

ADAPTIVA REGULATORER

PÅR WENNSTAD

INSTITUTIONEN FÖR REGLERTEKNIK  
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA  
JUNI 1980

## ADAPTIVA REGULATORER

---

Examensarbete för civilingenjörs-  
examen i teknisk fysik vid Lunds  
Tekniska Högskola.

av

PÄR WENNSTAD

DOKUMENTATABLAD enl SIS 61 41 21

Organization LUND INSTITUTE OF TECHNOLOGY Department of Automatic Control P.O Box 725 S-220 07 LUND 7 SWEDEN		Document name <b>Master Thesis</b>	
		Date of issue <b>June 1980</b>	
		CODEN: LUTFD2/(TFRT-5235)/1-87/(1980)	
Author(s) <b>Pär Wennstad</b>		Sponsoring organization	
Title and subtitle <b>Adaptiva regulatorer (Adaptive regulators)</b>			
Abstract		A4	A5
<p>The aim of this work is to give an introduction to adaptive regulators and some structures. In dealing with the mathematical description, the investigated systems turn out to show non-analyticity on our way of finding usable criteria. A survey of available methods to overcome this are discussed.</p> <p>A simple adaptive controller without need of any plant model - proposed by Maršík - is shown to be insufficient in some respects. These are satisfactorily explained. In order to improve the controller some modified models are presented.</p> <p>Studies are made in the field of model reference adaptive systems. Liapunov's second method, which is used in the analysis presented, is analytically shown to be useless for some testsignals.</p>			
Key words		A4	A5
<b>Simple adaptive regulators, Maršík's regulator, Model reference adaptive systems, Analysis, Analytical calculations.</b>			
Classification system and/or index terms (if any)			
Supplementary bibliographical information		Language <b>Swedish</b>	
ISSN and key title		ISBN	
Recipient's notes		Number of pages <b>87</b>	Price
		Security classification	
Distribution by (name and address)			

## FÖRORD

Föreliggande examensarbete är avsett att ge en introduktion till några av de tankar som ligger bakom Adaptiva Regulatorer och Adaptiva Regulatorstrukturer. Syftet är att ge en överblick över några angreppssätt inom området.

Ordet adaptiv betyder anpassbar till rådande förhållanden, vilket även kan sägas känneteckna föreliggande arbete - åtminstone de partier som behandlar modellreferensmetoden, som det är svårt att karakterisera och finna en definition på. Floran inom detta område är rik och bitvis kaotisk. Här har valts några angreppssätt för ett schema med ett antal regulatorer. Metoderna på senare år att framtaga adaptationsslingan har baserats på stabilitetsteori. Här har valts Lyapunovteori som det huvudsakliga hjälpmedlet.

En adaptiv regulator utan närvaro av en referensmodell analyseras och försök görs till förbättringar. En översikt ges därvid över de metoder som är tillämpbara.

Jag vill här tacka min handledare, professor Karl Johan Åström som föreslog problemställningar och bistod med värdefull vägledning under arbetets gång.

Ett tack även till den del av institutionens personal som hjälpt mig på ett eller annat sätt.

Lund juni 1980

Pär Wennstad

## INNEHÅLL

FÖRORD	ii
1. INLEDNING	1
2. KAN PARAMETERFEL ELIMINERAS MED EN ENKEL PROPORTIONELL REGULATOR ?	3
3. ANALYS AV EN ENKEL ADAPTIV REGULATOR	18
Approximativ analytisk undersökning	19
Stabilitet	21
Stationaritet	32
Linearisering	35
Den olinjära delen	36
Förbättringar av regulatorn	41
System med monotona stegsvar	48
Sammanfattning	53
4. MODELLREFERENSMETODEN	54
MIT-regeln	57
Lyapunov's stabilitetsteori	58
Syntes med hjälp av Lyapunovteori	61
Inskränkningar för Lyapunovteorin	63
MRAS för godtyckligt polöverskott med initiala fel i förstärkningen	71
MRAS för godtyckligt polöverskott med initiala fel i såväl förstärkning som överföringsfunktion	79
MRAS för polöverskott lika med ett för system av godtyckligt ordningstal	83
REFERENSER	87

## 1 INLEDNING

System underkastade reglering är ofta utsatta för parameterändringar. Existensen av detta problem är anledningen till utvecklandet av adaptiva reglersystem. I en adaptiv regulator gör man försök att kontinuerligt följa variationerna i processens parametrar samt att förändra regulatorns parametrar så att den anpassas till rådande förhållanden.

Adaptiv reglering är ett av de mest intressanta begreppen inom den moderna reglertekniken. Syftet med denna reglering är att kunna styra en process utan några krav på förhandskänedom om processens dynamik.

Att systemets parametrar ändras har sin grund i en tidsvariabel omgivning. Då antingen i form av en anläggning med varierande parametrar, skilda referens- och insignaler eller störningar. Denna omgivning skulle i sin tur omöjliggöra varje försök till en effektiv och rationell produktion, om möjligheter till kompensativ styrning eller reglering saknades. För industriellt bruk får man nöja sig med relativt förenklade metoder som ändå i allmänhet kräver tillgång till en processdators räknekapacitet.

Eftersom ändringarna, önskade eller ej, inte är fullständigt förutsägbara så är det därför inte tillräckligt med en på förhand bestämd tidsvariabel regulator. En möjlighet är att använda prediktion som en tänkt mätning och därefter åstadkomma reglering. Härvid utrustas processdatorn med en matematisk modell av den intressanta delen av processen. Denna modell har i sin tur konstanta parametrar alternativt parametrar som kontinuerligt uppdateras - man erhåller en adaptiv modell, som kontinuerligt anpassar sig till den verkliga processens dynamik.

Den vanligaste tekniken, i samband med prediktion, är då återkoppling - man återför uppmätta avvikelser från önskade värden från processen till styrdonen. I en dator kan struktur och parameterantal väljas godtyckligt. Problemet är då att välja sina regulatorparametrar - ett olämpligt val kan orsaka självsvängning. Valet av parametrarna är beroende av den reglerade processens egenskaper men även av vilket mått på reglergodheten som väljes.

Eftersom samtidigt en s k parameteruppskattare måste ha tillgång till processens in- och utsignaler över ett visst tidsintervall, erhålls processparametrarna med en viss tidsfördröjning. Dyliga system kan därför ha svårigheter om processen kännetecknas av snabba variationer. Adaption kombineras därför ofta med parameterstyrning (gain scheduling).

Inledningsvis ges med ett par exempel en introduktion till adaptiva reglersystem. Dessa kan sägas kännetecknas av den aktuella styrlagens variabla koefficienter. Detta visar sig vara en förutsättning för att få systemet att fungera på ett mer tillfredsställande sätt. Diskussionen i avdelning 2 är avsedd att belysa behovet av adaptiv reglering. Innebörden av denna är i grunden enkel medan det är dess tillämpbarhet som får sägas vara komplex. Exempelen vill således visa att det finns en potentiell möjlighet till förbättring av system genom adaptiv reglering av dess systemparametrar.

I avdelning 3 ges en analys av en adaptiv regulator samt försök till att förbättra denna genom användande av enkla filter. En översikt över vilka metoder som finns att tillgå ges parallellt med analysen. En allvarlig begränsning visar sig det faktum vara att systemet ej låter sig underkastas linjärisering.

I avdelning 4 knyter vi an till den inledande diskussionen i avdelning 2. Vi använder här framförallt Lyapunovteori för dimensionering av ett adaptivt system: Modell Referens Adaptiva System (MRAS). Metodens främsta fördel är dess garanti för stabilitet. I exemplen vill visas hur man principiellt konstruerar sin regulator. I tillämpningarna nödgas man komplettera sina teoretiska beräkningar med exempelvis simulering för att uppnå ett suboptimalt resultat.

## 2 KAN PARAMETERFEL ELIMINERAS MED EN ENKEL PROPORTIONELL REGULATOR ?

Nedanstående två exempel bygger på en s k modellreferensmetod, med vars hjälp vi ska besvara denna fråga och samtidigt föra en diskussion kring den.

Modellreferens: det önskade uppförandet eller svaret kan erhållas med hjälp av ett externt konstruerat system eller exempelvis en fysikalisk modell varvid skillnaden mellan modellsvaret och systemets svar användes som en parameterjusterande signal.

Modellreferensen är en del av reglersystemet, vilket vi återkommer till i avdelning 4. Nedanstående är avsett som en inledande diskussion.

Två typfall kommer att behandlas - med variationer i systemets (processens) tidskonstant och variationer i dess förstärkning.

För enkelhet och klarhet har här valts en strikt uppdelning utan att problemställningen går förlorad. Exemplet med variabel förstärkning är enklast varför vi inleder med detta.

Som komplettering till detta teoriavsnitt redovisas även diverse simuleringar av systemen.

### EXEMPEL 2:1

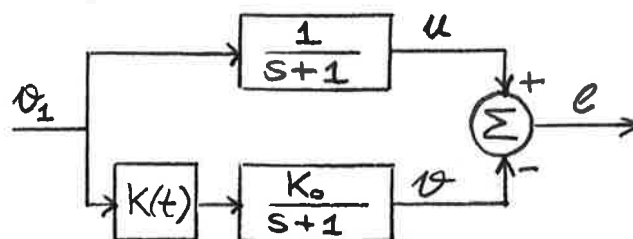


Fig. 2.1 MRAS med variabel förstärkning.



I figur 2:1 ges blockschemat för det betraktade systemet och dess referensmodell. Systemet har en variabel förstärkning  $K_0$  som varierar på ett, tills vidare, ej specificerat sätt. Styrsignalen  $v_1$  påverkar såväl processen som modellen. Med ledning av felet  $e$  skall parametern  $K$ , som är en med systemet försedd serieregulator med variabel förstärkning, ska ändras så att felet konvergerar mot noll och systemet bli stabilt. Det ska härvid gälla att produkten  $KK_0$  ska konvergera mot ett.

Vi antar, inledningsvis, regulatorn

$$\frac{dK}{dt} = \alpha \cdot e$$

där  $\alpha$  är en konstant för kontroll av dess (förmodade) begränsning och otillräcklighet.

Ur figur 2:1 erhålles

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -u + v_1 \\ \frac{dv}{dt} = -v + KK_0 v_1 \\ e = u - v \end{cases}$$

vilket ger felekvationen

$$\frac{de}{dt} + e = v_1 (1 - KK_0)$$

För ett steg som insignal

$$v_1(t) = v_0 \theta(t)$$

med

$$\theta(x) \triangleq \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

och

$$v_0 > 0$$

erhålles för detta linjära system

$$e(t) = v_0 \theta(t) [1 - kK_0] (1 - e^{-t})$$

Vi betraktar nu de olika möjligheterna för  $t > 0$ :

- $K_0 > 0, kK_0 < 1 \Rightarrow e(t) > 0$ 
  - $\alpha > 0 \Rightarrow k \text{ ökar} \Rightarrow e \text{ minskar}$
  - $\alpha < 0 \Rightarrow k \text{ minskar} \Rightarrow e \text{ ökar}$
- $K_0 > 0, kK_0 > 1 \Rightarrow e(t) < 0$

Att observera är att tecknet på  $e$  här bibehålles.

Fallen med  $K_0 < 0$  behandlas analogt och vi finner att vid ett positivt steg som insignal bör vi välja

- Om  $K_0 > 0 : \alpha > 0$
- Om  $K_0 < 0 : \alpha < 0$

Då det ställs krav även på konvergenshastigheten, vilket oftast är fallet, måste även den (relativa) storleken på  $K_0$  vara känd.

Vid andra insignaler, exempelvis ett negativt steg, så får  $K$  väljas annorlunda till sitt tecken och mer generellt även till sitt belopp. Tydligen är  $\alpha$  beroende av insignalen och av  $K_0$  och då speciellt om denna senare ändras stegvis eller kontinuerligt.

Således är styrlagen, den enkla proportionella regulatorn, otillräcklig redan för steg med olika tecken som insignal. Parameterfel kan alltså inte elimineras med en enkel proportionell regulator. ■

Med hjälp av ovanstående resonemang inses att en bättre regulator än den enkla proportionella är

$$\frac{dk}{dt} = \beta \cdot e \cdot v_1 \quad (*)$$

där  $\beta$  är en konstant. Denna konstant är emellertid beroende av tecknet på  $K_0$  och vi finner att en än bättre regulator är

$$\frac{dk}{dt} = \gamma \cdot e \cdot v_1 \cdot \text{sign}(K_0)$$

där  $\gamma$  är en konstant.

En realisering av (\*) för detta adaptiva system med referensmodell med förstärkningsjustering av ett första ordningens system visas i figur 2:2.

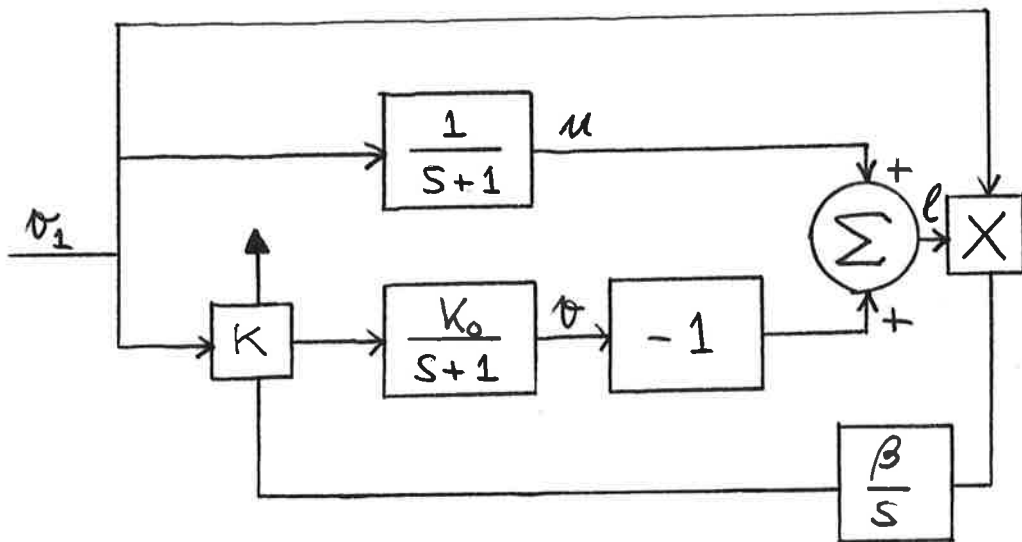


Fig. 2.2 Realisering för regulatorn i exempel 2:1.

(\*) erhålles även med Lyapunovsyntes som visas i avdelning 4.

#### ANMÄRKNING

P och PI-regulatorer är helt dominerande inom den analoga regler-tekniken. Funktionen hos en ideal PI-regulator kan skrivas som

$$u(t) = k \left[ e(t) + \frac{1}{T} \int_0^t e(s) ds \right]$$

där  $e$  är reglerfel,  $u$  insignal till processen,  $K$  proportionalitetsfaktor och  $T$  integraltid.

Deriverar vi vår felekvation två gånger och använder en PI-regulator får vi

$$\frac{d^3e}{dt^3} + \frac{d^2e}{dt^2} + v_1 k_0 \alpha \frac{de}{dt} + v_1 k_0 \alpha \frac{1}{T} e(t) = 0$$

För att undersöka om felet  $e$  konvergerar mot noll använder vi ett stabilitetskriterium, exempelvis Rouths algoritm vilken ger tablån:

$$\begin{array}{ccc} 1 & v_1 k_0 \alpha & 0 \\ 1 & v_1 k_0 \alpha \frac{1}{T} & \\ v_1 k_0 \alpha \left(1 - \frac{1}{T}\right) & & \\ v_1 k_0 \alpha \frac{1}{T} & & \end{array}$$

Vi får då följande stabilitetsvillkor:

P-regulator:  $v_1 k_0 \alpha$  positivt

PI-regulator:  $v_1 k_0 \alpha / T$  positivt samt  $T > 1$

Vi ser att inte ens en PI-regulator ger en tillfredsställande lösning då stabiliteten är avhängigt av tecknet på signalen,  $K_0$  och av  $\alpha$ . ■

#### EXEMPEL 2:2 Automatmätning av kondensatorer

Här behandlas fallet med variabel tidskonstant.

Systemet med dess referensmodell visas i figur 2.3. Som i föregående exempel får styrsignalen  $v_1$  påverka processen  $S$  såväl som dess tillhörande modell  $S_R$ . Med ledning av felet  $e$  är uppgiften här hur modellens motstånd  $R$  ska ändras med ledning av felet  $e$  för att detta ska konvergera mot noll varvid det då ska gälla att  $C$  ska konvergera mot  $C_0$  som (liksom  $R_0$ ) är konstant. Systemets och modellens utsignal är  $u$  respektive  $v$ .

Liksom i föregående exempel gör vi nu en ansats med en enkel proportionell regulator

$$\frac{dR}{dt} = K \cdot e, \quad K \text{ konstant}$$

och om vars begränsning vi nu ska föra en diskussion.

För att få systemet på en behaglig tillståndsform beaktas att det för modellen gäller

$$i = C_0 \frac{dV}{dt} = \frac{v_1 - v}{R}$$

vilket ger

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{RC_0} (v_1 - v)$$

För systemet självt gäller motsvarande ekvation och om vi identifierar felet i enlighet med figurens beteckningar erhåller vi följande ekvationer för systemet och dess modellreferens:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{RC_0} (v_1 - v) \quad (S_R)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{R_0 C} (v_1 - v) \quad (S)$$

$$e = -v + u \quad (\text{felet})$$

$$\frac{dR}{dt} = K \cdot e \quad (\text{styrslag})$$

Differentialekvationen för  $(S_R)$  är olinjär eftersom det variabla  $R$  återfinnes i nämnaren. Detta gör att systemet blir litet mer svårbehandlat än systemet i föregående exempel som vi fann var linjärt.

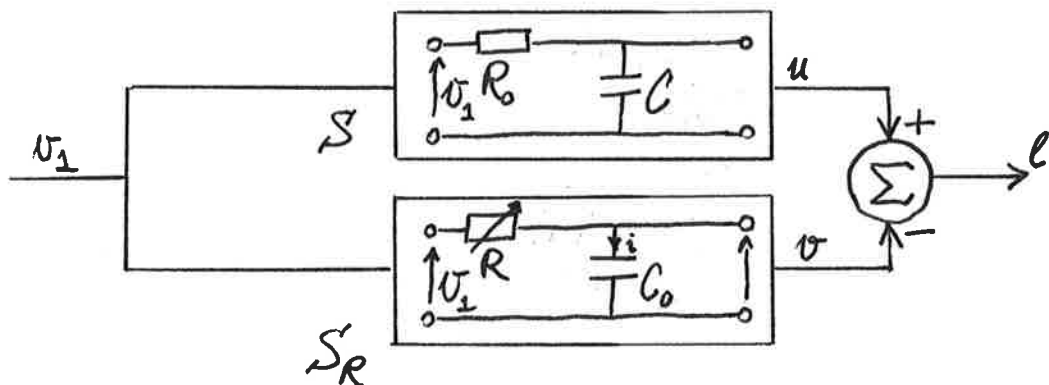


Fig. 2.3 Automatmätning av kondensatorer. MRAS med variabel tidskonstant.

Vid linearisering av ekvationerna kring lösningen  $R = R_0$  erhålles vid införandet av tillståndsvektorn

$$x = [v, u]^T$$

följande ekvationer

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_0 C_0} \left( \frac{R}{R_0} - 1 \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_0 C_0} \left( \frac{C}{C_0} - 1 \right) \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} \frac{1}{R_0 C_0} \left( \frac{R}{R_0} - 1 \right) \\ \frac{1}{R_0 C_0} \left( \frac{C}{C_0} - 1 \right) \end{bmatrix} v_1$$

och man finner, efter litet räkningar, att, den med detta lineariserade system förknippade, överföringsfunktionen blir identiskt noll. Lineariseringen är därför för grov och egenskaperna hos det ursprungliga systemet går därför nästan helt förlorade, och därför måste vi finna en annan väg för konstruktivare analys.

Som ett biresultat erhåller vi emellertid för det lineariserade systemet följande ekvation för felet:

$$e(t) = \left\{ \frac{C}{C_0} (u - v_1) - \frac{R}{R_0} (v - v_1) \right\} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{R_0 C_0}\right) \right] \theta(t)$$

varför tecknet hos felet är beroende av  $R$  såväl som av  $C$ . Vi ska senare återkomma till att så verkligen är fallet även för det olinjära systemet. Felet blir således ej konstant till sitt tecken som var fallet i föregående exempel och som gjorde att det gick lätt att behandla.

Istället studerar vi nu systemet för några enkla insignaler för att få ett bekräftande på den ovan ansatta styrlagens otillräcklighet.

Betrakta ett positivt steg som insignal

$$v_1(t) = v_0 \theta(t), \quad v_0 > 0$$

varvid följande samband erhålles

$$u(t) = v_0 \theta(t) \left[ 1 - e^{-\frac{1}{R_0 C} t} \right]$$

och

$$v(t) = v_0 \delta(t) \left[ 1 - e^{-\frac{1}{RC_0} t} \right]$$

och felet blir därför

$$e(t) = v_0 \delta(t) \left[ e^{-\frac{1}{RC_0} t} - e^{-\frac{1}{R_0 C} t} \right]$$

Vi går nu vidare på den väg som påbörjades i föregående exempel, och gör en uppdelning i olika fall.

Figur 2.4 gör anspråk på att åskådliggöra utsignalerna från processen och modellen samt felet.

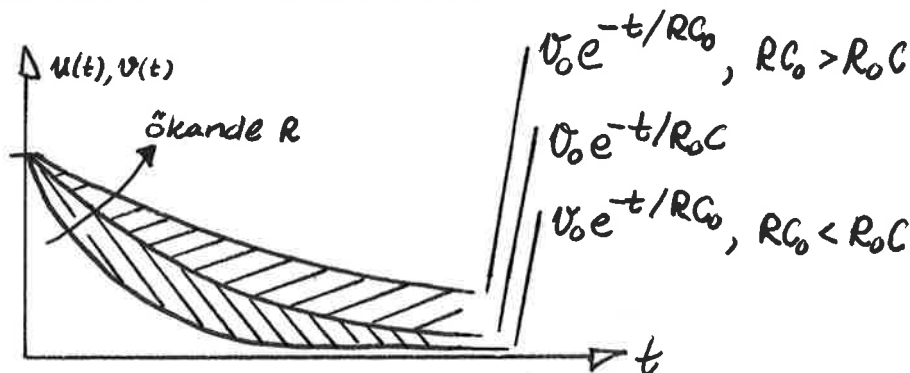


Fig. 2.4 Utsignalerna från systemet och modellen vid ett positivt steg som insignal

Vi betraktar nu olika möjligheter för  $t > 0$  och med den ovan ansatta styrlagen:  $dR(t)/dt = K \cdot e(t)$ .

1°  $RC_0 > R_0 C \Rightarrow e(t) > 0$ . Fallet illustreras i figur 2.5.

■  $K > 0$  ger att  $R$  ökar avtagande med tider vilket ger att  $e$  ökar för att därefter konvergera mot noll.

■  $K < 0$  ger att  $R$  minskar vilket ger att  $e$  ökar.

2°  $RC_0 < R_0 C \Rightarrow e(t) < 0$ . Fallet illustreras i figur 2.6.

■  $K > 0$  ger att  $R$  minskar och att  $e$  ökar.

■  $K < 0$  ger att  $R$  ökar och att  $e$  minskar.

Vi ser att felet här hela tiden får samma tecken och det är här instruktivt att behandla varje fall för sig.

I figurerna 2.7 - 2.10 visas resultat av simuleringar av detta system med följande numeriska värden:

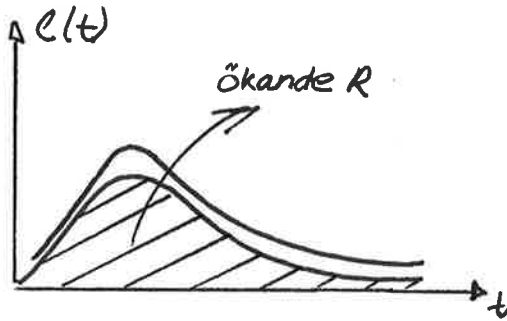


Fig. 2.5 Felet som funktion av tiden för fallet  $RC_0 < R_0 C_0$ .

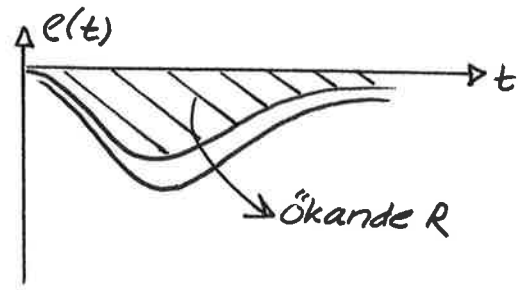


Fig. 2.6 Felet som funktion av tiden för fallet  $RC_0 > R_0 C_0$ .

$$R_0 C_0 = 1 \text{ och } C_0 = 1$$

Figur	$R_{\text{initial}}$	K
2.7	2.0	1
2.8	2.0	-5
2.9	0.2	1
2.10	0.2	-5

Den enda slutsats som just nu ska dras är att vid positivt steg som insignal och för fixt värde på K bör K väljas med negativt tecken för att felet  $e$  ska konvergera mot noll.

Om vi nu istället betraktar insignaler av typen

$$v_1(t) = v_{10}\theta(t-t_1) + v_{20}\theta(t-t_2) + \dots + v_{m0}\theta(t-t_m)$$

$$\text{med } v_{p0} \geq 0 \text{ för } p = 1, 2, \dots, m.$$

d v s en stegvis växande insignal så blir slutsatsen densamma som vid ett positivt steg som insignal - K bör väljas negativt.

Vi betraktar nu en positiv (fyrkant)puls som insignal för att studera den typ av insignaler som ökar för att därefter minska.

Signalen är således

$$v_1(t) = v_0\theta(t) - v_0\theta(t-t_0) \text{ , } t_0 > 0 \text{ och } v_0 > 0$$

På samma sätt som vid steg som insignal erhålles följande ekvation för felet:

$$e(t) = \theta(t) \cdot v_0 \left( e^{-t/RC_0} - e^{-(t-t_0)/RC_0} \right) -$$



PLOT U V R E  
R=3.414  
K=1.

