

JÄMFÖRELSE R MELLAN NÅGRA REKURSIVA
IDENTIFIERINGSMETODER

HÅKAN JOHANNESSON
JOHN OLAV WESSTRÖM

RE-140 augusti 1974
Inst.för Reglerteknik
Lunds Tekniska Högskola

JÄMFÖRELSER MELLAN

NÅGRA REKURSIVA IDENTIFIERINGSMETODER

Examensarbete utfört våren 1974
vid Institutionen för Reglerteknik
LTH

Håkan Johannesson
John Ölav Wesström

Handledare: Ivar Gustavsson
Torsten Söderström

FÖRORD

Fyra olika rekursiva identifieringsmetoder, en baserad på minsta kvadrat-metoden, en baserad på instrumental variable metoden samt två baserade på maximum likelihood-metoden presenteras. De presenterade algoritmerna används för att identifiera olika simulerade system. Resultaten av dessa identifieringar används för att jämföra de fyra olika algoritmerna.

ABSTRACT

Four different recursive identification algorithms, one based upon the least squares method, one based upon the instrumental variable method and two based upon the maximum likelihood method, are presented. These algorithms are used to identify different simulated systems. The results of these identifications are used to compare the four different algorithms.

<u>INNEHÅLLSFÖRTECKNING</u>	Sida
I. INTRODUCTION	1
II. ALGORITMER	2
III. SIMULERINGAR. ALLMÄNNA ASPEKTER	5
IV. KÖRNINGAR OCH RESULTAT FRÅN IDENTIFIERINGARNA	
4.1. LS	7
4.2. IV	12
4.3. AML	16
4.4. MLE	21
V. JÄMFÖRELSE AV METODERNA	26
VI. KONVERGENS HOS METODERNA	30
VII.. ETT EXEMPEL PÅ ICKE-KONVERGENS FÖR AML-METODEN	41
VIII. SLUTSUMMERING	45
REFERENSER	46
APPENDIX A	48
APPENDIX B	55
APPENDIX C	62
APPENDIX D	69
APPENDIX E	76

I. INTRODUKTION

Systemidentifiering kan dels utföras genom att nödvändiga data insamlas varpå beräkningarna utföres off-line, dels genom att data alltefter som de blir tillgängliga, används i identifieringsberäkningarna on-line. Under förutsättning att algoritmerna kan göras rekursiva, har on-line beräkningarna följande fördelar:

1. Behovet av minnesutrymme i en dator blir relativt litet och oberoende av antalet observationer.
2. Enklare datorberäkningar.
3. På ett tidigt stadium erhålles en uppskattning av systemparametrarna.
4. Möjlighet finns att uppskatta svagt tidsberoende parametrar.

Vi har försökt jämföra fyra olika rekursiva identifierings metoder, en baserad på minsta kvadratmetoden (LS), en baserad på en instrumentel variable metod (IV), samt två baserade på olika uppskattningar av maximum likelihood metoden (AML resp. MEE). På de följande sidorna kommer först en presentation av de olika algoritmerna, därefter resultat och utvärdering av gjorda simuleringar. Ett exempel på att AML-metoden inte nödvändigtvis alltid konvergerar presenteras, slutligen följt av en summering.

2. ALGORITMER

Nedan följer först en genomgång av en algoritm för rekursiv minsta kvadratmetod. Med utgångspunkt från denna ges därefter algoritmerna för de övriga metoderna.

Låt oss utgå från modellen:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_1 u(t-1) + \dots + b_n u(t-n) + e(t) \quad (1)$$

som kortare kan skrivas

$$Ay = Bu + e \quad \text{med}$$

$$A = I + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}$$

$$B = b_1 q^{-1} + \dots + b_n q^{-n}$$

där q är skiftoperatoren $qy(t) = y(t+1)$

Problemet är att uppskatta parametrarna $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$

Inför beteckningen Wieslander (1969)

$$\hat{\theta}(t) = (\hat{a}_1(t) \dots \hat{a}_n(t) \hat{b}_1(t) \dots \hat{b}_n(t)) \quad (2)$$

$$\varphi(t+1) = (-y(t) \dots -y(t-1) \dots -y(t-n+1) u(t) u(t-1) \dots u(t-n+1)) \quad (3)$$

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \varphi(t+1) \hat{\theta}(t) \quad (4)$$

Efter en del räkningar kan man ange följande rekursiva schema för den nya skattningen $(N+1)$:

$$\hat{\theta}(N+1) = \hat{\theta}(N) + K(N) \varepsilon(N+1) \quad (5)$$

$$K(N) = P(N) \varphi^T(N+1) (I + \varphi(N+1) P(N) \varphi^T(N+1))^{-1} \quad (6)$$

$$P(N+1) = P(N) - K(N) \varphi(N+1) P(N) \quad (7)$$

Alla termer med argumentet N hänför sig till den gamla skattningen och alla termer med argumentet $(N+1)$ beräknas så snart det nya mätvärdet erhållits. Termerna kan ges följande enkla tolkning. Den nya skattningen $(N+1)$ bildas genom att en korrektion adderas till den föregående skattningen. Korrektionen är proportionell mot skillnaden mellan det verkliga mätvärdet och den prediktion av utsignalen man kan göra med hjälp av föregående skattning av parametrarna. $K(N)$ talar om hur korrektionen skall viktas medan $P(N)$ kommer att vara ett mått på spridningen av parametrarna.

För system med tidsvariabla parametrar är det rimligt att anta, att större hänsyn bör tagas till de senast erhållna mätvärdena. Detta kan erhållas genom att införa en viktsfaktor λ , vilket ändrar formlerna till

$$\hat{\theta}^{(N+1)} = \hat{\theta}^{(N)} + K^{(N)} \varepsilon^{(N+1)} \quad (8)$$

$$K^{(N)} = P^{(N)} \varphi^T(N+1) (\lambda + \varphi(N+1) P^{(N)} \varphi^T(N+1))^{-1} \quad (9)$$

$$P^{(N+1)} = (P^{(N)} - K^{(N)} \varphi(N+1) P^{(N)}) / \lambda \quad (10)$$

Ekvationerna (5), (6) och (7) motsvarar fallet då $\lambda = 1$.

Vid körningar har valts tidsberoende enligt $\lambda(t) = 1 - (1 - \lambda(0)) e^{-t \cdot DR}$

Den rekursiva varianten av denna formel lyder

$$\lambda(t+1) = \lambda(t) + DR(1 - \lambda(t))$$

Den tidsberoende faktorn λ har introducerats eftersom det vid tidigare körningar visat sig att man erhåller bättre konvergens då denna används.

Instrumental variable metoden (IV).

Vid konstruktion av en algoritm för IV Young (1970) utgår man ifrån modellen

$$Ay = Bu + v$$

där v inte nödvändigtvis är vitt brus.

Grundalgoritmerna ges här av

$$\hat{\theta}^{(N+1)} = \hat{\theta}^{(N)} + K^{(N)} \varepsilon^{(N+1)}$$

$$K^{(N)} = P^{(N)} Z^T(N+1) (\lambda + \varphi(N+1) P^{(N)} Z^T(N+1))^{-1}$$

$$P^{(N+1)} = (P^{(N)} - K^{(N)} \varphi(N+1) P^{(N)}) / \lambda$$

där det för de ingående termerna gäller:

$$\hat{\theta}^{(t)} \quad \text{enligt} \quad (2)$$

$$\varphi^{(t)} \quad \text{enligt} \quad (3)$$

$$\varepsilon^{(t+1)} \quad \text{enligt} \quad (4)$$

$Z^{(t+1)}$ kan väljas, t.ex.

$$Z^{(t+1)} = (-\hat{X}^{(t)} \dots -\hat{X}^{(t-n+1)} u^{(t)} \dots u^{(t-n+1)})$$

där $\hat{X}^{(t)}$ fås ur

$$\hat{X}^{(t)} = \hat{B} u^{(t)}$$

Maximum likelihood metoden (AML och MLE).

De två olika metoder som används här beskrivs utförligt i Söderström (1973). AML står för Approximative Maximum Likeli-
hood och är den version som används av bl.a. Young (1970) och Panuška (1968) medan MLE, Maximum Likelihood Estimation, mot-
svarar den algoritm som ges i Söderström (1973). I båda fallen
utgår man från modellen

$$Ay = Bu + Ge \quad (11)$$

medan grundalgoritmerna liksom ovan ges av (8), (9) resp. (10),
där termerna ges nedan:

AML

$$\hat{\theta} = (\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n \hat{b}_1 \dots \hat{b}_n \hat{c}_1 \dots \hat{c}_n) \quad (12)$$

$$\varphi(t+1) = (-y(t) \dots -y(t-n+1) u(t) \dots u(t-n+1) \varepsilon(t) \dots \varepsilon(t-n+1)) \quad (13)$$

$$\varepsilon(t+1) \quad \text{enligt} \quad (4)$$

MLE

$$\hat{\theta} \quad \text{enligt} \quad (12)$$

$$\varphi(t+1) = (-1/\hat{G} y(t) \dots -1/\hat{G} y(t-n+1) \quad 1/\hat{G} u(t) \dots 1/\hat{G} u(t-n+1) \\ \quad 1/\hat{G} \varepsilon(t) \dots 1/\hat{G} \varepsilon(t-n+1))$$

$$\varepsilon(t+1) \quad \text{erhålls ur} \quad \hat{G}\varepsilon = \hat{A}y - \hat{B}u$$

3. Simuleringar. Allmänna aspekter.

Ide ntifieringar har utförts med hjälp av de olika metoderna för följande system, utgående från modellen

$$Ay = Bu + Ge$$

1:a ordningens system:

$$A = 1 - 0.8q^{-1}$$

$$B = 1.0q^{-1}$$

$$C = 1 + 0.7q^{-1}$$

2:a ordningens system:

$$A = 1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}$$

$$B = 1.0q^{-1} + 0.5q^{-2}$$

$$C = 1 - 1.0q^{-1} + 0.2q^{-2}$$

3:e ordningens system:

$$A = 1 - 1.60q^{-1} + 1.61q^{-2} - 0.776q^{-3}$$

$$B = 1.20q^{-1} - 0.95q^{-2} + 0.20q^{-3}$$

$$C = 1 + 0.10q^{-1} + 0.25q^{-2} + 0.873q^{-3}$$

där q som vanligt är skiftoperatorn $qy(t) = y(t+1)$.

1:a och 2:a ordningens system kördes för alla metoderna, medan det 3:e ordningens system endast kördes för AML och MLE.

Vid varje simulering har 10 realiseringar om vardera 2000 samplingpunkter körts, varefter parameteruppskattningarna har medelvärdesbildats. Vid varje realisering har insignalen varit av PRBS-typ (PRBS=Pseudo Random Binary Sequences), men med endera av följande två utseenden:

A. Insignalen har vid varje tidpunkt satts lika med den genererade PRBS-signalen enligt

$$u(t) = \text{PRBS}(t) \quad t \in (1, 2000)$$

där med $\text{PRBS}(t)$ menas den signal som vid tiden t erhålles ur generatorn. Denna typ av insignal kallas i fortsättningen vanlig PRBS.

B. Insignalen har följande utseende:

$$u(10t-9) = u(10t-8) = \dots = u(10t) = \text{PRBS}(t) \quad t \in (1, 200)$$

Denna typ av insignal kallas här PRBS, utdragen 10 ggr.

Bruset $e(t)$ med önskat medelvärde 0 och amplitud 1, har genererats av en slumpgenerator.

Vidare har signal/brus-förhållandet (S/N) satts till 1:1 eller 10:1. S/N-förhållandet definieras då som

$$E_{y_1}^2/E_{y_2}^2 \quad \text{där } y_1 = \hat{B}/A u \text{ och } y_2 = C/A e$$

Vid alla körningarna har tre olika mått på parameteruppskattningarnas noggrannhet använts, kallade W1, W2 samt W3, som ges av programmen VML, MERRO och MVS Söderström (1973)

VML beräknar variansen av residualerna W1, där det gäller att $E_{\epsilon}^2 \gg E_e^2$. Dessa värden skall för bra metoder teoretiskt ansluta sig till VTEOR = $1+3n/N$ med n =ordningstalet och N =antalet samplingar, under förutsättning att $E_e^2=1$.

MERRO beräknar variansen av det deterministiska modellfelet W2, dvs signalen

$$\hat{B}/\hat{A} u(t) - B/A u(t)$$

MERRO bör ge små värden på W2 för att modellen skall anses vara bra.

MVS slutligen beräknar variansen på utsignalen, W3, när en minimal varians strategi baserad på modellen används. Det gäller även här att $E_{y_1}^2 \gg E_e^2$. Om variansen är nära E_e^2 kan modellen anses vara bra.

Slutligen kan nämnas att begynnelsevärdet på matrisen P, som förekommer i algoritmekvationerna, vid alla simuleringar satts till $100 \cdot I$ och att viktsfaktorn λ , som också förekommer i algoritmekvationerna vid samtliga LS- och IV-körningar satts lika med 1.0.

4. Körningar och resultat från identifieringarna.

4.1. LS

1:a ordningens system

Det tidigare omnämnda 1:a ordningens system har identifierats genom att beskriva det med ett 1:a, 2:a, 3:e, 4:e resp 5:e ordningens system. Dessutom har som framgått tidigare PRBS-signalen och S/N-förhållandet varierats, vilket sammanlagt ger 20 körningar. Sammanställda resultat över medelvärdet av identifieringarna återfinnes i tabellform i appendix A.

Som ett exempel på en realisering av ett 1:a ordningens system med vanlig PRBS och S/N = 1:1 visas i fig 1. det utplottade resultatet. Man ser här tydligt att skattningen av a-parametern avviker från det rätta värdet. Detta beror på inverkan av bruset, vilket ger bias på parametrarna och är en karakteristisk egenskap för LS-metoden.

För att illustrera inverkan av ändrad PRBS resp S/N-förhållandet samt för att ge en uppfattning om hur snabbt parametrarna skattas visas i nedanstående tabell 1. en sammanfattning av 4 simuleringar på beskrivningen med ett 1:a ordningens system.

PRBS	VANLIG						UTDRAGEN 10 GGR					
	1:1			10:1			1:1			10:1		
S/N	100	500	2000	100	500	2000	100	500	2000	100	500	2000
\hat{a}	-0.853	-0.859	-0.851	-0.807	-0.814	-0.810	-0.880	-0.872	-0.866	-0.826	-0.820	-0.817
\hat{b}	1.034	1.004	0.998	1.008	1.001	0.999	0.839	0.745	0.809	0.944	0.922	0.949
$W \cdot 10^3$	594	225	145	54	10	5	339	206	137	34	17	9

Tab. 1.

De slutsatser som kan dras härur är:

- Redan vid $T = 100$ har parameteruppskattningarna kommit nära de riktiga värdena, mellan $T = 100$ och $T = 2000$ ändras de obetydligt, vilket även framgår av fig 1.
- S/N = 10:1 ger betydligt bättre uppskattning än S/N = 1:1, vilket knappast är förvånande eftersom bruset i det förra fallet får mindre inverkan.

c) Beträffande vanlig PRBS kontra utdragen PRBS kan inga säkra slutsatser dragas. Visserligen ligger uppskattningarna närmare de korrekta för vanlig PRBS, men W2 synes bli mindre för utdragen PRBS.

För beskrivningar med hjälp av högre ordningstal blir slutsatserna fortfarande desamma. Trots att det simulerade systemet är av 1:a ordningen kan man med en modell av högre ordningstal få data att bättre ansluta sig till en sådan modell, vilket motiverar införandet av högre ordningstal.

2:a ordningens system

Liksom för 1:a ordningens system identifierades det givna 2:a ordningens system genom en beskrivning med ett 2:a, 3:e, 4:e resp 5:e ordningens system. Med variationer av PRBS och S/N-förhållandet blev antalet körningar 16 st. Sammanställning över dessa återfinns i appendix A.

Ett exempel på en realisering av ett 2:a ordningens system med vanlig PRBS och S/N = 10:1 återfinns i fig 2. Man ser att, bortsett från b_1 , parameteruppskattningarna går mot värden, som avsevärt skiljer sig från de rätta. Detta beror, liksom när det gällde 1:a ordningen, på brusets inverkan, som ger bias på parametrarna.

För att närmare visa påverkan av olika PRBS resp. olika S/N samt hur snabbt parametrarna skattas visas i tabell 2 en sammanfattning av 4 olika simuleringar på en 2:a ordningensmodell.

PRBS	VANLIG						UTDRAGEN 10 66R					
	1:1			10:1			1:1			10:1		
S/N	100	500	2000	100	500	2000	100	500	2000	100	500	2000
\hat{a}_1	-0.785	-0.798	-0.771	-1.218	-1.209	-1.197	-0.657	-0.642	-0.615	-0.856	-0.828	-0.810
\hat{a}_2	0.143	0.140	0.112	0.443	0.439	0.426	0.109	0.098	0.079	0.209	0.199	0.190
\hat{b}_1	1.221	1.045	0.999	1.103	1.024	1.003	1.390	1.228	1.276	1.294	1.255	1.286
\hat{b}_2	1.136	1.292	1.276	0.731	0.816	0.820	2.486	2.498	2.616	1.831	1.847	1.925
W2	6.034	4.821	5.017	2.031	1.915	2.061	8.262	7.224	6.646	4.330	4.476	4.585

Tab. 2.

