

LABORATORIEPROCESS FÖR FLÖDESSYSTEM

BERNDT HOLMQVIST  
LARS-ERIC LARSSON

Department of Automatic Control  
Lund Institute of Technology  
August 1977

## Sammanfattning

En laboratorieprocess för flödessystem har konstruerats och tillverkats. Dessutom har processen undersökts med experiment.

Flödessystemet består av tankar sammankopplade med slangar. Olika tankkonfigurationer kan kopplas upp, t.ex. seriekopplat, parallellkopplat och recirkulerat system. Vatten pumpas genom systemet och mättad NaCl-lösning, vilken användes som spårämne, sprids i systemet på samma sätt som vattnet. NaCl-koncentrationen mätes med en konduktivitetmätare, som är ansluten till en skrivare.

Eftersom flödet är konstant så kan flödessystemet betraktas som ett linjärt, tidsinvariant dynamiskt system av speciell struktur. Varje tank i systemet beskrivs av ett första ordningens system.

Experimenten visar mycket god överensstämmelse med teoretiska modeller.

## INNEHÅLLSFÖRTECKNING

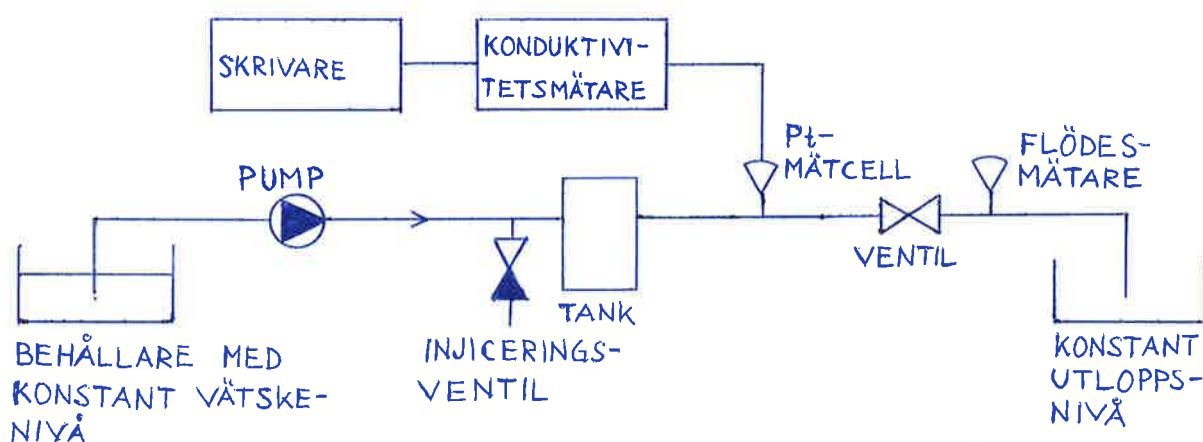
1.	Inledning	sid. 1
2.1	Material-och apparatbeskrivning	3
2.2	Konstruktion av tank	7
2.3	Konstruktion av mätcell	11
2.4	Konstruktion av tidsfördröjning	17
3.1	Grundläggande formler och samband	18
3.2	Bestämning av $Kc_i$	20
3.3	Icke-ideala pulser	20
4.1	Impulssvar för en tank	23
4.2	Impulssvar för två resp. tre tankar seriekopplade	33
4.3	Impulssvar för parallellkopplat tanksystem	38
4.4	Impulssvar för recirkulerat tanksystem	47
5.	Stegsvar	78
6.1	En slang's impulssvar vid laminär strömning	84
6.2	Impulssvar för tidsfördröjningen	88
7.	Avslutning	95
	Referenslista	96
	Appendix Manual	97

## 1. INLEDNING

I detta inledande kapitel skall en kort beskrivning av försöksuppställning ges. Tanksystem och mätcell är konstruerade av examensarbetarna.

Genom ett tanksystem, som är helt vattenfylld, pumpas vatten med konstant flöde. Om systemet har in- och utlopp, kallas det för ett öppet system och om inget vatten lämnar systemet, slutet system. Flödet justeras med kranar och mäts med flödesmätare av typ rotameter.

Exempel på försöksuppställning:



Insignalen till systemet utgörs av mättad koksaltlösning. Denna injiceras med en spruta direkt i slangen, varvid vattnet för natriumkloriden in i tanksystemet. Pga den korta injiceringstiden kan man betrakta signalen som en impuls. Även utspädd saltlösning, som under en längre tid får strömma in i systemet, har använts som signal. Man kan på detta vis få ett steg. NaCl-koncentrationen mäts sedan på utgången. Detta görs med en platinamätcell, som är kopplad till en konduktivitetsmätare. Tidsförloppet registreras på en skrivare. Man får på detta vis en uppfattning om tanksystemets egenskaper.

Tanksystemet består av ett antal tankar, som är sammankopplade med slangar. Till varje tank hör en omrörare, som har till uppgift att blanda det inkommande flödet perfekt. Tanken kan betraktas som ett första ordningens system.

Flödet och tankvolymen bestämmer helt tankens egenskaper.

Beroende på hur tankarna kopplas kan man få olika varianter av tanksystem, t.ex. seriekopplat, parallellkopplat, recirkulerat samt kombinationer av dessa.

En tidsfördröjning har konstruerats för att studera, hur systemet påverkas.

Överensstämmelsen mellan teori och praktik kan lätt kontrolleras genom att teoretiskt beräknade punkter lägges in i samma diagram som uppmätt kurva.

## 2.1 MATERIAL-OCH APPARATBESKRIVNING

### Konduktivitetetsmätaren

Instrumentet är av typ BALSBAUGH 915. De uppgifter som är intressanta för experimenten, stigtid, falltid och linjäritet, finns inte med i instruktionshäftet, varför dessa bestämdes experimentellt.

Beräkning av stig-och falltid: Ett 560 ohms motstånd över mätelektroderna motsvarar skalutslaget 18000 enh., vilket är ungefär det värde där topparna på våra experimentella kurvor befinner sig. Skrivhastigheten sättes på maximalt, lika med 320 mm/min, och elektroderna ansluts till motståndet. Stigtiden beräknas som tiden mellan 10 och 90% av maxutslag och erhöles till 1.9 sek. På samma sätt bestämdes falltiden, då motståndet kopplades ur, till 1.9 sek.

Kontroll av linjäriteten hos konduktivitetetsmätaren: I diagram 1 finns skalutslaget som funktion av konduktansen och här syns, att över 23000 enh. blir konduktivitetetsmätaren olinjär. Om man studerar på oscilloskop den fyrkantspänning, som finns över mätcellen ser man att vid ungefär 23000 enh. blir den deformerad. Medelvärde av spänningen är positiv, vilket innebär att över 23000 enh. sker utfällning på elektroderna.

### Skrivare

Skrivaren som används är en PHILIPS PM 8222 DUAL-PEN RECORDER. Stig-och falltid för denna är försumbara jämfört med konduktivitetetsmätarens. Två skrivhastigheter har utnyttjats 7.5 sek/cm och 15 sek/cm. Samma förstärkning av signalen har använts genomgående.

### Pump

Pumpen är en centrifugalpump av märket ENHEIM. Inkopplad i systemet ger denna maximalt 2.3 lit/min. Pumpen varierar mycket lite i flöde vid konstant tryck. Däremot är den känslig för luft, har luft kommit in i pumpen stannar denna kvar i pumphuset och försämrar kapaciteten.

### Flödesmätare

Flödesmätaren är av typ rotameter. Denna består av ett glasrör, som är konformat invändigt och i röret finns en metall-



Diagram 1

Konduktivitetens utslag  
som funktion av konduktansen

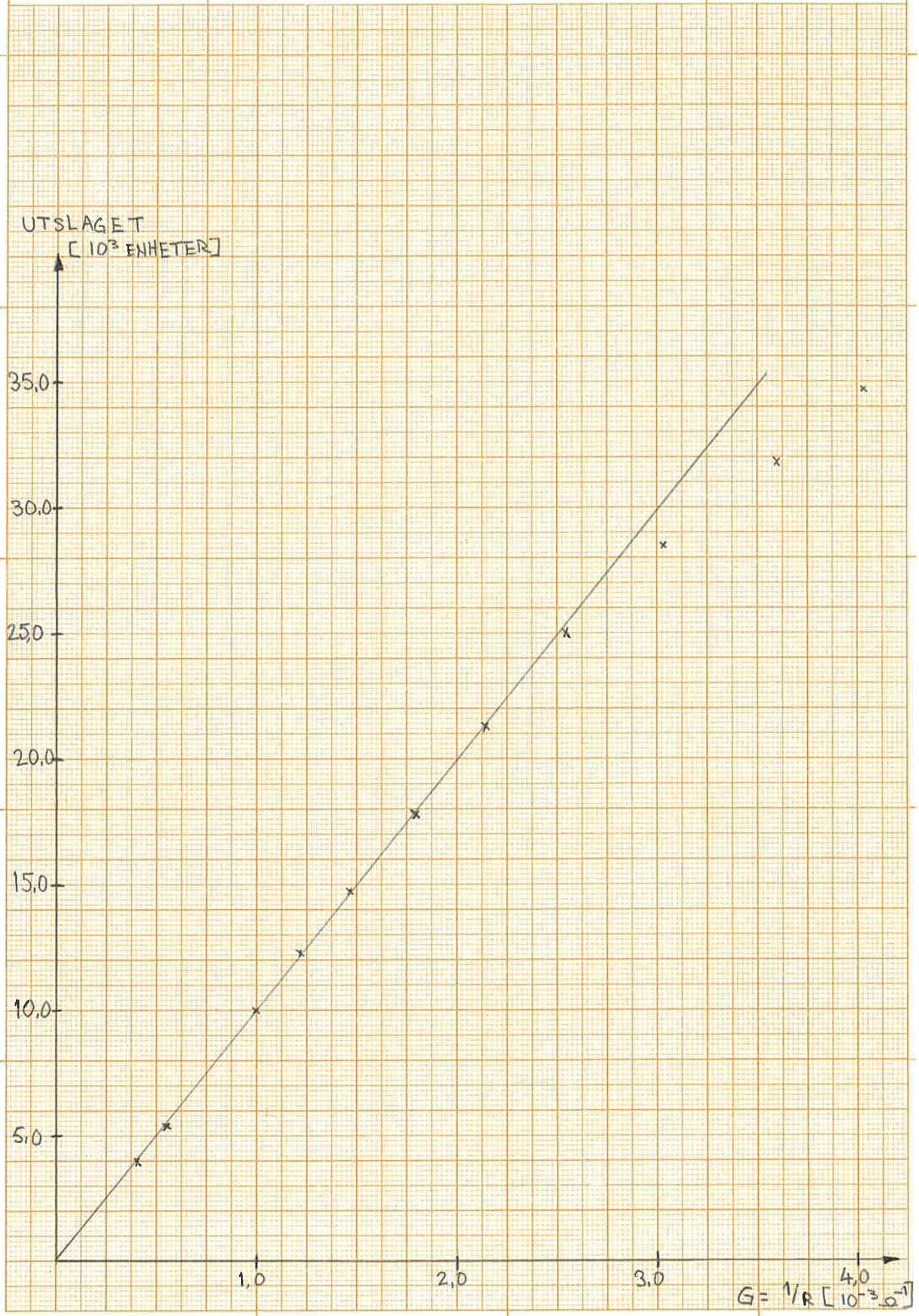




Diagram 2

Kalibreringsdiagram för  
flödesmätare NR 1

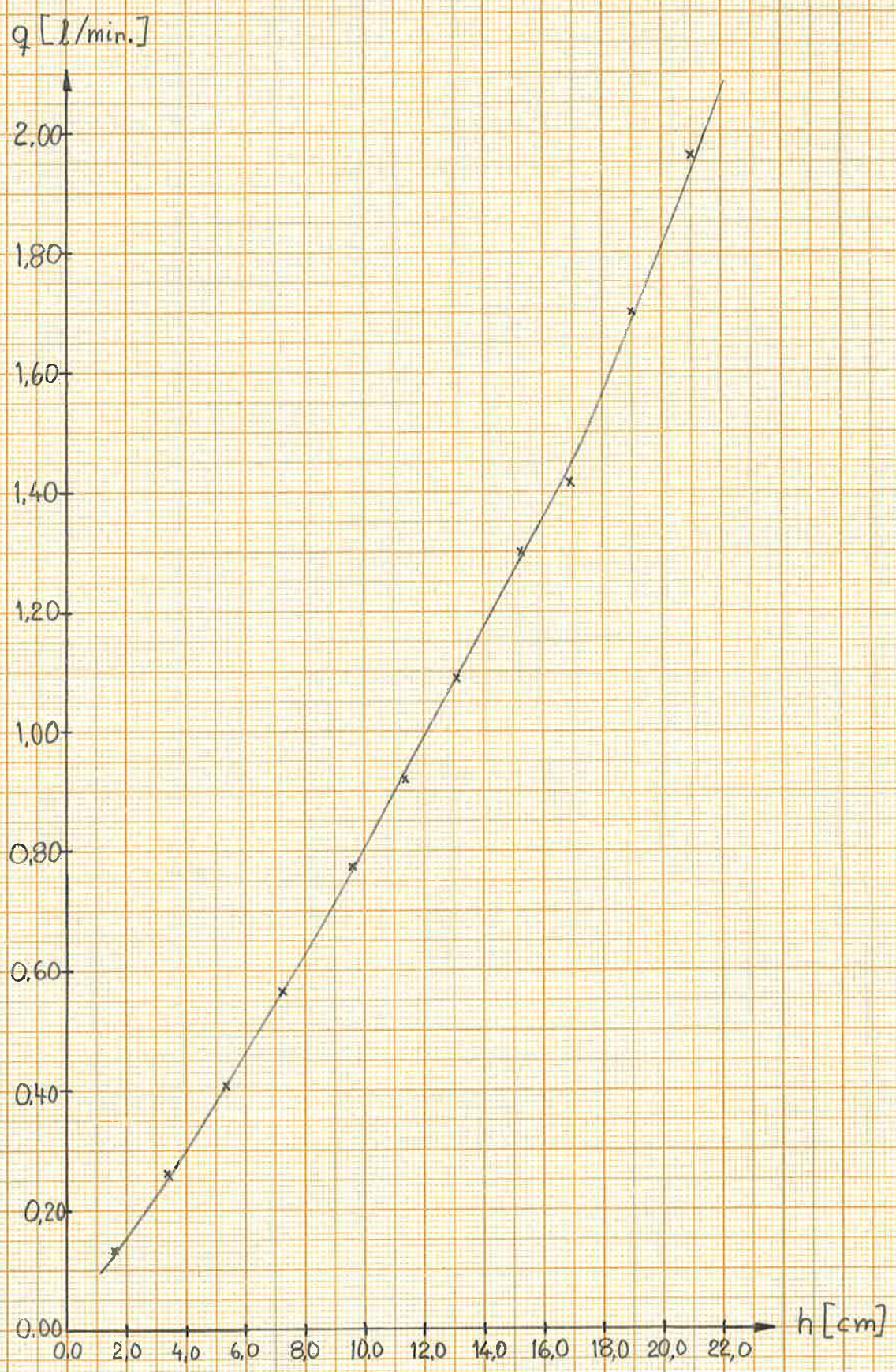
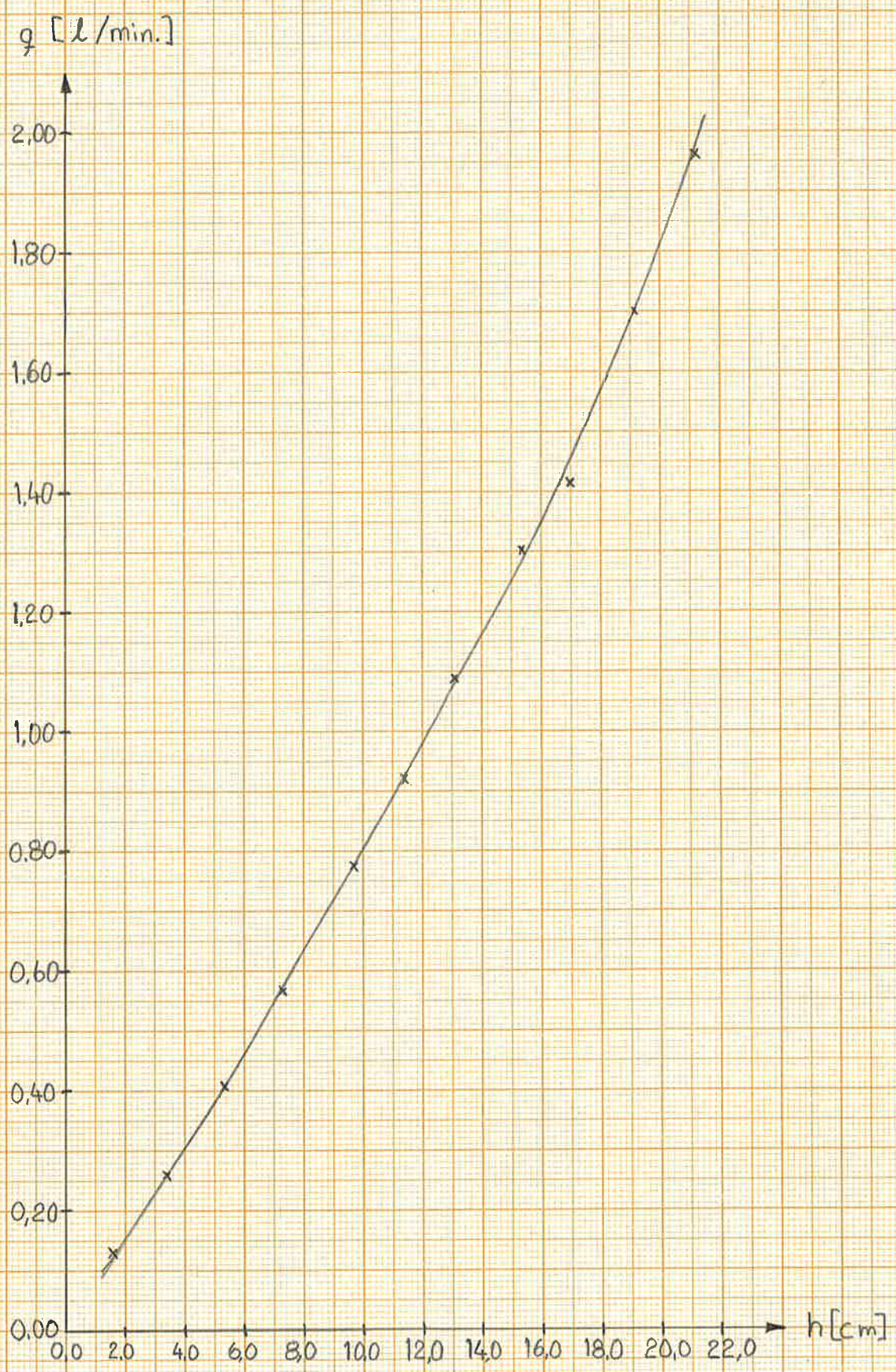




Diagram 3

Kalibreringsdiagram för  
flödesmätare NR 2





kon, som beroende på flödet, varierar i höjdläge. Flödesmätaren är graderad i cm och kalibreringen för de två flödesmätarna som används, finns i diagram 2 och 3.

### Omrörare

Magnetomröraren har märket WPA. Hastigheten på omröraren är ca. 4 varv/sek och kan ej varieras.

## 2.2 KONSTRUKTION AV TANK

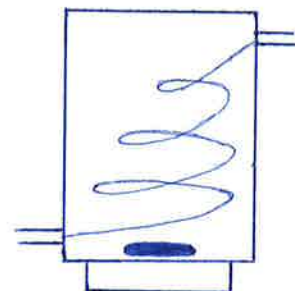
Tankvolym: Vid försök med en tank ger pumpen ca. 3 lit/min. Den största lämpliga tidskonstanten för ett system med en tank, som kan accepteras, fastslogs till 40 sek. Detta medför att volymen på tanken bör vara mindre än 2 liter.

### Första försöket

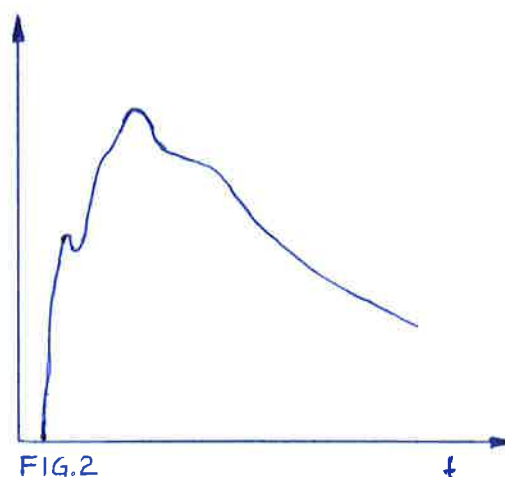
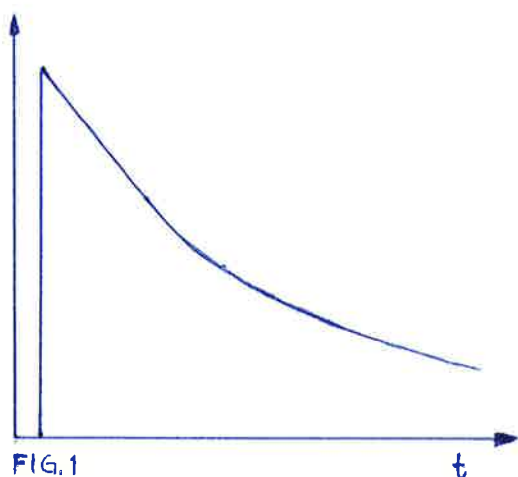
Tanken består av en cylinderformad burk av polystyren (vanlig hushållsburk i plast), där locket ersatts av en plexiglasskiva, fastlimmad med plexiglaslim. Tidigare gjordes försök att få plastlocket på burken tät med hjälp av konventionella lim, men detta misslyckades pga övertrycket i tanken och dessa lims, kontaktlim och silikongummi, dåliga häftförmåga på plastlocket.

Uttagen för in- och utlopp till tanken utformades enligt följande. En plexiglasbit, tjocklek ca. 1 cm och sidor ungefär 2x3 cm, slipades konkav med samma radie som för burken. Denna plexiglasbit är till för att ge stadga vid uppborrningen av hålen till burken och fungera som fästyta till slangkoppling. Uttagens placering skall vara sådan, att det sker en ordentlig blandning mellan den injicerade saltlösningen och vattnet i tanken.

Om uttagen placeras på samma höjd blir blandningen mindre bra, då strömlinjerna blir mindre påverkade av omröraren. Se vidstående figur.



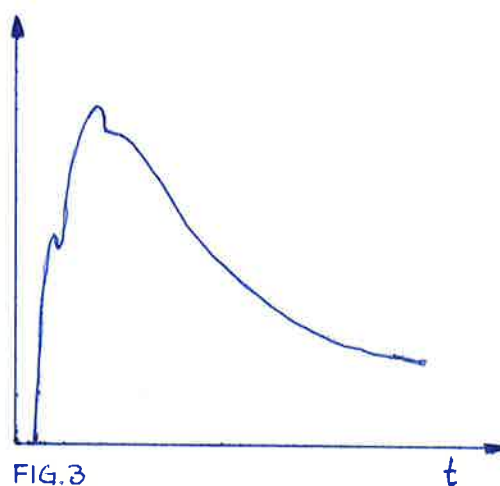
Försök med 2 lit. tank: Fig.1 visar det väntade impuls-svaret,  $ae^{-at}$ , medan fig.2 ger det faktiska resultatet.



Den "ojämna" kurvformen antages bero på dålig blandning i tanken. För att studera omrörningen i tanken gjordes injiceringar med färgämne, varvid antagandet om dålig blandning verifierades.

Typen på magnetomrörare som utnyttjades har konstant omrörningshastighet. Denna är tydligen otillräcklig vid 2 lit. burk, varför mindre tank måste provas.

Försök med 1 lit. tank: Tanken har samma utformning som 2 lit. tanken. Impulssvaret visas i fig.3. En förbättring jämfört med 2 lit. tanken men dock inte tillräckligt bra. Störningen i uppgången och tendensen till dubbel-topp finns kvar. Ytterligare förbättring kan erhållas om flödeshastigheten minskas, vilket tyder på att blandningen fortfarande är för dålig. Lägre flödeshastighet ger mer tid för omrörning, men ger även upphov till större tidskonstant.



Tanken ges en annan utformning.

#### Andra försöket

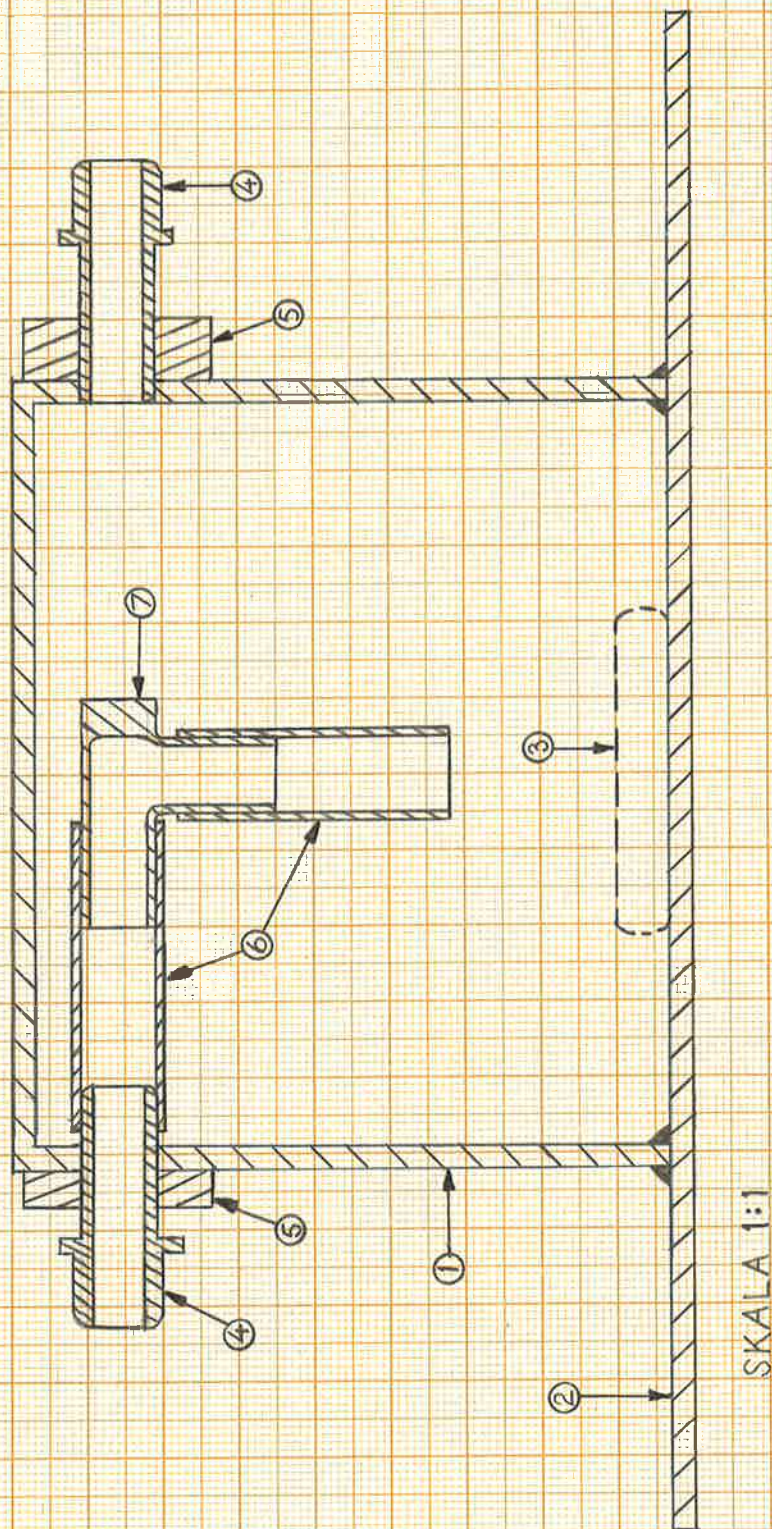
Uttagen till tanken placeras på samma höjd, men inloppet utformas så, att det inkommande flödet riktas mot omröraren, se fig.4



Figur 4

Tvärsnitt av en tank,  $V_T = 0.63$  liter.

- ① PLASTBEHÅLLARE
- ② PLEXIGLASSKIVA
- ③ PLASTBELAGD MAGNETSTAV
- ④ SLANGKOPPLING
- ⑤ HÅLFÖRSTÄRKNING AV PLEXIGLAS
- ⑥ PLASTSLANG, 10x13.5 MM
- ⑦ L-RÖR





För 2 lit.tanken är denna utformning inte tillräcklig för att ge fullständig blandning, ty omröraren är otillräcklig för en så här stor tank. För 1 lit.tanken blir blandningen bra och därmed impulssvaret.

De tankvolymerna som förekommer i experimenten är, 1.05, 0.63 och 0.27 lit. Vid uppmätning av tankvolym är det viktigt att ej räkna med den vätskevolym, som finns i slangdelarna i tanken. Denna vätska deltar inte i omrörningen.

Hur liten tankvolym kan förekomma med bibehållna slangstorlekar?

Blandningen i tanken sker på två sätt. Magnetomröraren ser till att vätskan roterar i tanken, och plastslangen i burken orsakar, att det inkommande flödet sprutar mot tankbotten och sprids radiellt samt pressar vätskan uppåt. Summan av dessa båda omrörningssätt blir skruvformade flödeslinjer.

Om blandningsprocessen domineras av det inkommande flödet blir passagetiden för en vätskepartikel genom tanken kortare, än om magnetomröraren dominerat. Kortare passage-tid medför sämre blandning.

För en liten tank kommer bidraget från det inkommande flödet till blandningsprocessen, att snabbare dominera blandningsprocessen med ökad flödes-hastighet, än vad som gäller för en stor tank. Detta medför att den största flödes-hastigheten, som fortfarande inte gör blandningen dålig, blir lägre för en liten tank än för en stor.

Flödet i plastslangen avviker från ett rent pluggflöde och med lägre flödes-hastighet får det ett mera laminärt utseende. Vilket innebär att en injicerad saltlösning får större utsträckning i plastslangen än vid rent pluggflöde.

Om den injicerade saltlösningen blir för utsträckt kan det ske att allt salt inte kommit in i tanken och deltagit i blandningsprocessen, förrän en del lämnat densamma. Detta sker lättare om man har en liten tank.

Då den injicerade saltlösningen får en större utsträckning vid lägre flödes-hastighet innebär detta, att man inte kan gå så lågt i flödes-hastighet vid liten tank som vid stor.

Resultatet av ovan innebär att ju mindre tankvolym ju mer begränsat blir utrymmet för flödesvariation. För varierande flöde har impulssvaret för de tre tankarna jämförts med de teoretiska och därvid har följande begränsningar för flödes hastigheten bestämts till:  
 $V_{1.05}: 0.5 < q < 2, V_{0.63}: 0.7 < q < 1.9, V_{0.27}: 0.7 < q < 1.7$  lit./min.  
 Detta verifierar ovanstående, liten tankvolym medför att flödet kan varieras mindre.

### 2.3 KONSTRUKTION AV MÄTCELL

Mätcellen skall utformas så att konduktivitetens mätarens mätområde,  $0-2 \times 10^{-3}$  mho, utnyttjas så väl som möjligt. Vidare skall elektroder, skarv mellan mätcell och plastslang formas så, att flödet störs så lite som möjligt. Det kan lätt fastna luftbubblor på elektroderna och luftbubblorna kommer då att verka som isolatorer.

Mätcellen är till för att mäta konduktiviteten för vatten plus konduktiviteten hos NaCl-lösningen, dvs  $\sigma_{\text{MÄTCELL}} =$

$\sigma_{\text{H}_2\text{O}} + \sigma_{\text{NaCl}}$ . För ett vätskeskikt av ändlig tjocklek och genomgående lika cylindriska elektroder, går strömlinjerna som kraftlinjerna mellan två långa parallella cylindrar. Konduktansen ges av,

Där  $d$  = avstånd mellan elektroderna  $G = \frac{\pi \sigma l}{\log \frac{\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - a^2}}{a}} \cdot l$   
 $l$  = elektrod längd

$a$  = elektrod radie

om  $a \ll d$  erhålles  $G = \frac{\pi \sigma l}{\log \frac{d}{a}}$

Detta uttryck måste multipliceras med en konstant, mindre än ett, då elektrolyten begränsas av isolater, i detta fall plexiglasrör.

Den huvudsakliga inverkan på konduktansen kommer från elektrod längden och ej från elektrod radien.

#### Första försöket till mätcell

Plexiglasrör med innerdiameter 6 mm. Två förtennade koppartrådar med längden 4 cm och diametern 1 mm placerades längs med röret, se fig. 5.

Det visade sig att bakgrunden, vattnets konduktans, utgjorde 50% av det maximala utslaget för den injicerade NaCl-mängden, samtidigt som överensstämmelsen, mellan önska



kad kurvform och faktisk, var dålig. Dessutom bildades det ganska lätt luftbubblor i skarven mellan plastslang och plexiglasrör. En av många tänkbara orsaker till det dåliga resultatet med denna mätcell antogs vara, att flödet leds i en plastslang med innerdiametern 8 mm, vilket betyder att övergången till plexiglasrörets 6 mm diameter medför en betydande ökning av flödes hastigheten i mätcellen, varvid konduktivitetmätaren skulle vara "för långsam" för att mäta önskade variationer. För att kontrollera detta, och samtidigt förhindra bildning av luftbubblor, konstruerades ny typ av mätcell.

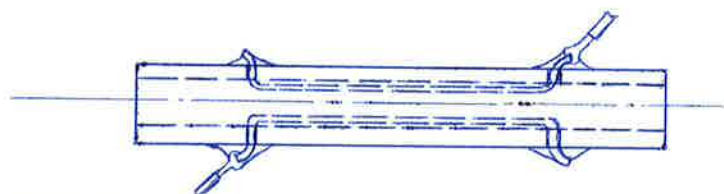


FIG. 5

#### Andra försöket till mätcell

Denna består av ett plaströr med innerdiametern 8.5 mm och ytterdiametern 17.0 mm.

Anslutningsslangen till mätcellen har ytterdiametern 11 mm, varför en fördjupning på 1 cm och diameter 12 mm borrades i mätcellen, så att plastslangen kunde föras in i mätcellen och fastlimmas med silikongummi. På detta sätt har skarv mellan plastslang och mätcell förhindrats. Luftbubblor kan inte längre bildas i skarven för att sedan fastna på elektroderna, se figur 6.

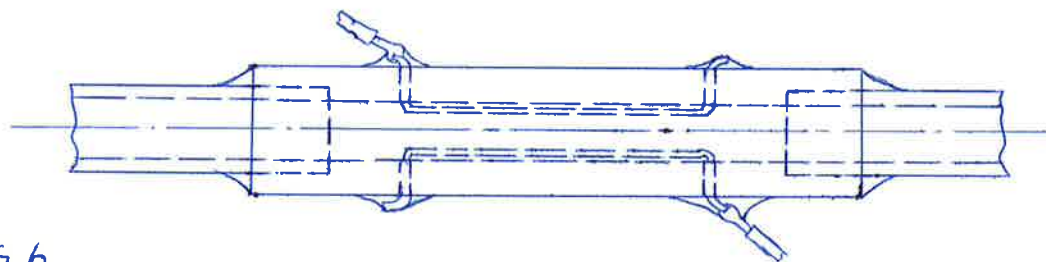


FIG. 6

Tre mätceller av denna typ gjordes, men med olika elektrodlängd. Alla tre mätcellerna visade sig ge samma dåliga resultat som den första typen av mätcell. En slutsats man kan dra av detta är, att antagandet, om den ökade flödes hastighetens negativa inverkan på den första mätcellen, var felaktigt. Såvida inte flödes hastigheten även i den senare mätcellen skulle vara för hög, men detta kan inte vara fallet då en provisorisk mätanordning, som bara bestod av två koppartrådar införda direkt i plastslangen, tidigare visat bra resultat. För att en mätcell överhuvudtaget skall vara användbar måste denna vara linjär, dvs utslaget på konduktivitet smätaren minus bakgrunden skall vara direkt proportionellt mot saltkoncentrationen. Vid en kontroll av linjäriteten för ovanstående typ av mätcell, visade det sig, att denna ej var linjär, vilket förklarar det dåliga resultatet med denna mätcell.

Felet bör ligga i elektroderna eller lödningarna, det senare knappast troligt då i så fall, fyra mätceller skulle blivit fellöda. Vid en noggrann kontroll av elektroderna visar ytan på dessa en förändring. Förtenningen har blivit matt och ytan något ojämn. Detta kan bero på, att det bildas ett oxidskikt på ytan.

#### Tredje försöket till mätcell

Samma utformning som föregående typ av mätcell, men där elektroderna ersatts med koppartråd av diameter 2 mm. Denna mätcell är linjär och fungerade bra vid test. För att få fram en lämplig elektrodlängd gjordes ett antal mätceller och vid försök visade sig elektrodlängden 2 cm passa konduktivitet smätarens mätområde bäst. Denna mätcell användes vid en försöksgenomgång av de experiment som skulle bli aktuella. Vid denna genomgång jämfördes inte de experimentella kurvorna med teoretiska, varför felet med dessa elektroder inte upptäcktes förrän mot slutet av försöksgenomgången. Det observerades då att maxvärdet för de olika kurvorna ständigt minskade. Kurvformen för impulssvar av första ordningens system stämde ej med de som upptogs vid test och som visat en korrekt form. Mät-

cellen hade än en gång blivit olinjär. Koppar-elektroderna hade fått ett klart synligt oxidskikt på ytan. Eftersom det tog en viss tid för oxidskiktet att bildas, fortsatte experimenten ett tag till med denna mätcell, men med den skillnaden att mätcellen sköljdes varje dag i saltsyra. Trots detta blir det svårt att reproducera en kurva från dag till dag. Vid en noggrann kontroll visar det sig, att endast efter någon timmes användande förändras kurvformerna. För att komma ifrån detta, och samtidigt bli av med besväret att skölja i saltsyra, görs en ny mätcell.

#### Fjärde försöket till mätcell

Vid försöken med tidigare mätcell observerades andra svårigheter med denna, förutom elektroderna, bl.a svårigheten med att få skarven tät mellan plastslang och mätcell samt nackdelen med att inte kunna se elektroderna. Dessa var monterade i ett ogenomskinligt plaströr.

Den nu konstruerade mätcellen ses i fig.7. Denna består av ett genomskinligt plexiglasrör med innerdiametern 8 mm och ytterdiametern 11 mm, samma innerdiameter som för plastslangen. Koppling mellan slang och mätcell sker med hjälp av plastslang med innerdiametern 10 mm.

Koppar elektroderna har ersatts med elektroder, bestående av 18 karat guld och med längd 2.5 cm och diameter 0.65 mm, fig.7 är ritad med elektrod längden 1.5 cm. Vid upprepade tester med denna mätcell erhöles goda resultat. Under experimentens gång kontrollerades vid flera tillfällen linjäriteten. Efter en längre tids (ca. 1 mån) användning av denna cell skulle en serie impulssvar för första ordningens system mätas. Efter ett tiotal kurvor började den experimentella kurvan avvika från den teoretiska exponentialkurvan och efter ytterliggare tio kurvor var den experimentella kurvan ej exponentiell. Mätcellens linjäritet kontrollerades och den visade sig vara olinjär. Lutningen på kurvan avtog med ökad koncentration. Någon förändring av elektrodytan kunde ej observeras. Då man sköljer elektroderna i väteperoxid blandad med saltsyra, blir mätcellen åter linjär. 18 karat guld innehåller 25% koppar, varför det troligen bildats kopparoxid på ytan av elektroderna.



Figur 7

Mätcell med platinaelektroder  
(före kontakterna lödats på)

- ① Pt-ELEKTROD
- ② PLEXIGLASRÖR
- ③ PLASTSLANG, 10 x 13,5 MM
- ④ PLASTSLANG, 8 x 11 MM
- ⑤ SLANGKOPPLING

SKALA 1:1

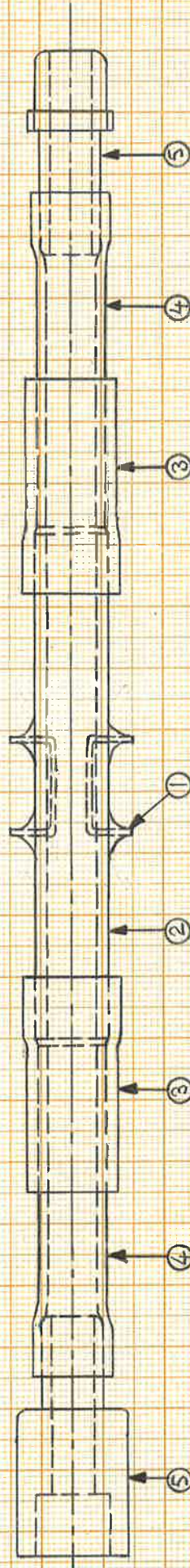
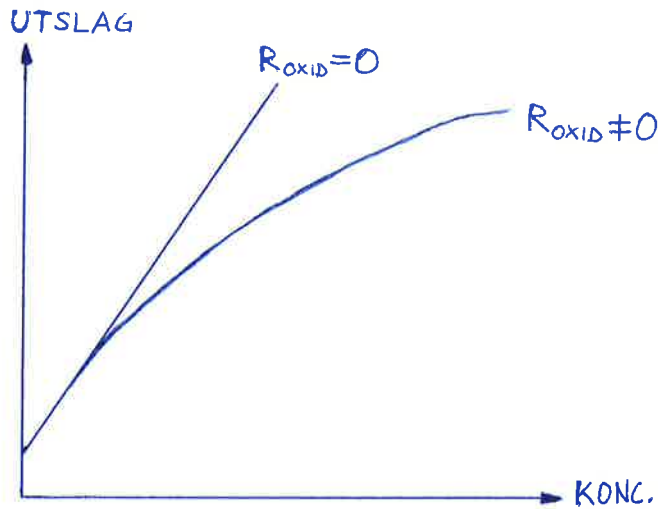
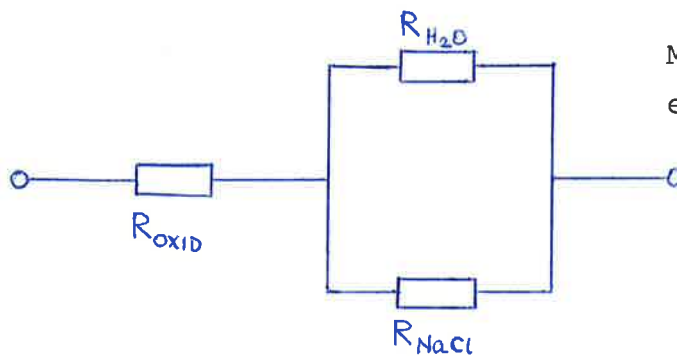




Diagram över linjäriteten, för mätcell med oxid på elektroderna, har följande utseende:



Kurvan är olinjär vilket förklaras av följande:



Mätcellens elektriska ekvivalens.

$$\text{KONDUKTANSEN, } G_{\text{TOT}} = \frac{1}{R_{\text{OXID}} + \left( \frac{R_{\text{H}_2\text{O}} \cdot R_{\text{NaCl}}}{R_{\text{H}_2\text{O}} + R_{\text{NaCl}}} \right)} =$$

$$\frac{1}{\frac{1}{G_{\text{OXID}}} + \frac{1}{G_{\text{H}_2\text{O}} + G_{\text{NaCl}}}} = \frac{G_{\text{H}_2\text{O}} + G_{\text{NaCl}}}{1 + \frac{G_{\text{H}_2\text{O}} + G_{\text{NaCl}}}{G_{\text{OXID}}}}$$

Om  $G_{\text{oxid}} \rightarrow \infty$  medför detta:  $G_{\text{tot}} = G_{\text{H}_2\text{O}} + G_{\text{NaCl}}$ , vilket är det önskade. Utslaget blir lika med  $K_1(G_{\text{H}_2\text{O}} + K_2(\text{Na}^+\text{Cl}^-))$ .

Att skölja elektroderna i syror ger samma resultat som för koppar-elektroderna, men det blir svårt att reproducera resultaten. Ny mätcell måste konstrueras.

#### Femte försöket till mätcell

Denna har samma utseende som ovanstående, fig. 7, men med den skillnaden att elektroderna består av ren platina med en längd av 1.5 cm och diameter 0.8 mm. Denna mätcell har använts i alla experiment som redovisats här och fungerat utmärkt.

OBS! Som sista fas i tillverkningen skall mätcellen sköljas med koncentrerad saltsyra blandat med 35% väteperoxid. Detta för att avlägsna fett och olja, som fastnat vid tillverkningen.

#### 2.4 KONSTRUKTION AV TIDSFÖRDRÖJNING

En tidsfördröjning i ett flödessystem åstadkommes enklast genom att koppla in en lång slang vid önskat ställe. Slangen innesluts lämpligen i en tank. På detta vis får man en anordning, som är mindre skrymmande och lätt att handskas med. Slangen, som i vårt fall är 8.5 meter lång och har en innerdiameter på 8 millimeter, lades i en spiral i en fyraliters tank. I tanken finns två fastmonterade kopplingar, som slangen sattes fast vid. Dessa utgör in- och utlopp till tidsfördröjningen.

Vid pluggflöde blir tidsfördröjningen,

$$T = \frac{\text{Slangvolymen}}{\text{Flödet}} = \frac{\pi R^2 l}{q}, \quad R^2 l = 25.6 \text{ l}$$

Upptagning av impulssvar visar att man inte får en ren tidsfördröjning, med T enligt ovan. Tidsfördröjningens egenskaper behandlas närmare under avsnittet "Impulssvar för tidsfördröjningen".