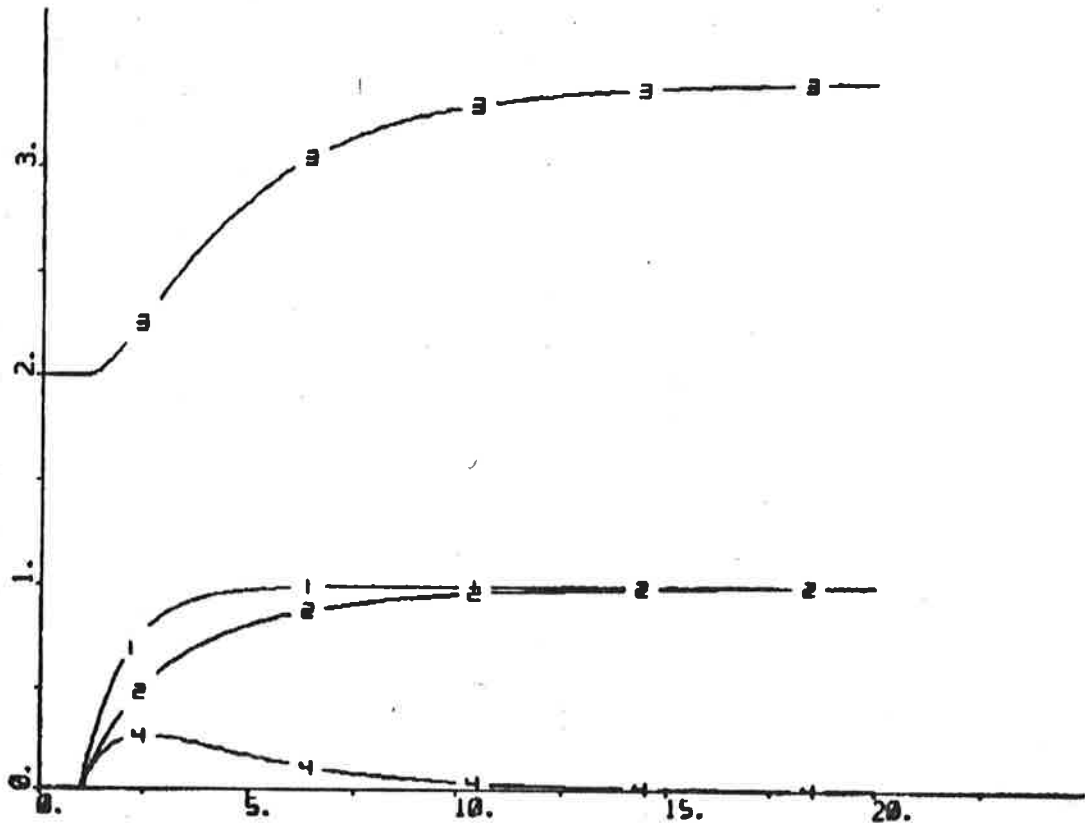


Fig. 2.7

PLOT U V R E  
R=0.7659  
K=-5.

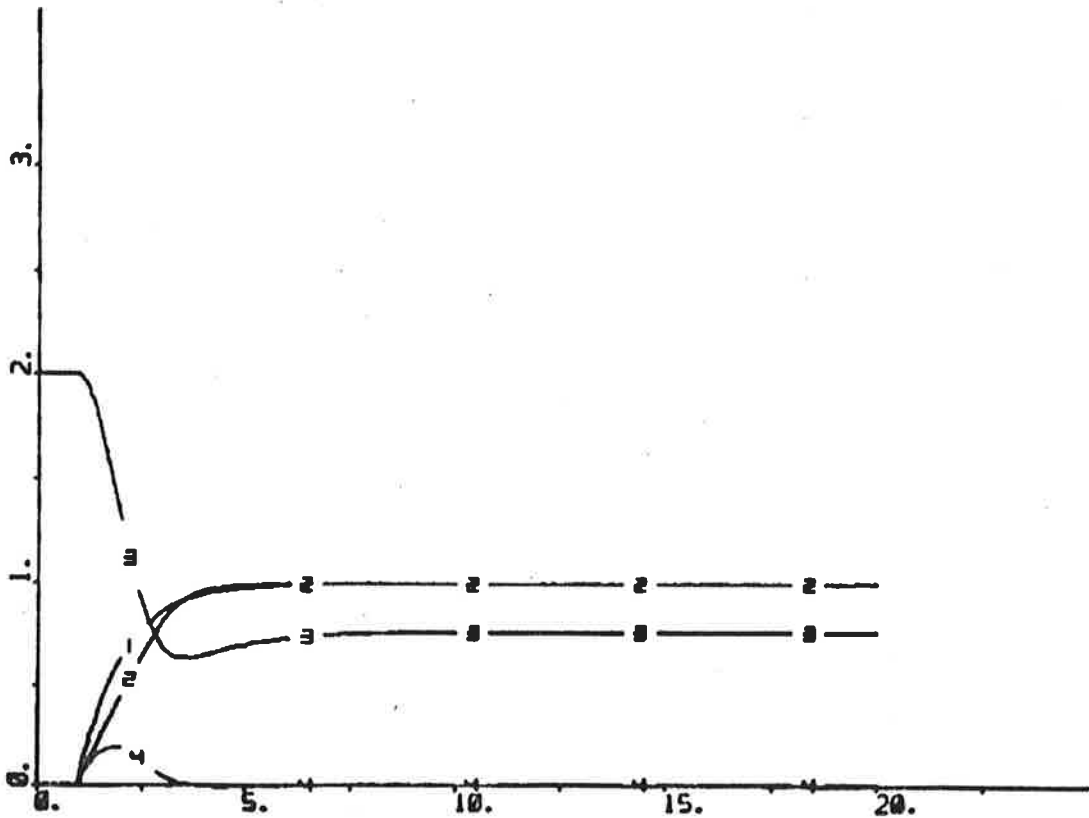


Fig. 2.8

PLOT U V R E  
R=-119.9  
K=1.

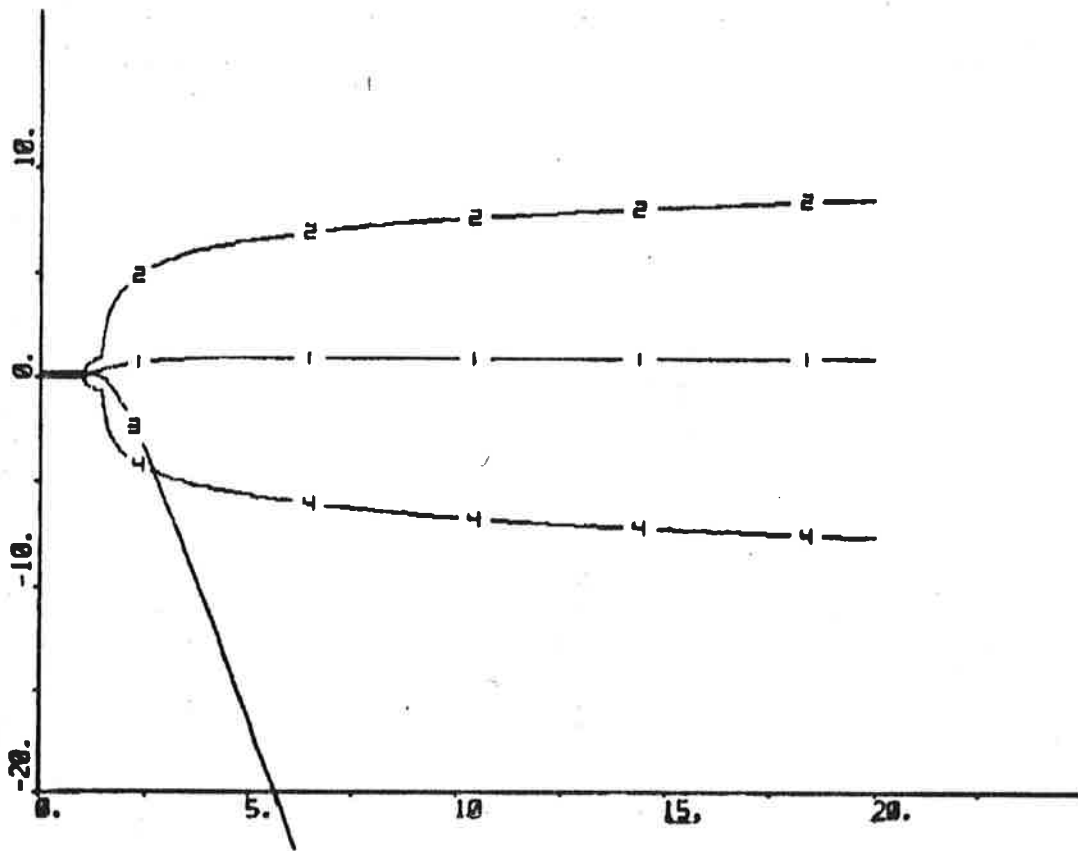


Fig. 2.9

PLOT U V R E  
R=1.648  
K=5.

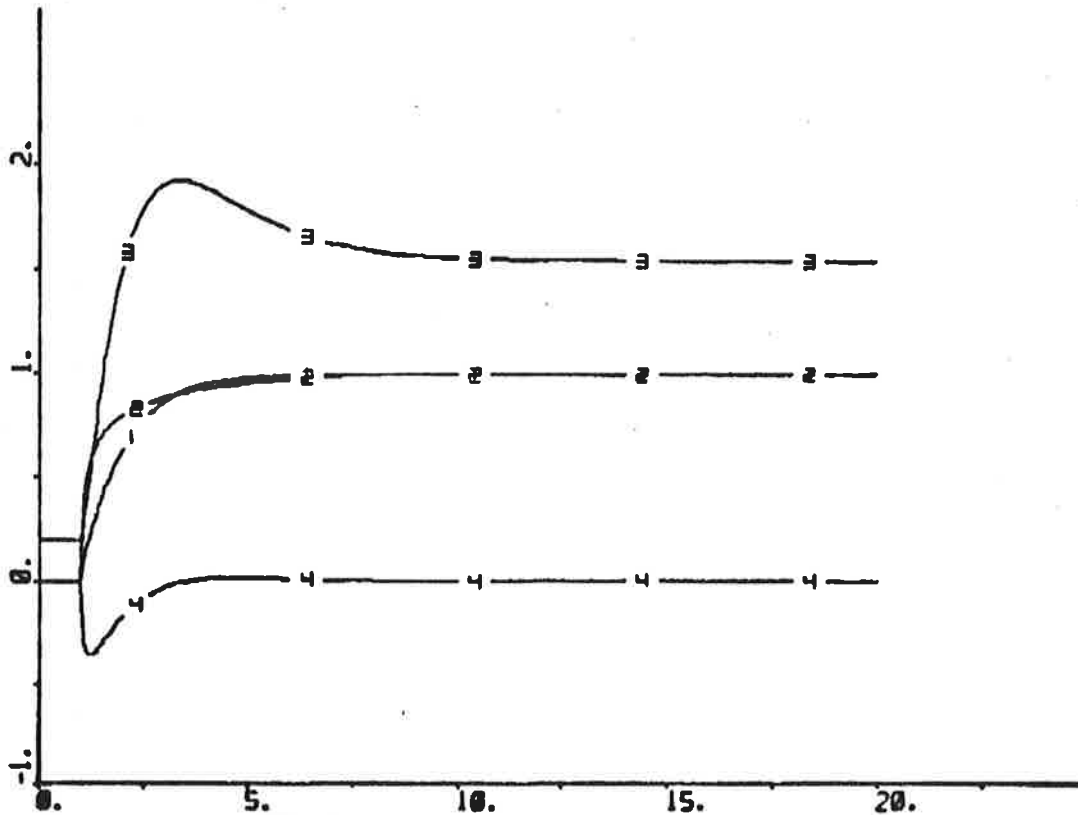


Fig. 2.10

$$- \theta(t) \cdot v_0 (e^{-t/R_0 C} - e^{-(t-t_0)/R_0 C})$$

Vi illustrerar detta med figurerna 2.11 och 2.12 för att enklare kunna genomföra analysen vid en puls som insignal.

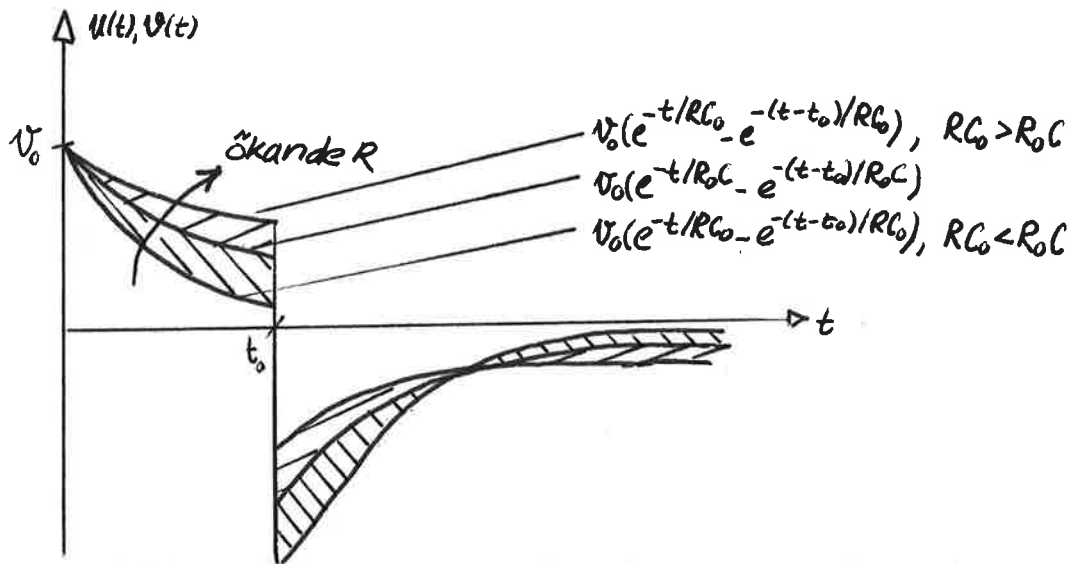


Fig. 2.11 Utsignalerna från systemet och modellen vid en positiv puls som insignal.

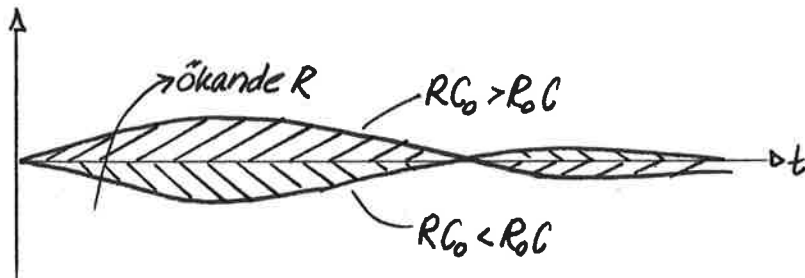


Fig. 2.12 Felet  $e = u - v$  för de båda fallen i figur 2:10.

Vi ser att för de båda fallen ändrar felet sitt tecken till skillnad från när vi hade ett steg som insignal. För  $R_0 C < R_0 C$  är felet först negativt och därefter positivt. För  $K > 0$  minskar  $R$  varvid felet ökar. Systemet simulerades med en puls som insignal, resultatet återfinns i figurerna 2.13 - 2.16 med följande numeriska värden:

$R_0 C = 1$  och  $C_0 = 1$

Figur	$R_{\text{initial}}$	K	Anmärkning
2.13	2.0	1	
2.14	2.0	-5	
2.15	0.2	1	$e \rightarrow \infty$
2.16	0.2	-5	

PLOT U V R E  
R=1.971  
K=1.

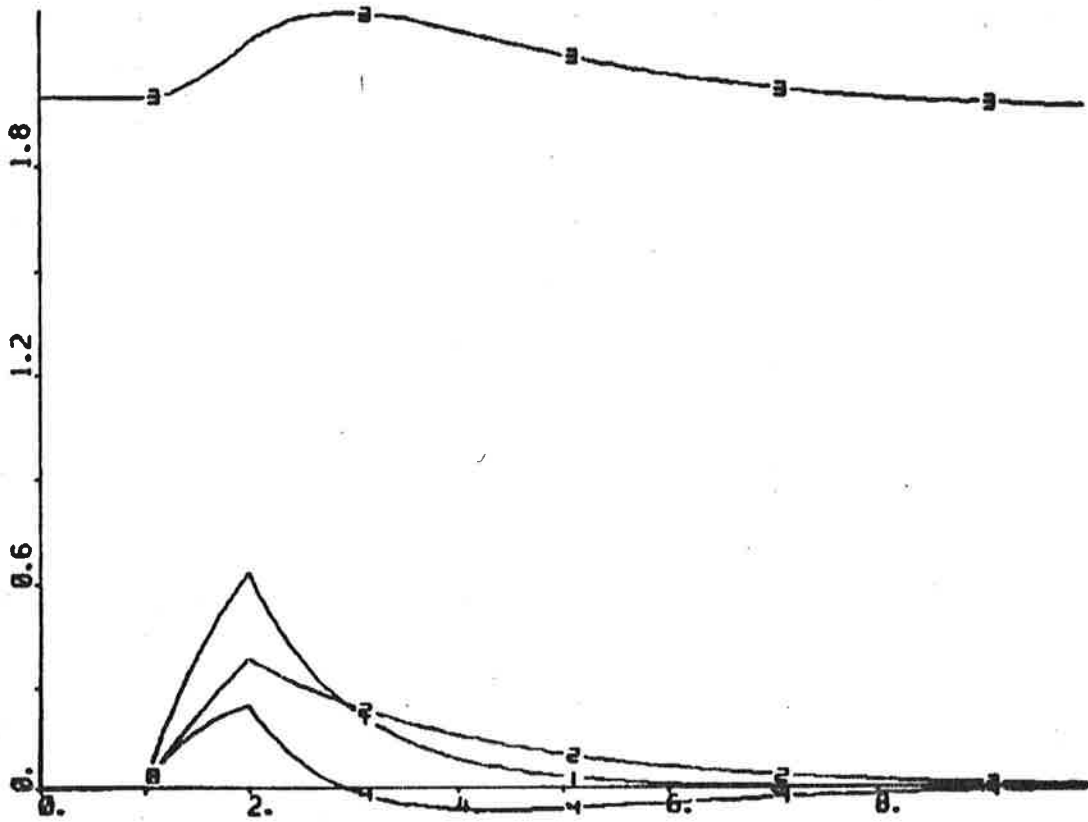


Fig. 2.13

PLOT U V R E  
R=0.02707  
K=-5.

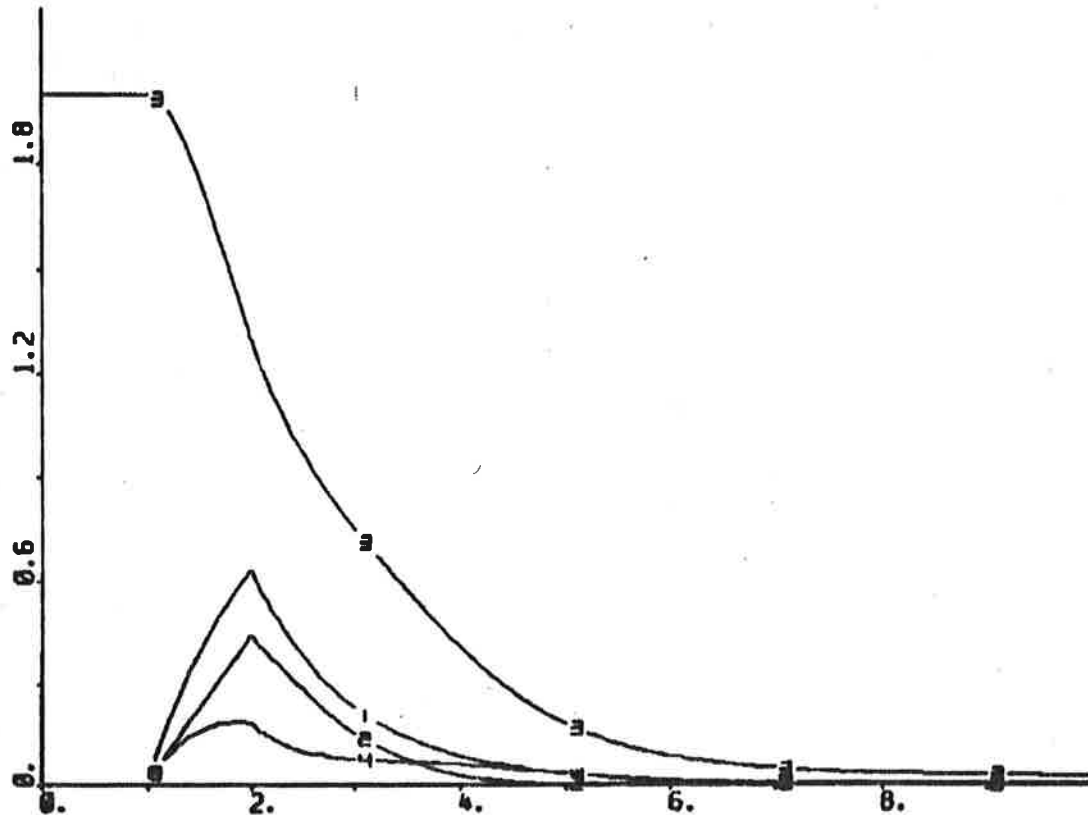


Fig. 2.14

PLOT U V R E  
R=67.82  
K=1.

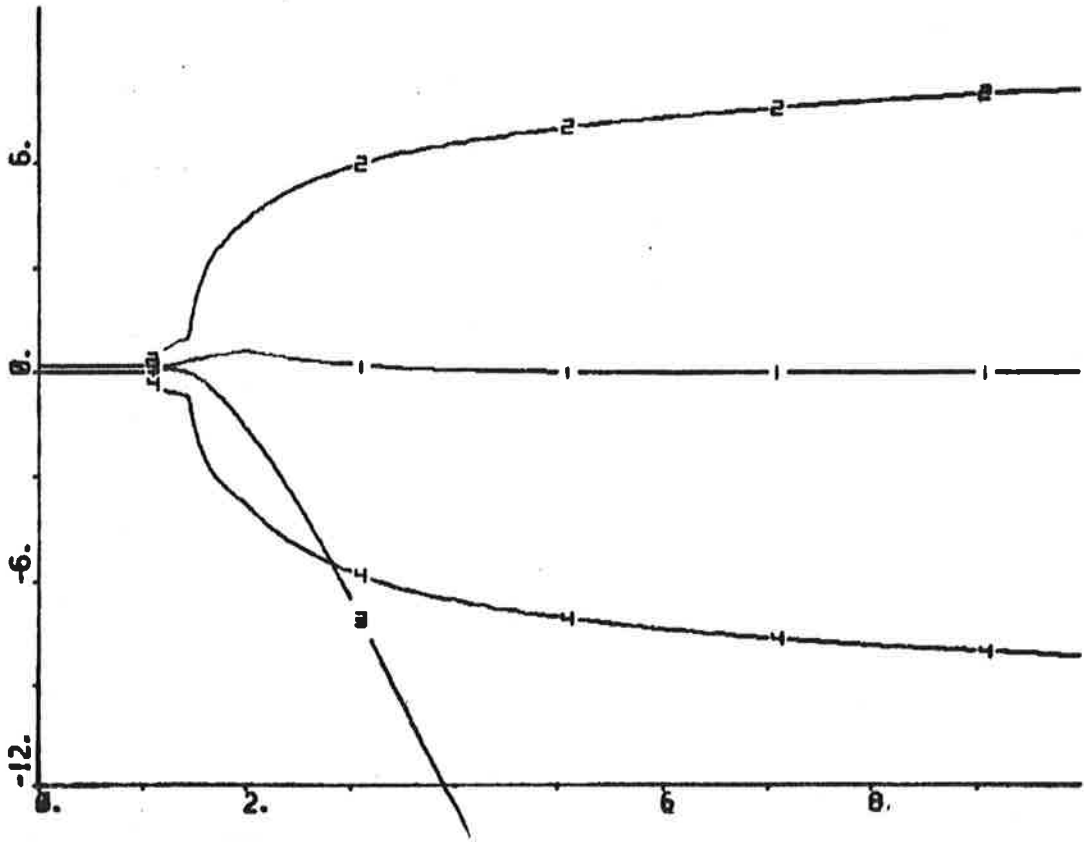


Fig. 2.15

PLOT U V R E  
R=14.89  
K=5.

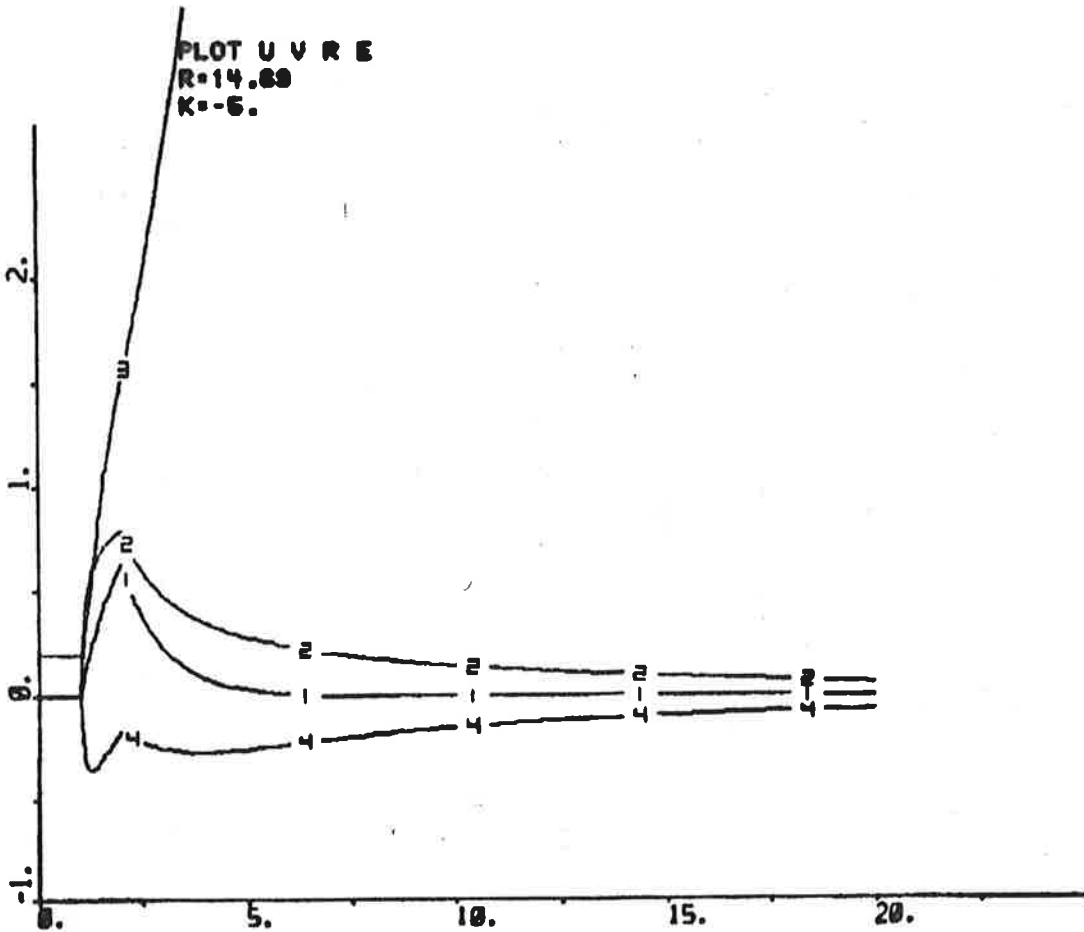


Fig. 2.16

Observera skillnaden i skalgradering jämfört med figurerna 2.7 - 2.10. ■

Vi finner således nu att den föreslagna styrlagen inte är tillräcklig ens för så enkla insignaler som steg och puls. M a o är styrlagen inte tillräcklig om inte insignalen på förhand är känd.