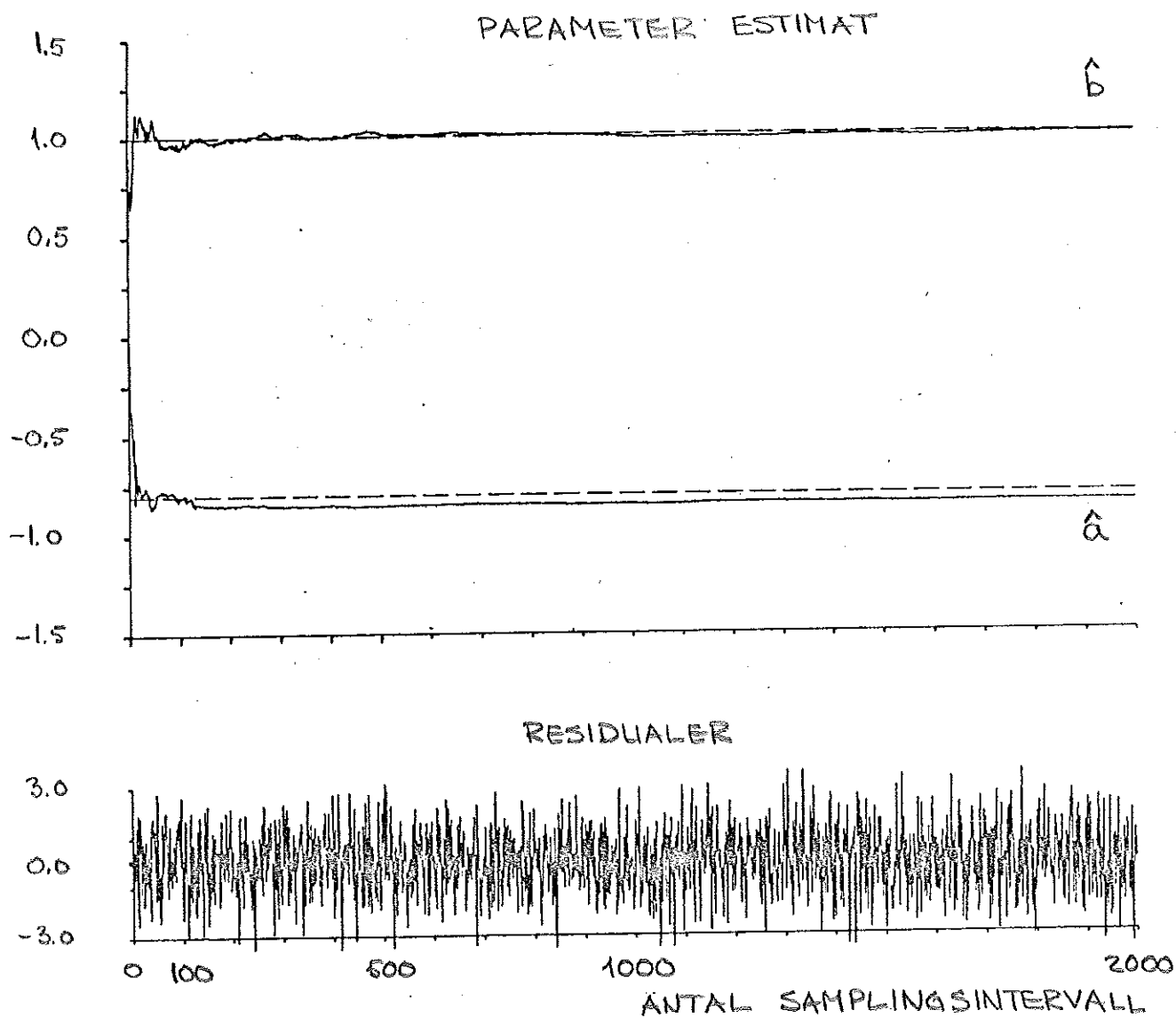
Slutsatserna denna gång blir:

- a) Vid T = 100 har även denna gång parameteruppskattningarna kommit ganska nära de riktiga värdena, dock ej så nära som fallet var vid 1:a ordningens system. Se även fig. 2.

- b) På grund av den kraftiga biasen på parametrarna är det svårt att direkt jämföra körningarna. Emellertid framgår det klart att ett större S/N-förhållande ger uppskattningar som ligger närmare de riktiga värdena. Vidare ser man att utdragen PRBS ger sämre värden än vanlig PRBS.

För identifieringarna av en 3:e, 4:e resp 5:e ordningens modell gäller samma slutsatser som ovan, vidare blir W_1, W_2 och W_3 bättre med stigande ordningstal hos modellen.

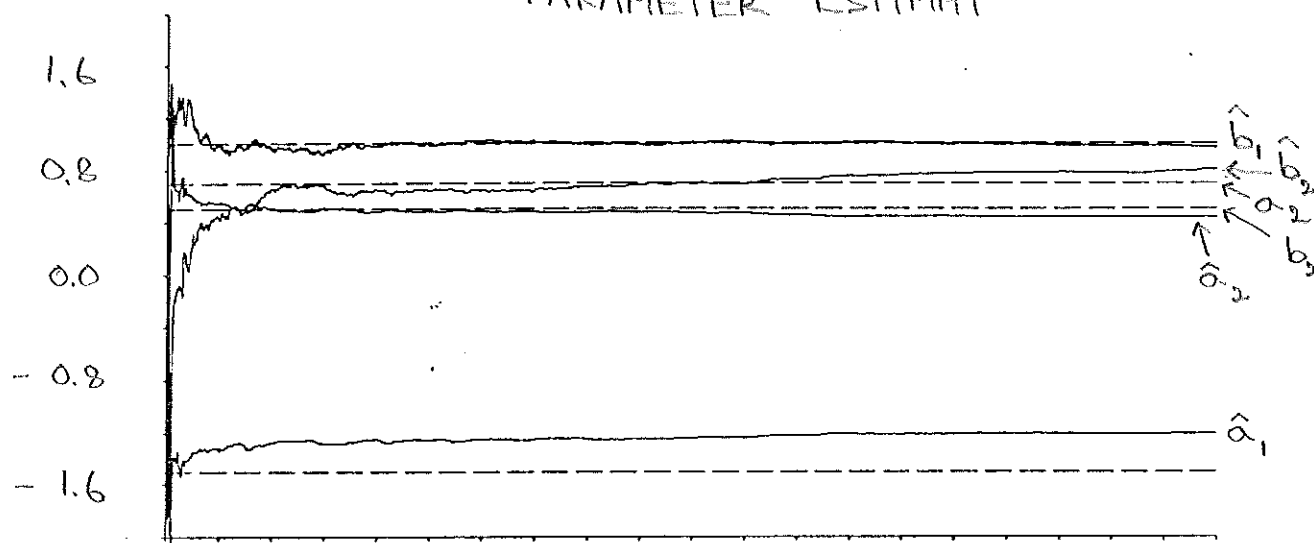
LS



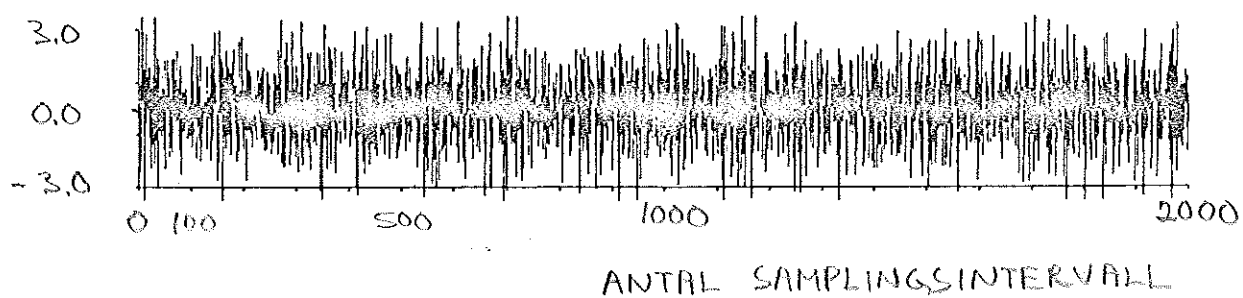
Figur 1. Parameteruppskattningar för ett 1:a ordningens system. De streckade linjerna ger de rätta parametervärdena.

LS

PARAMETER ESTIMAT



RESIDUALER



Figur 2. Parameteruppskattningar för ett 2:a ordningens system. De streckade linjerna ger de rätta parametervärdena.

4.2. IV

1:a ordningens system

I programmet som beräknar parameteruppskattningarna för IV-metoden finns möjlighet att vänta ett antal steg innan uppskattningarna används för beräkning av kommande uppskattningar. Tanken med att införa ett antal fördröjningssteg, ND , är att $z(t)$ skall göras oberoende av $Ce(t)$.

Vid identifiering av det givna systemet har ND varit 2, 4 eller 6 vilket med ändring av S/N -förhållandet ger 12 körningar. En sammanställning av körningarna återfinnes i appendix B.

I fig. 3. visas resultatet av en realisering med vanlig PRBS, $S/N = 1:1$ samt $ND = 6$. Redan vid $T = 200$ ligger nära de riktiga parametervärdena.

Tabell 3 nedan utvisar 4 olika körningar med $ND = 2$.

PRBS	VANLIG						UTDRAGEN 10 GGR					
	1:1			10:1			1:1			10:1		
TID	100	500	2000	100	500	2000	100	500	2000	100	500	2000
\hat{a}	-0.779	-0.810	-0.802	-0.796	-0.805	-0.801	-0.810	-0.800	-0.799	-0.808	-0.802	-0.800
\hat{b}	1.014	1.000	0.994	1.007	1.000	0.998	0.957	0.927	0.991	0.981	0.972	0.995
$W2 \cdot 10^4$	3575	162	57	504	32	10	1515	501	132	188	62	16

Tab. 3.

Slutsatser:

- För detta system ger IV-metoden mycket bra uppskattningar av a - och b -parametrarna.
- Vid $T = 100$ har uppskattningarna ännu inte kommit helt nära de slutliga värdena, mellan $T = 500$ och $T = 2000$ händer däremot inte mycket även om uppskattningarna hela tiden förbättras (se $W2$).
- $S/N = 10:1$ ger även för IV-metoden bättre värden än $S/N = 1:1$ (Mindre inverkan från bruset).
- Vanlig PRBS ger bättre värde än utdragen om tillräckligt många samplingar görs. (Dock tyder $W2$ på att vid $T = 100$ är utdragen PRBS den bättre).

Dessa slutsatser gäller även för identifieringar med $ND = 4$ resp 6 . Hur variation av ND påverkar parameteruppskattningarna framgår av nedanstående tabell 4.

ND	2	4	6
\hat{a}	-0.80132	-0.80134	-0.80135
\hat{b}	0.99827	0.99827	0.99827
W2	$0.99 \cdot 10^{-3}$	$0.97 \cdot 10^{-3}$	$0.96 \cdot 10^{-3}$

Tab.4. Vanlig PRBS, S/N = 10:1, T = 2000

Man kan konstatera, att för detta system ger antalet fördröjningssteg ND ingen skillnad i uppskattningarna.

2:a ordningens system

Körningarna på det givna 2:a ordningens system gick överlag mycket dåligt. Meningsfulla resultat uppnåddes endast med vanlig PRBS, S/N = 10:1 och ND = 6. En av dessa realiseringar är utplottad och återfinnes i fig.4. Man ser att parameteruppskattningarna här blir ganska bra.

Anledningen till att simuleringarna gick såpass dåligt är icke känt. Försök gjordes att förbättra uppskattningarna genom att sätta viktsfaktorn $\lambda(0) = 0.95$ men skillnaden i resultatet blev obetydlig. När däremot systemet

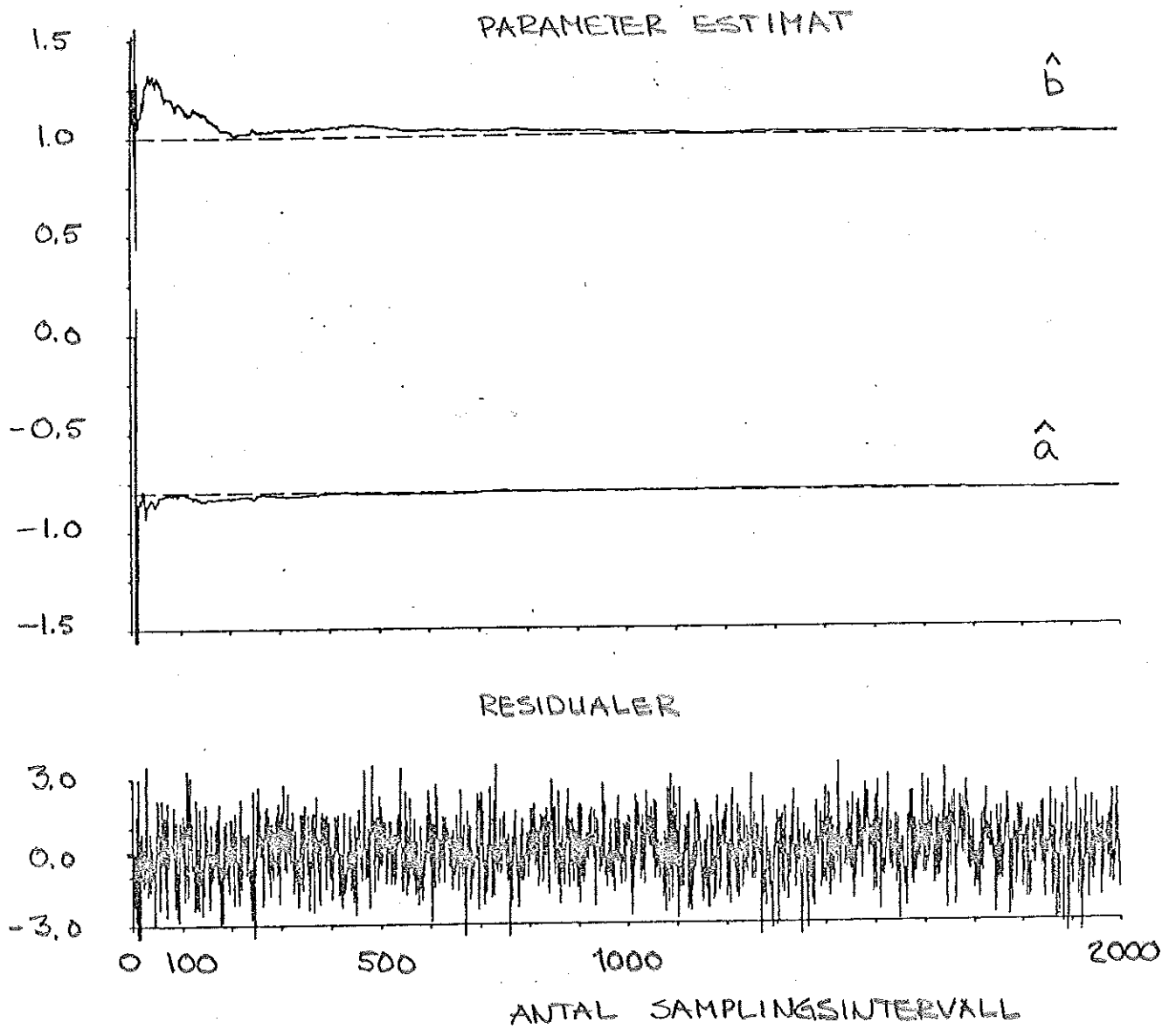
$$A = 1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}$$

$$B = 1.0q^{-1} + 0.5q^{-2}$$

$$C = 1$$

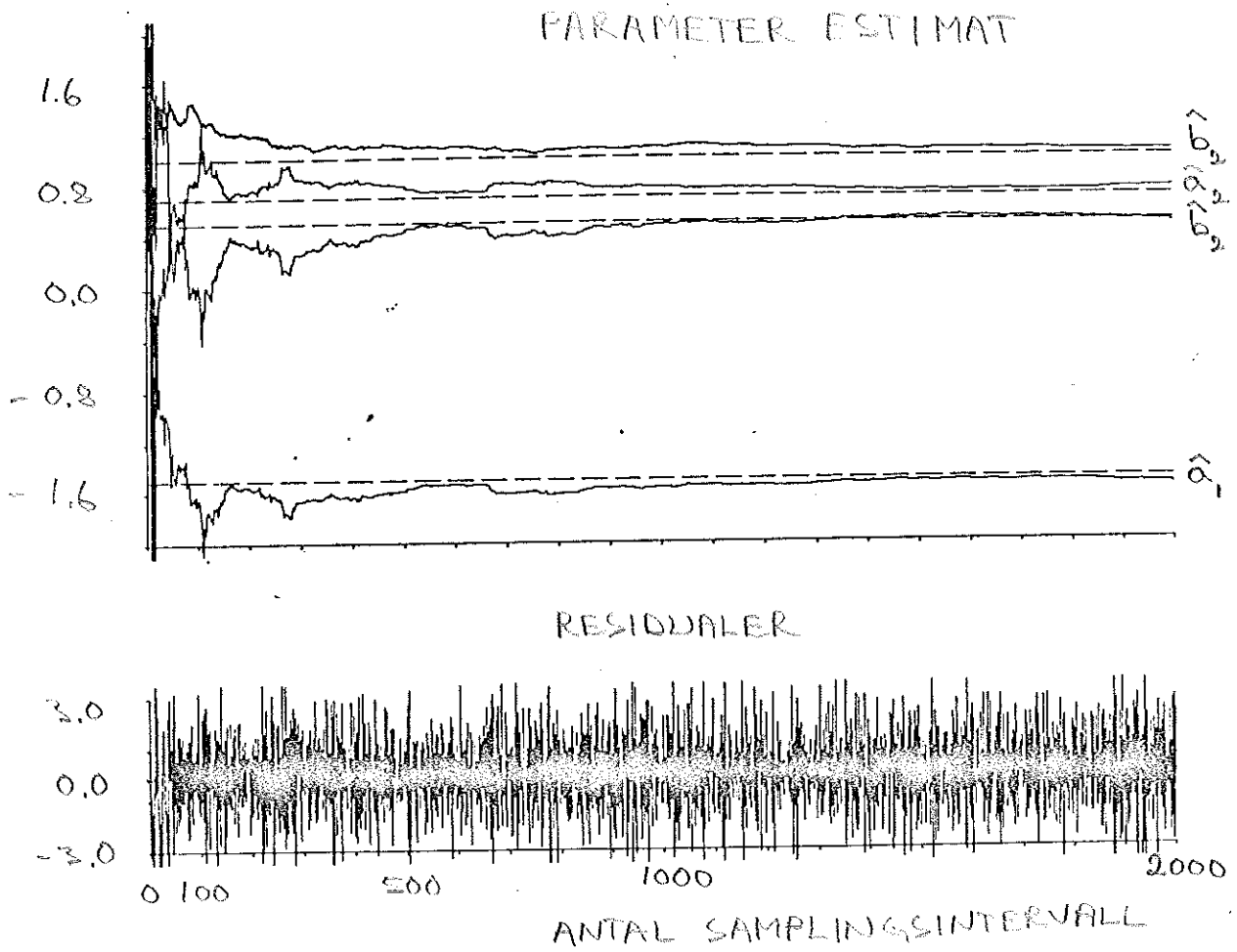
simulerades, dvs samma system som det givna, fast utan c-parametrar, erhöles mycket goda resultat. För närmare granskning, se appendix B.

IV



Figur 3. Parameteruppskattningar för ett 1:a ordningens system. De streckade linjerna ger de rätta parametervärdena.

IV



Figur 4. Parameteruppskattningar för ett 2:a ordningens system.
De streckade linjerna ger de rätta parametervärdena.

4.3. AML

Turen har nu kommit till de två algoritmer, AML och MLE, som även skattar c-parametrarna i ett system. Detta innebär bl.a. att W2, som ger det deterministiska modellfelet, inte längre kommer att användas som måttstock på parameteruppskattningarnas noggrannhet utan i stället används W1, som ger variansen på residualerna.

1:a ordningens system.

Vid körningarna på systemet har i första hand viktsfaktorn λ varierats. Sammanlagt har 7 olika tidsberoende λ använts, vilket tillsammans med variation av PRBS och S/N-förhållandet givit 28 simuleringar. En resumé över körningarna återfinns i appendix C.

λ som använts:

$$\lambda(t+1) = \lambda(t) + DR(1 - \lambda(t))$$

$\lambda(0)$	DR
0.95 0.99 0.999	0.01
0.95 0.99 0.999	0.001
1.00	0.00

Tabell 5.

För att visa hur valet av λ påverkar parameteruppskattningarna återges i tabell 6 resultaten från 7 simuleringar med vanlig PRBS och S/N = 1 : 1.

Slutsatser:

- A. Ju högre värden på $\lambda(0)$, desto långsammare skattningar av c-parametern.
- B. Bästa valet verkar vara (0.95 , 0.01). Man ser att detta ger lägst värden på W1, samt bra och snabba uppskattningar av c-parametern.