### 3.1 GRUNDLÄGGANDE SAMBAND OCH FORMLER

Om man antar att omrörningen i tanken är perfekt och att ingen tidsfördröjning förekommer, så kan man härleda impuls-svaret för tanken. Tankens effektiva volym betecknas  $V_T$  och volymflödet  $q$ . Koncentrationen i tanken, som vid varje tidpunkt är lika i alla delar av tanken, betecknas med  $c(t)$ . Vid tidpunkten  $t=0$  så är koncentrationen  $c_0$ . För koncentrationen gäller

$$c(t) = c_0 - \int_0^t \frac{q c(t)}{V_T} dt$$

Derivation av koncentrationen ger

$$\frac{dc(t)}{dt} = -\frac{q}{V_T} c(t)$$

Lösningen till denna första ordningens differentialekvation är

$$c(t) = C e^{-\frac{q}{V_T} \cdot t}$$

Men eftersom  $c(0) = c_0$  så fås koncentrationen till

$$c(t) = c_0 e^{-\frac{q}{V_T} \cdot t}$$

Vid injicering av en impuls i tanken, vid tidpunkten  $t=0$ , så fås en koncentration

$$c(0) = c_0 = \frac{V_i c_i}{V_T}$$

Där  $V_i$  är den injicerade volymen mättad saltlösning och  $c_i$  betecknar den mättade saltlösningens koncentration. Impuls-svaret fås nu till

$$c(t) = \frac{V_i c_i}{V_T} e^{-\frac{q}{V_T} \cdot t}$$

Om man nu inför instrumentutslaget,  $y(t) = K c(t)$ , så fås impulssvaret till

$$y(t) = \frac{V_i K c_i}{V_T} e^{-\frac{q}{V_T} \cdot t}$$

Laplacestransformeras  $y(t)$  fås

$$Y(s) = \frac{V_i K_{ci}}{V_T} \cdot \frac{1}{s + \frac{q}{V_T}}$$

Impulsens funktion  $u(t) = \frac{V_i K_{ci}}{q} \cdot \delta(t)$  laplacestransformeras

varvid man får  $U_{imp.}(s) = \frac{V_i K_{ci}}{q}$ .

Tankens överföringsfunktion  $G(s)$  fås nu ur ovanstående formler

$$Y(s) = U_{imp.}(s) \cdot G(s) = \frac{V_i K_{ci}}{q} \cdot \frac{q/V_T}{s + q/V_T}$$

$$\therefore G(s) = \frac{q/V_T}{s + q/V_T}$$

Sammanfattning:

Tankens överföringsfunktion,

$$G(s) = \frac{q/V_T}{s + q/V_T}$$

Impulsens överföringsfunktion,

$$U_{imp.}(s) = \frac{V_i K_{ci}}{q}$$

Laplacestransformationen av en stegfunktion anges också här

$$U_{steg}(s) = \frac{C' c_i K}{s}$$

Där  $C'$  betecknar hur stor del av den injicerade saltlösningen som utgöres av mättad saltlösning.

### 3.2 BESTÄMNING AV $Kc_i$

Produkten  $Kc_i$  måste bestämmas för att kunna räkna ut teoretiska kurvor. Vi vet från föregående avsnitt att

$$\begin{cases} y = Kc \\ c = C'c_i \end{cases}$$

Där  $y$  är totala instrumentutslaget minus bakgrundsvärdet och

$$C' = \frac{V_{\text{MÄTTAD SALT LÖSNING}}}{V_{\text{MÄTTAD SALT LÖSNING}} + V_{\text{VATTEN}}}$$

Vi får då

$$Kc_i = \frac{y}{C'}$$

$Kc_i$  bestäms alltså genom att fylla mätcellen med saltlösning med känt  $C'$  och avläsa  $y$  och sedan dividera. OBS!  $Kc_i$  bör bestämmas för varje tillredd mättad saltlösning.

### 3.3 ICKE-IDEALA PULSER

Ett systems egenskaper undersökes lättast genom att skicka in en impuls,  $\delta(t)$ , i systemet. Utsignalen blir då ekvivalent lika med impulssvaret för systemet.

$\therefore y(t) = h(t)$  om  $u(t) = \delta(t)$ ;  $h(t)$  betecknar impulssvaret.

$$\mathcal{L}[h(t)] = G(s)$$

$G(s)$  betecknar överföringsfunktionen.

I praktiken är det ej möjligt att introducera en perfekt puls i ett system. Det är därför naturligt att fråga hur resultatet av impulssvarsanalysen beror av pulsens utseende. Förutsatt att systemet är initialt i vila gäller

$$\hat{h}(t) = \int_0^t h(t-s) u(s) ds$$

Där  $\hat{h}(t)$  betecknar svaret på en icke ideal puls  $u(t)$ . Insignalen är, med den injiceringsmetod som användes, mycket likt en fyrkantpuls. Således blir insignalen efter normering,

$$u(t) = \begin{cases} 1/T & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$



Där  $T$  betecknar injicerings tiden. Det skattade impulssvaret blir då

$$\hat{h}(t) = \int_0^t h(t-s)u(s)ds = \left| \begin{array}{l} s' = t-s \\ ds' = -ds \end{array} \right| =$$

$$\int_0^t h(s')u(t-s')ds' = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t h(s')d(s')$$

Värdet av det skattade impulssvaret vid tiden  $t$  är således medelvärde av det sanna impulssvaret över tidsintervallet  $(t-T, t)$ .

En tank kan betraktas som ett första ordningens system med

$$h(t) = \begin{cases} a e^{-at} & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$

Det skattade impulssvaret blir då

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t a e^{-as'} ds' = \begin{cases} \frac{1}{T} (e^{-a(t-T)} - e^{-at}) & ; t \geq T \\ \frac{1}{T} (1 - e^{-at}) & ; t < T \end{cases}$$

Relativa skattningsfelet

$$r(t) = \frac{h(t) - \hat{h}(t)}{h(t)} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{aT} (e^{aT} - 1) & ; t \geq T \\ 1 - \frac{1}{aT} (e^{at} - 1) & ; t < T \end{cases}$$

Om  $t \geq T$  och  $aT$  litet så gäller

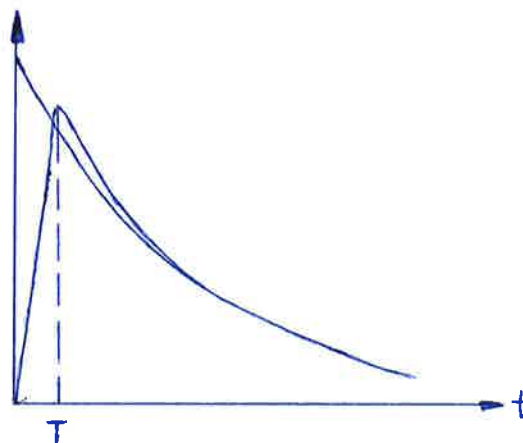
$$r(t) \approx 1 - \frac{1}{aT} \left( 1 + aT + \frac{a^2 T^2}{2} - 1 \right) = -\frac{aT}{2} \quad (\text{Oberoende av } t)$$

För att få en uppfattning av storleken på  $r(t)$  så beräknas några punkter för ett system med  $a=0.03 \text{ s}^{-1}$ . Injicerings-tiden,  $T$ , uppskattas till en sekund vid injicerings-volymer upp till 8 ml.

$$r(t) = \begin{cases} -0,015 ; & t \geq 1\text{s} \\ 1 - \frac{1}{0,03}(e^{0,03t} - 1) ; & t < 1\text{s} \end{cases}$$

$t$ [s]	$r(t)$ [%]
0	100
0,25	75
0,50	50
0,75	24
1,0 OCH STÖRRE	-1,5

GROV  
SKISS  
⇒



Effekten av icke-ideala pulser yttrar sig alltså på två sätt för ett första ordningens system

1)  $t < T$ , det skattade impulssvaret har lägre värde än det sanna impulssvaret i tidsintervallet  $(0, 0.99T)$ .  $r(t)$  minskar emellertid när  $t$  närmar sig  $T$ .

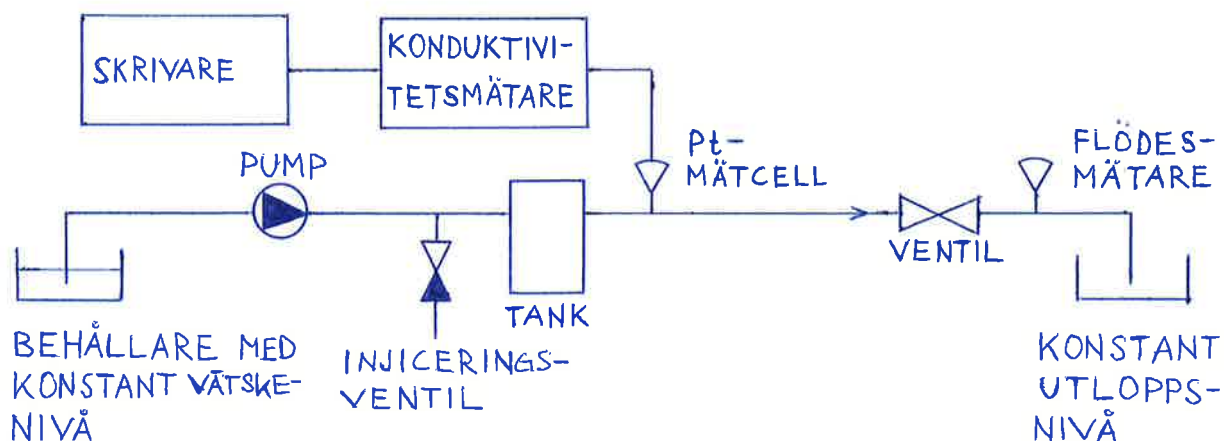
2)  $t > T$ , det skattade impulssvaret ligger konstant över det sanna impulssvaret.

$$r(t) \approx -\frac{aT}{2}$$

Ur ovanstående kan man dra slutsatsen: Effekten av icke-ideala pulser inverkar ringa om  $T$  ej överstiger 1 s och systemets  $a \leq 0.04 \text{ s}^{-1}$  ( $a = \frac{q}{V_T} = \frac{1}{\tau}$ ).  $r(t)$  blir då mindre än 2% när  $t > 1 \text{ s}$ .

#### 4.1 IMPULSSVAR FÖR EN TANK

Försökupställning:



Impulssvar togs upp för tre olika tankstorlekar. Sex olika flöden användes för varje tank. Flöde, tankstorlek och injiceringsvolym för de olika kurvorna finns i tabell (sid 24). Dessa kurvor utnyttjades för att kontrollera huruvida tankarna är första ordningens system. Kurvorna ligger också till grund för bestämning av begränsningar på flöde och tankvolym. I kurvorna lades teoretiskt bestämda punkter in. Kurvorna återfinns på sidorna 25-31.

Formeln för en ideal kurva fås ur

$$Y_{\text{Imp.}}(s) = U_{\text{Imp.}}(s) G(s) = \frac{V_i K c_i}{q} \cdot \frac{q/V_T}{s + q/V_T}$$

Vilket ger

$$Y_{\text{Imp.}}(t) = \frac{V_i K c_i}{V_T} e^{-\frac{q}{V_T} \cdot t}$$

Denna formel är emellertid ej fullständig. Två modifieringar måste göras.

- 1) Ett bakgrundsvärde måste läggas till. Detta pga vattnets konduktans. För Pt-mätcellen är bakgrundsvärdet cirka 4800 enheter.
- 2) Masstransporttiden är av icke försumbar storlek. Detta yttrar sig i en tidsfördröjning för utsignalen. Tidsfördröjningen beror av tankstorlek och flöden, även slanglängden från injiceringsstället till mätcellen inverkar.



Den fullständiga formeln får följande utseende:

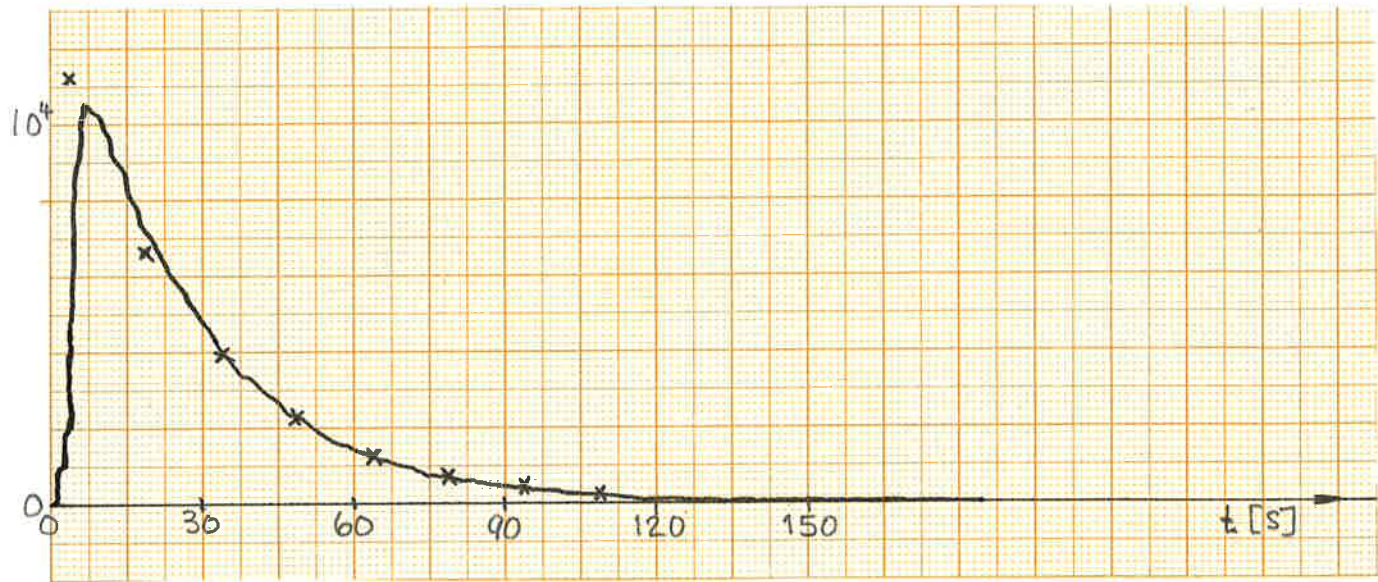
$$Y_{\text{Imp.}}(t) = \begin{cases} \frac{V_i K c_i}{V_T} e^{-\frac{q(t-T)}{V_T}} + Y_{\text{Bakgr.}} & ; t \geq T \\ Y_{\text{Bakgr.}} & ; t < T \end{cases}$$

T anger här tidsfördröjningen och  $Y_{\text{bakgr.}}$  bakgrundsvärdet.

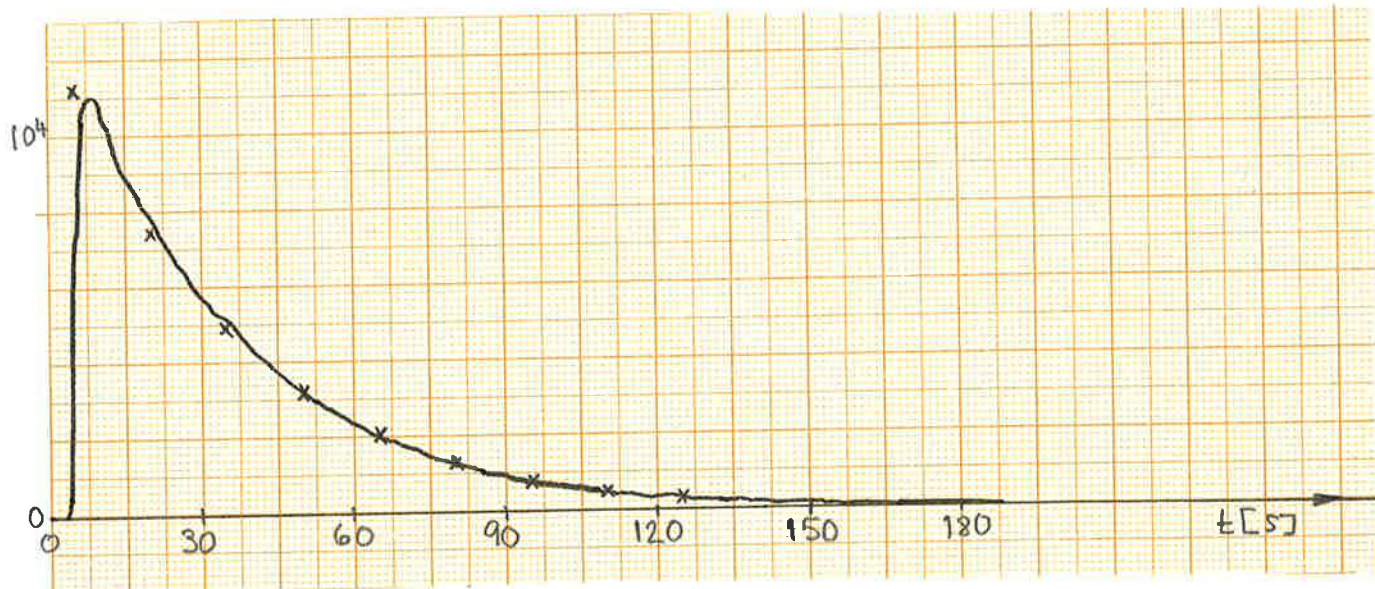
Vid kopieringen har bakgrundsvärdet dragits ifrån. Detta för att kurvorna ska bli mer lättöverskådliga.

Pga den något diffusa uppgången på de uppmätta kurvorna, så måste T anpassas vid inläggningen av de teoretiska punkterna. Övriga parametrar överensstämmer med tabellens.

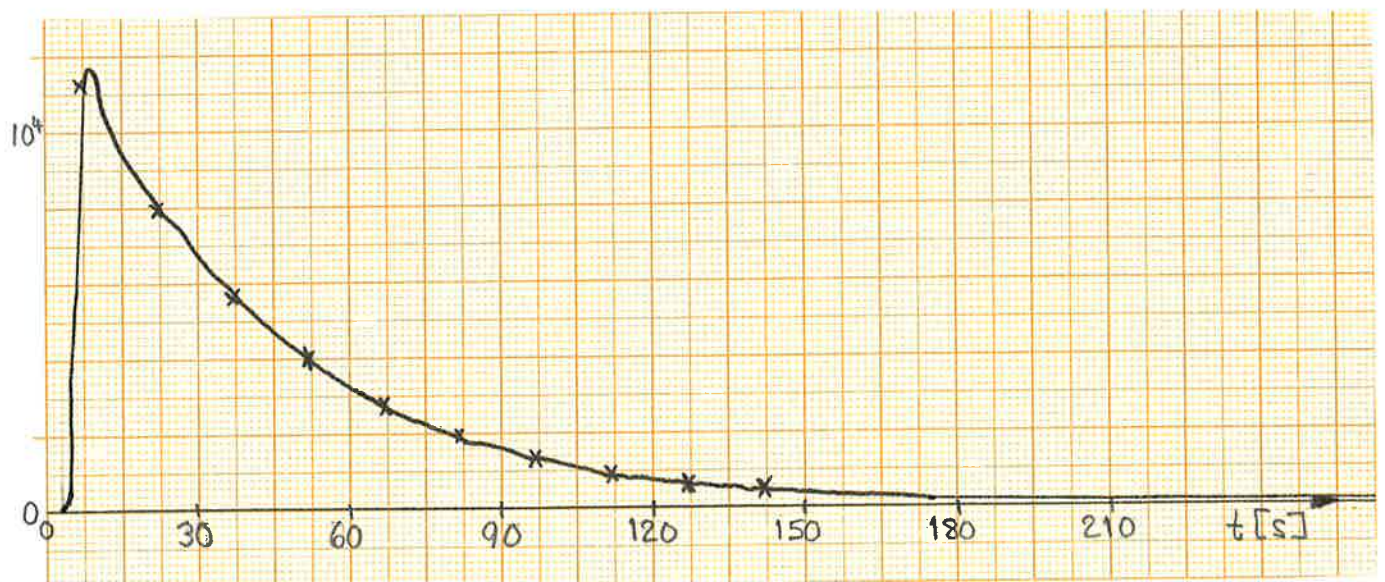
Kurva	$V_T$ (l)	$q$ (l/min.)	$V_i$ (ml)	T (sek.)
E1	1.05	2.28	3.0	3.5
E2	1.05	1.81	3.0	5.0
E3	1.05	1.50	3.0	7.0
E4	1.05	1.10	3.0	6.0
E5	1.05	0.70	3.0	6.0
E6	1.05	0.30	3.0	15.0
E7	0.63	2.32	2.0	3.0
E8	0.63	1.90	2.0	4.0
E9	0.63	1.50	2.0	1.5
E10	0.63	1.10	2.0	5.0
E11	0.63	0.70	2.0	7.5
E12	0.63	0.30	2.0	17.0
E13	0.27	1.70	1.0	2.0
E14	0.27	1.40	1.0	2.0
E15	0.27	1.10	1.0	3.0
E16	0.27	0.80	1.0	4.0
E17	0.27	0.50	1.0	5.0
E18	0.27	0.20	1.0	17.0