Vid exempelvis en "känd" puls som insignal skulle detta kunna kringgås genom att tecknet på  $K$  ändras. Vi får då en regulator med tidsberoende egenskaper - systemet blir alltså adaptivt.

Är styrsignalen inte given på förhand, vilket oftast inte är fallet, krävs en mer sofistikerad styrlag. I avdelning 4 återvänder vi till detta exempel med variabel tidskonstant där vi även på ett mer slagkraftigt sätt kommer att behandla det kombinerade fallet med såväl förstärkning och tidskonstant variabla. Det visar sig att Lyapunovsyntes är ett utmärkt verktyg för detta ändamål.

Sammanfattningsvis gäller således att när systemets parametrar varierar måste styrlagen vara variabel - systemet blir adaptivt. Speciellt kan parameterjustering inte åstadkommas med en enkel proportionell återkoppling.

De två enkla exemplen visar klart att det ej är möjligt att med enbart proportionell återkoppling styra parametervariationer så att systemet överrensstämmer med modellen. Det tycks vara nödvändigt att införa olinjariteter i återkopplingen. Vi ska senare se exempel på detta.

### 3 ANALYS AV EN ENKEL ADAPTIV REGULATOR

Vi ska här behandla en enkel adaptiv regulator där olinjariteten som föreslogs i avdelning 2 införts i återkopplingen hos den adaptiva delen.

Den adaptiva kretsen visas i figur 3.1. Den har föreslagits av J. Maršik.<sup>x</sup> Fördelarna med denna regulator är just avsaknaden av en referensmodell samt att ingen speciell parameteruppskattare är nödvändig. Ingen ytterligare testsignal behövs förutom referenssignalen. Vi ska emellertid se att enkelhet i detta fall resulterar i otillräcklighet för den föreslagna regulatorn.

Jämför gärna den principiella likheten i uppbyggnad med modellreferensen i avdelning 2 (figur 2.2).

Uppbyggnaden är enkel - bestående av en vanlig återkoppling och en adaptiv del som i stora drag justerar förstärkningen. Den adaptiva delen består av två multiplikatorer och en integrator. Processen betecknas med  $G$ , referenssignalen ovan med  $y_R$ , felet med  $e$ ,  $\alpha$  förstärkningen,  $u$  är processens insignal och  $y$  dess utsignal.

Vi ska inledningsvis behandla kretsen som i figur 3.1, vilken vi benämner vår grundkonfiguration, utan någon extra inlagd förstärkning och utan några filter för att på så sätt enklare analysera regulatorns fundamentala egenskaper.

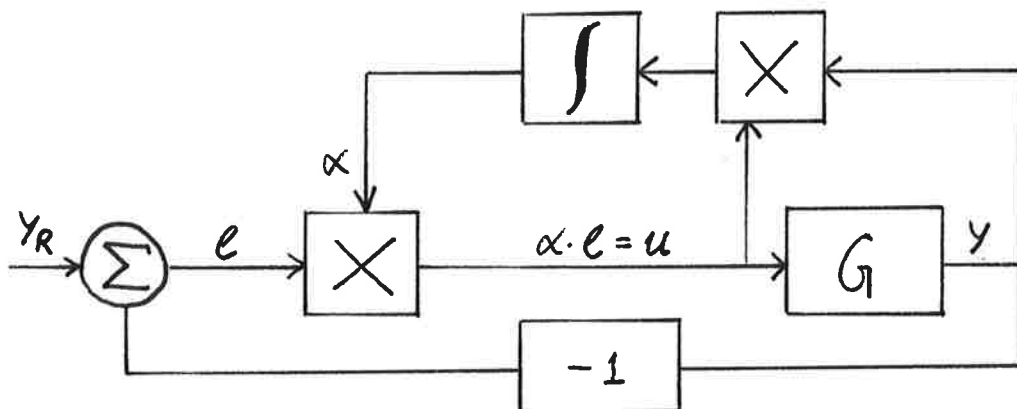


Fig. 3.1 Grundkonfiguration för en enkel adaptiv regulator.

<sup>x</sup> J. Maršik. 2nd Prague IFAC Symposium on Identification and Process Parameter Estimation (Praha 1970).

Vi önskar nu göra ett försök till analys. Olika möjligheter är då följande:

- o Approximativ analytisk behandling
- o Stabilitetsundersökning/Kriterier
- o Simulering
- o Linjearisering
- o Undersökning av stationära punkter
- o Fasplansanalys
- o Isolering av olinjariteten/Stabilitet
- o Lyapunovteori

Vissa av dessa metoder är intimt sammankopplade och den kommande behandlingen blir en kombination av dessa för olika referenssignaler och för olika processer.

En direkt linearisering låter sig tyvärr ej göras då systemets egenskaper i så fall går förlorade. Vi ska senare återkomma till detta i samband med den approximativa analytiska behandlingen.

---

Låt oss nu anta att  $G = G_1$  är given i frekvensplanet som

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

Vi erhåller då från figur 3.1

$$\frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + u(t) \quad ; \quad y(0) = 0$$

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \lambda \cdot y(t) \cdot u(t) \quad ; \quad \alpha_0 = \alpha(0) \neq 0 \quad ; \quad \lambda = \lambda(\alpha_0)$$

$$u(t) = \alpha(t) [y_R(t) - y(t)] = \alpha(t) y_R(t) - \alpha(t) y(t)$$

Med tillståndet

$$x(t) = y(t)$$

och

$$y_R(t) = w(t)$$

som referenssignal får vi i tidsplanet



$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ \dot{\alpha} = \lambda \cdot x \cdot u \\ u = \alpha \cdot w - \alpha \cdot x \end{cases}$$

Låt nu  $w = w(t)$  vara ett positivt steg

$$w = \theta(t)$$

definierat som i avdelning 2 och göra en approximativ undersökning för  $G_1(s)$  i tidsplanet.

Initialvärdena väljs som

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= 1 & \dot{\alpha}(0) &= 0 \\ x(0) &= 0 & \dot{x}(0) &= 1 \\ \omega(0) &\equiv 1 \\ u(0) &= 1 & \dot{u}(0) &= -1 \end{aligned}$$

Här gäller alltså att  $w = 1$  för det tidsintervall ( $t \geq 0$ ) vi behandlar. Detta ger genast

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + u \\ u &= \alpha(1-x) \end{aligned}$$

vilket ger oss

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x(1+\alpha) + \alpha & ; & \quad x(0) \stackrel{\Delta}{=} x_0 = 0 \\ \dot{\alpha} &= \lambda \cdot \alpha \cdot x(1-x) \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} x(t) &= - \int_0^t [\alpha(1+\alpha) - \alpha] dt \\ \alpha(t) &= \exp \left\{ \int_0^t \lambda x(1-x) dt \right\} \end{aligned}$$

Vi nödgas här göra en approximation för detta ekvationssystem.

Sätt

$$\alpha_1 = \alpha = 1$$

för  $t \geq 0$ . För  $x = x_1$  gäller då

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + \alpha_1$$

med lösningen

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \quad ; \quad x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 1$$

vilket uppfyller initialvärdena.

Vidare har vi

$$u_1(t) = 1 - x_1 = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})$$

Sätt nu

$$\dot{\alpha}_2 = \lambda \cdot x_1 \cdot y_1 = \frac{1}{4}(1 - e^{-4t}) \cdot \lambda$$

och efter anpassning till initialvärdena erhålles en andra approximation för förstärkningen

$$\alpha_2(t) = \frac{1}{16}(4t + e^{-4t} + 15)$$

Förstärkningen går således mot oändligheten, speciellt

$$\alpha_2 \sim t \quad , \quad t \rightarrow +\infty$$

vilket visar sig överensstämma med simuleringarna (nedan).

Approximationen kan sedan förbättras genom

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= -x_2(1 + \alpha_2) + \alpha_2 \quad ; \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 1 \\ u_2 &= \alpha_2(1 - x_2) \quad ; \quad u_2(0) = 1, \quad \dot{u}_2(0) = -1 \end{aligned}$$

vilket vi lämnar därhän. Approximationen kan sedan ytterligare förbättras.

---

De system som vi ska undersöka ska liksom  $G_1$  antas stabila. Om  $y = x$  är instabil måste även  $u$  vara det. Och eftersom förstärkningen  $\alpha$  är proportionell mot integralen av produkten  $x \cdot y$  så

måste även  $\alpha$  vara instabil.

Grunden för vår stabilitetsundersökning blir således följande: Parametern  $\alpha$  kan inte vara stabil om systemets utsignal är instabil. Stabilitetsundersökningen kommer därför att koncentreras till  $\alpha$  enbart. Visar det sig att  $\alpha$  är stabilt så måste även utsignalen (tillståndet) vara det. Stabilitetsundersökningen kommer således att i huvudsak behandlas i den adaptiva delen. Vi ska senare återkomma till detta.

Fasplanet för  $G_1(s)$  och för olika initialvärden på  $x(t)$  och  $\alpha(t)$  samt med  $w$  som positivt steg som referenssignal simulerades och visas i figur 3.2.

Vi ser här att för  $\alpha(0) < 0$  svänger systemet in sig mot origo och för  $\alpha(0) > 0$  så kommer  $x(t)$  att konvergera mot ett och att  $\alpha(t)$  växer över alla gränser. För  $\alpha(0) < 0$  svänger systemet in

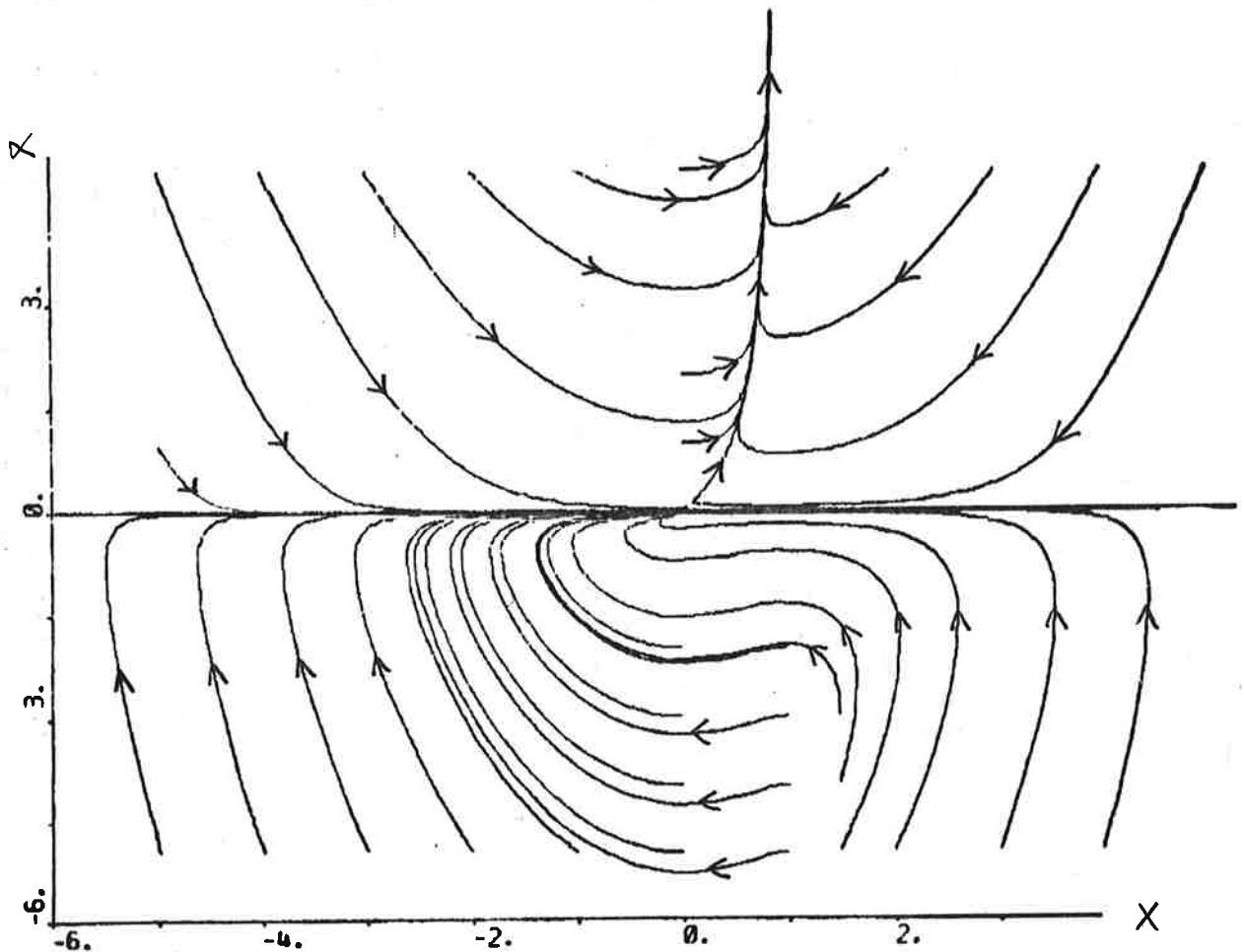


Fig. 3.2 Fasplanet för vår grundkonfiguration med  $G = (s + 1)^{-1}$  och med ett positivt steg som referenssignal.

sig mot origo på så sätt att  $\alpha$  går snabbare mot noll än vad tillståndet (utsignalen) gör. Ser vi i figur 3.1 verkar detta mycket rimligt eftersom  $\alpha$  fungerar som en variabel förstärkning i den adaptiva slingan. Det är bland annat av denna anledning därför endast intressant att betrakta positiva initialvärden för  $\alpha$ .

För att se detta tydligare hämtar vi differentialekvationen för  $\alpha$  vilken enligt ovan lyder

$$\dot{\alpha} = \lambda \cdot (\omega - \chi) \cdot \alpha \cdot \chi$$

med lösning

$$\alpha = \alpha(0) \exp \left[ \lambda \int_0^t \omega \chi dt - \lambda \int_0^t \chi^2 dt \right] \quad (\dagger)$$

där

$$\chi = \chi(\alpha)$$

Om utsignalen  $x$  vore instabil skulle den kvadratiske termen dominera och  $\alpha$  skulle minska tills uppnådd stabilitet. Om vi tillåter en permanent instabilitet i  $x$  skulle  $\alpha$  strikt konvergera mot noll. Men om  $\alpha$  går mot noll är den adaptiva kontrolldelen bortkopplad och vi kan ej få någon instabilitet eftersom vi endast betraktar de system som är stabila.

Det återstår således två fall.

Nämligen att den adaptiva delen måste stabilisera sig själv innan  $\alpha$  går mot noll, vilket Marsík också påpekar i ett försök att påvisa stabilitet. Det andra fallet, som vi här har för  $G_1$  och med steg som insignal, är att förstärkningen tvingas växa över alla gränser för att reglerfelet ska gå mot noll.

Av ( $\dagger$ ) ser vi att jämviktskriteriet blir

$$\int_0^T y^2 dt = \int_0^T y_R y dt$$

där

$$T \rightarrow +\infty$$

Detta kan vi även uttrycka som

$$\alpha(\infty) = \alpha(0)$$

enligt ovan.

Reglerfelet

$$e = y_R - y$$

gör att vi kan skriva detta som

$$y^2 = (y_R - e)^2 = y_R^2 - 2y_R e + e^2$$

$$y_R y = y_R (y_R - e) = y_R^2 - y_R e$$

Vi får alltså ett stabilitetskriterium

$$\int_0^{\infty} e^2 dt = \int_0^{\infty} y_R e dt$$

uttryckt i reglerfelet och referenssignalen

För  $G = G_1$  gäller

$$y = \frac{G_1 \alpha}{1 + G_1 \alpha} y_R$$

och

$$e(s) = \frac{1}{s(1 + \alpha G_1(s))} = \frac{s+1}{s(s+1+\alpha)}$$

Inverstransformen ger för felet

$$e(t) = \frac{1}{1+\alpha} [1 + \alpha \cdot e^{-(1+\alpha)t}]$$

vilket ger att

$$\int_0^{\infty} y_R e dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\alpha} (1 + \alpha e^{-(1+\alpha)t}) dt$$

vilket genast ger att  $\alpha$  går mot oändligheten för att jämviktskriteriet ska vara uppfyllt. Detta ses kanske enklast m h a slutvärdesteoremet. Vi har att  $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$  med  $G(s) = (s+1)^{-1}$ . Med steg som insignal  $W(s) = s^{-1}$  får vi  $Y(s) = \alpha / (s)(s+\alpha+1)$  varför

$$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha}{s+\alpha+1} = \frac{\alpha}{\alpha+1}$$

och eftersom  $y$  och  $x$  konvergerar mot 1 så måste  $\alpha$  gå mot oändligheten.

Låt oss nu betrakta

$$G(s) = G_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

men för en puls som insignal:

$$w(t) = \theta(t) - \theta(t-1)$$

Som innan erhåller vi

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u & ; \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1 \\ \dot{\alpha} = \lambda \cdot x \cdot u & ; \quad \alpha(0) = 1, \quad \dot{\alpha}(0) = 0 \\ u = \alpha \cdot w - \alpha x & ; \quad u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = -1 \end{cases}$$

Först betraktar vi intervallet  $0 \leq t \leq 1$  där  $w = 1$ .

Vid  $t = 0$  är  $\dot{\alpha}(0) = 0$ . Vi antar att  $\alpha$  ändrar sig långsamt (i jämförelse med exempelvis tillståndet  $x$ ) och gör approximationen

$$\alpha_1(t) = \text{konstant} = 1$$

vilket vi nu låter gälla för  $0 \leq t \leq 1$ . För att få någon uppfattning om  $\alpha$  gör vi samma sak som vid steg som insignal och erhåller

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$$

$$u_1(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})$$

$$\alpha_2(t) = \frac{1}{16}(4t + e^{-4t} + 15)$$

som vi alltså framtagit ur

- $w = 1 = \text{konstant}$ ,
- $\alpha = 1$ ,  $\alpha$  antages ändra sig långsamt,
- $x$  och  $u$  löses då  $\dot{\alpha} = 0$  med villkoret  $u + x = 1$ ,
- Av  $x$  och  $u$  bildas  $\dot{\alpha} = x \cdot u$  varur
- $\alpha$  löses m a p ekvationerna och begynnelsevärdena.

Detta är ett exempel på den approximation vi nödgas göra.

För  $t \geq 1$  är  $w = 0$  vilket ger

$$\dot{x} = -x + u$$

$$\dot{\alpha} = \lambda \cdot x \cdot u$$

$$u = -\alpha \cdot x$$

Som tidigare sätter vi nu  $\alpha = \text{konstant} = \alpha_2(1)$  enligt ovan vilket ger

$$\dot{x}_1(t) + (1 + \alpha(1)) \cdot x = 0$$

med lösningen

$$x_1(t) = \zeta e^{-(1 + \alpha(1))t} ; \zeta \text{ konst.}$$

eller

$$x_1(t) = x_1(1) e^{(1 + \alpha(1))(1-t)}$$

Slutligen modifierar vi, med ledning av detta, uppförandet för  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} \alpha_2(t) &= \exp \left\{ - \int_1^t x_1^2(1) e^{2(1 + \alpha(1))(1-t')} dt' \right\} \alpha_2(1) = \\ &= \alpha_2(1) \exp \left\{ x_1^2(1) \left[ \frac{e^{2(1 + \alpha(1))(1-t)} - 1}{2(1 + \alpha(1))} \right] \right\} \end{aligned}$$

För  $t \geq 1$  får vi approximativt

$$x(t) = x(1) e^{(1 + \alpha(1))(1-t)}$$

$$u(t) = -\alpha(t) x(1) e^{(1 + \alpha(1))(1-t)}$$

med  $\alpha(t) = \alpha_2(t)$  enligt ovan

$x$  och  $u$  konvergerar mot noll och  $\alpha$  är begränsad (1.14 mot simuleringens resultat 1.63). Denna approximation ger det prin-

cipiellt rätta uppförandet för  $x$ ,  $u$  och  $\alpha$ . Simuleringens resultat visas i figur 3.3.

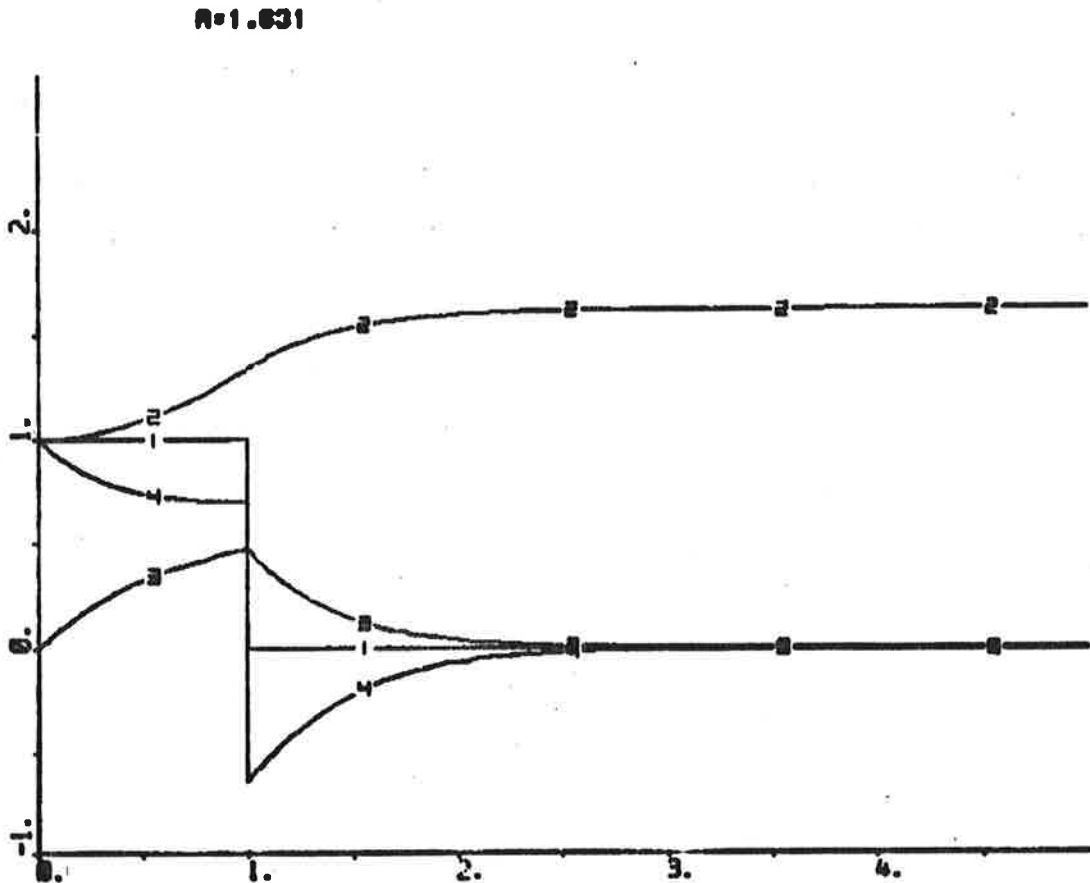


Fig. 3.3 Utseendet av  $w(=1)$ ,  $\alpha(=2)$ ,  $x(=3)$  och  $u(=4)$  för  $G_1(s)$  med en enhetspuls som insignal.

Systemet är stabilt för de  $\alpha(0) > 0$  som vi betraktar. Slutvärdet på  $\alpha$  är hela tiden högre än initialvärdet och skillnaden  $\alpha(\infty) - \alpha(0)$  växer strikt med ökande initialvärden på  $\alpha$ . Stabiliteten är oberoende av initialvärdet på  $\alpha$ .

Vi har att  $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$  med  $G(s) = (s + 1)^{-1}$ . Med puls som insignal  $W(s) = (1 - e^{-s})/s$  får vi

$$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} (1 - e^{-s}) \frac{\alpha}{s + \alpha + 1}$$

Slutvärdesteoremet ger  $x \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow 0$ ,  $\dot{\alpha} \rightarrow 0$ , d v s  $\alpha$  är alltid begränsad.



Låt oss nu se på vårt stabilitetskriterium (sid. 24) för  $G_1(s)$  och med en puls som insignal.

Vi erhåller då

$$Y_R(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$$

$$e(s) = \frac{(s+1)(1 - e^{-s})}{s(s+1+\alpha)}$$

Sätt

$$1 + \alpha = A$$

vilket ger

$$e(s) = \frac{1}{s+A} + \frac{1}{s(s+A)} + \frac{e^{-s}}{s+A} + \frac{e^{-s}}{s(s+A)}$$

eller

$$e(t) = \frac{1}{A} \left\{ \theta(t) - \theta(t-1) + (A-1)(1 - e^{-A})e^{-At} \right\}$$

Integralerna blir

$$\int_0^{\infty} Y_R \cdot e \, dt = \frac{1}{A} \left[ 1 + (1 - e^{-A}) \frac{A-1}{A} (1 - e^{-A}) \right]$$

och

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^2 \, dt &= \int_0^1 e^2 \, dt + \int_1^{\infty} e^2 \, dt = \\ &= \frac{1}{A^2} \left[ 1 - \frac{(A-1)(1 - e^{-A})}{A} \left\{ 2(e^{-A} - 1) - \frac{(A-1)(1 - e^{-A})}{2} \right\} \right] \end{aligned}$$

För stationaritet krävs enligt tidigare

$$\int_0^{\infty} Y_R \cdot e \, dt = \int_0^{\infty} e^2 \, dt$$

Sambandet visas i figur 3.4. Vi ser att kurvorna skär varandra nära minimipunkten för  $\int e^2(t) \, dt$  och därför är  $\alpha$  större än den

förstärkning som svarar mot ett minimum.

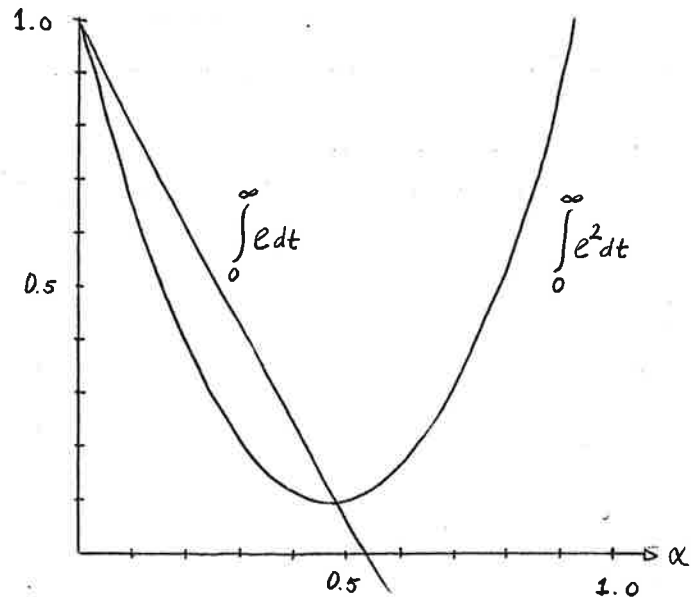


Fig. 3.4 Storleken på integralerna i stabilitetskriteriumet som funktion av förstärkningsparametern  $\alpha$ . Att integralerna är lika är ett nödvändigt men inte tillräckligt villkor för stabilitet. Enligt tidigare är endast värden större än noll på förstärkningen av intresse. I detta fall är även lösningen  $\alpha = 0.464$  instabil.