För att visa inverkan av variation av PRBS och S/N-förhållandet presenteras i tabell 7 en sammanställning av 4 olika körningar. Vid dessa körningar var $\lambda(0)=0.95$ och DR=0.01.

TID	$\lambda(0)$	DR	\hat{a}_1	\hat{b}_1	\hat{c}_1	$(w_1-1) \cdot 10^4$	w2	$(w_3-1) \cdot 10^4$	
100	0.95 0.99 0.999	0.01	-0.788	1.038	0.636	530	0.228	717	
			-0.788	1.031	0.498	1091	0.331	1043	
			-0.787	1.027	0.465	1300	0.362	1221	
	0.95 0.99 0.999	0.001	-0.786	1.036	0.693	645	0.180	1472	
			-0.787	1.032	0.517	1004	0.316	971	
			-0.787	1.027	0.466	1291	0.360	1213	
	1.00	0.00	-0.787	1.027	0.461	1326	0.365	1243	
	500	0.95 0.99 0.999	0.01	-0.808	1.001	0.688	80	0.011	108
				-0.807	1.003	0.638	1148	0.024	113
-0.806				1.005	0.602	279	0.038	230	
0.95 0.99 0.999		0.001	-0.810	0.974	0.634	723	0.047	639	
			-0.806	0.998	0.674	135	0.010	172	
			-0.806	1.004	0.609	248	0.032	201	
1.00		0.00	-0.806	1.005	0.597	299	0.040	248	
2000		0.95 0.99 0.999	0.01	-0.802	0.995	0.690	26	0.005	26
				-0.802	0.996	0.675	42	0.006	32
	-0.801			0.997	0.658	78	0.009	58	
	0.95 0.99 0.999	0.001	-0.803	1.002	0.691	175	0.017	201	
			-0.799	0.997	0.704	47	0.005	59	
			-0.800	0.996	0.671	51	0.007	38	
	1.00	0.00	-0.801	0.997	0.656	84	0.009	64	

Tabell 6. Vanlig PRBS, S/N=1:1.

PRBS	S/N	TID	\hat{a}_1	\hat{b}_1	\hat{c}_1	$(w_1-1) \cdot 10^4$
VANLIG	1:1	100	-0.788	1.038	0.636	530
		500	-0.808	1.001	0.688	80
		2000	-0.802	0.995	0.690	26
	10:1	100	-0.791	1.011	0.630	253
		500	-0.804	1.000	0.694	42
		2000	-0.802	0.998	0.691	18
UTDRAGEN	1:1	100	-0.820	0.974	0.637	878
		500	-0.801	0.928	0.700	358
		2000	-0.800	0.979	0.695	117
	10:1	100	-0.809	0.980	0.661	319
		500	-0.801	0.975	0.701	122
		2000	-0.800	0.992	0.694	35

Tabell 7. $\lambda(0)=0.95$, DR=0.01

Slutsatser: (tabell 7)

- A. Vanlig PRBS är bättre än utdragen.
- B. $S/N=10:1$ är bättre än $S/N=1:1$.
- C. C-parametern är den parameter som konvergerar långsammast.

En realisering av systemet med vanlig PRBS, $S/N=1:1$ och $\lambda(0)=0.95$, $DR=0.01$ visas i fig. 5. Där framgår det att a-parametern tidigt skattas bra, medan b- och c-parametrarna inte helt når upp till sina riktiga värden. Förlustfunktionen W_l ansluter sig ganska väl till VTEOR.

2:a ordningens system.

Vid simulering av det givna 2:a ordningens system användes två av de λ -värden som gav bäst resultat på 1:a ordningens system, nämligen (0.95,0.01) och (0.99,0.01). Se appendix C.

Liksom tidigare gav vanlig PRBS bättre resultat än utdragen, $S/N=10:1$ bättre resultat än $S/N=1:1$ och $\lambda(0)=0.95$ bättre resultat än $\lambda(0)=0.99$ vid $T=2000$.

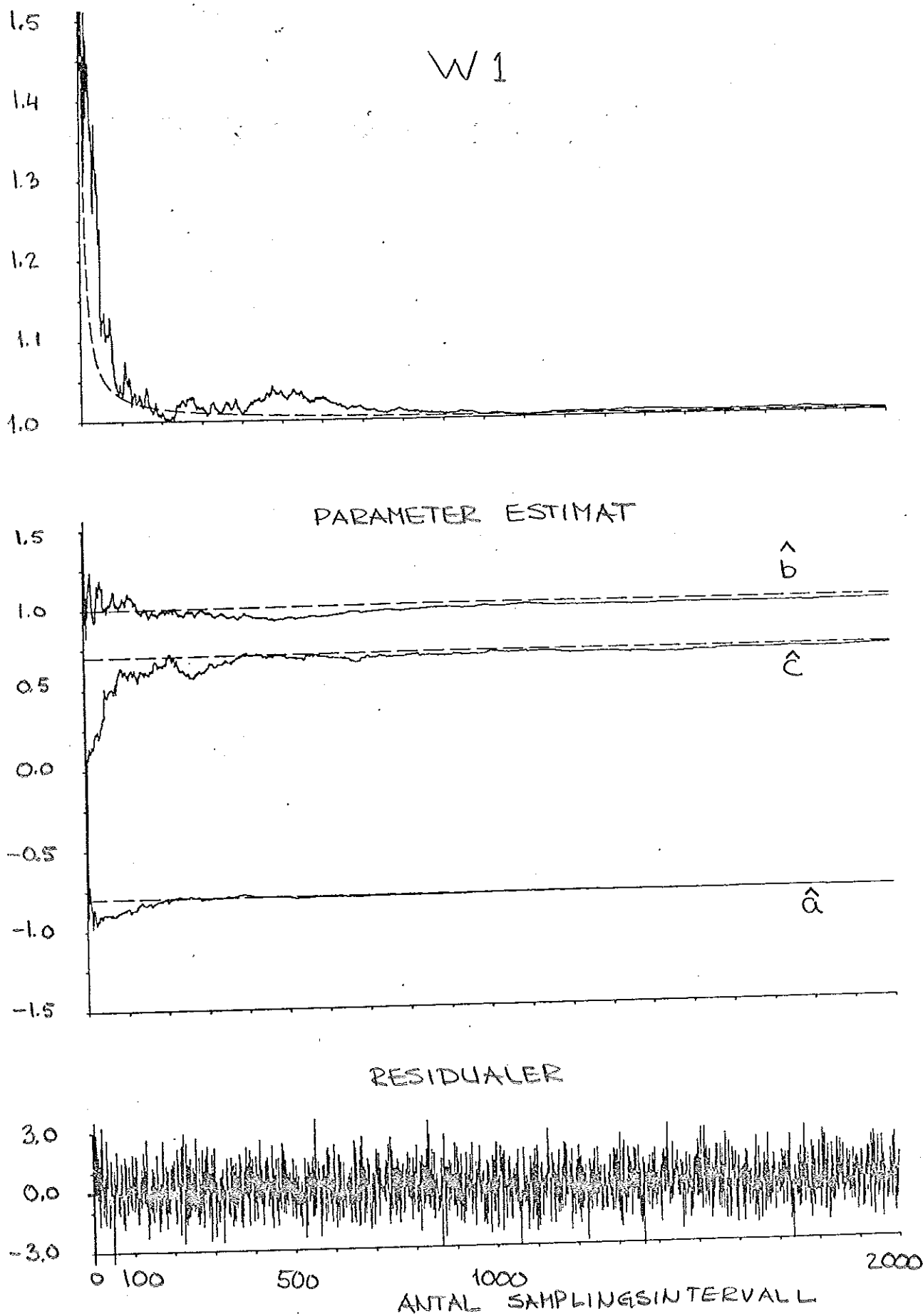
Resultatet från denna simulering ges nedan i tabell 8.

	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{c}_1	\hat{c}_2	W_b
Förväntat medelvärde	-1.5	0.7	1.0	0.5	-1.0	0.2	1.0030
AML	-1.490	0.689	0.992	0.521	-0.951	0.137	1.0179

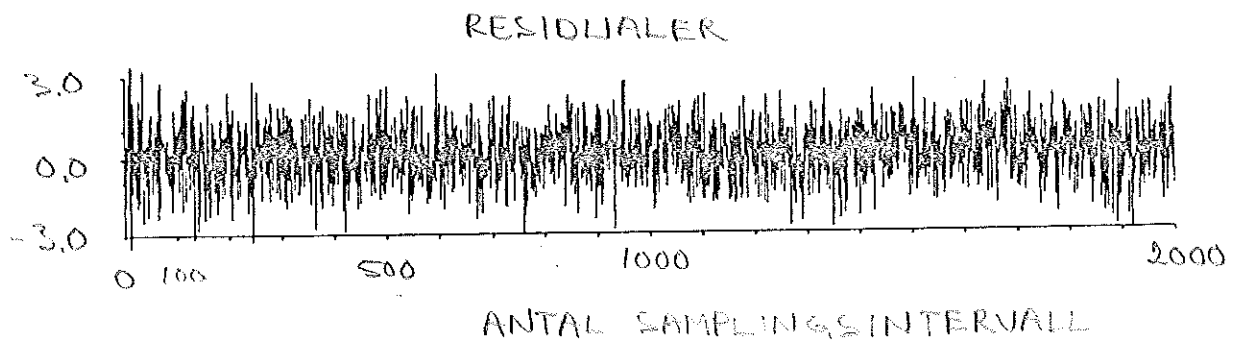
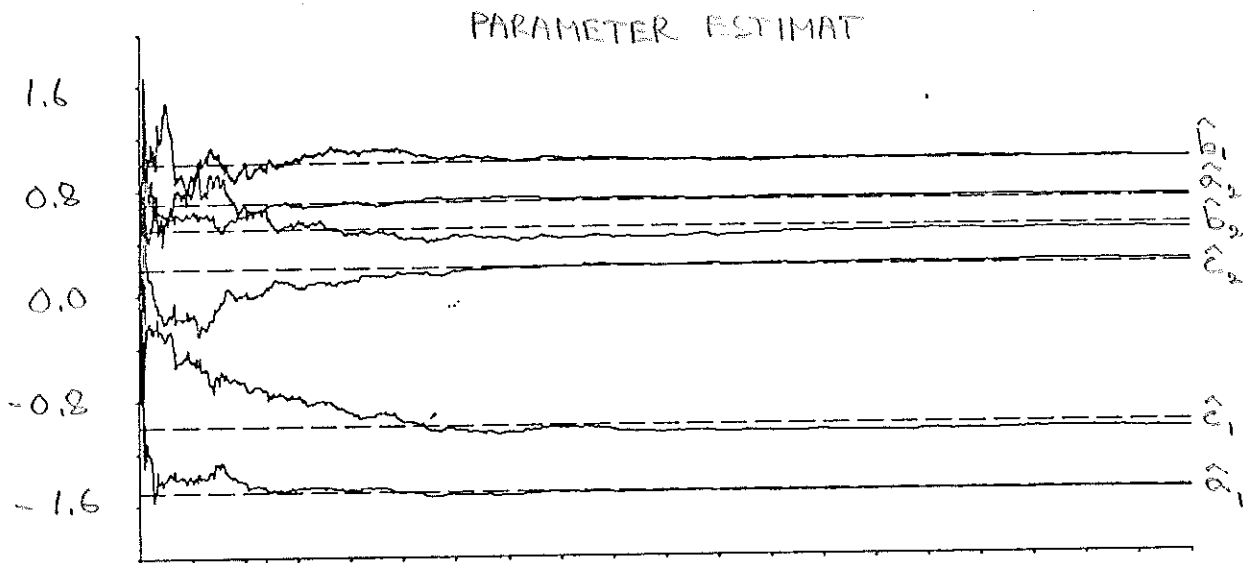
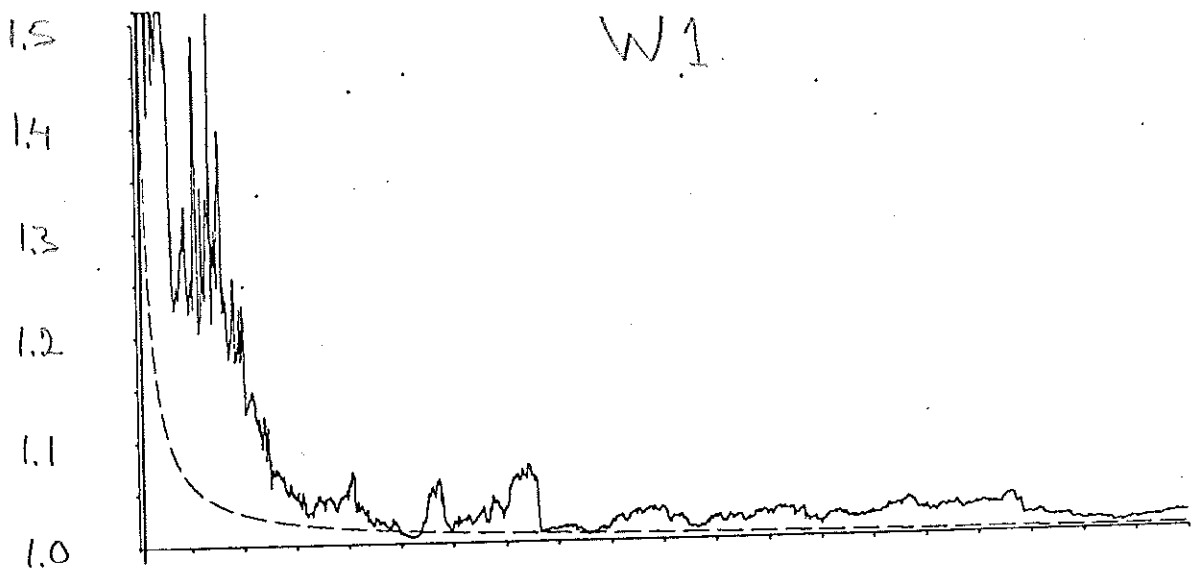
Tabell 8. Vanlig PRBS, $S/N=10:1$, $\lambda(0)=0.95$, $DR=0.01$, $T=2000$

En av de 10 realiseringarna av denna simulering visas i fig 6. Man ser, att redan vid $T=600$ har parametrarna i stort sett antagit sina slutliga värden. Vidare ser man att a-parametrarna skattas bäst. Förlustfunktionen W_l når i detta fallet inte helt ned till VTEOR.

AML



Figur 5. Parameteruppskattningar och förlustfunktion för ett 1:a ordningens system.



Figur 6. Parameteruppskattningar och förlustfunktion för ett 2:a ordningens system.

4.4. MLE

1:a ordningens system.

Vid körningar på det givna 1:a ordningens system har även för MLE viktsfaktorn λ varierats på samma sätt som för AML. Resultat från de 28 körningarna återfinnes i appendix D.

Påverkan av λ på parameteruppskattningarna visas i tabell 9, där resultaten från 7 simuleringar med vanlig PRBS och S/N=1:1 återfinnes.

TID	$\lambda(0)$	DR	\hat{a}_1	\hat{b}_1	\hat{c}_1	$(w1-\frac{1}{4}) \cdot 10^4$	w2	$(w3-\frac{1}{4}) \cdot 10^4$	
100	0.95	0.01	-0.795	1.022	0.655	338	0.215	343	
	0.99		-0.787	1.020	0.582	939	0.339	1050	
	0.999		-0.785	1.021	0.551	1047	0.377	1067	
	0.95	0.001	-0.798	1.029	0.661	338	0.166	388	
	0.99		-0.787	1.020	0.596	871	0.319	1041	
	0.999		-0.785	1.021	0.553	1042	0.375	1068	
	1.00	0.00	-0.785	1.021	0.548	1058	0.382	1068	
	500	0.95	0.01	-0.804	1.001	0.707	54	0.012	80
		0.99		-0.807	1.001	0.696	31	0.014	28
0.999		-0.807		1.001	0.673	55	0.025	30	
0.95		0.001	-0.794	0.996	0.702	600	0.049	458	
0.99			-0.801	1.003	0.714	91	0.015	104	
0.999			-0.807	1.001	0.680	45	0.020	27	
1.00		0.00	-0.807	1.001	0.670	62	0.027	34	
2000		0.95	0.01	-0.800	0.997	0.695	17	0.005	16
		0.99		-0.801	0.997	0.693	15	0.005	10
	0.999	-0.802		0.998	0.689	16	0.006	9	
	0.95	0.001	-0.805	0.996	0.687	82	0.028	186	
	0.99		-0.801	0.996	0.698	17	0.005	24	
	0.999		-0.801	0.997	0.692	16	0.006	10	
	1.00	0.00	-0.802	0.998	0.689	17	0.006	9	

Tabell 9. Vanlig PRBS, S/N=1:1

Slutsatser:

A. Vid T=2000 föreligger ingen signifikant skillnad mellan olika λ , bortsett från (0.95,0.001) som är sämre än de övriga.

B. C-parametern är den parameter som skattas långsammast. Med ett lågt val av $\lambda(0)$ fås emellertid en relativt snabb skattning av denna.

Parameteruppskattningarnas beroende av insignalens utseende samt S/N-förhållandet illustreras i tabell 10.

PRBS	S/N	TID	\hat{a}_1	\hat{b}_1	\hat{c}_1	$(W1-1) \cdot 10^4$
VANLIG	1:1	100	-0.795	1.022	0.655	338
		500	-0.804	1.001	0.707	54
		2000	-0.800	0.997	0.695	17
	10:1	100	-0.795	1.004	0.655	159
		500	-0.803	1.001	0.708	34
		2000	-0.801	0.999	0.694	11
UTDRAGEN	1:1	100	-0.817	1.017	0.644	671
		500	-0.793	0.962	0.712	480
		2000	-0.799	0.992	0.694	102
	10:1	100	-0.808	0.997	0.655	273
		500	-0.798	0.988	0.710	116
		2000	-0.800	0.996	0.693	23

Tabell 10. $\lambda(0)=0.95$, $DR=0.01$

Slutsatserna blir desamma som för de övriga metoderna, nämligen att vanlig PRBS är bättre än utdragen och att S/N=10:1 är överlägsen S/N=1:1. För detta systemet ger dock alla identifieringar goda resultat.

I fig 7 är parameteruppskattningarna plottade mot tiden för en realisering med vanlig PRBS, S/N=1:1 och $\lambda(0)=0.95$, $DR=0.01$. De skattade parametrarna ansluter sig väl till de riktiga värdena, möjligen med ett något för högt värde på a-parametern. Förlustfunktionen W1 ansluter sig bra till VTEOR, bättre än för AML i fig 5.

2:a ordningens system.

Identifieringarna av det givna 2:a ordningens system gjordes för två λ -värden; (0.95,0.01) resp. (0.99,0.01). Tendensen från tidigare körningar stod sig, dvs. vanlig PRBS, S/N=10:1 och $\lambda(0)=0.95$, $DR=0.01$ gav bäst resultat. Se även appendix D.

