cos \varphi_2 - \frac{1}{2} L_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) \right) +$$

$$+ m g \left(L_2 \cos \varphi_2 - L_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) \right)$$

och slutligen fås

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} = \left[m_3 \left(\frac{1}{3} L_3^2 - \frac{1}{2} L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right) + m \left(L_3^2 - L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right) \right] \dot{\varphi}_2 + \left(\frac{1}{3} m_3 L_3^2 + m L_3^2 \right) \dot{\varphi}_3$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} \right) = \left[m_3 \left(\frac{1}{3} L_3^2 - \frac{1}{2} L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right) + m \left(L_3^2 - L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right) \right] \ddot{\varphi}_2 + \left(\frac{1}{3} m_3 L_3^2 + m L_3^2 \right) \ddot{\varphi}_3 + \left(\frac{1}{2} m_3 L_2 L_3 \sin \varphi_3 + m L_2 L_3 \sin \varphi_3 \right) \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = & - \left\{ m_3 \left[\frac{1}{12} L_3^2 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_3) - \right. \right. \\ & - \left. \left. \left(L_2 \cos \varphi_2 - \frac{1}{3} L_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) \right) \cdot \frac{1}{2} L_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) \right] - \right. \\ & - \left. m \left[L_2 \cos \varphi_2 - L_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) \right] \cdot L_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) \right\} \dot{\varphi}_1^2 + \\ & + \left(\frac{1}{2} m_3 L_2 L_3 \sin \varphi_3 + m L_2 L_3 \sin \varphi_3 \right) \dot{\varphi}_2^2 + \\ & + \left(\frac{1}{2} m_3 L_2 L_3 \sin \varphi_3 + m L_2 L_3 \sin \varphi_3 \right) \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \end{aligned}$$

$$Q_3 = - \frac{\partial U}{\partial \varphi_3} = - \frac{1}{2} m_3 g L_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) - m g L_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_3)$$

Nu kan man avslutningsvis konstatera att de framtagna ekvationerna kan sammanfattas på formen

$$\underline{A}(\varphi) \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{bmatrix} + \underline{B}(\varphi) \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1^2 \\ \dot{\varphi}_2^2 \\ \dot{\varphi}_3^2 \end{bmatrix} + \underline{C}(\varphi) \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 \\ \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1(\varphi) \\ Q_2(\varphi) \\ Q_3(\varphi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix}$$

där $\underline{A}(\varphi)$, $\underline{B}(\varphi)$ och $\underline{C}(\varphi)$ betecknar 3x3-matriser vars element beror av ledvinklarna.

Här gäller för $\underline{A}(\varphi)$ -matrisens element

$$\begin{aligned} a_{11} &= J_1 + \frac{1}{3}m_2 \cos^2 \varphi_2 + \\ &+ m_3 \left[\frac{1}{12}L_3^2 \cos^2(\varphi_2 + \varphi_3) + \left[L_2 \cos \varphi_2 - \frac{1}{2}L_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) \right]^2 \right] + \\ &+ m \left[L_2 \cos \varphi_2 - L_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) \right]^2 \\ a_{12} &= 0 \\ a_{13} &= 0 \\ a_{21} &= 0 \\ a_{22} &= \frac{1}{3}m_2 L_2^2 + m_3 \left[L_2^2 + \frac{1}{2}L_3^2 - L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right] + m \left[L_2^2 + L_3^2 - 2L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right] \\ a_{23} &= m_3 \left[\frac{1}{3}L_3^2 - \frac{1}{2}L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right] + m \left[L_3^2 - L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right] \\ a_{31} &= 0 \\ a_{32} &= m_3 \left[\frac{1}{3}L_3^2 - \frac{1}{2}L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right] + m \left[L_3^2 - L_2 L_3 \cos \varphi_3 \right] \\ a_{33} &= \frac{1}{3}m_3 L_3^2 + mL_3^2 \end{aligned}$$

$\underline{B}(\varphi)$ -matrisens element ges vidare av

$$b_{11} = 0$$

$$b_{12} = 0$$

$$b_{13} = 0$$

$$\begin{aligned} b_{21} = & \frac{1}{3}m_2L_2^2\cos\varphi_2\sin\varphi_2 - \\ & + m_3\left[\frac{1}{12}L_3^2\cos(\varphi_2 + \varphi_3)\sin(\varphi_2 + \varphi_3) + \right. \\ & + \left. \left[L_2\cos\varphi_2 - \frac{1}{2}L_3\cos(\varphi_2 + \varphi_3)\right]\left[L_2\sin\varphi_2 - \frac{1}{2}L_3\sin(\varphi_2 + \varphi_3)\right]\right] \\ & + m\left[L_2\cos\varphi_2 - L_3\cos(\varphi_2 + \varphi_3)\right]\left[L_2\sin\varphi_2 - L_3\sin(\varphi_2 + \varphi_3)\right] \end{aligned}$$

$$b_{22} = 0$$

$$b_{23} = \frac{1}{2}m_3L_2L_3\sin\varphi_3 + mL_2L_3\sin\varphi_3$$

$$\begin{aligned} b_{31} = & m_3\left[\frac{1}{12}L_3^2\cos(\varphi_2 + \varphi_3)\sin(\varphi_2 + \varphi_3) - \right. \\ & - \left. \left[L_2\cos\varphi_2 - \frac{1}{2}L_3\cos(\varphi_2 + \varphi_3)\right]\frac{1}{2}L_3\sin(\varphi_2 + \varphi_3)\right] - \\ & - m\left[L_2\cos\varphi_2 - L_3\cos(\varphi_2 + \varphi_3)\right]L_3\sin(\varphi_2 + \varphi_3) \end{aligned}$$

$$b_{32} = -\frac{1}{2}m_3L_2L_3\sin\varphi_3 - mL_2L_3\sin\varphi_3$$

$$b_{33} = 0$$

$\underline{C}(\varphi)$ -matrisens element ges slutligen av

$$\begin{aligned}
 c_{112} = & -\frac{2}{3}m_2L_2^2\cos\varphi_2\sin\varphi_2 - \\
 & -m_3\left[\frac{1}{6}L_3^2\cos(\varphi_2+\varphi_3)\sin(\varphi_2+\varphi_3) + \right. \\
 & + 2\left[L_2\cos\varphi_2 - \frac{1}{2}L_3\cos(\varphi_2+\varphi_3)\right]\left[L_2\sin\varphi_2 - \frac{1}{2}L_3\sin(\varphi_2+\varphi_3)\right] \\
 & \left. + 2m\left[L_2\cos\varphi_2 - L_3\cos(\varphi_2+\varphi_3)\right]\left[L_2\sin\varphi_2 - L_3\sin(\varphi_2+\varphi_3)\right]\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{113} = & -m_3\left[\frac{1}{6}L_3^2\cos(\varphi_2+\varphi_3)\sin(\varphi_2+\varphi_3) + \right. \\
 & + \left[L_2\cos\varphi_2 - \frac{1}{2}L_3\cos(\varphi_2+\varphi_3)\right]L_3\sin(\varphi_2+\varphi_3) \\
 & \left. + 2m\left[L_2\cos\varphi_2 - L_3\cos(\varphi_2+\varphi_3)\right]L_3\sin(\varphi_2+\varphi_3)\right]
 \end{aligned}$$

$$c_{123} = 0$$

$$c_{212} = 0$$

$$c_{213} = 0$$

$$c_{223} = m_3L_2L_3\sin\varphi_3 + 2mL_2L_3\sin\varphi_3$$

$$c_{312} = 0$$

$$c_{313} = 0$$

$$c_{323} = \frac{1}{2}m_3L_2L_3\sin\varphi_3 + mL_2L_3\sin\varphi_3 - \frac{1}{2}m_3L_2L_3\sin\varphi_3 - mL_2L_3\sin\varphi_3 = 0$$

APPENDIX B. ROBOTARMENS FLEXIBILITET

En robotarm i rörelse påverkas av krafter och moment som ger upphov till elastiska deformationer av armen. Ett sätt att beskriva dessa deformationer är att utgå ifrån de samband som beskriver armens statiska deformation där man bortser från inverkan av armens egentyngd. Armens deformation anses alltså uteslutande vara beroende av ledmomenten samt de krafter som uppträder i förbindelsen mellan armens ände och lasten.