En algebraisk lösning ger följande likhet:

$$(A - 1)e^{2A} - 2e^A + 7 - 5A + 2(A - 2)e^{-A} = 0$$

med lösningarna ( $\alpha = A - 1$ )

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 && \text{(fysikalisk ointressant)} \\ \alpha_2 &= 0.464 \\ \alpha_3 &= -1 && \text{(--- " --- --- " ---)} \\ \alpha_4 &= -1.3503 && \text{(--- " --- --- " ---)} \end{aligned}$$

Jämför vi nu detta resultat med fasplanet för  $G_1$  (figur 3.5) med puls som insignal finner vi att den enda stationära punkten är  $\alpha_1 = 0$ .  $\alpha_2$  är alltså i någon mening instabil. Fortfarande gäller att om  $\alpha(0) \leq 0$  så är  $\alpha(\infty) = 0$  och om  $\alpha(0) = \alpha_i > 0$  så är  $\alpha(\infty) > \alpha_i$ . Dessutom gäller att  $\alpha(\infty) - \alpha_i$  växer snabbare än vad  $\alpha_i$  gör.

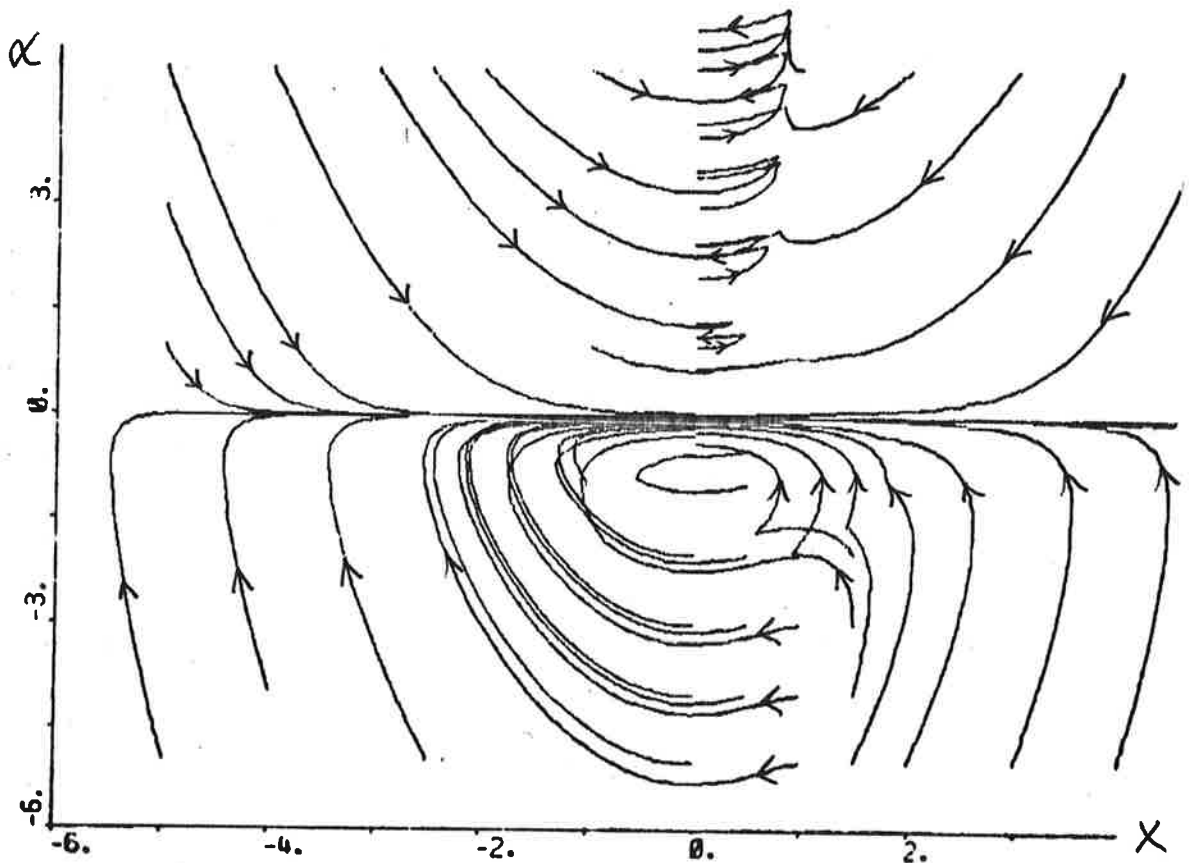


Fig. 3.5 Fasplanet för vår grundkonfiguration med  $G = (s + 1)^{-1}$  och med en enhetspuls som referenssignal.

Vi ska nu även se på en fyrkantpuls som insignal. Resultatet av simuleringen visas i figur 3.6 där vi konstaterar att  $\alpha$  blir instabil.

Om förstärkningen är tillräckligt stor i den adaptiva delen blir systemet instabilt precis som vad gäller med den vanliga proportionella återkopplingen. Vi finner att om  $\alpha$  är för stor kommer detta att resultera i instabila oscillationer. I figur 3.6 är fyrkantpulsens relativt snabb vilket gör att  $\alpha$  kommer att vara utsatt för snabba variationer. Systemet behöver en viss inställningstid varför referenssignalen inte kan tillåtas att variera alltför snabbt, vilket är en allvarlig begränsning hos denna adaptiva regulator.

I figur 3.7 visas uppförandet om referenssignalen är en långsamt varierande sinussignal.

Det visar sig att  $\alpha$ ,  $u$  och  $y$  alla kommer att gå mot noll och systemet kan därför i någon mening sägas vara stabilt, men odugligt

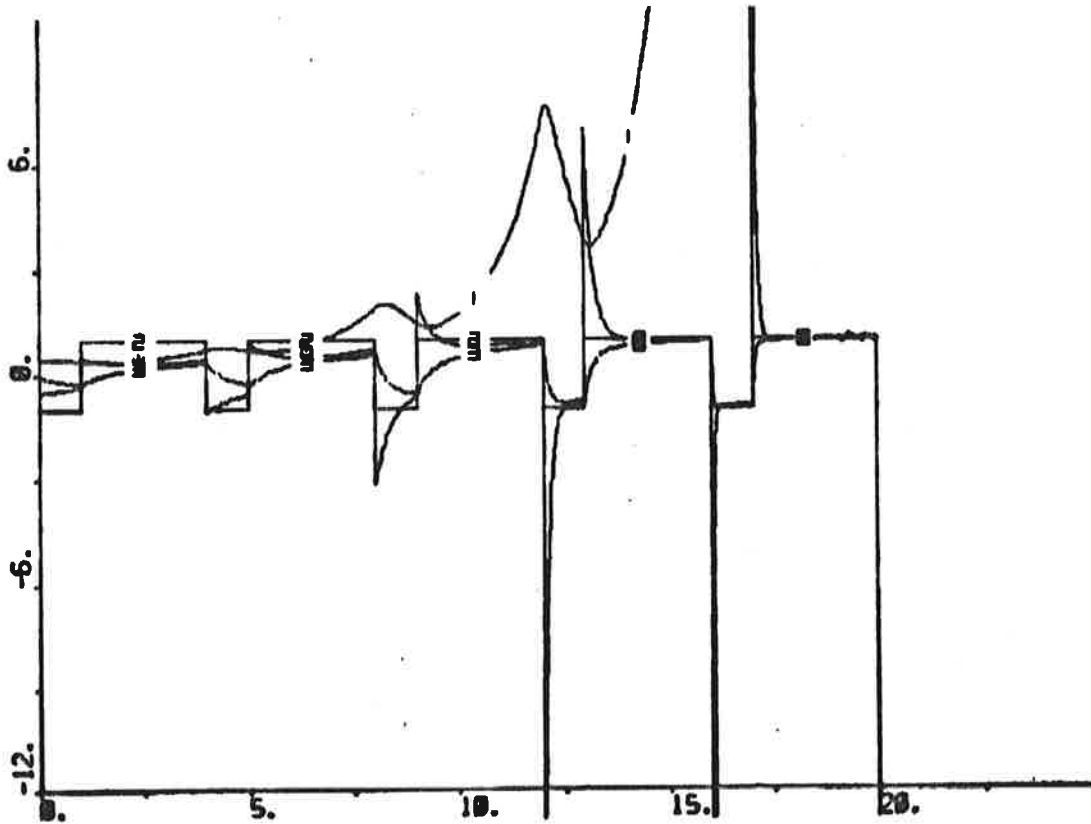


Fig. 3.6 Utseendet av  $\alpha(=1)$ ,  $w(=2)$ ,  $x(=3)$  och  $u(=4)$  för  $G_1(s)$  med en snabbt varierande puls som insignal.

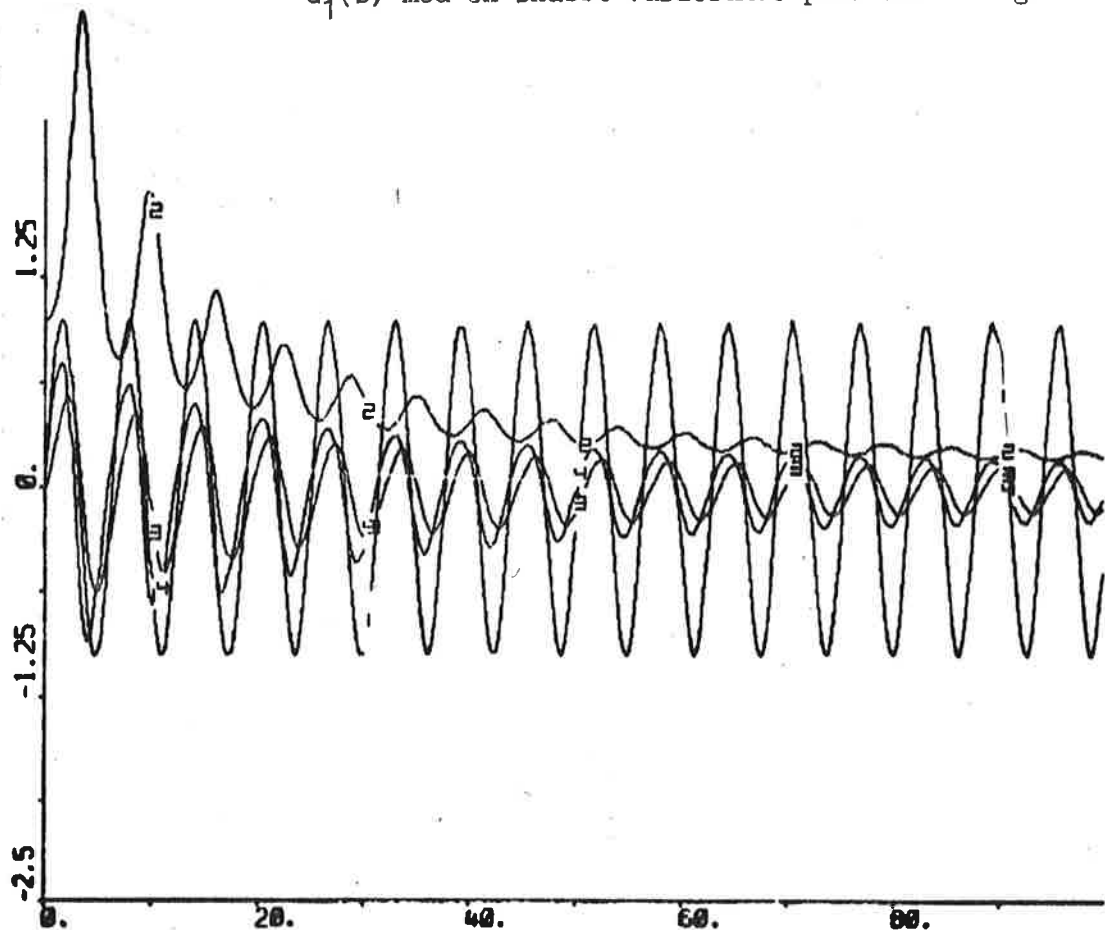


Fig. 3.7 Utseendet av  $w(=1)$ ,  $\alpha(=2)$ ,  $x(=3)$  och  $u(=4)$  för  $G_1(s)$  med sinus som insignal.

som reglersystem.

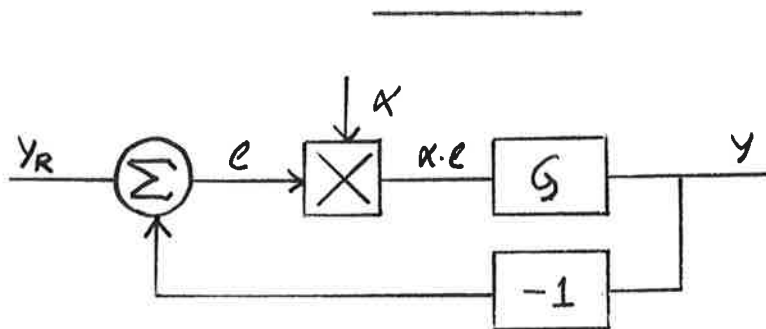


Fig. 3.8 Förenklad grundkonfiguration där  $\alpha$  förutsättes vara långsamt varierande.

Generellt kan vi enklare söka efter stationära lösningar genom följande resonemang.

Betrakta konfigurationen i figur 3.8. Enligt tidigare beskrivs denna av följande ekvationer:

$$e(t) = y_R(t) - y(t)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = k \cdot y \cdot \alpha \cdot e \quad ; \quad k = k(\alpha)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s) \alpha(s) e(s) ds$$

där  $h$  betecknar impulssvaret.

Vår tidigare approximation att  $\alpha$  varierar långsamt ( i förhållande till  $e$  och  $h$ ) kan då skrivas som

$$y(t) \approx \alpha(t) \int_{-\infty}^t h(t-s) e(s) ds$$

Vi önskar nu göra en undersökning av eventuella stationära punkter och konstaterar att  $\alpha = 0$  är ointressant (då detta endast ger en proportionell regulator, som vi i avdelning 2 såg var otillräcklig) samt att en direkt linearisering inte låter sig göras.

Vi har enligt tidigare (sid. 23) för stationaritet följande villkor

$$\overline{y \cdot y_R} = \overline{y \cdot y}$$

med vilket vi betecknar tidsmedelvärde.

Antag nu att  $y_R$  är

$$y_R = A' \sin \omega t$$

För konfigurationen i figur 3.8 gäller

$$Y(S) = \frac{\alpha G(S)}{1 + \alpha G(S)} Y_R(S)$$

För stationaritet kan vi även skriva ovanstående villkor som

$$\int_{-\infty}^{\infty} y y_R dt = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot y dt$$

Enligt Parseval gäller

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F_1(t) F_2(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1(s) F_2(-s) ds$$

varur vi får

$$\frac{\alpha G(S)}{1 + \alpha G(S)} = 1$$

vilket är ekvivalent med följande två villkor som samtidigt måste vara uppfyllda för stationaritet

$$\begin{cases} \left| \frac{G}{\alpha^{-1} + G} \right| = 1 \\ \arg \left( \frac{G}{\alpha^{-1} + G} \right) = 2k\pi, \quad k \text{ heltal} \end{cases}$$

Detta åskådliggörs i figur 3.9 för en typisk frekvenskurva.

Den enda möjligheten blir för alla (intressanta) överföringsfunktioner att  $\alpha$  blir noll för att de båda villkoren ovan ska kunna vara uppfyllda samtidigt.

$\alpha = 0$  är den enda stabila lösningen för  $y_R = A' \sin \omega t$

Detta gäller även om regulatorm förses med en förstärkning ( $<1$ ) i den adaptiva delen eller om filter införes. Några andra stabila lösningar existerar inte för periodiska insignaler.

Vi illustrerar detta med ett antal exempel.

■ För  $G_o = G_1 = (s + 1)^{-1}$  gäller  $(\text{Re } G_o - 0.5)^2 + (\text{Im } G_o)^2 = 0.25$  och inget av villkoren kan uppfyllas.

■ För  $G_o = (s + 1)^{-2}$  gäller

$$\text{Re } G_o = \frac{1 - \omega^2}{(1 + \omega^2)^2} \quad ; \quad \text{Im } G_o = -\frac{2\omega}{(1 + \omega^2)^2}$$

där argumentvillkoret inte kan uppfyllas medan beloppvillkoret blir uppfyllt för  $\alpha$  med ett minsta värde på  $\alpha$  lika med 16.

■ För  $G_o = G_2 = s^{-1}(s + 1)^{-1}$  kan endast beloppvillkoret uppfyllas.

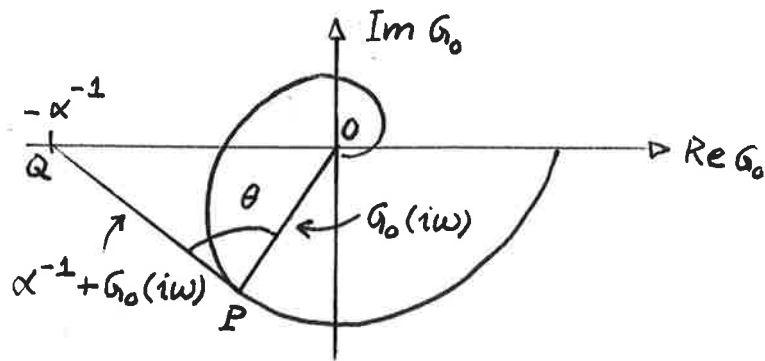


Fig. 3.9 Illustration av en typisk frekvenskurva. För stationaritet krävs att

$$|\vec{OP}| = |\vec{QP}|$$

och

$$-\theta = \arg \frac{G_o}{\alpha^{-1} + G_o} = 2k\pi, \quad k \text{ heltal.}$$

---

Låt oss återvända till  $G_1(s) = (s + 1)^{-1}$ . Enligt tidigare gäller

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ \dot{\alpha} = \lambda \cdot x \cdot u \\ u = \alpha \omega - \alpha x \end{cases}$$

En linjär approximation ger de singulära punkterna

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

vilket ger det lineariserade systemets tillståndsform

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}$$

vilket har egenvärdena 0 och -1. Den linjära approximationen är således stabil men inte asymptotiskt stabil. Lyapunov-Poincarés sats<sup>x</sup> ger således ingenting här och vi har ingen direkt användning av den linjära teorin när vi önskar uttala oss om systemets stabilitetsegenskaper, vilket är i överrensstämmelse med vad som tidigare sagts (som vi sätt växer  $\alpha$  över alla gränser oavsett initialtillståndet ( $\alpha_0 > 0$ )).

Det visar sig svårt att finna en asymptotiskt stabil lösning även för enkla insignaler.

För att i någon mån studera instabiliteten skriver vi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x(1 + \alpha) + \alpha\omega \\ \dot{\alpha} &= \lambda x \alpha \omega - \lambda \alpha x^2 \end{aligned}$$

och ansätter en enkel Lyapunovfunktion, nämligen

---

<sup>x</sup> Om den linjära approximationen  $\frac{d}{dt}(x-x_0) = f_x(x_0)(x-x_0)$  till den olinjära differentialekvationen  $\frac{d}{dt} = f(x)$  i en omgivning till  $x = x_1$  är a.s., så är  $x = x_1$  till den olinjära ekvationen a.s.



$$V = \frac{1}{2}(\alpha^2 + x^2)$$

vilken är positivt definit. Vi erhåller

$$\frac{dV}{dt} = \left( \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dV}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} \right) = -x^2 + \alpha x (\omega - x)(1 + \lambda \alpha)$$

vilken antar positiva värden, nämligen då

$$\omega > x \left( 1 + \frac{1}{\alpha + \lambda \alpha^2} \right)$$

Vi ser på det intressanta fallet  $\alpha$  och  $x$  båda större än noll. Om referenssignalen (vilket vi även kan tolka som en inverkande störning) är sådan att ovanstående olikhet är uppfylld så ger detta instabilitet, vilket är i överrensstämmelse med simuleringarna - systemet är inte globalt asymptotiskt stabilt.

En ytterligare bergänsning är att referenssignalen inte får variera alltför snabbt, vilket gäller även för små amplituder på insignalen.

---

Stabilitetsundersökningen försvåras genom att en lämplig uppdelning i ett olinjärt och ett linjärt system inte är möjlig.

Vi ser på detta för  $G_1(s)$ .

Ekvationerna kan skrivas som

$$\dot{x} = -(1 + \alpha)x + \alpha\omega$$

$$u = -\alpha x + \alpha\omega$$

med olinjariteten

$$\dot{\alpha} = \lambda x u$$

Vi kan skriva detta som

$$W(s)G'(s) = Y(s)$$

med

$$G'(s) = \frac{\alpha(s+1)}{s + \alpha + 1}$$

vilket åskådliggörs i figur 3.10. Den bästa uppdelning i ett linjärt och ett olinjärt system som kan åstadkommas visas i figur 3.11.

Vi har vidare

$$u = \frac{\alpha}{1 + G\alpha} Y_R$$

$$y = \frac{G\alpha}{1 + G\alpha} Y_R$$

varur

$$\dot{\alpha} = \lambda \cdot \frac{\alpha^2 G}{(1 + G\alpha)^2} Y_R$$

För  $G_1$  erhålles

$$G(0) = 1$$

$$u \rightarrow \frac{\alpha}{1 + \alpha} Y_R, \quad s \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow \frac{\alpha}{1 + \alpha} Y_R, \quad s \rightarrow 0$$

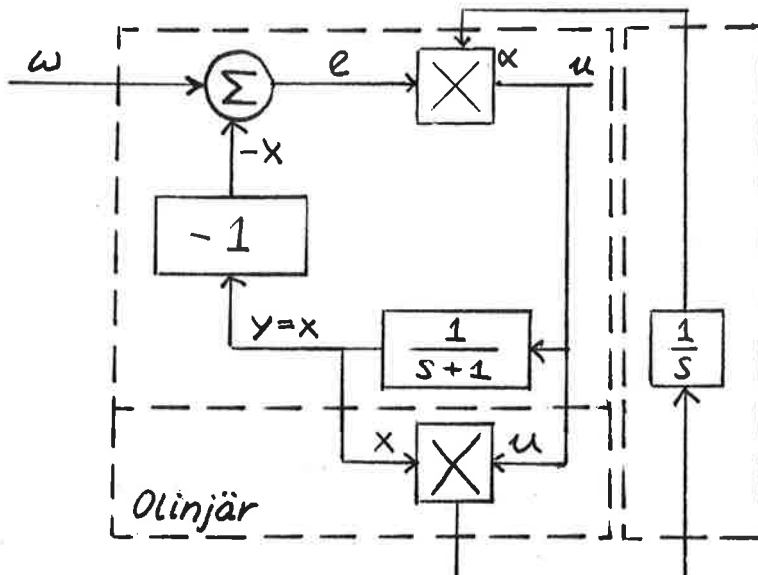


Fig. 3.10 Isolering av olinjariteten för  $G_1(s)$ .

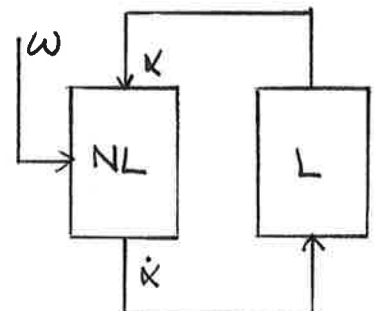


Fig. 3.11 Isolering av olinjariteten otillräcklig.

d v s

$$\dot{\alpha} = \lambda \cdot \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} y_R^2$$

för små  $s$ . Sambandet visas i figur 3.12.

Vi ser här att  $f(\alpha) \cdot \alpha \neq 0$ .  $f(\alpha)$  ligger här i de båda första kvadranterna vilket gör att cirkelkriterierna och Popovkriteriet inte är tillämpbara.

Den enda möjligheten (åtminstone för  $G_1$  som vi explicit visat) är uppenbarligen att  $\alpha \rightarrow 0$  eller att  $\alpha \rightarrow \infty$  (jämför med fasplanet i figur 3.2). ■

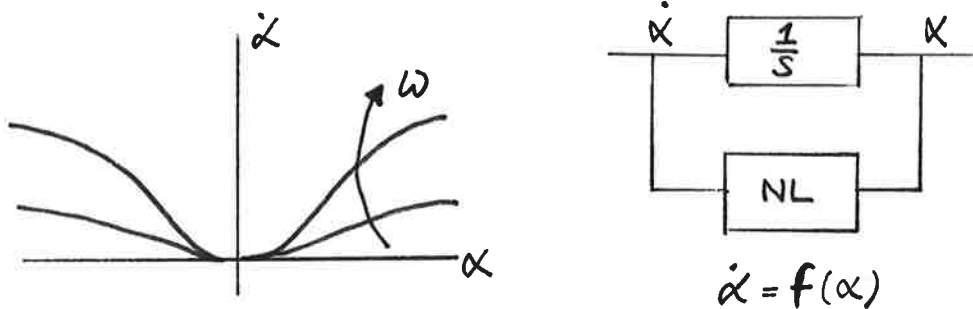


Fig. 3.12 Isolering av den olinjära delen för grundkonfigurationen. Cirkel- och Popovkriterierna är inte tillämpbara.

Mycket av det som sagts i ovanstående analys gäller även för andra system vilket kortfattat påpekats ovan.

Vi övergår till att betrakta

$$G_2(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

som vi tidigare har sett inte har några stabila lösningar för periodiska insignaler (sid. 34). För  $G_2$  gäller

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t) \quad ; \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

Figur 2.1 ger oss med  $w(t) = y_R(t)$  som referenssignal och med

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \end{cases}$$

som tillstånd ekvationerna

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t) \\ \dot{\alpha}(t) = \lambda \cdot x_1(t) \cdot u(t) \\ u(t) = \alpha(t)\omega(t) - \alpha(t)x_1(t) \end{cases}$$

En approximativ analytisk undersökning blir här arbetssam.

Med  $W(s) = s^{-1}$  som referenssignal får vi för felet ( $G = G_2$ )

$$e(s) = \frac{1/G}{s(\alpha + 1/G)} = \frac{s+1}{s^2 + s + \alpha}$$

Även vårt stabilitetskriterium (sid. 24) blir mycket besvärligt att hantera och ger för  $G_2$  inte samma klarhet som för  $G_1$ .

Vi har att

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\alpha}{s(s+1) + \alpha}$$

Slutvärdesteoremet ger

$$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha}{s(s+1) + \alpha} = 1$$

d v s

$$y(t) \rightarrow 1$$

På samma sätt får vi vid en puls som insignal att  $y(t) \rightarrow 0$ .

Resultatet av simuleringarna visas i figur 3.13 för ett steg som insignal och i figur 3.14 för en enhetspuls som insignal.

Till skillnad från  $G_1$  får vi här begränsade värden på förstärkningsparametern  $\alpha$  men å andra sidan ett långsammare in-

svängningsförlopp. Många av regulatorns ofullkomligheter kvarstår dock även för detta system - exempelvis är det känsligt för snabba referenssignaler.