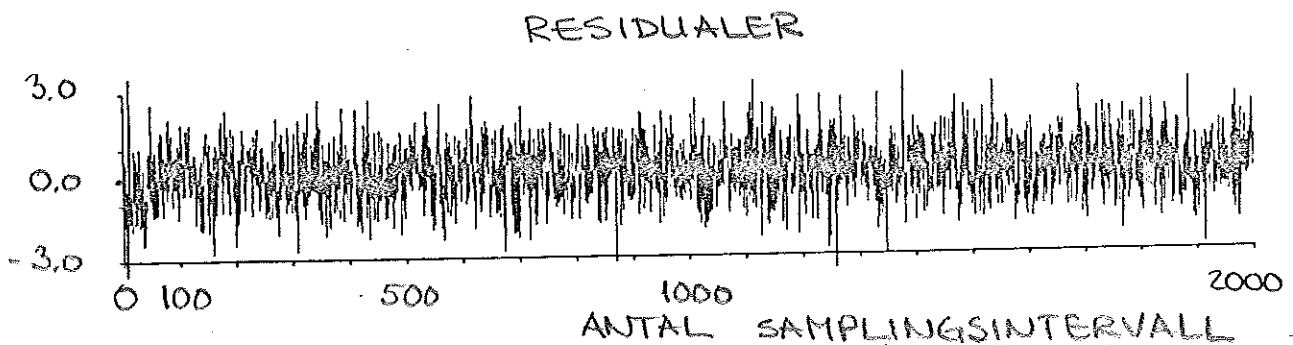
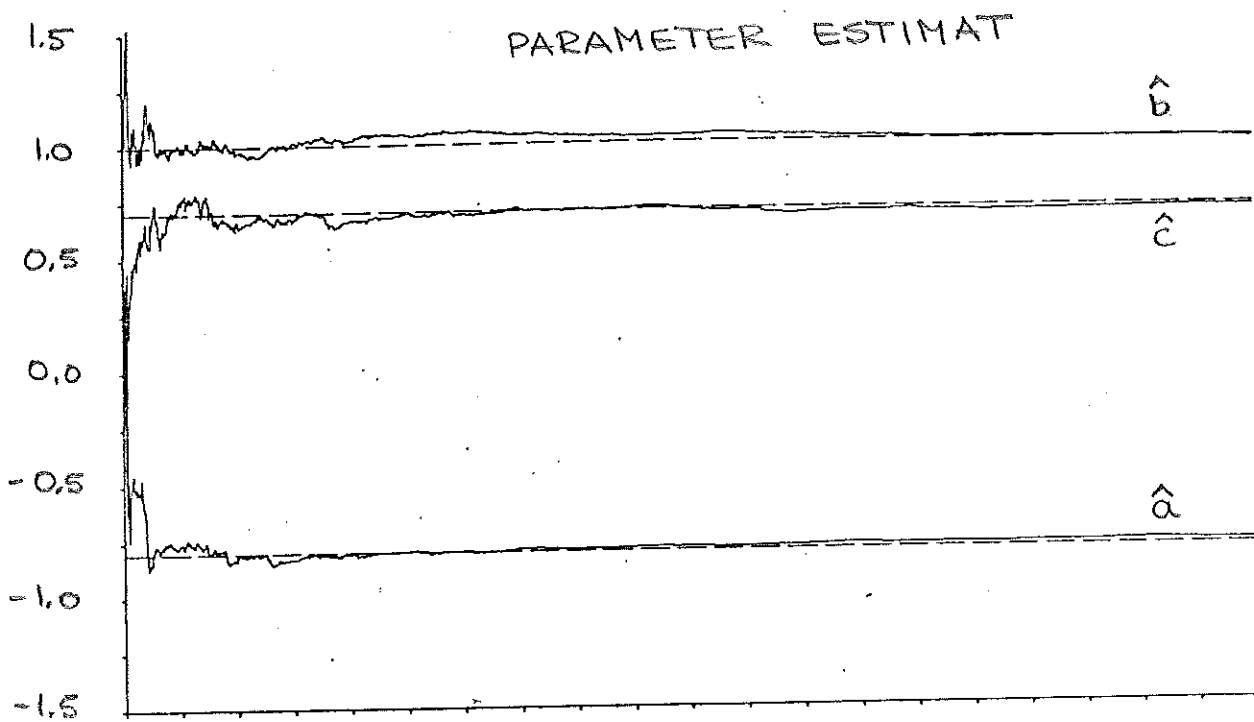
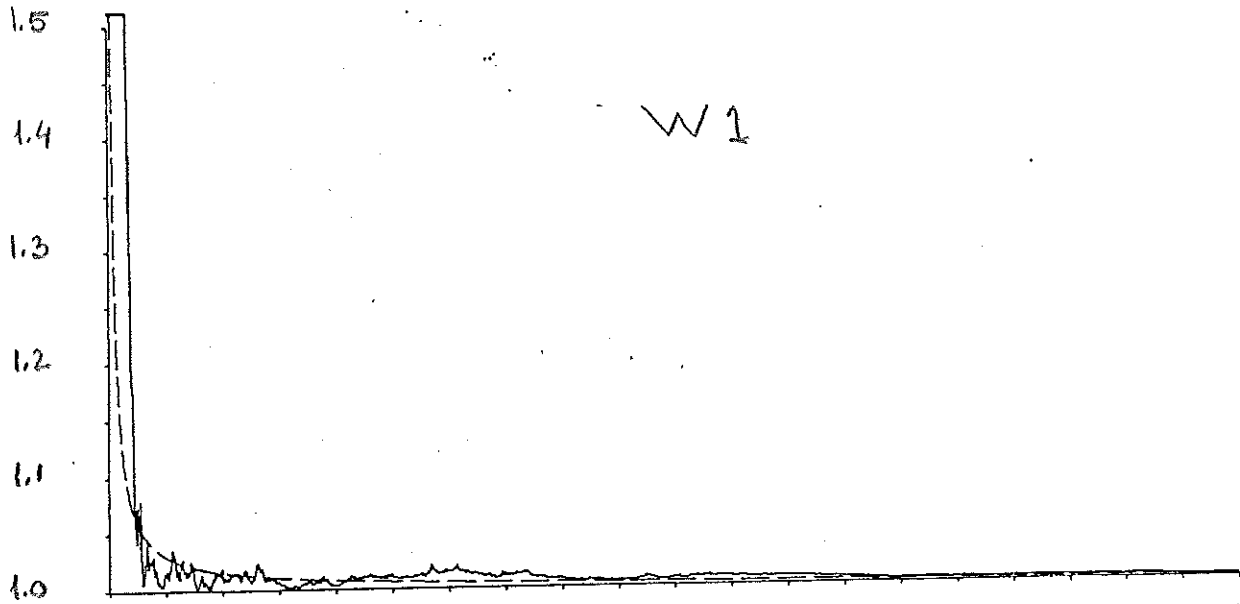
De bästa uppskattningarna visas i tabell 11.

	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{c}_1	\hat{c}_2	W1
Förväntat medelvärde	-1.55	0.7	1.0	0.5	-1.0	0.2	1.0030
MLE	-1.498	0.698	0.991	0.515	-0.972	0.172	1.0063

Tabell 11. Vanlig PRBS, $S/N=10:1$, $\lambda(0)=0.95$, $DR=0.01$, $T=2000$

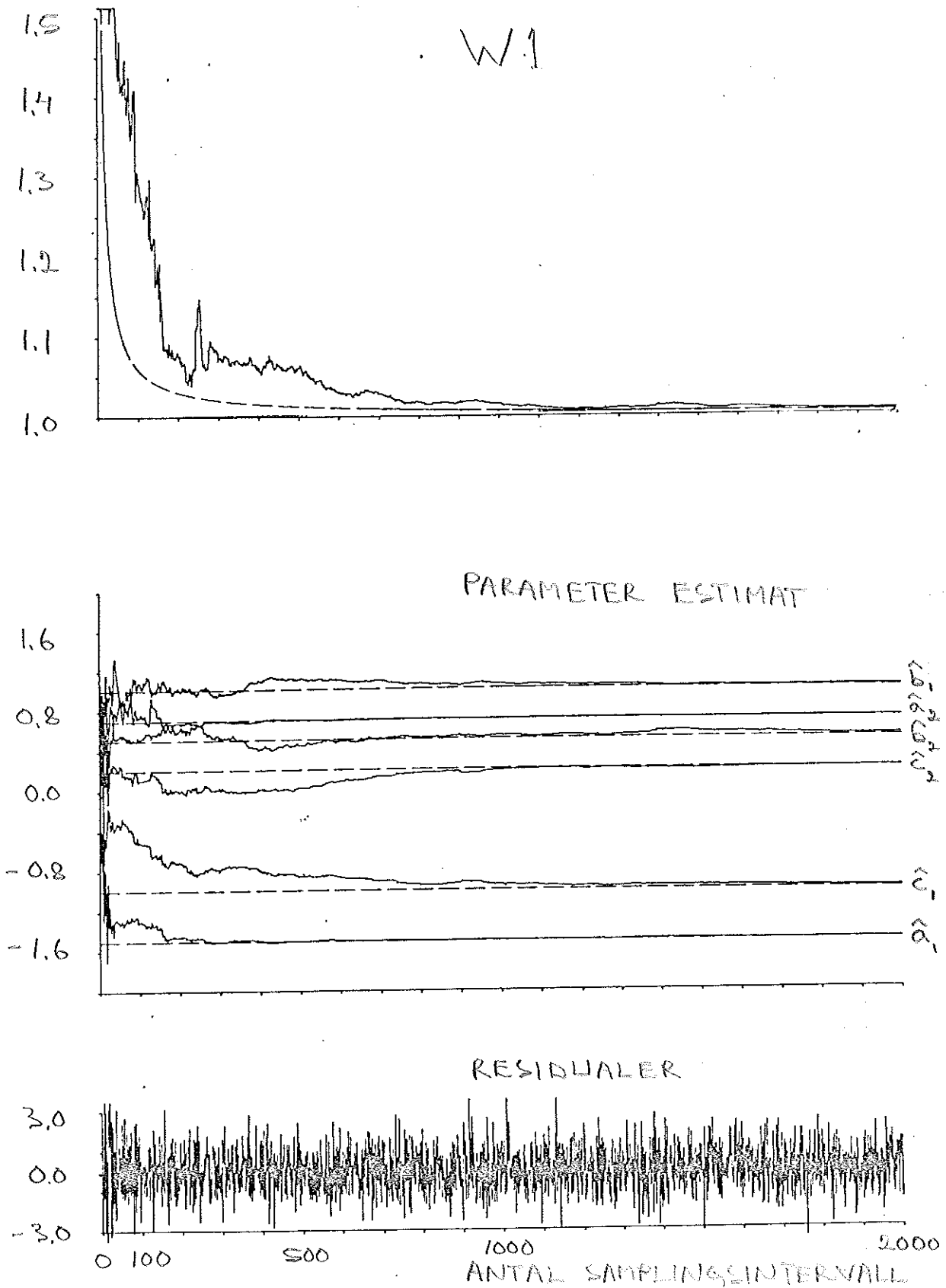
I fig 8 visas en realisering med ovanstående val av PRBS, S/N resp. λ . Som framgår av figuren antar a-parametrarna snabbt sina slutliga värden medan speciellt c-parametrarna behöver lång tid för att anta stationära värden, något som beror på valet av S/N till 10:1. Förlustfunktionen W1 antar värden nära VTEOR, dock utan att understiga denna senare kurva.

MLE



Figur 7. Parameteruppskattningar och förlustfunktion för ett 1:a ordningens system.

MLE



Figur 8. Parameteruppskattningar och förlustfunktion för ett 2:a ordningens system.

5. JÄMFÖRELSE AV METODERNA.

En svårighet med direkt jämförelse av de fyra metoderna är naturligtvis att två metoder, LS och IV, endast skattar a- och b-parametrar, medan två metoder, AML och MLE, även skattar c-parametrar. Således redan här ett övertag för AML och MLE. För att få en uppfattning om vilken metod som skattar a- och b-parametrar bäst visas i nedanstående tabell 12 parameteruppskattningarna vid $T=2000$ för de olika metoderna. Vi använder här vanlig PRBS och S/N-förhållandet 10:1 eftersom vi har visat att detta ger bäst resultat oavsett metod. För jämförelsens skull användes dessutom $\lambda=1.0$ för AML och MLE.

	\hat{a}_1	\hat{b}_1	\hat{c}_1
Förväntat medelvärde	-0.800	1.000	0.700
LS	-0.810	0.999	
IV	-0.801	0.998	
AML	-0.800	0.999	0.653
MLE	-0.800	0.999	0.681

Tabell 12. Vanlig PRBS, S/N=10:1, T=2000

Ur detta exempel på 1:a ordningens system och övriga simuleringar kan man nu sluta sig till följande;

A.

LS-metoden ger uppskattningar som inte konvergerar mot de rätta parametervärdena p.g.a. inverkan från bruset. Detta framgår än tydligare vid identifieringar av 2:a ordningens system och innebär att bra uppskattningar ej kan erhållas med denna metod.

B.

IV-metoden ger för detta exempel uppskattningar helt i klass med AML och MLE. Av våra identifieringar av andra ordningens system gav emellertid endast en meningsfulla resultat, nämligen

med vanlig PRBS, $S/N=10:1$ och $ND=6$. En av de bästa realiseringarna har tidigare visats i fig 4, men genom att jämföra denna med motsvarande realisering för AML resp. MLE (fig 6 resp. fig 8) framgår det att inte ens denna ger lika bra resultat som AML eller MLE. Sammanfattningsvis kan således sägas att IV-metoden för 1:a ordningens system gav mycket bra resultat, men att den för högre ordningstal gav mestadels meningslösa sådana.

C.

AML och MLE ger i tabell 12 ungefär likvärdiga resultat. C-parametern ger möjligtvis en uppfattning om att MLE är bättre än AML. För att ytterligare belysa skillnaderna mellan metoderna har i tabell 13 en jämförelse mellan AML och MLE gjorts för 2:a ordningens system med vanlig PRBS och $S/N=10:1$.

VÄNTEVÄRDEN			-1.5	0.7	1.0	0.5	-1.0	0.2	
TID	$\lambda(0)$	METOD	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{c}_1	\hat{c}_2	$(W1-1) \cdot 10^4$
1 0 0	0.95	AML	-1.384	0.589	1.099	0.499	-0.530	-0.060	8603
		MLE	-1.265	0.482	1.037	0.488	-0.281	0.089	6299
	0.99	AML	-1.375	0.586	1.098	0.558	-0.372	-0.050	4319
		MLE	-1.086	0.323	1.039	0.700	0.025	0.183	11187
5 0 0	0.95	AML	-1.488	0.686	1.006	0.535	-0.865	0.043	868
		MLE	-1.496	0.699	1.006	0.525	-0.891	0.101	414
	0.99	AML	-1.452	0.652	1.015	0.565	-0.701	-0.046	1676
		MLE	-1.339	0.556	0.990	0.600	-0.422	0.066	4112
2 0 0	0.95	AML	-1.490	0.689	0.992	0.521	-0.951	0.137	179
		MLE	-1.498	0.698	0.991	0.515	-0.973	0.172	63
	0.99	AML	-1.462	0.661	0.994	0.545	-0.832	0.047	851
		MLE	-1.459	0.661	1.002	0.533	-0.724	0.061	1464

Tabell 13. Vanlig PRBS, $S/N=10:1$, $DR=0.01$

Med $W1$ som kriterium (ju lägre, desto bättre) blir den något överaskande slutsatsen den att valet av $\lambda(0)$ bestämmer vilken algoritm som är bäst. $\lambda(0)=0.95$ ger MLE som bästa metod, medan $\lambda(0)=0.99$ ger AML som bästa. De bästa parameteruppskattningarna absolut sett ges här av MLE-metoden. Studerar man emellertid

simuleringarna för S/N-förhållandet 1:1 (se appendix C och D) finner man att, oberoende av PRBS och $\lambda(0)$, MLE alltid ger bättre slutvärden än AML.

För AML och MLE simulerades även ett 3:e ordningens system. Vid dessa körningar hölls konstant $\lambda(0)=0.95$, DR=0.01 medan som vanligt PRBS och S/N varierades. Sammandrag av körningarna återfinnes i appendix E. Ett karakteristiskt utdrag därifrån presenteras i tabell 14.

VÄNTEV: E		-1.600	1.610	-0.776	1.200	-0.950	0.200	0.100	0.250	0.873	
TID	MET	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{b}_3	\hat{c}_1	\hat{c}_2	\hat{c}_3	W1
100	AML	-1.655	1.607	-0.800	1.262	-1.057	0.137	0.088	0.017	0.232	1.692
	MLE	-1.565	1.464	-0.695	1.320	-0.955	0.095	0.133	-0.019	0.176	2.140
500	AML	-1.594	1.599	-0.770	1.199	-0.903	0.235	0.145	0.162	0.703	1.171
	MLE	-1.603	1.606	-0.775	1.181	-0.960	0.204	0.110	0.172	0.713	1.117
2000	AML	-1.588	1.600	-0.764	1.188	-0.929	0.204	0.133	0.226	0.798	1.060
	MLE	-1.594	1.606	-0.770	1.193	-0.946	0.202	0.104	0.239	0.840	1.022

Tabell 14. Vanlig PRBS, S/N=1:1.

Av tabell 14 framgår, att MLE ger bäst slutresultat, medan AML snabbare ger uppskattningar i närheten av de förväntade värdena.

De generella slutsatserna från körningarna på 1:a, 2:a resp 3:e ordningens system med AML och MLE blir därmed följande:

- I. Både AML och MLE ger bättre resultat än LS och IV.
- II. Både AML och MLE ger bra skattningar.
- III. MLE ger i allmänhet bättre resultat än AML. Man kan hitta λ -värden som ger bättre värden med AML än med MLE. De bästa parameteruppskattningarna absolut sett erhålles emellertid alltid med MLE.
- IV. AML ger snabbare än MLE uppskattningar i närheten av de rätta parametervärdena.

Längre fram visas dessutom att AML-algoritmen, till skillnad från MLE-algoritmen, för vissa system ger uppskattningar som inte konvergerar mot de rätta parametervärdena.

Slutligen kan nämnas att tidsåtgången per parameter vid våra beräkningar för MLE-algoritmen varit ca 1.5 gånger större än för de övriga metoderna, som krävt ungefär lika lång tid per uträknad parameter.

6.KONVERGENS HOS METODERNA.

När antalet tillgängliga data ökar är det naturligtvis önskvärt att de producerade resultaten skall förbättras. Huruvida algoritmerna konvergerar eller ej beror på vad som händer med parametrarna när antalet data går mot oändligheten. För en rekursiv algoritm är data, samplade från processen, samlade i en vektor x_n , vilken representerar den nuvarande kunskapen om processen. Denna vektor modifieras varje gång man får tillgång till en ny observation ϕ_n . Proceduren kan skrivas som:

$$x_n = x_{n-1} + \gamma_n \cdot Q_n(x_{n-1}, \phi_n) \quad (a)$$

Algoritmer av denna typ representerar sålunda en allmän rekursiv algoritm.

Det kan visas (Ljung (1974)) att konvergensen av (a) beror på stabiliteten hos den ordinära differential-ekvationen (ODE):

$$\frac{d}{dt} x = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} E \{ Q_n(x, \phi) | x \} \quad (b)$$

där $E\{Y|x\}$ står för det betingade väntevärdet av Y givet x .