E1

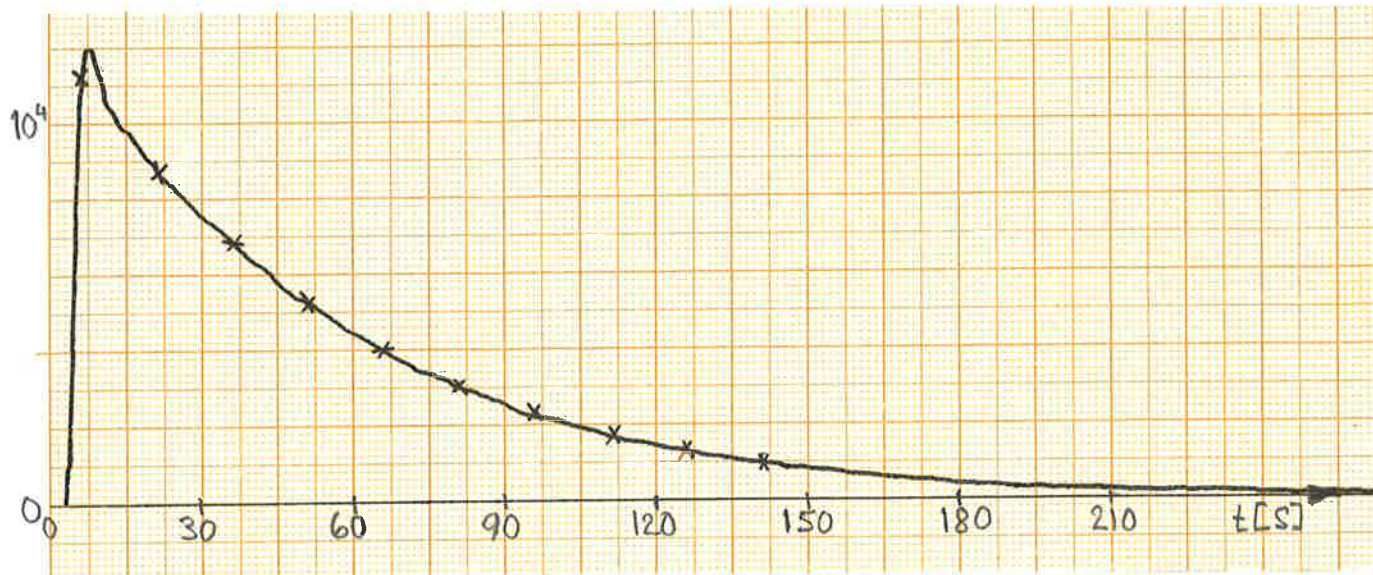


E2

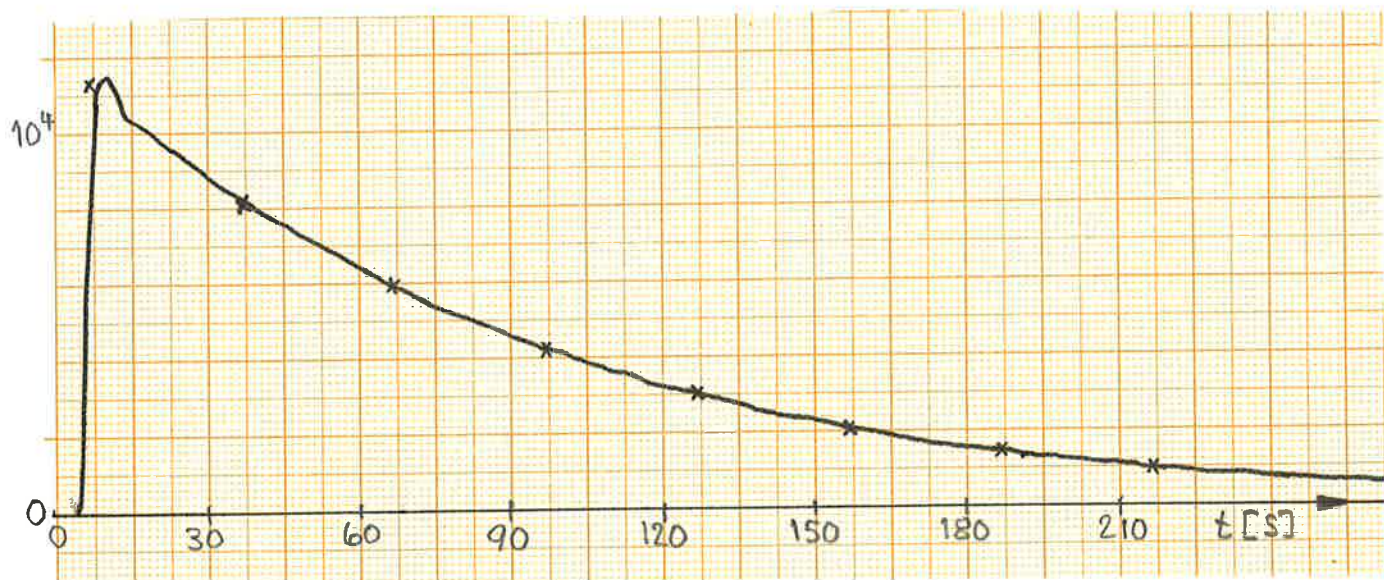


E3

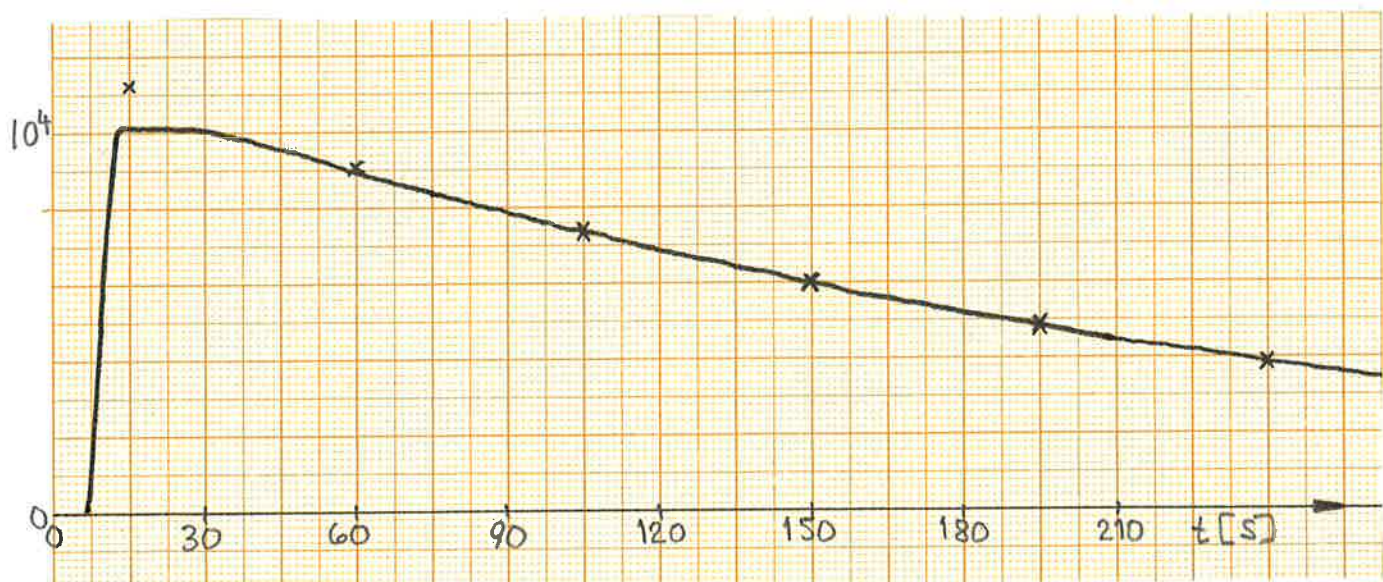




E4

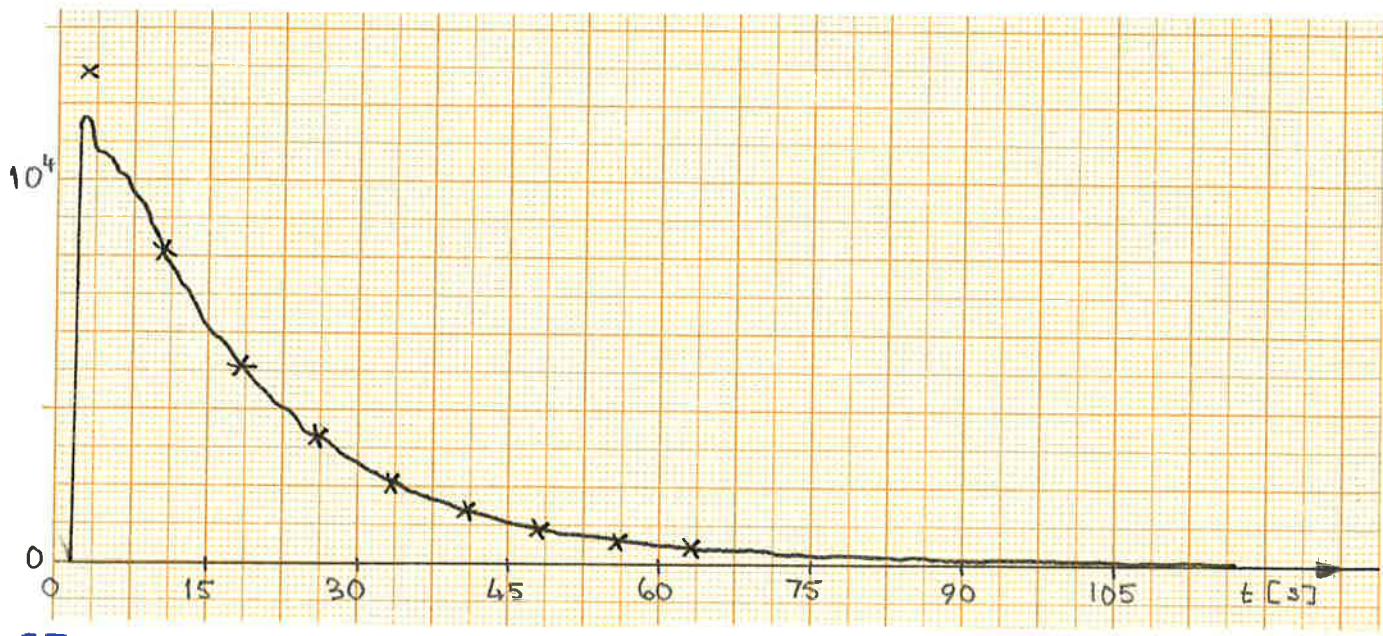


E5

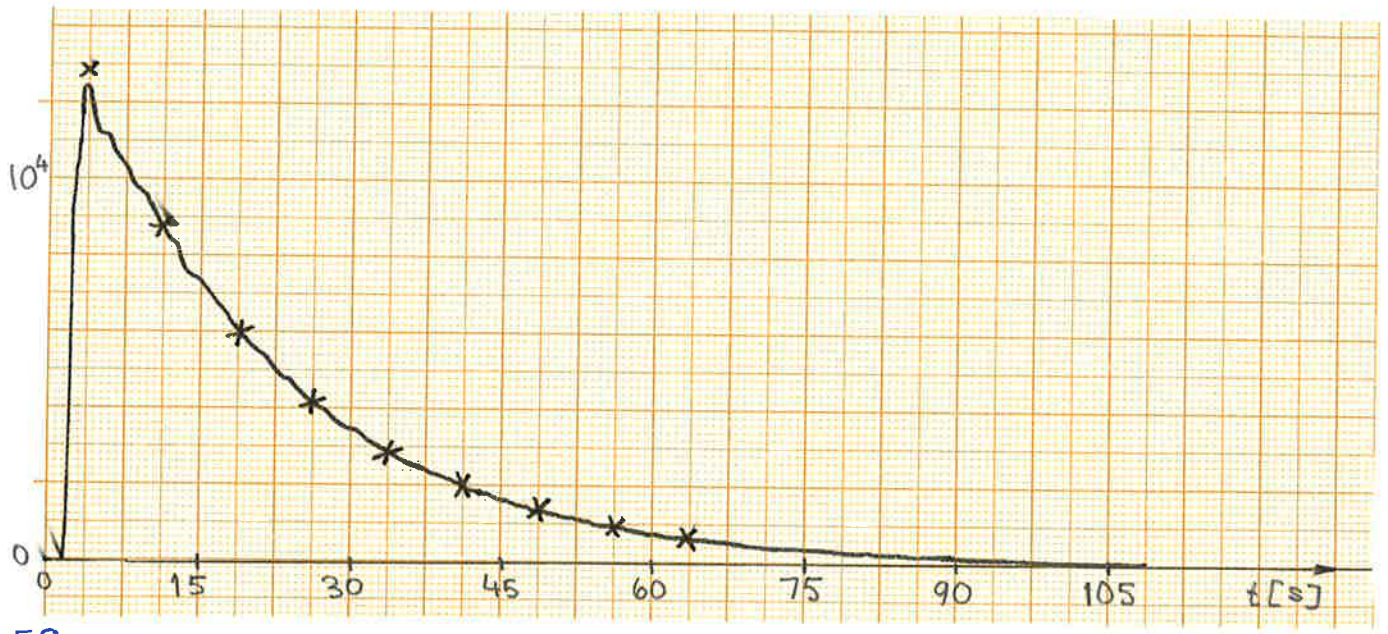


E6

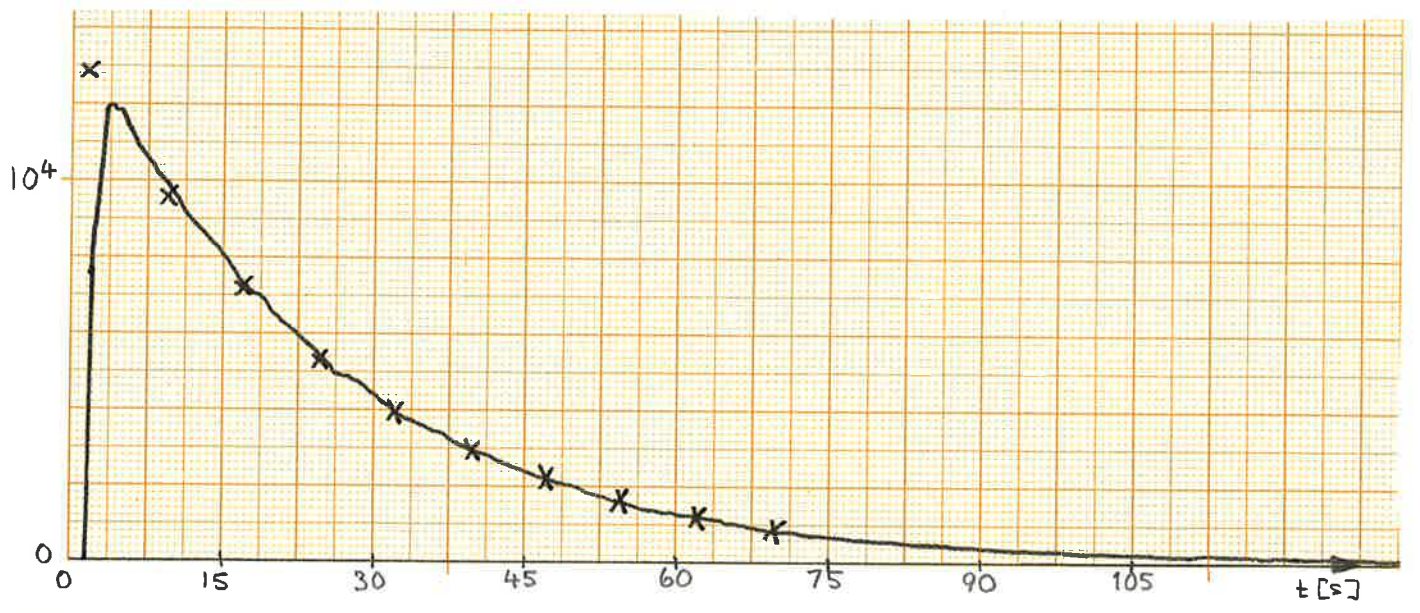




E7

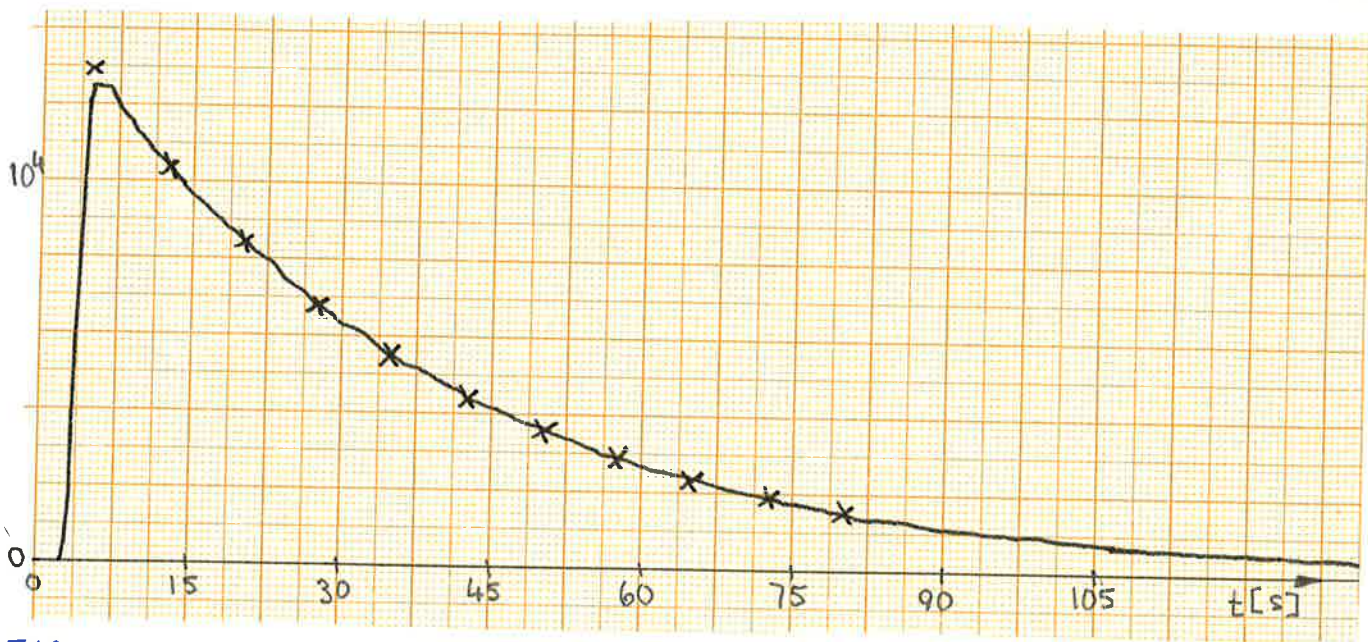


E8

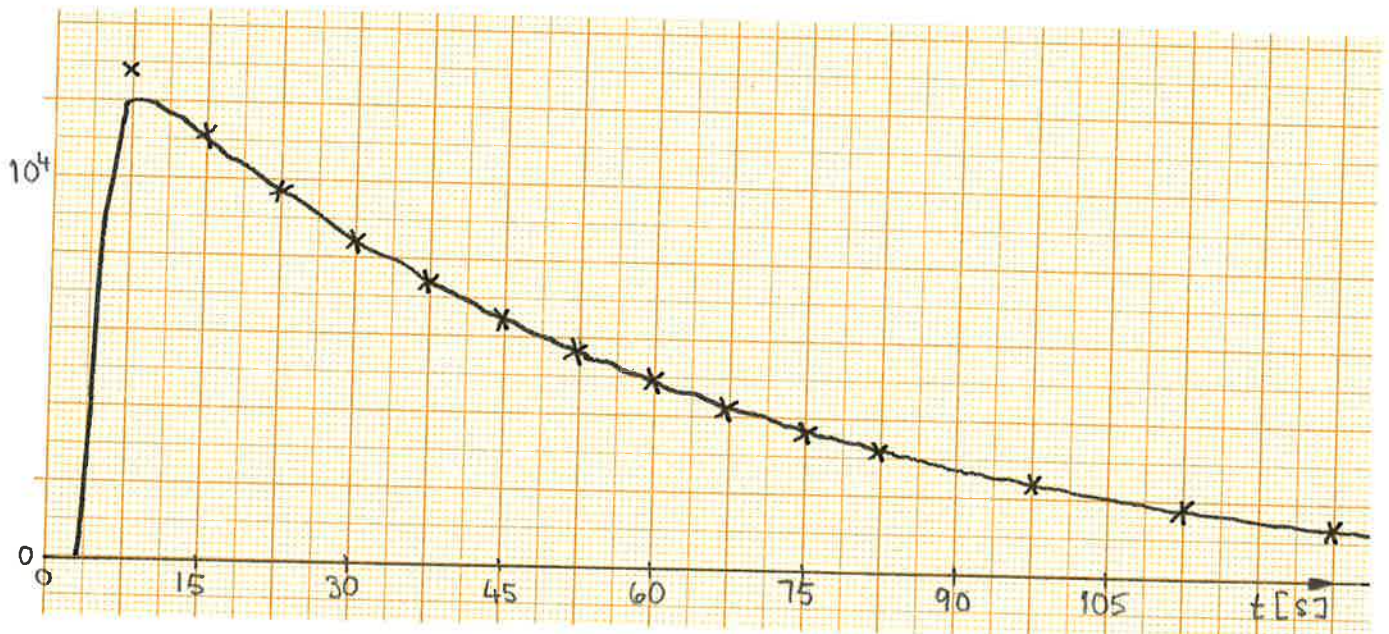


E9

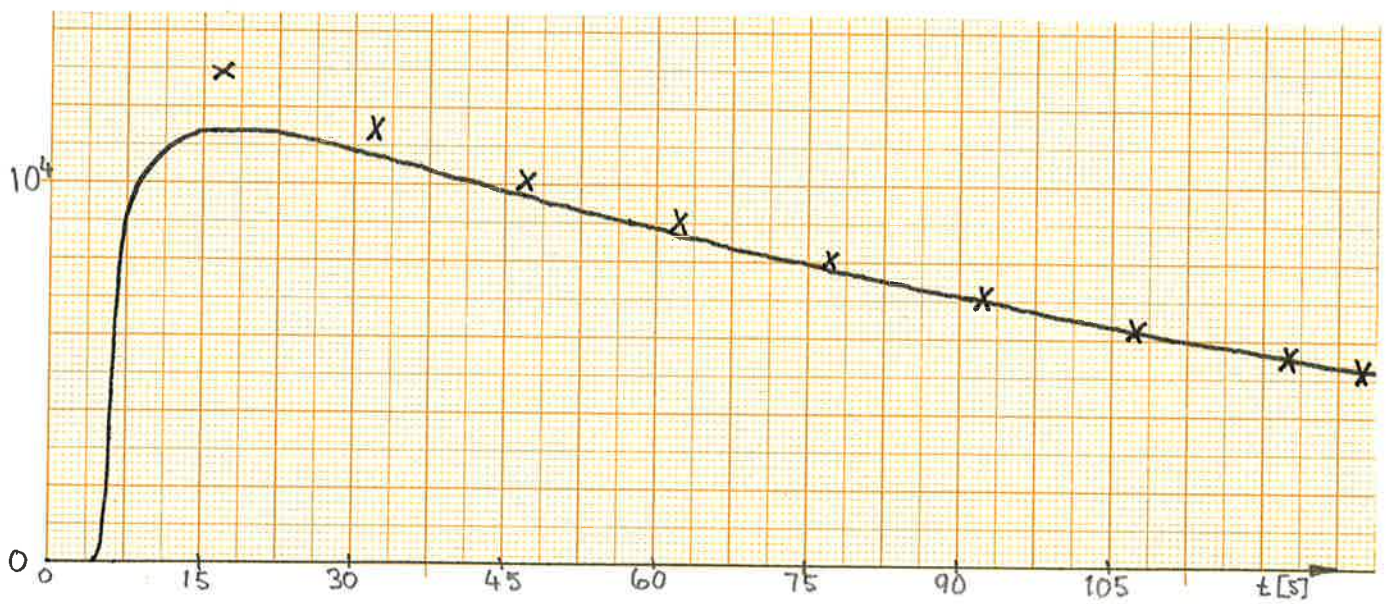




E10

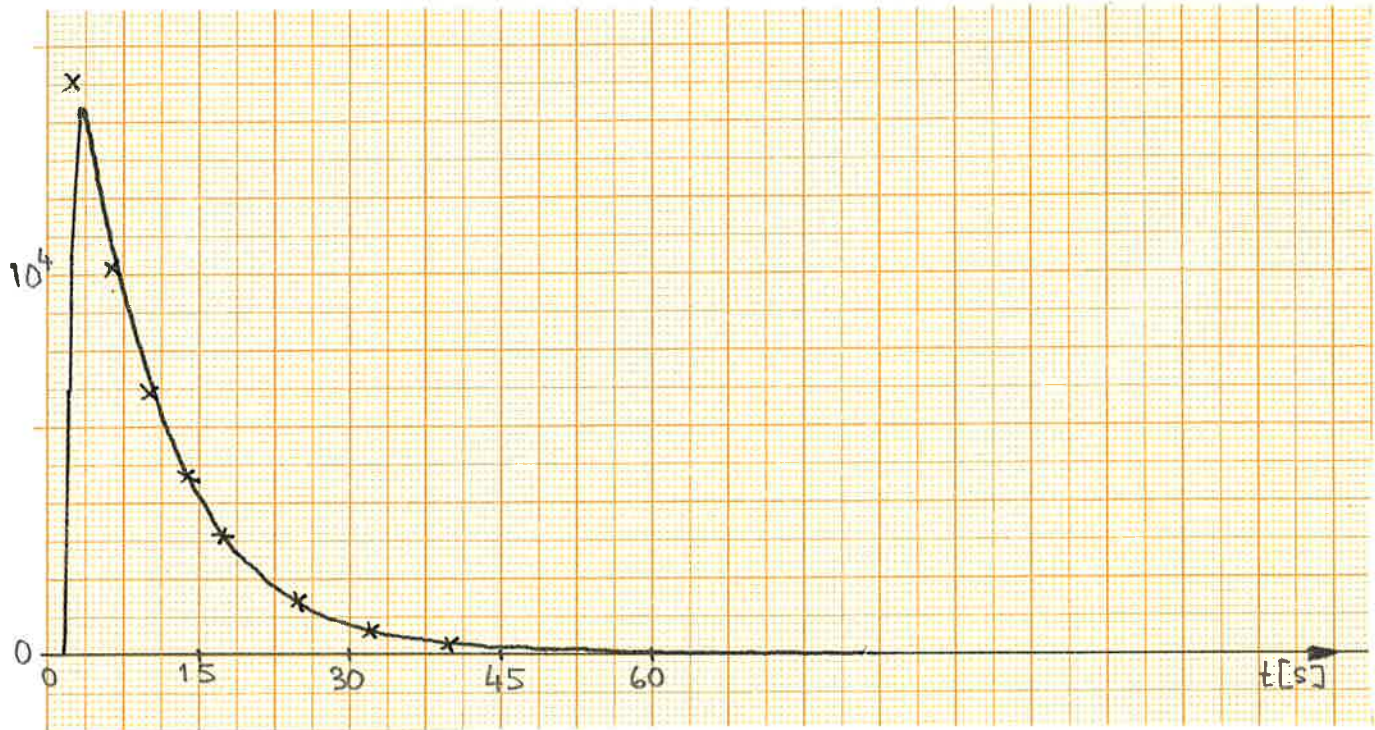


E11

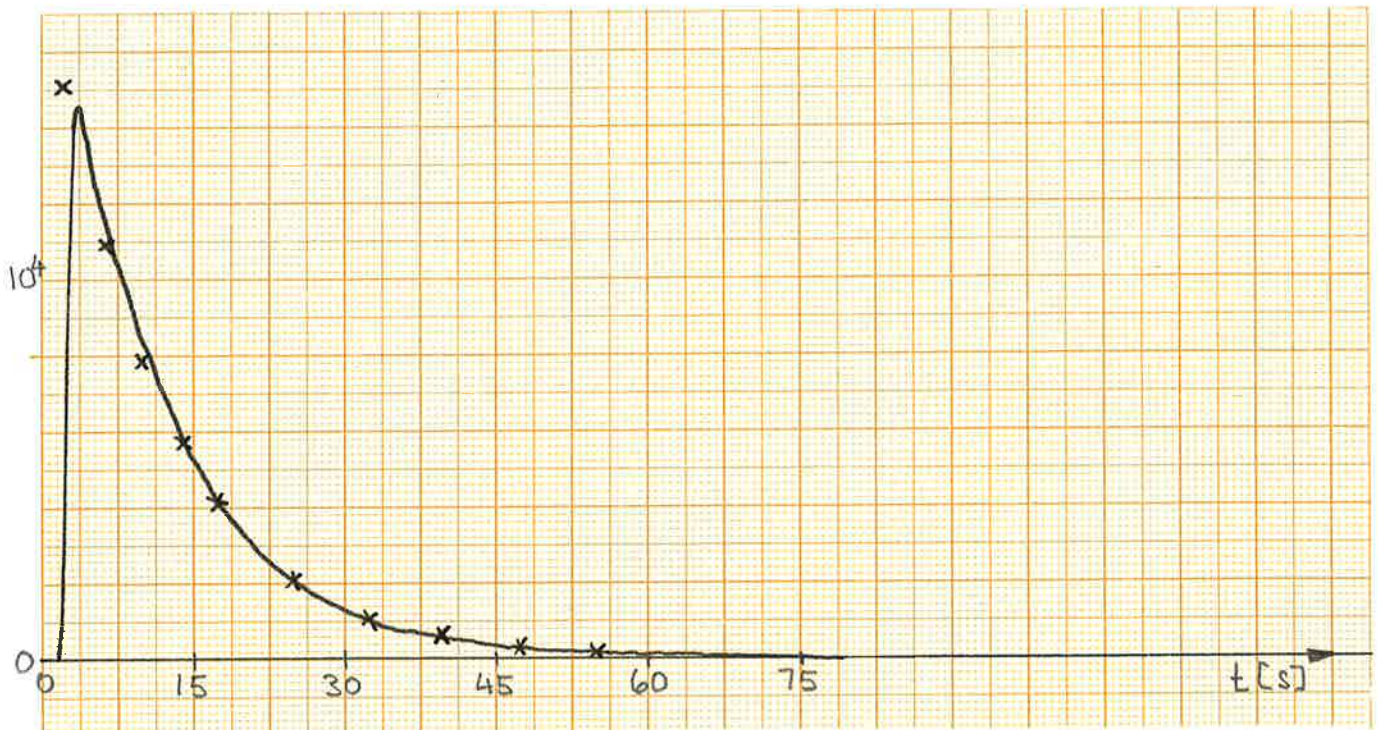


E12



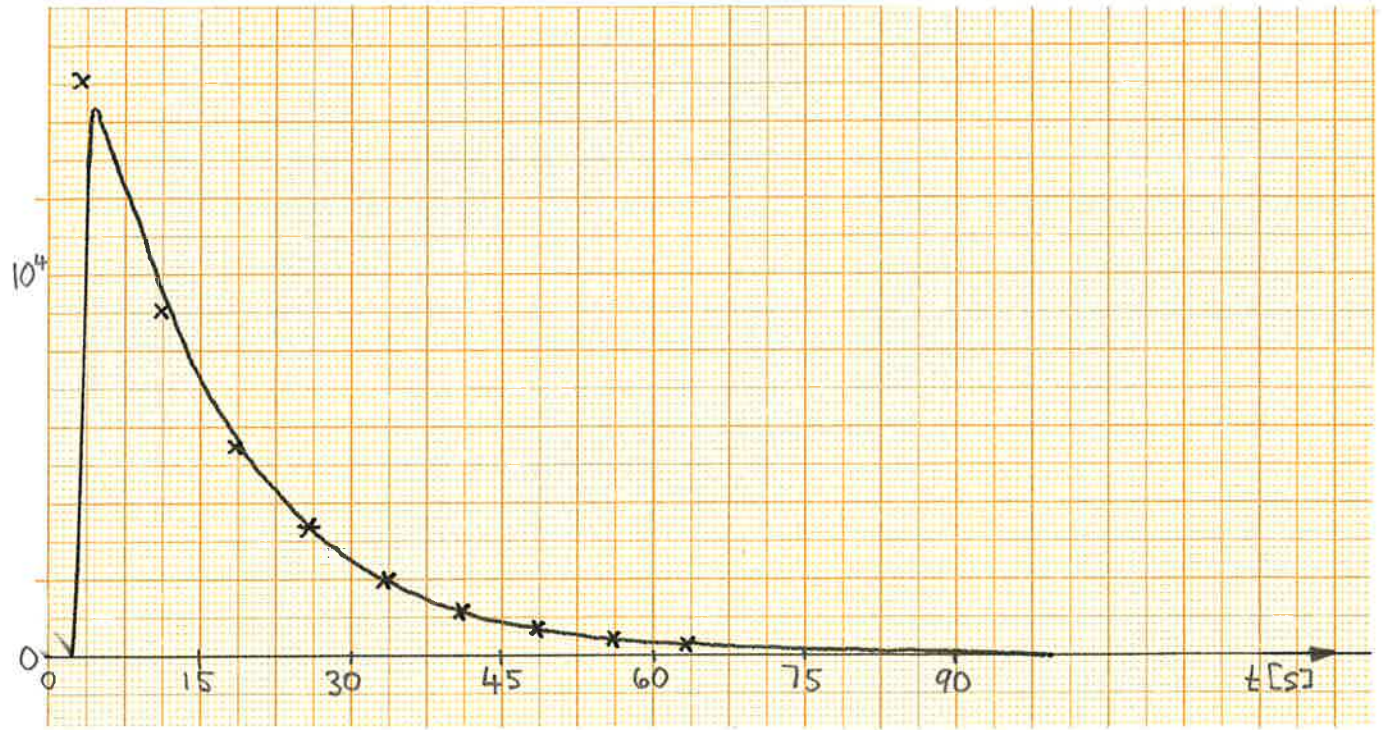


E13

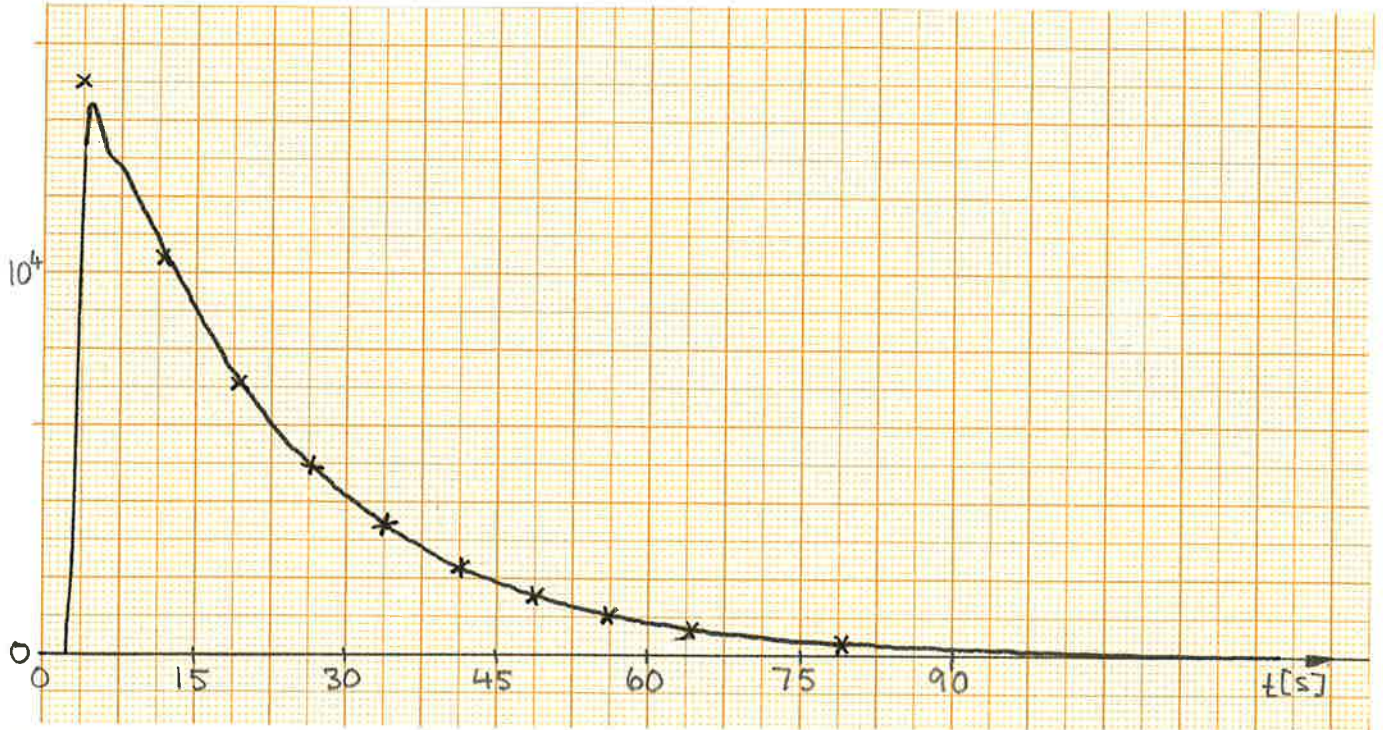


E14



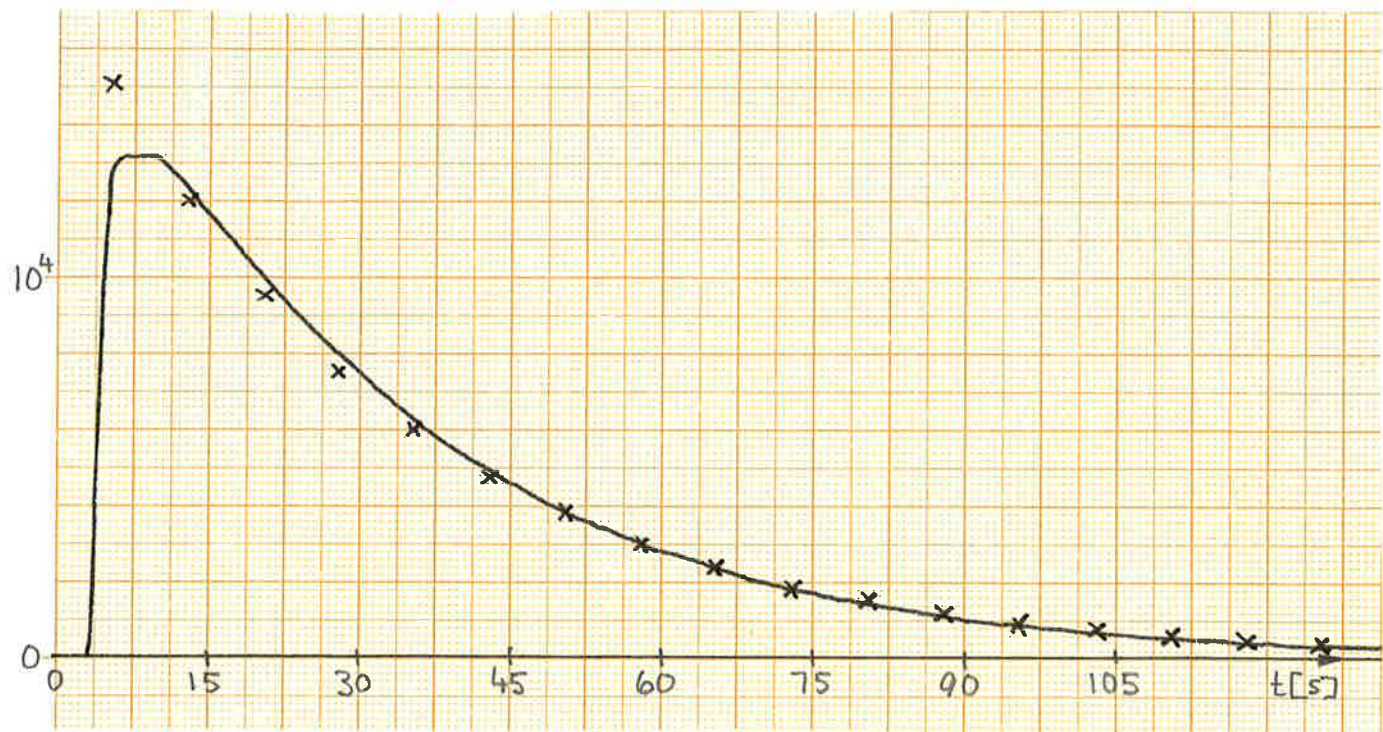


E15

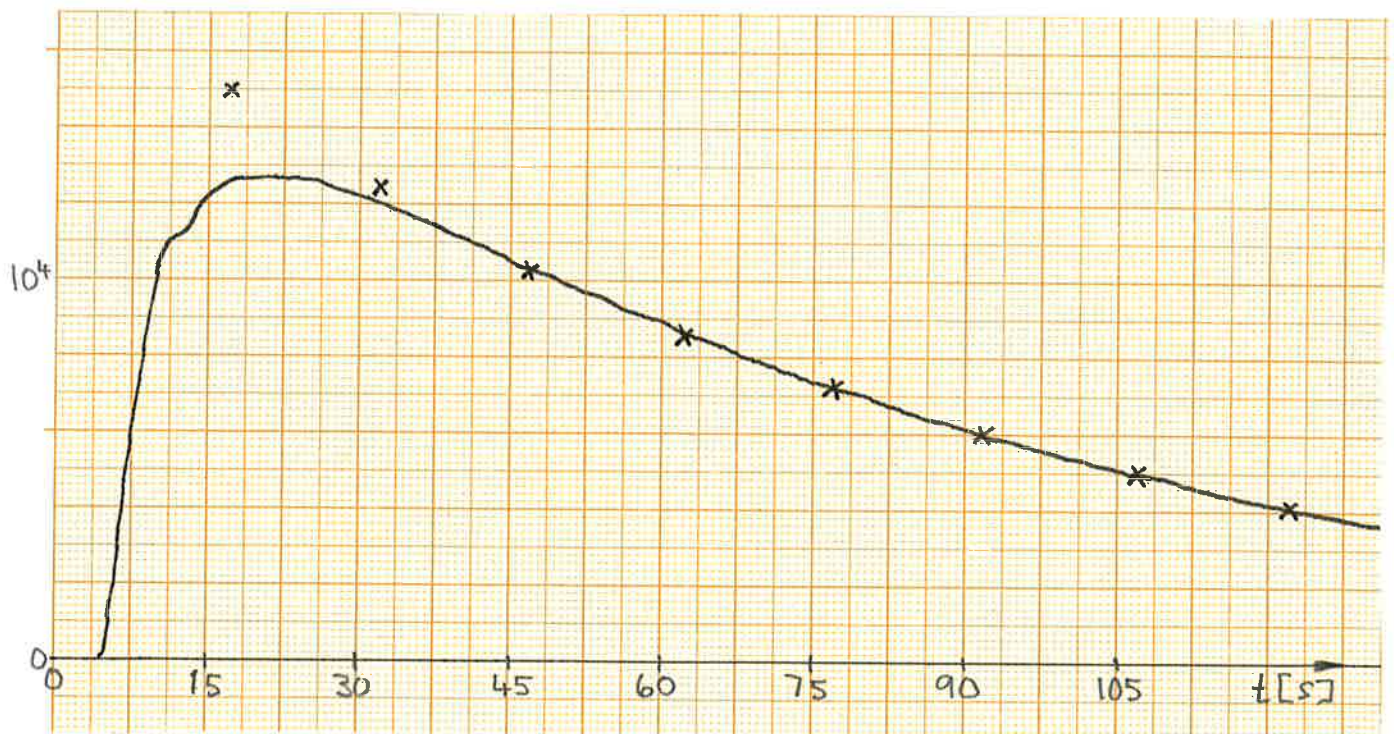


E16





E17



E18

### Kommentarer till kurvorna

$V_T = 1.05$  liter.

Impulssvaret vid  $q = 2.28$  lit./min., kurva E1, uppvisar två tydliga "knyckar" på uppgången. Dessa beror på att omrörningen i tanken ej är perfekt vid detta höga volymflöde. Man kan också observera, att kurvan ej uppvisar samma jämna kurvform som övriga med lägre flöde. Överensstämmelsen med den ideala kurvan är ej särskilt god förrän  $t \approx \tau = 28$  sek ( $\tau$  betecknar exponentialkurvas tidskonstant).

Kurvorna E2 - E5 ( $0.7 \leq q \leq 1.81$  lit./min.) har snabbare uppgångar och jämnare kurvformer. Överensstämmelsen med de ideala kurvorna är också god redan efter en liten tid. Det enda som bör anmärkas på är tendensen att få något för höga toppar, se t.ex. E4. Dessa beror på att omrörningen i denna stora tank ej är helt perfekt.

Impulssvaret för  $q = 0.3$  lit./min., E6, är i stort sett perfekt vad beträffar överensstämmelsen med den ideala kurvan. "Toppen" är emellertid för flat. Detta beror på att den injicerade saltlösningen är utsträckt vid låga flöden. Allt salt kommer inte in i tanken, och deltar i blandningsprocessen, förrän en del har lämnat densamma. Detta resulterar i att koncentrationen blir konstant under en viss tid.

Av dessa kurvor kan man dra slutsatsen, att volymflödet bör vara 0.5 - 2.0 lit./min. Vid dessa flöden kan man betrakta kurvorna som närmast ideala. Problemet med de något för höga topparna kan tolkas, som att man bör använda tankar med större volym än 1.05 lit. Kraftigare omrörare måste införskaffas om större tankar skall användas.

$V_T = 0.63$  liter.

Injicerad volym mättad saltlösning och tidsskalan har här ändrats vilket framgår av tabell. Detta för att få mer lättöverskådliga kurvor.

Kurva E7,  $q = 2.32$  lit./min., har en topp som är för låg. Toppen har också en oönskad form. Den experimentella kurvan sammanfaller emellertid relativt snabbt med ideala kurvan.



Upprepade upptagningar av impuls svar för detta flöde visar ett slumpartat utseende på topparna. Orsaken till detta är att omröraren lätt ändras ur sitt centrerade läge vid injiceringen. Kurvorna E8 - E11 ( $0.70 \leq q \leq 1.90$  lit./min) har i stort sett önskad kurvform. Överensstämmelsen med de ideala kurvorna är god. Topparna är emellertid ej helt korrekta, vilket till en viss del kan ha orsakats av konduktivitetens stora stigtid. Stigtiden, som anges i avsnittet "Apparatbeskrivning", är cirka 2 sekunder.

Impulssvaret vid  $q=0.3$  lit./min., kurva E12, uppvisar en avrundad topp och relativt dålig överensstämmelse med den ideala kurvan, åtminstone för  $t \approx 0.7\tau = 88$  sek.

Lämpliga flöden för denna tank ligger mellan 0.7 och 1.9 lit./min.

$$V_T = 0.27 \text{ liter.}$$

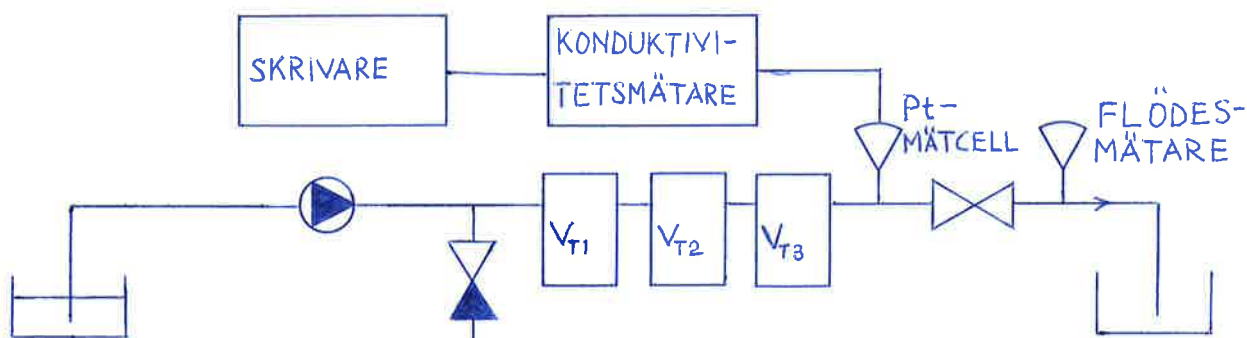
Kurvorna E13, E14 och E15 ( $1.10 \leq q \leq 1.70$  lit./min.) har något för höga värden, jämfört med de ideala kurvorna, för  $t$  mindre än  $\tau$ . Topparna för dessa kurvor har önskad form.

Kurva E16 sammanfaller så gott som perfekt med den ideala kurvan. E17 och E18 ( $q=0.5$  lit./min. resp.  $q=0.2$  lit./min.) har avrundade toppar. Kurva nummer E17 överensstämmer ej helt med den ideala kurvan medan E18 sammanfaller efter  $t \approx 0.5\tau = 40.5$  sek.

Lämpliga flöden ligger mellan 0.7 och 1.7 lit./min. för denna tank.

#### 4.2 IMPULSSVAR FÖR TVÅ RESPEKTIVE TRE TANKAR SERIEKOPPLADE

Försökuppställning:



Härledning av impulssvaret för två tankar i serie  
(tank 3 urkopplad):

$$\begin{cases} U(s) = \frac{V_i K_{Ci}}{q} \\ G(s) = G_1(s) G_2(s) = \frac{q/V_{T1}}{s + q/V_{T1}} \cdot \frac{q/V_{T2}}{s + q/V_{T2}} \end{cases}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{V_i K_{Ci} q}{V_{T1} V_{T2}} \cdot \frac{1}{s + q/V_{T1}} \cdot \frac{1}{s + q/V_{T2}}$$

$$\underline{V_{T1} = V_{T2} = V_T}$$

$$Y(s) = \frac{V_i K_{Ci} \cdot q}{V_T^2} \cdot \frac{1}{(s + q/V_T)^2}$$

Vilket ger impulssvaret

$$y(t) = \frac{V_i K_{Ci} q}{V_T^2} \cdot t e^{-\frac{q}{V_T} t}$$

$$\underline{V_{T1} \neq V_{T2}}$$

$$Y(s) = \frac{V_i K_{Ci} q}{V_{T1} V_{T2}} \cdot \frac{1}{s + q/V_{T1}} \cdot \frac{1}{s + q/V_{T2}}$$

Vilket ger impulssvaret

$$y(t) = \frac{V_i K_{Ci}}{(V_{T1} - V_{T2})} \left[ e^{-\frac{q}{V_{T1}} t} - e^{-\frac{q}{V_{T2}} t} \right]$$

Härledning av impulssvaret för tre tankar med samma  
volym i serie:

$$V_{T1} = V_{T2} = V_{T3} = V_T$$

$$\begin{cases} U(s) = \frac{V_i K_{Ci}}{q} \\ G(s) = G_1(s) G_2(s) G_3(s) = \left( \frac{q/V_T}{s + q/V_T} \right)^3 \end{cases}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \left( \frac{q/V_T}{s + q/V_T} \right)^3 \cdot \frac{V_i K_{Ci}}{q}$$

Vilket ger impulssvaret

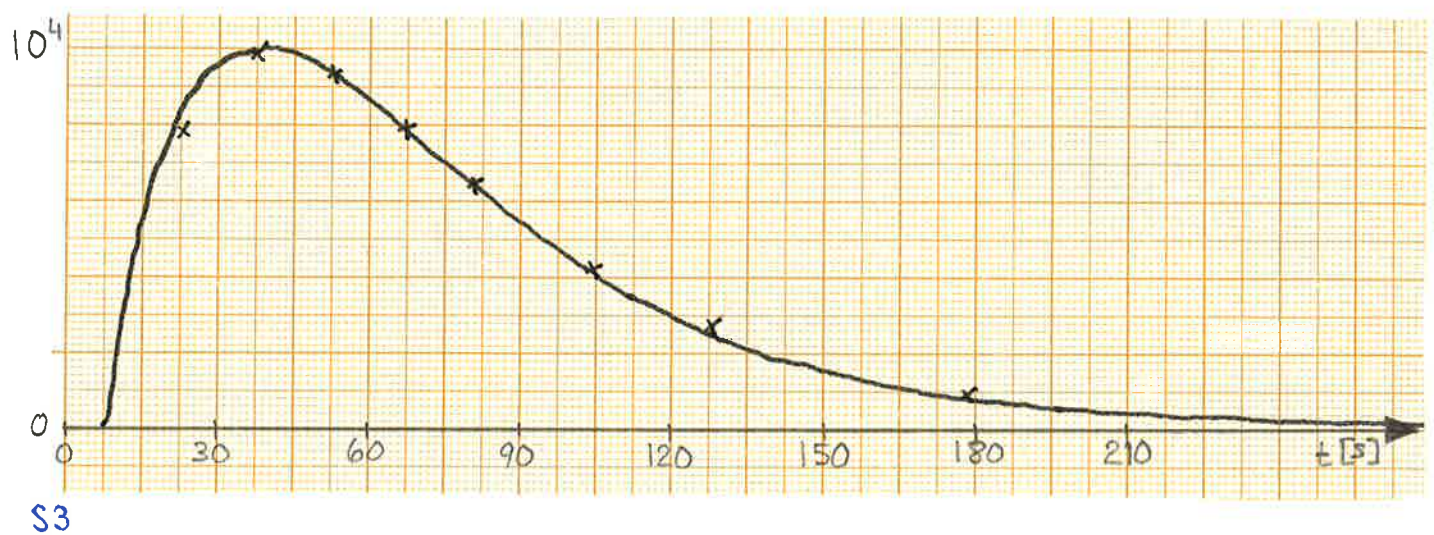
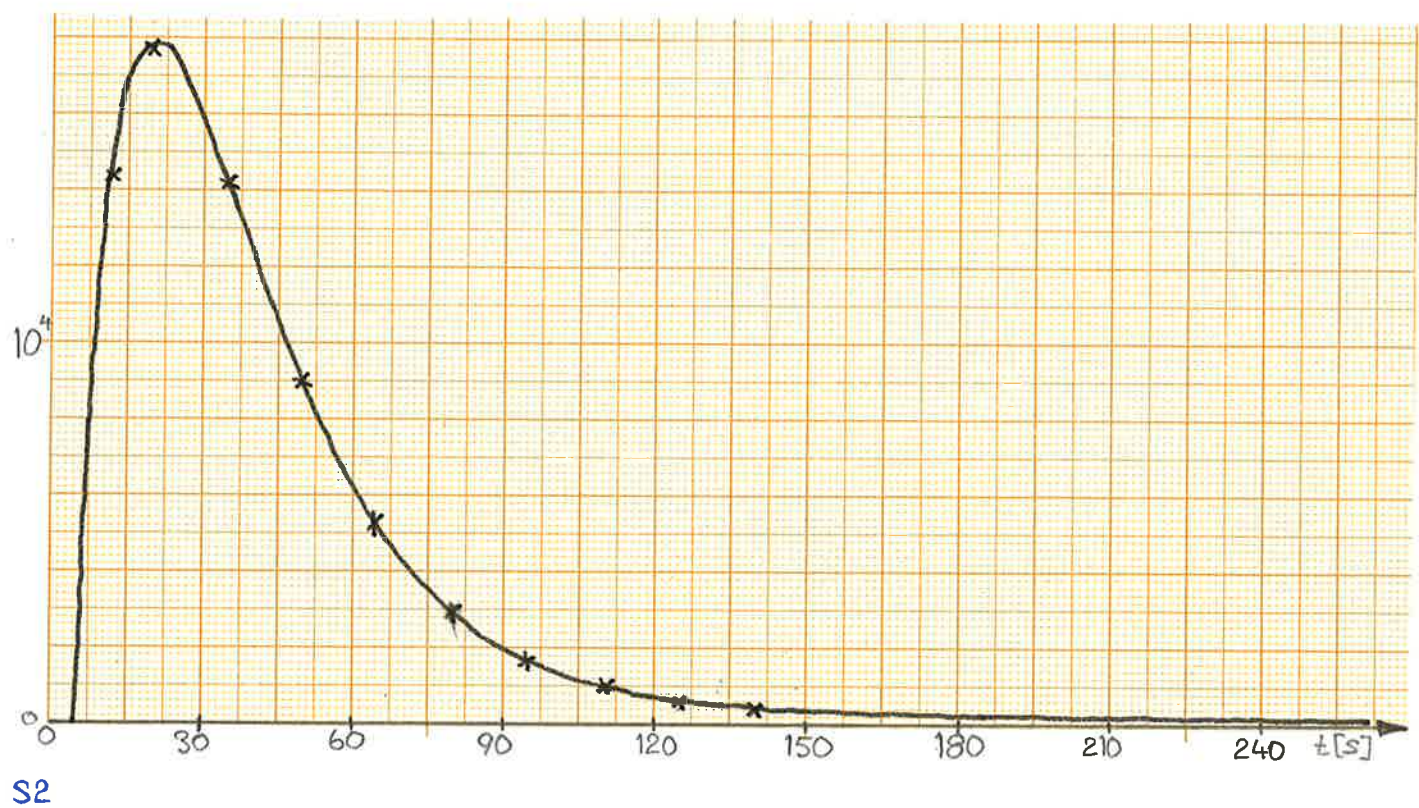
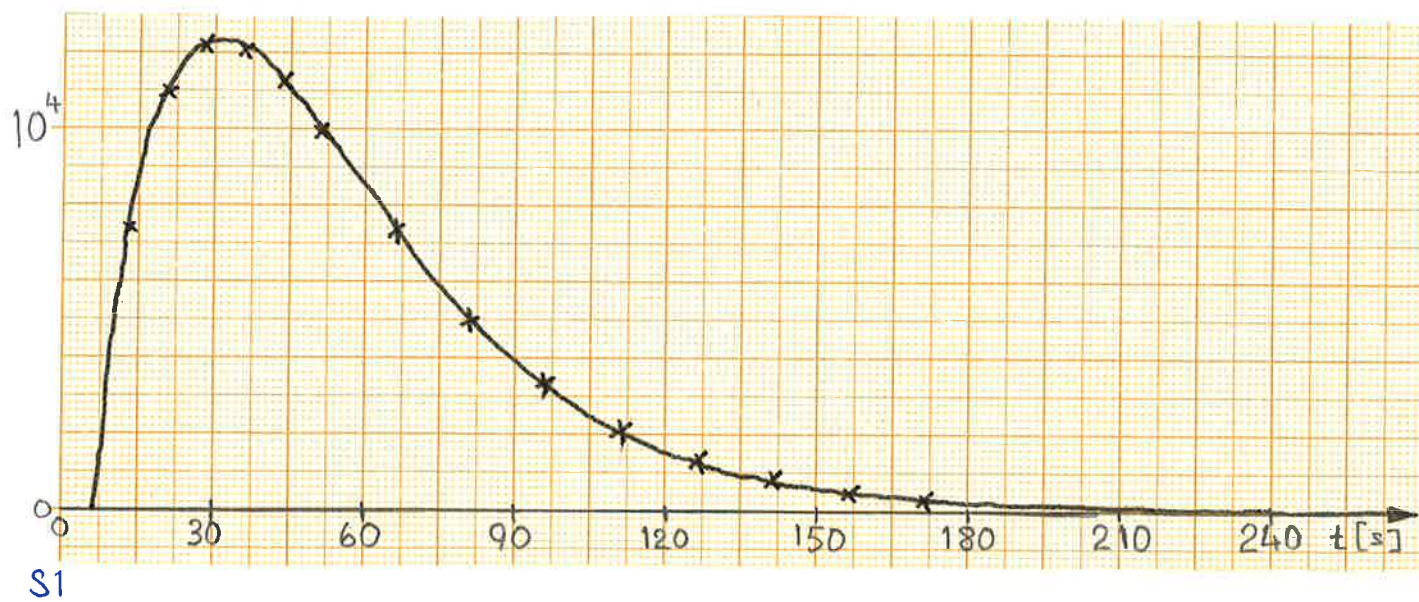
$$y(t) = \frac{V_I K_C q^2}{V_T^3} \cdot \frac{t^2}{2} e^{-\frac{q}{V_T} \cdot t}$$

Kurvor togs upp för fem olika seriekplingskombinationer. Varefter teoretiskt bestämda punkter lades in. Data för de olika kombinationerna anges nedan.

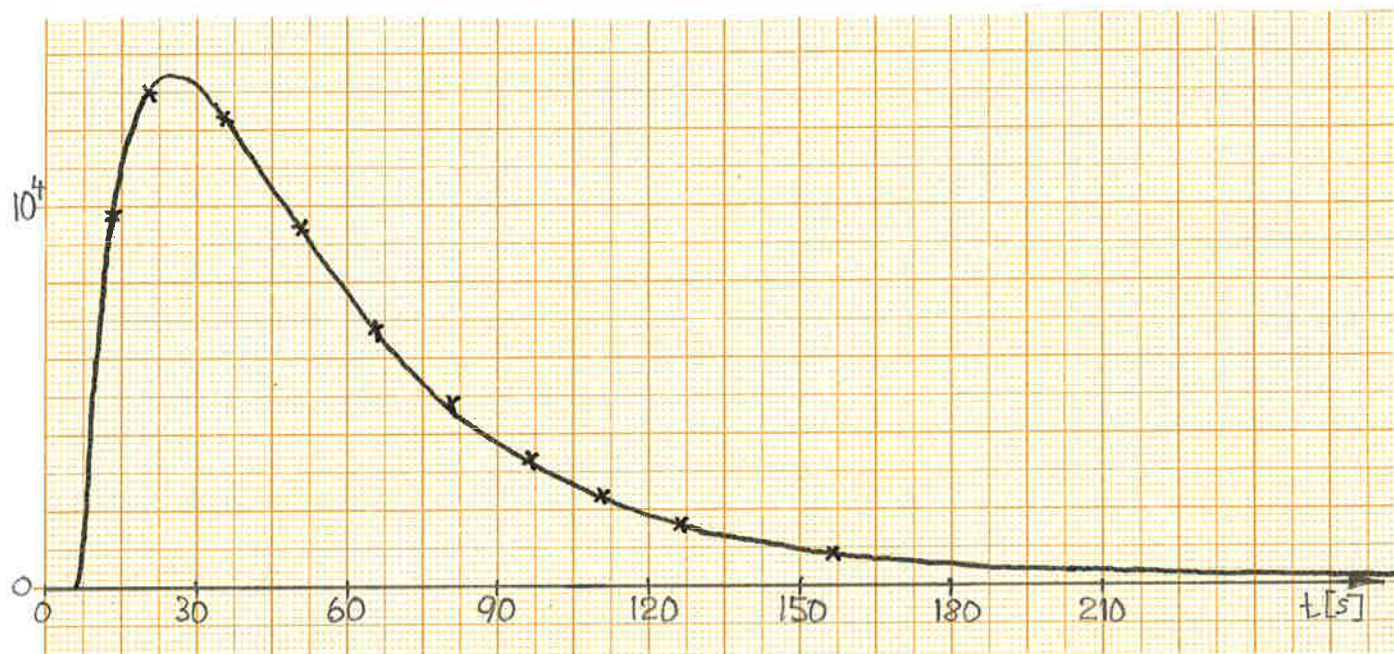
Kurva	q (l/min.)	V <sub>T1</sub> (l)	V <sub>T2</sub> (l)	V <sub>T3</sub> (l)	V <sub>I</sub> (ml)	T (sek.)
S1	1.50	0.63	0.63	-	5	6.0
S2	1.50	0.63	0.27	-	5	4.5
S3	1.50	0.63	1.08	-	5	7.5
S4	1.50	1.08	0.27	-	5	6.0
S5	1.50	0.63	0.63	0.63	8	7.5

Vid jämförelse mellan uppmätta och teoretiska kurvor finner man att överensstämmelsen är god.

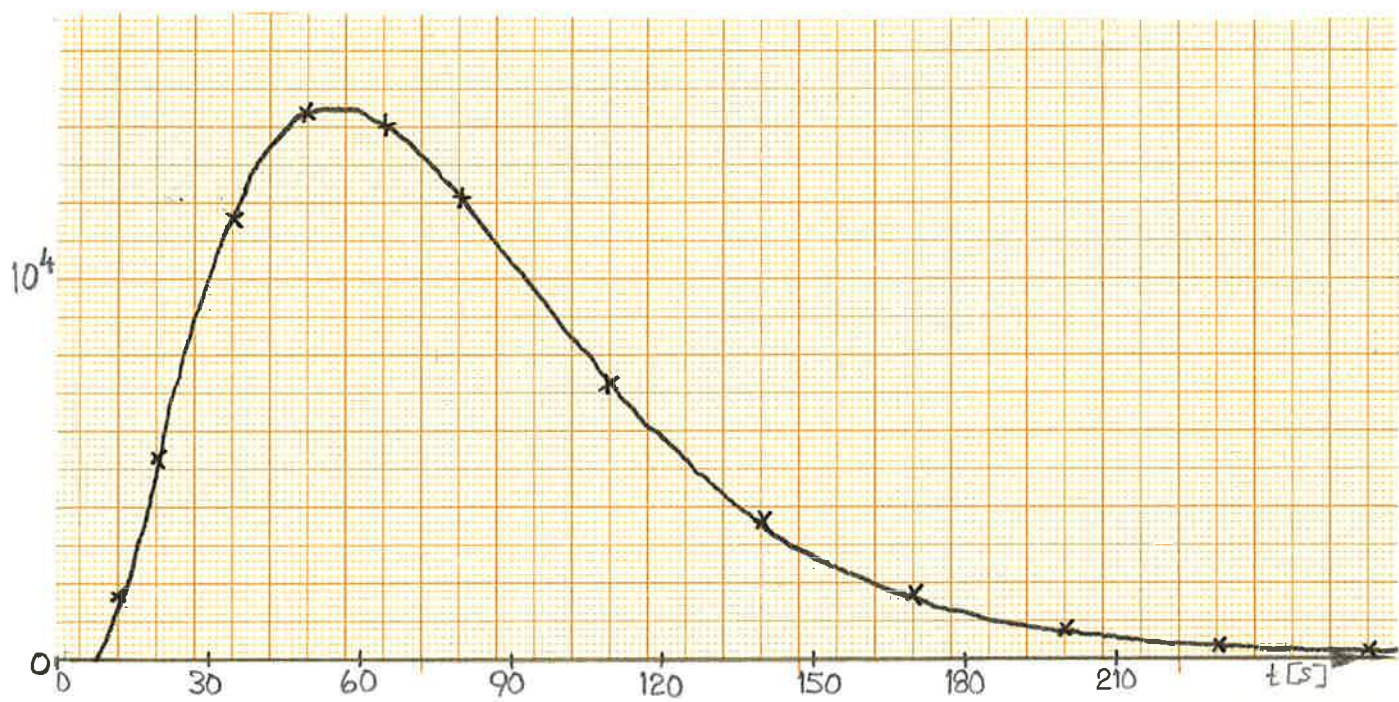








S4

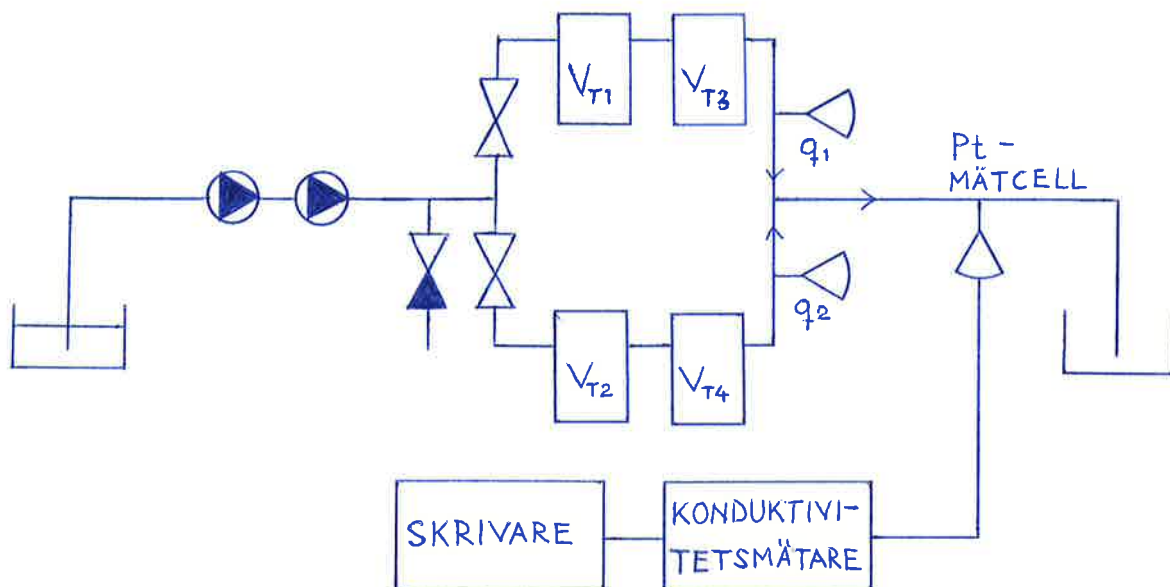


S5



### 4.3 IMPULSSVAR FÖR PARALLELLKOPPLAT TANKSYSTEM

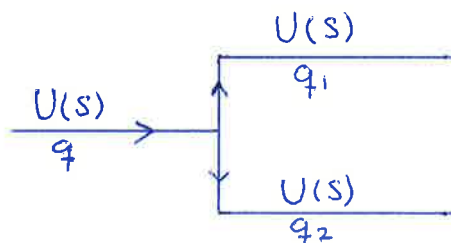
Försökuppställning:



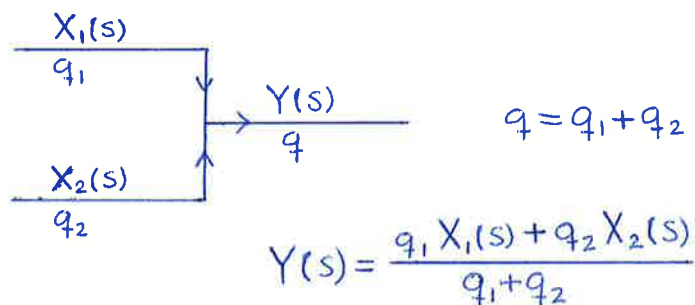
För att erhålla flöden som ger "bekväma" tidskonstanter är man tvungen att seriekoppla två pumpar.

Härledning av impulssvaret för två parallellkopplade tankar:

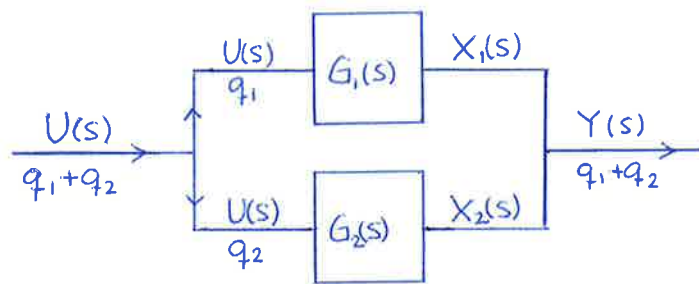
Vid delning av inflödet blir koncentrationen oförändrad.