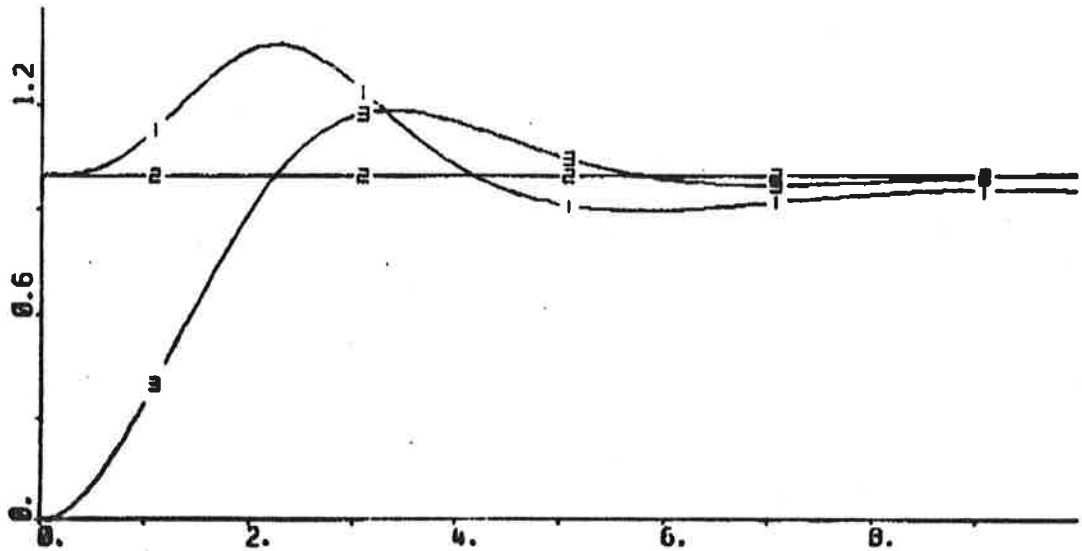


Fig. 3.13 Utseendet av  $\alpha(=1)$ ,  $w(=2)$  och  $y(=3)$  för  $G_2(s)$  med steg som insignal.  $A_{\text{initial}} - A_{\text{final}} \geq 0$  för  $A_{\text{initial}} \geq 1$ .  $\alpha$  svänger in sig mot ett begränsat värde. I figuren:  $A_i = 1$ ,  $A_f \approx 0.949$ .

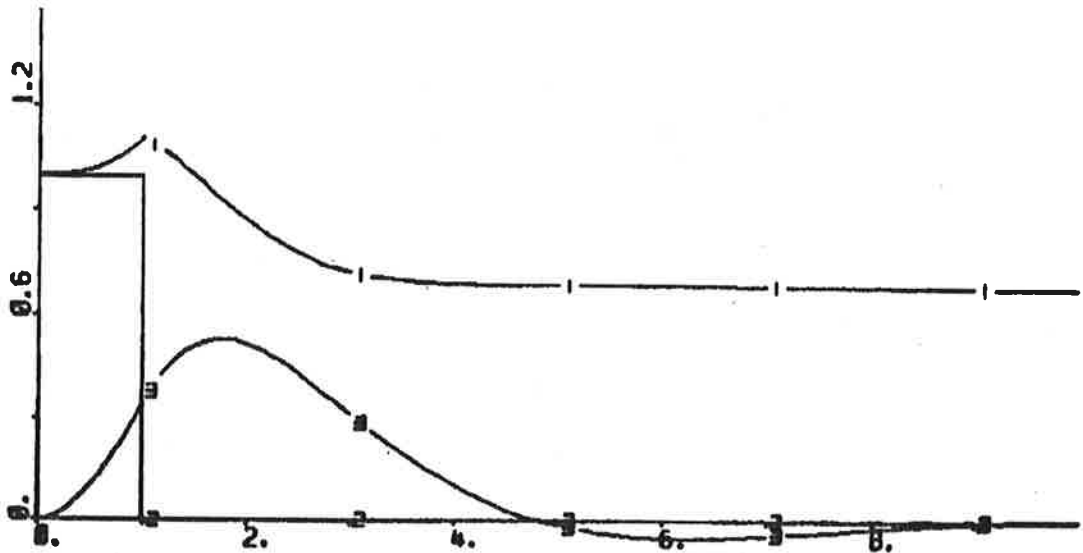


Fig. 3.14 Utseendet av  $\alpha$ ,  $w$  och  $y$  för  $G_2(s)$  med en enhetspuls som insignal.  $A_{\text{initial}} - A_{\text{final}} > 0$  för  $A_{\text{initial}} \geq 1$ . I figuren:  $A_i = 1$ ,  $A_f \approx 0.684$ .

Av ovanstående är det tydligt att det är önskvärt att regulatorm i vår grundkonfiguration i figur 3.1 förbättras. Här föreslås två sådana förbättringar.

Låt oss tillsätta ett högpasfilter till vår grundkonfiguration.

Högpasfiltret i sig har följande egenskaper:

- o Olinjariteten "utjämnas" — Filtret eliminerar medelvärdet av utsignalen som berövas den konstanta komponenten så att dess steady-state värde elimineras,
- o Medverkar endast till det dynamiska uppförandet,
- o Verkar stabiliserande.

Högpasfiltret

$$F = \frac{sT}{1 + sT} = 1 - \frac{1}{1 + sT}$$

filtrerar den del av utsignalen  $y$  som ska multipliceras med insignalen  $u$ .

Vi inför filtrerad utsignal  $y$  som  $z$  genom

$$y F = z$$

d v s

$$y - z = \frac{1}{1 + sT} y = R$$

där  $R$  är en hjälpvariabel.

Vidare får vi

$$\frac{1}{T} (y - z) = \frac{dr}{dt}$$

Filtret införes genom

$$\frac{1}{T} (y - z) = \frac{dr}{dt} \quad \text{och} \quad y - z = r$$

I figurerna 3.15 och 3.16 har filtret använts (med  $T = 1$ ) för  $G_2(s)$  med steg respektive puls som insignal. Kretsen får förbättrade egenskaper genom att systemet blir snabbare.

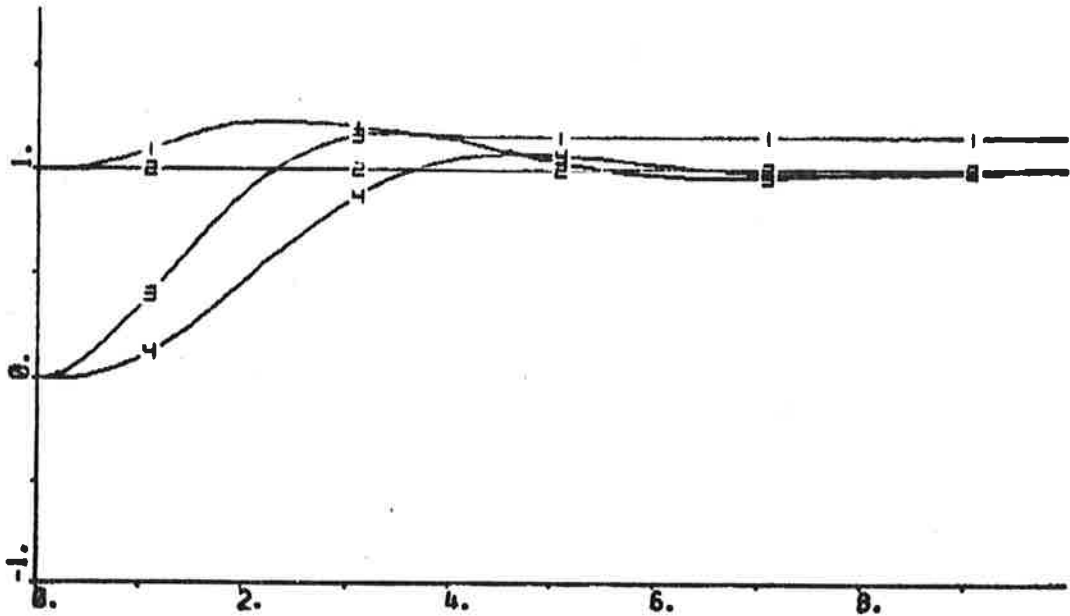


Fig. 3.15 Utseendet av  $x(=1)$ ,  $w(=2)$ ,  $y(=3)$  och  $R(=4)$  för steg som insignal för  $G_2(s)$  försett med högpas-filtret

$$F = \frac{1}{1 + s} .$$

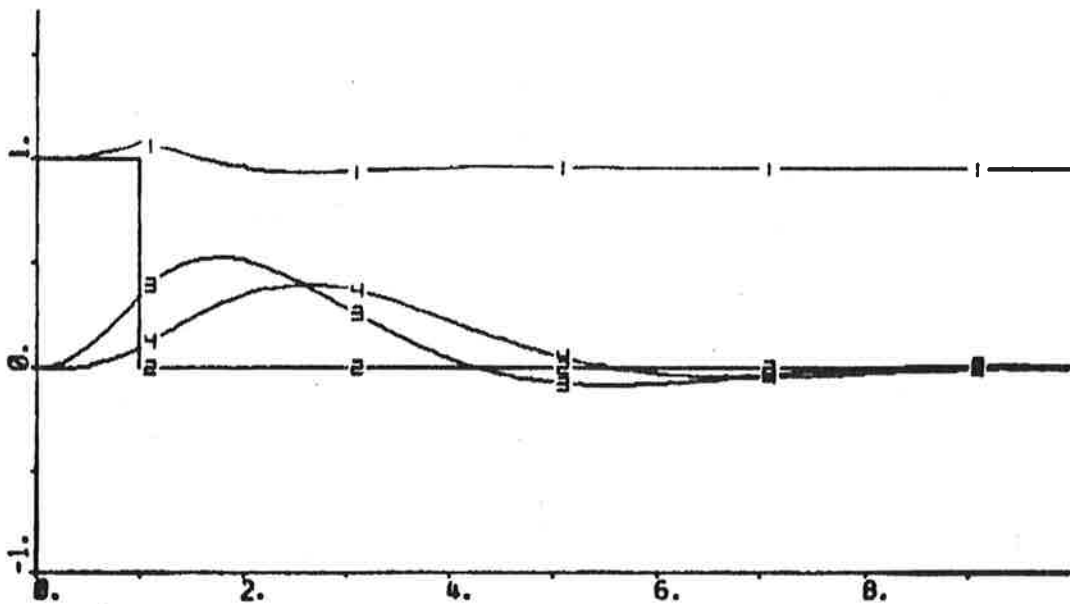


Fig. 3.16 Samma som i figur 3.15 med en puls som insignal.

Från figur 3.17 ser vi att filtret åstadkommer att vi får ett stabilt system -filtret verkar här stabiliserande. Systemet är dock långsamt. Vi försöker därför förbättra vår regulator ytterligare.

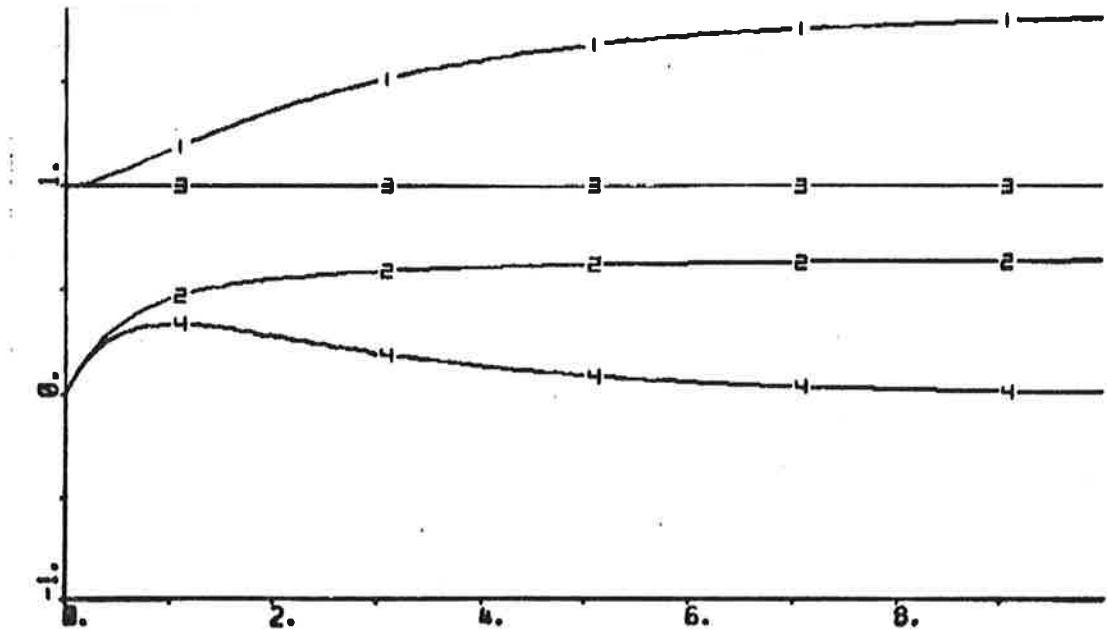


Fig. 3.17 Utseendet av  $\alpha(=1)$ ,  $x(=2)$ ,  $w(=3)$  och  $z(=4)$  för steg som insignal för  $G_1(s)$  försett med högpasfiltret

$$F = \frac{1}{1 + s} .$$

Vi modifierar vår grundkonfiguration genom att derivera utsignalen innan den multipliceras med insignalen; Regulatorn framgår av figur 3.18 där blocket med derivationsoperatören har tillkommit.

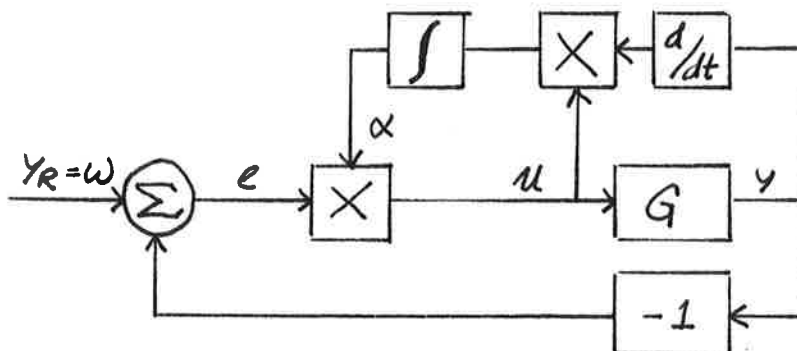


Fig. 3.18 Modifierad grundkonfiguration där blocket med derivationsoperatören har tillkommit jämfört med grundkonfigurationen i figur 3.1.



För  $G_1(s) = (s + 1)^{-1}$  får vi med tillståndet  $x := y$  ekvationerna

$$\dot{x} = -x + u \quad ; \quad x(0) = 0$$

$$\dot{\alpha} = \lambda \dot{x} u \quad ; \quad \lambda = \lambda(\alpha_0) \quad ; \quad \alpha_0 = \alpha(0) \neq 0$$

$$u = \alpha(w - x)$$

med

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \lambda(-x + u) u = \alpha \lambda (-x(w - x) + \alpha(w - x)^2) = \\ &= \alpha \lambda ((1 + \alpha)x^2 - (1 + 2\alpha)xw + \alpha w^2) \end{aligned}$$

Låt  $w = \theta(t)$  vara insignal

$$\dot{\alpha} = \alpha \lambda ((1 + \alpha)x^2 - (1 + 2\alpha)x + \alpha)$$

I figurerna 3.19 och 3.20 visas resultatet av simuleringarna för steg respektive puls som insignal.

Vi ser att för steg som insignal blir  $\alpha$  begränsad med vår modifikation av grundkonfigurationen. För puls som insignal blir systemet snabbare än förut.

Modifikationen påverkar således i detta fall stabiliteten och snabbheten.

Vi söker nu ett stabilitetskriterium analogt med tidigare.

Differentialekvationen för  $\alpha$  är här

$$\dot{\alpha} = \lambda \dot{x} \alpha (\omega - x)$$

med lösning

$$\alpha = \alpha(0) \exp \left[ \lambda \int_0^t \omega \dot{x} dt - \lambda \int_0^t x \dot{x} dt \right]$$

Jämviktskriteriet blir här

$$\int_0^T \gamma_R \dot{y} dt = \int_0^T \gamma \dot{y} dt \quad , \quad \text{där } T \rightarrow \infty$$

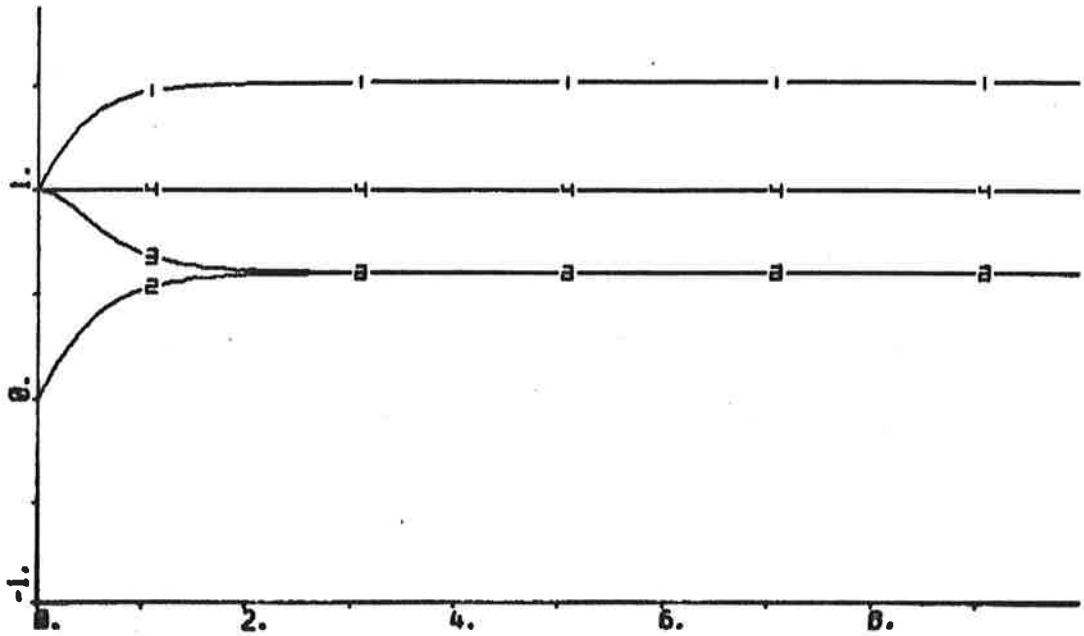


Fig. 3.19 Utseendet av  $\alpha(=1)$ ,  $x(=2)$ ,  $u(=3)$  och  $w(=4)$  för steg som insignal för  $G_1(s)$  med konfigurationen i figur 3.18.

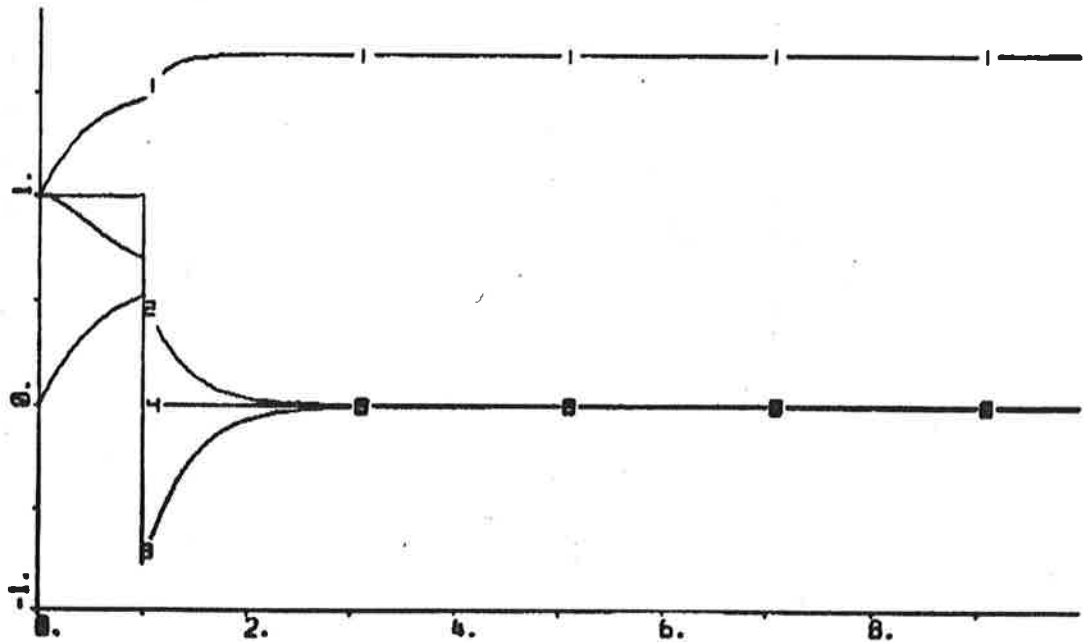


Fig. 3.20 Samma som i figur 3.19 med en puls som insignal.

vilket är ekvivalent med

$$\alpha(\infty) - \alpha(0)$$

Reglerfelet  $e = y_R - y$  ger

$$y_R \cdot \dot{y} = y_R (\dot{y}_R - \dot{e}) = y_R \dot{y}_R - y_R \dot{e}$$

$$y \dot{y} = (y_R - e)(\dot{y}_R - \dot{e}) = y_R \dot{y}_R - y_R \dot{e} - e \dot{y}_R + e \dot{e}$$

vilket ger stabilitetskriteriet

$$\int_0^{\infty} e \dot{e} dt = \int_0^{\infty} e \dot{y}_R dt$$

Reglerfelet blir analogt med tidigare (sid. 24)

$$e(t) = \frac{1}{1+\alpha} [1 + \alpha e^{-(1+\alpha)t}]$$

vilket ger

$$\int_0^{\infty} e \dot{e} dt = \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{1+\alpha} [-e^{-(1+\alpha)t} - \alpha e^{-2(1+\alpha)t}] dt = 0$$

$\alpha$  måste här inte vara oändlig för att kriteriet ska vara uppfyllt.

Vi kan se detta på ett annat sätt.

För stationaritet gäller  $\dot{x} = u$  vilket ger att  $\dot{\alpha} \rightarrow 0$ , d v s om utsignalen  $y$  (=tillståndet  $x$ ) är begränsad (och som här förutsättes mätbar) så måste  $\alpha$  konvergera mot ett begränsat värde. För vår grundkonfiguration måste detta inte vara fallet som vi tidigare sett bevis på.

Vi har

$$x = u = \alpha(w - x) \quad \text{och} \quad \frac{x}{w} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

För steg som insignal har vi  $w = 1$  varför

$$x \rightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{\alpha_f}{1+\alpha_f}$$

Detta erhålles även genom en algebraisk lösning av ekvationerna på sidan 44.

Om utsignalen är begränsad så är även förstärkningsparametern det, vilket är bekvämt att använda vid stabilitetsundersökningar förutsatt att utsignalen är mätbar.

Från figur 3.20 ser vi att ett begränsat värde på  $\alpha$  orsakar att vi får ett stationärt fel. Det stationära felet beror på den enkla överföringsfunktion vi har valt att behandla av enkelhet och klarhet.

En approximativ analytisk undersökning kan här göras utan alltför stora ansträngningar.

För  $G_1(s) = (s + 1)^{-1}$  och med ett positivt enhetssteg som insignal vid tiden  $t = 0$  ger följande initialvärden

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= 1 & ; & & \dot{\alpha}(0) &= 1 \\ x(0) &= 0 & ; & & \dot{x}(0) &= 1 \\ w(0) &\equiv 1 \\ u(0) &= 1 & ; & & \dot{u}(0) &= -1 \end{aligned}$$

Vi har

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + u \\ u &= \alpha(1 - x) \end{aligned}$$

$\alpha_1 = \alpha = 1$  ger

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ u_1(t) &= \frac{1}{2}(1 + e^{-2t}) \\ \alpha_2(t) &= e^{-2t} \frac{1}{2}(1 + e^{-2t}) \end{aligned}$$

Anpassning till begynnelsevärdena ger för  $\alpha$

$$\alpha_2(t) = \frac{1}{8}(11 - 2e^{-2t} - e^{-4t})$$

d v s

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \frac{1}{2} \\ u &\rightarrow \frac{1}{2} \\ \alpha &\rightarrow 11/8 \end{aligned}$$

vilket i stora drag överrensstämmer med figur 3.19.

$\alpha$  är tydligen begränsad, orsakat av att utsignalen deriveras innan multiplikation med insignalen.

---

Låt oss slutligen göra en undersökning för några högre ordningens system med monotona stegsvar med avseende på stabilitetsegenskaper.

Vi betraktar vår grundkonfiguration för

$$G_n = \frac{1}{(s + 1)^n} \quad n = 1, 2, 3 \text{ och } 4$$

Om vi som insignal till  $G_n$  enbart tar ett positivt enhetssteg så blir utsignalen  $y$  för olika  $n$ :

$n$	$y(t)$
1	$1 - e^{-t}$
2	$1 - (1 + t)e^{-t}$
3	$1 - (1 + t + \frac{1}{2}t^2)e^{-t}$
4	$1 - (1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3)e^{-t}$

Detta åskådliggörs i figur 3.21.

Betrakta figur 3.1 och 3.21.  $y$  multipliceras med insignalen, som vi med acceptabel noggrannhet kan sätta lika med ett för små

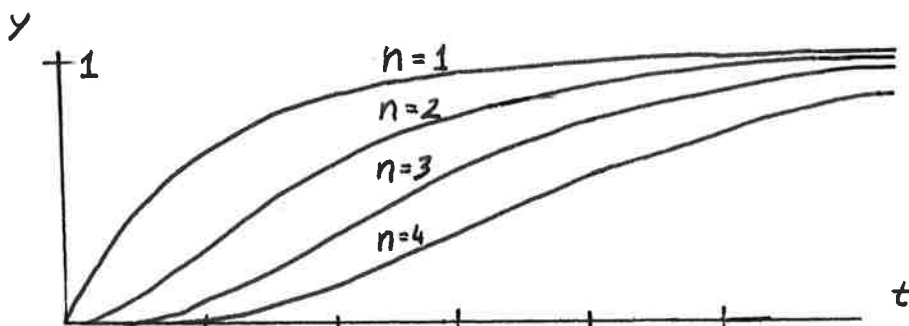


Fig. 3.21  $y(t)$  för ett system med  $G_n$  för olika  $n$  med ett enhetssteg som insignal.

värden på  $t$ . Vi kan jämföra  $y$  i figur 3.21 med  $y$  (kurva 3) i figur 3.22abcd för olika  $n$ . Avvikelsen blir större för högre  $t$  men för små  $t$  kan ovanstående ekvationer tjänstgöra som en god approximation.

För lägre ordningens system växer  $\alpha$  snabbare ty  $\int y \cdot u \, dt$  blir fortare stor och ett snabbt varierande  $\alpha$  orsakar instabilitet. Höga  $n$  ger ett mer långsamt varierande  $\alpha$ . Vi ska snart se konsekvenserna av detta.

I figur 3.23 (som är en utvidgning till 3.22b) ser vi att för  $n = 2$  blir  $\alpha$  ej begränsad (vilket, som vi tidigare har sett, även gäller för  $n = 1$ ).  $\alpha$  växer approximativt linjärt. För  $n = 1, 2$  växer  $y$  tydligen för snabbt för att  $\alpha$  ska bli begränsad.

För högre värden på  $n$  däremot får vår grundkonfiguration ett annat funktionssätt.