Genom att simulera (b) i stället för (a) elimineras det stokastiska beteendet hos (a). Den ODE (b) kan användas inte bara för konvergensanalys utan också för att undersöka konvergensthastighet och dessutom kan det visas att trajektorierna till (b) är direkt relaterade till hur banorna till (a) utvecklas med antalet data. Däremot indikerar (b) ingenting om (a):s innehåll av transienta eller oscillativa element.

Hur ser då de ODE ut, som beskriver våra rekursiva algoritmer? Det kan visas, Ljung et al(74) att de kan skrivas:

$$\dot{R} = R - R \cdot G(\hat{\theta}) \cdot R \quad (c)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = R \cdot f(\hat{\theta}) \quad (d)$$

där

R är en kvadratisk matris med $R(0)$ t.ex. satt till $k \cdot I$

$\hat{\theta}$ är en vektor innehållande parameteruppskattningarna

$$G(\hat{\theta}) = E z^T(t+1) \cdot \phi(t+1)$$

$$f(\hat{\theta}) = E z^T(t+1) \cdot \xi(t+1)$$

Med kännedom om detta kan man med z , ϕ och ξ kända för de olika metoderna (se kapitlet ALGORITMER) relativt enkelt få fram det för metoden speciella utseendet av (c) och (d) för LS, IV, AML resp. MLE.

Med hjälp av programpaketet SIMNON (Elmqvist (1973)) simuleras utseendet av (c) och (d) för våra fyra olika metoder. Simuleringarna gjordes för det tidigare använda 1:a ordningens system:

$$(1-0.8q^{-1})y(t) = 1.0q^{-1}u(t) + (1+0.7q^{-1})e(t)$$

och visas i figurerna 9-16.

Kommentar av ^{a)}trjektoriernas utseende för de olika metoderna:

LS. (fig 9 och 10)

Av fig 9 framgår att parametrarna konvergerar mot de stationära värdena $a=-0.848$, $b=1.000$ och att a-parametern går mot sitt värde snabbare än b-parametern, vilket även framgår av fig 10. Fasporträttet visar att kurvorna utan några oväntade avvikelser leder fram till konvergenspunkten, oberoende av initialvärdena på parametrarna. Jämför även det allmänna utseendet i fig 9 med fig 1.

IV. (fig 11 och 12)

Här är det b-parametern som skattas snabbast. Som väntat konvergerar parametrarna mot $a=-0.8$, $b=1.0$. Fasporträttet i fig 12 visar sig vara mera kroklinjigt än det för LS, men alla kurvor leder till konvergenspunkten. Jämför fig 11 med fig 3.

AML. (fig 13 och 14)

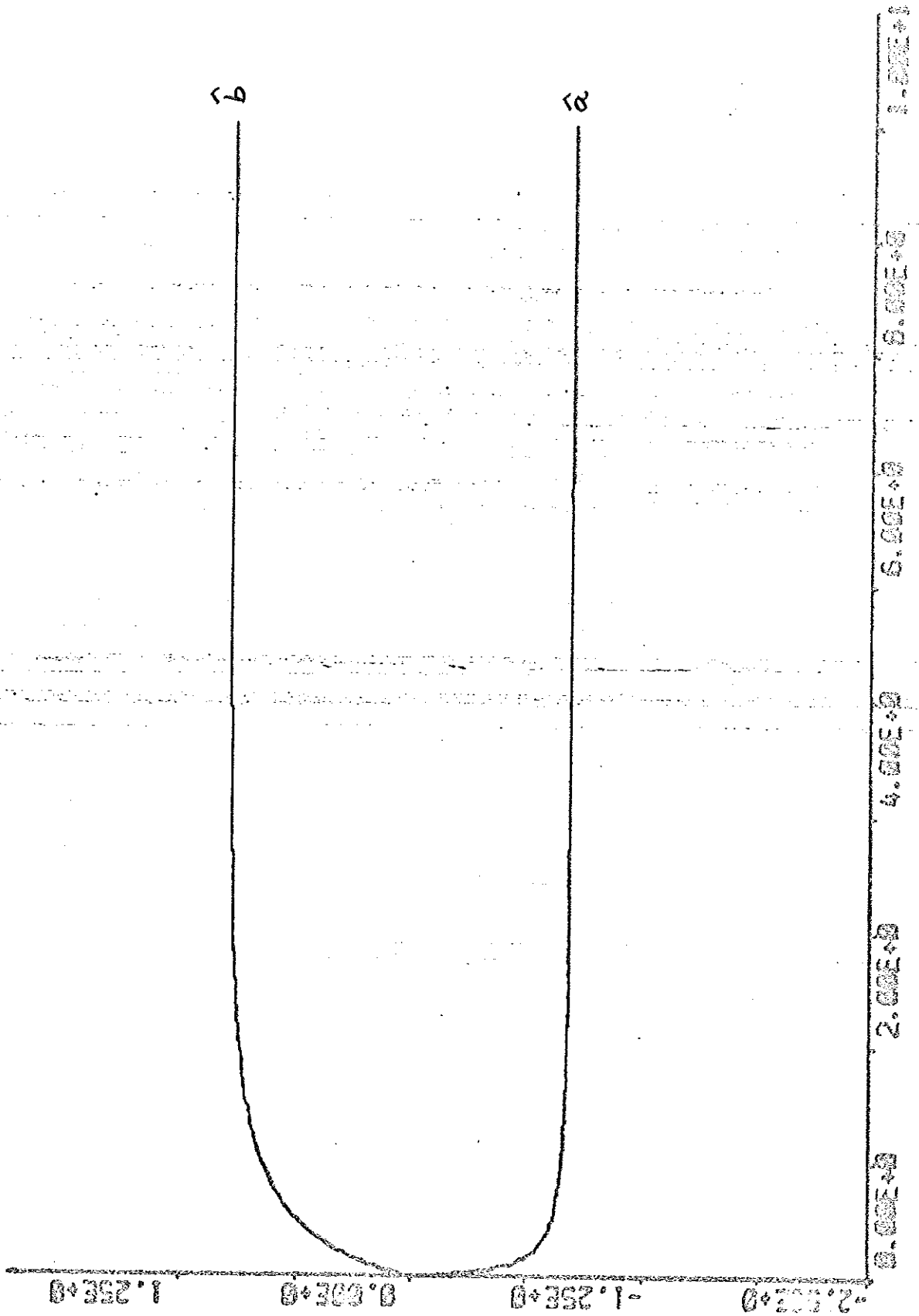
Ur fig 13 framgår dels att a-parametern skattas snabbast, dels att c-parametern skattas betydligt långsammare än de övriga.

C-parametern antar t.o.m. negativa värden i början av sitt förlopp, något som har iakttagits även vid simuleringar av de rekursiva algoritmerna. Alla parametrar konvergerar mot de riktiga värdena. Fasporträttet i fig 14 indikerar att a-parametern antar för stora negativa värden innan konvergenspunkten uppnås. Jämför fig 13 med fig 5.

MLE. (fig 15 och 16)

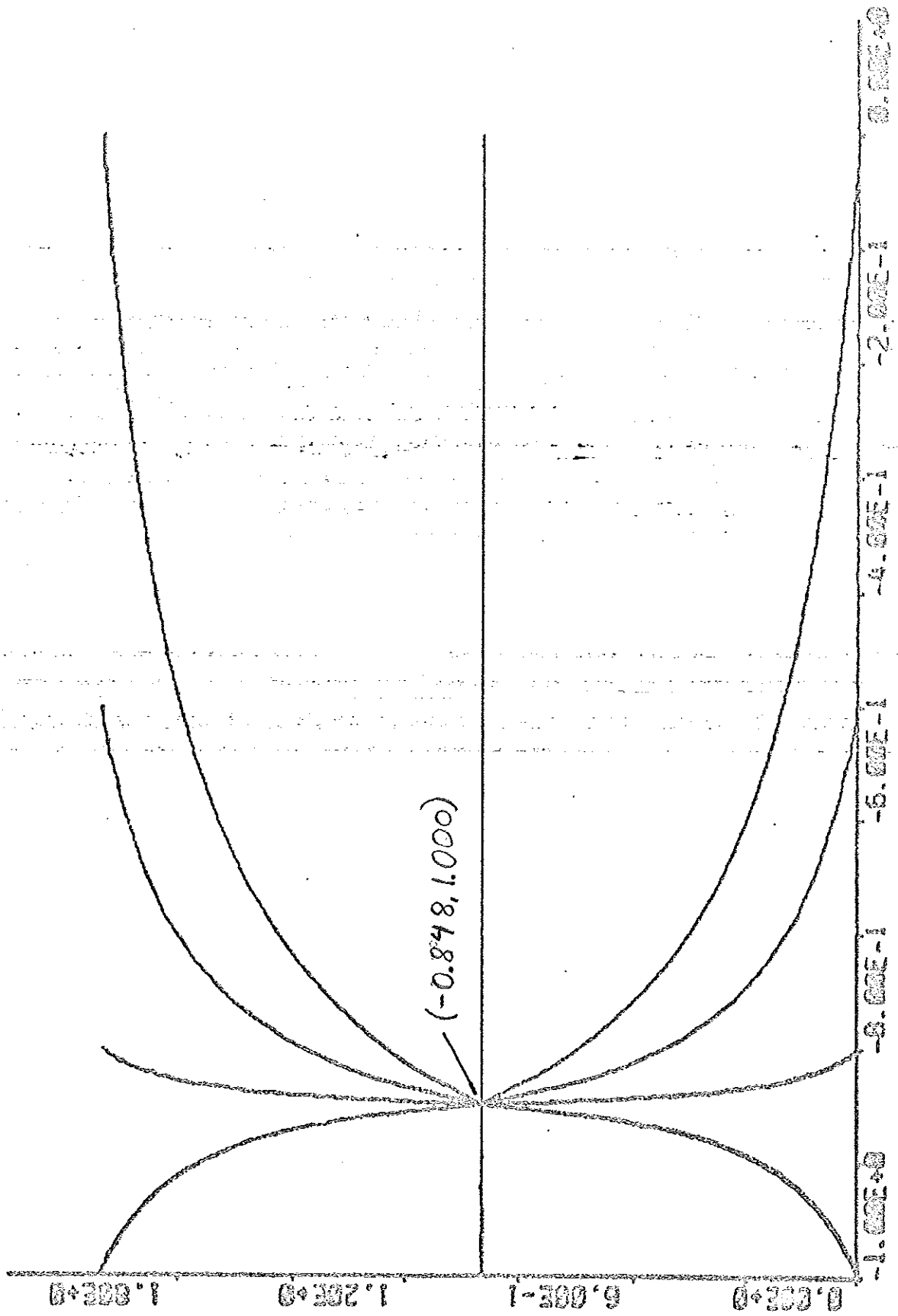
Fig 15 visar att parametrarna här konvergerar mera direkt mot de rätta värdena än fallet är för AML. Även här skattas c-parametern långsammast. Fasporträttet för MLE visar att kurvorna mera rättframt går mot konvergenspunkten än för AML. Jämför även fig 15 med fig 7.

PLOT TTR TTR



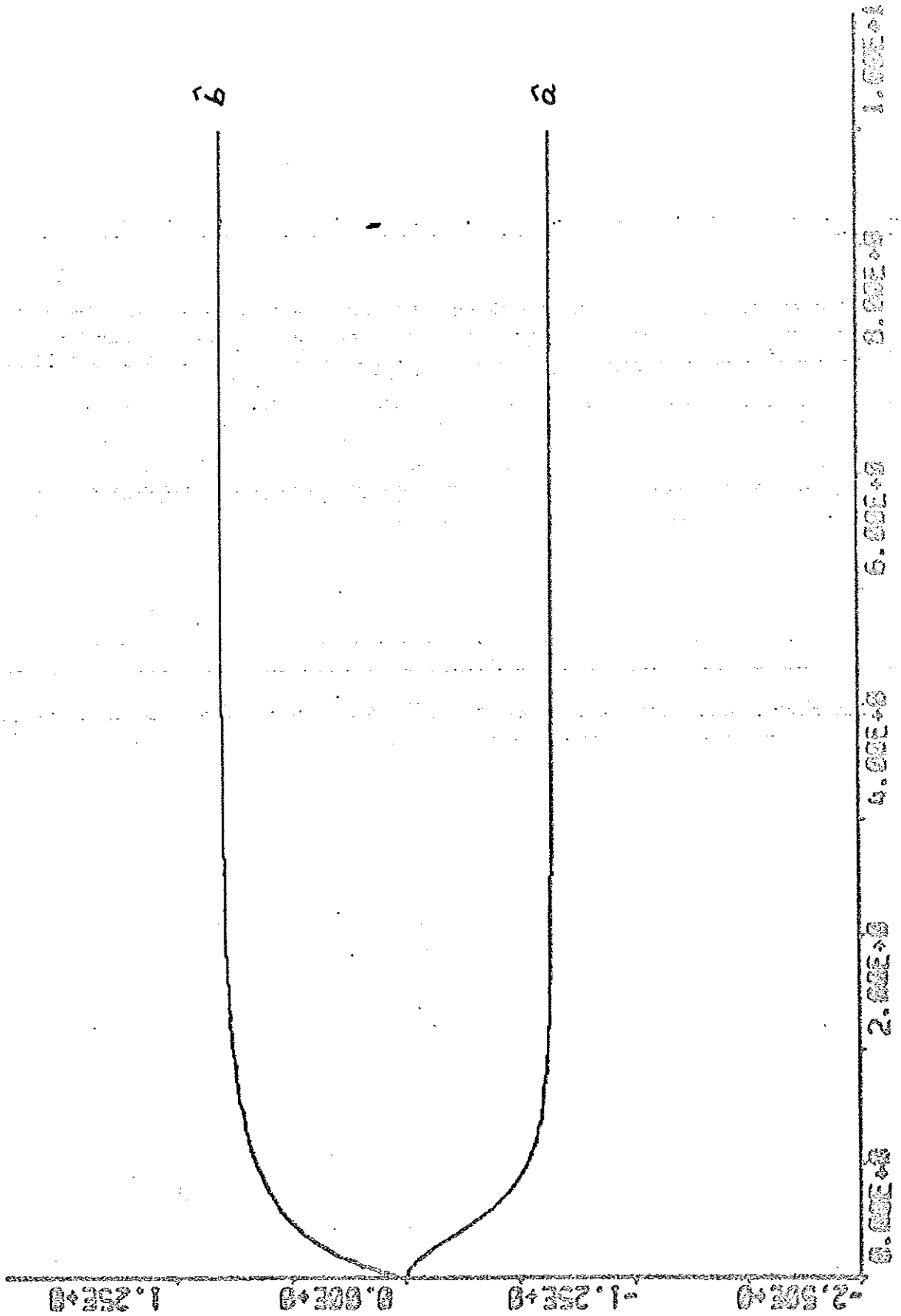
Figur 9. Trajektoriernas utseende för LS-algoritmen.
S/N-förhållandet 1:1.

PLOT T(BETA)



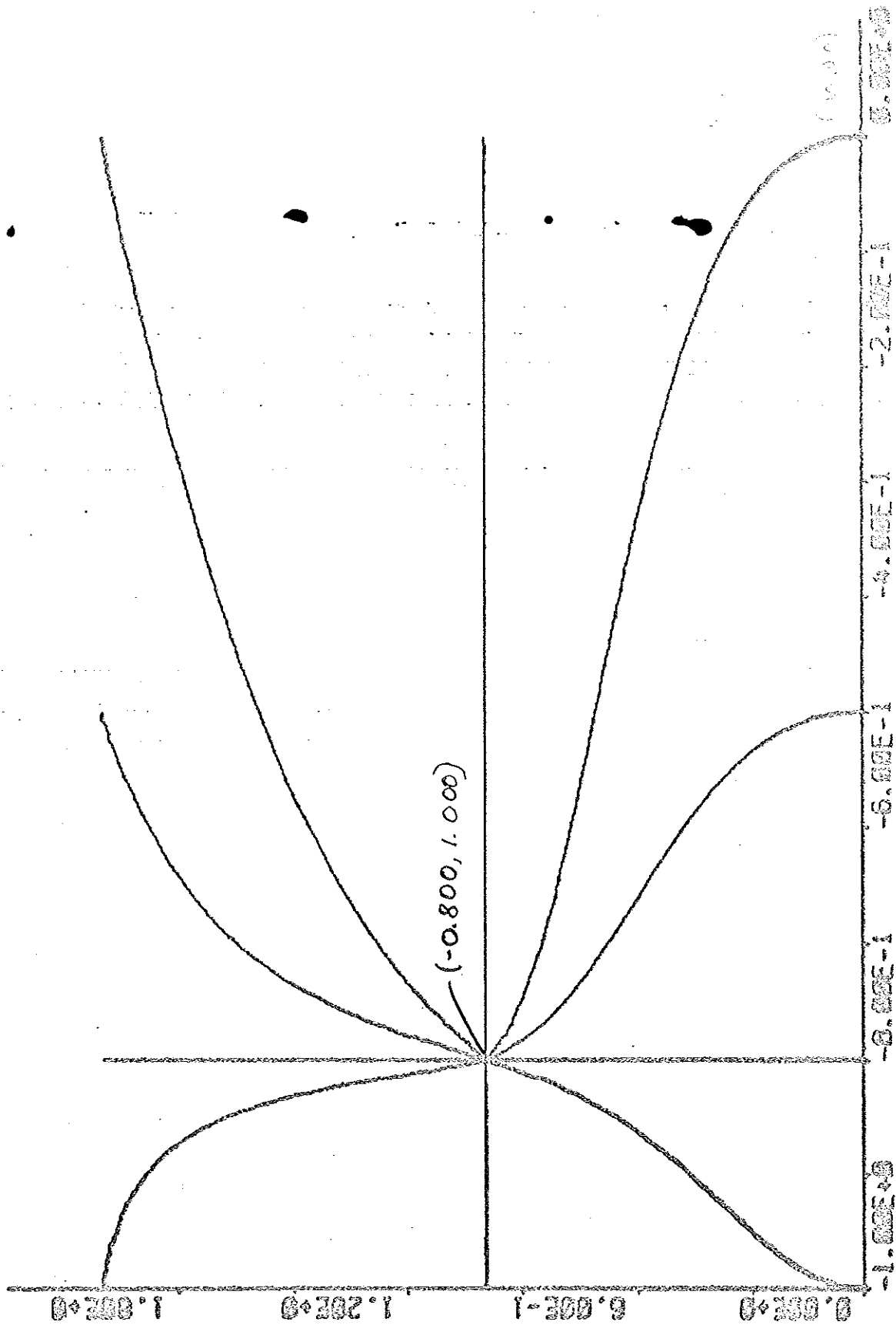
Figur 10. Fasplanets utseende för LS-algoritmen.