Om armens ände påverkas av en transversell kraft F_t uppkommer en transversell utböjning δ på det sätt som antyds i figur B:1. Denna utböjning medför att det vinkelläge som registreras i anslutning till leden inte längre återger det faktiska vinkelläget i horisontalplanet för armens ände. Detta innebär alltså att det uppkommer en belastningsberoende vinkelavvikelse mellan vinkelläget för leden och lastens vinkelläge.

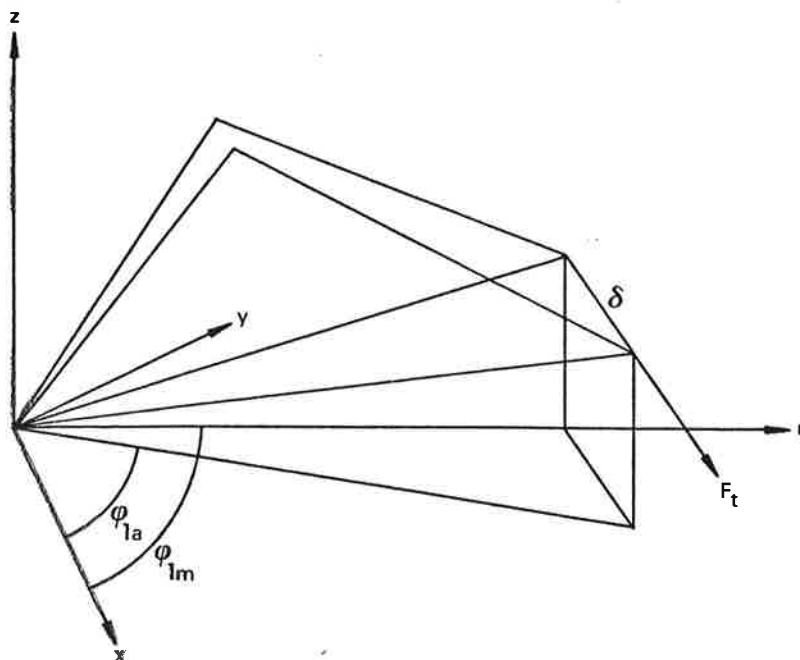
Med beteckningarna enligt figur B:1

φ_{1m} - vinkelläge i anslutning till led 1

φ_{1a} - vinkelläge som återger faktiskt läge i horisontalplanet för armens ände

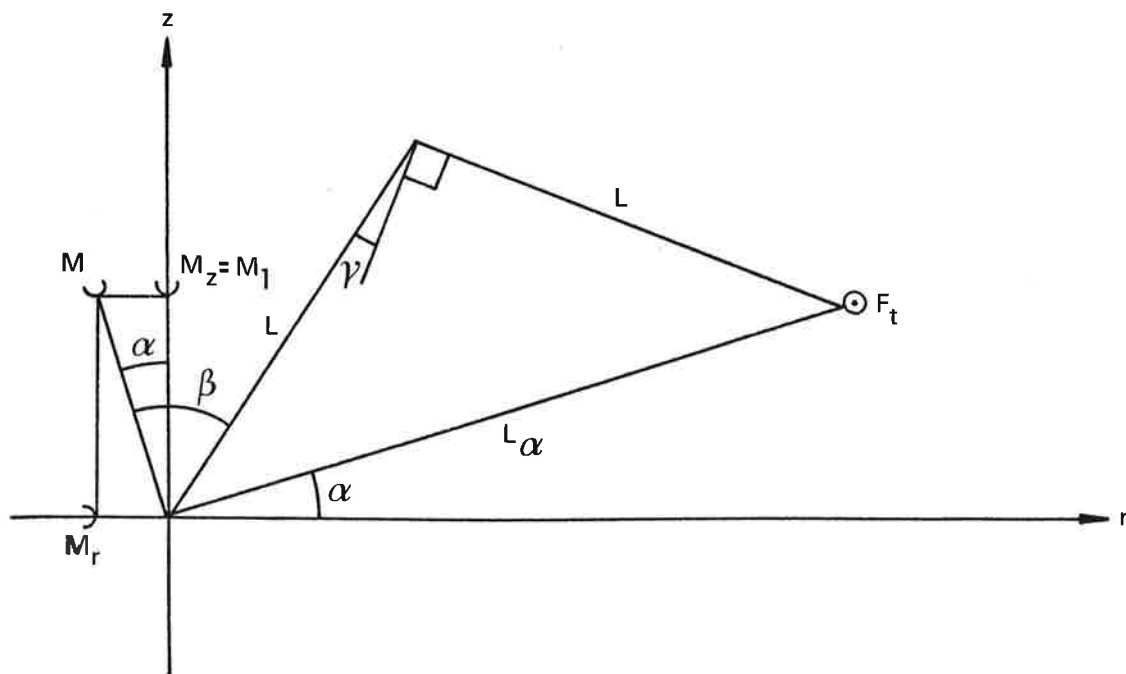
kan vinkelavvikelsen skrivas

$$\varphi_{1e} = \varphi_{1m} - \varphi_{1a}$$



Figur B:1. Robotarmens deformation i transversalled.

Det som är av intresse här är att bestämma hur vinkelavvikelsen φ_{1e} beror av ledmomentet M_1 . Eftersom armen anses vara i jämvikt så blir kraftverkan på armen enligt figur B:2. Den transversella kraften F_t i armens ände balanseras alltså av en lika stor motriktad kraft samt ett moment M i förbindelsen mellan länk 1 och länk 2. Det gäller för detta moment M att dess vertikala komponent M_z är lika med ledmomentet M_1 , medan den horisontella komponenten M_r är ett reaktionsmoment vars enda effekt är mekaniska påkänningar i ledförbindelsen.



Figur B:2. Yttre kraftverkan på robotarmen vid transversell belastning.

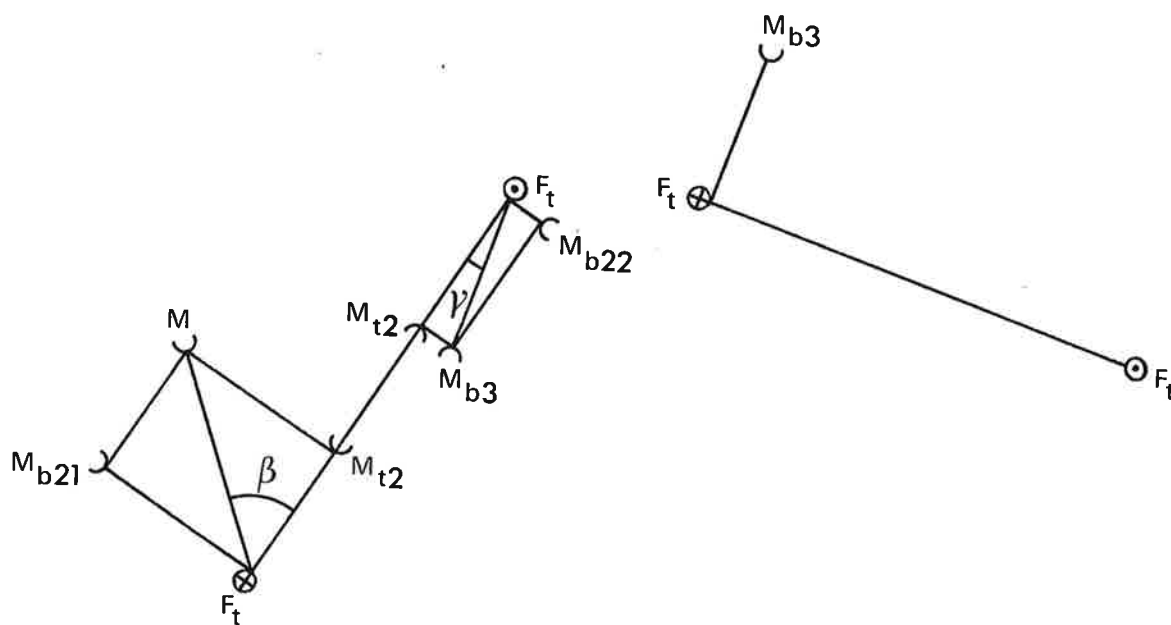
Fortsättningsvis är det lämpligt att finna sambandet mellan momentet M och utböjningen δ . Kraftverkan på de enskilda länkarna framgår av figur B:3. Utifrån de vinkelbeteckningar som infördes i figur B:2 kan de i figur B:3 införda momenten uttryckas i momentet M på följande vis

$$M_{b21} = M \sin\beta$$

$$M_{b22} = M \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \sin\gamma$$

$$M_{t2} = M \cos\beta$$

$$M_{b3} = M \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$



Figur B:3. Kraftverkan på robotarmens länkar vid transversell belastning.