När  $\alpha$  blir tillräckligt hög (12 för  $n = 3$ , 5 för  $n = 4$ ) uppstår oscillationer. I figur 3.24ab visas uppförandet för  $n = 3$  där förstärkningen blir starkt oscillativ, men begränsad. I figur 3.25ab visas motsvarande för  $n = 4$  — det uppstår en stabil periodisk lösning för  $\alpha$ .

I figurerna 3.22abcd (sid. 50) ges motsvarande datorprogram varur tillståndsformen framgår.

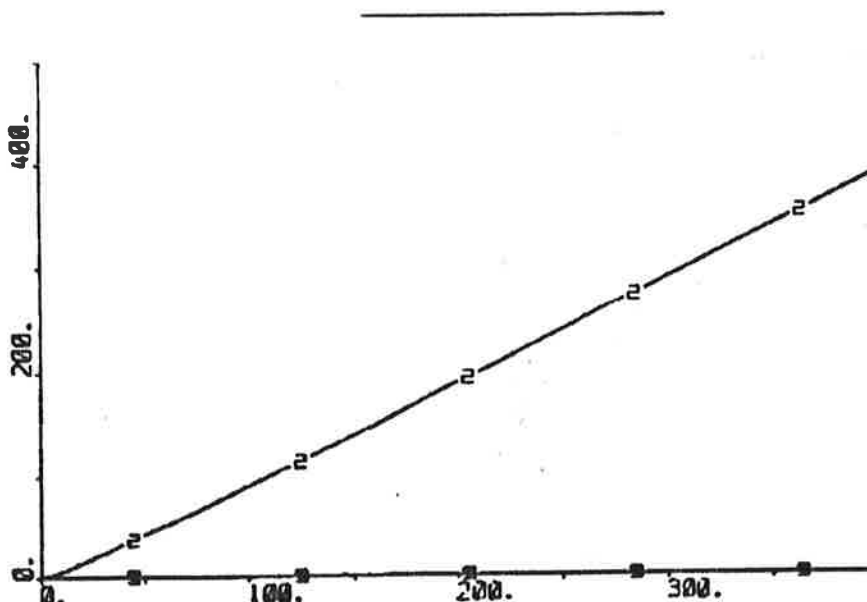
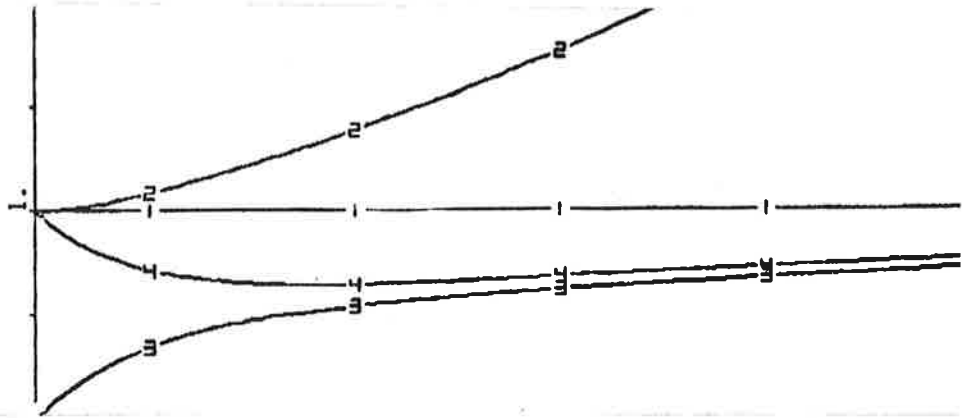


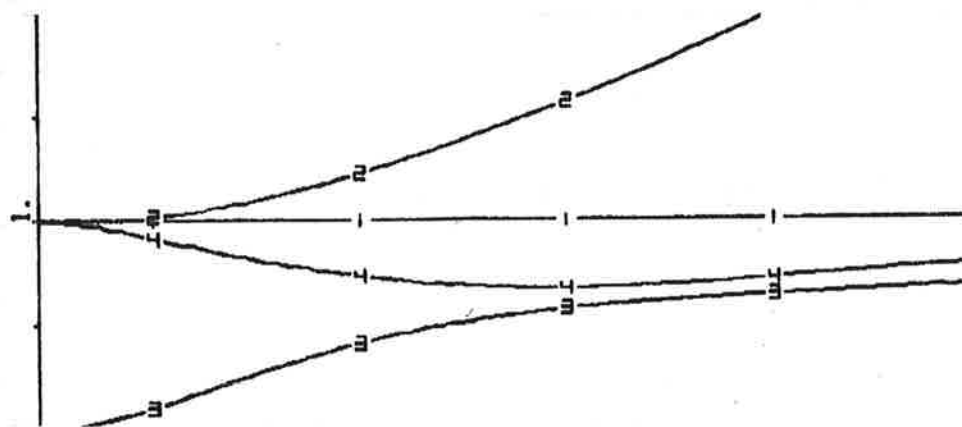
Fig. 3.23 Förstärkningen  $\alpha$  för  $n = 2$  med steg som insignal, växer obegränsat, approximativt linjärt.



```

CONTINUOUS SYSTEM ADA1
STATE X A
DER DX DA
TIME T
V=IF T<0 THEN 0 ELSE 1
U=A*V-A*X
DX=-X+U
DA=X*U
END
    
```

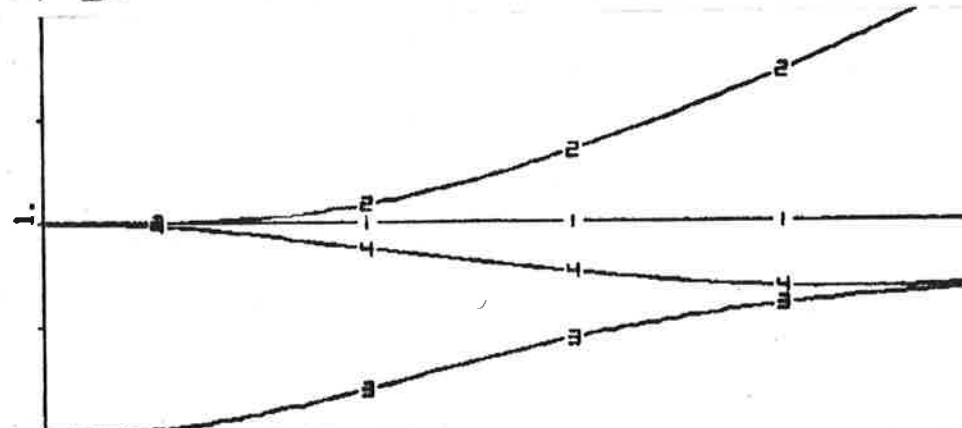
Fig. 3.22a n=1



```

CONTINUOUS SYSTEM ADA2
STATE X1 X2 A
DER DX1 DX2 DA
TIME T
V=IF T<0 THEN 0 ELSE 1
U=V*A-X2*A
DX1=-X1+U
DX2=-X2+X1
DA=X2*U
END
    
```

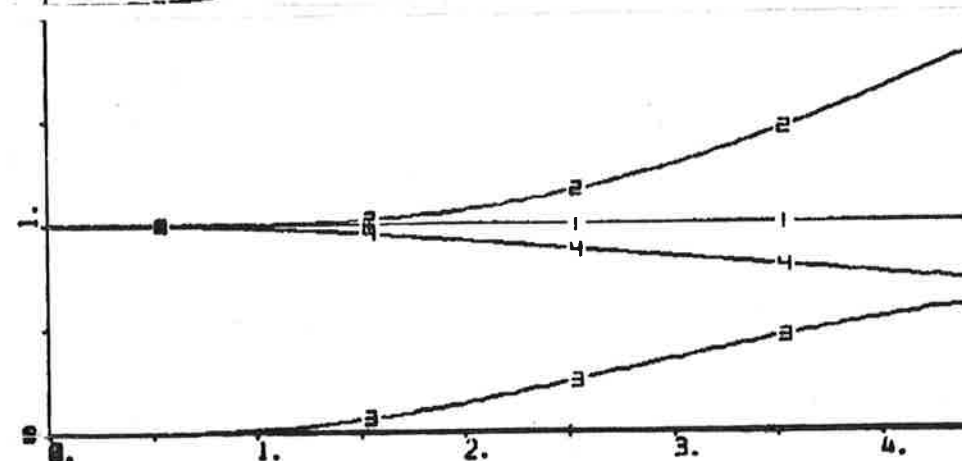
Fig. 3.22b n=2



```

CONTINUOUS SYSTEM ADA3
STATE X1 X2 X3 A
DER DX1 DX2 DX3 DA
TIME T
V=IF T<0 THEN 0 ELSE 1
U=V*A-X3*A
DX1=-X1+U
DX2=-X2+X1
DX3=-X3+X2
DA=X3*U
END
    
```

Fig. 3.22c n=3



```

CONTINUOUS SYSTEM ADA4
STATE X1 X2 X3 X4 A
DER DX1 DX2 DX3 DX4 DA
TIME T
V=IF T<0 THEN 0 ELSE 1
U=V*A-X4*A
DX1=-X1+U
DX2=-X2+X1
DX3=-X3+X2
DX4=-X4+X3
DA=X4*U
END
    
```

Fig. 3.22d n=4

Fig. 3.22abcd Uppförandet av  $w(=1)$ ,  $\alpha(=2)$ ,  $y(=3)$  och  $u(=4)$  för  $G_n = (s + 1)^{-n}$  för  $n = 1, 2, 3$  resp 4 med ett  $n$  steg som insignal för grundkonfigurationen.

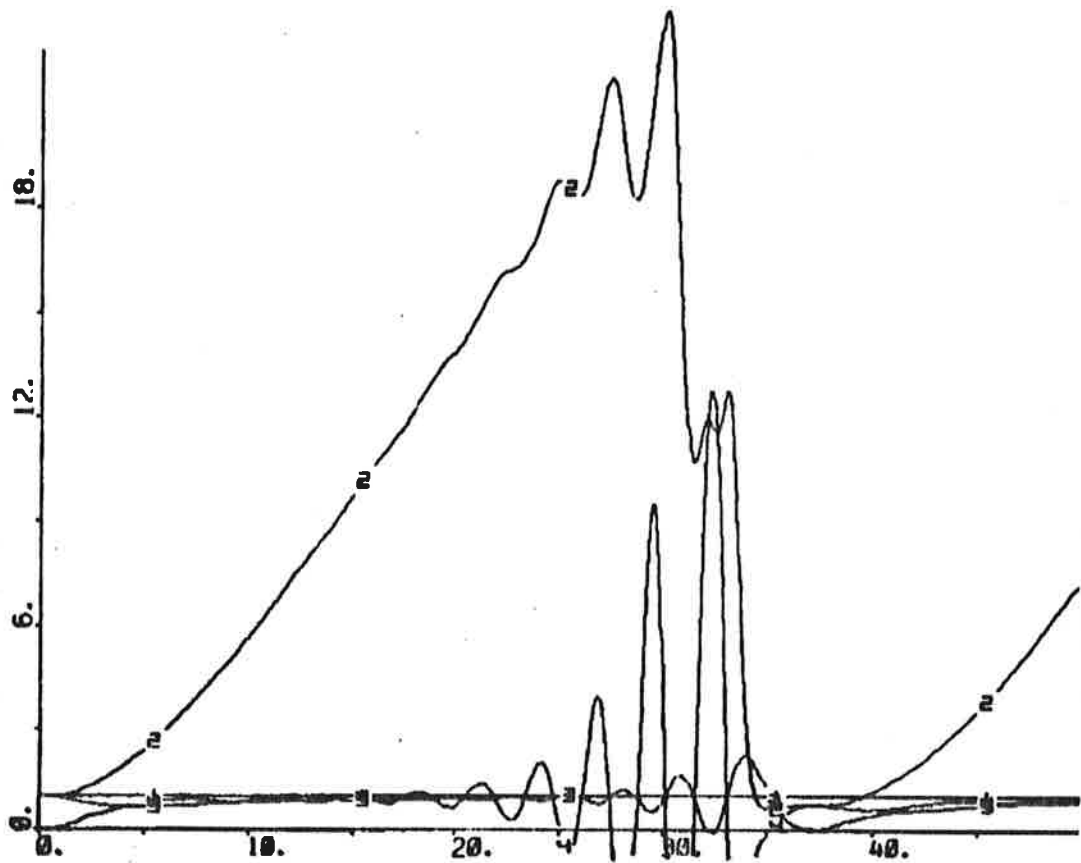
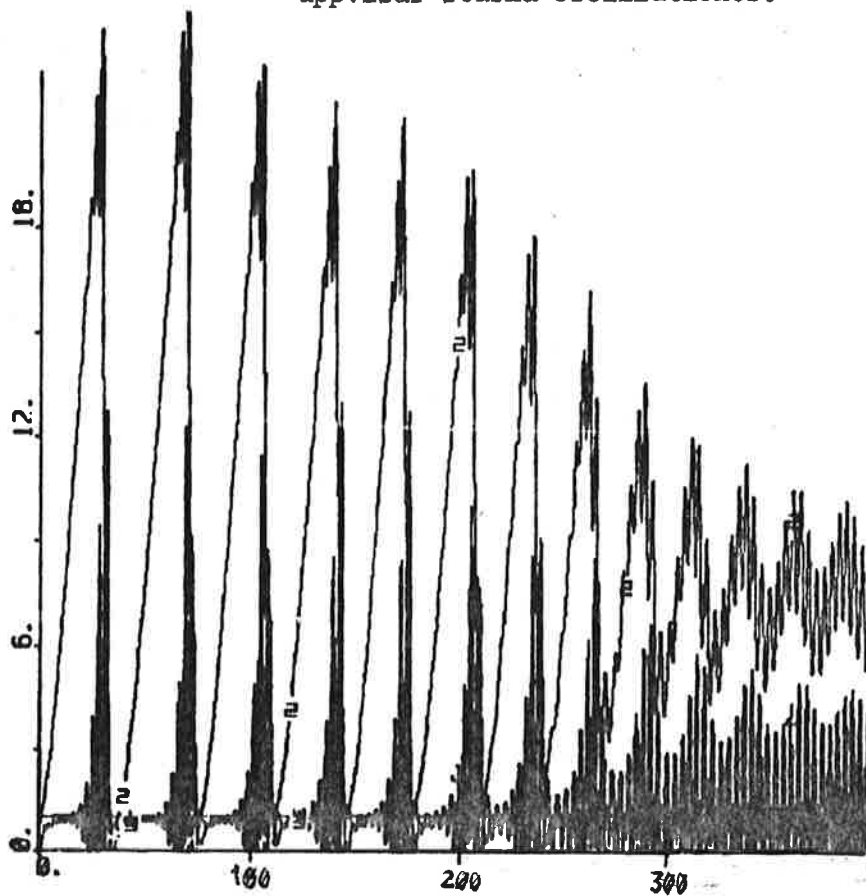


Fig. 3.24ab Uppförandet av  $w(=1)$ ,  $\alpha(=2)$ ,  $y(=3)$  och  $u(=4)$  för  $n = 3$  med steg som insignal.  $\alpha$ ,  $y$  och  $u$  uppvisar starka oscillationer.





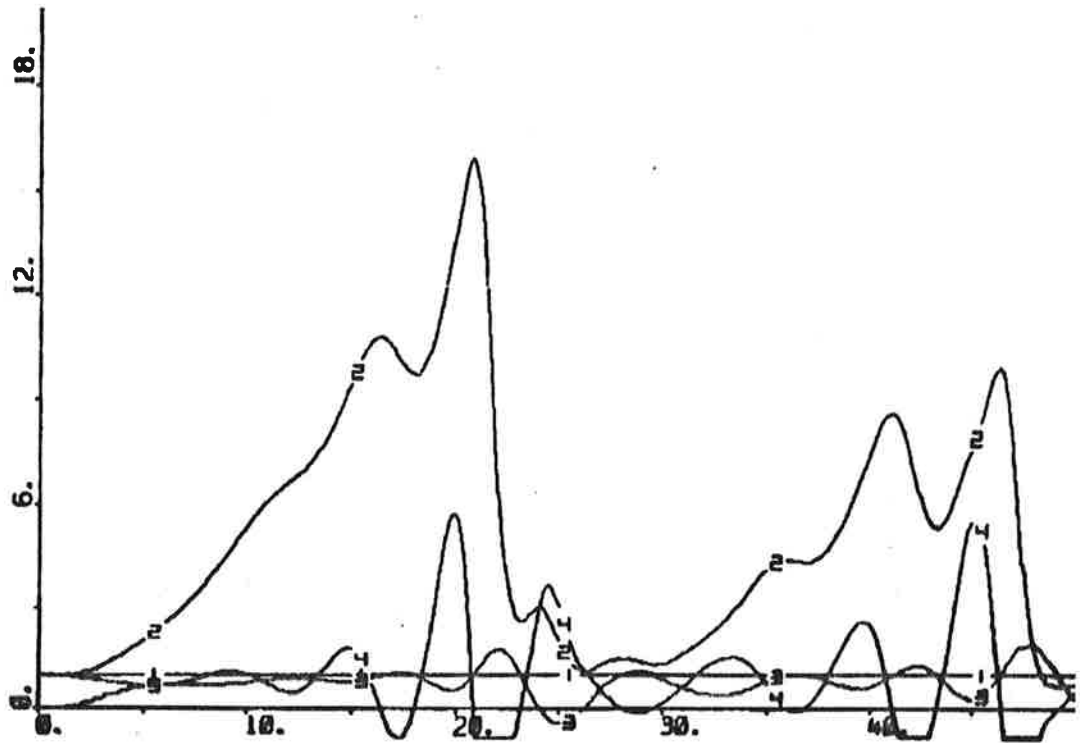
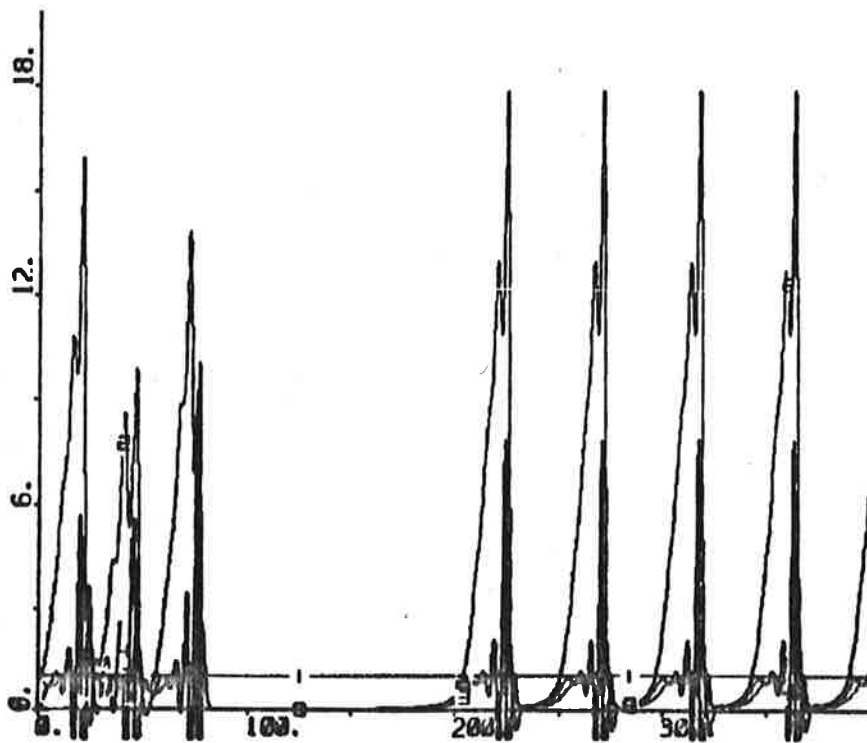


Fig. 3.25ab Som i figur 3.24 för  $n = 4$ . Förstärkningen blir stabil periodisk.



Sammanfattningsvis har vi funnit att grundkonfigurationen är dålig för låga ordningens system och känsligt för snabbt varierande insignaler.

Förbättrande egenskaper erhålles genom att filtrera eller derivera utsignalen innan den multipliceras med insignalen.

För kontinuerligt periodiska insignaler existerar inga lösningar underkastade stationaritet.

#### 4 MODELLREFERENSMETODEN

Den första MRAS (Modell Referens Adaptiva System) utvecklades av Whitaker vid MIT. Det huvudsakliga målet var att erhålla ett adaptivt servo för ett kontinuerligt tidsproblem. MIT-regeln (varom mer senare) användes i den ursprungliga MRAS (1959). MIT-regeln kunde visas orsaka instabilitet med enkla insignaler. Ett stort steg framåt togs när Parks (1966) visade att Lyapunov's stabilitetsteori kunde användas för att erhålla en modifierad justeringsregel som garanterade stabilitet. Modifikationen bestod i att ersätta modellfelet och känslighetsderivatorna i MIT-regeln med filtrerade signaler. Ytterligare justeringsregler utvecklades med Lyapunov's stabilitetsteori och Popovs hyperstabilitetsteori. Mer sofistikerade arbeten gjordes av Monopoli, Johnson, Narendra, Landau m.fl.

I MRAS ges de dynamiska specifikationerna i form av en referensmodell som anger sig om hur processens utsignal idealiskt ska svara på en ändring i kommandosignalen. Referensmodellen är en del av reglersystemet.

I figur 4.1 visas ett allmänt blockschema för MRAS, där  $y$  betecknar utsignal,  $u$  insignal,  $u_M$  kommandosignal,  $y_M$  referens-

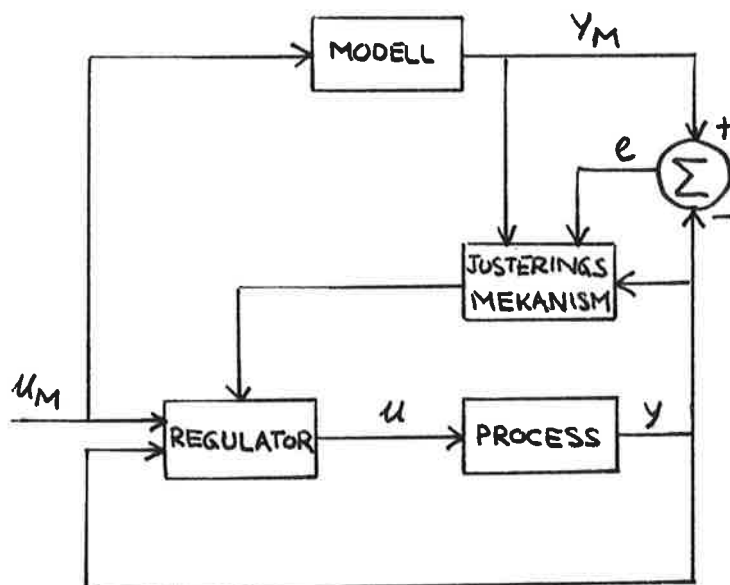


Fig. 4.1 Blockschemata för MRAS.

signalen och  $e$  felet:  $e = y_M - y$ .

Den vanliga kontrollslingan innefattar processen och regulatorn.

Justeringarna sker även i den adaptiva slingan som försöker förändra regulatorparametrarna på så sätt att felet mellan modellens utsignal  $y_M$  och processens utsignal  $y$  blir liten. Huvudproblemet är att bestämma justeringsmekanismen så att ett stabilt system, som gör att felet konvergerar mot noll, erhålles. Detta visar sig vara ett icke-trivialt problem. I avdelning 2 visades att det är olösbart med en vanlig linjär återkoppling från felet till kontrollparametrarna. Inte heller en PI-regulator ger någon lösning.

En mer lättåskådlig konfiguration ges i figur 4.2 där vi använt samma beteckningar som i figur 4.1.

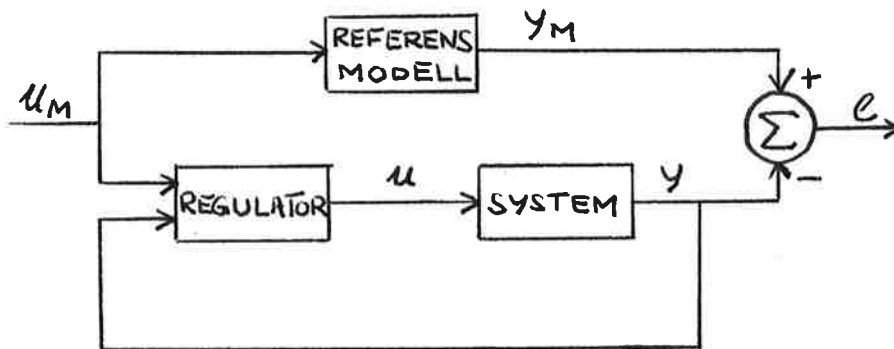


Fig. 4.2 Blockschemat för MRAS. Servoproblemet består i att finna en återkoppling så att  $y = y_M$  vid en ändring i kommandosignalen. Förutom att felet  $e$  ska konvergera mot noll ska även parameterfelen göra så.

Vidare kan stabiliteten för det adaptiva stegsvaret sägas vara ett grundläggande krav för regulatorn om den ska användas för en mer generellt varierande "förstärkning" för systemet - vi ska senare återkomma till detta.

Vi ska behandla några angreppssätt för olika formuleringar av servoproblemet.

Matematiskt kan vi formulera problemet som (om förstärkningen är lika och om vi sätter  $u = u_M$ ):

System:  $y(t) = \frac{B(p)}{A(p)} u(t)$

Modell:  $y_M(t) = \frac{B_M(p)}{A_M(p)} u(t)$

Felet  $e$  definieras som

$$e = y_M - y$$

Vidare gäller

$$A_M e = (A - A_M)y - (B_M - B)u$$

Felet ska här konvergera mot noll och problemet är att finna en lämplig regulator.

Då förstärkningen inte är överrensstämmande (och variabel) erhåller vi konfigurationen i figur 4.3 med  $u = u_M$  för enkelhet.

Systemekvationerna kan skrivas som (om polöverskottet är lika med ett, vilket visar sig vara det enklaste fallet att behandla - vi ska senare återkomma till detta och även se på högre polöverskott):

$$x = K_M - K K_c$$

$$\dot{e} = Ae + xuc$$

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n$$

$$q(s) = b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n$$

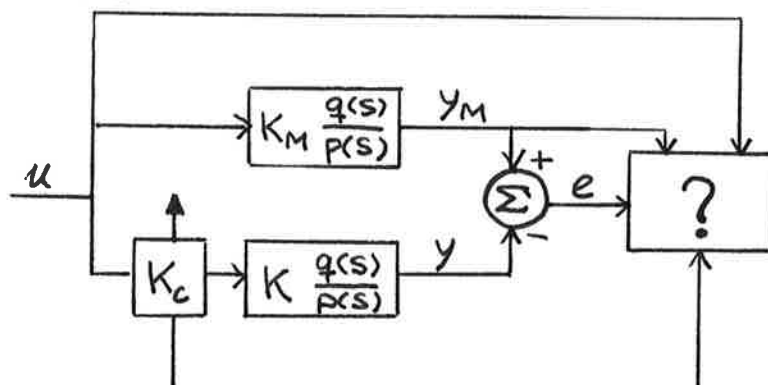


Fig. 4.3 MRAS-problemet. Även ytterligare parameterfel kan behöva justeras om  $q(s)$  och  $p(s)$  ej är lika.