PLOT TTA TT8



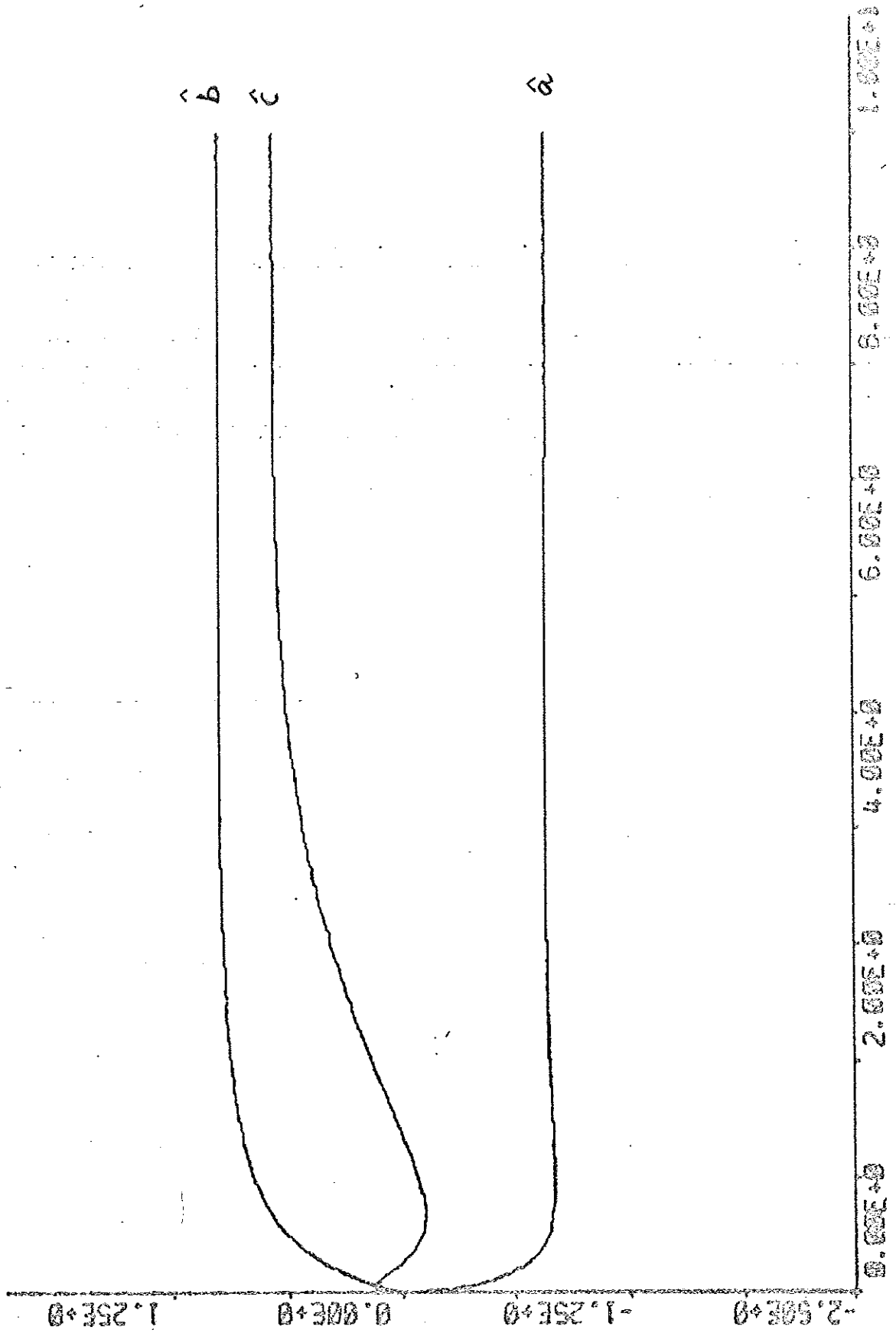
Figur 11. Trajektoriernas utseende för IV-algoritmen.
S/N-förhållandet 1:1.

PLOT TTB(TTA)



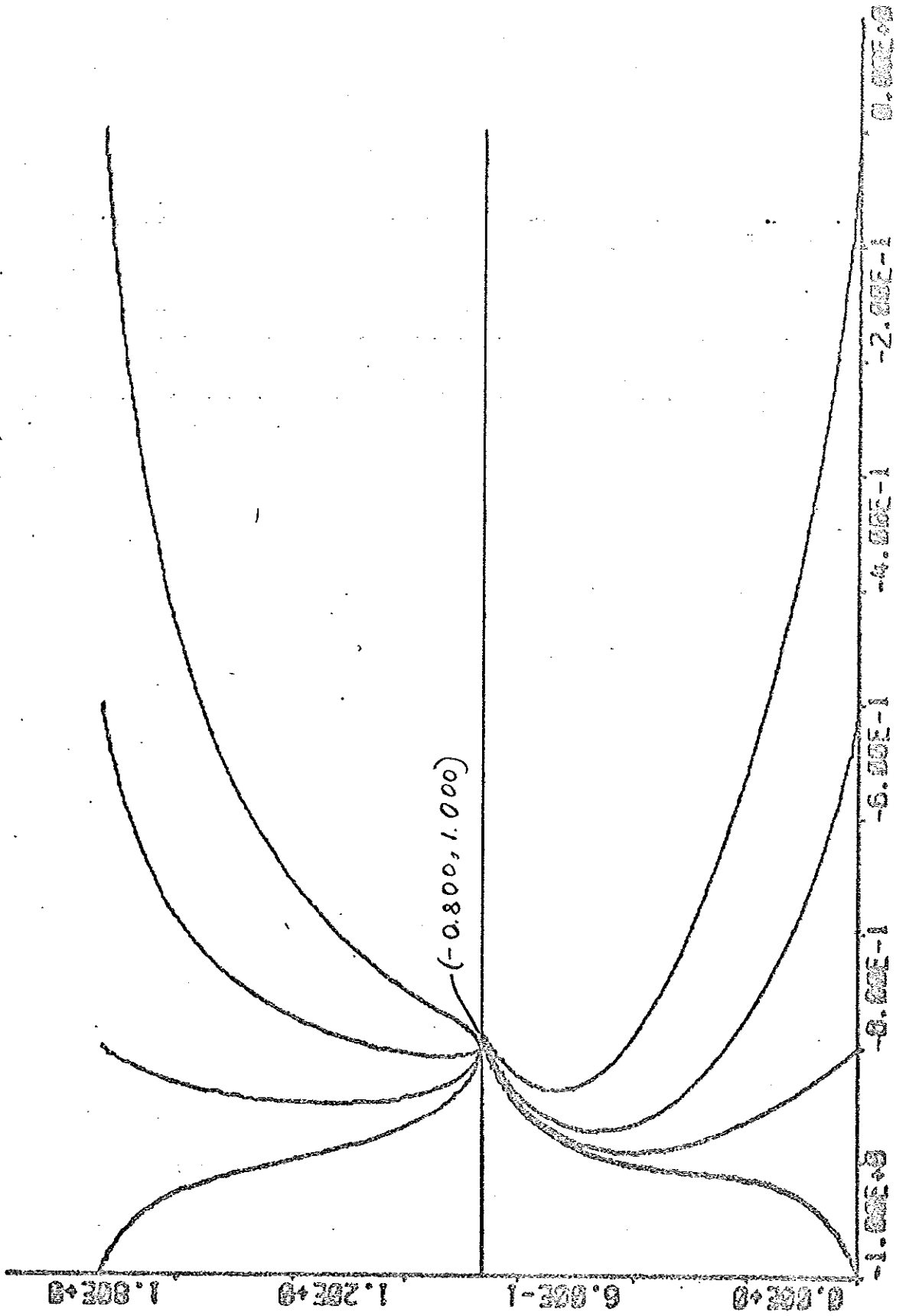
Figur 12. Fasplanets utseende för IV-algoritmen.

PLOT TTA TTB TTC



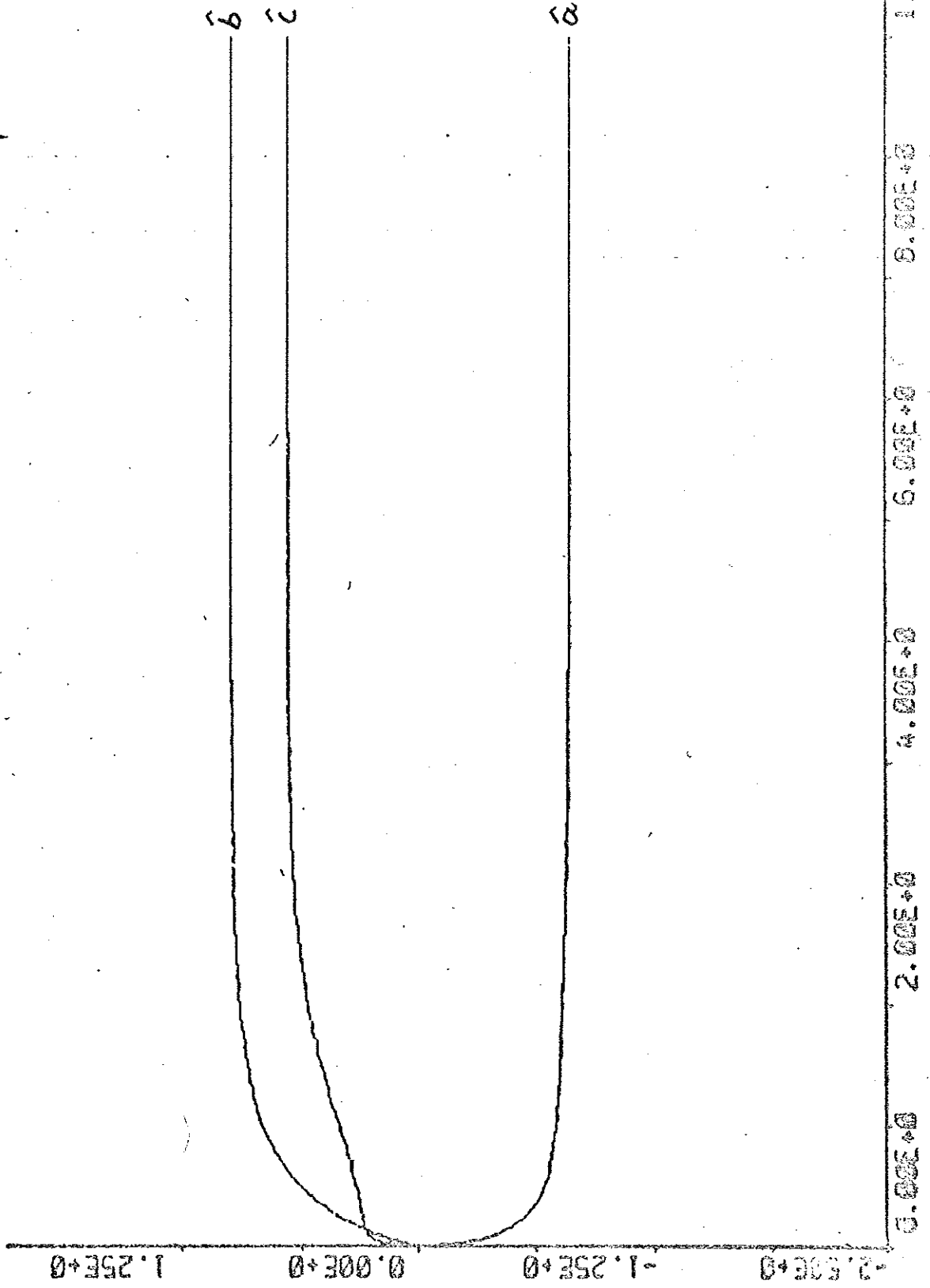
Figur 13. Trajektoriernas utseende för AML-algoritmen.
S/N-förhållandet 1:1.

PLOT TTB(TTA)



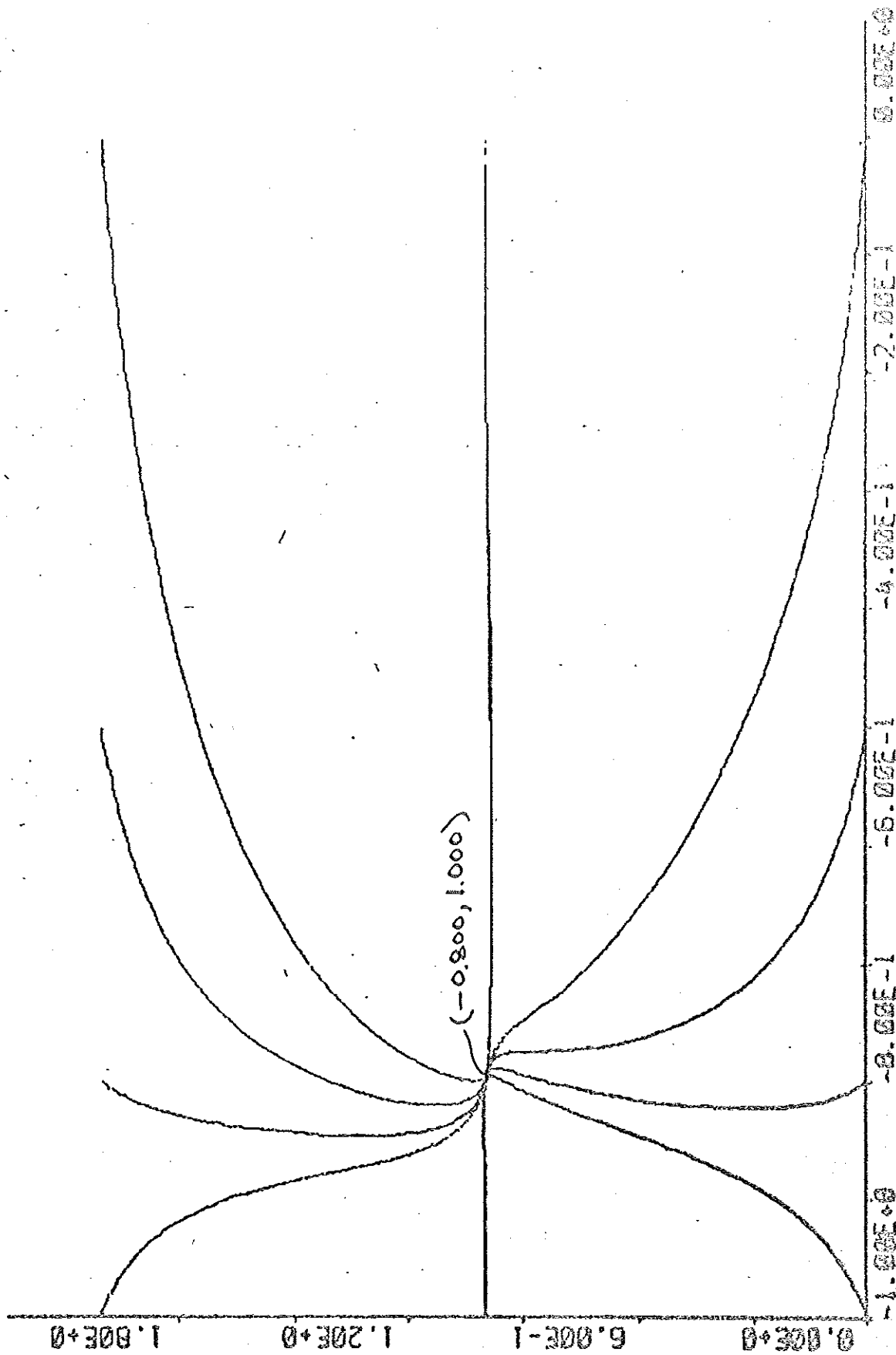
Figur 14. Fasplanets utseende för AML-algoritmen.

PLOT TTR TTB TTC



Figur 15. Trajektoriernas utseende för MLE-algoritmen.
S/N-förhållandet 1:1.

PLOT TTB(TTR)



Figur 16. Fasplanets utseende för MLE-algoritmen.

7. ETT EXEMPEL PÅ ICKE-KONVERGENS HOS AML-METODEN.

I föregående kapitel påvisade vi sambandet mellan konvergens hos den allmänna rekursiva algoritmen

$$x_n = x_{n-1} + \gamma_n \cdot Q(x_{n-1}, \phi_n)$$

och stabilitet hos den ODE

$$\frac{d}{dt} x = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} E\{Q_n(x_n, \phi) | x\}$$

Man kan även visa Ljung et al (-74) att om den kring den stationära punkten linjariserade DE

$$\dot{x} = Ax \quad (i)$$

är stabil så är den rekursiva algoritmen konvergent, och om (i) är instabil så är den rekursiva algoritmen divergent.

Dvs. om A har något egenvärde λ med $\text{Re}\lambda > 0$ så är den rekursiva algoritmen divergent.

A:s utseende för AML-metoden erhålles ur

$$\hat{\Theta} = R \cdot f(\hat{\Theta})$$

Kring den stationära punkten är $R = G^{-1}$, vilket med

$$G = E z^T(t+1)\phi(t+1)$$

$$f(\hat{\Theta}) = E z^T(t+1)\xi(t+1)$$

ger

$$A = -\{E z^T(t+1)\phi(t+1)\}^{-1} \cdot E z^T(t+1)\xi'(t+1)$$

z, ϕ och ξ för AML återfinnes i kapitlet ALGORITMER.