Dessa moment ger upphov till de deformationer som återges i figur B:4 och för vilka gäller

$$\theta_{b21} = k_b M_{b21} + \frac{1}{2} k_b M_{b22}$$

$$\theta_{b22} = \frac{1}{2} k_b M_{b21} + k_b M_{b22}$$

$$\theta_{t2} = k_t M_{t2}$$

$$\theta_{b3} = k_b M_{b3}$$

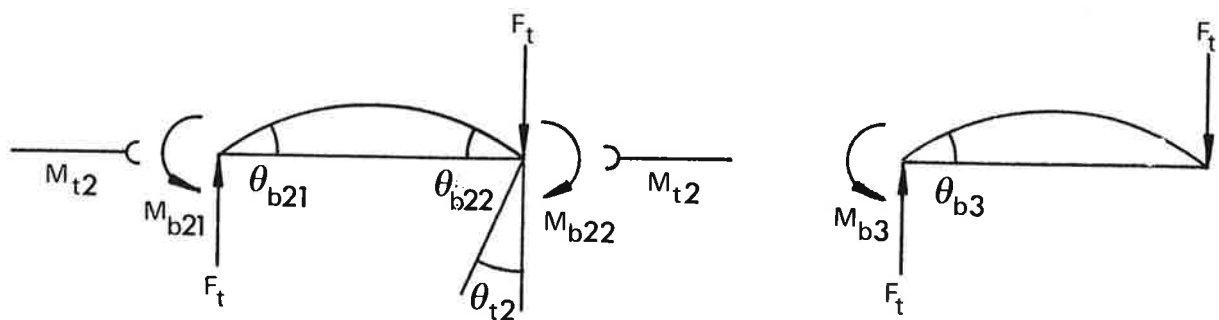
där k_b och k_t betecknar flexibilitetskonstanter med avseende på böjning respektive vridning.

Dessa flexibilitetskonstanter ges av

$$k_b = \frac{L}{3EI}$$

$$k_t = \frac{L}{GK}$$

om man för enkelhets skull förutsätter att länkarna 2 och 3 har samma längd L och böjstyvhets EI .



Figur B:4. Deformationer hos robotarmens länkar vid transversell belastning.

Den transversella utböjningen δ hos armens ände kan nu uttryckas som

$$\delta = \delta_{b2} + \delta_{t23} + \delta_{b23} + \delta_{b3}$$

där beteckningarna innebär

δ_{b2} - länk 2:s egen utböjning

δ_{t23} - länk 3:s utböjning pga länk 2:s vridning

δ_{b23} - länk 3:s utböjning pga länk 2:s böjning

δ_{b3} - länk 3:s egen utböjning

Här gäller för dessa utböjningar

$$\delta_{b2} = \theta_{b21}L$$

$$\delta_{t23} = \theta_{t2} \sin(180^\circ - \varphi_3)L$$

$$\delta_{b23} = (\theta_{b21} + \theta_{b22}) \cos(180^\circ - \varphi_3)L$$

$$\delta_{b3} = \theta_{b3}L$$

och alltså kan den totala utböjningen δ uttryckas som

$$\begin{aligned} \delta &= (\theta_{b21} + \theta_{t2} \sin(180^\circ - \varphi_3) + (\theta_{b21} + \theta_{b22}) \cos(180^\circ - \varphi_3) + \theta_{b3})L = \\ &= \left[k_b M_{b21} + \frac{1}{2} k_b M_{b22} + k_t M_t \sin \varphi_3 - \frac{3}{2} k_b (M_{b21} + M_{b22}) \cos \varphi_3 + k_b M_{b3} \right] L = \\ &= \left[k_b \left(\sin \beta + \frac{1}{2} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \sin \gamma \right) + k_t \cos \beta \sin \varphi_3 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} k_b \left(\sin \beta + \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \sin \gamma \right) \cos \varphi_3 + k_b \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right] ML \end{aligned}$$

Vidare gäller enligt figur B:2

$$\sin \beta = \sin(\alpha + 90^\circ - \varphi_2) = \cos(\varphi_2 - \alpha) = \cos\left[90^\circ - \frac{\varphi_3}{2}\right] = \sin\left[\frac{\varphi_3}{2}\right]$$

$$\cos \beta = \cos(\alpha + 90^\circ - \varphi_2) = \sin(\varphi_2 - \alpha) = \sin\left[90^\circ - \frac{\varphi_3}{2}\right] = \cos\left[\frac{\varphi_3}{2}\right]$$

$$\sin \gamma = \sin(\varphi_3 - 90^\circ) = -\cos \varphi_3$$

$$\cos \gamma = \cos(\varphi_3 - 90^\circ) = \sin \varphi_3$$

Nu kan förskjutningen uttryckas på formen

$$\delta = \frac{k_b(2 - 3\cos\varphi_3 + 3\cos^2\varphi_3) + k_t\sin^2\varphi_3}{2\sin\left[\frac{\varphi_3}{2}\right]} ML = k_{bt} ML$$

Sambandet mellan förskjutningen δ och vinkeländringen φ_{1e} framgår av figur B:1 och ges av

$$\delta = L_\alpha \cos\alpha \cdot \varphi_{1e}$$

Sambandet mellan momentet M och ledmomentet M_1 erhålles ur figur B:2 och detta blir

$$M = \frac{M_z}{\cos\alpha} = \frac{M_1}{\cos\alpha}$$

Slutligen erhålles då det önskade sambandet mellan ledmomentet M_1 och vinkelavvikelsen φ_{1e} som

$$M_1 = M \cos\alpha = \frac{\delta}{k_{bt}L} \cos\alpha = \frac{1}{k_{bt}} \frac{L_\alpha}{L} \cos^2\alpha \cdot \varphi_{1e} = k_h \varphi_{1e}$$

där flexibilitetskonstanten k_h ges av

$$\begin{aligned} k_h &= \frac{1}{k_{bt}} \frac{L_\alpha}{L} \cos^2\alpha = \\ &= \frac{2\sin\left[\frac{\varphi_3}{2}\right]}{k_b(2 - 3\cos\varphi_3 + 3\cos^2\varphi_3) + k_t\sin^2\varphi_3} \cdot 2\sin\left[\frac{\varphi_3}{2}\right] \cdot \\ &\cdot \frac{[L\cos\varphi_2 - L\cos(\varphi_2 + \varphi_3)]^2}{L^2 + L^2 - 2L^2\cos\varphi_3} = \\ &= \frac{[\cos\varphi_2 - \cos(\varphi_2 + \varphi_3)]^2}{k_b(2 - 3\cos\varphi_3 + 3\cos^2\varphi_3) + k_t\sin^2\varphi_3} \end{aligned}$$

Det härledda sambandet beskriver hur armen deformeras under inverkan av en statisk belastning. Avsikten var emellertid att beskriva hur armen deformeras då belastningen är dynamisk. Detta låter sig visserligen göras med god noggrannhet utifrån det statiska sambandet men med den inskränkningen att detta inte tar i beaktande den dämpning i svängningsrörelsen som skulle uppträda hos en verklig arm.

Det är dock enkelt att modellera denna dämpningseffekt genom att komplettera det statiska deformationssambandet med en hastighetsberoende term.

Deformationssambandet får då formen

$$M_1 = k_h \varphi_{1e} + d_h \dot{\varphi}_{1e}$$

där dämpningskonstanten d_h får väljas så att dämpningen får en rimlig omfattning.

Om armens ände påverkas av krafter F_r och F_t i radiell och axiell led så kommer armen att uppvisa en deformation av den typ som återges i figur B:5. Även här får deformationen till konsekvens att de vinkellägen som registreras i anslutning till lederna inte längre återger det faktiska läget hos armens ände.