Vid blandning av grenflödena så erhålles en koncentration i utflödet, som är det viktade medelvärde av grenflödenas koncentration.



För vårt system gäller då,



$$\begin{cases} X_1(s) = U(s) G_1(s) = \frac{V_i K_{ci}}{q_1 + q_2} \cdot \frac{q_1 / V_{T1}}{s + q_1 / V_{T1}} \\ X_2(s) = U(s) G_2(s) = \frac{V_i K_{ci}}{q_1 + q_2} \cdot \frac{q_2 / V_{T2}}{s + q_2 / V_{T2}} \\ Y(s) = \frac{q_1 X_1(s) + q_2 X_2(s)}{q_1 + q_2} \end{cases}$$

vilket ger 
$$Y(s) = \frac{V_i K_{ci}}{(q_1 + q_2)^2} \left[ \frac{q_1^2}{V_{T1}} \cdot \frac{1}{s + q_1 / V_{T1}} + \frac{q_2^2}{V_{T2}} \cdot \frac{1}{s + q_2 / V_{T2}} \right]$$

Efter invers Laplacetransformation fås

$$y(t) = \frac{V_i K_{ci}}{(q_1 + q_2)^2} \left[ \frac{q_1^2}{V_{T1}} e^{-\frac{q_1}{V_{T1}} \cdot t} + \frac{q_2^2}{V_{T2}} e^{-\frac{q_2}{V_{T2}} \cdot t} \right]$$

Härledningen av impulssvaret för ett parallellkopplat system med två respektive en tank i vardera grenen:

$$\begin{cases} X_1(s) = U(s) G_1(s) = \frac{V_i K_{ci}}{q_1 + q_2} \cdot \frac{q_1 / V_{T1}}{s + q_1 / V_{T1}} \cdot \frac{q_1 / V_{T3}}{s + q_1 / V_{T3}} \\ X_2(s) = U(s) G_2(s) = \frac{V_i K_{ci}}{q_1 + q_2} \cdot \frac{q_2 / V_{T2}}{s + q_2 / V_{T2}} \\ Y(s) = \frac{q_1 X_1(s) + q_2 X_2(s)}{q_1 + q_2} \end{cases}$$

vilket ger 
$$Y(s) = \frac{q_1^3}{(q_1 + q_2)^2} \cdot \frac{V_i K_{ci}}{V_{T1} V_{T3}} \cdot \frac{1}{s + q_1 / V_{T1}} \cdot \frac{1}{s + q_1 / V_{T3}} + \frac{q_2^2}{(q_1 + q_2)^2} \cdot \frac{V_i K_{ci}}{V_{T2}} \cdot \frac{1}{s + q_2 / V_{T2}}$$



Om  $V_{T1} = V_{T3}$  så får man impulssvaret

$$y(t) = \frac{q_1^3}{(q_1 + q_2)^2} \cdot \frac{V_i K c_i}{V_{T1}^2} \cdot t e^{-\frac{q_1}{V_{T1}} \cdot t} + \frac{q_2^2}{(q_1 + q_2)^2} \cdot \frac{V_i K c_i}{V_{T2}} \cdot e^{-\frac{q_2}{V_{T2}} \cdot t}$$

Härledning av impulssvaret för ett parallellkopplat system med två tankar i vardera grenen:

$$\begin{cases} X_1(s) = U(s) G_1(s) = \frac{V_i K c_i}{q_1 + q_2} \cdot \frac{q_1 / V_{T1}}{s + q_1 / V_{T1}} \cdot \frac{q_1 / V_{T3}}{s + q_1 / V_{T3}} \\ X_2(s) = U(s) G_2(s) = \frac{V_i K c_i}{q_1 + q_2} \cdot \frac{q_2 / V_{T2}}{s + q_2 / V_{T2}} \cdot \frac{q_2 / V_{T4}}{s + q_2 / V_{T4}} \\ Y(s) = \frac{q_1 X_1(s) + q_2 X_2(s)}{q_1 + q_2} \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{q_1^3}{(q_1 + q_2)^2} \cdot \frac{V_i K c_i}{V_{T1} V_{T3}} \cdot \frac{1}{s + q_1 / V_{T1}} \cdot \frac{1}{s + q_1 / V_{T3}} + \frac{q_2^3}{(q_1 + q_2)^2} \cdot \frac{V_i K c_i}{V_{T2} V_{T4}} \cdot \frac{1}{s + q_2 / V_{T2}} \cdot \frac{1}{s + q_2 / V_{T4}}$$

Om  $V_{T1} = V_{T3}$  så får man impulssvaret

$$y(t) = \frac{q_1^3}{(q_1 + q_2)^2} \cdot \frac{V_i K c_i}{V_{T1}^2} \cdot t e^{-\frac{q_1}{V_{T1}} \cdot t} + \frac{q_2^3}{(q_1 + q_2)^2} \cdot \frac{V_i K c_i}{V_{T2} V_{T4}} \cdot \frac{e^{-\frac{q_2}{V_{T2}} \cdot t} - e^{-\frac{q_2}{V_{T4}} \cdot t}}{\left(\frac{q_2}{V_{T4}} - \frac{q_2}{V_{T2}}\right)}$$

Tio kurvor togs upp för olika varianter av parallellkopplade system. Problemet med parallellkopplade system är skillnaden i tidsfördröjning för de olika grenarna. Tidsfördröjningen beror på tankstorlek och flödet. För att synkronisera impulssvarsbidragen, från de olika grenarna, i tiden, måste man öka slanglängden i en gren. Denna extra slanglängd fås ur nedanstående samband,

$$\Delta l = \frac{q \Delta T}{\pi r^2}$$

Där  $q$  betecknar flödet,  $r$  slangens innerdiameter och  $\Delta T$  tidsfördröjningsskillnaden. Denna formel gäller för plugg-

flöde, vilket man kan antaga vara korrekt för relativt korta slanglängder.

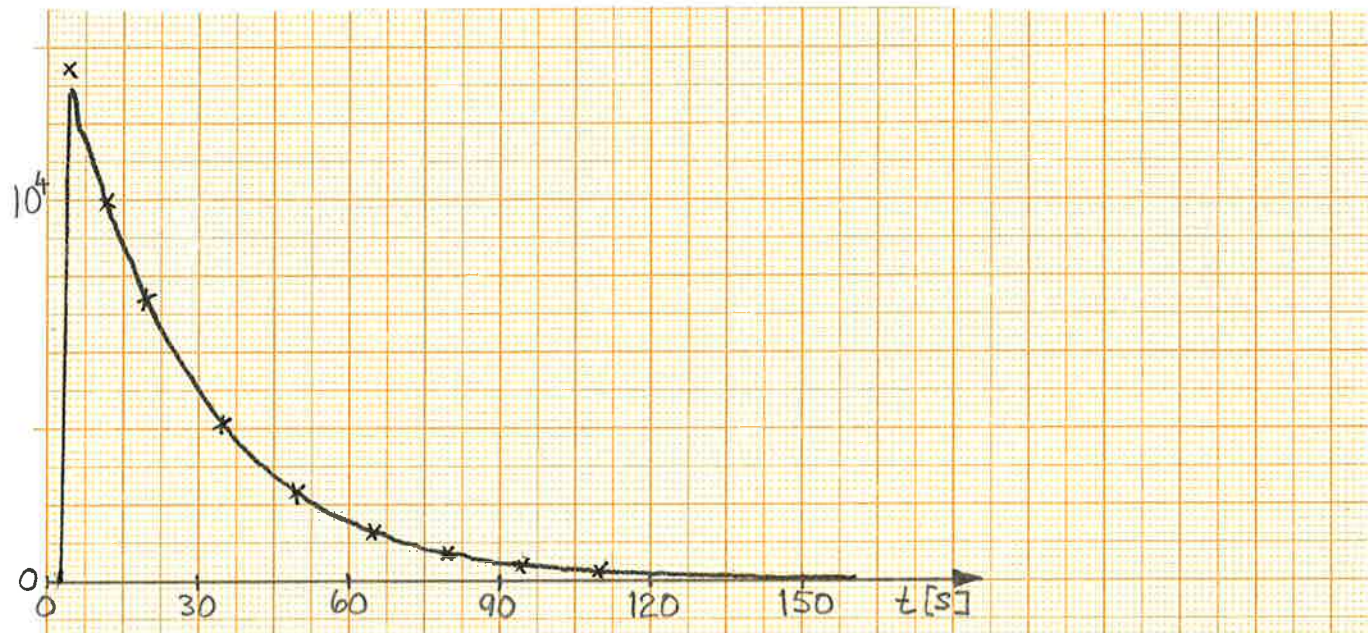
Data som gäller för kurvorna finns i nedanstående tabell.

Kurva	$V_{T1}$ (l)	$V_{T2}$ (l)	$V_{T3}$ (l)	$V_{T4}$ (l)	$q_1$ (l/min)	$q_2$ (l/min)	$V_i$ (ml)	$\Delta l = l_1 - l_2$ (dm)	T (sek)
P1	0.63	0.63	-	-	1.50	1.50	4	0.0	4.0
P2	0.63	0.63	-	-	1.50	1.02	4	7.4	6.0
P3	0.63	0.27	-	-	1.20	1.20	3	0.0	6.5
P4	0.63	0.27	-	-	0.80	1.50	2	-14.0	9.5
P5	0.63	1.05	-	-	1.50	1.50	6	14.0	10.0
P6	1.05	0.27	-	-	1.50	1.50	3	-14.0	12.0
P7	0.63	0.63	0.63	-	1.50	1.50	8	-7.4	7.5
P8	0.63	0.63	0.63	-	1.80	1.00	8	-7.4	13.0
P9	0.63	0.27	0.63	-	1.50	1.50	4	-7.4	8.0
P10	0.63	0.63	0.63	0.27	1.50	1.50	8	0.0	7.5

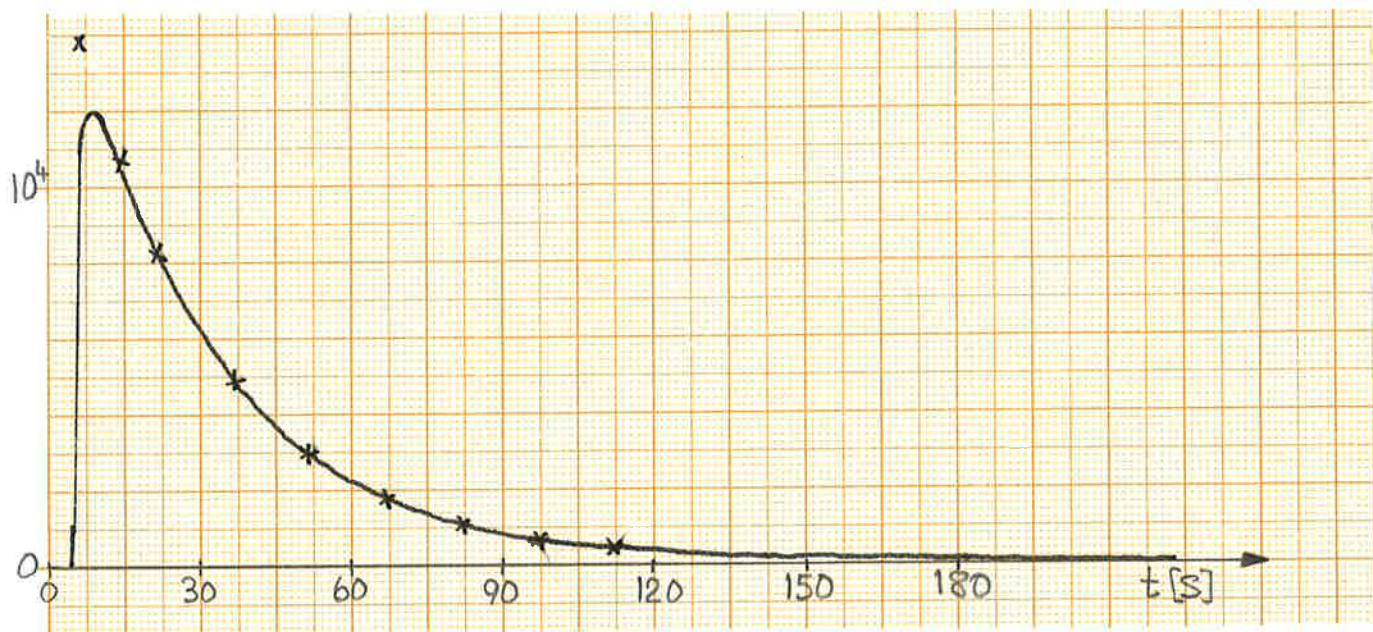
De härledda uttrycken användes för att bestämma teoretiska punkter, vilka är markerade med kryss i diagrammen. Vid jämförelse mellan de teoretiska punkterna och de experimentella kurvorna finner man, för P1 - P6, att topparna är något avrundade.

Detta beror på flödesmätarna, som ligger före mätcellen. Saltlösningen blandas nämligen i flödesmätarens mätrör. I övrigt är överensstämmelsen tämligen god.



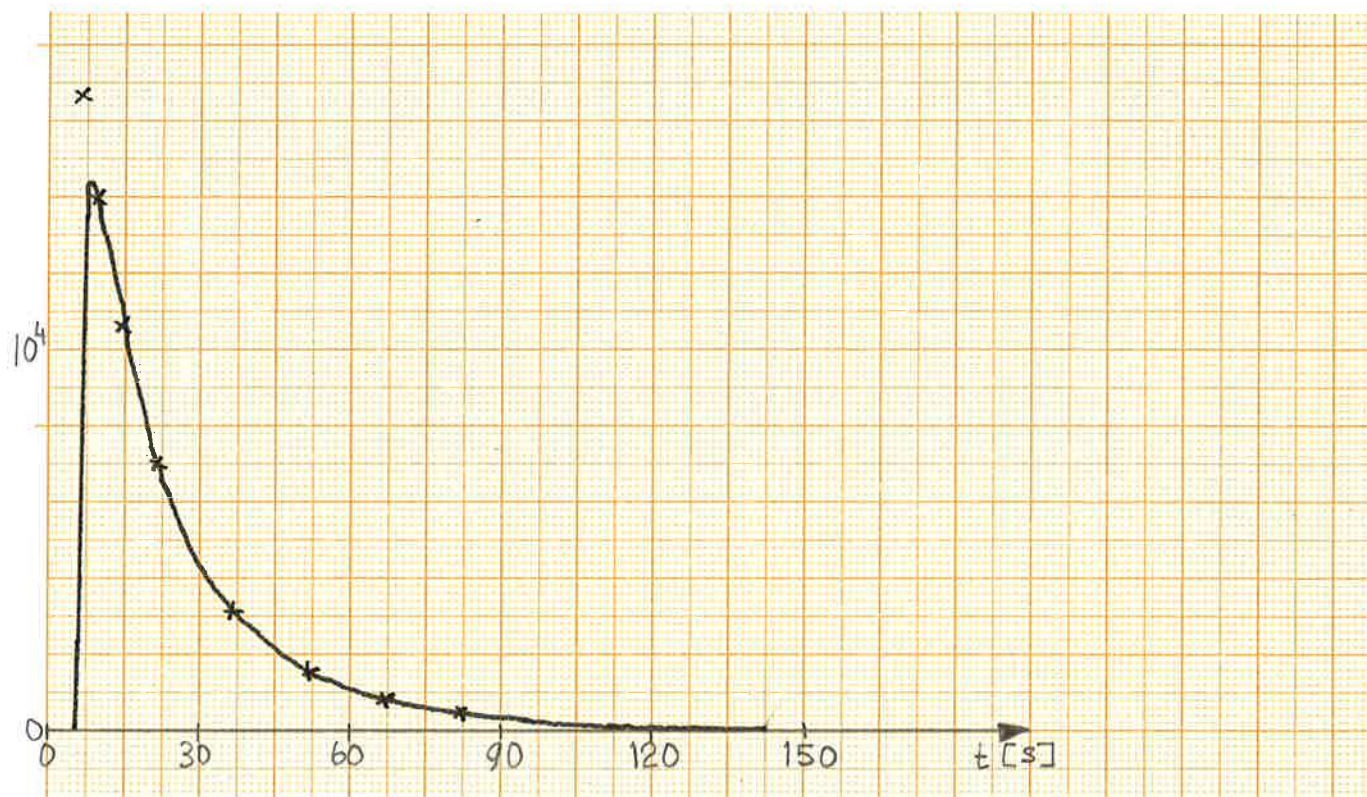


P1

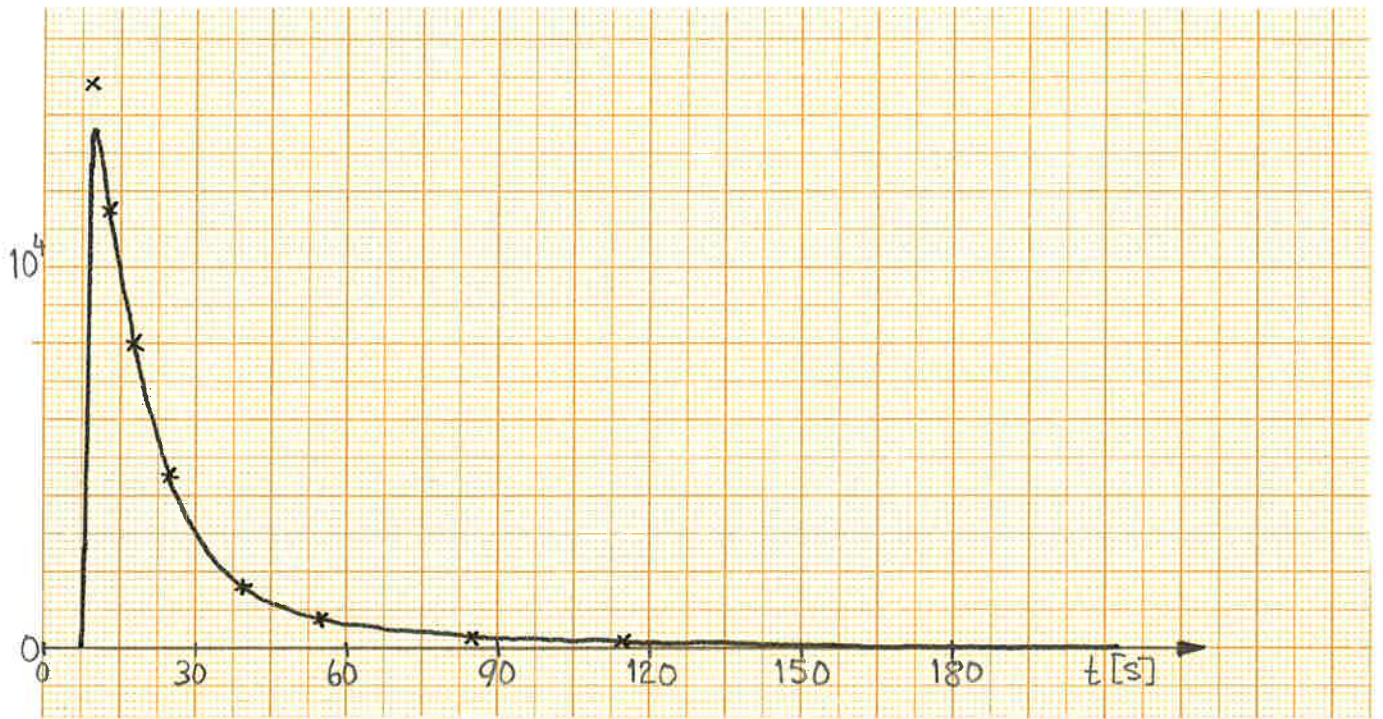


P2



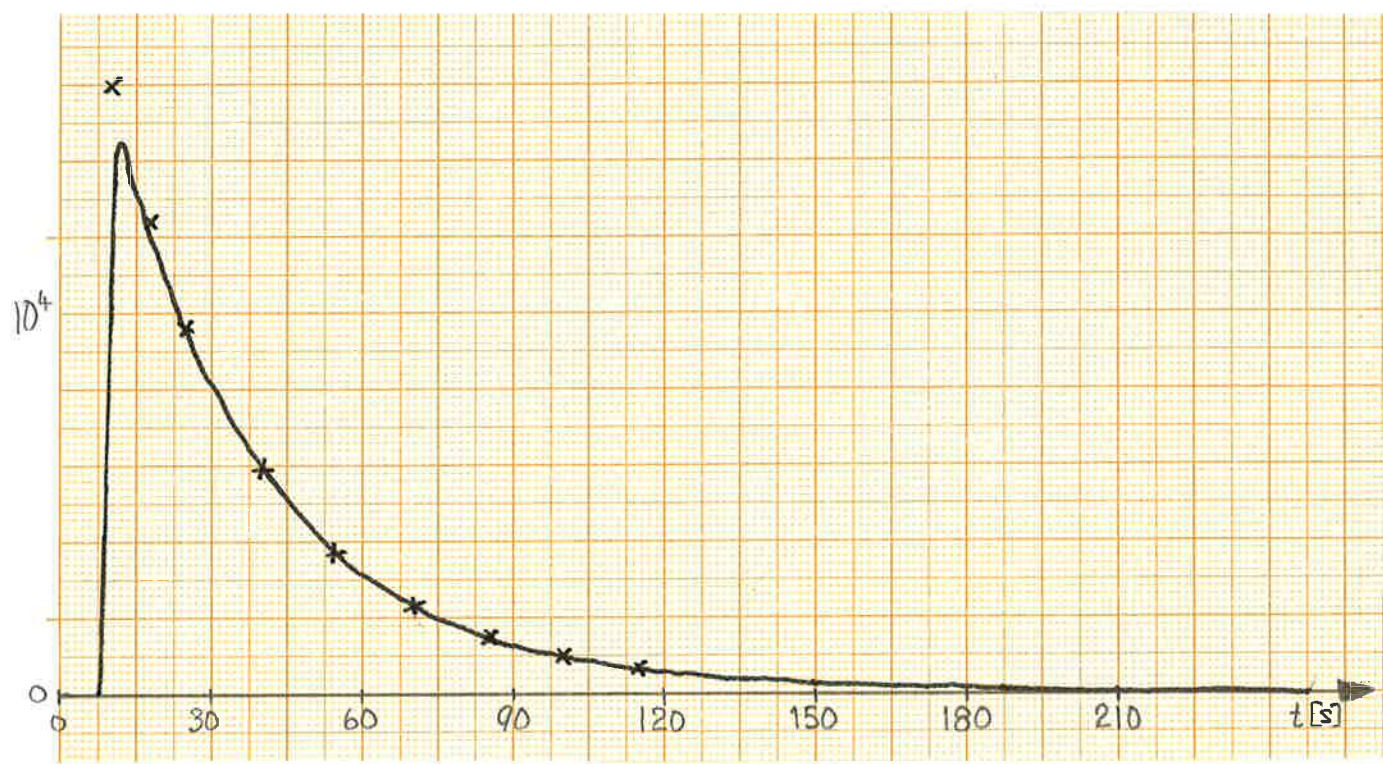


P3

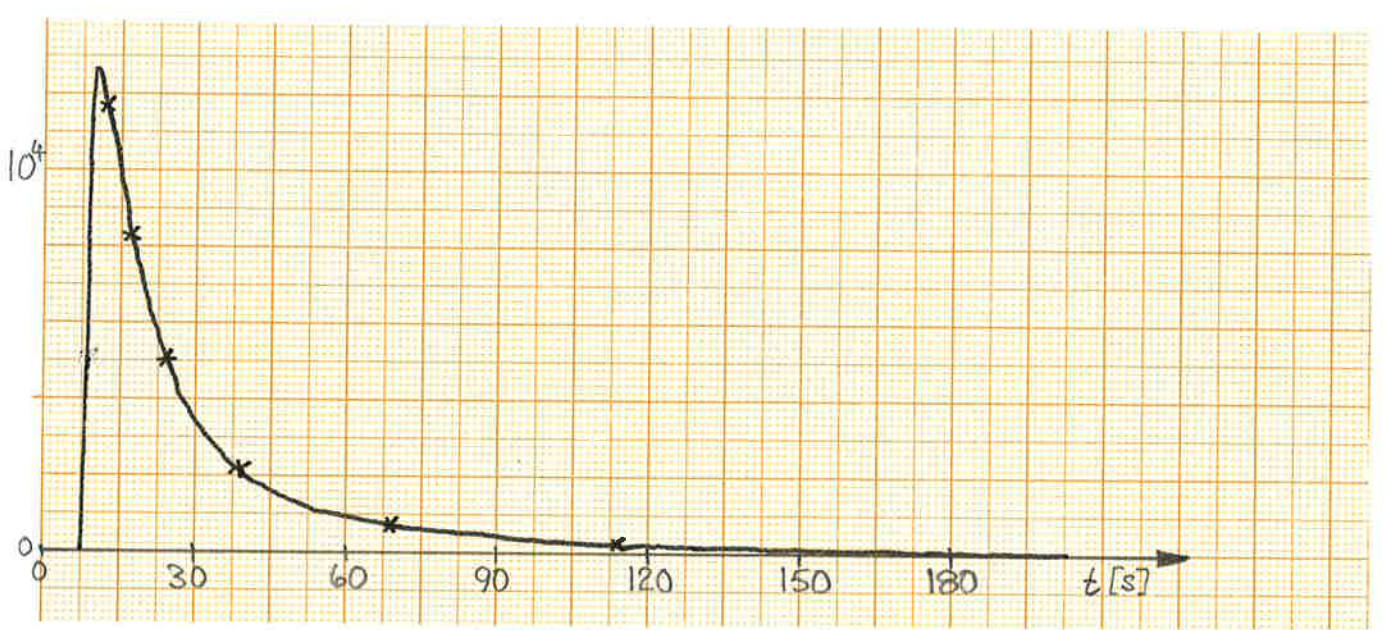


P4



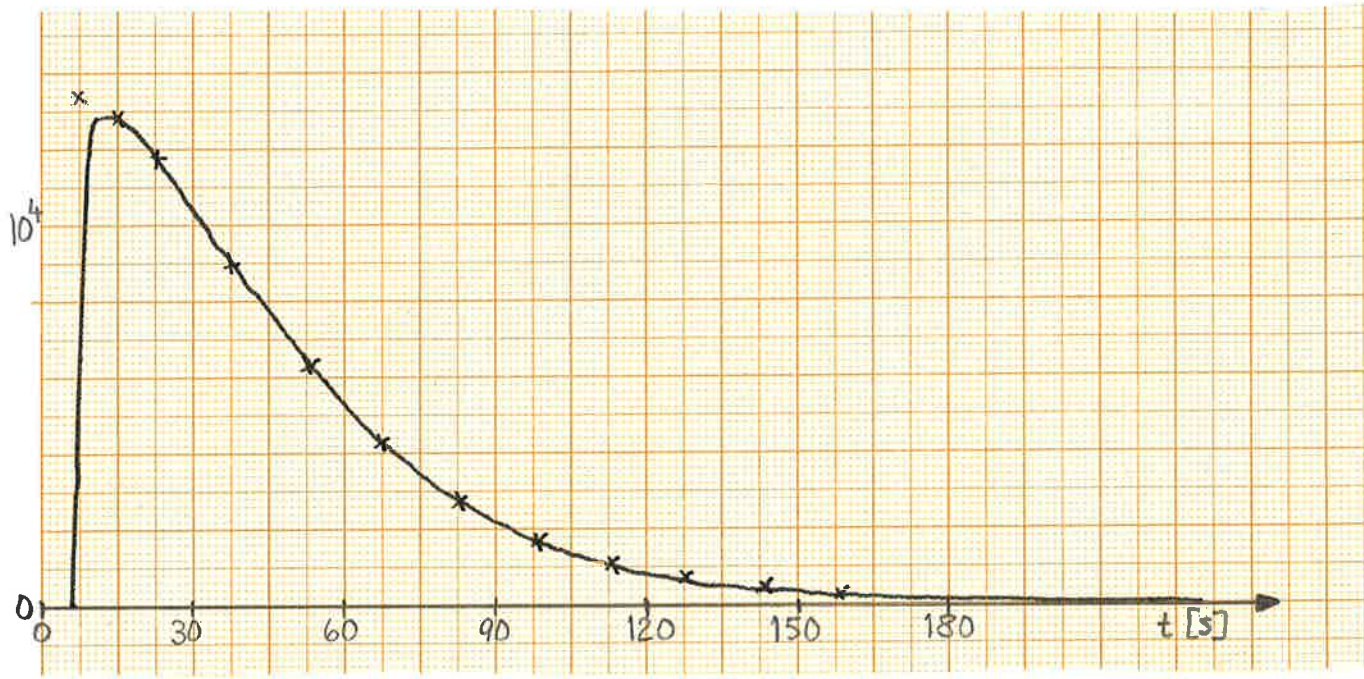


P5

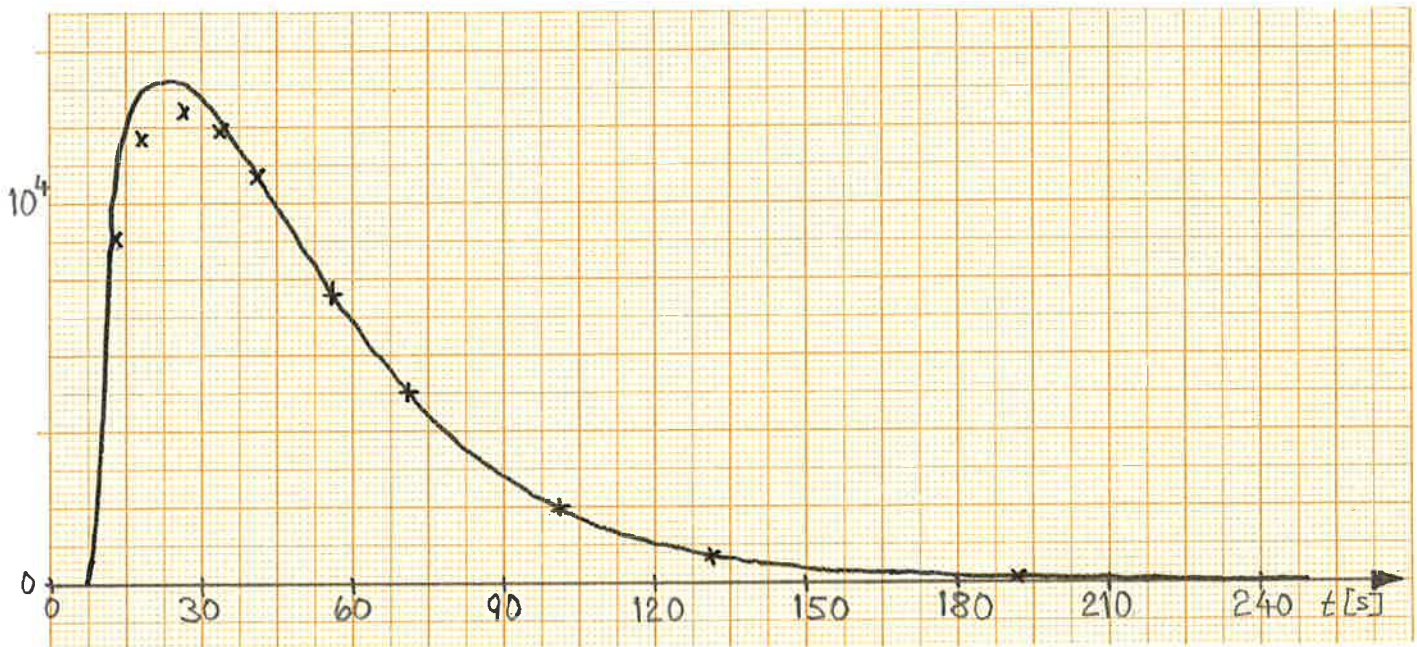


P6



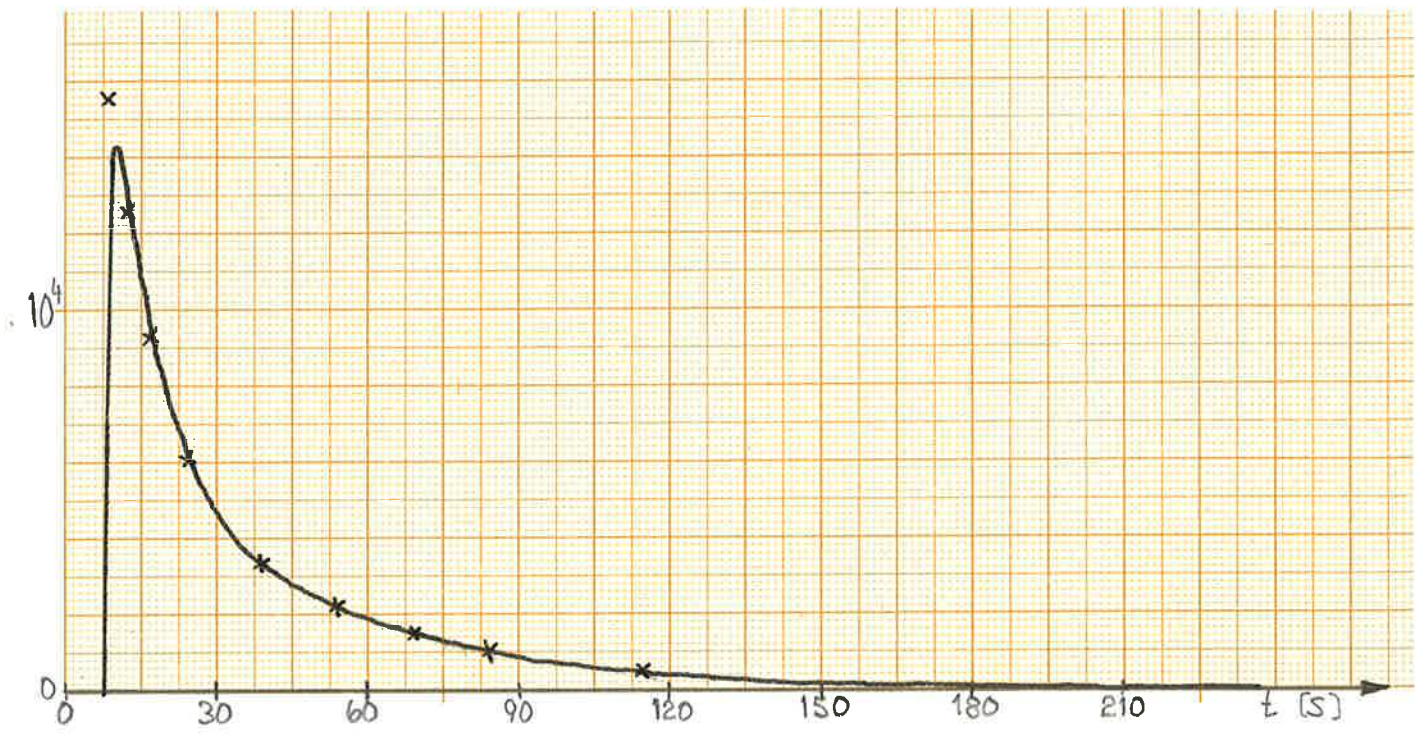


P7

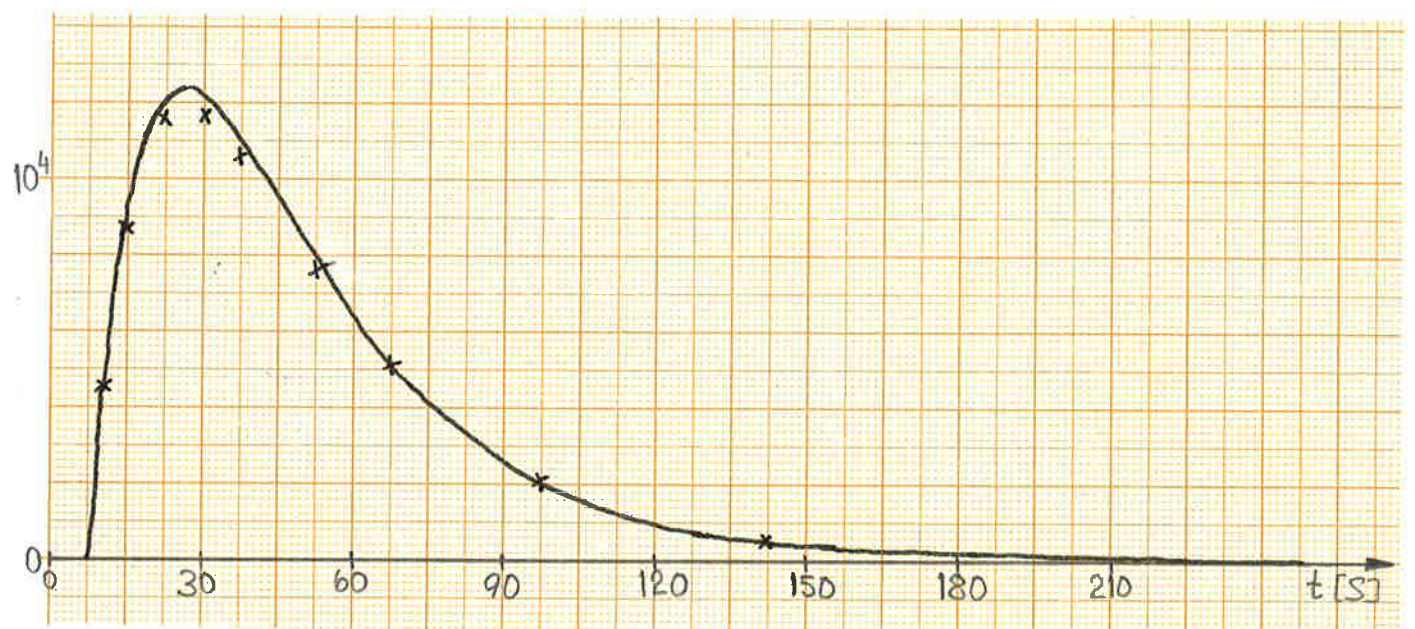


P8





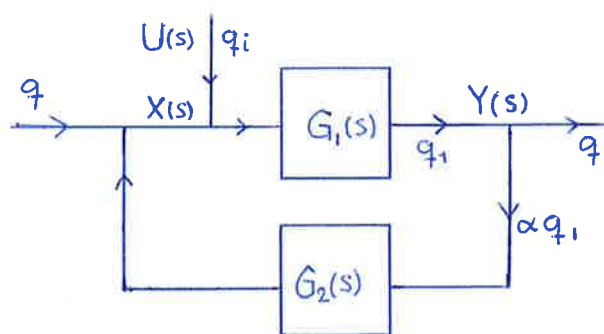
P9



P10

#### 4.4 IMPULSSVAR FÖR RECIRKULERAT TANKSYSTEM

Bestämning av överföringsfunktionen för ett recirkulerat tanksystem:



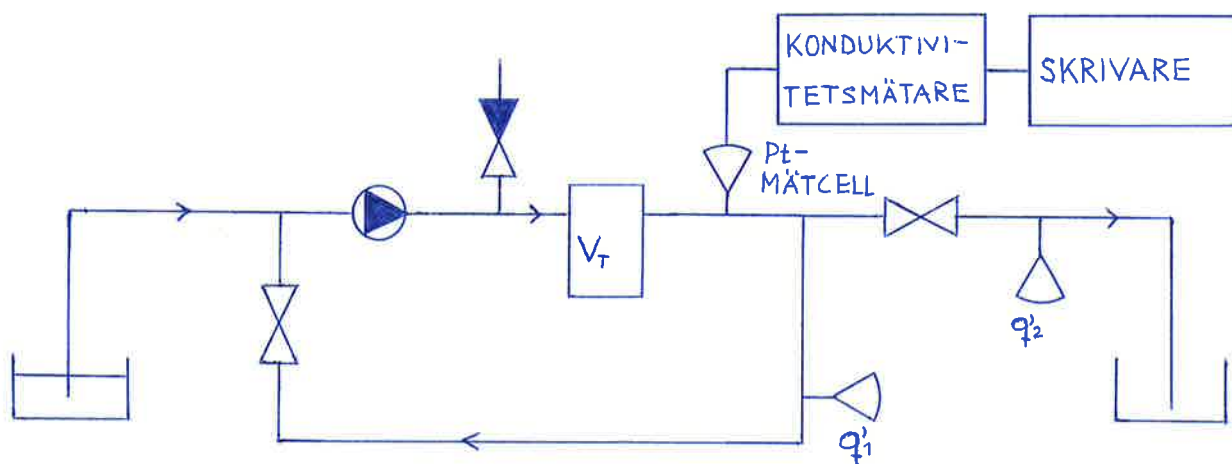
$$q_i \approx 0 \text{ vid impuls}$$

$$\alpha q_1 + q = q_1$$

$$\begin{cases} X(s) = \frac{\alpha q_1 Y(s) G_2(s)}{q + \alpha q_1} = \alpha Y(s) G_2(s) \\ Y(s) = G_1(s) (U(s) + X(s)) \end{cases}$$

$$\therefore G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 - \alpha G_1(s) G_2(s)}$$

#### Försöksuppställning 1



$$\begin{cases} q = q_2 \\ q_1 = q_1' + q_2' \end{cases}$$



Teoretisk bestämning av impulssvaret (tidsfördröjningarna antages vara lika med noll):

$$\begin{cases} G_1(s) = \frac{q_1/V_T}{s + q_1/V_T} \\ G_2(s) = 1 \\ U(s) = \frac{V_i K_{Ci}}{q_1} \end{cases}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{q_1/V_T}{s + q_1/V_T}}{1 - \alpha \frac{q_1/V_T}{s + q_1/V_T}} = \frac{q_1/V_T}{s + \frac{q_1(1-\alpha)}{V_T}}$$

$$\underline{\alpha = 1} \quad (q=0)$$

$$Y(s) = \frac{V_i K_{Ci}}{V_T} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(t) = \frac{V_i K_{Ci}}{V_T}$$

$$\underline{\alpha < 1}$$

$$Y(s) = \frac{V_i K_{Ci}}{q_1} \cdot \frac{q_1/V_T}{s + \frac{q_1(1-\alpha)}{V_T}}$$

$$y(t) = \frac{V_i K_{Ci}}{V_T} e^{-\frac{q_1}{V_T}(1-\alpha)t} = \frac{V_i K_{Ci}}{V_T} e^{-\frac{q}{V_T} \cdot t}$$

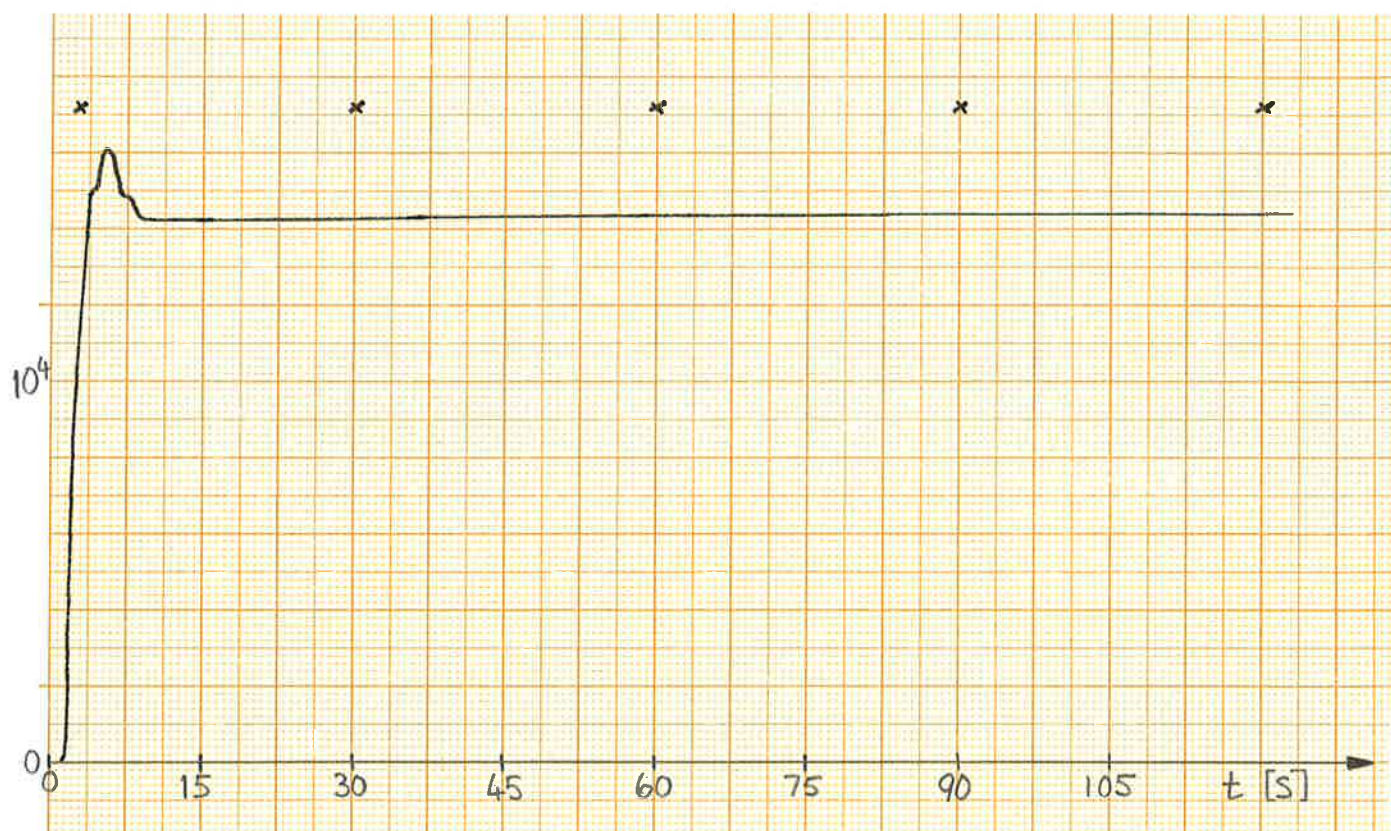
Kurvor togs upp för  $\alpha = 1$  och  $\alpha \neq 1$ . För att kontrollera hur flödesmätare nr 1 inverkar på kurvformen, så togs kurvor upp både med denna inkopplad och borttagen. Inverkan av en kraftig tidsfördröjning i recirkulationsslingan studerades genom att koppla in en slang, av längden 8.5 m, lindad i en 4-liters tank<sup>i/</sup> recirkuleringen. Kurvorna med tidsfördröjningen ges utan teoretiska punkter inlagda. Detta pga svårigheterna att härleda en teoretisk formel. Ett annat problem vid härledning av teoretiska formler för recirkulerade system är inverkan av slangvolymen. Detta märks tydligast för  $\alpha = 1$  där de teoretiska punkterna ligger över den experimentella kurvan när  $t \rightarrow \infty$ .