Ett liknande problem har studerats i (Ljung Wittenmark (1974)) varav det framgår, att t.ex. den till systemet

$$A = 1 + 0.9q^{-1} + 0.95q^{-2}$$

$$B = 1.0q^{-1}$$

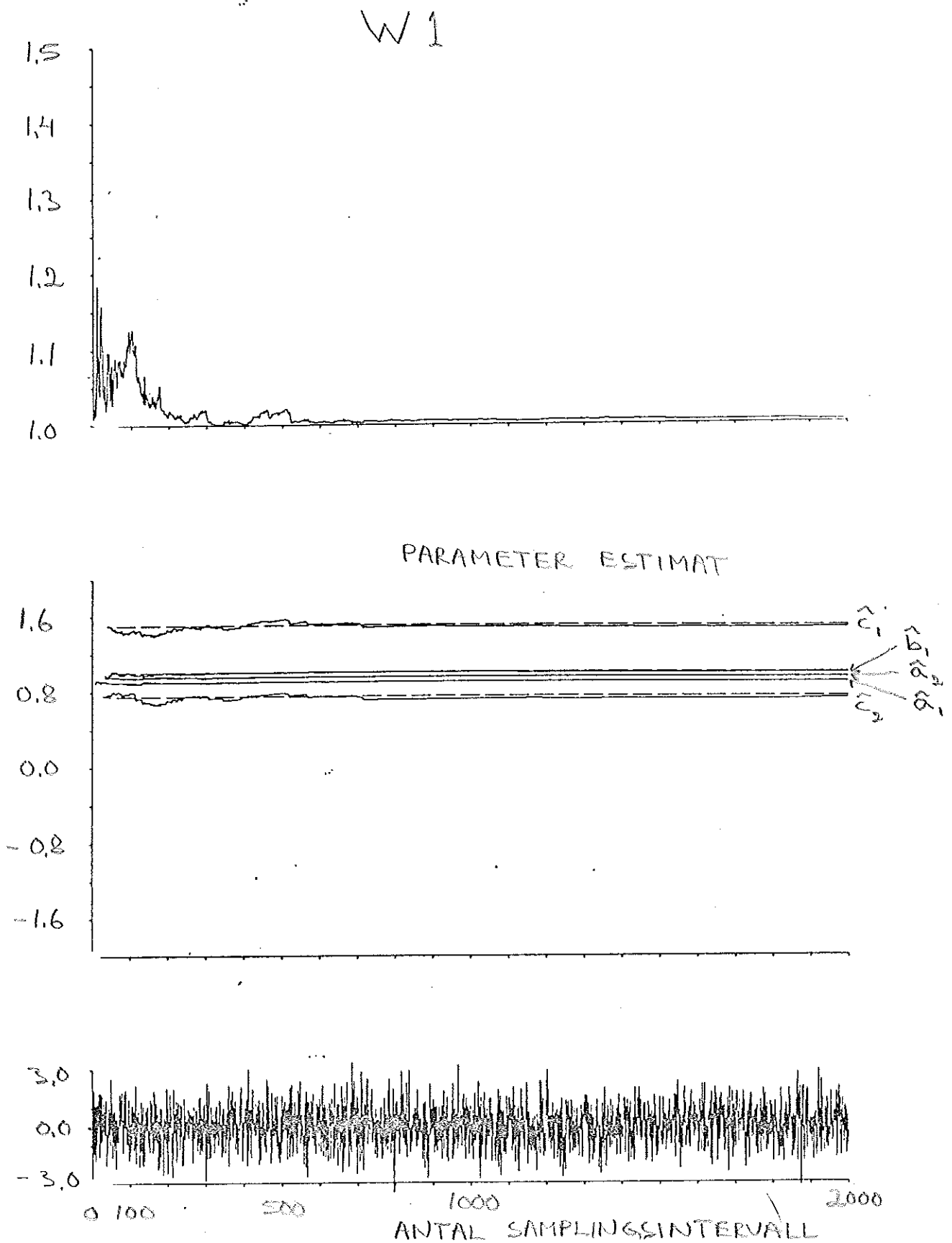
$$C = 1 + 1.5q^{-1} + 0.75q^{-2}$$

hörande A-matrisen för AML-metoden kan tänkas ha något positivt egenvärde. Vi beräknade således dess egenvärden och befann dem vara

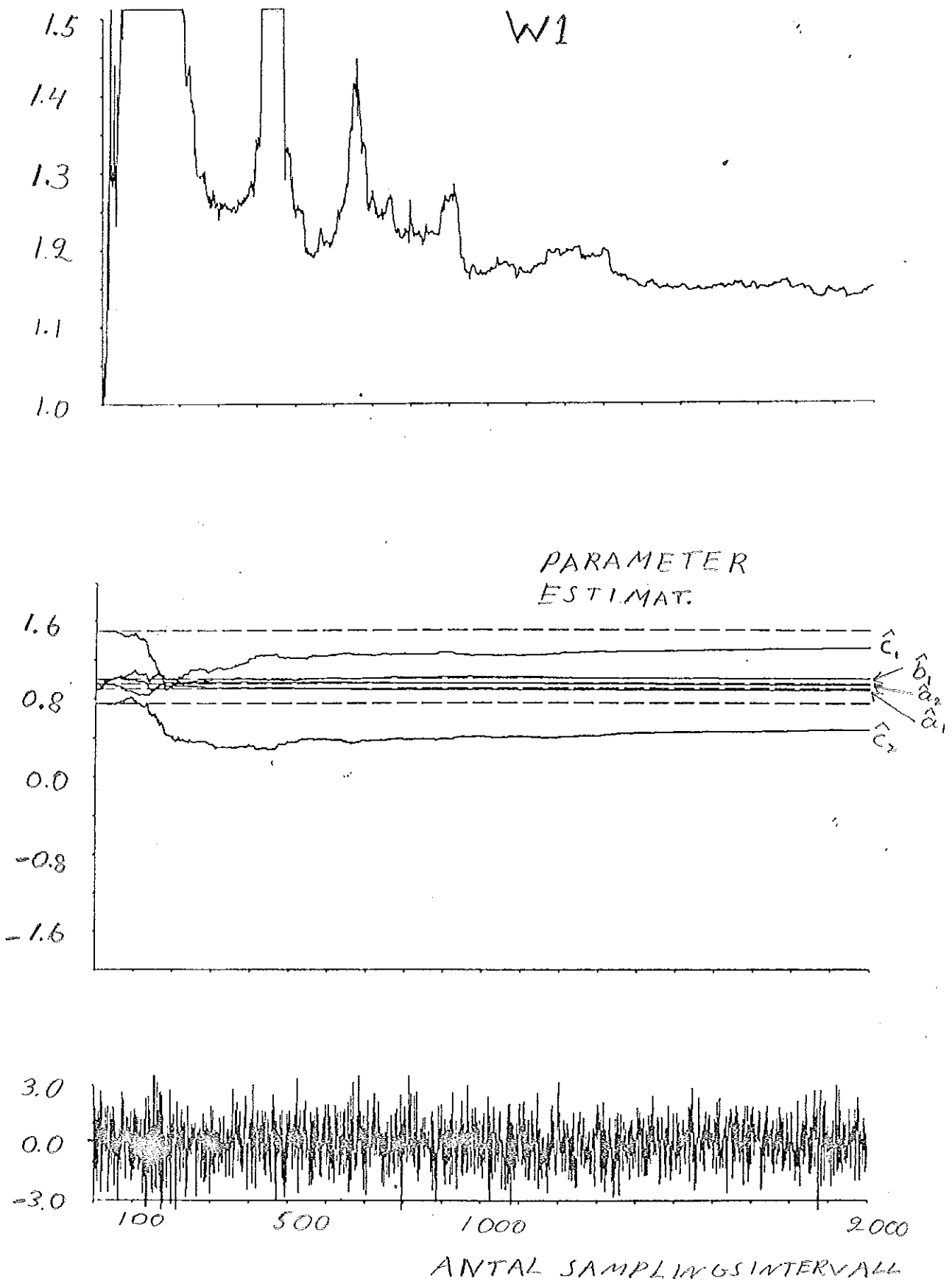
λ
$0.162 + i \cdot 1.383$
$0.162 - i \cdot 1.383$
-1.000
-1.000
-1.000

Detta innebär att den rekursiva AML-algoritmen för det ovanstående systemet inte ger värden som konvergerar mot de rätta parametervärdena.

För att belysa skillnaden mellan den rekursiva AML-metoden och den rekursiva MLE-metoden simulerades systemet med $\hat{\Theta}(0)$ satt till de riktiga parametervärdena. Se fig 17 och 18. För MLE-metoden blir förlustfunktionen liten och parameteruppskattningarna ligger nära de riktiga värdena. För AML-metoden ser man däremot att c-parametrarnas skattning dels avviker kraftigt från de riktiga värdena, dels tycks oscillera med stigande periodtid. Även förlustfunktionen blir därför stor.



Figur 17. Parameteruppskattningar och förlustfunktion för ett 2:a ordningens system m.h.a. MLE-algoritmen.



Figur 18. Parameteruppskattningar och förlustfunktion för ett 2:a ordningens system m.h.a. AML-algoritmen.

8. SLUTSUMMERING.

På grundval av resultaten från identifieringarna av de simulerade systemen kan således följande slutsatser dragas:

- Algoritmen baserad på LS-metoden ger resultat som avviker från de riktiga parametervärdena p.g.a. inverkan från bruset.
- Algoritmen baserad på IV-metoden ger bra uppskattningar av a- och b-parametrarna för 1:a ordningens system, men oftast mycket dåliga resultat för högre ordningstal.
- Algoritmerna baserade på ML-metoden ger båda bra parameteruppskattningar. För flertalet fall ger dock MLE-algoritmen bättre resultat än AML-algoritmen.
- Man kan finna system, för vilka inte AML-algoritmen konvergerar mot de rätta parametervärdena.

REFERENSER.

Elmqvist, H. (1973).

Simnon. User's Guide. Report 7325(C), Division of Automatic Control, Lund Institute of Technology.

Ljung, L. (1974).

Convergence of Recursive Stochastic Algorithms. Report 7403, Div. of Automatic Control, Lund Institute of Technology.

Ljung, L. (1974).

Stochastic Convergence of Algorithms for Identification and Adaptive Control. Report 7406, Div. of Automatic Control, Lund Institute of Technology.

Panuska, V. (1968).

A Stochastic Approximation Method for Identification of Linear Systems Using Adaptive Filtering. 1968 JACC, Ann Arbor, Michigan.

L. Ljung et al. (1974)

A Comparative Analysis of Recursive Identification Methods (preliminary title). Report to appear, Div. of Automatic Control, Lund Institute of Technology.

Söderström, T. (1973).

An On-Line Algorithm for Approximate Maximum Likelihood Identification of Linear Dynamic Systems. Report 7308, Div. of Automatic Control, Lund Institute of Technology.

Söderström, T. (1973).

Programs for Evaluation of Identified Models of Simulated Data. Report 7315(C), Div. of Automatic Control, Lund Institute of Technology.

Wieslander, J. (1969).

Real Time Identification - Part I. Report 6908, Div. of Automatic Control, Lund Institute of Technology.

Wong, K.Y. - Polak, E. (1967)

Identification of Linear Discrete Time Systems Using the Instrumental Variable Method, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-12, no 6, 707-718.

Young, P.C. (1970).

An Extension to the Instrumental Variable Method for Identification of a Noisy Dynamic Process. Univ. of Cambridge, Dep of Eng, Technical note CN/70/1.

Smets, A.J. (1970)

The Instrumental Variable Method and Related Identification Schemes. TH-Report 70-E-15, Dep of Electrical engineering, Eindhoven University of Technology Netherlands

APPENDIX A.

I appendix A återfinnes resultaten från identifieringarna med hjälp av LS-algoritmen.

Först en sammanställning av körningarna på följande 1:a ordningens system:

$$\begin{aligned} A &= 1 - 0.8q^{-1} \\ B &= 1.0q^{-1} \\ C &= 1 + 0.7q^{-1} \end{aligned}$$

Därefter en sammanställning av resultaten från följande 2:a ordningens system:

$$\begin{aligned} A &= 1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2} \\ B &= 1.0q^{-1} + 0.5q^{-2} \\ C &= 1 - 1.0q^{-1} + 0.2q^{-2} \end{aligned}$$

I detta appendix såväl som i följande betecknar VML förlustfunktionen W_1 som ges av programmet VML, MERRO förlustfunktionen W_2 som ges av programmet MERRO samt MVS förlustfunktionen W_3 som ges av programmet MVS.

Ibland finns endast en asterisk, *, i kolumnen MVS. Det innebär att för någon eller några av de 10 realiseringarna programmet MVS inte givit något resultat, varför något medelvärde inte har räknats ut.

METHOD: RTLS

TID: 100

PREBS	S/N	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	(VML-1) · 10 ⁴	MERRO	(MVS-1) · 10 ⁴	
VANTIS	1:1	1	-0.853				1.034					4689	0.594	4535	
		2	-1.299	0.438			1.025	-0.512				1900	0.442	1684	
		3	-1.437	0.859	-0.300		1.032	-0.646	0.336			1260	0.721	1144	
		4	-1.500	1.011	-0.540	0.149	1.026	-0.716	0.437	-0.179		1052	0.572	1071	
		5	-1.521	1.082	-0.665	0.339	1.029	-0.739	0.498	-0.252	0.088	1055	0.872	1262	
	10:1	1	-0.807				1.008						4903	0.538 · 10 ⁻¹	4900
		2	-1.284	0.397			1.008	-0.487					1655	0.560 · 10 ⁻¹	1653
		3	-1.431	0.847	-0.277		1.009	-0.635	0.337				1003	0.685 · 10 ⁻¹	964
		4	-1.496	1.006	-0.532	0.141	1.008	-0.701	0.445	-0.172			804	0.811 · 10 ⁻¹	752
		5	-1.517	1.078	-0.658	0.325	1.009	-0.722	0.502	-0.252	0.108		707	0.940 · 10 ⁻¹	682
	UTDRAGEN	1:1	1	-0.880				0.839					4945	0.339	2255
			2	-1.307	0.417			0.985	-0.472				3809	0.246	*
			3	-1.449	0.863	-0.312		1.079	-0.752	0.303			3613	0.542	*
			4	-1.494	0.979	-0.510	0.130	1.019	-0.772	0.407	-0.101		3910	0.577	*
			5	-1.507	1.037	-0.631	0.314	1.038	-0.778	0.460	-0.305	0.226	5205	0.791	*
10:1		1	-0.826				0.944						4715	0.338 · 10 ⁻¹	3932
		2	-1.293	0.394			1.006	-0.506					1868	0.286 · 10 ⁻¹	1858
		3	-1.445	0.847	-0.282		1.031	-0.628	0.305				1197	0.622 · 10 ⁻¹	1274
		4	-1.495	0.981	-0.511	0.129	1.015	-0.720	0.421	-0.165			1108	0.671 · 10 ⁻¹	1403
		5	-1.507	1.054	-0.623	0.310	1.012	-0.729	0.465	-0.265	0.141		1258	0.946 · 10 ⁻¹	2313

TID: 500

METHOD: RTLS

PRESS	S/N	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{b}_3	\hat{b}_4	\hat{b}_5	(VML-1) · 10 ⁴	MERRO	(MVS-1) · 10 ⁴
VANLIG	1	-0.859					1.004					4448	0.255	4169
	2	-1.297	0.422				1.005	-0.479				1563	0.605 · 10 ⁻¹	1362
	3	-1.427	0.802	-0.256			1.005	-0.610	0.308			718	0.695 · 10 ⁻¹	676
	4	-1.478	0.953	-0.512	0.164		1.005	-0.661	0.418	-0.191		400	0.444 · 10 ⁻¹	392
	5	-1.504	1.027	-0.652	0.365	-0.121	1.007	-0.687	0.471	-0.278	0.137	278	0.631 · 10 ⁻¹	282
UTDRASEN	1	-0.814					1.001					4732	0.103 · 10 ⁻¹	4718
	2	-1.287	0.394				1.002	-0.481				1600	0.454 · 10 ⁻²	1547
	3	-1.424	0.792	-0.237			1.001	-0.619	0.294			707	0.552 · 10 ⁻²	698
	4	-1.477	0.949	-0.515	0.154		1.002	-0.672	0.409	-0.188		367	0.435 · 10 ⁻²	362
	5	-1.503	1.025	-0.648	0.357	-0.109	1.002	-0.698	0.464	-0.278	0.134	242	0.590 · 10 ⁻²	237
UTDRASEN	1	-0.821					0.745					5146	0.206	1320
	2	-1.298	0.432				0.926	-0.376				2308	0.105	*
	3	-1.428	0.810	-0.266			0.995	-0.700	0.294			1331	0.136	2504
	4	-1.478	0.956	-0.525	0.170		0.964	-0.760	0.457	-0.114		1893	0.191	*
	5	-1.502	1.028	-0.652	0.364	-0.123	0.972	-0.767	0.512	-0.252	0.101	1980	0.182	*
UTDRASEN	1	-0.820					0.922					4737	0.770 · 10 ⁻¹	3749
	2	-1.286	0.396				0.979	-0.456				1657	0.926 · 10 ⁻²	1307
	3	-1.424	0.796	-0.243			0.997	-0.646	0.296			765	0.146 · 10 ⁻¹	938
	4	-1.477	0.951	-0.515	0.154		0.990	-0.704	0.423	-0.161		522	0.199 · 10 ⁻¹	937
	5	-1.502	1.026	-0.647	0.356	-0.110	0.991	-0.723	0.478	-0.267	0.126	416	0.183 · 10 ⁻¹	1123

METHOD: RTLS

TID: 2000

PRBS	S/N	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	(VML-1) $\cdot 10^4$	MERRO	(MUS-1) $\cdot 10^4$
VAN TIG	1	-0.851					0.998					4453	0.145	4197
	2	-1.286	0.413				0.995	-0.482				1528	$0.650 \cdot 10^{-1}$	1428
	3	-1.413	0.783	-0.247			0.996	-0.607	0.294			667	$0.319 \cdot 10^{-1}$	648
	4	-1.461	0.913	-0.496	0.154		0.997	-0.655	0.395	-0.180		329	$0.190 \cdot 10^{-1}$	318
	5	-1.484	0.992	-0.622	0.351	-0.118	0.997	-0.678	0.446	-0.265	0.139	178	$0.213 \cdot 10^{-1}$	176
10:1	1	-0.810					0.999					4770	$0.472 \cdot 10^{-2}$	4745
	2	-1.277	0.385				0.999	-0.475				1593	$0.354 \cdot 10^{-2}$	1573
	3	-1.410	0.773	-0.231			0.999	-0.608	0.286			678	$0.239 \cdot 10^{-2}$	675
	4	-1.460	0.919	-0.489	0.142		0.999	-0.658	0.392	-0.176		326	$0.209 \cdot 10^{-2}$	321
	5	-1.483	0.990	-0.618	0.345	-0.109	0.999	-0.681	0.444	-0.263	0.134	168	$0.245 \cdot 10^{-2}$	166
10:1	1	-0.866					0.809					4818	0.137	2008
	2	-1.290	0.425				0.951	-0.360				1870	$0.718 \cdot 10^{-1}$	*
	3	-1.414	0.786	-0.254			0.995	-0.596	0.228			988	$0.406 \cdot 10^{-1}$	*
	4	-1.461	0.924	-0.499	0.159		0.972	-0.646	0.376	-0.125		677	$0.362 \cdot 10^{-1}$	*
	5	-1.483	0.990	-0.622	0.352	-0.121	0.980	-0.664	0.429	-0.266	0.122	529	$0.370 \cdot 10^{-1}$	*
UTDRAGEN	1	-0.817					0.949					4724	$0.858 \cdot 10^{-2}$	4095
	2	-1.278	0.391				0.987	-0.446				1599	$0.547 \cdot 10^{-2}$	1285
	3	-1.410	0.775	-0.234			0.998	-0.605	0.268			705	$0.411 \cdot 10^{-2}$	587
	4	-1.459	0.918	-0.489	0.144		0.992	-0.654	0.385	-0.162		356	$0.357 \cdot 10^{-2}$	289
	5	-1.482	0.988	-0.617	0.345	-0.110	0.995	-0.676	0.437	-0.263	0.131	204	$0.385 \cdot 10^{-2}$	215