Armens deformation kan här beskrivas med de i figur B:5 införda beteckningarna

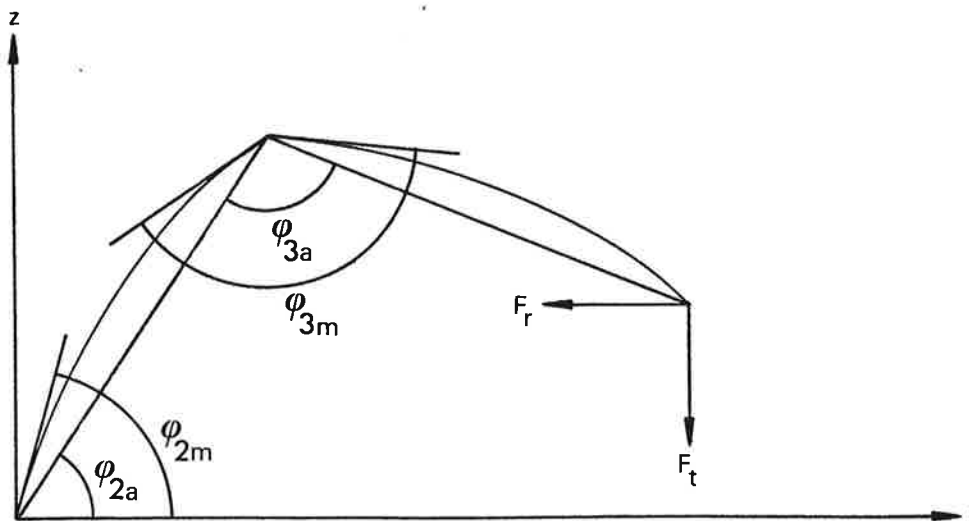
φ_{2m} , φ_{3m} - vinkellägen i anslutning till lederna 2 och 3

φ_{2a} , φ_{3a} - vinkellägen som anger faktiskt läge i rz-planet för armens ände

De elastiska deformationerna kan nu skrivas i form av vinkelavvikelserna

$$\varphi_{2e} = \varphi_{2m} - \varphi_{2a}$$

$$\varphi_{3e} = \varphi_{3m} - \varphi_{3a}$$



Figur B:5. Robotarmens deformation i vertikalplanet vid radiell och axiell belastning.

Här är nu av intresse att bestämma hur dessa vinkelavvikelser φ_{2e} och φ_{3e} beror av ledmomenten M_2 och M_3 . Då jämvikt anses råda blir kraftverkan på armens länkar enligt figur B:6 som även visar de deformationer som uppkommer.

Det framgår av figurerna B:5 och B:6 att sambanden mellan vinkelavvikelserna och länkarnas deformationsvinklar lyder

$$\varphi_{2e} = \theta_{b21}$$

$$\varphi_{3e} = \theta_{b22} + \theta_{b3}$$

Deformationsvinklarna ges här av

$$\theta_{b21} = k_b M_2 + \frac{1}{2} k_b M_3$$

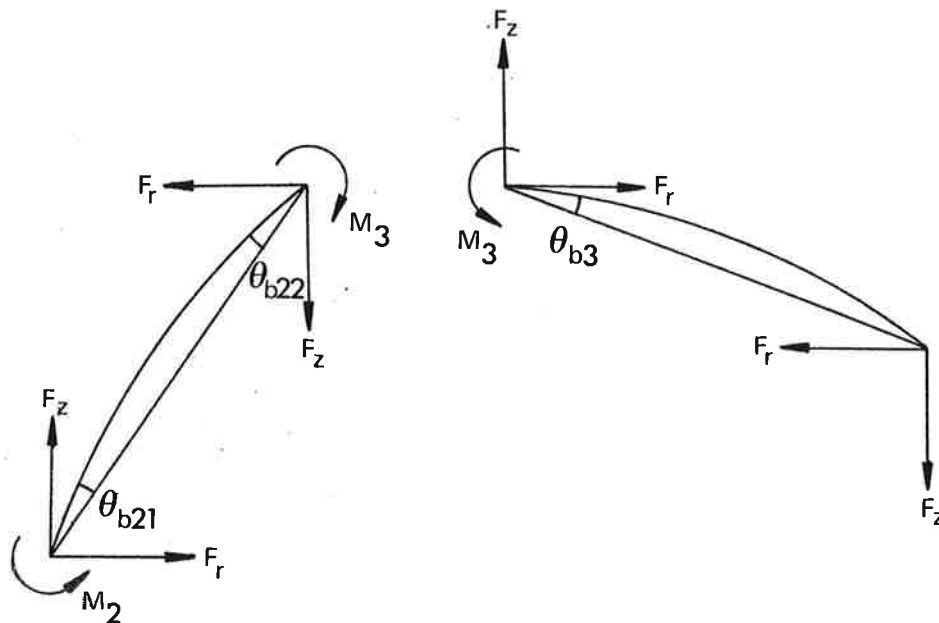
$$\theta_{b22} = \frac{1}{2} k_b M_2 + k_b M_3$$

$$\theta_{b3} = k_b M_3$$

och alltså kan vinkelavvikelserna uttryckas som

$$\varphi_{2e} = k_b M_2 + \frac{1}{2} k_b M_3$$

$$\varphi_{3e} = \frac{1}{2} k_b M_2 + 2k_b M_3$$



Figur B:6. Deformationer hos robotarmens länkar vid radiell och axiell belastning.

Inför vidare

$$k = \frac{1}{k_b}$$

så kan man skriva

$$k\varphi_{2e} = M_2 + \frac{1}{2}M_3$$

$$k\varphi_{3e} = \frac{1}{2}M_2 + 2M_3$$

Ledmomenten kan nu lösas ut varvid man erhåller

$$M_2 = \frac{4}{7}k(2\varphi_{2e} - \frac{1}{2}\varphi_{3e}) = k_v(2\varphi_{2e} - \frac{1}{2}\varphi_{3e})$$

$$M_3 = \frac{4}{7}k(-\frac{1}{2}\varphi_{2e} + \varphi_{3e}) = k_v(-\frac{1}{2}\varphi_{2e} + \varphi_{3e})$$

Även i detta fall är det önskvärt att modellera den dämpningseffekt som uppträder hos en verklig arm då den belastas dynamiskt. Detta kan som tidigare göras genom att inkludera en hastighetsberoende term i de ursprungliga statiska deformationssambanden.

Dessa får då formen

$$k\varphi_{2e} + d\dot{\varphi}_{2e} = M_2 + \frac{1}{2}M_3$$

$$k\varphi_{3e} + d\dot{\varphi}_{3e} = \frac{1}{2}M_2 + 2M_3$$

Ledmomenten kan nu uttryckas som

$$M_2 = k_v(2\varphi_{2e} - \frac{1}{2}\varphi_{3e}) + d_v(2\dot{\varphi}_{2e} - \frac{1}{2}\dot{\varphi}_{3e})$$

$$M_3 = k_v(-\frac{1}{2}\varphi_{2e} + \varphi_{3e}) + d_v(-\frac{1}{2}\dot{\varphi}_{2e} + \dot{\varphi}_{3e})$$

där som tidigare dämpningskonstanten d_v får väljas på lämpligt sätt.

APPENDIX C. SIMULERINGSMODELLER

Modellen för den stela respektive den flexibla robotarmen kombinerad med uttryck för styrlag och uttryck för samband mellan referensvärden och bankoordinater kan lätt skrivas på simuleringsbar form i simuleringspråket SIMNON.

Modellerna för robotarmarna kan enkelt uttryckas på en form som direkt ansluter till de tillämpliga avsnitten. Den drivdonsförsedda stela robotarmen enligt avsnitt 4 kan uttryckas som simnonsystemet SROBOT. Den drivdonsförsedda flexibla robotarmen enligt avsnitt 6 kan skrivas som simnonsystemen FROBOT, MOTORS och FLEX vilka i tur och ordning representerar själva robotarmen, drivdonen samt de elastiska förbindelserna mellan armen och drivdonen.

Styrlagen enligt avsnitt 7 kan skrivas som simnonsystemen PIPOS och PVEL där det förra innefattar termerna i styrlagens yttre återkopplingslinga och det senare innefattar termen i styrlagens inre återkopplingslinga.

Referensvärdena för ledvinklar och ledvinkelhastigheter som svarar mot banor av den typ som specificerats i avsnitt 8 kan erhållas med simnonsystemet TRAJ.

Kombinationen av delsystemen i fallet den drivdonsförsedda stela robotarmen ombesörjs av simnonsystemet SCON.

Den drivdonsförsedda flexibla robotarmen förekommer dels i en variant där styrning sker utan beaktande av armens flexibilitet, dels i en variant där flexibiliteten beaktas. I det förstnämnda fallet sker delsystemens kombination av simnonsystemet FCON, i det sistnämnda fallet av simnonsystemet FCONC.

Simulering av robotarmsmodellerna ovan och den tillhörande resultatpresentationen kan utföras på ett praktiskt sätt genom att utnyttja SIMNON:s macrofacilitet. Detta ger samtidigt en dokumentation av tillvägagångssättet.