Data för försöksuppställning 1 ges i nedanstående tabell.

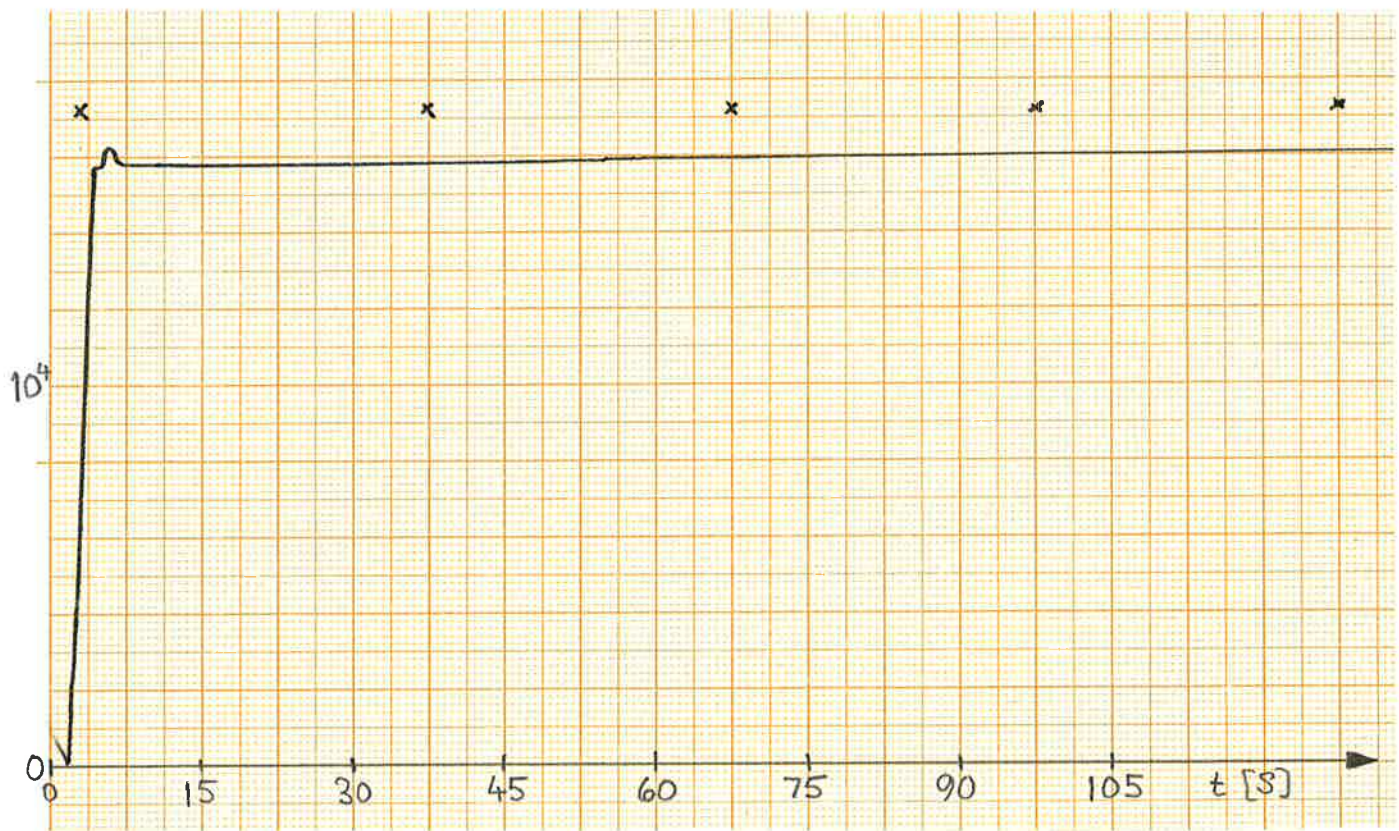
Kurva	$V_T$ (l)	$V_i$ (ml)	$q$ (l/min)	$q_1$ (l/min)	flödes- mätare nr 1	
					inkopplad	tidsfördröj- ningen inkopplad
Å1	0.63	2	0.00	1.50	JA	NEJ
Å2	0.63	2	0.00	1.50	NEJ	NEJ
Å3	0.63	2	0.60	1.80	JA	NEJ
Å4	0.63	2	0.60	1.80	NEJ	NEJ
Å5	0.63	2	0.00	1.30	JA	JA
Å6	0.63	2	1.00	2.00	JA	JA

Vid jämförelse mellan Å1 och Å2 respektive Å3 och Å4 framgår klart att en flödesmätare i recirkulerings slingan inverkar negativt på kurvformen. Å1 och Å2 visar också tydligt att slangvolymen ej är försumbart liten. I stort sett är Å1 och Å2 acceptabla. Å4 har också en önskvärd kurvform emedan Å3, pga flödesmätarens tidsfördröjande effekt, avviker något för mycket från de teoretiska punkterna. Tidsfördröjningen är inkopplad för Å5 och Å6. Dessa kurvor avviker kraftigt från teoretiska som förutsätter försumbar tidsfördröjning.



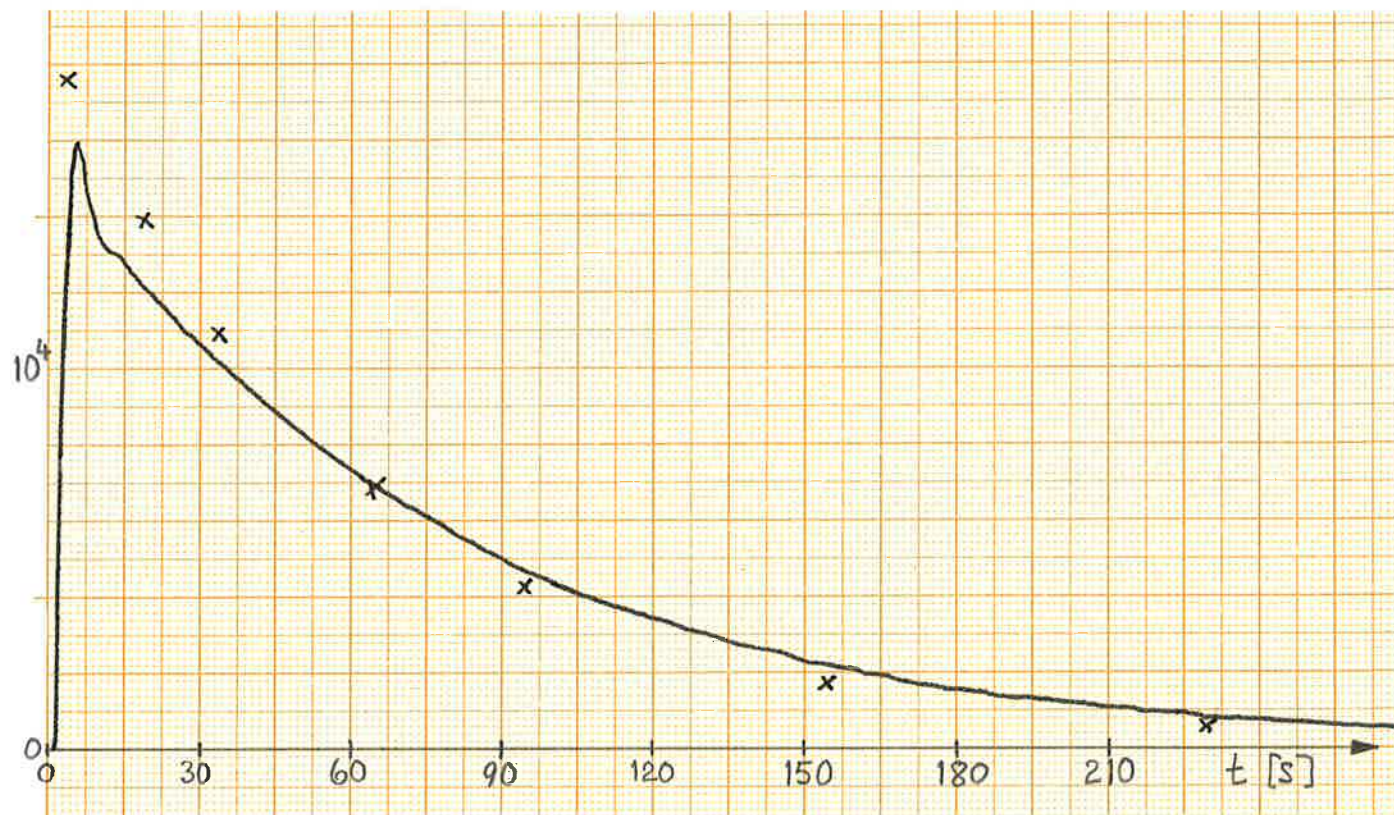


$\dot{A}_1$

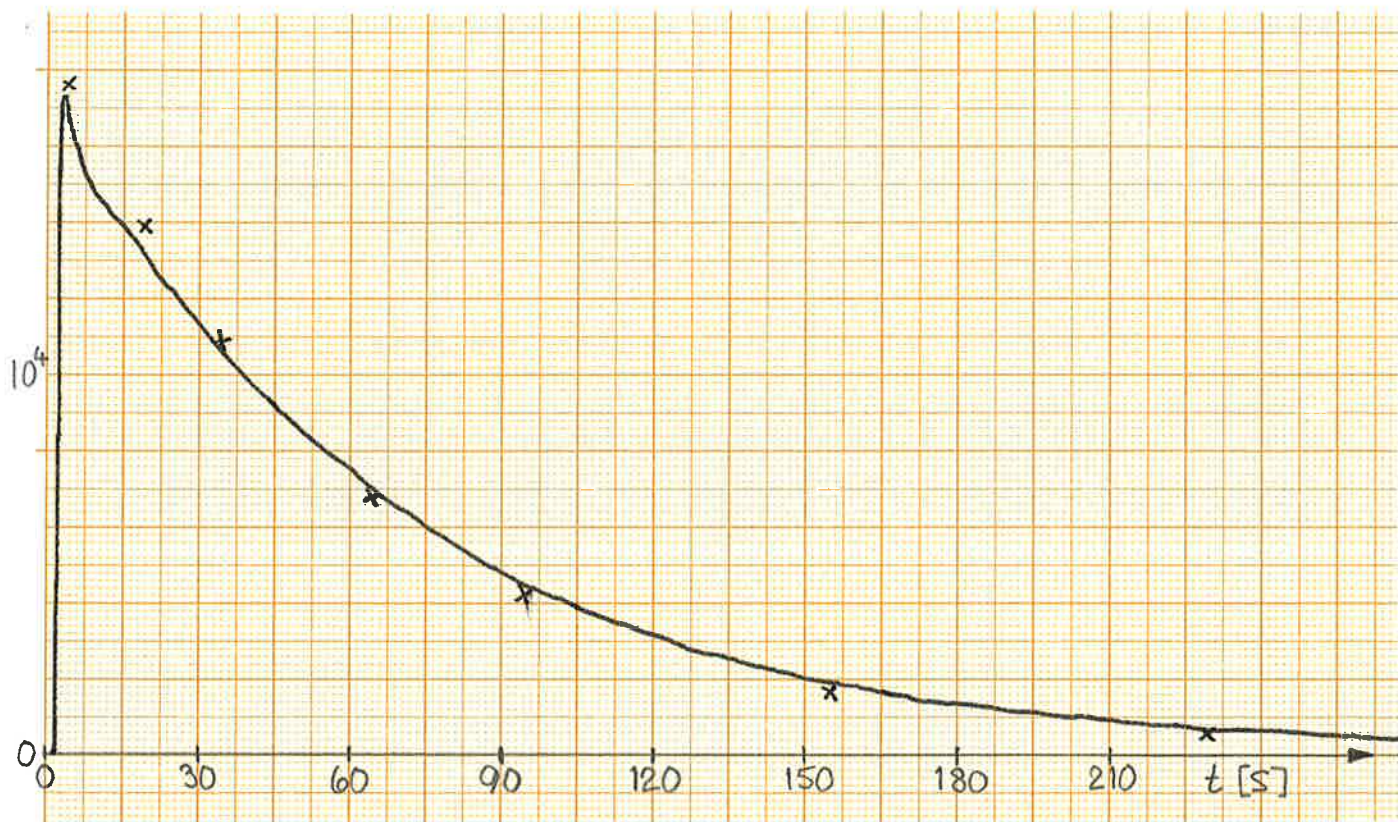


$\dot{A}_2$



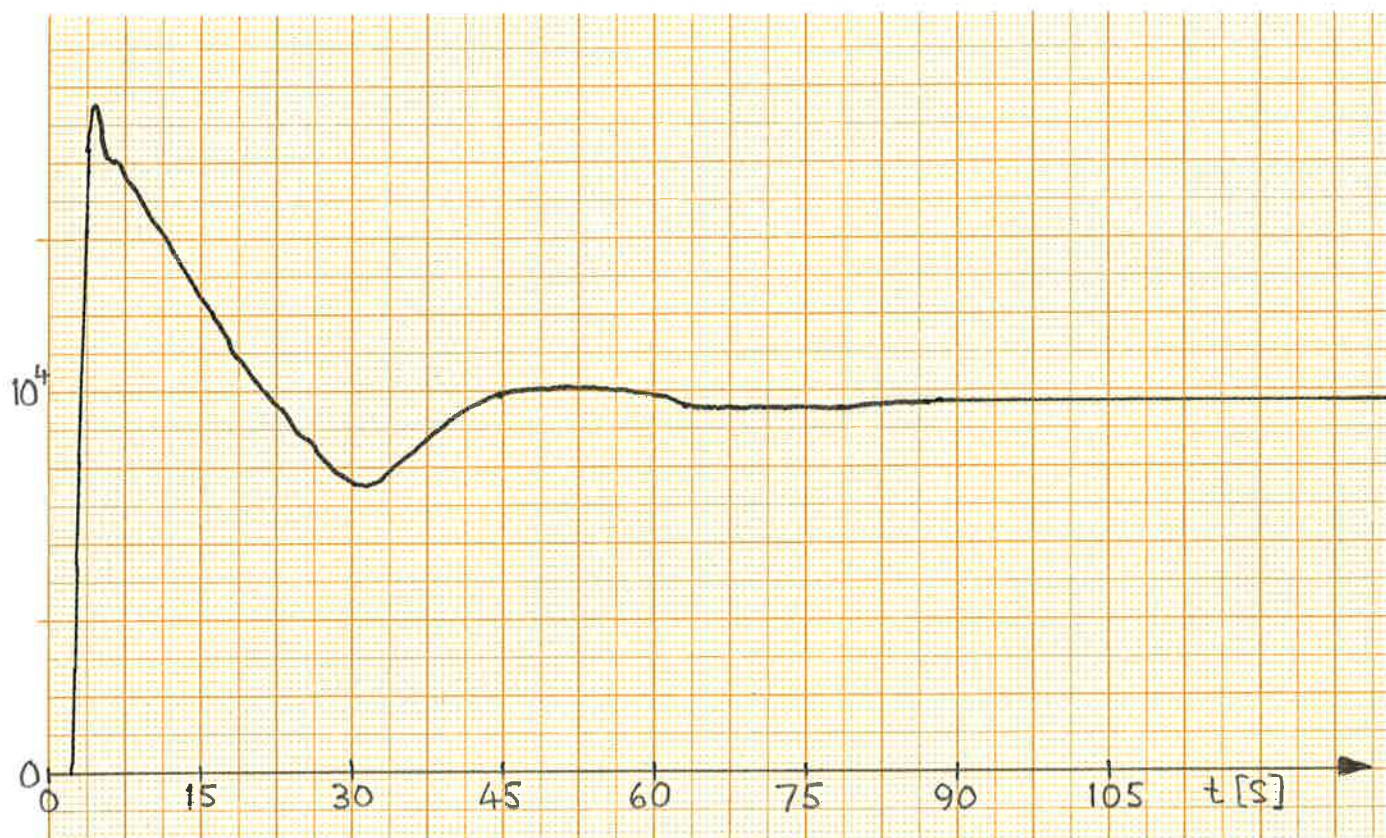


Å3

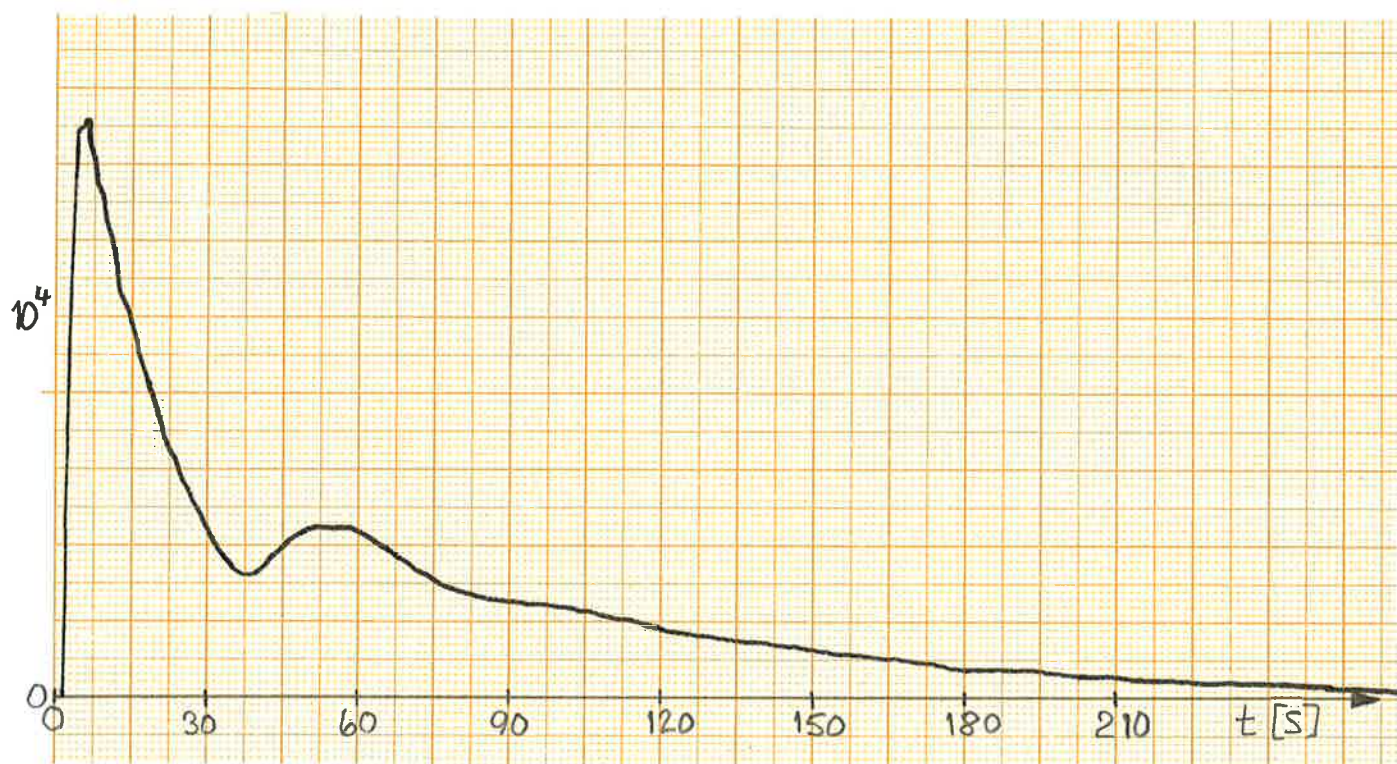


Å4



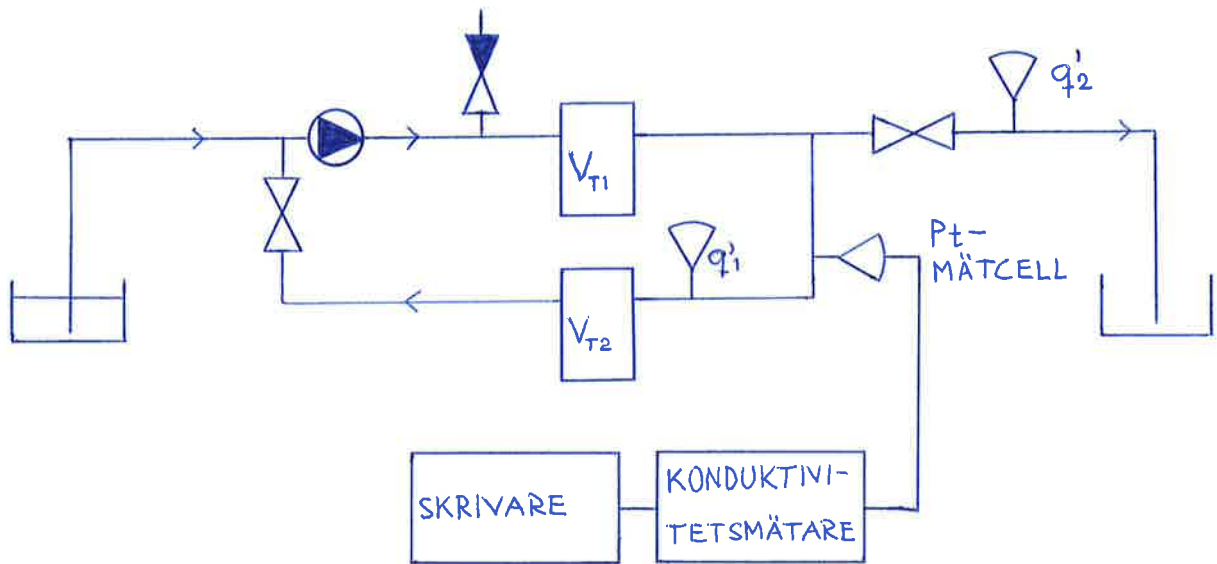


Å5



Å6

## Försöksuppställning 2: \_



$$\begin{cases} q = q'_2 \\ q_1 = q'_1 + q'_2 \end{cases}$$

Teoretisk bestämning av impulssvaret:

$$\begin{cases} \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 - \alpha G_1(s)G_2(s)} \\ G_1(s) = \frac{q_1 / V_{T1}}{s + q_1 / V_{T1}} \\ G_2(s) = \frac{\alpha q_1 / V_{T2}}{s + \alpha q_1 / V_{T2}} \\ U(s) = \frac{V_i K c_i}{q_1} \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{V_i K c_i}{V_{T1}} \cdot \frac{(s + \alpha q_1 / V_{T2})}{(s + q_1 / V_{T1})(s + \alpha q_1 / V_{T2}) - \frac{\alpha^2 q_1^2}{V_{T1} V_{T2}}}$$

$$\underline{\alpha = 1}$$

$$Y(s) = \frac{V_i K c_i}{V_{T1}} \cdot \frac{(s + q_1 / V_{T2})}{s(s + q_1 / V_{T1} + q_1 / V_{T2})}$$

Invers Laplacetransformation ger

$$y(t) = \frac{V_i K c_i}{V_{T1}} \left( \frac{V_{T1}}{V_{T1} + V_{T2}} + \frac{V_{T2}}{V_{T1} + V_{T2}} \cdot e^{-\left(\frac{q_1}{V_{T1}} + \frac{q_1}{V_{T2}}\right)t} \right)$$



$$\alpha < 1$$

$$Y(s) = \frac{V_i K c_i}{V_{T1}} \cdot \left( \frac{s}{(s+a)(s+b)} + \frac{\alpha q_1 / V_{T2}}{(s+a)(s+b)} \right)$$

Identifiering av koefficienterna ger

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \left( \frac{q_1}{V_{T1}} + \frac{\alpha q_1}{V_{T2}} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{q_1}{V_{T1}} + \frac{\alpha q_1}{V_{T2}} \right)^2 - 4 \frac{\alpha q_1^2}{V_{T1} V_{T2}} (1-\alpha)} \\ b = \frac{1}{2} \left( \frac{q_1}{V_{T1}} + \frac{\alpha q_1}{V_{T2}} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{q_1}{V_{T1}} + \frac{\alpha q_1}{V_{T2}} \right)^2 - 4 \frac{\alpha q_1^2}{V_{T1} V_{T2}} (1-\alpha)} \end{cases}$$

Invers Laplacetransformation ger impulssvret

$$y(t) = \frac{V_i K c_i}{V_{T1}} \cdot \left( \frac{a e^{-at} - b e^{-bt}}{a-b} + \frac{\alpha q_1}{V_{T2}} \cdot \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a-b} \right)$$

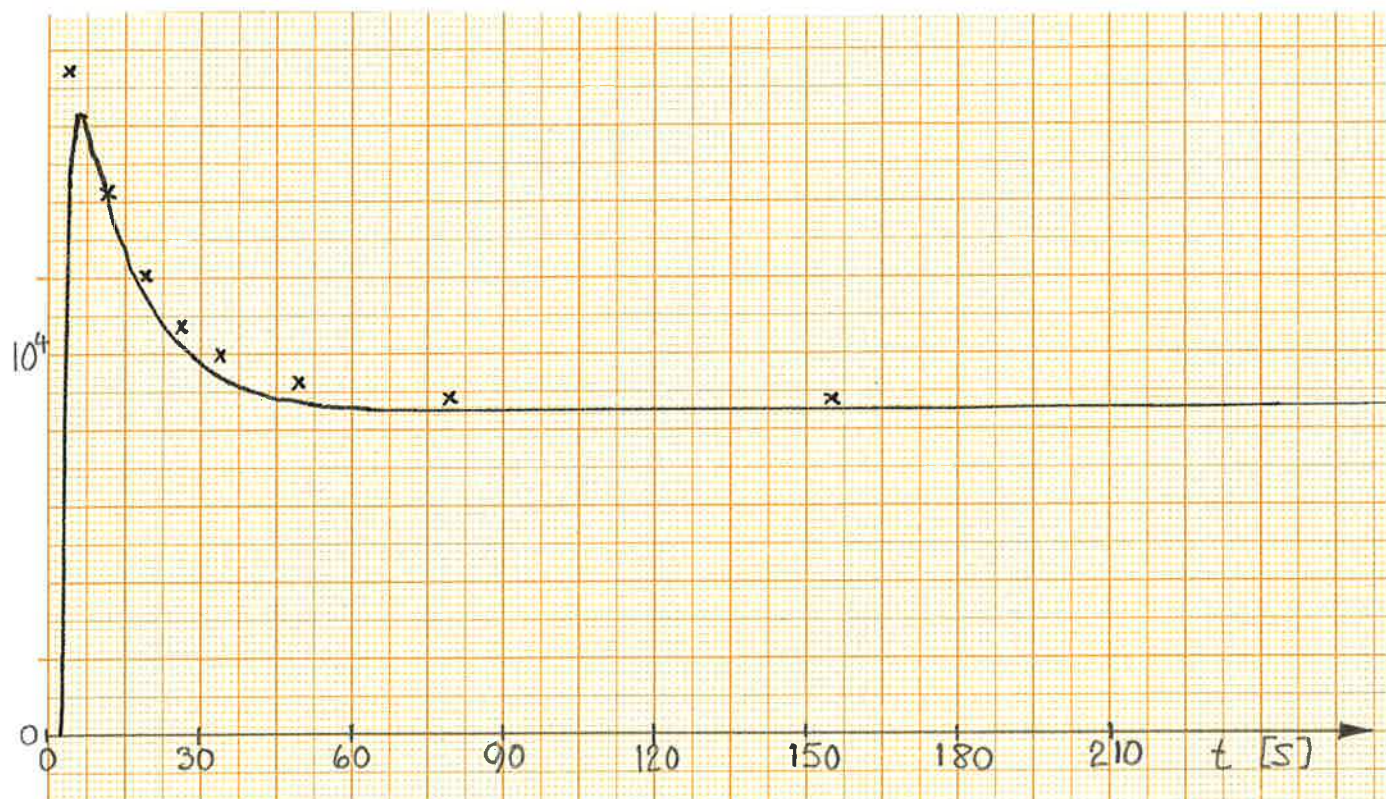
Kurvor togs upp både med "tidsfördröjningen" inkopplad och borttagen. Denna var inkopplad efter tank 2 i recirkulations-slingan. Flödesmätare nr 1:s inverkan på kurvformen kontrollerades genom att ta upp en kurva med och en kurva utan denna inkopplad. Det visade sig då, att de två kurvorna var helt lika. Man skulle kunna förvänta sig, att de skilde något pga flödesmätarens tidsfördröjande effekt. Detta blir dock ej fallet, eftersom tankens tidskonstant är avsevärt större än flödesmätarens tidsfördröjning. Samtliga kurvor är därför upptagna med båda flödesmätarna inkopplade.

Data för försöksuppställning 2 ges i nedanstående tabell.

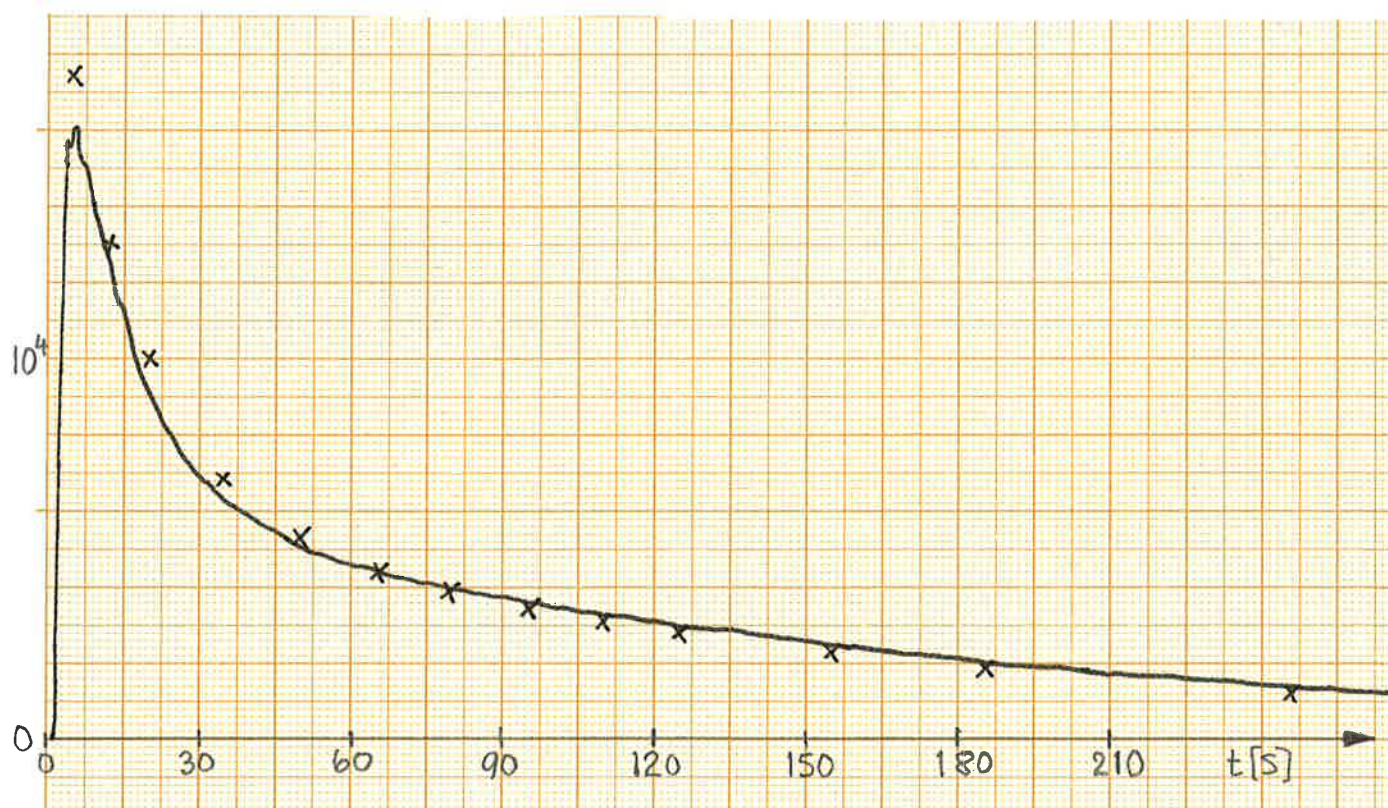
Kurva	$V_{T1}$ (l)	$V_{T2}$ (l)	$q_1$ (l/min)	$q_2$ (l/min)	$V_i$ (ml)	tidsför- dröjningen inkopplad
A7	0.63	0.63	0.00	1.23	2	NEJ
A8	0.63	0.63	0.60	1.60	2	NEJ
A9	0.63	0.63	1.00	2.00	2	NEJ
A10	0.63	0.27	0.00	1.50	2	NEJ
A11	0.63	0.27	1.00	2.00	2	NEJ
A12	1.05	0.27	0.00	1.50	3	NEJ
A13	1.05	0.27	1.00	2.00	3	NEJ
A14	0.63	0.63	0.00	1.23	2	JA
A15	0.63	0.63	1.00	2.00	2	JA

Kurvorna, uppmätta med  $\alpha < 1$  ( $q \neq 0$ ), är fullt acceptabla. Detta trots att tidsfördröjningen och slangarnas volym har negligerats vid beräkning av de teoretiska punkterna. För  $\alpha = 1$  ( $q = 0$ ) inverkar slangarnas volym något för mycket. De teoretiska punkterna ligger här över den uppmätta kurvan för stora  $t$ . Tidsfördröjningens effekt studeras lämpligast vid jämförelse mellan kurva Å7 och Å14 samt Å9 och Å15.