Vi ska här behandla två angreppssätt.

### MIT-regeln

Vi betraktar kvantiteten

$$I(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^t e^2(\theta) dt$$

där  $e$  beror av parametern  $\theta$  som kan ändras från ett värde till ett annat. När regeln utarbetades gjordes ett val att minimera  $e^2$ .

Vi har

$$\frac{dI(\theta)}{d\theta} = \int_0^t e(\theta) \cdot \frac{\partial e(\theta)}{\partial \theta} dt$$

Uttrycket

$$e \cdot \frac{\partial e}{\partial \theta}$$

är just ett uttryck för gradienten.  $\theta$  ska här ändras så att felet  $e = e(\theta)$  ändras i en riktning motsatt gradientens. Enligt detta enkla och heuristiska resonemang leds vi till MIT-regeln

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -B \frac{\partial e}{\partial \theta} \cdot e \quad \text{där } B \text{ är en positiv konstant}$$

alternativt

$$\frac{dv_i}{dt} = -B \frac{\partial e}{\partial v_i} \cdot e \quad i = 1, \dots, n$$

där  $v_1, \dots, v_n$  är föränderliga parametrar,  $e = y_M - y$  felet,  $\partial e / \partial v_1, \dots, \partial e / \partial v_n$  känslighetsderivator och  $B$  en konstant parameter.

Regeln ger en parameterjusteringsmekanism som består av tre delar: ett linjärt filter för att beräkna känslighetsderivatorna från processens in- och utsignaler, en multiplikator samt en integrator. Denna konfiguration är typisk för många adaptiva system.

MIT-regeln visar sig dessvärre leda till svåra analysproblem även för enkla system och insignaler samt dessutom en möjlig risk för instabilitet (se exempel 4:2).

Lyapunov's stabilitetsteori

Teorin baserar sig i detta sammanhang på det adaptiva stegsvaret.

Generellt använder metoden Lyapunovfunktioner för differentialekvationerna för modell — system-felet samt sådana termer som är kvadrater av parameterdifferenserna, d v s

$$V = e^T P e + \lambda x^2 \quad , \quad x \text{ skalär, } e \text{ vektor}$$

där  $e$  betecknar tillstånd i felekvationerna och  $x$  parameterfel.  $P$  kan skrivas på observerbar tillståndsform (se exempel 4:4 och 4:5):

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

Användandet av derivator av felet i fallet med endast initiala fel i förstärkningen kan undvikas om systemet (och därmed även modellen) har positivt reella överföringsfunktioner, d v s endast om samtliga poler och nollställen är kända.

Låt oss först i två exempel pröva den heuristiskt baserade MIT-regeln.

EXEMPEL 4:1

Vi betraktar konfigurationen i figur 4.4.

$K$  är här okänd (och konstant) och  $K_c$  ska justeras så att  $e$

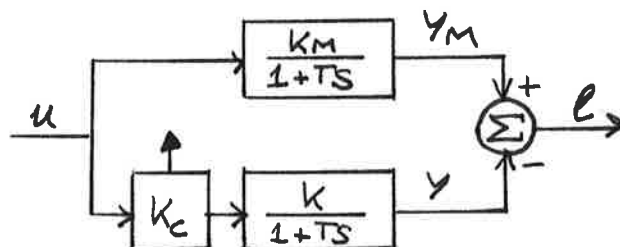


Fig. 4.4 MRAS av första ordningen med polöverskott lika med ett och enbart initiala förstärkningsfel.

konvergerar mot noll samtidigt som  $KK_c$  konvergerar mot  $K_M$ .  
MIT-regeln föreslår då följande regulator

$$\dot{k}_c = -B e \left( \frac{\partial e}{\partial K_c} \right)_K, \quad B \text{ konst} > 0$$

För konfigurationen i figur 4.4 gäller följande ekvationer

$$T\dot{e} + e = (k_M - k k_c)u$$

$$T\dot{y}_M + y_M = k_M u$$

$$e = \frac{(k_M - k k_c)u}{1 + Ts}$$

Vi erhåller

$$\dot{k}_c = B' e y_M \quad ; \quad B' = B \frac{k}{k_M}$$

(jämför exempel 2:1.) För ett steg som insignal erhåller vi här asymptotisk stabilitet:

$$e \rightarrow 0, \quad k k_c \rightarrow k_M$$

Således konvergerar även parameterfelet mot noll. ■

I Exempel 4:2 demonstreras MIT-regelns otillräcklighet.

#### EXEMPEL 4:2

Vi betraktar konfigurationen i figur 4.5.

Samma förutsättningar gäller som i föregående exempel. Här gäller

$$e = \frac{(k_M - k k_c)u}{1 + b_1 s + b_2 s^2}$$

vilket, om  $K$  är konstant, ger känslighetsderivatan

$$\left( \frac{\partial e}{\partial K_c} \right)_K = \frac{-k u}{1 + b_1 s + b_2 s^2}$$



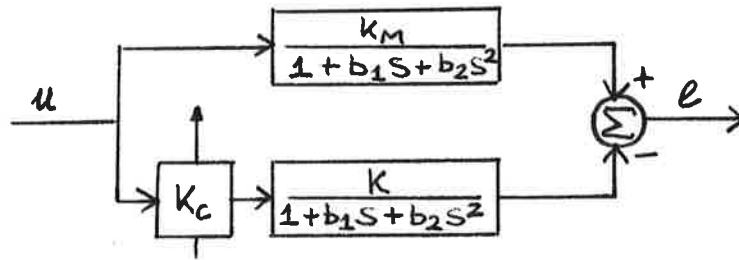


Fig. 4.5 MRAS av andra ordningen med polöverskott lika med två och enbart initiala förstärkningsfel.

MIT-regeln ger då

$$\dot{K}_c = B^1 e y_M \quad ; \quad B^1 = B \frac{K}{K_M}$$

För konfigurationen i figur 4.5 gäller följande ekvationer

$$b_2 \ddot{y}_M + b_1 \dot{y}_M + y_M = K_M u$$

$$b_2 \ddot{e} + b_1 \dot{e} + e = (K_M - K K_c) u$$

För ett positivt steg som kommandosignal erhålles

$$u(t) = \theta(t) \quad ; \quad K_c(t=0) = K_c^0$$

För steady-state gäller

$$y_M \rightarrow K_M \quad ; \quad y \rightarrow K K_c^0$$

Slutes den adaptiva slingan erhålles felekvationen

$$b_2 \ddot{e} + b_1 \dot{e} + e + K^2 B e = 0$$

Routh's stabilitetsalgoritm ger schemat

$b_2$	$1$
$b_1$	$BK^2$
$1 - \frac{K^2 B b_2}{b_1}$	

Instabilitet erhålles då

$$BK^2 > \frac{b_1}{b_2}$$

d v s om  $K$ ,  $B$  eller insignalens amplitud är tillräckligt stor.

■

Fortsättningsvis användes Lyapunov's stabilitetsteori som ett hjälpmedel att erhålla justeringsmekanismen. Teorin har bland annat den fördelen att högre ordningens system blir enklare att analysera.

Låt oss först göra en diskussion kring ett enkelt exempel där vi även ska se vilka inskränkningar som gäller när Lyapunov's stabilitetsteori användes.

EXEMPEL 4:3

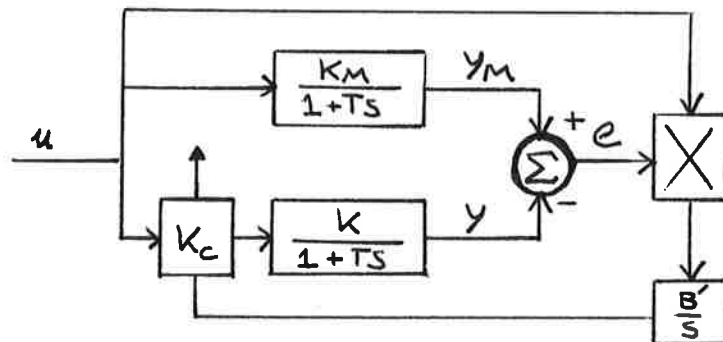


Fig.4.6 Enkel MRAS med positivt reell överföringsfunktion där justeringsmekanismen är erhållen med hjälp av Lyapunovsyntes. Exemplet är detsamma som exempel 2:1 och exempel 4:1.  $K$  är en konstant eller alternativt en parameter som ändras stegvis.

Konfigurationen ges i figur 4.4 och figur 4.6 där justeringsmekanismen framgår.

Figur 4.4 tillsammans med parameterfelet  $x = K_M - KK_C$  och felet  $e = xu/(1 + Ts)$  ger som i exempel 4:1 ekvationerna

$$T\dot{e} + e = Xu$$

$$T\dot{y}_M + y_M = K_M u$$

Här ansätter vi nu Lyapunovfunktionen  $V$ :

$$V = e^2 + \lambda x^2 \quad ; \quad \lambda \text{ konst} > 0$$

där felet  $e$  och parameterfelet  $x$  båda ska konvergera mot noll.

Att ovanstående verkligen är en Lyapunovfunktion ges av

$$\dot{V} = 2e\frac{1}{T}(xu - e) + 2\lambda x\dot{x}$$

vilken är negativt (semi)definit om

$$\dot{x} = -\frac{eu}{\lambda T}$$

Detta ger parameterjusteringen

$$\dot{K}_c = B'e u \quad ; \quad B' = \frac{1}{\lambda T K}$$

vars realisering visas i figur 4.6. Ju större tidskonstant och ju större förstärkning desto långsammare ändringshastighet, vilket är naturligt.

Jämför med (\*) i exempel 2:1 där vi på ett annat sätt erhöll samma styrlag.

Här får vi en negativt semidefinit derivata av Lyapunovfunktionen

$$\dot{V} = -\frac{2}{T}e^2$$

vilket, för exempelvis för ett positivt enhetssteg som insignal ger att

$$e \rightarrow 0 \quad \text{sam} \quad x \rightarrow 0$$

ty med styrlagen (\*) och med  $K > 0$  erhålles felekvationen

$$\ddot{e} + \dot{e} + KB'e = 0$$

vilken är asymptotisk stabil. ■

---

Vid användandet av Lyapunov's stabilitetsteori gäller vissa inskränkningar vilka för exemplet ovan säger att det ej finns någon garanti att styrlagen ger asymptotisk stabilitet för

- o Alla typer av insignaler
- o Störningar

Låt oss se på dessa båda fall för styrlagen i exemplet ovan.

Vi påstår att insignalen

$$u = \begin{cases} e^{-t\lambda} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases} \quad ; \lambda \text{ konstant} > 0$$

orsakar parameterfel för MRAS i exempel 4:3 oavsett valet av  $\lambda$ .

BEVIS

För  $t \geq 0$  gäller (med  $x_1 := e$  och  $x_2 := x$ ) enligt ovan

$$\begin{aligned} T\dot{x}_1 + x_1 &= x_2 e^{-t\lambda} \\ \dot{x}_2 &= -Cx_1 e^{-t\lambda} \quad ; C = \frac{1}{\lambda T} > 0 \end{aligned}$$

Derivering, insättning och omskrivning ger felekvationen

$$\ddot{x}_1 + \left(\lambda + \frac{1}{T}\right)\dot{x}_1 + \left(\frac{1}{T}\lambda + \frac{1}{T}Ce^{-2t\lambda}\right)x_1 = 0$$

vilken har tidsvariabla koefficienter och för vilken vi söker det asymptotiska uppförandet för felet vilket i sin tur gör att vi kan uttala oss om parameterfelet.

Felekvationen är av formen

$$\dot{z} = (R + S(t)) \cdot z$$

där  $R$  är konstant och där  $S \rightarrow 0$  då  $t \rightarrow \infty$ .

Enligt ett lemma<sup>x</sup> existerar lösningarna  $z_1$  och  $z_2$ , korresponderande mot rötterna  $\lambda_1$  och  $\lambda_2$ , till felekvationen som uppfyller

---

<sup>x</sup> Se exempelvis: Bellman, R., Stability Theory of Differential Equations, McGraw-Hill Book Company, New York 1953 (44 f).

$$\alpha_1 \exp\left[\operatorname{Re}(\lambda_k)t - \alpha_2 \int_{t_0}^t B dt\right] \leq z_k \leq \alpha_3 \exp\left[\operatorname{Re}(\lambda_k)t + \alpha_4 \int_{t_0}^t B dt\right]$$

för  $t \geq t_0$  med  $\alpha_n$  ( $n=1, \dots, 4$ ) som positiva konstanter. Om de karakteristiska rötterna är reella och skilda samt om  $\int_{t_0}^{\infty} S dt < \infty$  så existerar lösningarna  $z_k$  ( $k=1, 2$ ) sådana att

$$z_k = e^{\lambda_k t} (\beta_k + o(1)) \quad ; k = 1, 2 \quad , \beta_k \text{ konstant vektor}$$

Detta är uppfyllt av vår felekvation varför lösningarna är begränsade.

Vi låter nu  $t \rightarrow \infty$  varvid erhålles

$$\ddot{x}_1 + \left(\lambda + \frac{1}{T}\right) \dot{x}_1 + \lambda \frac{1}{T} x_1 = 0$$

vars karakteristiska ekvation har rötterna  $-\frac{1}{T}$  och  $-\lambda$ . För  $\lambda T \neq 1$  (och  $T > 0$ ) gäller då asymptotiskt

$$x_1 = C_1 e^{-t/T} + C_2 e^{-t\lambda}$$

vilket konvergerar mot noll för  $t \rightarrow \infty$ .

Tidigare hade vi exakt

$$T \dot{x}_1 + x_1 = x_2 e^{-t\lambda}$$

för vilket vi använder ovanstående asymptotiska uttryck. Därvid erhålles parameterfelet

$$C_2(1 - T\lambda) = x_2 \neq 0$$

Om  $\lambda = \frac{1}{T}$  gäller asymptotiskt för felet

$$x_1 = (C_1 t + C_2) e^{-t/\lambda}$$

vilket konvergerar mot noll. För  $x_2$  erhålles

$$x_2 = T C_1 - C_2(T^2 - 1) + C_1 t(1 - T^2)$$

Om  $x_2$  ska vara begränsad måste det gälla att  $T = 1$ , vilket ger

$$x_2 \rightarrow \text{konst.} = C_1 \neq 0, \quad t \rightarrow \infty$$

Oavsett valet av  $\lambda$  erhålles således ett parameterfel vilket är vad vi skulle visa. ■

Ett annat problem är frågan om störningarnas inverkan. I värsta fall kan dessa orsaka parameterjusteringsmekanismerna att bli instabila eller i varje fall orsaka försämring i uppförandet så att det önskade, snabba, uppförandet i det självjusterande systemet, baserat på stabilitetsteori, förloras.

Antag att insignalen i exempel 4:3 är konstant medan  $K$  är tidsvariabel, t.ex.  $K = 2 + \sin(\frac{1}{2}t)$ . Styrlagen framtagna ovan ger då ej global asymptotisk stabilitet. Då  $K$  är tidsvariabel får man nästan undantagslöst ansätta en annan Lyapunovfunktion.

Det finns vidare begränsningar på justeringshastigheten för att systemet ska bli stabilt - parametrarna får inte variera för kraftigt.

---

Vi ska i några exempel se på fallet med polöverskott större än ett där det är oundvikligt att undvika derivator av felet utom för speciella överföringsfunktioner.

#### EXEMPEL 4:4

I figur 4.3 sätter vi

$$\frac{q(s)}{p(s)} = \frac{1}{s^2 + a_1s + a_2}$$

där  $a_1$  och  $a_2$  är kända. Den karakteristiska ekvationen  $s^2 + a_1s + a_2$  är underkastad stabilitetsvillkoren  $a_1 > 0$  och  $a_2 > 0$ . Som tidigare sätter vi

$$\dot{\bar{x}} = K_M - KK_C$$

där  $K$  är en konstant ( $\bar{x}$  ej att förväxla med  $x$ !).

Vidare gäller

$$K_M u = \ddot{y}_M + a_1 \dot{y}_M + a_2 y_M$$

$$\bar{x} u = \ddot{e} + a_1 \dot{e} + a_2 e$$

Inför vi tillstånden

$$\begin{cases} x_1 = e \\ x_2 = \dot{e} \end{cases}$$

får vi systemekvationerna på observerbar tillståndsform (sid. 58).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{x} \end{bmatrix} u$$

Vi söker här en Lyapunovfunktion till vårt system

$$\dot{x} = A x + B u$$

Det ska därvid gälla för vår Lyapunovfunktion

$$V = x^T P x > 0$$

med  $P$  symmetrisk och konstant.  $u$  är en skalär varför  $u = u^T$ .  
Teorin utsäger då

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (x^T A^T + u B^T) P x + x^T P (A x + B u) = \\ &= x^T (A^T P + P A) x + u B^T P x + x^T P B u = x^T (A^T P + P A) x + 2 x^T P B u \end{aligned}$$

ty

$$(x^T P B)^T = B^T P^T x \quad \text{och} \quad P = P^T$$

Sätter vi

$$A^T P + P A = -Q \quad (*)$$

får vi

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2x^T P B u$$

Praktiskt bestämmer man först en Lyapunovfunktion

$$V = x^T P x$$

för fria systemet ( $u = 0$ ) genom att lösa (\*) för exempelvis  $Q = I$  som vi här väljer. Därefter användes denna Lyapunovfunktion för det styrda systemet,  $V$  bildas och villkor för att  $V$  ska bli negativt (semi)definit sökes.

Löser vi  $A^T P + P A = -I$  erhålles efter en del räkningar

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_1^2 + a_2 + a_2^2}{2a_1 a_2} & \frac{1}{2a_2} \\ \frac{1}{2a_2} & \frac{1+a_2}{2a_1 a_2} \end{bmatrix}$$

och

$$x^T P B = P_2 \bar{x} X_1 + P_3 \bar{x} X_2$$

varför

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_2^2 + 2u(\bar{x} P_2 X_1 + \bar{x} P_3 X_2)$$

Denna är negativt (semi)definit om

$$u = \begin{cases} \text{negativ} & \text{då } \bar{x}(P_2 X_1 + P_3 X_2) > 0 \\ \text{positiv} & \text{då } \bar{x}(P_2 X_1 + P_3 X_2) < 0 \end{cases}$$

där  $u$  är insignalen till vår MRAS.

Vi erhåller således asymptotisk stabilitet för nolllösningen genom reläfunktionen

$$u = -\text{sign} \left\{ (k_M - k k_c) \left( \frac{1}{2a_2} \cdot e + \frac{1+a_2}{2a_1 a_2} \cdot \dot{e} \right) \right\}$$

Som Lyapunovfunktion väljes därför

$$V = \frac{a_1^2 + a_2(1+a_2)}{2a_1 a_2} x_1^2 + \frac{1}{a_2} x_1 x_2 + \frac{1+a_2}{2a_1 a_2} x_2^2$$



Samma resultat erhålles genom en direkt räkning. Derivering ger

$$\dot{V} = -e^2 - \dot{e}^2 + u\bar{x} \left( \frac{1}{a_2} \cdot e + \frac{1+a_2}{2a_1a_2} \cdot \dot{e} \right)$$

Denna kan få positivt definit genom exempelvis att

$$\dot{e}^2 = u\bar{x} \left( \frac{1}{a_2} \cdot e + \frac{1+a_2}{2a_1a_2} \cdot \dot{e} \right)$$

är uppfylld, och härur erhålla ett uttryck på  $\dot{\bar{x}}$  vilket ger  $\dot{K}_c$ . Detta synes dock ge en otillfredsställande och ej lätthanterbar lösning.

I stället prövar vi följande, betydligt enklare, Lyapunovfunktion:

$$V = \alpha e^2 + \beta \dot{e}^2 + \lambda \bar{x}^2 \quad ; \alpha, \beta, \lambda > 0$$

För denna gäller

$$\dot{V} = 2\alpha e\dot{e} + 2\beta\dot{e}[\bar{x}u - a_1\dot{e} - a_2e] + 2\lambda\bar{x}\dot{\bar{x}}$$

För att denna ska bli mindre än noll gör vi valen

$$\alpha = \beta a_2 \quad \text{och} \quad \dot{\bar{x}} = -\frac{\beta}{\lambda} \cdot \dot{e} \cdot u$$

Enligt tidigare gäller

$$\dot{\bar{x}} = -k_c k = -\frac{\beta}{\lambda} \cdot \dot{e} \cdot u$$

vilket ger

$$k_c = \beta' \dot{e} u \quad ; \quad \beta' = \frac{\beta}{\lambda k}$$

#### EXEMPEL 4:5

I figur 4.4 sätter vi

$$\frac{q(s)}{p(s)} = \frac{1}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

Den karakteristiska ekvationen  $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$  är underkastad stabilitetsvillkoren  $a_1, a_3 > 0$  och  $a_1 a_2 > a_3$ .

Som tidigare sätter vi

$$\bar{x} = K_M - K K_C$$

där  $K$  är en konstant. Vidare gäller

$$K_M u = \ddot{y}_M + a_1 \dot{y}_M + a_2 y_M + a_3 y_M$$

$$\bar{x} u = \ddot{e} + a_1 \dot{e} + a_2 e + a_3 e$$

Inför vi tillstånden

$$\begin{cases} x_1 = e \\ x_2 = \dot{e} \\ x_3 = \ddot{e} \end{cases}$$

får vi systemekvationerna på observerbar tillståndsform

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{x} \end{bmatrix} u$$

analogt med exempel 4.4.

Vi ansätter därför

$$V = \alpha e^2 + \beta \dot{e}^2 + \gamma \ddot{e}^2 + \lambda \bar{x}^2 \quad ; \quad \alpha, \beta, \gamma, \lambda > 0$$

För denna gäller

$$\dot{V} = 2\alpha e \dot{e} + 2\beta \dot{e} \ddot{e} + 2\gamma \ddot{e} [\bar{x} u - a_1 \ddot{e} - a_2 \dot{e} - a_3 e] + 2\lambda \bar{x} \dot{\bar{x}}$$

Valen

$$\alpha \dot{e} = \gamma a_3 \ddot{e}, \quad \beta = \gamma a_2 \quad \text{och} \quad -\gamma \ddot{e} u = \lambda \dot{x}$$

ger

$$\dot{V} = -2\gamma \ddot{e}^2 a_1 < 0$$

Villkoren kan skrivas

$$\alpha = -\frac{\lambda \dot{x} a_3}{u \ddot{e}}, \quad \beta = -\frac{\lambda \dot{x} a_2}{u \ddot{e}} \quad \text{och} \quad \gamma = -\frac{\lambda \dot{x}}{u \ddot{e}}$$

Vi har vidare

$$\dot{x} = -K \dot{K}_c = \begin{cases} -B' u \ddot{e} & , B' = \frac{\gamma}{\lambda} \\ -B'' u \ddot{e} & , B'' = \frac{\beta}{\lambda a_2} \\ -B''' u \dot{e} & , B''' = \frac{\alpha}{\lambda a_3} \end{cases}$$

Av detta ser vi två saker. Dels att vi måste välja

$$\gamma a_2 = \beta$$

och dels att följande val är tvunget av fysikaliska skäl

$$\gamma a_3 \neq \alpha$$

Detta ger följande villkor

$$\beta a_3 \neq \alpha a_2$$

Om likhet gäller erhålles  $\dot{e} = \ddot{e}$ , vilket är orimligt. Den enda konsekvens detta får att det finns två möjligheter av vårt val av ändringshastigheten hos  $K_c$ :

$$\dot{K}_c = G_1 u \dot{e} \quad \text{och} \quad \dot{K}_c = G_2 u \ddot{e}$$

En realisering av detta visas i figur 4.7.

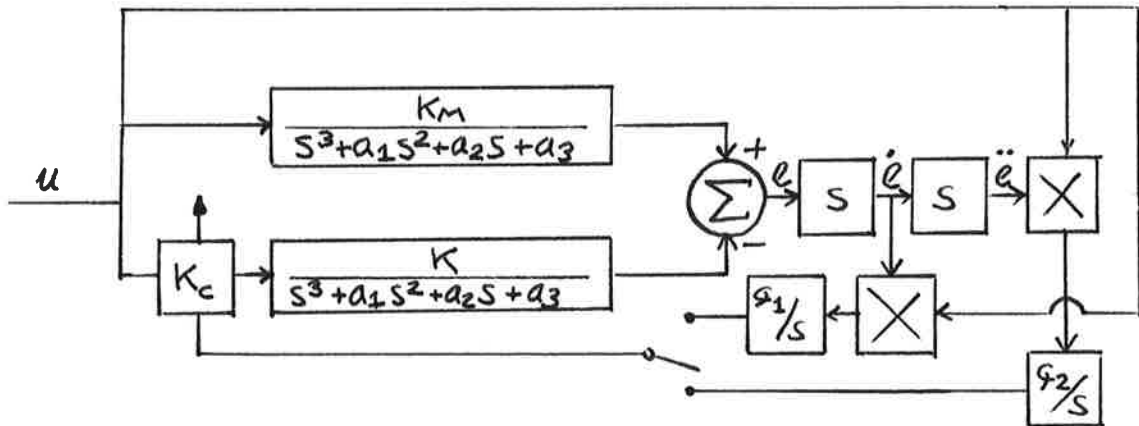


Fig. 4.7 Realisering av MRAS i exempel 4:5.