Initiering av robotarmsmodellerna kan på detta sätt utföras med simnonmacrona SSYS, FSYS och FSYSC. Det förstnämnda initierar den stela robotarmen och de därpå följande den flexibla robotarmen utan respektive med beaktande av armens flexibilitet.

Själva simuleringen, där alltså robotarmens ände ska fås att genomlöpa den bana som specificerats i avsnitt 9, kan utföras med simnonmacrot XYTRAJ.

Resultatredovisning kan utföras med simnonmacrona PSHW och TSHW där det förra kan användas för att grafiskt återge en storhets variation med tiden och det senare för att grafiskt visa den bana som armens ände genomlöper i ett givet plan.

Figurerna som visar utseendet hos testbanan och tidsberoendet för hastighetskomponenterna hos armens ände samt tidsberoendet för ledvinkellägen och ledvinkelhastigheter låter sig framställas med simnonmacrona FIG91 och FIG92 samt FIG93 och FIG94.

Figurerna som visar bannrörelse och höjdvariation i de fall där den flexibla armen styrs utan respektive med beaktande av flexibiliteten fås av simnonmacrona FIG95 och FIG96.

Slutligen så erhålls de figurer som visar vinkelfelen i de båda fallen med simnonmacrona FIG97 och FIG98.

INPUT V1 V2 V3
 OUTPUT Fa1 dFa1 Fa2 dFa2 Fa3 dFa3

STATE Fi1 dFi1 Fi2 dFi2 Fi3 dFi3
 DER d1Fi1 d2Fi1 d1Fi2 d2Fi2 d1Fi3 d2Fi3

INITIAL

Fi1 = pi/180*Fi1D0

Fi2 = pi/180*Fi2D0

Fi3 = pi/180*Fi3D0

SORT

C1 = COS(Fi1)

S1 = SIN(Fi1)

C2 = COS(Fi2)

S2 = SIN(Fi2)

C3 = COS(Fi3)

S3 = SIN(Fi3)

C23 = COS(Fi2 + Fi3)

S23 = SIN(Fi2 + Fi3)

A11a = Jz1 + mL2*L2*L2/3*C2*C2

A11b = mL3*L3*L3/12*C23*C23 + mL3*(L2*C2 - L3/2*C23)*(L2*C2 - L3/2*C23)

A11c = m*(L2*C2 - L3*C23)*(L2*C2 - L3*C23)

A11m = N*N*Jm

A11 = A11a + A11b + A11c + A11m

A12 = 0

A13 = 0

A21 = A12

A22a = mL2*L2*L2/3

A22b = mL3*(L2*L2 + L3*L3/3 - L2*L3*C3)

A22c = m*(L2*L2 + L3*L3 - 2*L2*L3*C3)

A22m = N*N*Jm

A22 = A22a + A22b + A22c + A22m

A23 = mL3*(L3*L3/3 - L2*L3/2*C3) + m*(L3*L3 - L2*L3*C3)

A31 = A13

A32 = A23

A33a = mL3*L3*L3/3

A33b = m*L3*L3

A33m = N*N*Jm

A33 = A33a + A33b + A33m

Aadj11 = A22*A33 - A23*A32

Aadj12 = -A12*A33 + A13*A32

Aadj13 = A12*A23 - A13*A22

Aadj21 = Aadj12

Aadj22 = A11*A33 - A13*A31

Aadj23 = -A11*A23 + A13*A21

Aadj31 = Aadj13

Aadj32 = Aadj23

Aadj33 = A11*A22 - A12*A21

detAa = A11*A22*A33 + A12*A23*A31 + A13*A21*A32

detAb = A11*A23*A32 + A12*A21*A33 + A13*A22*A31

detA = detAa - detAb

B11 = 0

B12 = 0

B13 = 0

B21a = mL2*L2*L2/3*C2*S2

B21b = mL3*L3*L3/12*C23*S23 + mL3*(L2*C2 - L3/2*C23)*(L2*S2 - L3/2*S23)

B21c = m*(L2*C2 - L3*C23)*(L2*S2 - L3*S23)

B21 = B21a + B21b + B21c

B22 = 0

B23 = mL3*L2*L3/2*S3 + m*L2*L3*S3

B31a = mL3*L3*L3/12*C23*S23

B31b = -mL3*(L2*C2 - L3/2*C23)*L3/2*S23

B31c = -m*(L2*C2 - L3*C23)*L3*S23

B31 = B31a + B31b + B31c

B32 = -B23

B33 = 0

C112 = -2*B21

C113 = -2*B31

C123 = 0

C212 = 0

C213 = 0

C223 = -2*B32

C312 = 0

C313 = 0
C323 = 0

Q1 = 0
Q2 = -mL2*g*L2/2*C2 - mL3*g*(L2*C2 - L3/2*C23) - m*g*(L2*C2 - L3*C23)
Q3 = mL3*g*L3/2*C23 + m*g*L3*C23

Dm = N*N*Ka*Kv/Ra

Em = N*Ka/Ra

d1d1 = dFi1*dFi1
d2d2 = dFi2*dFi2
d3d3 = dFi3*dFi3

d1d2 = dFi1*dFi2
d1d3 = dFi1*dFi3
d2d3 = dFi2*dFi3

VL1b = B11*d1d1 + B12*d2d2 + B13*d3d3
VL1c = C112*d1d2 + C113*d1d3 + C123*d2d3
VL1d = Dm*dFi1
HL1 = Q1 + Em*V1 - VL1b - VL1c - VL1d

VL2b = B21*d1d1 + B22*d2d2 + B23*d3d3
VL2c = C212*d1d2 + C213*d1d3 + C223*d2d3
VL2d = Dm*dFi2
HL2 = Q2 + Em*V2 - VL2b - VL2c - VL2d

VL3b = B31*d1d1 + B32*d2d2 + B33*d3d3
VL3c = C312*d1d2 + C313*d1d3 + C323*d2d3
VL3d = Dm*dFi3
HL3 = Q3 + Em*V3 - VL3b - VL3c - VL3d

d1Fi1 = dFi1
d1Fi2 = dFi2
d1Fi3 = dFi3

d2Fi1 = (Aadj11*HL1 + Aadj12*HL2 + Aadj13*HL3)/detA
d2Fi2 = (Aadj21*HL1 + Aadj22*HL2 + Aadj23*HL3)/detA
d2Fi3 = (Aadj31*HL1 + Aadj32*HL2 + Aadj33*HL3)/detA

Fa1 = Fi1
Fa2 = Fi2
Fa3 = Fi3

dFa1 = dFi1
dFa2 = dFi2
dFa3 = dFi3

r = L2*C2 - L3*C23
dr = (-L2*S2 + L3*S23)*dFi2 + L3*S23*dFi3
x = r*C1
dx = dr*C1 - r*S1*dFi1
y = r*S1
dy = dr*S1 + r*C1*dFi1
z = L2*S2 - L3*S23
dz = (L2*C2 - L3*C23)*dFi2 - L3*C23*dFi3