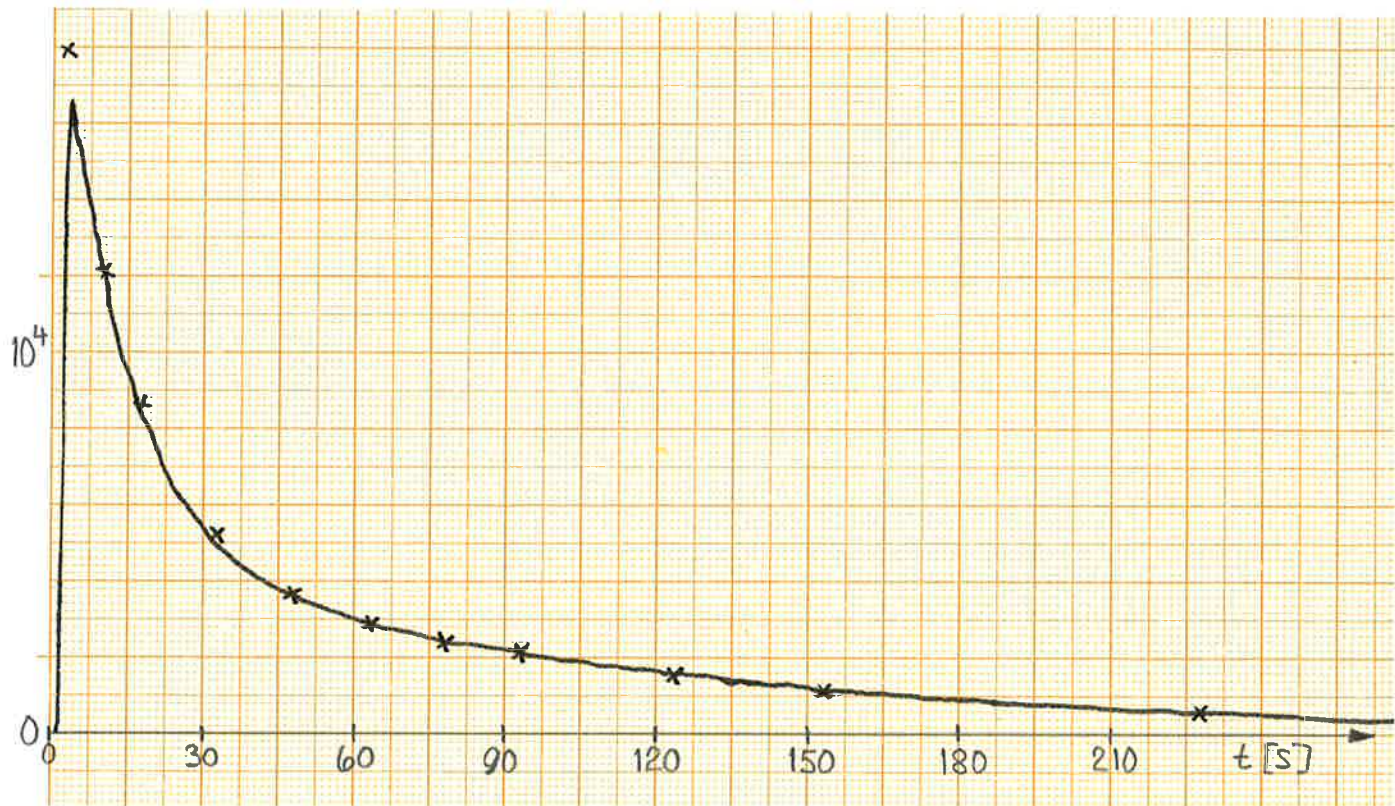


Å7

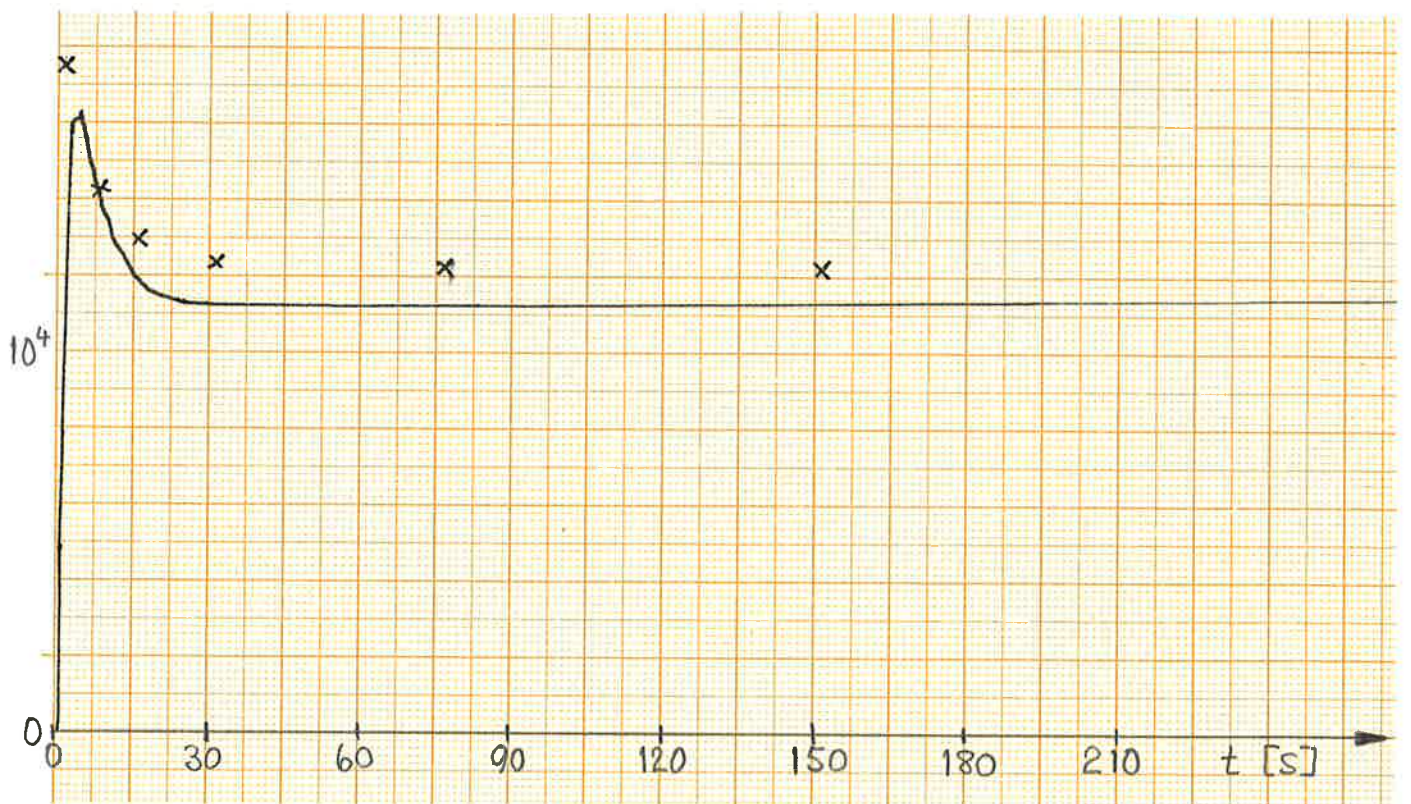


Å8



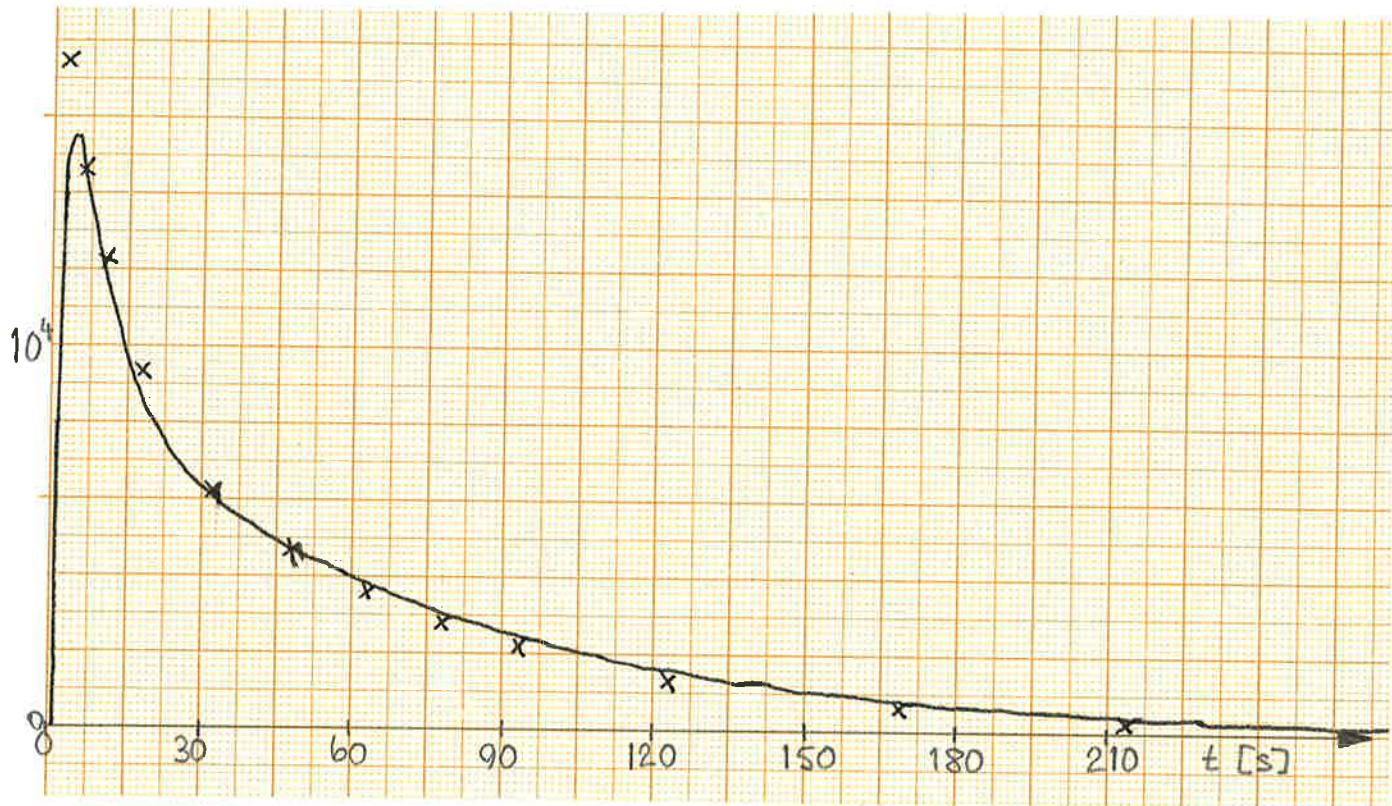


Å 9

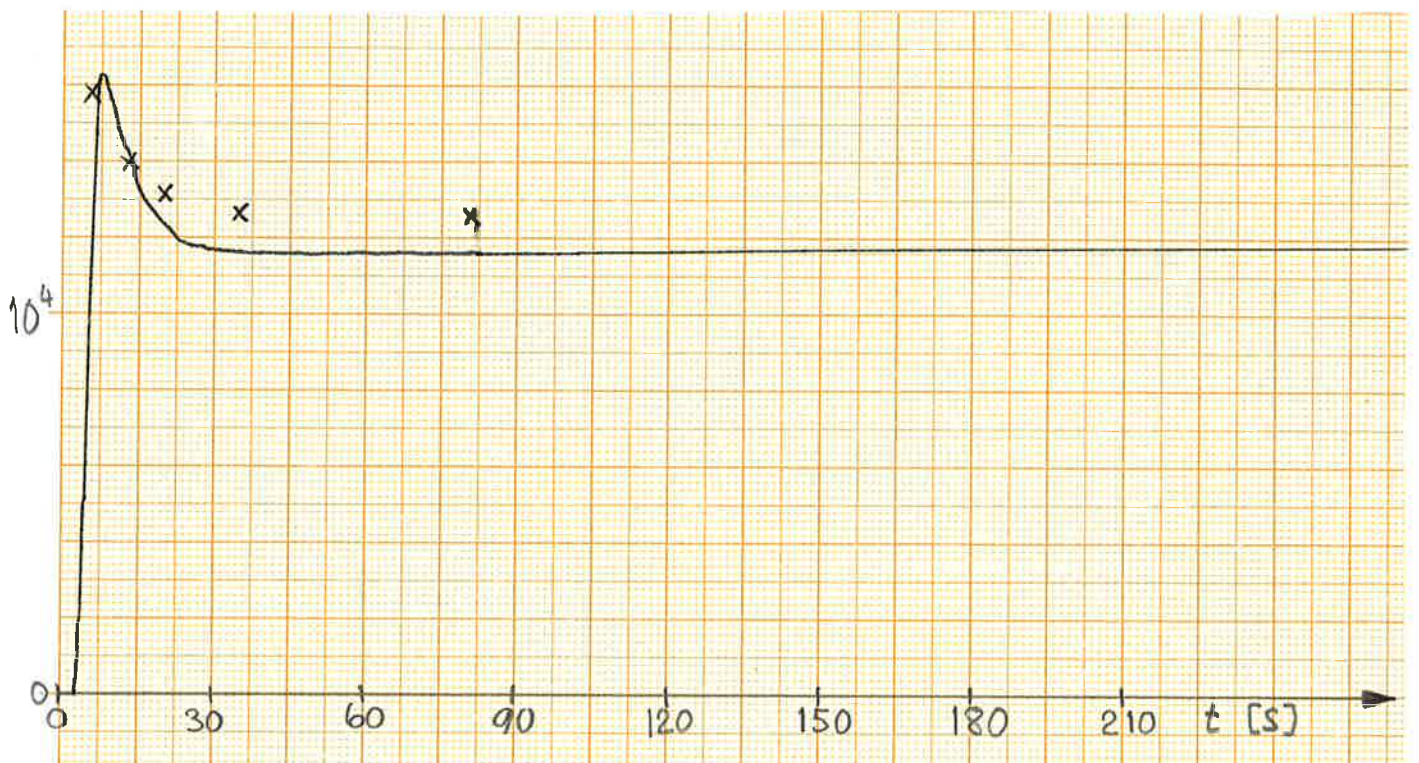


Å 10



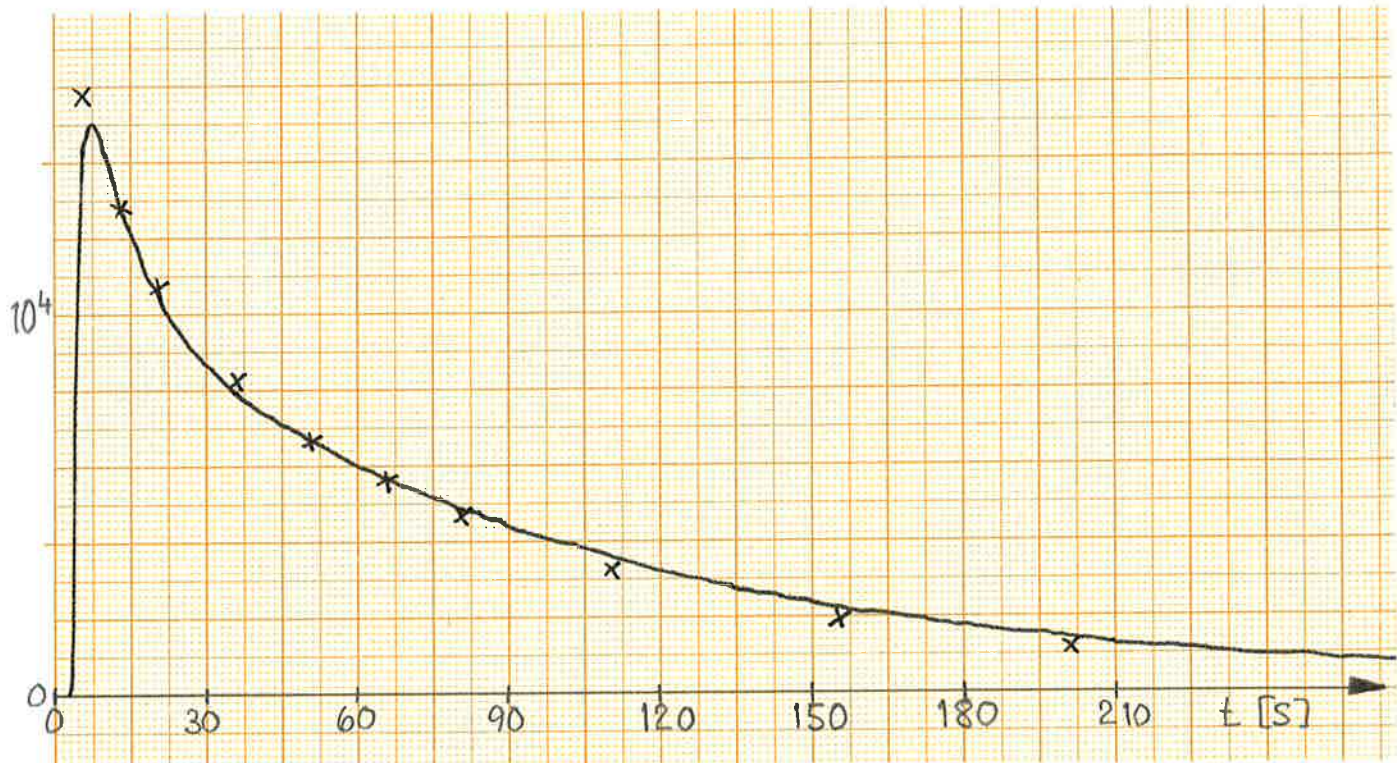


Å11

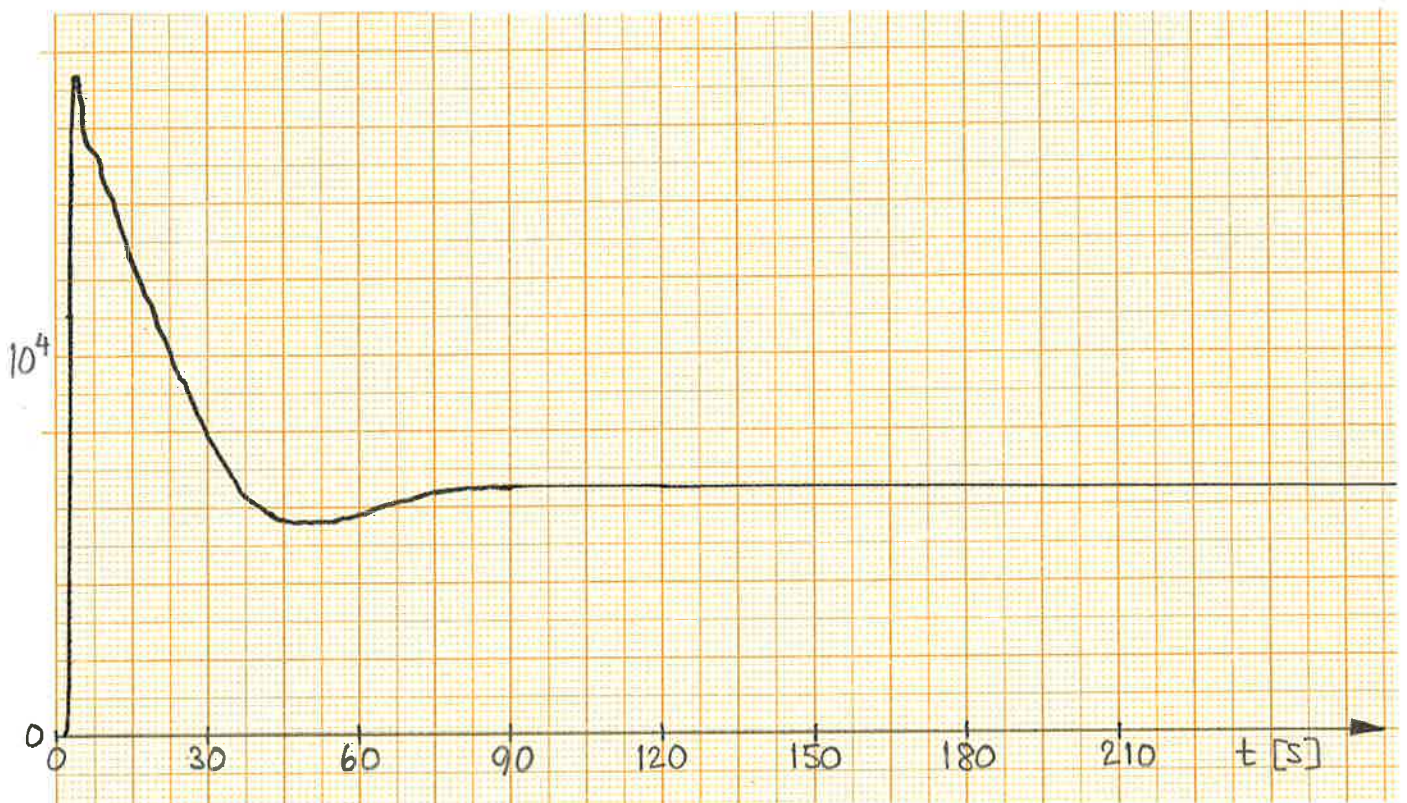


Å12



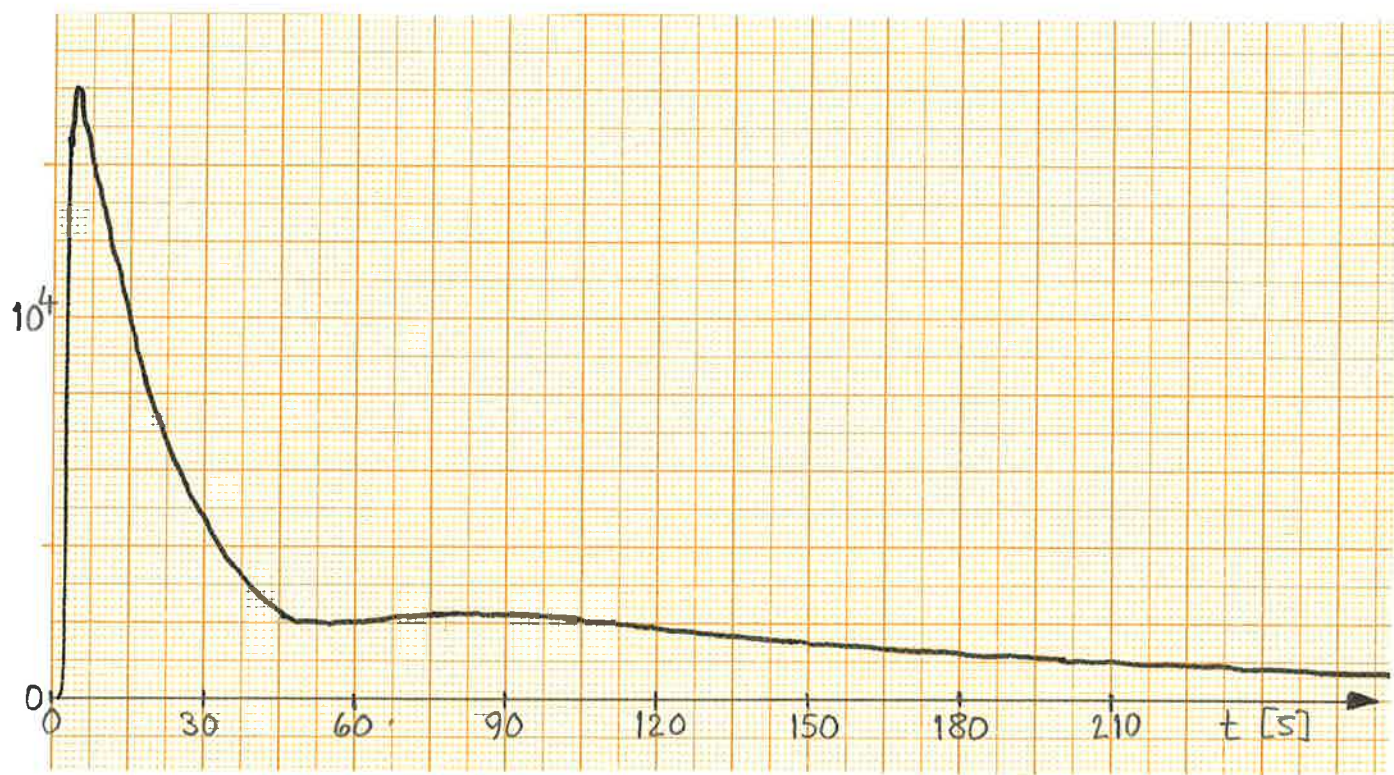


Ä13



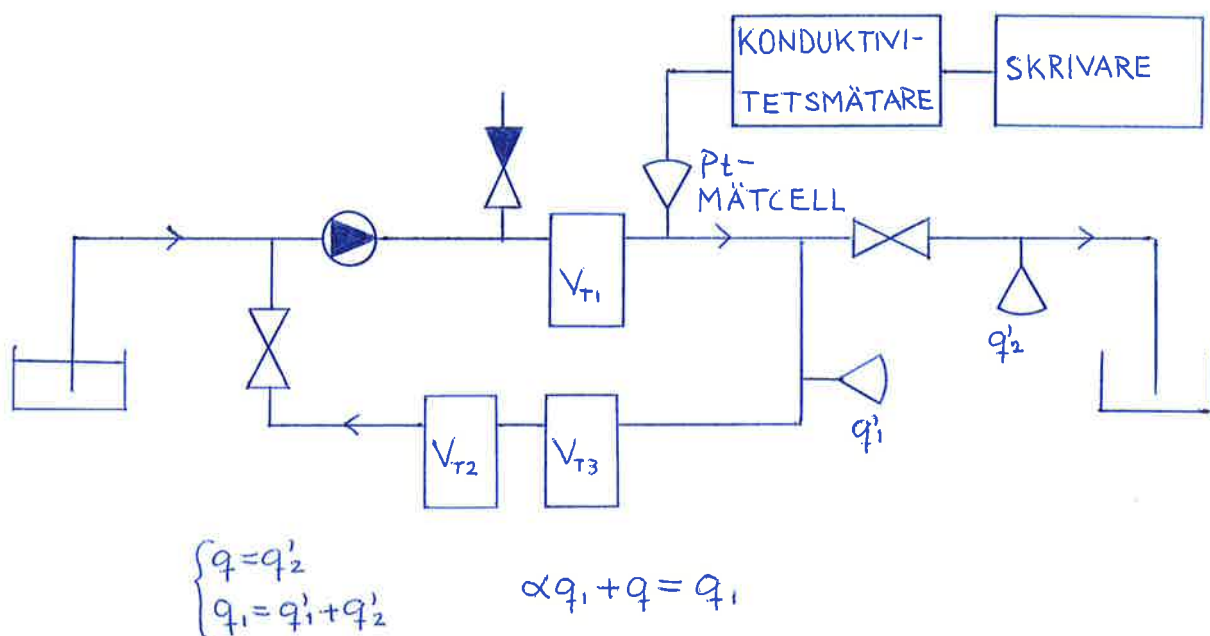
Ä14





Å15

## Försöksuppställning 3:



Data för försöksuppställning 3 enligt nedan

Kurva	$V_{T1}$ (l)	$V_{T2}$ (l)	$V_{T3}$ (l)	$q$ (l/min)	$q_1$ (l/min)	$V_i$ (ml)
Å16	0.63	0.63	0.63	0.00	1.50	2
Å17	0.63	0.63	0.63	0.90	1.80	2
Å18	1.05	0.63	0.27	0.00	1.50	3
Å19	1.05	0.63	0.27	0.90	1.80	3

Teoretisk bestämning av impulssvaret för Å16 - Å19:

Å16

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 - \alpha G_1(s)G_2(s)} = \frac{\frac{q_1/V_T}{s + q_1/V_T}}{1 - \left(\frac{q_1/V_T}{s + q_1/V_T}\right)^3}$$

Efter en del räkning kommer man fram till

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{q_1}{V_T} \left[ \frac{1}{3s} + \frac{2}{3} \frac{(s + 1.5q_1/V_T)}{(s + 1.5q_1/V_T)^2 + (\sqrt{3}q_1/2V_T)^2} \right]$$

Insättning av  $U(s) = V_i c_i K / q_1$  och sedan invers Laplace-transformation ger

$$y(t) = \frac{V_i K c_i}{V_T} \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-\frac{1.5q_1}{V_T} t} \cdot \cos\left(\frac{q_1}{V_T} \frac{\sqrt{3}}{2} t\right) \right]$$



A17

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 - \alpha G_1(s)G_2(s)} = \frac{\frac{q_1/V_T}{s + q_1/V_T}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{q_1/V_T}{(s + q_1/V_T)} \cdot \left(\frac{q_1/2V_T}{s + q_1/2V_T}\right)^2} =$$

$$\frac{q_1}{V_T} \left[ \frac{0,177}{(s + 0,123q_1/V_T)} + 0,823 \frac{(s + 0,938q_1/V_T)}{(s + 0,938q_1/V_T)^2 + (0,373q_1/V_T)^2} - \right. \\ \left. 0,547 \frac{0,373q_1/V_T}{(s + 0,938q_1/V_T)^2 + (0,373q_1/V_T)^2} \right]$$

Vilket ger impussvaret

$$y(t) = \frac{v_i K_{ci}}{q_1} \cdot \frac{q_1}{V_T} \left[ 0,177 e^{-\frac{0,123q_1}{V_T} \cdot t} + 0,823 e^{-\frac{0,938q_1}{V_T} \cdot t} \cos\left(\frac{0,373q_1}{V_T} t\right) - \right. \\ \left. - 0,547 e^{-\frac{0,938q_1}{V_T} t} \sin\left(\frac{0,373q_1}{V_T} \cdot t\right) \right]$$

A18

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{q_1/V_{T1}}{s + q_1/V_{T1}}}{1 - 1 \cdot \frac{q_1^3/V_{T1}V_{T2}V_{T3}}{(s + q_1/V_{T1})(s + q_1/V_{T2})(s + q_1/V_{T3})}} =$$

$$\frac{\frac{0,0238}{s + 0,0238}}{1 - \frac{0,0238 \cdot 0,0397 \cdot 0,0926}{(s + 0,0238)(s + 0,0397)(s + 0,0926)}} =$$

$$0,0238 \left[ \frac{0,54}{s} + 0,46 \frac{(s + 0,078)}{(s + 0,078)^2 + 0,027^2} \right.$$

$$\left. + 0,449 \frac{0,027}{(s + 0,078)^2 + 0,027^2} \right]$$

Vilket ger impulssvaret

$$y(t) = \frac{V_i K_{ci}}{1,05} \left[ 0,54 + 0,46 e^{-0,078t} \cos(0,027t) + 0,449 e^{-0,078t} \sin(0,027t) \right]$$

A19

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{\frac{q_1/V_{T1}}{(s + q_1/V_{T1})}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{q_1/V_{T1}}{(s + q_1/V_{T1})} \cdot \frac{q_1/2V_{T2}}{(s + q_1/2V_{T2})} \cdot \frac{q_1/2V_{T3}}{(s + q_1/2V_{T3})}} = \\ &= \frac{\frac{0,0286}{(s + 0,0286)}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{0,0286 \cdot 0,0238 \cdot 0,0556}{(s + 0,0286)(s + 0,0238)(s + 0,0556)}} = \\ &= \frac{0,0105}{s + 0,00644} + \frac{0,0181(s + 0,0508)}{(s + 0,0508)^2 + 0,0188^2} + \frac{0,0085 \cdot 0,0188}{(s + 0,0508)^2 + 0,0188^2} \end{aligned}$$

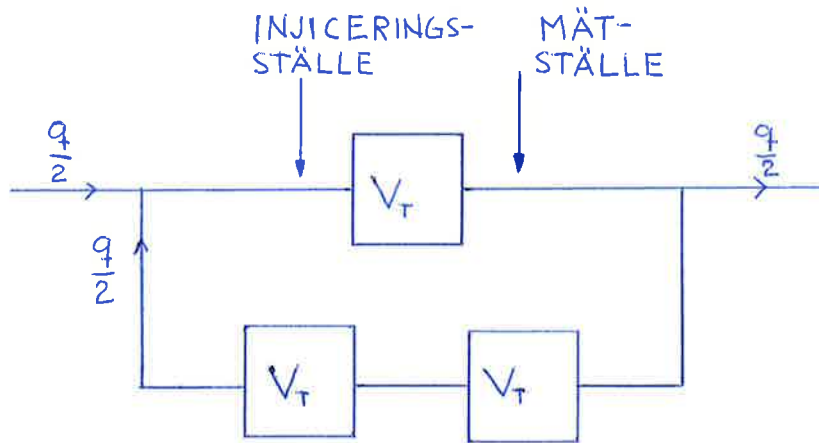
Vilket ger impulssvaret

$$y(t) = \frac{V_i K_{ci}}{0,03} \left[ 0,0105 e^{-0,00644t} + 0,0181 e^{-0,0508t} \cos(0,0188t) + 0,0085 e^{-0,0508t} \sin(0,0188t) \right]$$

En jämförelse mellan de experimentella kurvorna och teoretiskt beräknade punkter visar en mycket god överensstämmelse. Tydligt är att ju fler tankar man har i det recirkulerade systemet desto bättre är överensstämmelsen. Detta beror på att tidsfördröjningens (recirkulationstiden) inverkan är mindre ju fler tankar man har. Detta förklaras enklast med ett exempel.

Antag att vi har följande system

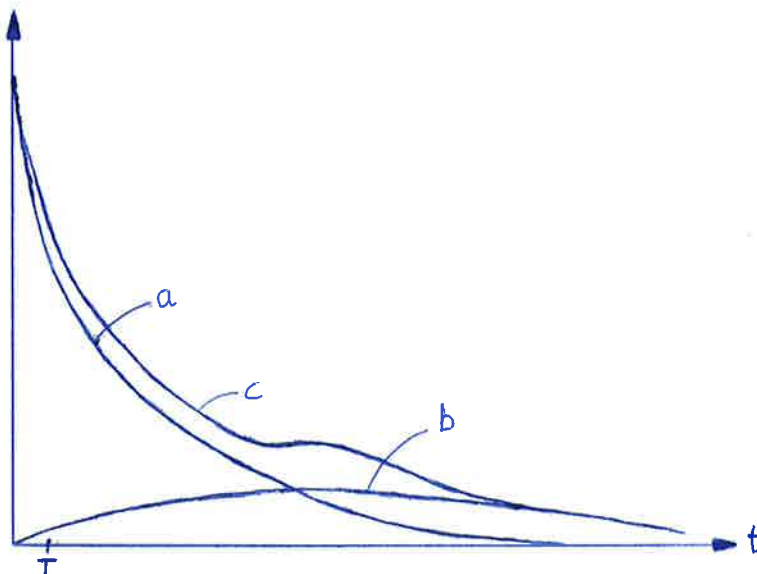




Vi antar, till att börja med, att  $T =$  tidsfördröjningen  $= 0$ .  
 Utsignalen kommer då att bli summan av ett oändligt antal kurvor, där varje kurva är bidraget från nollte, första, andra osv. recirkulationen. För enkelhets skull antar vi, att andra och högre ordningar av recirkulationer inte ger något bidrag.

Vi kommer då att få följande kurva

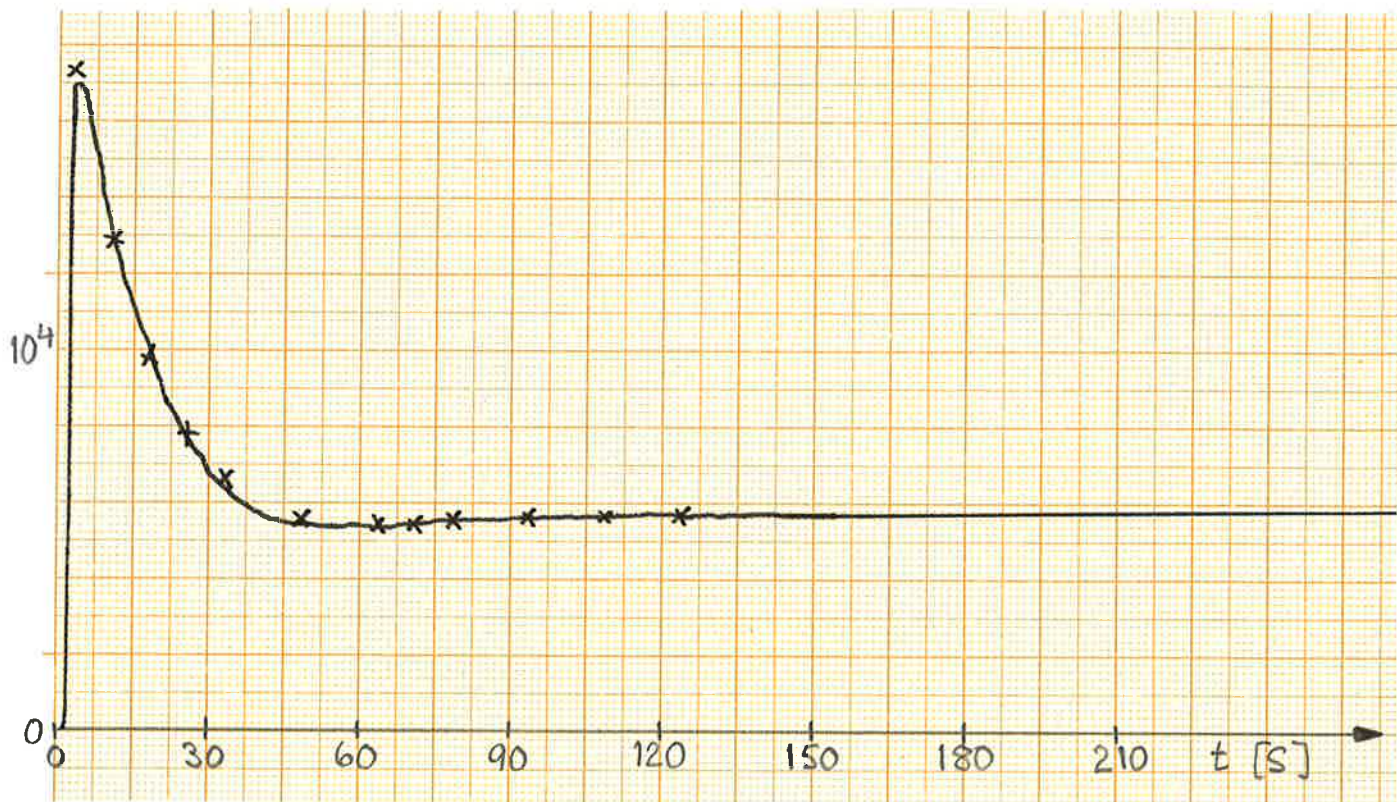
Utslaget



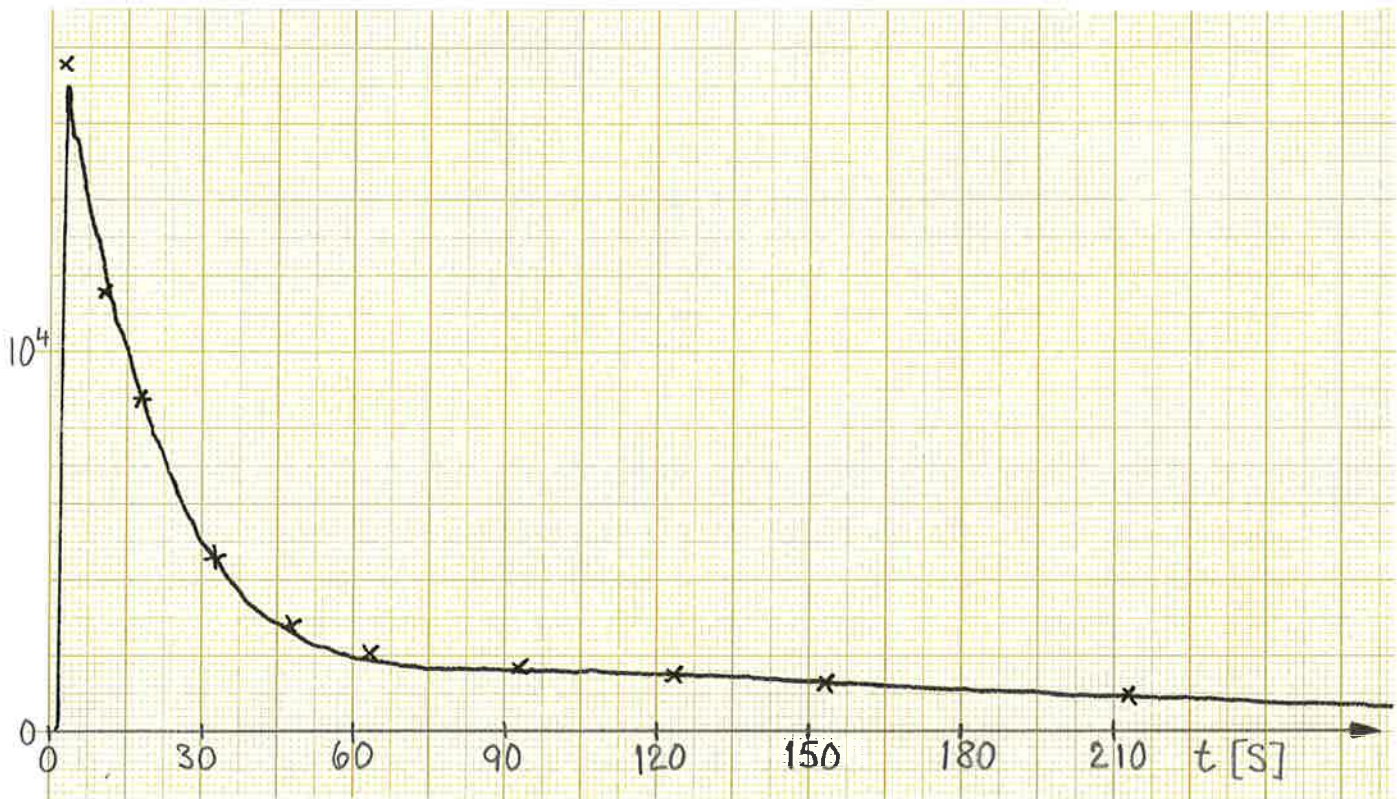
- A) Bidraget från nollte recirkulationen
- B) Bidraget från första recirkulationen
- C) Totala kurvan

Bidraget från första recirkulationen har relativt litet maxutslag samtidigt som kurvan är bred. Om nu tidsfördröjningen  $T = 0$  så kommer vi att få en kurva som ovan, men med bidraget från första recirkulationen förskjuten åt höger. Totala kurvan kommer då att ändras relativt lite jämfört med totala kurvan när  $T=0$  pga, att bidraget från första recirkulationen har så pass svag lutning. Man inser då, att desto fler tankar man har, ju mindre blir maxvärdet, samtidigt som kurvan breddas. Lutningen, på bidraget från första recirkulationen, kommer att bli svagare och svagare och därmed tidsfördröjningens inverkan mindre och mindre.



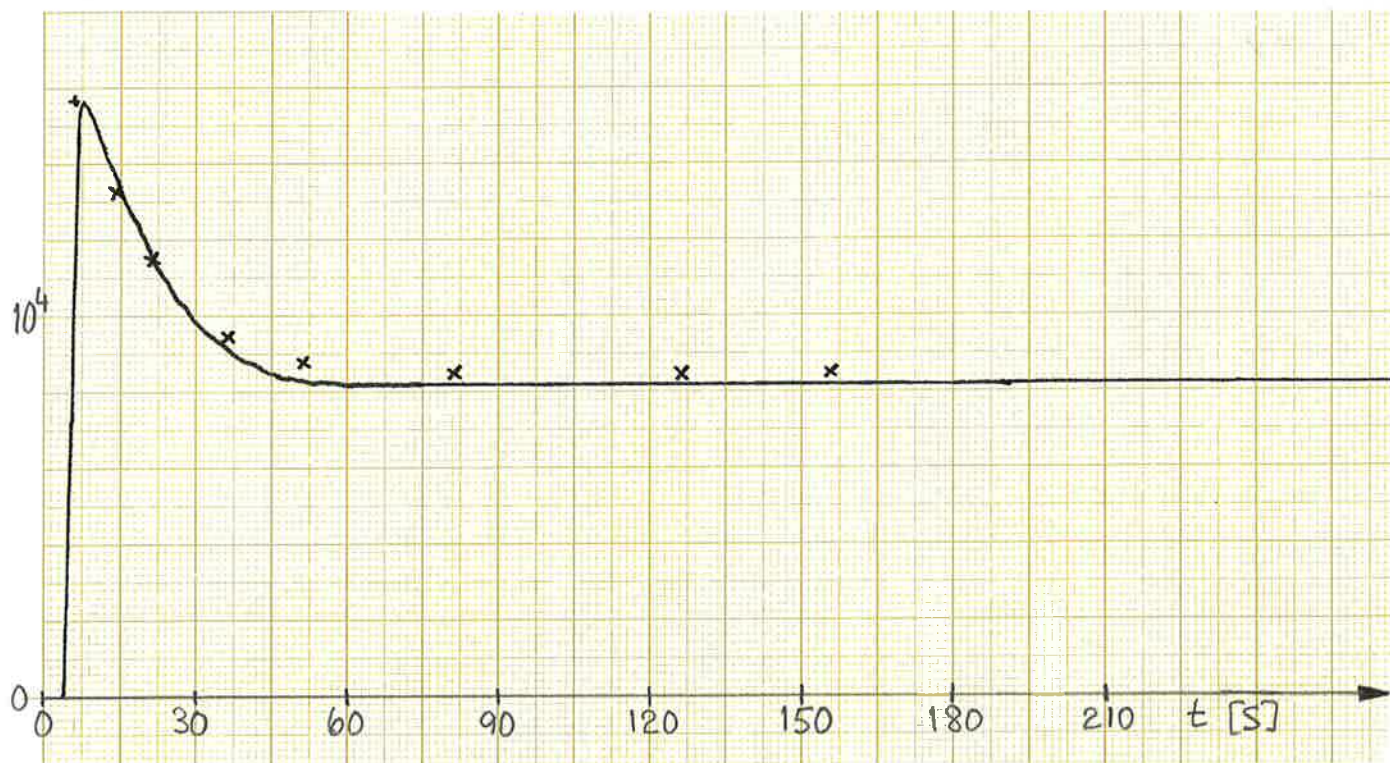


Å16

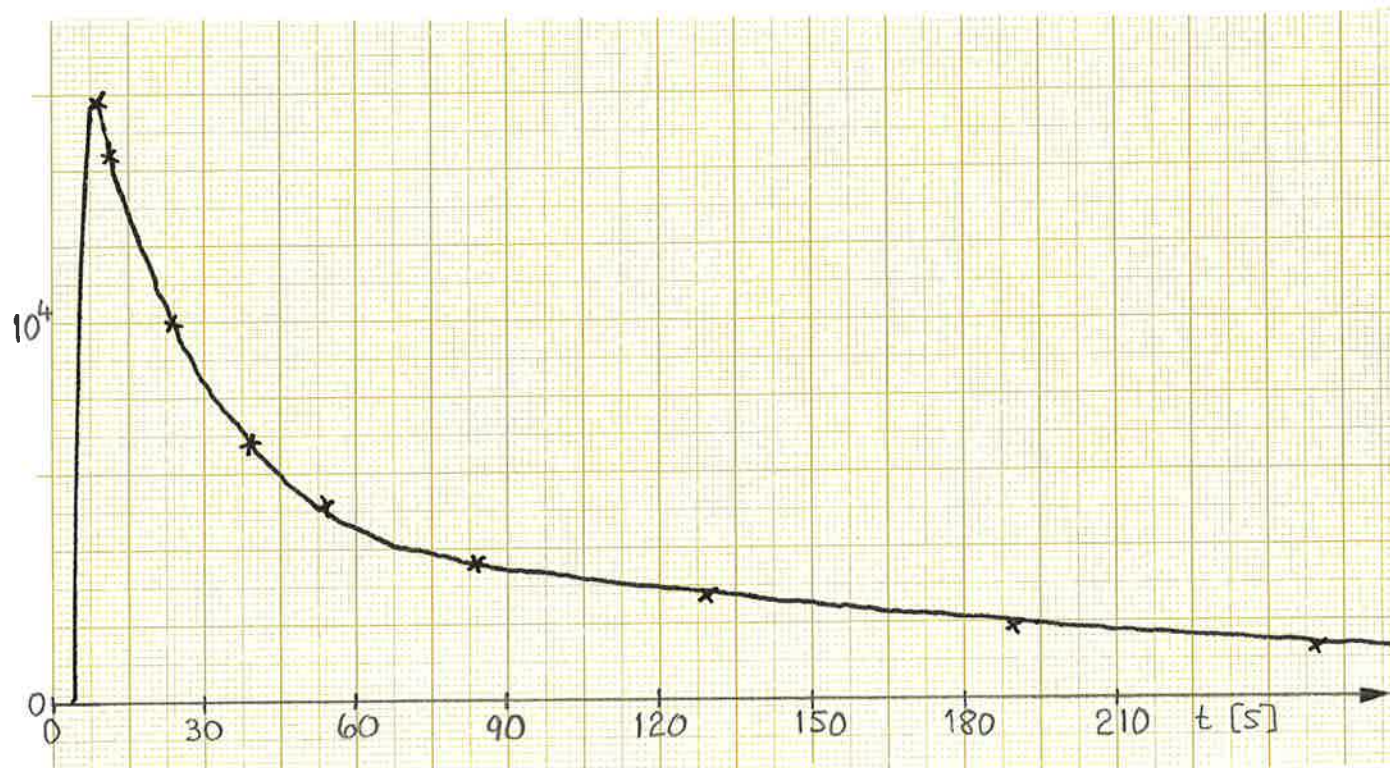


Å17





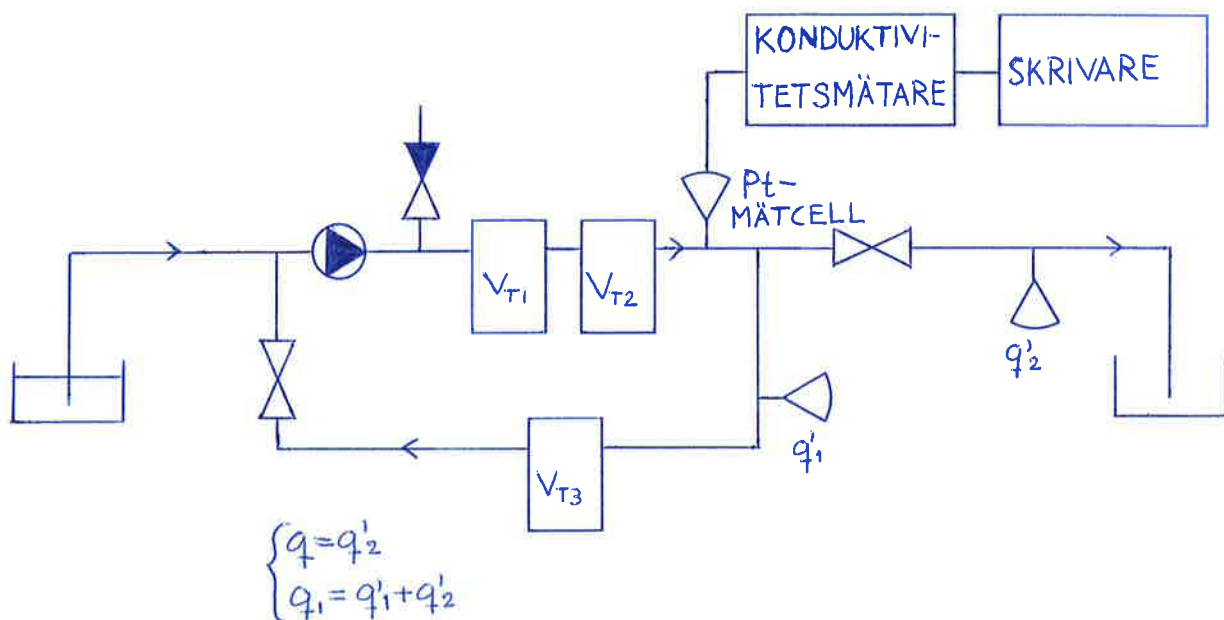
Å18



Å19



## Försöksuppställning 4: \_



Data för försöksuppställning 4 enligt nedan.

Kurva	$V_{T1}$ (l)	$V_{T2}$ (l)	$V_{T3}$ (l)	$q$ (l/min)	$q_1$ (l/min)	$V_i$ (ml)
A20	0.63	0.63	0.63	0.00	1.50	4
A21	0.63	0.63	0.63	0.90	1.80	4

Teoretisk bestämning av impulssvaret för A20 - A21:

A20

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 - \alpha G_1(s)G_2(s)} = \frac{\left(\frac{q_1/V_T}{s + q_1/V_T}\right)^2}{1 - \left(\frac{q_1/V_T}{s + q_1/V_T}\right)^3} =$$

$$\frac{q_1}{3V_T} \left[ \frac{1}{s} + \frac{1.5 q_1/V_T}{(s + 1.5 q_1/V_T)^2 + (\sqrt{3} q_1/2V_T)^2} - \frac{(s + 1.5 q_1/V_T)}{(s + 1.5 q_1/V_T)^2 + (\sqrt{3} q_1/2V_T)^2} \right]$$

Vilket ger impulssvaret

$$y(t) = \frac{V_i k_c}{3V_T} \left[ 1 + \sqrt{3} e^{-\frac{1.5 q_1}{V_T} t} \sin\left(\frac{\sqrt{3} q_1}{2 V_T} t\right) - e^{-\frac{1.5 q_1}{V_T} t} \cos\left(\frac{\sqrt{3} q_1}{2 V_T} t\right) \right]$$

A21

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 - \alpha G_1(s)G_2(s)} = \frac{\left(\frac{q_1/V_T}{s + q_1/V_T}\right)^2}{1 - \alpha \left(\frac{q_1/V_T}{s + q_1/V_T}\right)^2 \left(\frac{q_1/2V_T}{s + q_1/2V_T}\right)} =$$

$$\frac{q_1}{V_T} \left[ \frac{0,266}{(s + 0,152q_1/V_T)} - 0,266 \frac{(s + 1,18q_1/V_T)}{(s + 1,18q_1/V_T)^2 + (0,51q_1/V_T)^2} \right.$$

$$\left. + 1,43 \frac{0,51q_1/V_T}{(s + 1,18q_1/V_T)^2 + (0,51q_1/V_T)^2} \right]$$

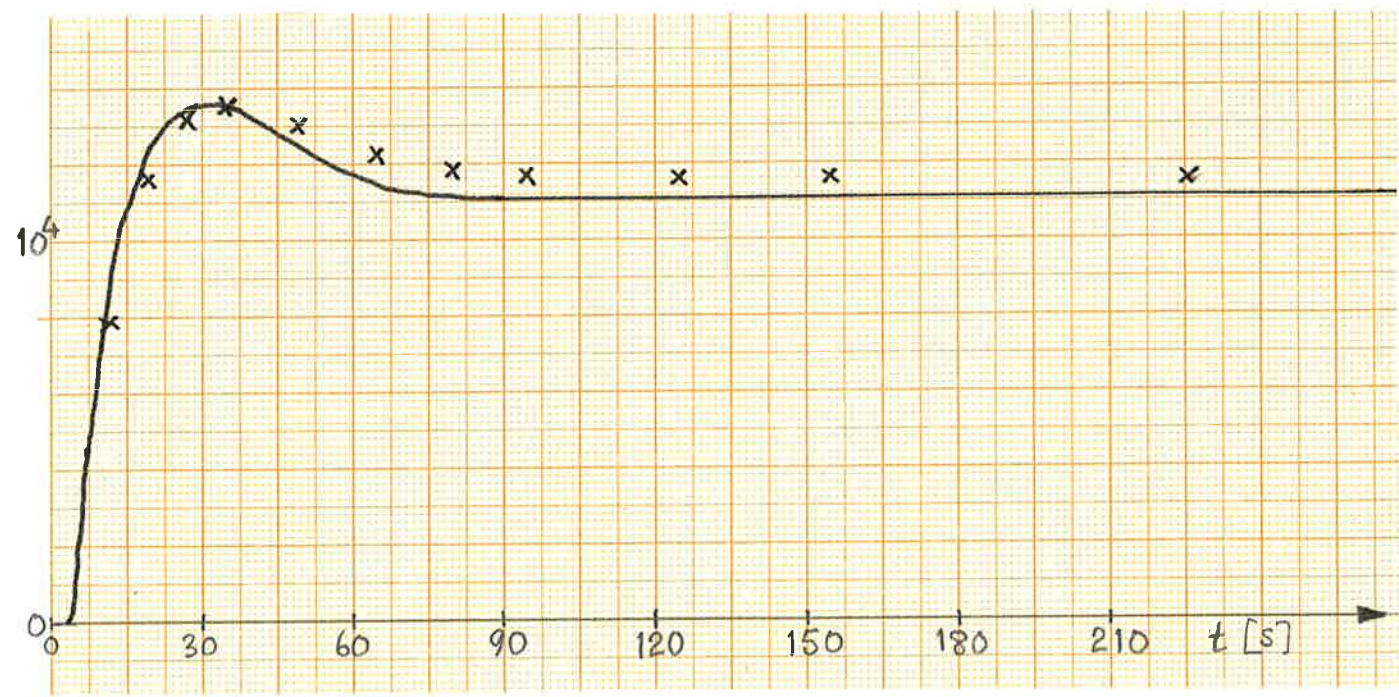
Vilket ger impulssvaret

$$y(t) = \frac{v_i k c_i}{V_T} \left[ 0,266 e^{-\frac{0,152q_1}{V_T} t} - 0,266 e^{-\frac{1,18q_1}{V_T} t} \cos\left[0,51q_1/V_T \cdot t\right] \right.$$

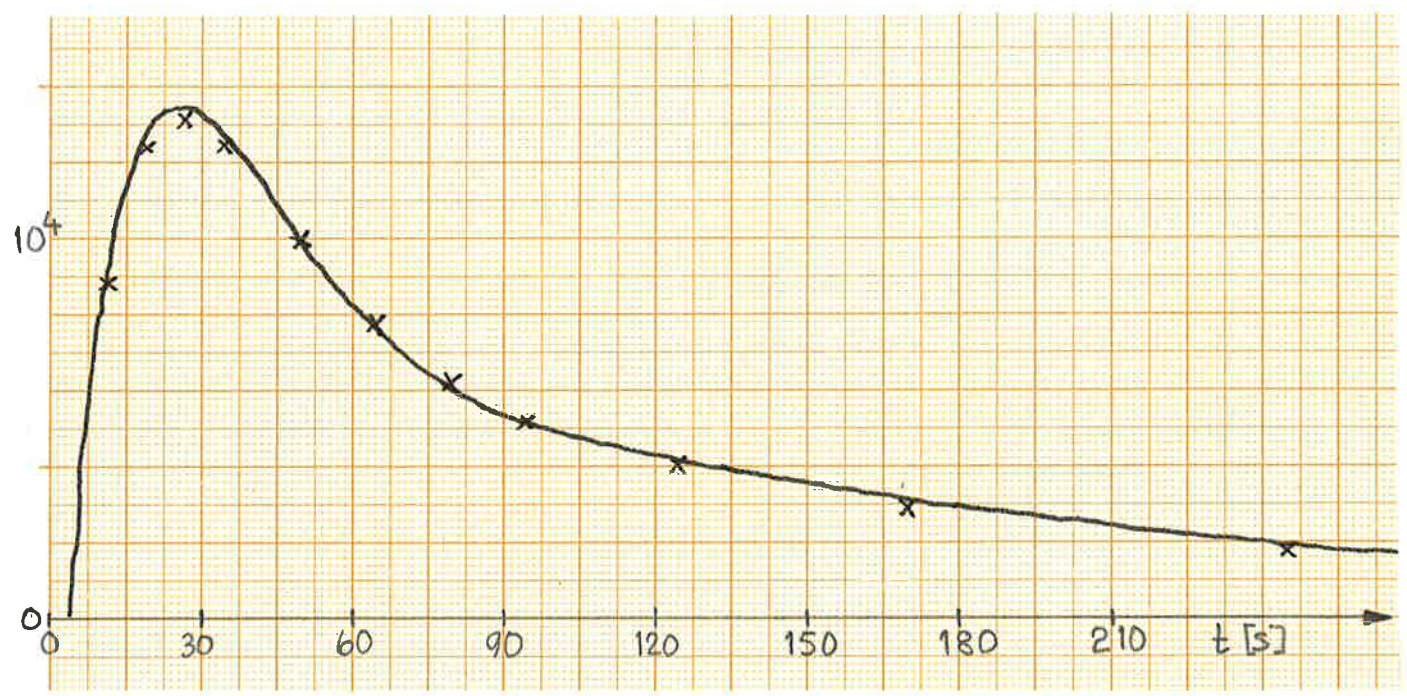
$$\left. + 1,43 e^{-\frac{1,18q_1}{V_T} t} \sin\left(\frac{0,51q_1}{V_T} t\right) \right]$$

Överensstämmelsen mellan de experimentella kurvorna och de teoretiskt beräknade punkterna är mycket god. De teoretiska punkterna i A20 ligger lite över den experimentella kurvan, vilket beror på att slangarnas volym har negligerats vid beräkning av det teoretiska impulssvaret.