■

Vi ska här anknyta till framställningen i exempel 4:4 och 4:5 för polöverskott större än ett och behandlar det allmänna fallet med polöverskott lika med  $n$  för system med ordningen  $n$ , d v s

$$\frac{q(s)}{p(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

med

$$\bar{x} = K_M - K K_c \quad ; \quad K \text{ konstant}$$

Analogt med tidigare erhålles

$$K_M u = y_M^{(n)} + a_1 y_M^{(n-1)} + a_2 y_M^{(n-2)} + \dots + a_n y_M$$

$$\bar{x} u = e^{(n)} + a_1 e^{(n-1)} + a_2 e^{(n-2)} + \dots + a_n e^{(0)}$$

Vi inför tillstånden

$$\begin{cases} x_1 = e^{(0)} (= e) \\ x_2 = e^{(1)} (= \dot{e}) \\ \dots \\ x_n = e^{(n)} \end{cases}$$

och ansätter Lyapunovfunktionen

$$V = \frac{1}{2} \left\{ \beta_1 [e^{(0)}]^2 + \beta_2 [e^{(1)}]^2 + \dots + \beta_n [e^{(n-1)}]^2 + \lambda \bar{x}^2 \right\}$$

med

$$\lambda, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n > 0$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \beta_1 e^{(0)} e^{(1)} + \beta_2 e^{(1)} e^{(2)} + \beta_3 e^{(2)} e^{(3)} + \dots + \beta_{n-1} e^{(n-2)} e^{(n-1)} + \\ & + \beta_n e^{(n-1)} [\bar{x} u - a_1 e^{(n-1)} - a_2 e^{(n-2)} - \dots - a_n e^{(0)}] + \lambda \bar{x} \dot{\bar{x}} \end{aligned}$$

Vi gör följande val

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 e^{(1)} = \beta_n a_n e^{(n-1)} \\ \beta_2 e^{(2)} = \beta_n a_{n-1} e^{(n-1)} \\ \dots \\ \beta_{n-2} e^{(n-2)} = \beta_n a_3 e^{(n-1)} \\ \beta_{n-1} = \beta_n a_2 \\ -\beta_n e^{(n-1)} u = \lambda \dot{\bar{x}} \end{array} \right.$$

vilket ger

$$\dot{V} = -\beta_n a_1 [e^{(n-1)}]^2 < 0$$

Villkoren kan skrivas som

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = -\frac{\lambda \dot{\bar{x}}}{u e^{(1)}} a_n \\ \beta_2 = -\frac{\lambda \dot{\bar{x}}}{u e^{(2)}} a_{n-1} \\ \dots \\ \beta_{n-2} = -\frac{\lambda \dot{\bar{x}}}{u e^{(n-2)}} a_3 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \beta_{n-1} = -\frac{\lambda \dot{x}}{ue^{(n-1)}} a_2 \\ \beta_n = -\frac{\lambda \dot{x}}{ue^{(n-1)}} \end{cases}$$

Vi har vidare

$$\dot{x} = -K \dot{K}_c = \begin{cases} -\frac{\beta_1}{\lambda a_n} ue^{(1)} \\ -\frac{\beta_2}{\lambda a_{n-1}} ue^{(2)} \\ \dots \\ -\frac{\beta_{n-2}}{\lambda a_3} ue^{(n-2)} \\ -\frac{\beta_{n-1}}{\lambda a_2} ue^{(n-1)} \\ -\frac{\beta_n}{\lambda} ue^{(n-1)} \end{cases}$$

vilket ger villkoren

$$\beta_n = \frac{\beta_{n-1}}{a_2} \mp \frac{\beta_{n-2}}{a_3} \mp \frac{\beta_{n-3}}{a_4} \mp \dots \mp \frac{\beta_3}{a_{n-2}} \mp \frac{\beta_2}{a_{n-1}} \mp \frac{\beta_1}{a_n}$$

Detta ger oss således  $n - 1$  möjligheter till realisering:

$$\dot{K}_c = \begin{cases} C_1 ue^{(n-1)} \\ C_2 ue^{(n-2)} \\ C_3 ue^{(n-3)} \\ \dots \\ C_{n-1} ue^{(1)} \end{cases}$$

vilket åskådliggörs i figur 4.8

---

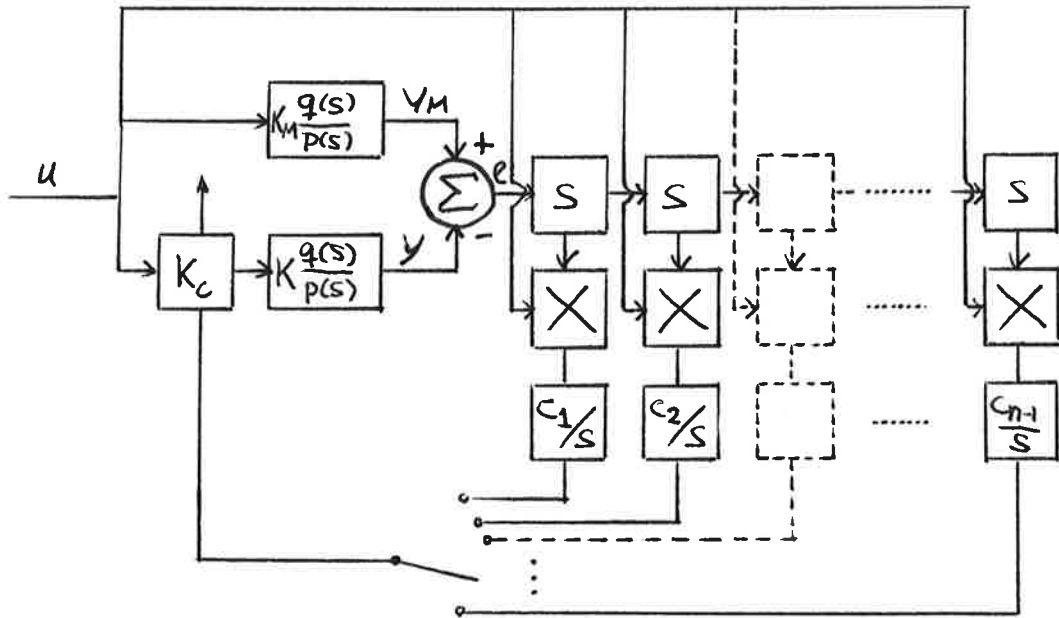


Fig. 4.8 Realisering av MRAS för system med polöverskott av ordning  $n$ , dvs

$$\frac{q(s)}{p(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

Vi ska nu se på några fall då vi har en kombination av initiala fel i såväl förstärkning som poler och nollställen.

EXEMPEL 4:6

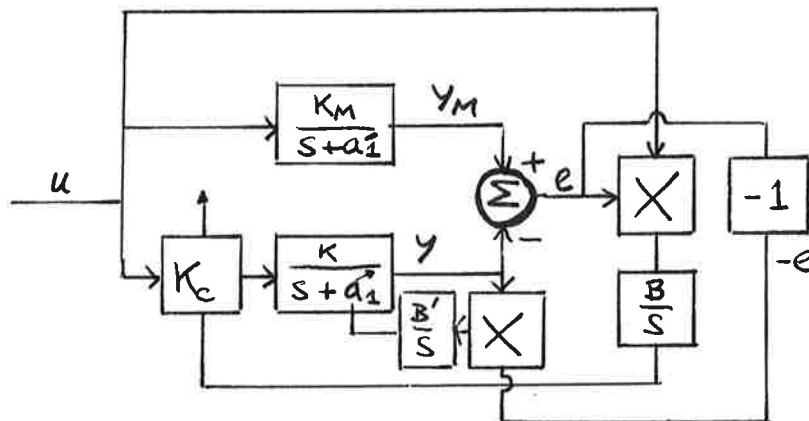


Fig. 4.9 Konfigurationen för MRAS av första ordningen med polöverskott lika med ett med initiala fel i såväl förstärkning som tidskonstant. ( $a_1 > 0$ .) Syftet kan skrivas

$$a_1 \rightarrow a_1' \quad , \quad KK_c \rightarrow K_M$$

För konfigurationen i figur 4.9 har vi följande ekvationer:

$$\dot{y}_M + a_1' y_M = k_M u \quad ; \quad a_1' > 0$$

$$\dot{y} + a_1 y = k k_c u \quad ; \quad a_1 > 0$$

Detta ger

$$\dot{e} = \dot{y}_M - \dot{y} = (k_M - k k_c) u + a_1 y - a_1' y_M$$

samt felekvationen

$$\dot{e} + a_1' e = -(a_1' - a_1) y + (k_M - k k_c) u$$

Som Lyapunovfunktion väljes kvadrater av tillstånden i felekvationen ovan samt kvadrater av parameterfelen, d v s

$$V = e^2 + \lambda_1 (k_M - k k_c)^2 + \lambda_2 (a_1' - a_1)^2 \quad ; \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{V} = & 2e [-a_1' e - (a_1' - a_1) y + (k_M - k k_c) u] + \\ & + 2\lambda_1 (k_M - k k_c) (-k k_c) + 2\lambda_2 (a_1' - a_1) (-\dot{a}_1) \end{aligned}$$

Väljer vi

$$\dot{k}_c = B \cdot u \cdot e \quad ; \quad B = \frac{1}{\lambda_1 k}$$

$$\dot{a}_1 = B' \cdot y \cdot (-e) \quad ; \quad B' = \frac{1}{\lambda_2}$$

erhålles

$$\dot{V} = -2a_1' e^2 < 0$$

d v s  $e \rightarrow 0$ .

En realisering visas i figur 4.9. ■



ANMÄRKNING

Det är av stor vikt hur blocken i schemat placeras, annars kan detta ge mindre tillfredsställande lösningar.

I exempel 4:6 ger detta (om vi har konfigurationen i figur 4.10):

$$\dot{y}_M + a_1' y_M = u k_M$$

$$y = \theta k_c$$

$$\dot{\theta} + a_1 \theta = u k$$

vilket ger felekvationen

$$\dot{e} + a_1' e = (k_M - k k_c) u - y(a_1' - a_1) - \theta \dot{k}_c$$

Väljes samma Lyapunovfunktion som tidigare med samma parameterjustering erhålles

$$\begin{aligned} \dot{V} = & 2e \left[ -a_1' e + (k_M - k k_c) u - y(a_1' - a_1) - \theta \dot{k}_c \right] + \\ & + 2\lambda_1 (k_M - k k_c) x - k \dot{k}_c - 2\lambda_2 a_1 (a_1' - a_1) \end{aligned}$$

Om

$$\dot{k}_c = \frac{e u}{\lambda_1 k} \quad \text{och} \quad a_1 = -\frac{e y}{\lambda_2}$$

så

$$\dot{V} = -2e^2 \left( a_1' + \frac{1}{\lambda_1 k} \theta u \right)$$

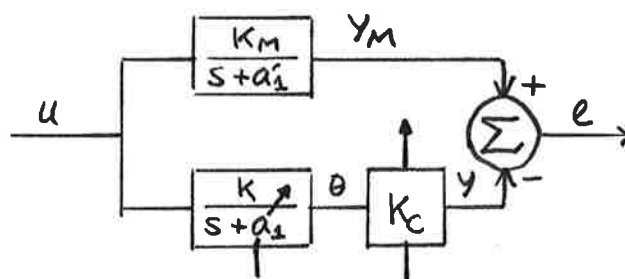


Fig. 4.10 Modifierad konfiguration av konfigurationen i figur 4.9 som orsakar en mindre tillfredsställande lösning.

$\dot{v}$  blir större än noll om

$$\frac{1}{\lambda_1 K} \theta u < -a'_1$$

vilket gör att syftet ej kan uppfyllas. Detta är ett resultat som härrör från den fysikaliska positionen av den variabla förstärkningen. ■

EXEMPEL 4:7

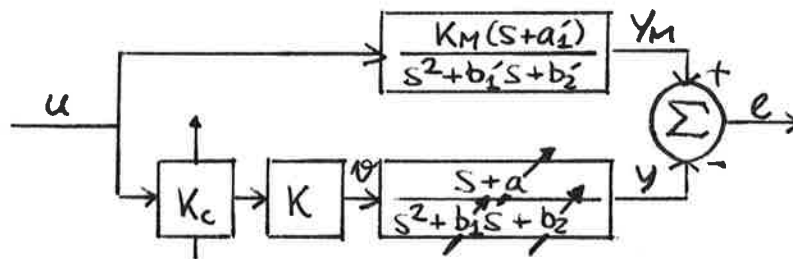


Fig. 4.11 Konfigurationen för MRAS av andra ordningen med polöverskott lika med ett med initiala fel i såväl förstärkning som överföringsfunktion. Syftet kan skrivas

$$a_1 \rightarrow a'_1, \quad b_1 \rightarrow b'_1, \quad b_2 \rightarrow b'_2, \quad KK_c \rightarrow K_M.$$

Inför hjälpvariabeln  $v$  som i figur 4.11.

Vi har följande ekvationer

$$\ddot{y}_M + b'_1 \dot{y}_M + b'_2 y_M = K_M \dot{u} + K_M a'_1 u$$

$$\ddot{y} + b_1 \dot{y} + b_2 y = \dot{v} + a_1 v$$

$$\dot{v} = KK_c \dot{u} + KK_c u \quad ; \quad v = KK_c u$$

vilket ger

$$\ddot{y}_M + b'_1 \dot{y}_M + b'_2 y_M = K_M \dot{u} + K_M a'_1 u$$

$$\ddot{y} + b_1 \dot{y} + b_2 y = KK_c \dot{u} + KK_c u + a_1 KK_c u$$

samt felekvationen

$$\ddot{e} + b'_1 \dot{e} + b'_2 e = (k_M - k k_c) \dot{u} + (k_M a'_1 - k \dot{k}_c - a_1 k k_c) u + (b_1 - b'_1) \dot{y} + (b_2 - b'_2 + \dot{b}_1) y$$

I analogi med tidigare väljes Lyapunovfunktionen till

$$V = \frac{1}{2} \left\{ \lambda_1 e^2 + \lambda_2 \dot{e}^2 + (k_M - k k_c)^2 + (k_M a'_1 - k \dot{k}_c - a_1 k k_c)^2 + (b_1 - b'_1)^2 + (b_2 - b'_2 + \dot{b}_1)^2 \right\}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \lambda_1 e \dot{e} + \lambda_2 \dot{e} \left[ -b'_1 \dot{e} - b'_2 e + (k_M - k k_c) \dot{u} + \right. \\ & \left. + (k_M a'_1 - k \dot{k}_c - a_1 k k_c) u + (b_1 - b'_1) \dot{y} + (b_2 - b'_2 + \dot{b}_1) y \right] - \\ & - k \dot{k}_c (k_M - k k_c) + (b_1 - b'_1) \dot{b}_1 + (b_2 - b'_2 + \dot{b}_1) (\dot{b}_2 + \ddot{b}_1) + \\ & + (k_M a'_1 - k \dot{k}_c - a_1 k k_c) (-k \ddot{k}_c - \dot{a}_1 k k_c - a_1 k \dot{k}_c) \end{aligned}$$

vilket är lika med

$$\dot{V} = -\lambda_2 b'_1 \dot{e}^2$$

om justering sker enligt

$$(\lambda_1 = \lambda_2 b'_2)$$

$$\dot{b}_1 = -\lambda_2 \dot{e} \dot{y}$$

$$\dot{b}_2 = -\lambda_2 \dot{e} y + \lambda_2 \ddot{e} \dot{y} + \lambda_2 \dot{e} \ddot{y}$$

$$\dot{a} = \frac{1}{k k_c} \left\{ \lambda_2 \dot{e} u - \lambda_2 \ddot{e} u - \lambda_2 \dot{e} \ddot{u} - a \lambda_2 \dot{e} \dot{u} \right\}$$

och

$$\dot{k}_c = \frac{1}{k} \lambda_2 \dot{e} \dot{u}$$

Om det inte finns initiala förstärkningsfel utan  $KK_c = K_M$  för-  
enklas räkningarna och derivator av referenssignalen kan undvikas.

I analogi med ovanstående väljes Lyapunovfunktionen som

$$V = \frac{1}{2} \left\{ b_2' e^2 + \dot{e}^2 + (a_1' - a_1)^2 + (b_1 - b_1')^2 + (b_2 - b_2')^2 \right\}$$

vilket ger att justering sker enligt

$$\dot{a}_1 = B' \dot{e} u \quad ; \quad B' > 0$$

$$\dot{b}_1 = -B'' \dot{e} \dot{y} \quad ; \quad B'' > 0$$

$$\dot{b}_2 = -B''' \dot{e} y \quad ; \quad B''' > 0$$

■

---

Tidigare (sid. 71) behandlades det allmänna fallet för polöver-  
skott lika med  $n$  för system med ordning  $n$  och med enbart initi-  
ala förstärkningsfel.

Låt oss här på samma sätt anknyta till framställningen i exempel  
4:6 och behandla motsvarande sak när det även existerar initiala  
fel i systemets överföringsfunktion.

Vi betraktar således följande system och dess modellreferens:

$$\text{System:} \quad K_M \frac{1}{s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n} \quad , \quad K_M \text{ konstant}$$

$$\text{Modell:} \quad K \frac{1}{s^n + b_1' s^{n-1} + b_2' s^{n-2} + \dots + b_n'} \quad , \quad K \text{ konstant}$$

Här finns  $n + 1$  obekanta parametrar som ska justeras:  $K_c$  samt  
 $b_1, b_2, \dots, b_n$ .

Beräkningarna uppvisar flera likheter med dem för initiala fel  
enbart i förstärkningen. Som tidigare gäller

$$e = y_M - y \quad , \quad \bar{x} = K_M - KK_c$$

I analogi med tidigare erhålles

$$K_M u = y_M^{(n)} + b_1' y_M^{(n-1)} + b_2' y_M^{(n-2)} + \dots + b_n' y_M$$

$$K K_C u = y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + b_2 y^{(n-2)} + \dots + b_n y$$

samt (med analoga beteckningar):

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{(0)} = y_M^{(0)} - y^{(0)} \\ e^{(1)} = y_M^{(1)} - y^{(1)} \\ e^{(2)} = y_M^{(2)} - y^{(2)} \\ \dots \\ e^{(n-1)} = y_M^{(n-1)} - y^{(n-1)} \\ e^{(n)} = y_M^{(n)} - y^{(n)} = \bar{x}u + b_1 y^{(n-1)} - b_1' y_M^{(n-1)} + \\ \quad + b_2 y^{(n-2)} - b_2' y_M^{(n-2)} + \dots + b_n y - b_n' y_M \end{array} \right.$$

Felekvationen blir här

$$e^{(n)} + b_1' e^{(n-1)} + b_2' e^{(n-2)} + \dots + b_n' e^{(0)} = \bar{x}u - \\ -(-b_1 + b_1') y^{(n-1)} - (-b_2 + b_2') y^{(n-2)} + \dots - (-b_n + b_n') y^{(0)}$$

i analogi med exempel 4:6.

Lyapunovfunktionen väljes till

$$V = \frac{1}{2} \left\{ \beta_1 [e^{(0)}]^2 + \beta_2 [e^{(1)}]^2 + \dots + \beta_n [e^{(n-1)}]^2 + \right. \\ \left. + \lambda_0 \bar{x}^2 + \lambda_1 (b_1' - b_1)^2 + \lambda_2 (b_2' - b_2)^2 + \dots + \lambda_n (b_n' - b_n)^2 \right\}$$

med

$$\forall \lambda_i > 0$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\dot{\kappa} \dot{\kappa}_c \lambda_0 \bar{x} - \dot{b}_1 \lambda_1 (b'_1 - b_1) - \dot{b}_2 \lambda_2 (b'_2 - b_2) - \dots - \dot{b}_n \lambda_n (b'_n - b_n) + \\ & + \beta_1 e^{(0)} e^{(1)} + \beta_2 e^{(1)} e^{(2)} + \dots + \beta_{n-1} e^{(n-2)} e^{(n-1)} - \beta_n b'_1 [e^{(n-1)}]^2 - \\ & - \beta_n b'_2 e^{(n-1)} e^{(n-2)} - \dots - \beta_n b'_n e^{(n-1)} e^{(0)} + \beta_n e^{(n-1)} \bar{x} u - \\ & - \beta_n e^{(n-1)} (b'_1 - b_1) y^{(n-1)} - \beta_n e^{(n-1)} (b'_2 - b_2) y^{(n-2)} - \dots - \\ & - \beta_n e^{(n-1)} (b'_n - b_n) y^{(0)} \end{aligned}$$

vilket är lika med

$$\dot{V} = -\beta_n b'_1 [e^{(n-1)}]^2 < 0$$

om vi gör följande val:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 e^{(1)} = \beta_n b'_n e^{(n-1)} \\ \dots \\ \beta_{n-2} e^{(n-2)} = \beta_n b'_3 e^{(n-1)} \\ \beta_{n-1} = \beta_n b'_2 \\ -\beta_n e^{(n-1)} u = \dot{\bar{x}} \lambda_0 \end{array} \right.$$

samt

$$\left\{ \begin{array}{l} -\dot{b}_1 \lambda_1 = \beta_n e^{(n-1)} y^{(n-1)} \\ -\dot{b}_2 \lambda_2 = \beta_n e^{(n-1)} y^{(n-2)} \\ \dots \\ -\dot{b}_n \lambda_n = \beta_n e^{(n-1)} y^{(0)} \end{array} \right.$$

där de  $n$  sista ekvationerna har tillkommit jämfört med tidigare.  
Parameterjusteringarna blir

$$\dot{K}_c = [\text{samma som tidigare ; sid. 73}]$$

$$\dot{b}_1 = -\frac{1}{\lambda_n} \beta_n e^{(n-1)} y^{(n-1)}$$

...

$$\dot{b}_n = -\frac{1}{\lambda_n} \beta_n e^{(n-1)} y^{(0)}$$

■



Låt oss slutligen se på fallet med polöverskott lika med ett för ett system av ordningen  $n$  utan initiala förstärkningsfel.

I figur 4.1 gäller således

$$\begin{aligned} \text{System:} \quad y(t) &= \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{p^{n-1} + b_1 p^{n-2} + \dots + b_{n-1}}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} \\ \text{Modell:} \quad y_M(t) &= \frac{B_M(p)}{A_M(p)} = \frac{p^{n-1} + b_1^M p^{n-2} + \dots + b_{n-1}^M}{p^n + a_1^M p^{n-1} + \dots + a_n^M} \end{aligned}$$

Med användning av felet  $e = y_M - y$  kan vi skriva

$$A_M e = (A - A_M)y + B_M u_M - Bu$$

För att enklare se vilken styrlag som ska väljas för att felet ska konvergera mot noll inför vi ett sk tillståndsvariabelfilter av ordningen  $n-1$ :

$$C(p) = p^{n-1} + c_1 p^{n-2} + \dots + c_{n-1}$$

samt de filtrerade signalerna

$$\bar{y} = \frac{y}{C}, \quad \bar{u} = \frac{u}{C} \quad \text{och} \quad \bar{u}_M = \frac{u_M}{C}$$

vilket ger

$$A_M e = C [(A - A_M)\bar{y} + B_M \bar{u}_M - Bu]$$

Införes

$$\begin{cases} \Delta a_1 = a_1^M - a_1 \\ \dots \\ \Delta a_n = a_n^M - a_n \end{cases}$$

är detta ekvivalent med

$$A_M e = -C [(p^{n-1} + b_1 p^{n-2} + \dots + b_{n-1})\bar{u} +$$



$$+ (\Delta a_1 p^{(n-1)} + \dots + \Delta a_n) \bar{y} - (p^{(n-1)} + b_1^M p^{(n-2)} + \dots + b_{n-1}^M) \bar{u}_M]$$

Önskas  $e = 0$  får vi styrlagen

$$\begin{aligned} (p^{(n-1)} + \hat{b}_1 p^{(n-2)} + \dots + \hat{b}_{n-1}) \bar{u} &= \\ &= -(\Delta \hat{a}_1 p^{(n-1)} + \dots + \Delta \hat{a}_n) \bar{y} + (p^{(n-1)} + b_1^M p^{(n-2)} + \dots + b_{n-1}^M) \bar{u}_M \end{aligned}$$

vilket, med

$$\begin{cases} \tilde{b}_1 = \hat{b}_1 - b_1 \\ \dots \\ \tilde{b}_{n-1} = \hat{b}_{n-1} - b_{n-1} \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} \Delta \tilde{a}_1 = \Delta \hat{a}_1 - \Delta a_1 \\ \dots \\ \Delta \tilde{a}_n = \Delta \hat{a}_n - \Delta a_n \end{cases}$$

ger

$$A_M e = C [\tilde{b}_1 \bar{u}^{(n-2)} + \dots + \tilde{b}_{n-1} \bar{u}^{(0)} + \Delta \tilde{a}_1 \bar{y}^{(n-1)} + \dots + \Delta \tilde{a}_n \bar{y}^{(0)}]$$

Införes även

$$\tilde{\theta}^T = [\tilde{b}_1 \dots \tilde{b}_{n-1} \Delta \tilde{a}_1 \dots \Delta \tilde{a}_n]$$

$$\varphi^T = [\bar{u}^{(n-2)} \dots \bar{u}^{(0)} \bar{y}^{(n-1)} \dots \bar{y}^{(0)}]$$

samt

$$G(p) = \frac{C}{A_M}$$

blir felet

$$e = -G(p)[- \tilde{\theta}^T \varphi]$$

eller

$$e = c^T x$$

$$\dot{x} = Ax + b[- \tilde{\theta}^T \varphi]$$

Enligt ett lemma av Kalman, Yakubović och Lefschetz gäller att om  $G(p) = c^T(pI - A)^{-1}b$  är strikt positivt reell<sup>x</sup> så existerar  $P = P^T > 0$  och  $Q > 0$  så att:

$$A^T P + PA = -Q$$

$$Pb = c$$

Därför ansätter vi analogt med den tidigare diskussionen i samband med Lyapunovteori Lyapunovfunktionen

$$V = x^T P x + \tilde{\theta}^T R \tilde{\theta} \quad ; P > 0, R > 0$$

vilket, efter litet räkningar, ger

$$\dot{V} = -x^T Q x - 2(\tilde{\theta}^T \varphi e - \tilde{\theta}^T R \dot{\tilde{\theta}})$$

om  $G(p)$  är strikt positivt reell.

---

<sup>x</sup> DEFINITION

$G(p)$  är positivt reell om

- o  $G(p)$  är asymptotisk stabil
- o  $\operatorname{Re} G(i\omega) \geq 0$  för alla  $\omega$

$G(p)$  är strikt positivt reell om

$$G(p - \varepsilon) \text{ positivt reell} \quad , \varepsilon > 0$$

Om det gäller att

$$\dot{\tilde{\theta}} = R^{-1} \varphi e$$

så blir

$$\dot{V} = -X^T Q X$$

varför  $x$  och  $e$  båda konvergerar mot noll.

En realisering visas i figur 4.12. ■

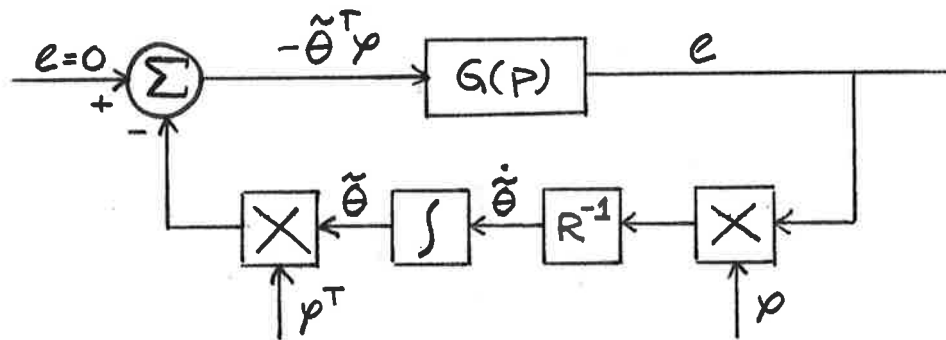


Fig. 4.12 MRAS-konfiguration för polöverskott lika med ett.

REFERENSER

Bellman, R., Adaptive Control Processes — A Guided Tour, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1961.

Gibson, J., Nonlinear Automatic Control, McGraw-Hill Book Company, New York 1963.

LaSalle, J. & Lefschetz, S., Stability by Liapunov's Direct Method, Academic Press, New York 1961.

Lin, Y.-H. & Narendra, K.S., Design of Stable Model Reference Adaptive Controllers, Proceedings of the Workshop on Applications of Adaptive Control, Yale University 1979.

Maršík, J., A Simple Adaptive Controller, Preprints of the 2nd Prague IFAC Symposium on Identification and Process Parameter Estimation, Prag 1970.

Parks, P.C., Lyapunov Redesign of Model Reference Adaptive Control Systems, IEEE Transactions Automatic Control, Vol. AC-11 1966.

Popov, V.M., Hyperstability of Control Systems, Springer-Verlag, New York 1973.

Åström, K.J., Reglerteori, Almqvist & Wiksell, Stockholm 1976.

Åström, K.J., Reglerteknik, Olinjära System, Lund 1979.