pi : 3.1415927
g : 9.81

Jz1 : 0.1
mL2 : 10
mL3 : 10
m : 100

L2 : 1
L3 : 1

N : 100
Jm : 0.0025
Ra : 1.8
Ka : 0.7
Kv : 0.7

Fi1D0 : 0
Fi2D0 : 45
Fi3D0 : 90

END

INPUT M1 M2 M3
 OUTPUT Fa1 dFa1 Fa2 dFa2 Fa3 dFa3

STATE Fi1 dFi1 Fi2 dFi2 Fi3 dFi3
 DER d1Fi1 d2Fi1 d1Fi2 d2Fi2 d1Fi3 d2Fi3

INITIAL

$$Fi1 = \pi/180 * Fi1D0$$

$$Fi2 = \pi/180 * Fi2D0$$

$$Fi3 = \pi/180 * Fi3D0$$

SORT

$$C1 = \cos(Fi1)$$

$$S1 = \sin(Fi1)$$

$$C2 = \cos(Fi2)$$

$$S2 = \sin(Fi2)$$

$$C3 = \cos(Fi3)$$

$$S3 = \sin(Fi3)$$

$$C23 = \cos(Fi2 + Fi3)$$

$$S23 = \sin(Fi2 + Fi3)$$

$$A11a = Jz1 + mL2 * L2 * L2 / 3 * C2 * C2$$

$$A11b = mL3 * L3 * L3 / 12 * C23 * C23 + mL3 * (L2 * C2 - L3 / 2 * C23) * (L2 * C2 - L3 / 2 * C23)$$

$$A11c = m * (L2 * C2 - L3 * C23) * (L2 * C2 - L3 * C23)$$

$$A11 = A11a + A11b + A11c$$

$$A12 = 0$$

$$A13 = 0$$

$$A21 = A12$$

$$A22a = mL2 * L2 * L2 / 3$$

$$A22b = mL3 * (L2 * L2 + L3 * L3 / 3 - L2 * L3 * C3)$$

$$A22c = m * (L2 * L2 + L3 * L3 - 2 * L2 * L3 * C3)$$

$$A22 = A22a + A22b + A22c$$

$$A23 = mL3 * (L3 * L3 / 3 - L2 * L3 / 2 * C3) + m * (L3 * L3 - L2 * L3 * C3)$$

$$A31 = A13$$

$$A32 = A23$$

$$A33a = mL3 * L3 * L3 / 3$$

$$A33b = m * L3 * L3$$

$$A33 = A33a + A33b$$

$$Aadj11 = A22 * A33 - A23 * A32$$

$$Aadj12 = -A12 * A33 + A13 * A32$$

$$Aadj13 = A12 * A23 - A13 * A22$$

$$Aadj21 = Aadj12$$

$$Aadj22 = A11 * A33 - A13 * A31$$

$$Aadj23 = -A11 * A23 + A13 * A21$$

$$Aadj31 = Aadj13$$

$$Aadj32 = Aadj23$$

$$Aadj33 = A11 * A22 - A12 * A21$$

$$detAa = A11 * A22 * A33 + A12 * A23 * A31 + A13 * A21 * A32$$

$$detAb = A11 * A23 * A32 + A12 * A21 * A33 + A13 * A22 * A31$$

$$detA = detAa - detAb$$

$$B11 = 0$$

$$B12 = 0$$

$$B13 = 0$$

$$B21a = mL2 * L2 * L2 / 3 * C2 * S2$$

$$B21b = mL3 * L3 * L3 / 12 * C23 * S23 + mL3 * (L2 * C2 - L3 / 2 * C23) * (L2 * S2 - L3 / 2 * S23)$$

$$B21c = m * (L2 * C2 - L3 * C23) * (L2 * S2 - L3 * S23)$$

$$B21 = B21a + B21b + B21c$$

$$B22 = 0$$

$$B23 = mL3 * L2 * L3 / 2 * S3 + m * L2 * L3 * S3$$

$$B31a = mL3 * L3 * L3 / 12 * C23 * S23$$

$$B31b = -mL3 * (L2 * C2 - L3 / 2 * C23) * L3 / 2 * S23$$

$$B31c = -m * (L2 * C2 - L3 * C23) * L3 * S23$$

$$B31 = B31a + B31b + B31c$$

$$B32 = -B23$$

$$B33 = 0$$

$$C112 = -2 * B21$$

$$C113 = -2 * B31$$

$$C123 = 0$$

$$C212 = 0$$

$$C213 = 0$$

$$C223 = -2 * B32$$

$$C312 = 0$$

$$C313 = 0$$

$$C323 = 0$$

$Q1 = 0$
 $Q2 = -mL2*g*L2/2*C2 - mL3*g*(L2+C2 - L3/2*C23) - m*g*(L2+C2 - L3+C23)$
 $Q3 = mL3*g*L3/2*C23 + m*g*L3*C23$

$d1d1 = dFi1*dFi1$
 $d2d2 = dFi2*dFi2$
 $d3d3 = dFi3*dFi3$

$d1d2 = dFi1*dFi2$
 $d1d3 = dFi1*dFi3$
 $d2d3 = dFi2*dFi3$

$VL1b = B11*d1d1 + B12*d2d2 + B13*d3d3$
 $VL1c = C112*d1d2 + C113*d1d3 + C123*d2d3$
 $HL1 = Q1 + M1 - VL1b - VL1c$

$VL2b = B21*d1d1 + B22*d2d2 + B23*d3d3$
 $VL2c = C212*d1d2 + C213*d1d3 + C223*d2d3$
 $HL2 = Q2 + M2 - VL2b - VL2c$

$VL3b = B31*d1d1 + B32*d2d2 + B33*d3d3$
 $VL3c = C312*d1d2 + C313*d1d3 + C323*d2d3$
 $HL3 = Q3 + M3 - VL3b - VL3c$

$d1Fi1 = dFi1$
 $d1Fi2 = dFi2$
 $d1Fi3 = dFi3$

$d2Fi1 = (Aadj11*HL1 + Aadj12*HL2 + Aadj13*HL3)/detA$
 $d2Fi2 = (Aadj21*HL1 + Aadj22*HL2 + Aadj23*HL3)/detA$
 $d2Fi3 = (Aadj31*HL1 + Aadj32*HL2 + Aadj33*HL3)/detA$

$Fa1 = Fi1$
 $Fa2 = Fi2$
 $Fa3 = Fi3$

$dFa1 = dFi1$
 $dFa2 = dFi2$
 $dFa3 = dFi3$

$r = L2*C2 - L3*C23$
 $dr = (-L2*S2 + L3*S23)*dFi2 + L3*S23*dFi3$
 $x = r*C1$
 $dx = dr*C1 - r*S1*dFi1$
 $y = r*S1$
 $dy = dr*S1 + r*C1*dFi1$
 $z = L2*S2 - L3*S23$
 $dz = (L2*C2 - L3*C23)*dFi2 - L3*C23*dFi3$

$pi : 3.1415927$
 $g : 9.81$

$Jz1 : 0.1$
 $mL2 : 10$
 $mL3 : 10$
 $m : 100$

$L2 : 1$
 $L3 : 1$

$Fi1D0 : 0$
 $Fi2D0 : 45$
 $Fi3D0 : 90$

END

CONTINUOUS SYSTEM motors

C:7

INPUT V1 M1 V2 M2 V3 M3
OUTPUT Fm1 dFm1 Fm2 dFm2 Fm3 dFm3

STATE Fi1 dFi1 Fi2 dFi2 Fi3 dFi3
DER d1Fi1 d2Fi1 d1Fi2 d2Fi2 d1Fi3 d2Fi3

INITIAL

 $Fi1 = \pi/180 * Fi1D0$ $Fi2 = \pi/180 * Fi2D0$ $Fi3 = \pi/180 * Fi3D0$

SORT

 $d1Fi1 = dFi1$ $d1Fi2 = dFi2$ $d1Fi3 = dFi3$ $d2Fi1 = (-Dm * dFi1 + Em * V1 - M1) / Am$ $d2Fi2 = (-Dm * dFi2 + Em * V2 - M2) / Am$ $d2Fi3 = (-Dm * dFi3 + Em * V3 - M3) / Am$ $Fm1 = Fi1$ $Fm2 = Fi2$ $Fm3 = Fi3$ $dFm1 = dFi1$ $dFm2 = dFi2$ $dFm3 = dFi3$ $\pi : 3.1415927$ $N : 100$ $Jm : 0.0025$ $Ra : 1.8$ $Ka : 0.7$ $Kv : 0.7$ $Am = N * N * Jm$ $Dm = N * N * Ka * Kv / Ra$ $Em = N * Ka / Ra$ $Fi1D0 : 0$ $Fi2D0 : 45$ $Fi3D0 : 90$

END

INPUT Fm1 dFm1 Fm2 dFm2 Fm3 dFm3
 INPUT Fa1 dFa1 Fa2 dFa2 Fa3 dFa3
 OUTPUT M1 M2 M3

C2 = COS(Fa2)
 S2 = SIN(Fa2)
 C3 = COS(Fa3)
 S3 = SIN(Fa3)
 C23 = COS(Fa2 + Fa3)
 S23 = SIN(Fa2 + Fa3)