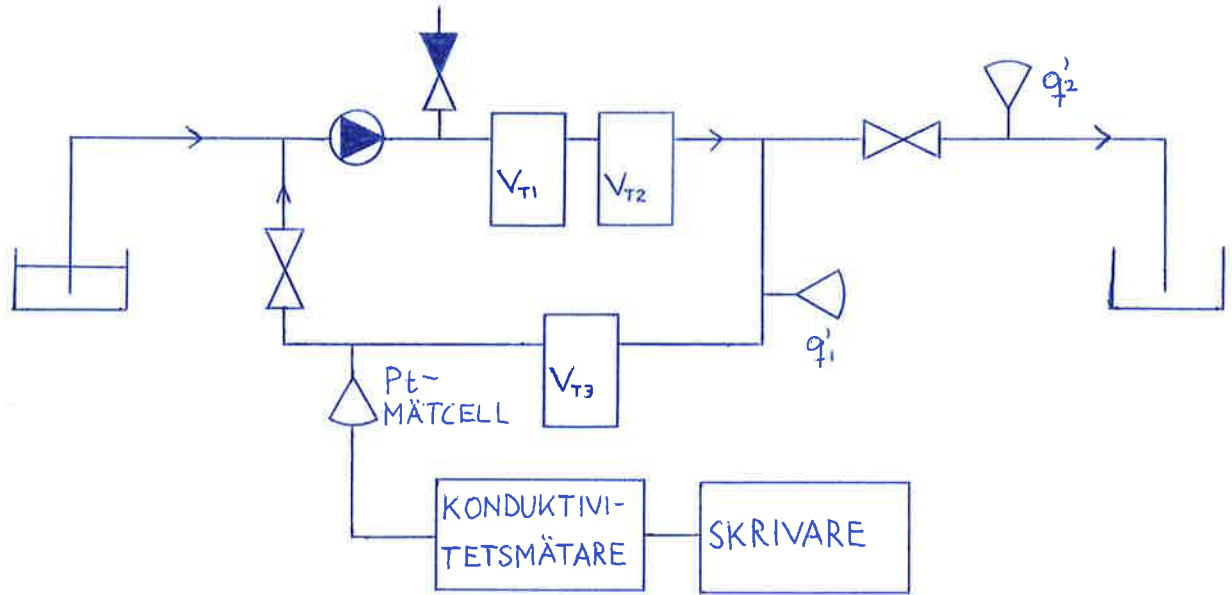


Ä20



Ä21

Försöksuppställning 5:



$$\begin{cases} q = q_2 \\ q_1 = q_1' + q_2' \end{cases} \quad q + \alpha q_1 = q_1$$

Data för försöksuppställning 5 enligt nedan

Kurva	$V_{T1}$ (l)	$V_{T2}$ (l)	$V_{T3}$ (l)	$q$ (l/min)	$q_1$ (l/min)	$V_i$ (ml)
A22	0.63	0.63	0.63	0.00	1.50	6
A23	0.63	0.63	0.63	0.90	1.80	6

Teoretisk bestämning av impulssvaret för A22 - A23:  
 pga mätcellens ändrade läge fås överföringsfunktionen till

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_2(s) \cdot \frac{G_1(s)}{1 - \alpha G_1(s)G_2(s)}$$

A22

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 - \alpha G_1(s)G_2(s)} = \frac{\left(\frac{q_1/V_T}{s + q_1/V_T}\right)^3}{1 - \left(\frac{q_1/V_T}{s + q_1/V_T}\right)^3} =$$



$$\frac{q_1}{3V_T} \left[ \frac{1}{s} - \frac{(s + 1,5q_1/V_T)}{(s + 1,5q_1/V_T)^2 + (\sqrt{3}q_1/2V_T)^2} - \sqrt{3} \cdot \frac{(\sqrt{3}q_1/2V_T)}{(s + 1,5q_1/V_T)^2 + (\sqrt{3}q_1/2V_T)^2} \right]$$

Vilket ger impulssvaret

$$y(t) = \frac{V_i K C_i}{V_T} \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-\frac{1,5q_1}{V_T} t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}q_1}{2V_T} t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1,5q_1}{V_T} t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}q_1}{2V_T} t\right) \right]$$

A23

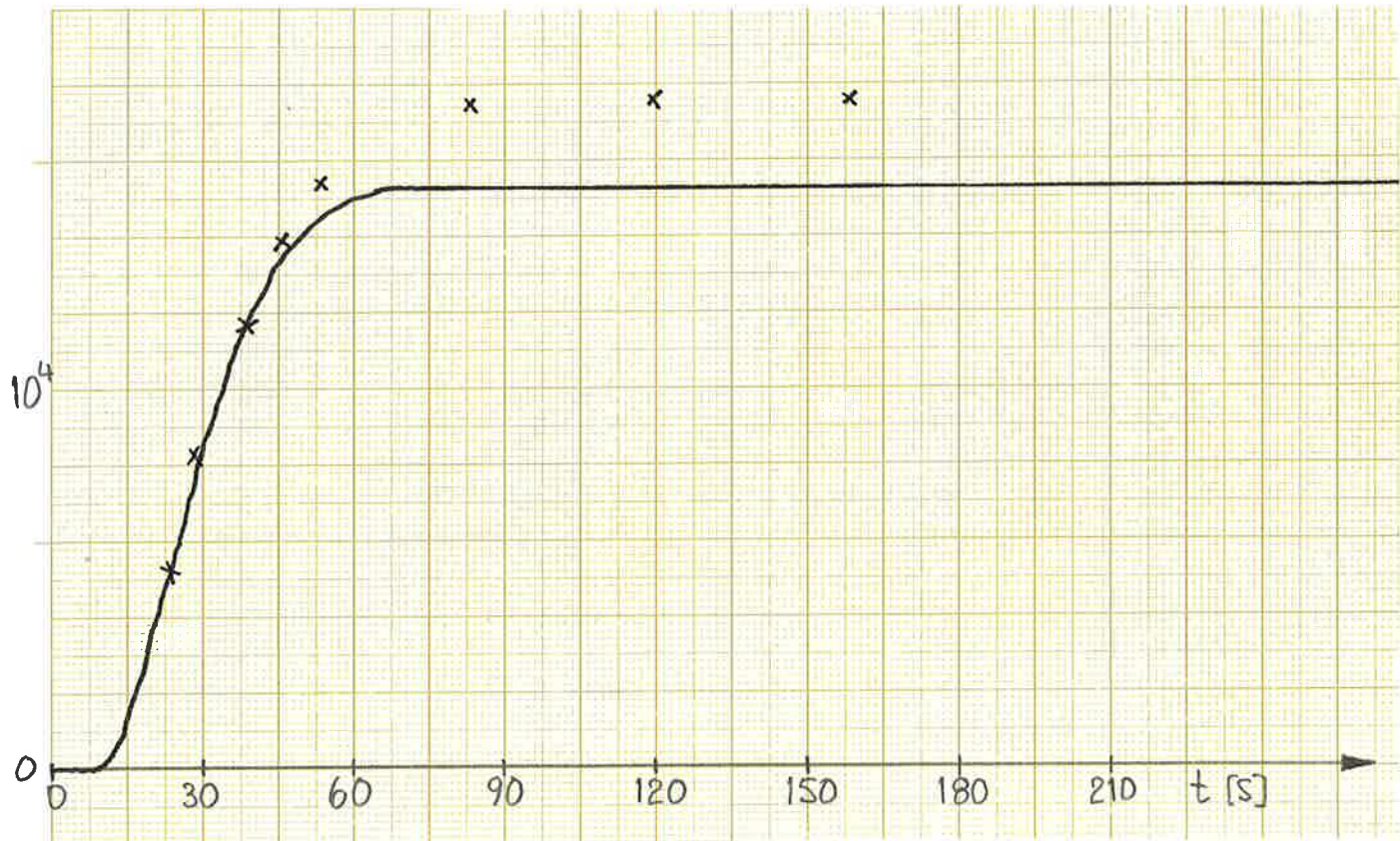
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 - \alpha G_1(s)G_2(s)} = \frac{\left(\frac{q_1/V_T}{s + q_1/V_T}\right)^2 \left(\frac{q_1/2V_T}{s + q_1/2V_T}\right)}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{q_1/V_T}{s + q_1/V_T}\right)^2 \left(\frac{q_1/2V_T}{s + q_1/2V_T}\right)} =$$

$$\frac{q_1}{V_T} \left[ 0,383 \frac{1}{(s + 0,152q_1/V_T)} - 0,383 \frac{(s + 1,18q_1/V_T)}{(s + 1,18q_1/V_T)^2 + (0,51q_1/V_T)^2} - 0,769 \frac{0,51q_1/V_T}{(s + 1,18q_1/V_T)^2 + (0,51q_1/V_T)^2} \right]$$

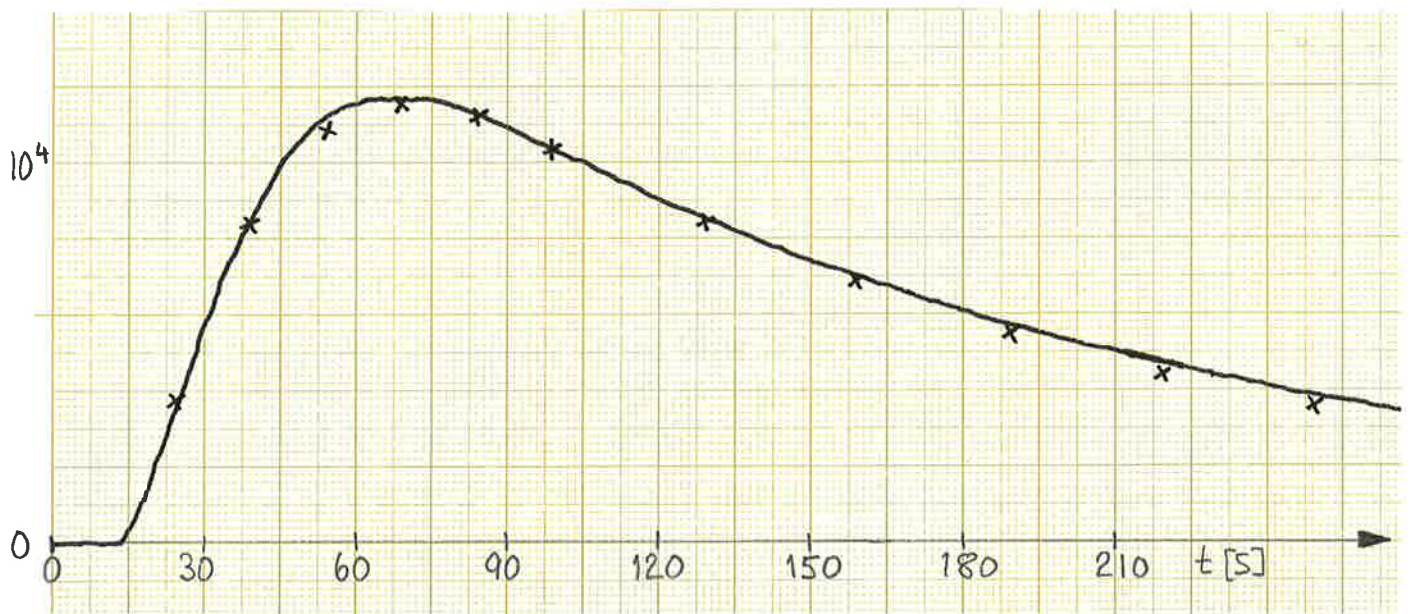
Vilket ger impulssvaret

$$y(t) = \frac{V_i K C_i}{V_T} \left[ 0,383 e^{-\frac{0,152q_1}{V_T} t} - 0,383 e^{-\frac{1,18q_1}{V_T} t} \cos\left(\frac{0,51q_1}{V_T} t\right) - 0,769 e^{-\frac{1,18q_1}{V_T} t} \sin\left(\frac{0,51q_1}{V_T} t\right) \right]$$

Överensstämmelsen är god för  $\alpha < 1$  (A23) medan för  $\alpha = 1$  (A22) ligger de teoretiska punkterna, pga slangarnas volym, för högt.



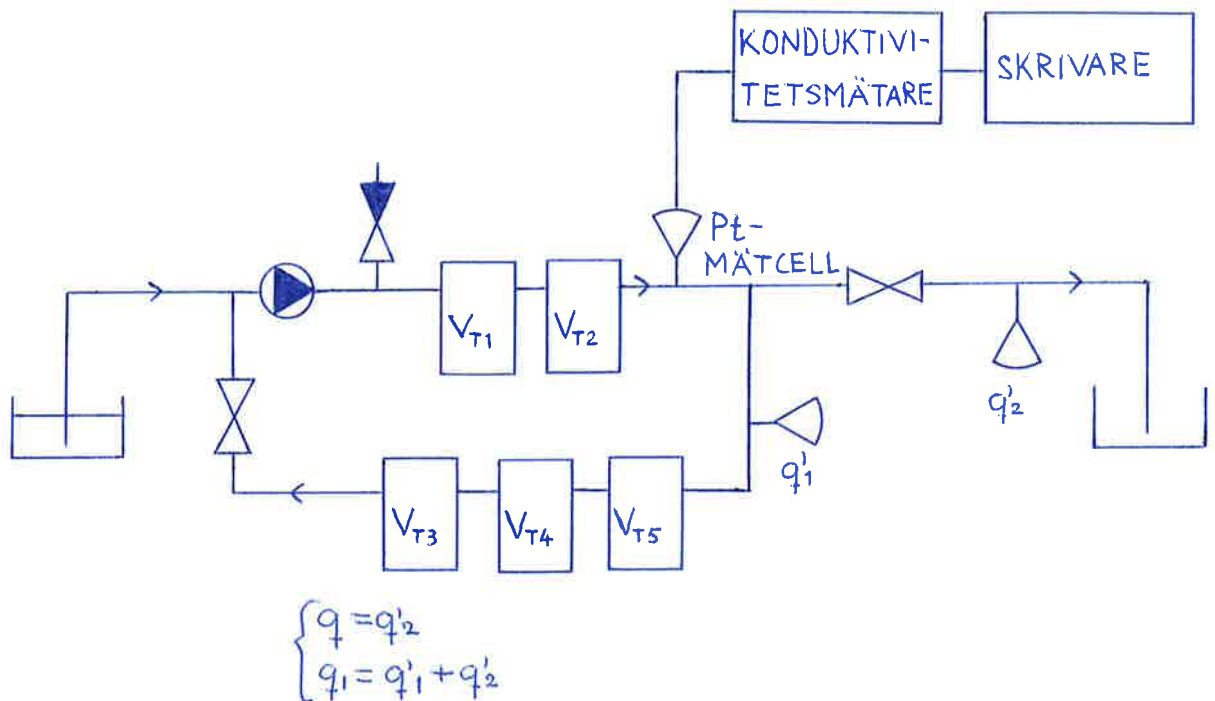
Å22



Å23



## Försöksuppställning 6:



Data för försöksuppställning 6 enligt nedan.

Kurva	$V_{T1}$ (l)	$V_{T2}$ (l)	$V_{T3}$ (l)	$V_{T4}$ (l)	$V_{T5}$ (l)	$q$ (l/min)	$q_1$ (l/min)	$V_i$ (ml)
A24	0.63	0.63	0.63	0.27	-	0.00	1.50	4
A25	0.63	0.63	0.63	0.27	-	0.90	1.80	4
A26	0.63	0.63	0.63	0.27	1.05	0.00	1.50	4
A27	0.63	0.63	0.63	0.27	1.05	0.90	1.80	4

För A24 och A25 användes enbart fyra tankar.

Överföringsfunktioner för A25 - A27:

A25

$$G(s) = \frac{\frac{q_1}{V_{T1}} (s + q_1 / 2V_{T1})(s + q_1 / 2V_{T4})}{(s + q_1 / V_{T1})^2 (s + q_1 / 2V_{T1})(s + q_1 / 2V_{T4}) - q_1^4 / 8V_{T1}^3 V_{T4}}$$

A26

$$G(s) = \frac{\frac{q_1}{V_{T1}} (s + q_1 / V_{T1})(s + q_1 / V_{T4})(s + q_1 / V_{T5})}{(s + q_1 / V_{T1})^3 (s + q_1 / V_{T4})(s + q_1 / V_{T5}) - q_1^5 / V_{T1}^3 V_{T4} V_{T5}}$$

A27

$$G(s) = \frac{\frac{q_1}{V_{T1}} (s + q_1 / 2V_{T1})(s + q_1 / 2V_{T4})(s + q_1 / 2V_{T5})}{(s + q_1 / V_{T1})^2 (s + q_1 / 2V_{T1})(s + q_1 / 2V_{T4})(s + q_1 / 2V_{T5}) - q_1^5 / 16V_{T1}^3 V_{T4} V_{T5}}$$

Teoretisk bestämning av impulssvaret för Å24:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 - \alpha G_1(s)G_2(s)} = \frac{\left(\frac{q_1/V_{T1}}{s + q_1/V_{T1}}\right)^2}{1 - \left(\frac{q_1/V_{T1}}{s + q_1/V_{T1}}\right)^3 \left(\frac{q_1/V_{T4}}{s + q_1/V_{T4}}\right)} =$$

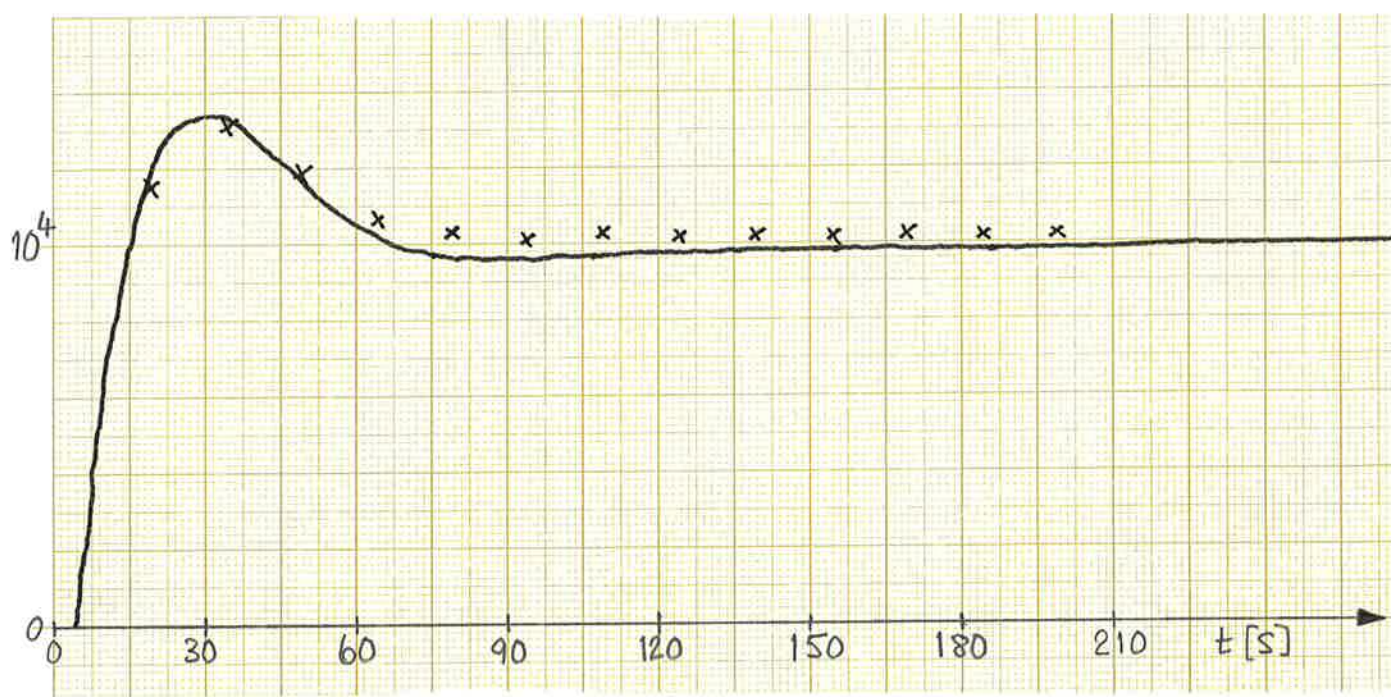
$$\frac{q_1}{V_{T1}} \left[ \frac{0,292}{s} - \frac{0,0794}{s + 0,109} - 0,213 \frac{(s + 0,051)}{(s + 0,051)^2 + 0,0445^2} + 0,452 \frac{0,0445}{(s + 0,051)^2 + 0,0445^2} \right]$$

Vilket ger impulssvaret

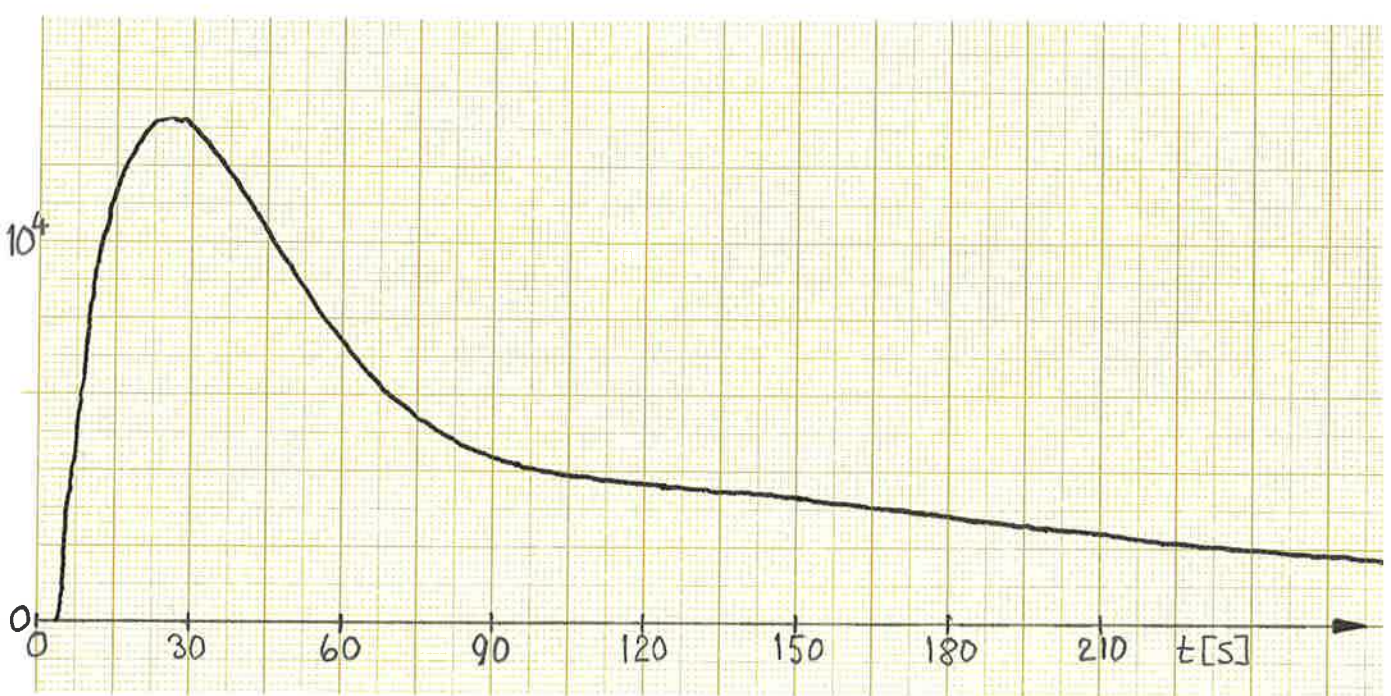
$$y(t) = \frac{V_i K_c i}{0,63} \left[ 0,292 - 0,0794 e^{-0,109t} - 0,213 e^{-0,051t} \cos(0,0445t) + 0,452 e^{-0,051t} \sin(0,0445t) \right]$$

Överensstämmelsen, mellan experimentell kurva och de teoretiska punkterna för Å24, är god.



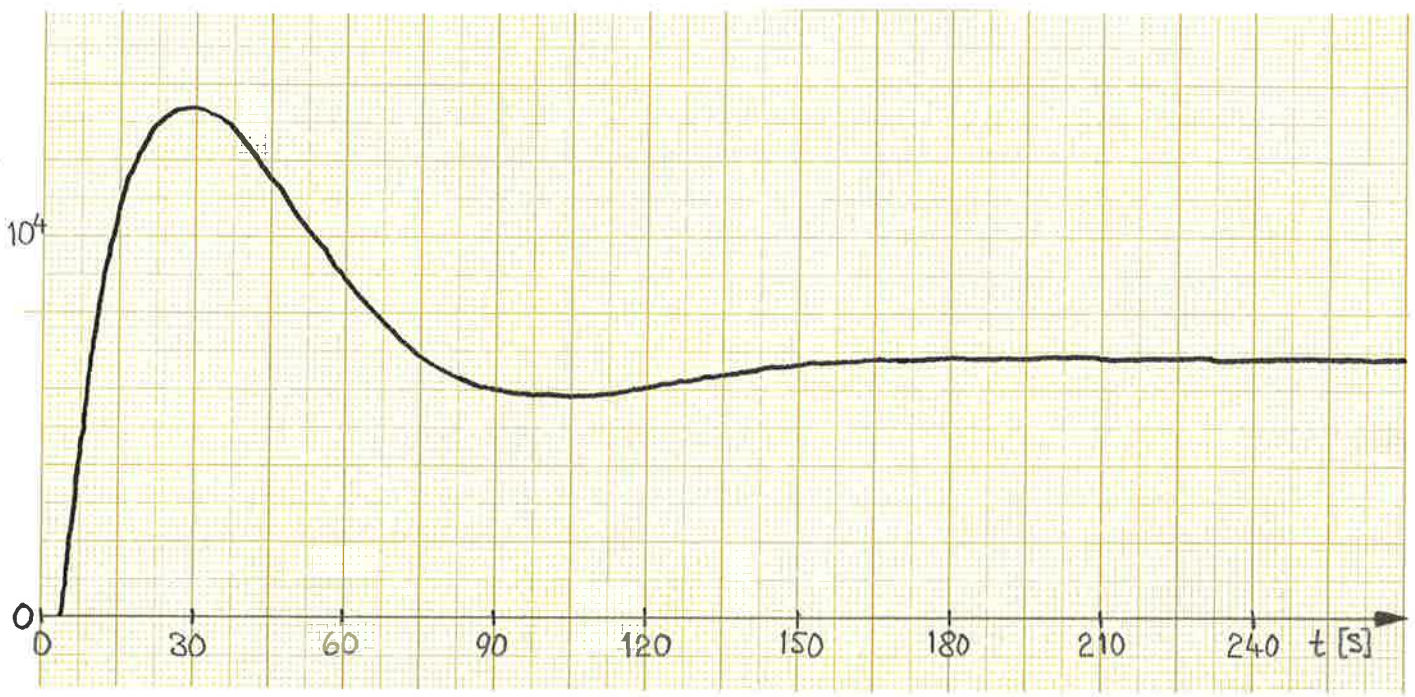


Å24

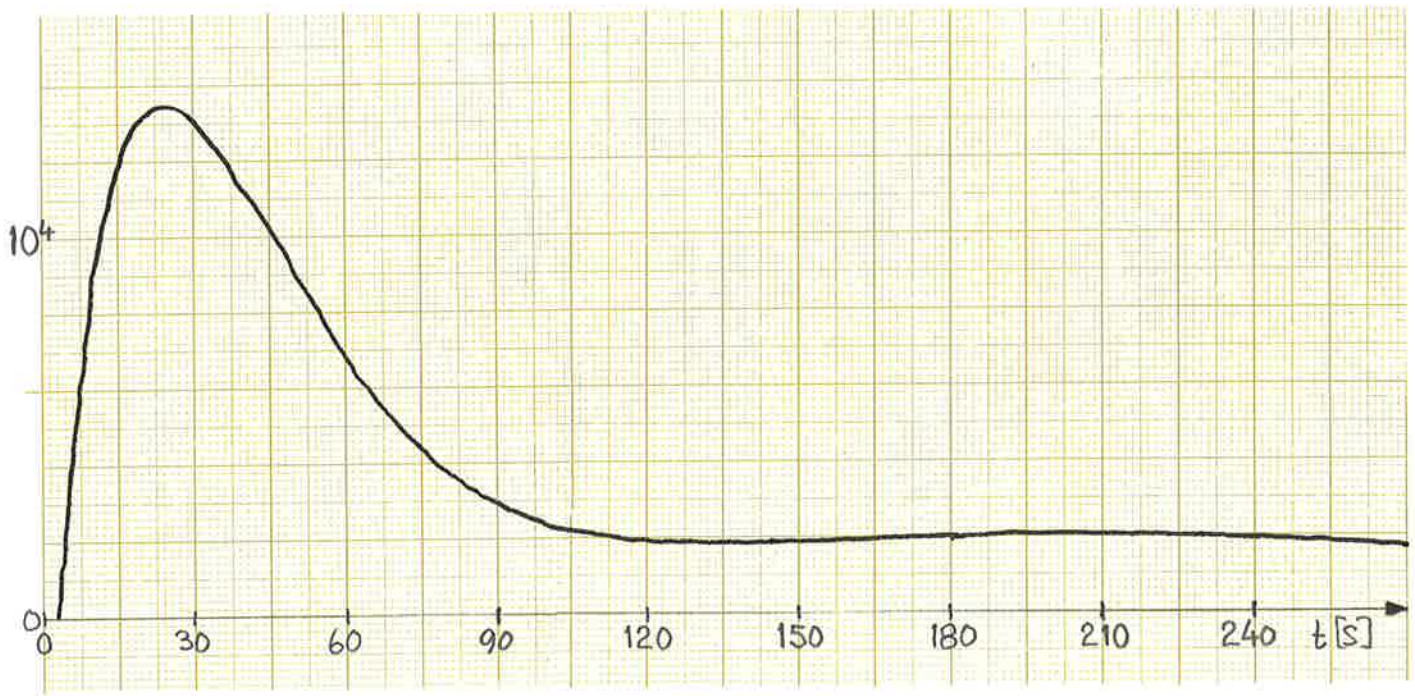


Å25





Å26



Å27



## 5. STEGSVAR

För att kunna ta upp ett stegsvar behöver man lämpligtvis ett steg. Steget i våra försök är inget annat än utspädd saltlösning. Såsom nämnts tidigare är stegets funktion  $C' \cdot K \Theta(t)$ , där just  $C'$  betecknar hur stor del av saltlösningen som utgöres av mättad saltlösning. Saltlösningen blandas till i en behållare med stor yta. Pumpen kräver nämligen konstant inlopps- och utloppsnivå för att kunna hålla flödet konstant under försökets gång. En stor vätskeyta i behållaren medför, att inloppsnivån är något så när konstant.

Försöksuppställningarna är i princip samma som för impulssvarsförsöken. Skillnaden är att injiceringsventilen är bortkopplad och att inloppsslangen är kopplad till behållaren med den tillblandade saltlösningen.

Försökens uppstartning går till på följande vis

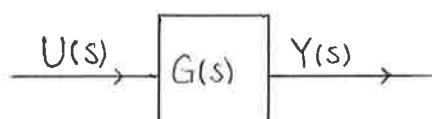
- 1) Systemet kopplas upp.
- 2) Inloppsslangen kopplas till en vattenbehållare.
- 3) Systemet fylls med rent vatten.
- 4) Önskade flöde ställs in.
- 5) En ventil som är kopplad till utloppsslangens fria ända stängs.
- 6) Inloppsslangen förs över till saltlösningsbehållaren som skall ha samma vätskenivå som vattenbehållaren (konst. flöde).
- 7) Utloppsventilen öppnas samtidigt som skrivaren startas.

Denna procedur måste gås igenom för varje nytt försök.

Enbart ett fåtal stegsvar togs upp. Dels för att dessa är tidskrävande, dels för att de ger relativt liten information om systemet.

Det bör nämnas att det är omöjligt att åstadkomma en översläng. Saltlösningens koncentration kan ju aldrig bli högre, än vad den är i behållaren.

En tank



$$\begin{cases} U(s) = \frac{C'Kc_i}{s} \\ G(s) = \frac{q/V_T}{s + q/V_T} \\ Y(s) = G(s)U(s) \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{q/V_T}{s + q/V_T} \cdot \frac{C'Kc_i}{s}$$

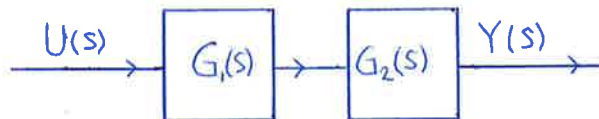
Vilket ger stegsvaret

$$y(t) = C'Kc_i \left(1 - e^{-\frac{q}{V_T}t}\right)$$

För kurvan ST1 gäller

$$\begin{cases} q = 1,53 \text{ l/min.} \\ V_T = 0,63 \text{ l} \\ C' = \frac{V_{NaCl}}{V_{NaCl} + V_{H_2O}} = 2,74 \cdot 10^{-3} \\ Kc_i = 5,25 \cdot 10^6 \end{cases}$$

Två lika stora tankar i serie



$$\begin{cases} U(s) = \frac{C'Kc_i}{s} \\ G(s) = G_1(s)G_2(s) = \left(\frac{q/V_T}{s + q/V_T}\right)^2 \\ Y(s) = G(s)U(s) \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{C'Kc_i q^2}{V_T^2} \cdot \frac{1}{s(s + q/V_T)^2}$$

$$C'Kc_i \left[ \frac{1}{s} - \frac{s}{(s + q/V_T)^2} - \frac{2q}{V_T} \cdot \frac{1}{(s + q/V_T)^2} \right]$$



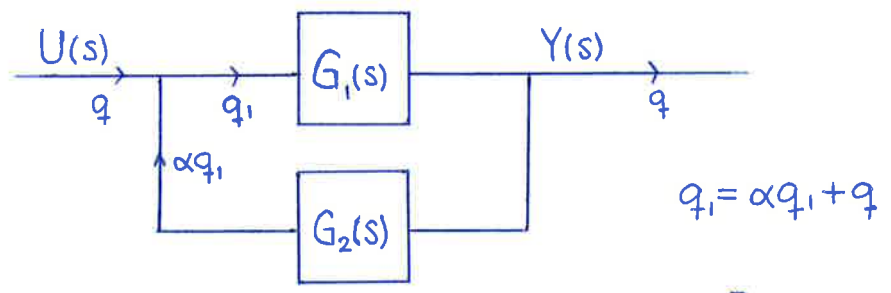
Vilket ger stegsvaret

$$y(t) = C' K_{ci} \left[ 1 - e^{-\frac{q}{V_T} t} \left( 1 + \frac{q}{V_T} \cdot t \right) \right]$$

För kurvan ST2 gäller

$$\begin{cases} q = 1,5 \text{ l/min.} \\ V_T = 0,63 \text{ l} \\ C' = 2,74 \cdot 10^{-3} \\ K_{ci} = 5,25 \cdot 10^6 \end{cases}$$

Recirkulerat system, två tankar



$$Y(s) = G_1(s) \cdot \left[ \frac{q U(s) + \alpha q_1 G_2(s) Y(s)}{q + \alpha q_1} \right]$$

Vilket ger

$$Y(s) = \frac{(1 - \alpha) G_1(s)}{1 - \alpha G_1(s) G_2(s)} U(s)$$

För kurvan ST3 gäller

$$\begin{cases} q = \alpha q_1 = 0,9 \text{ l/min.} \Rightarrow \alpha = 1/2 \\ V_{T1} = V_{T2} = 0,63 \text{ l} \\ C' = 2,74 \cdot 10^{-3} \\ K_{ci} = 5,25 \cdot 10^6 \end{cases}$$

$\alpha = 0.5$  och  $V_{T1} = V_{T2} = V_T$  medför att

$$Y(s) = \frac{0,5 \frac{q_1/V_T}{s + q_1/V_T}}{1 - 0,5 \frac{q_1/V_T}{s + q_1/V_T} \cdot \frac{q_1/2V_T}{s + q_1/2V_T}} \cdot \frac{C'Kc_i}{s} =$$

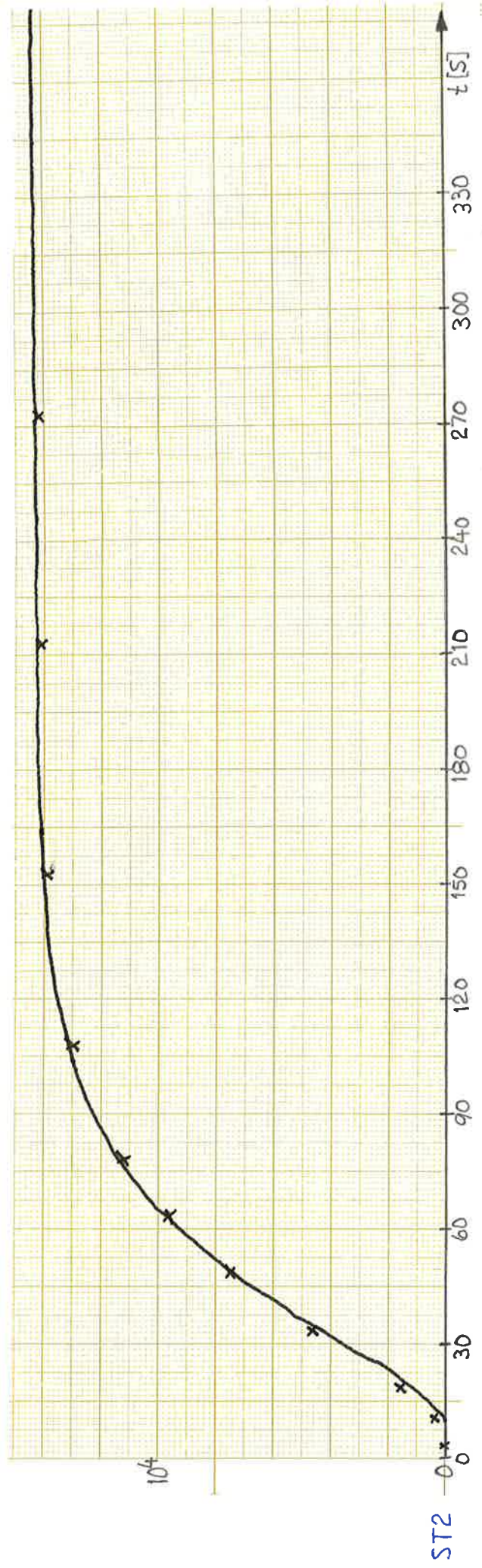
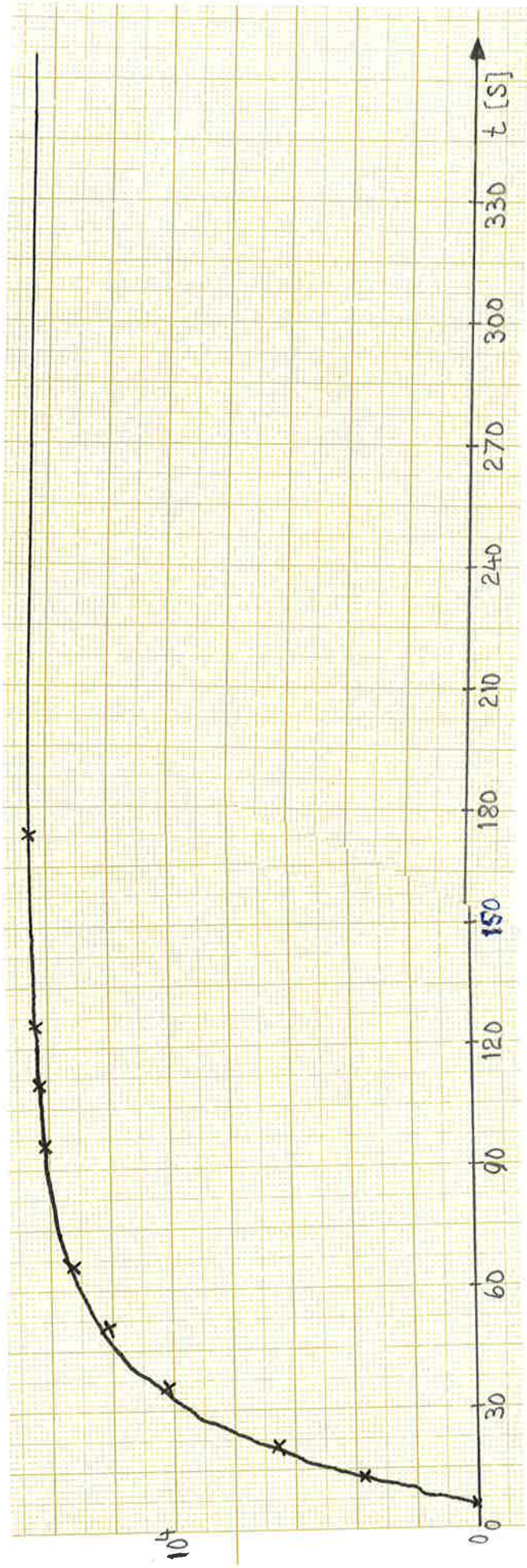
$$C'Kc_i \left[ \frac{1}{s} - \frac{(s + q_1/V_T)}{(s + 0,191q_1/V_T)(s + 1,31q_1/V_T)} \right]$$

Vilket ger stegsvaret

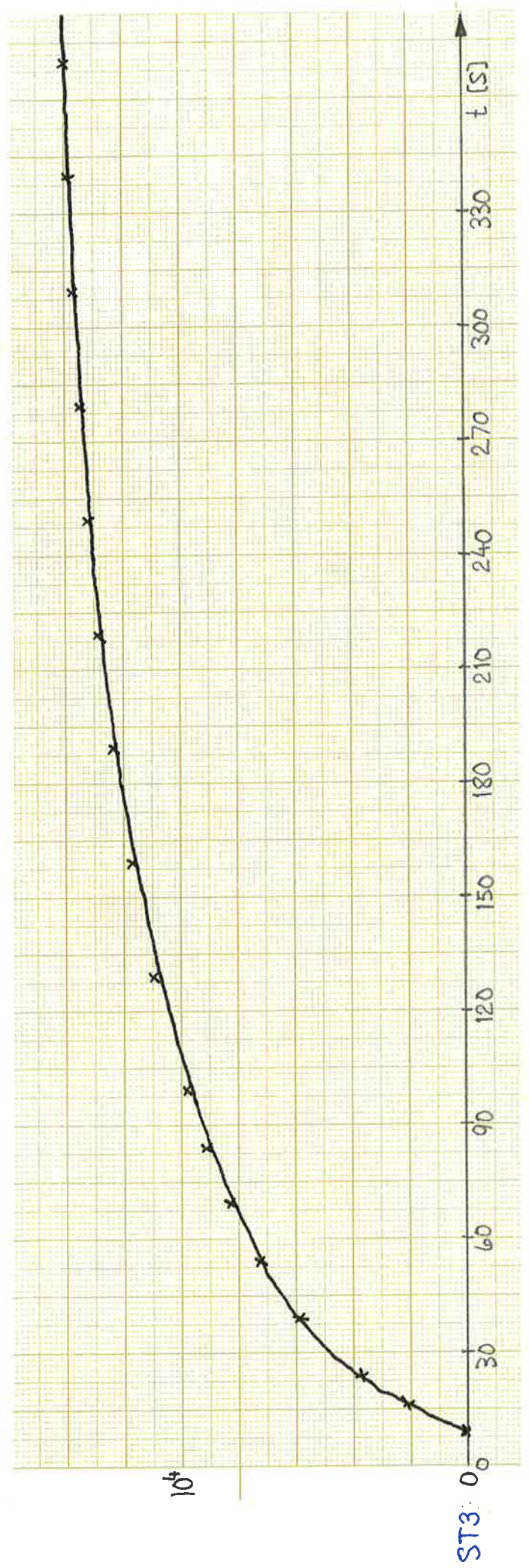
$$y(t) = C'Kc_i \left[ 1 - 0,723 e^{-\frac{0,191q_1}{V_T} t} - 0,277 e^{-\frac{1,31q_1}{V_T} t} \right]$$

Överensstämmelsen mellan de uppmätta kurvorna, ST1 - ST3, och de teoretiska punkterna är mycket god.