Fe1 = Fm1 - Fa1
 Fe2 = Fm2 - Fa2
 Fe3 = Fm3 - Fa3

dFe1 = dFm1 - dFa1
 dFe2 = dFm2 - dFa2
 dFe3 = dFm3 - dFa3

Kh = (C2 - C23)*(C2 - C23)/(kb*(2 - 3*C3 + 3*C3*C3) + kt*S3*S3)
 Dh = Kh/10

Kv = 4/7*1/kb
 Dv = Kv/10

M1 = Kh*Fe1 + Dh*dFe1
 M2 = Kv*(2*Fe2 - Fe3/2) + Dv*(2*dFe2 - dFe3/2)
 M3 = Kv*(-Fe2/2 + Fe3) + Dv*(-dFe2/2 + dFe3)

kb : 2E-5
 kt : 1E-4

END

CONTINUOUS SYSTEM pipos

C:9

INPUT ep1 ep2 ep3
OUTPUT dFbr1 dFbr2 dFbr3

STATE iep1 iep2 iep3
DER e1 e2 e3

e1 = ep1
e2 = ep2
e3 = ep3

dFbr1 = Kp1*ep1 + Ki1*iep1
dFbr2 = Kp2*ep2 + Ki2*iep2
dFbr3 = Kp3*ep3 + Ki3*iep3

Kp1 : 20
Kp2 : 20
Kp3 : 20

Ki1 : 0
Ki2 : 200
Ki3 : 200

END

CONTINUOUS SYSTEM pvel

INPUT ev1 ev2 ev3
OUTPUT V1 V2 V3

V1 = Kv1*ev1
V2 = Kv2*ev2
V3 = Kv3*ev3

Kv1 : 200
Kv2 : 200
Kv3 : 200

END

OUTPUT Fr1 dFfr1 Fr2 dFfr2 Fr3 dFfr3

STATE Fi1 Fi2 Fi3
DER d1Fi1 d1Fi2 d1Fi3

STATE vx vy vz
DER ax ay az

INITIAL

Fi1 = pi/180*Fi1D0

Fi2 = pi/180*Fi2D0

Fi3 = pi/180*Fi3D0

SORT

C1 = COS(Fi1)

S1 = SIN(Fi1)

C2 = COS(Fi2)

S2 = SIN(Fi2)

C23 = COS(Fi2 + Fi3)

S23 = SIN(Fi2 + Fi3)

J11 = -(L2*C2 - L3*C23)*S1

J12 = (-L2*S2 + L3*S23)*C1

J13 = L3*S23*C1

J21 = (L2*C2 - L3*C23)*C1

J22 = (-L2*S2 + L3*S23)*S1

J23 = L3*S23*S1

J31 = 0

J32 = L2*C2 - L3*C23

J33 = -L3*C23

Jadj11 = J22*J33 - J23*J32

Jadj12 = -J12*J33 + J13*J32

Jadj13 = J12*J23 - J13*J22

Jadj21 = -J21*J33 + J23*J31

Jadj22 = J11*J33 - J13*J31

Jadj23 = -J11*J23 + J13*J21

Jadj31 = J21*J32 - J22*J31

Jadj32 = -J11*J32 + J12*J31

Jadj33 = J11*J22 - J12*J21

detJa = J11*J22*J33 + J12*J23*J31 + J13*J21*J32

detJb = J11*J23*J32 + J12*J21*J33 + J13*J22*J31

detJ = detJa - detJb

axc = pi/180*ft*(-vy*XY - vz*ZX)

ayc = pi/180*ft*(vx*XY - vz*YZ)

azc = pi/180*ft*(vy*YZ + vx*ZX)

ax = axx + axc

ay = ayy + ayc

az = azz + azc

d1Fi1 = (Jadj11*vx + Jadj12*vy + Jadj13*vz)/detJ

d1Fi2 = (Jadj21*vx + Jadj22*vy + Jadj23*vz)/detJ

d1Fi3 = (Jadj31*vx + Jadj32*vy + Jadj33*vz)/detJ

Fr1 = Fi1

Fr2 = Fi2

Fr3 = Fi3

dFfr1 = d1Fi1

dFfr2 = d1Fi2

dFfr3 = d1Fi3

rr = L2*C2 - L3*C23

drr = (-L2*S2 + L3*S23)*d1Fi2 + L3*S23*d1Fi3

xr = rr*C1

dxr = drr*C1 - rr*S1*d1Fi1

yr = rr*S1

dyr = drr*S1 + rr*C1*d1Fi1

zr = L2*S2 - L3*S23

dzr = (L2*C2 - L3*C23)*d1Fi2 - L3*C23*d1Fi3

pi : 3.1415927

L2 : 1

L3 : 1

axx : 0
ayy : 0
azz : 0

ft : 0

XY : 0
YZ : 0
ZX : 0

Fi1D0 : 0
Fi2D0 : 45
Fi3D0 : 90

END


```

ep1[pipos] = Fr1[traj] - Fa1[srobot]
ep2[pipos] = Fr2[traj] - Fa2[srobot]
ep3[pipos] = Fr3[traj] - Fa3[srobot]

ev1[pvel] = dFfr1[traj] + dFbr1[pipos] - dFa1[srobot]
ev2[pvel] = dFfr2[traj] + dFbr2[pipos] - dFa2[srobot]
ev3[pvel] = dFfr3[traj] + dFbr3[pipos] - dFa3[srobot]

V1[srobot] = V1[pvel]
V2[srobot] = V2[pvel]
V3[srobot] = V3[pvel]

epos1 = Fr1[traj] - Fa1[srobot]
epos2 = Fr2[traj] - Fa2[srobot]
epos3 = Fr3[traj] - Fa3[srobot]

END

```

CONNECTING SYSTEM fcon

```

ep1[pipos] = Fr1[traj] - Fm1[motors]
ep2[pipos] = Fr2[traj] - Fm2[motors]
ep3[pipos] = Fr3[traj] - Fm3[motors]

ev1[pvel] = dFfr1[traj] + dFbr1[pipos] - dFm1[motors]
ev2[pvel] = dFfr2[traj] + dFbr2[pipos] - dFm2[motors]
ev3[pvel] = dFfr3[traj] + dFbr3[pipos] - dFm3[motors]

V1[motors] = V1[pvel]
V2[motors] = V2[pvel]
V3[motors] = V3[pvel]

M1[motors] = M1[flex]
M2[motors] = M2[flex]
M3[motors] = M3[flex]

M1[frobot] = M1[flex]
M2[frobot] = M2[flex]
M3[frobot] = M3[flex]

Fm1[flex] = Fm1[motors]
Fm2[flex] = Fm2[motors]
Fm3[flex] = Fm3[motors]

dFm1[flex] = dFm1[motors]
dFm2[flex] = dFm2[motors]
dFm3[flex] = dFm3[motors]

Fa1[flex] = Fa1[frobot]
Fa2[flex] = Fa2[frobot]
Fa3[flex] = Fa3[frobot]

dFa1[flex] = dFa1[frobot]
dFa2[flex] = dFa2[frobot]
dFa3[flex] = dFa3[frobot]

epos1 = Fr1[traj] - Fa1[frobot]
epos2 = Fr2[traj] - Fa2[frobot]
epos3 = Fr3[traj] - Fa3[frobot]

END

```

$ep1[\text{pipos}] = Fr1[\text{traj}] - Fa1[\text{frobot}]$
 $ep2[\text{pipos}] = Fr2[\text{traj}] - Fa2[\text{frobot}]$
 $ep3[\text{pipos}] = Fr3[\text{traj}] - Fa3[\text{frobot}]$

$ev1[\text{pvel}] = dFfr1[\text{traj}] + dFbr1[\text{pipos}] - dFa1[\text{frobot}]$
 $ev2[\text{pvel}] = dFfr2[\text{traj}] + dFbr2[\text{pipos}] - dFa2[\text{frobot}]$
 $ev3[\text{pvel}] = dFfr3[\text{traj}] + dFbr3[\text{pipos}] - dFa3[\text{frobot}]$

$V1[\text{motors}] = V1[\text{pvel}]$
 $V2[\text{motors}] = V2[\text{pvel}]$
 $V3[\text{motors}] = V3[\text{pvel}]$

$M1[\text{motors}] = M1[\text{flex}]$
 $M2[\text{motors}] = M2[\text{flex}]$
 $M3[\text{motors}] = M3[\text{flex}]$

$M1[\text{frobot}] = M1[\text{flex}]$
 $M2[\text{frobot}] = M2[\text{flex}]$
 $M3[\text{frobot}] = M3[\text{flex}]$

$Fm1[\text{flex}] = Fm1[\text{motors}]$
 $Fm2[\text{flex}] = Fm2[\text{motors}]$
 $Fm3[\text{flex}] = Fm3[\text{motors}]$

$dFm1[\text{flex}] = dFm1[\text{motors}]$
 $dFm2[\text{flex}] = dFm2[\text{motors}]$
 $dFm3[\text{flex}] = dFm3[\text{motors}]$

$Fa1[\text{flex}] = Fa1[\text{frobot}]$
 $Fa2[\text{flex}] = Fa2[\text{frobot}]$
 $Fa3[\text{flex}] = Fa3[\text{frobot}]$