ST3: 0<sub>0</sub>



## 6.1 En slanges impulssvar vid laminär strömning

Antaganden:

- 1) Laminär strömning i slang
- 2) Pluggflöde i mätcellen
- 3) Stationär strömning
- 4) Fullständig blandning i mätcellen
- 5) Mätcellens längd försumbart liten i förhållande till slanglängden
- 6) Vattnet och saltlösningen har samma viskositet

Beteckningar:

$p_1 - p_2$  , tryckskillnaden i slang

$r$  , radien för ett strömlinjerör

$\eta$  , vattnets viskositet

$v$  , vätskans hastighet i ett strömlinjerör med radien  $r$

$R$  , slangens innerradie

$t'$  , passagetiden i ett strömlinjerör med radien  $r$

$t_0$  , minsta passagetiden

$V$  , totala volymen mättad saltlösning som passerat ett tvärsnitt i mätcellen

$l_i$  , saltlösningens utsträckning i slang vid injiceringsstället och sedan i varje strömlinje

$y$  , instrumentutslag

$K$  , mätcells konstanten

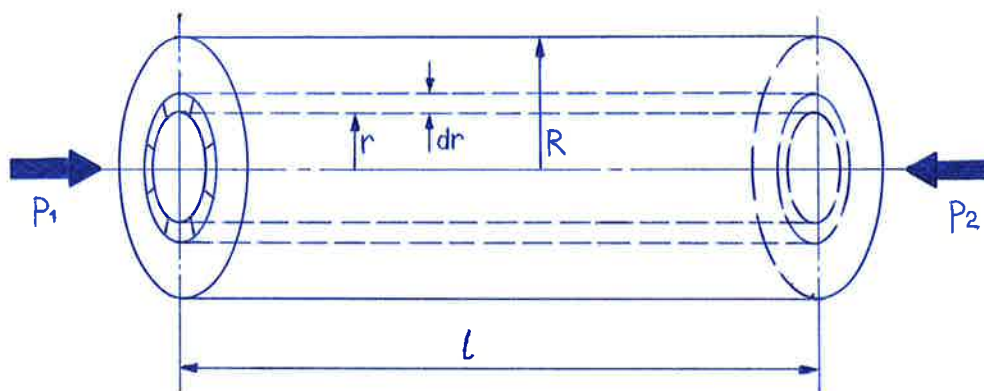
$c_j$  , den mättade saltlösningens koncentration

$C_j$  , anger hur stor del av vätskan som utgöres av mättad saltlösning

$q$  , flödet

$V_i$  , volymen på injicerad mättad saltlösning

$l$  , slangens längd



Vid stationär strömning gäller att tryckkraften =  
- friktionskraften

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 = - \eta 2 \pi r l \frac{dv}{dr}$$

$$\Rightarrow v = - \frac{(p_1 - p_2)}{4 \eta l} r^2 + C$$

Konstanten  $C$  bestäms av att hastigheten vid rörväggen är noll.

$$\therefore v = \frac{(p_1 - p_2)}{4 \eta l} (R^2 - r^2)$$

Passagetiden fås nu ur

$$t' = \frac{L}{v} = \frac{4 \eta l^2}{(p_1 - p_2)(R^2 - r^2)}$$

vilket ger

$$\left\{ \begin{array}{l} t_0 = \frac{4 \eta l^2}{(p_1 - p_2) R^2} \\ r(t') = \sqrt{R^2 - \frac{4 \eta l^2}{(p_1 - p_2) t'}} \quad ; \quad t' \geq t_0 \end{array} \right.$$

$r(t')$  betecknar radien på strömlinjeröret med passagetid  $t'$ .

$$\frac{dr}{dt'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 - \frac{4 \eta l^2}{(p_1 - p_2) t'}}} \cdot \frac{4 \eta l^2}{(p_1 - p_2) t'^2}$$

Totala volymen mättad saltlösning, som passerat ett tvärsnitt i mätcellen, kan nu beräknas som funktion av tiden.

$$V(t) = \int dV = \int_0^{r(t)} 2 \pi r l dr =$$



$$= \int_{t_0}^t \frac{2\pi l_i \sqrt{R^2 - \frac{4\eta l^2}{(p_1 - p_2)t'}} \cdot 2\eta l^2}{t'^2 (p_1 - p_2) \sqrt{R^2 - \frac{4\eta l^2}{(p_1 - p_2)t'}}} dt' =$$

$$\frac{4\pi l_i l^2 \eta}{(p_1 - p_2)} \left( \frac{1}{t_0} - \frac{1}{t} \right)$$

Instrumentutslaget fås då till

$$y(t) = K c_i C' = \frac{K c_i}{q} \cdot \frac{dV(t)}{dt} = \frac{K c_i 4\pi l_i l^2 \eta}{q (p_1 - p_2)} \cdot \frac{1}{t^2} ; t \geq t_0$$

för att få uttrycket i storheter som lätt kan mätas så utnyttjas Poiseuilles lag:

$$q = \frac{\pi (p_1 - p_2) R^4}{8\eta l}$$

vilket ger

$$y(t) = \frac{K c_i \pi^2 R^4 l_i}{2 q^2} \cdot \frac{1}{t^2}$$

men eftersom

så fås slututtrycket till

$$y(t) = \begin{cases} \frac{K c_i V_i \pi R^2 L}{2 q^2} \cdot \frac{1}{t^2} & ; t \geq t_0 \\ 0 & ; t < t_0 \end{cases}$$

där 
$$t_0 = \frac{4\eta l^2}{(p_1 - p_2)R^2} = \frac{\pi R^2 l}{2q} = \frac{1}{2} \frac{\text{slangens volym}}{\text{flödet}}$$

Maxutslaget fås till

$$Y_{\text{MAX.}} = Y(t_0) = \frac{2Kc_i V_i}{\pi R^2 l} = 2Kc_i \frac{\text{injicerad volym}}{\text{slangens volym}}$$

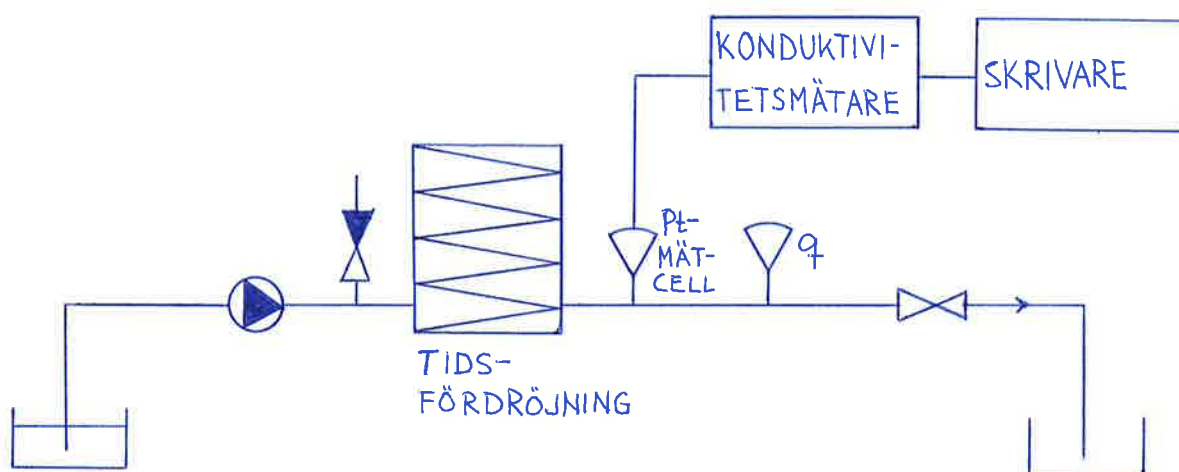
Om utslaget antages vara proportionellt mot medelkoncentrationen i varje tidsögonblick över en tvärsnittsytta (-cylinder) erhålles ett  $1/t$ -beroende, medan medelkoncentrationen längs en diameter ger ett  $1/t^2$ -beroende.



## 6.2 IMPULSSVAR FÖR TIDSFÖRDRÖJNINGEN

Fyra kurvor togs upp för att få en uppfattning om tidsfördröjningens egenskaper. Två olika försöksuppställningar användes.

Försöksuppställning 1:



Data för T1 - T2:

Kurva	q (l/min.)	V <sub>i</sub> (ml)	l (m)	R (mm)
T1	1.2	0.3	8.5	4
T2	0.5	0.3	8.5	4

l betecknar tidsfördröjningens slanglängd och R betecknar slangens innerradie.

Vid pluggflöde blir tidsfördröjningens överföringsfunktion  $e^{-sT}$ , där T betecknar tidsfördröjningen. Impulssvaret blir en Dirac-puls efter tiden

$$T = \frac{\text{slangens volym}}{\text{flödet}} = \frac{\pi R^2 l}{q}, \text{ vilket medför}$$

$$\begin{cases} T_{T1} = 21.4 \text{ sek.} \\ T_{T2} = 51.3 \text{ sek.} \end{cases}$$

Detta gäller om slanglängden, injektionsventil—tidsfördröjning plus tidsfördröjning—mätcell, är försumbar mot 1. I annat fall lägges slanglängden till 1. Vid laminär strömning i tidsfördröjningen blir impulssvaret annorlunda. I föregående avsnitt finns härlett ett uttryck för detta.

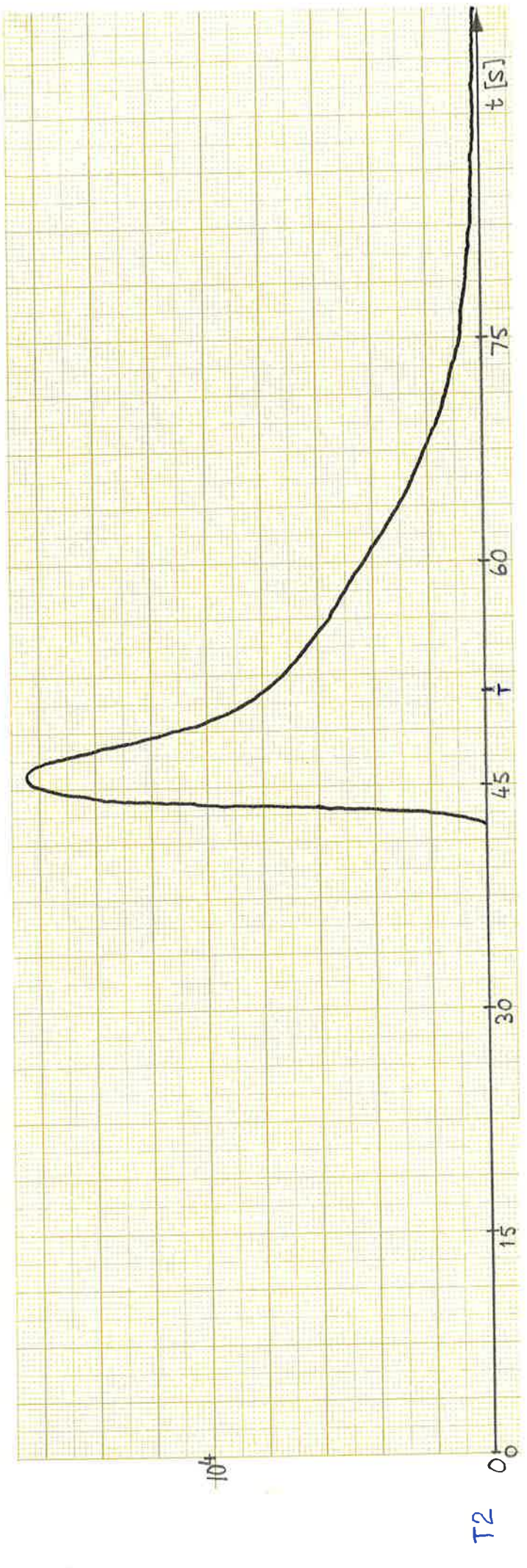
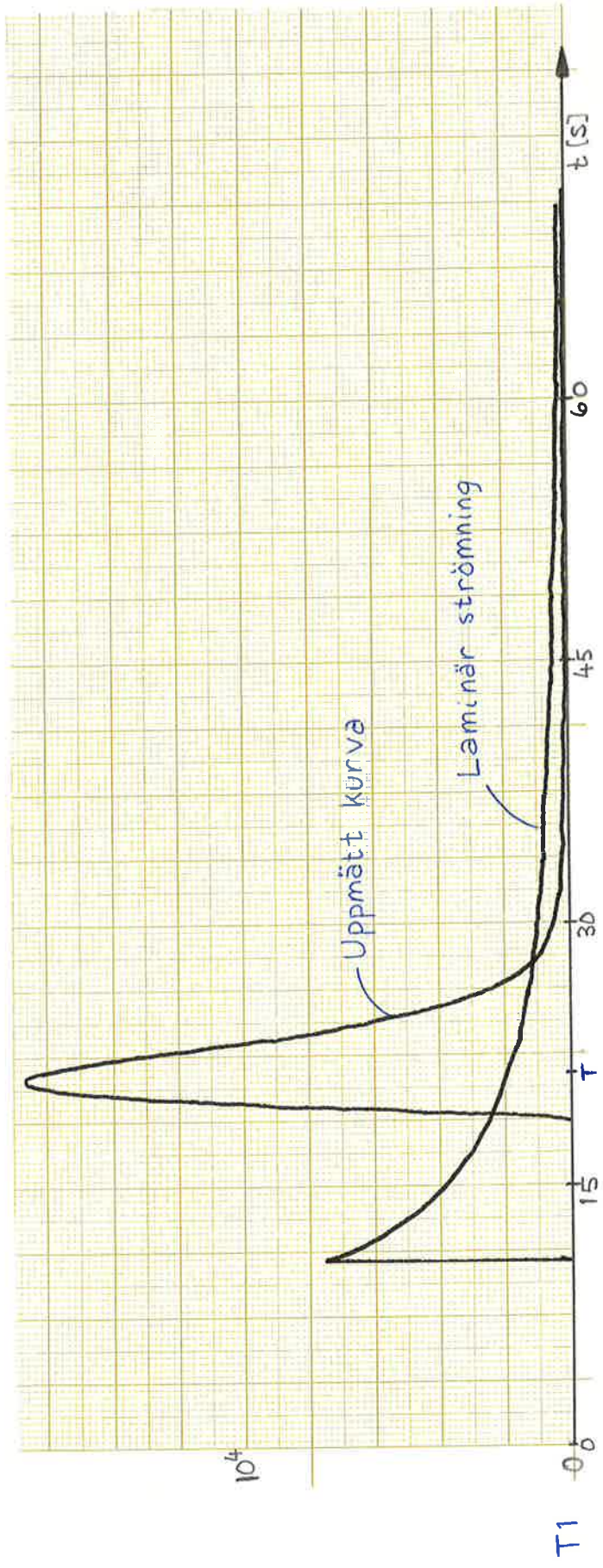
$$\text{Utslaget} = \begin{cases} \frac{Kc_i V_i \pi R^2 l}{2q^2} \frac{1}{t^2} & ; t \geq t_0 \\ 0 & ; t < t_0 \end{cases}$$

$$\text{där } t_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{slangens volym}}{\text{flödet}}$$

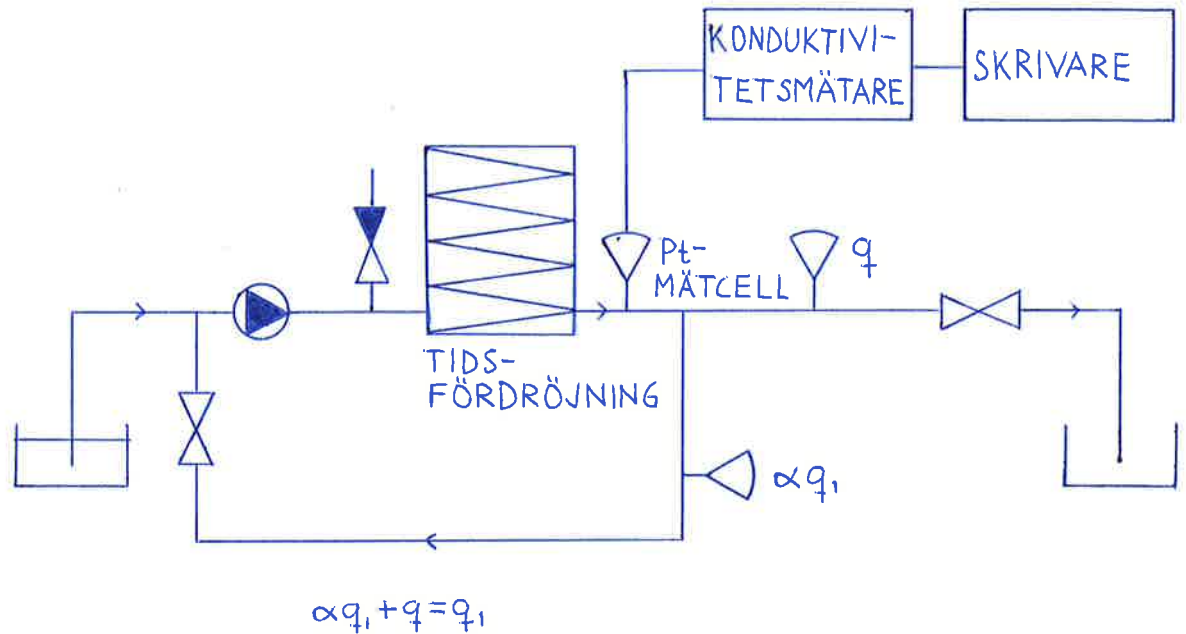
Kortaste passagetiden vid laminär strömning är således bara hälften av dito vid pluggflöde.

Denna kurva har lagts in i T1. Man kan här notera att den uppmätta kurvan har sitt maxvärde efter tiden T. Kurvformen tyder på ett mellanting av laminär strömning och pluggflöde. I T2 har den uppmätta kurvan sitt maxvärde efter 0.9 T. Man kan tolka detta som att strömningen blir mer laminär ju mindre flödet är. Vid stora flöde närmar sig strömningen pluggflöde.





## Försökupställning 2:



Data för T3 - T4

Kurva	$q$ (l/min)	$q_1$ (l/min)	$V_i$ (ml)	$l_{q_1}$ (m)	$l_{\alpha q_1}$ (m)	R (mm)
T3	0.00	1.20	0.3	9.5	1.5	4
T4	0.65	1.30	0.3	9.5	1.5	4

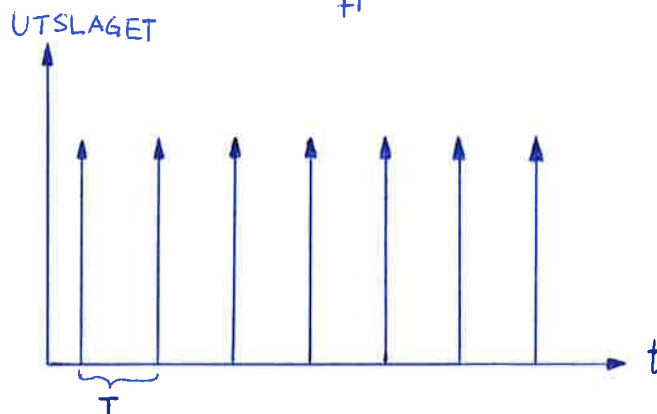
$l_{q_1}$  betecknar totala slanglängden, inklusive tidsfördröjningen, för grenen med flödet  $q_1$ .

$l_{\alpha q_1}$  betecknar slanglängden, inklusive flödesmätaren, för grenen med flödet  $\alpha q_1$ .

T3

Vid pluggflöde blir utslaget periodiskt återkommande Dirac-pulser. Periodtiden blir

$$T = \frac{\pi R^2 (l_{q_1} + l_{\alpha q_1})}{q_1} = 27,6 \text{ s}$$



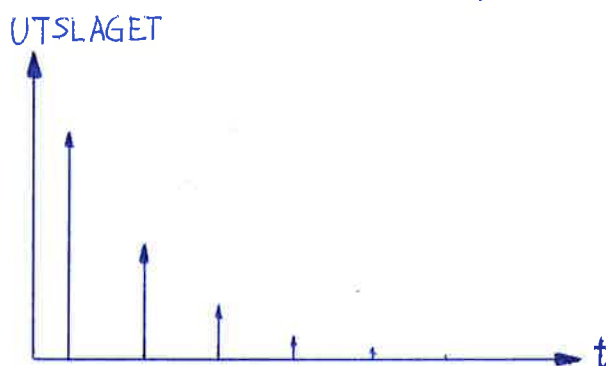


Periodtiden för T3 är ungefär T, men eftersom strömningen är ett mellanting av pluggflöde och laminär strömning så fås en kurva där topparna minskar för varje period, samtidigt som de breddas. För stora t har all svängning upphört och utslaget ligger på konstant nivå. Denna nivå är  $V_i c_i K / V_{tot}$  där  $V_{tot}$  betecknar det slutna systemets volym.

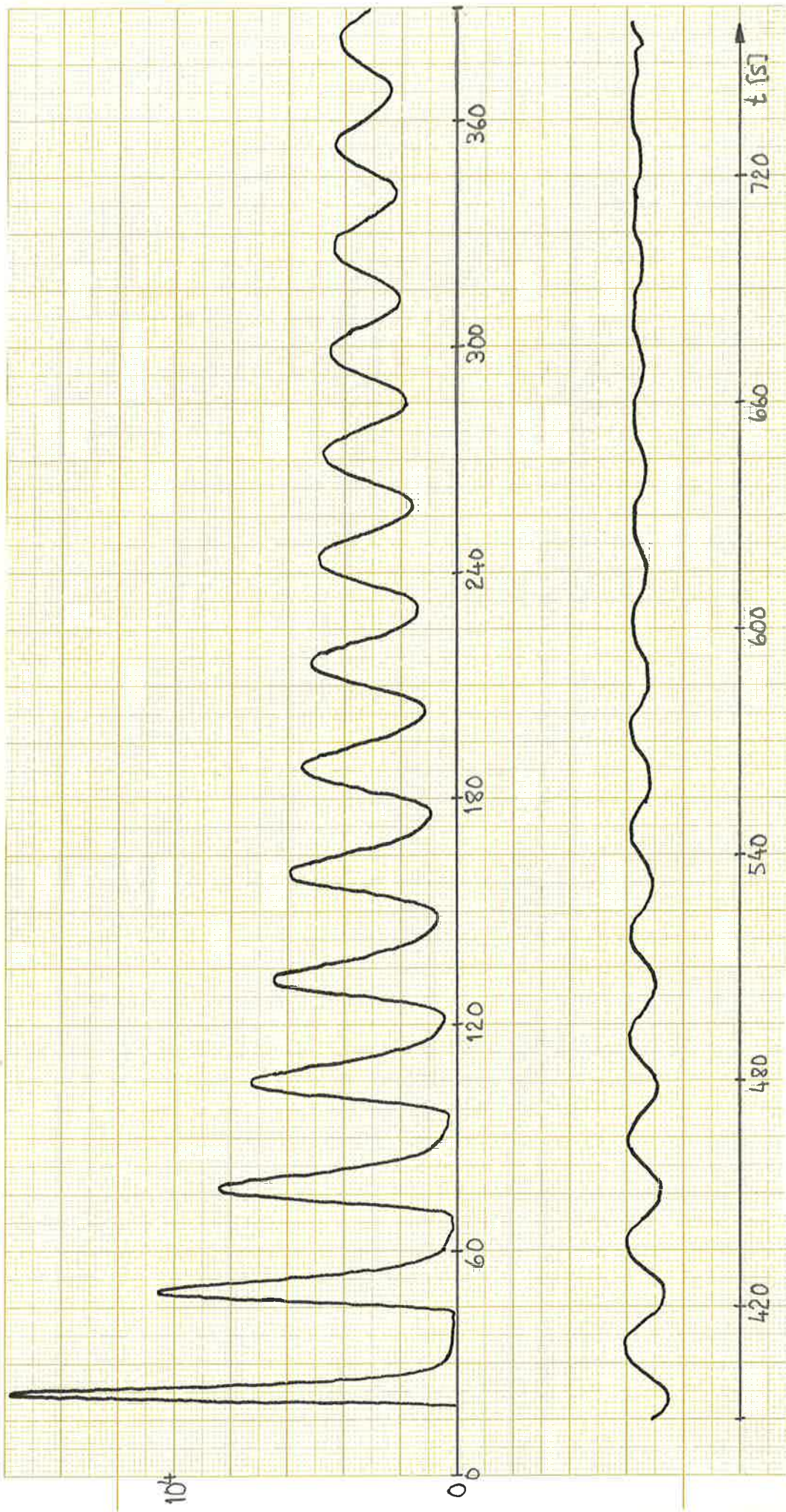
#### T4

Vid pluggflöde blir utslaget dämpade Dirac-pulser med avståndet T. Pulsernas höjd halveras för varje period.

$$T = \frac{\pi R^2 L q_1}{q_1} + \frac{\pi R^2 L \alpha q_1}{\alpha q_1} = 29s$$

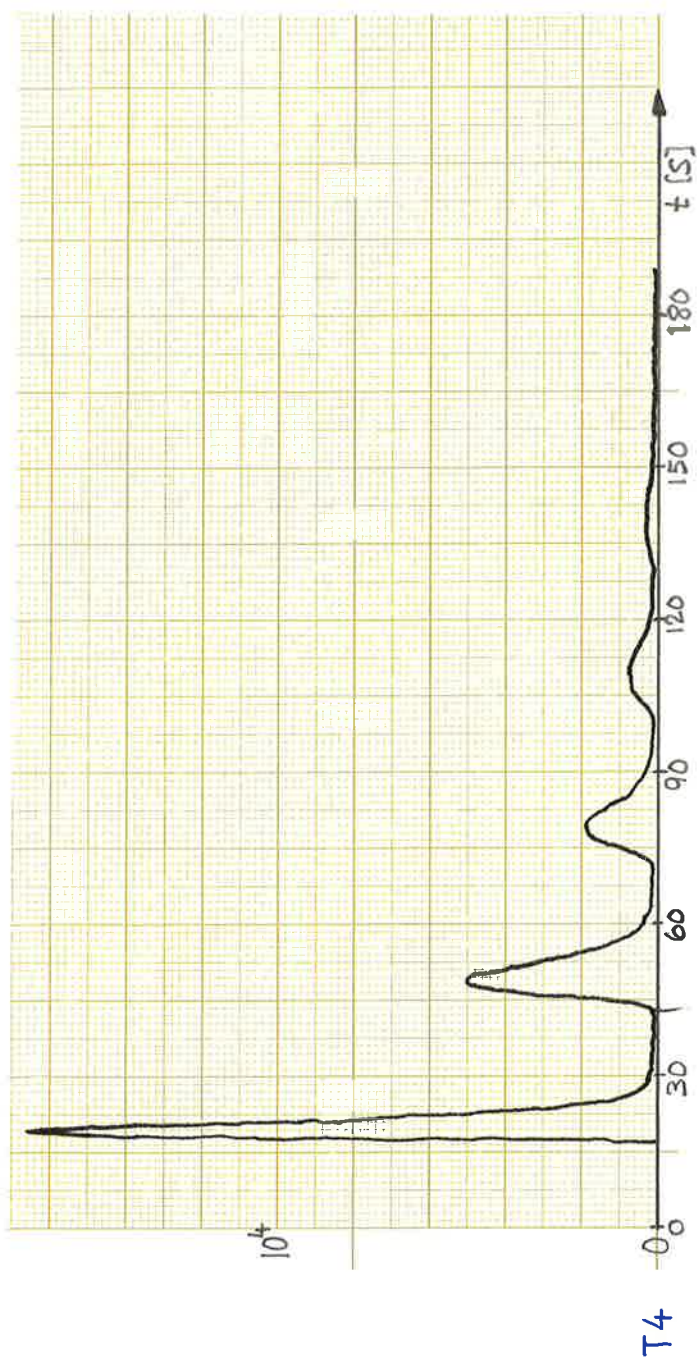


För T4 stämmer periodtiden. Dämpningen är något större än i T3, eftersom strömningen är ett mellanting av pluggflöde och laminär strömning.



T3





## 7. AVSLUTNING

Det inledande problemet var konstruktion av tank. Kravet att tidskonstanten inte fick överstiga 40 sek., samtidigt som magnetomröraren har för lågt varvtal, gjorde att blandningen i tanken blev för dålig. Därför blev det nödvändigt att göra en anordning, så att det inkommande flödet riktades mot magneten. Tanken, i denna utformning, har visat sig uppfylla ett första ordningens system, inom de begränsningar på flödeshastigheten som tidigare redovisats.

Det allt överskuggande problemet, vid konstruktion och tillverkning av denna laboratorieprocess, har varit mätcellen. Detta kan tyckas märkligt, men det förhållandevis snabbt bildade oxidskiktet på kopparelektroderna, trots de låga saltkoncentrationerna, förutsattes inte.

Det gick ganska snabbt att komma fram till att det bildades oxid på kopparelektroderna. Det verkliga problemet kom då vi övergått till guldelektroder och därmed trot oss eliminerat oxidproblemet. Men även på 18 karats guldelektroderna bildades ett oxidskikt, ehuru väldigt långsamt och därmed svårupptäckt. Platinan löste våra problem.

Praktiskt kan flödessystemet användas vid demonstration av olika system och har fördelen av att vara mera lättöverskådligt och "handgripligt" jämfört med motsvarande system uppbyggt med hjälp av elektriska komponenter.

Flödessystemet kan vidareutvecklas och det som ligger närmast till hands är att styra koncentrationen av saltlösning i systemet, med t.ex. dator som reglerar injiceringen av saltlösning.



REFERENSLISTA

Hallén, E. Elektricitetslära, Almqvist & Wiksells,  
Stockholm 1968.

Leden, B. Dynamiska system, lab.hanledn., Institutionen  
för Reglerteknik, LTH juli 1976.

Åström, K.J. Flow systems, Report 7531 (C) dec. 1975.

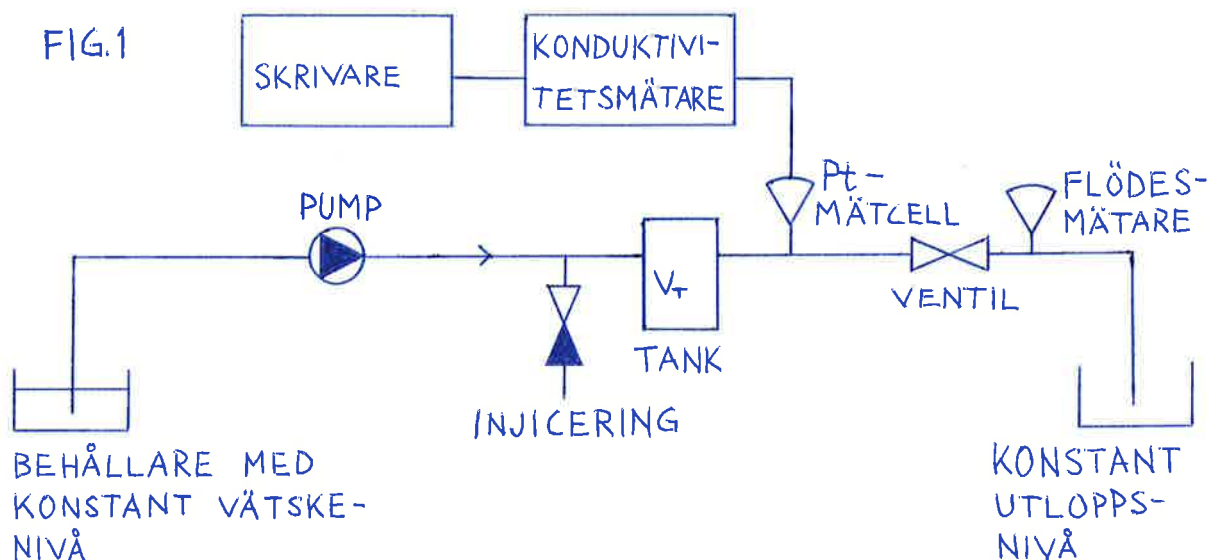
Otterlund, I. Fysik 1, Kompendium, LTH 1972.

MANUAL

Uppstartning av system med en tank:

- 1) Fyll vasken med vatten upp till övre utloppet. Låt vattenkranen vara på, så att vattennivån är konstant.
- 2) Koppla upp systemet enligt fig.1. Placera tanken på magnetomröraren. OBS! se till att kranen vid flödesmätaren är öppen.
- 3) Koppla samman ingångsslangen till pumpen med slangen från vattenkranen. Låt vatten strömma in i systemet.
- 4) Starta pumpen. När tanken är fylld, luta denna och "knacka" på tanken så att all luft lämnar tanken. Lyssna så att pumpen går jämnt. Det kan finnas luft i pumphuset, om det gör detta, öka flödet från kranen. Ett allt för stort flöde från kranen kan innebära att pumpen stannar, bryt då strömmen till pumpen och minska flödet från kranen. Starta därefter pumpen igen. Koppla loss vattenkransslangen.
- 5) Centrera magneten i tanken och slå på strömmen till magnetomröraren.
- 6) Ställ in önskat flöde med hjälp av kranen vid flödesmätaren. Inställning enligt kalibreringsdiagram.
- 7) Koppla mätcellen till konduktivitetsmätaren. Ställ in skrivaren, SPAN = 5V och CHARTDRIVE = 40 mm/min. Ställ in noll-nivån på skrivaren med justeringsskruv.
- 8) Fyll injiceringsprutan med önskad volym mättad saltlösning. Starta skrivaren samtidigt som saltlösningen injiceras. Injicera snabbt.

Lämpliga parametervärden:  $V_T = 0.63$  lit,  $q = 1.5$  lit/min,  $V_i = 2$  ml





Seriekopplat system:

Samma förfarande som ovan, men med två eller tre tankar sammankopplade.

Lämpliga parametervärden.

$V_{T1}$	$V_{T2}$	$V_{T3}$	$q$	$V_i$
(l)	(l)	(l)	(l/min)	(ml)
0.63	0.27	-	1.50	5
0.63	0.63	0.63	1.50	8

Parallellkopplat system:

Koppla upp systemet enligt fig.2. Skillnaden i slanglängd mellan grenarna anges nedan. I övrigt samma förfarande som för en tank.

Lämpliga parametervärden:  $V_{T1}=V_{T2}=V_{T3}=0.63$  lit,  $l_2-l_1=7.4$  dm,  $q_1=q_2=1.5$  l/min,  $V_i=8$  ml.

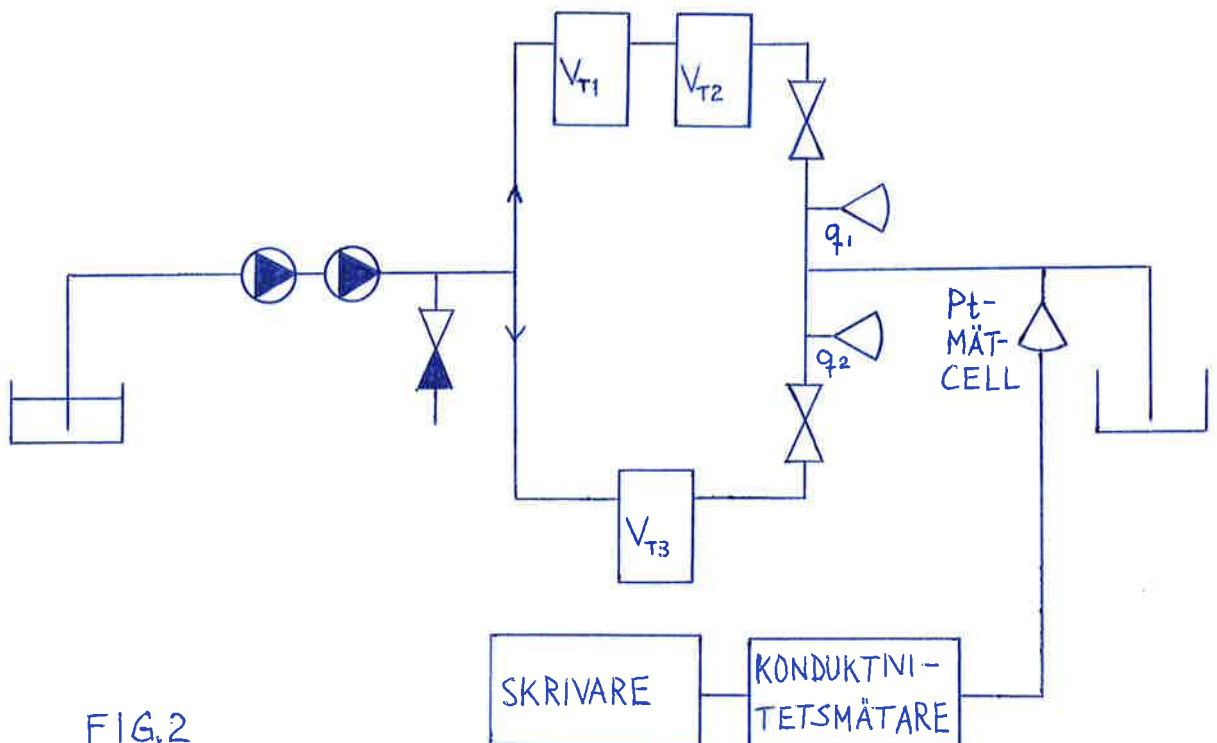


FIG.2

Recirkulerat system:

Koppla upp systemet enligt fig.3. Fig.4 är ett exempel på ett recirkulerat system med tidsfördröjning.

Upstart av systemet:

1) Stäng kranen i recirkulationsslingan och koppla loss slangen i recirkulationsslingan från kranen.

- 2) Stäng kranen vid utloppsslangen.
- 3) Koppla samman ingångsslangen till pumpen med slangen från vattenkranen.
- 4) Fyll systemet tills vatten kommer från den avkopplade slangen.
- 5) Öppna kranen vid utloppsslangen.
- 6) Sätt fast den avkopplade slangen.
- 7) Öppna kranen i recirkulationsslingan.
- 8) Starta pumpen.
- 9) Öka flödet från vattenkranen tills pumpen går tyst. Flödesmätaren i recirkulationsslingan skall ej ge utslag.
- 10) "Knacka" ur luften i primärgrenens tankar.
- 11) Minska flödet från vattenkranen tills flödesmätaren i recirkulationsslingan ger utslag.
- 12) "Knacka" ur luften i recirkulationsslingans tank.
- 13) Upprepa 9) - 12) tills all luft i systemet har försvunnit.
- 14) Koppla loss ingångsslangen till pumpen från slangen från vattenkranen.
- 15) I övrigt samma förfarande som för en tank.

Lämpliga parametervärden för fig.3:

$V_{T1}=V_{T2}=V_{T3}=0.63$  lit,  $V_i=4$  ml,  $q_1=1.5$  lit/min,  $q_2=0$  alt.  
 $q_1=0.9$  lit/min,  $q_2=0.9$  lit/min.

Lämpliga parametervärden för fig.4:

$V_T=0.63$  lit,  $V_i=2$  ml,  $q_1=0$ ,  $q_2=1.3$  lit/min, alt.  $q_1=1.0$  lit/min  
 $q_2=1.0$  lit/min.

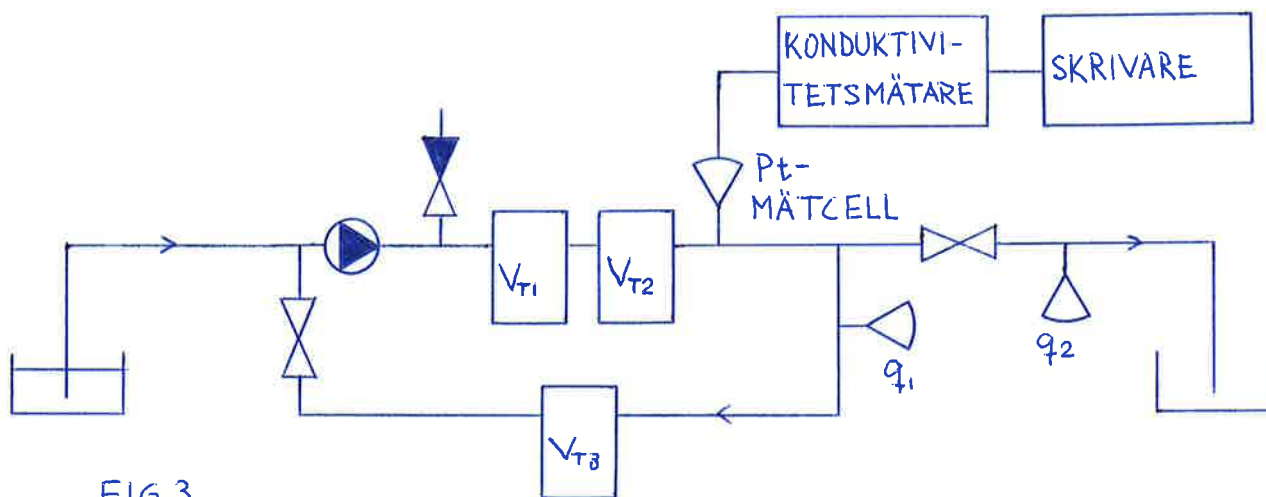


FIG.3



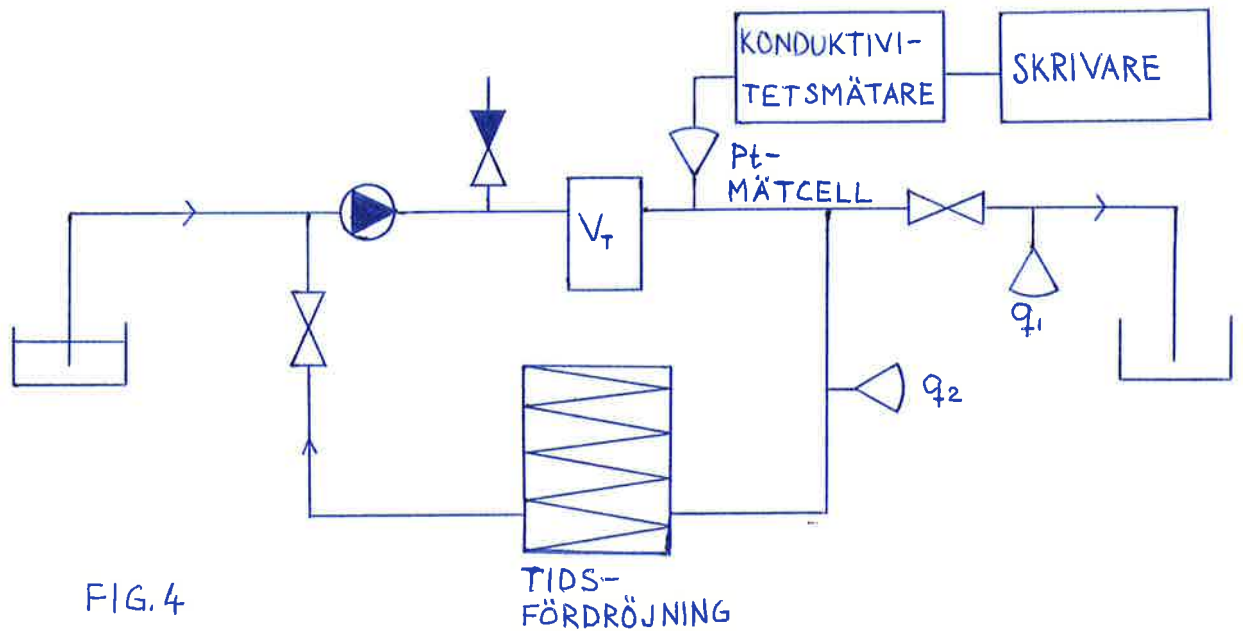


FIG. 4

#### MATERIALFÖRTECKNING

- 1 st tank, 1.05 l
- 3 st tankar, 0.63 l
- 1 st tank, 0.27 l
- 5 st Pt-mätceller
- 2 st flödesmätare
- 6 st magnetomrörare
- 1 st konduktivitetmätare
- 1 st skrivare
- 2 st pumpar
- 1 st tidsfördröjning
- 2 st kranar
- 1 st stativ
- 2 st 20ml sprutor
- 1 st 10ml spruta
- 1 st 2ml spruta
- Plastslangar
- Slangkopplingar