$dFa1[\text{flex}] = dFa1[\text{frobot}]$
 $dFa2[\text{flex}] = dFa2[\text{frobot}]$
 $dFa3[\text{flex}] = dFa3[\text{frobot}]$

$epos1 = Fr1[\text{traj}] - Fa1[\text{frobot}]$
 $epos2 = Fr2[\text{traj}] - Fa2[\text{frobot}]$
 $epos3 = Fr3[\text{traj}] - Fa3[\text{frobot}]$

END

MACRO ssys

SYST traj pipos pvel srobot scon

END

MACRO fsys

SYST traj pipos pvel motors frobot flex fcon

END

MACRO fsysc

SYST traj pipos pvel motors frobot flex fconc

END

SIMU 0 0.5/f1

PAR ayy : 2
SIMU 0.5 1.0 -CONT/f2

PAR ayy : 0
SIMU 1.0 1.5 -CONT/f3

PAR XY : 1
PAR ft : 180
SIMU 1.5 2.0 -CONT/f4

PAR XY : 0
SIMU 2.0 2.5 -CONT/f5

PAR XY : 1
PAR ft : 450
SIMU 2.5 2.7 -CONT/f6

PAR XY : 0
SIMU 2.7 3.5 -CONT/f7

PAR XY : 1
PAR ft : 900
SIMU 3.5 3.6 -CONT/f8

PAR XY : 0
SIMU 3.6 4.0 -CONT/f9

PAR axx : -2
SIMU 4.0 4.5 -CONT/f10

PAR axx : 0
SIMU 4.5 5.0 -CONT/f11

END

MACRO pshw par f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 f8 f9 f10 f11

C:16

SHOW 0 0.5 par/f1
SHOW 0.5 1.0 par/f2
SHOW 1.0 1.5 par/f3
SHOW 1.5 2.0 par/f4
SHOW 2.0 2.5 par/f5
SHOW 2.5 2.7 par/f6
SHOW 2.7 3.5 par/f7
SHOW 3.5 3.6 par/f8
SHOW 3.6 4.0 par/f9
SHOW 4.0 4.5 par/f10
SHOW 4.5 5.0 par/f11

END

MACRO tshw par1 par2 f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 f8 f9 f10 f11

SHOW par2(par1)/f1
SHOW par2(par1)/f2
SHOW par2(par1)/f3
SHOW par2(par1)/f4
SHOW par2(par1)/f5
SHOW par2(par1)/f6
SHOW par2(par1)/f7
SHOW par2(par1)/f8
SHOW par2(par1)/f9
SHOW par2(par1)/f10
SHOW par2(par1)/f11

END

MACRO fig91

C:17

ssys

STORE xr yr

xytraj a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

SPLIT 1 1

AXES H 0 1.6 V 0 1.2

tshw xr yr a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

mark a 17 0

mark "x-koordinat

mark a 1.2 10.5

mark v "y-koordinat

END

MACRO fig92

ssys

STORE dxr dyr

xytraj a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

SPLIT 2 1

AXES H 0 5 V -1.5 1.5

pshw dxr a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

mark a 18.2 6.9

mark "Tid t

mark a 1.2 9

mark v "Hastighet i x-led

AXES H 0 5 V -1.5 1.5

pshw dyr a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

mark a 18.2 0

mark "Tid t

mark a 1.2 2

mark v "Hastighet i y-led

END

```
ssys
STORE Fr1 Fr2 Fr3
xytraj a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

SPLIT 3 2

AXES H 0 5 V -0.1 2.1

AXES H 0 5 V -0.1 2.1

AXES H 0 5 V -0.1 2.1

AXES H 0 5 V -0.1 2.1
pshw Fr1 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11
mark a 18.2 9.2
mark "Tid t
mark a 11.2 10.2
mark v "Ledvinkellage led 1

AXES H 0 5 V -0.1 2.1
pshw Fr2 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11
mark a 18.2 4.6
mark "Tid t
mark a 11.2 5.7
mark v "Ledvinkellage led 2

AXES H 0 5 V -0.1 2.1
pshw Fr3 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11
mark a 18.2 0
mark "Tid t
mark a 11.2 1
mark v "Ledvinkellage led 3

END
```

MACRO fig94

```
ssys
STORE dFfr1 dFfr2 dFfr3
xytraj a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

SPLIT 3 2

AXES H 0 5 V -2.5 2.5

AXES H 0 5 V -2.5 2.5

AXES H 0 5 V -2.5 2.5

AXES H 0 5 V -2.5 2.5
pshw dFfr1 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11
mark a 18.2 9.2
mark "Tid t
mark a 11.2 10.2
mark v "Ledvinkelhast led 1

AXES H 0 5 V -2.5 2.5
pshw dFfr2 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11
mark a 18.2 4.6
mark "Tid t
mark a 11.2 5.7
mark v "Ledvinkelhast led 2

AXES H 0 5 V -2.5 2.5
pshw dFfr3 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11
mark a 18.2 0
mark "Tid t
mark a 11.2 1
mark v "Ledvinkelhast led 3

END
```

ssys

STORE xr yr zr x y z

xytraj a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

fsys

STORE x y z

xytraj b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9 b10 b11

SPLIT 2 2

AXES H 0 1.6 V 0 1.2

tshw xr yr a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

tshw x y a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

tshw x y b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9 b10 b11

mark a 7 6.8

mark "x-koordinat

mark a 1 11

mark v "y-koordinat

AXES H 0 1.6 V 0 1.2

AXES H 0 5 V -0.15 0.05

pshw zr a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

pshw z a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

pshw z b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9 b10 b11

mark a 18.2 6.8

mark "Tid t

mark a 11 11

mark v "z-koordinat

AXES H 0 5 V -0.15 0.05

END

MACRO fig96

ssys

STORE xr yr zr x y z

xytraj a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

fsysc

STORE x y z

xytraj b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9 b10 b11

SPLIT 2 2

AXES H 0 1.6 V 0 1.2

tshw xr yr a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

tshw x y a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

tshw x y b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9 b10 b11

mark a 7 6.8

mark "x-koordinat

mark a 1 11

mark v "y-koordinat

AXES H 0 1.6 V 0 1.2

AXES H 0 5 V -0.15 0.05

pshw zr a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

pshw z a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

pshw z b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9 b10 b11

mark a 18.2 6.8

mark "Tid t

mark a 11 11

mark v "z-koordinat

AXES H 0 5 V -0.15 0.05

END

ssys

STORE epos1 epos2 epos3

xytraj a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

fsys

STORE epos1 epos2 epos3

xytraj b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9 b10 b11

SPLIT 3 2

AXES H 0 5 V -0.1 0.1

AXES H 0 5 V -0.1 0.1

AXES H 0 5 V -0.1 0.1

AXES H 0 5 V -0.1 0.1

pshw epos1 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

pshw epos1 b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9 b10 b11

mark a 18.2 9.2

mark "Tid t

mark a 11.2 10.2

mark v "Ledvinkelfel led 1

AXES H 0 5 V -0.1 0.1

pshw epos2 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

pshw epos2 b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9 b10 b11

mark a 18.2 4.6

mark "Tid t

mark a 11.2 5.7

mark v "Ledvinkelfel led 2

AXES H 0 5 V -0.1 0.1

pshw epos3 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

pshw epos3 b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9 b10 b11

mark a 18.2 0

mark "Tid t

mark a 11.2 1

mark v "Ledvinkelfel led 3

END

```
ssys
STORE epos1 epos2 epos3
xytraj a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11

fsysc
STORE epos1 epos2 epos3
xytraj b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9 b10 b11

SPLIT 3 2

AXES H 0 5 V -0.1 0.1

AXES H 0 5 V -0.1 0.1

AXES H 0 5 V -0.1 0.1

AXES H 0 5 V -0.1 0.1
pshw epos1 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11
pshw epos1 b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9 b10 b11
mark a 18.2 9.2
mark "Tid t
mark a 11.2 10.2
mark v "Ledvinkelfel led 1

AXES H 0 5 V -0.1 0.1
pshw epos2 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11
pshw epos2 b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9 b10 b11
mark a 18.2 4.6
mark "Tid t
mark a 11.2 5.7
mark v "Ledvinkelfel led 2

AXES H 0 5 V -0.1 0.1
pshw epos3 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 a11
pshw epos3 b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7 b8 b9 b10 b11
mark a 18.2 0
mark "Tid t
mark a 11.2 1
mark v "Ledvinkelfel led 3

END
```