METOD: RTLS

TID: 100

PRBS	S/N	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	VML	MERRO	MNS	
VANLIG	1:1	2	-0.785	0.143			1.221	1.136				3.150	6.034	*	
		3	-0.680	-0.013	0.149		1.159	1.208	0.931			2.355	3.557	*	
		4	-0.606	0.001	0.059	0.096	1.167	1.170	1.044	0.767			2.250	2.690	*
		5	-0.595	0.027	0.074	0.034	0.068	1.172	1.310	1.095	0.828	0.267	2.213	2.165	*
UTDRAGEN	10:1	2	-1.218	0.443	0.		1.103	0.731				1.819	2.031	*	
		3	-0.860	-0.096	0.291		1.075	1.104	0.491			1.360	0.636	1.944	
		4	-0.695	-0.053	0.010	0.185	1.073	1.175	0.850	0.369			1.249	0.418	*
		5	-0.641	-0.004	0.037	0.002	0.142	1.066	1.339	1.013	0.610	0.145	1.238	0.283	*
UTDRAGEN	1:1	2	-0.657	0.109			1.390	2.480				7.354	8.262	*	
		3	-0.621	0.014	0.142		1.280	1.171	2.025			8.796	7.928	*	
		4	-0.585	0.016	0.071	0.119	1.161	1.273	0.952	1.748			10.008	8.684	*
		5	-0.580	0.026	0.087	0.086	0.060	1.159	1.301	1.005	0.775	1.371	11.077	8.759	*
UTDRAGEN	10:1	2	-0.856	0.209			1.294	1.831				3.359	4.330	*	
		3	-0.735	-0.040	0.212		1.205	1.191	1.241			2.610	2.309	*	
		4	-0.650	-0.023	0.033	0.168	1.106	1.327	0.911	0.910			2.381	1.506	*
		5	-0.617	0.003	0.055	0.058	0.107	1.065	1.358	1.042	0.676	0.674	2.365	1.224	*

TID: 500

METHOD: RTLS

PRBS	S/N	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	VML	MERRO	MVS	
VAN TIG	1:1	2	-0.798	0.140			1.045	1.292				2.610	4.821	*	
		3	-0.684	-0.057	0.187		1.034	1.409	1.050			1.780	2.343	*	
		4	-0.608	-0.033	0.031	0.165	1.038	1.476	1.581	1.581	0.619		1.443	1.278	*
		5	-0.570	-0.010	0.044	0.079	1.038	1.519	1.881	1.189	0.770	0.412	1.319	0.884	*
		2	-1.209	0.479			1.024	0.816					1.757	1.915	*
UTDRAGEN	10:1	3	-0.847	-0.129	0.321		1.019	1.811	0.477			1.273	0.474	1.273	
		4	-0.678	-0.081	-0.008	0.230	1.020	1.353	0.872	0.317		1.144	0.151	*	
		5	-0.604	-0.032	0.110	0.053	1.018	1.408	1.067	0.597	0.202		1.084	0.095	*
		2	-0.647	0.098			1.228	2.498					6.779	7.774	*
1055R	1:1	3	-0.611	-0.006	0.164		1.140	1.123	2.103			7.905	4.788	*	
		4	-0.576	-0.004	0.060	0.160	0.936	1.286	1.344	1.410		4.704	3.918	*	
		5	-0.557	0.005	0.064	0.097	0.870	1.248	1.558	0.991	0.846		5.094	3.788	*
		2	-0.828	0.199			1.255	1.847					3.313	4.476	*
10:1	10:1	3	-0.714	-0.055	0.228		1.139	1.219	1.315			2.102	2.059	*	
		4	-0.628	-0.040	0.029	0.193	1.007	1.356	1.087	0.844		1.672	0.968	*	
		5	-0.585	-0.017	0.038	0.074	0.976	1.364	1.211	0.768	0.522		1.561	0.652	*

METOD: RTLS TID: 2000

PRBS	S/N	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{b}_3	\hat{b}_4	\hat{b}_5	VML	MERRO	MVS	
VANLIG	1:1	2	-0.771	0.112			0.999	1.276				2.647	5.017	*	
		3	-0.668	-0.083	0.197		0.989	1.757	0.885			1.721	2.212	*	
		4	-0.591	-0.067	0.052	0.159	0.991	1.445	1.068	0.621	1.360	0.977	1.360	1.035	*
		5	-0.550	-0.040	0.060	0.068	0.991	1.487	1.721	0.777	0.440	1.211	1.211	0.560	*
		2	-1.127	0.426				1.003	0.820				1.752	2.061	*
UTDRASEN	10:1	3	-0.834	-0.155	0.334		0.997	1.182	0.480			1.285	0.393	1.317	
		4	-0.661	-0.118	0.015	0.127	0.999	1.351	0.864	0.309	1.131	1.131	0.113	0.113	*
		5	-0.585	-0.067	0.027	0.042	0.999	1.479	1.062	0.602	0.200	1.062	1.062	0.050	1.066
		2	-0.615	0.079				1.276	2.616				6.646	6.646	*
		3	-0.589	-0.037	0.179			1.317	1.451	1.276			4.014	4.014	*
UTDRASEN	1:1	4	-0.553	-0.037	0.080	0.155	0.986	1.797	1.120	1.351	1.351	1.187	1.187	2.503	*
		5	-0.531	-0.020	0.080	0.091	0.991	1.679	1.190	0.617	0.976	1.351	1.351	4.021	*
		2	-0.810	0.190				1.286	1.975				3.973	4.585	*
		3	-0.695	-0.087	0.246			1.137	1.379	1.071	0.826		1.876	1.988	*
		4	-0.606	-0.076	0.049	0.190		1.033	1.476	1.012	0.826		1.447	0.840	*
5	-0.559	-0.047	0.053	0.067	0.131	0.976	1.510	1.143	0.440	0.976	1.597	0.425	0.425	*	

APPENDIX B.

I appendix B återfinnes resultaten från identifieringarna med hjälp av IV-algoritmen.

Först en sammanställning av körningarna på följande 1:a ordningens system:

$$\begin{aligned} A &= 1 - 0.8q^{-1} \\ B &= 1.0q^{-1} \\ C &= 1 + 0.7q^{-1} \end{aligned}$$

Därefter följer två körningar på systemet:

$$\begin{aligned} A &= 1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2} \\ B &= 1.0q^{-1} + 0.5q^{-2} \\ C &= 1 - 1.0q^{-1} + 0.2q^{-2} \end{aligned}$$

Den första är ett exempel på hur dåliga resultat som erhöles vid identifieringar av detta system, medan den andra är den körning som gav bäst resultat.

Slutligen kommer en körning på ett system med samma a- och b-parametrar som ovan men utan c-parametrar. I detta fallet erhålles mycket goda resultat.

METOD: IV TID: 100

PRBS	S/N	ND	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\beta}_i$	$(VMS-I) \cdot 10^4$	MERRO	$(MVS-I) \cdot 10^4$
V R N L I G		2	-0.779	1.014	6048	0.357	5373
	1:1	4	-0.785	1.017	5098	0.291	5294
		6	-0.820	1.021	6438	0.527	4977
		2	-0.796	1.007	5067	$0.504 \cdot 10^{-1}$	5031
	10:1	4	-0.797	1.007	5044	$0.465 \cdot 10^{-1}$	5019
		6	-0.798	1.007	5034	$0.464 \cdot 10^{-1}$	5012
U T D R A S E N		2	-0.810	0.957	5198	0.151	4286
	1:1	4	-0.808	0.963	5165	0.110	4382
		6	-0.788	1.002	5686	0.136	5147
		2	-0.808	0.981	4885	$0.188 \cdot 10^{-1}$	4582
	10:1	4	-0.808	0.981	4890	$0.190 \cdot 10^{-1}$	4588
		6	-0.807	0.983	4898	$0.184 \cdot 10^{-1}$	4614

METOD: IV TID: 500

PRBS	S/N	ND	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$(NMLI) \cdot 10^4$	MERRO	$(MUS-1) \cdot 10^4$	
VAN TIG	1:1	2	-0.810	1.000	4812	$0.162 \cdot 10^{-1}$	4765	
		4	-0.810	1.000	4808	$0.144 \cdot 10^{-1}$	4765	
		6	-0.812	0.994	5375	$0.150 \cdot 10^{-1}$	4676	
	10:1	2	-0.805	1.000	4846	$0.323 \cdot 10^{-2}$	4837	
		4	-0.805	1.000	4844	$0.316 \cdot 10^{-2}$	4836	
		6	-0.805	1.000	4843	$0.302 \cdot 10^{-2}$	4835	
	UTDRASER	1:1	2	-0.800	0.926	5061	$0.501 \cdot 10^{-1}$	4062
			4	-0.799	0.927	5064	$0.494 \cdot 10^{-1}$	4073
			6	-0.797	0.933	5101	$0.504 \cdot 10^{-1}$	4165
10:1		2	-0.802	0.972	4898	$0.623 \cdot 10^{-2}$	4553	
		4	-0.802	0.972	4900	$0.641 \cdot 10^{-2}$	4555	
		6	-0.802	0.973	4906	$0.651 \cdot 10^{-2}$	4572	

METOD: IV TID: 2000

PRBS	S/N	ND	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$(\text{VML}) \cdot 10^4$	MERRO	$(\text{MNS}) \cdot 10^4$
VAN TIG		2	-0.802	0.994	4895	$0.566 \cdot 10^{-2}$	4818
		4	-0.802	0.994	4894	$0.539 \cdot 10^{-2}$	4818
		6	-0.800	0.994	4915	$0.654 \cdot 10^{-2}$	4834
		2	-0.801	0.998	4885	$0.994 \cdot 10^{-3}$	4863
		4	-0.801	0.998	4884	$0.975 \cdot 10^{-3}$	4862
		6	-0.801	0.998	4884	$0.959 \cdot 10^{-3}$	4862
UTDRASEN		2	-0.799	0.991	4979	$0.132 \cdot 10^{-1}$	4810
		4	-0.799	0.991	4979	$0.132 \cdot 10^{-1}$	4808
		6	-0.798	0.992	4988	$0.134 \cdot 10^{-1}$	4831
		2	-0.800	0.995	4903	$0.160 \cdot 10^{-2}$	4836
		4	-0.800	0.995	4903	$0.161 \cdot 10^{-2}$	4836
		6	-0.800	0.995	4904	$0.161 \cdot 10^{-2}$	4839

STATISTICS OF TEN REALISATIONS
PTIVM2 IS USED

THE INITIAL VALUE OF THE INVERSE OF THE MATRIX
OF THE SECOND ORDER DERIVATES IS 100.00000 * THE UNIT MATRIX
NOISE VARIANCE IS 1.00000
USUAL PROB. SIGNAL/NOISE IS EQUAL TO 1 : 1
THE WEIGHTING FACTOR $PL(T+1) = RL(T) + DR(1 - RL(T))$
 $RL(0) = 1.00000$ $DR = .00000$ WAS USED
THE MODEL IS DELAYED 2 STEPS BEFORE IT IS USED FOR COMPUTATION
THE STARTING VALUE OF $IE=1$ WHEN CALLING SIMUL

EXPLANATIONS:

-DEVIATION- ARE ESTIMATES OF THE DEVIATION BETWEEN
THE PARAMETER ESTIMATES AND THE CORRECT PARAMETER VALUES
VML = VARIANCE OF THE RESIDUALS
MERPO = DETERMINISTIC MODEL ERROR
MVS = VARIANCE OF THE OUTPUT WHEN A MINIMUM VARIANCE STRATEGY
BASED ON THE MODEL IS USED

TIME = 100

PARAMETER	THEOR. VALUE	MEAN VALUE	DEVIATION
A1	-1.5000	-4.4470	8.9993
A2	.70000	3.5302	8.5817
B1	1.0000	.59296	1.4346
B2	.50000	-3.4265	11.513
C1	-1.0000		
C2	.20000		
VML	1.0400	348.70	
MERPO	.00000	697.73	
MVS	1.0000	*	

TIME = 500

PARAMETER	THEOR. VALUE	MEAN VALUE	DEVIATION
A1	-1.5000	-4.5458	10.464
A2	.70000	3.0697	8.4546
B1	1.0000	.82734	2.6319
B2	.50000	-2.7255	11.693
C1	-1.0000		
C2	.20000		
VML	1.0080	458.14	
MERPO	.00000	155.10	
MVS	1.0000	*	

TIME = 2000

PARAMETER	THEOR. VALUE	MEAN VALUE	DEVIATION
A1	-1.5000	36.541	115.23
A2	.70000	-29.019	89.972
B1	1.0000	3.3743	7.8280
B2	.50000	33.577	99.733
C1	-1.0000		
C2	.20000		
VML	1.0020	*	
MERPO	.00000	13188.	
MVS	1.0000	*	

STATISTICS OF TEN REALISATIONS
PTIVM2 IS USED

THE INITIAL VALUE OF THE INVERSE OF THE MATRIX
OF THE SECOND ORDER DERIVATES IS 100.00000 * THE UNIT MATRIX
NOISE VARIANCE IS 1.00000
USUAL PRBS SIGNAL/NOISE IS EQUAL TO 10 : 1
THE WEIGHTING FACTOR $RL(T+1) = RL(T) + DR(1 - RL(T))$
 $RL(0) = 1.00000$ $DR = .00000$ WAS USED
THE MODEL IS DELAYED 6 STEPS BEFORE IT IS USED FOR COMPUTATION
THE STARTING VALUE OF $IE=1$ WHEN CALLING SIMUL

EXPLANATIONS:

-DEVIATION- ARE ESTIMATES OF THE DEVIATION BETWEEN
THE PARAMETER ESTIMATES AND THE CORRECT PARAMETER VALUES
VML = VARIANCE OF THE RESIDUALS
MERRO = DETERMINISTIC MODEL ERROR
MVS = VARIANCE OF THE OUTPUT WHEN A MINIMUM VARIANCE STRATEGY
BASED ON THE MODEL IS USED

TIME = 100

PARAMETER	THEOR. VALUE	MEAN VALUE	DEVIATION
A1	-1.5000	-1.5412	.50517
A2	.70000	.75620	.60926
B1	1.0000	1.1045	.17454
B2	.50000	.28459	.80409
C1	-1.0000		
C2	.20000		
VML	1.0400	4.1251	
MERRO	.00000	11.040	
MVS	1.0000	*	

TIME = 500

PARAMETER	THEOR. VALUE	MEAN VALUE	DEVIATION
A1	-1.5000	-1.6121	.14577
A2	.70000	.80127	.13375
B1	1.0000	1.0258	.61243-01
B2	.50000	.39992	.17105
C1	-1.0000		
C2	.20000		
VML	1.0080	2.3755	
MERRO	.00000	5.5001	
MVS	1.0000	2.8779	

TIME = 2000

PARAMETER	THEOR. VALUE	MEAN VALUE	DEVIATION
A1	-1.5000	-1.6672	.17837
A2	.70000	.84984	.16080
B1	1.0000	1.0007	.45157-01
B2	.50000	.34582	.17008
C1	-1.0000		
C2	.20000		
VML	1.0020	2.5301	
MERRO	.00000	13.150	
MVS	1.0000	2.9912	

STATISTICS OF TEN REALISATIONS
RTVM2 IS USED

THE INITIAL VALUE OF THE INVERSE OF THE MATRIX
OF THE SECOND ORDER DERIVATES IS 100.0000 * THE UNIT MATRIX
NOISE VARIANCE IS 1.00000
USUAL PPRS. SIGNAL/NOISE IS EQUAL TO 10 : 1
THE WEIGHTING FACTOR $RL(T+1)=RL(T)+DR(1-RL(T))$
 $RL(0)=1.00000$ $DR=.00000$ WAS USED
THE MODEL IS DELAYED 6 STEPS BEFORE IT IS USED FOR COMPUTATION
THE STARTING VALUE OF $IE=1$ WHEN CALLING SIMUL

EXPLANATIONS:

-DEVIATION- ARE ESTIMATES OF THE DEVIATION BETWEEN
THE PARAMETER ESTIMATES AND THE CORRECT PARAMETER VALUES
VML = VARIANCE OF THE RESIDUALS
MERRO = DETERMINISTIC MODEL ERROR.
MVS = VARIANCE OF THE OUTPUT WHEN A MINIMUM VARIANCE STRATEGY
BASED ON THE MODEL IS USED

TIME = 100

PARAMETER	THEOR. VALUE	MEAN VALUE	DEVIATION
A1	-1.5000	-1.4779	.31330-01
A2	.70000	.68447	.31378-01
B1	1.0000	1.0265	.53044-01
B2	.50000	.51019	.62976-01
C1	.00000		
C2	.00000		
VML	1.0400	1.0177	
MERRO	.00000	.27141	
MVS	1.0000	1.0318	

TIME = 500

PARAMETER	THEOR. VALUE	MEAN VALUE	DEVIATION
A1	-1.5000	-1.5012	.95395-02
A2	.70000	.70220	.97818-02
B1	1.0000	1.0042	.19226-01
B2	.50000	.51087	.24114-01
C1	.00000		
C2	.00000		
VML	1.0080	1.0017	
MERRO	.00000	.29478-01	
MVS	1.0000	1.0049	

TIME = 2000

PARAMETER	THEOR. VALUE	MEAN VALUE	DEVIATION
A1	-1.5000	-1.5003	.77527-02
A2	.70000	.70031	.77300-02
B1	1.0000	.99774	.86021-02
B2	.50000	.50375	.17757-01
C1	.00000		
C2	.00000		
VML	1.0020	1.0008	
MERRO	.00000	.11524-01	
MVS	1.0000	1.0018	

APPENDIX C.

I appendix C återfinnes resultaten från identifieringarna med hjälp av AML-algoritmen.

Först en sammanställning av körningarna på följande 1:a ordningens system:

$$A = 1 - 0.8q^{-1}$$

$$B = 1.0q^{-1}$$

$$C = 1 + 0.7q^{-1}$$

Därefter en sammanställning av resultaten från följande 2:a ordningens system:

$$A = 1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}$$

$$B = 1.0q^{-1} + 0.5q^{-2}$$

$$C = 1 - 1.0q^{-1} + 0.2q^{-2}$$

METOD: AML

TID: 100

PRBS	S/N	$\lambda(\sigma)$	DR	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\epsilon}_1$	(VML-1) · 10 ⁴	MERRO	(MVS-1) · 10 ⁴
VANLIG	1:1	0.95		-0.788	1.038	0.636	530	0.228	717
		0.99	0.01	-0.788	1.031	0.498	1091	0.331	1043
		0.999		-0.787	1.027	0.465	1300	0.362	1221
		0.95		-0.786	1.036	0.693	645	0.180	1472
		0.99	0.001	-0.787	1.032	0.517	1004	0.316	971
		0.999		-0.787	1.027	0.466	1291	0.360	1213
	1.00	0.00	-0.787	1.027	0.461	1326	0.365	1243	
	10:1	0.95		-0.791	1.011	0.630	253	0.336 · 10 ⁻¹	262
		0.99	0.01	-0.789	1.007	0.427	1073	0.461 · 10 ⁻¹	1086
		0.999		-0.789	1.006	0.374	1414	0.498 · 10 ⁻¹	1417
		0.95		-0.792	1.011	0.686	418	0.263 · 10 ⁻¹	359
		0.99	0.001	-0.789	1.008	0.451	937	0.436 · 10 ⁻¹	954
0.999			-0.789	1.006	0.377	1399	0.495 · 10 ⁻¹	1403	
1.00	0.00	-0.789	1.006	0.369	1454	0.502 · 10 ⁻¹	1456		
UTDRASEN	1:1	0.95		-0.820	0.974	0.637	878	0.948 · 10 ⁻¹	*
		0.99	0.01	-0.828	0.911	0.538	1098	0.107	*
		0.999		-0.830	0.896	0.513	1256	0.119	*
		0.95		-0.816	1.021	0.688	1173	0.110	*
		0.99	0.001	-0.827	0.921	0.552	1019	0.990 · 10 ⁻¹	*
		0.999		-0.830	0.897	0.514	1247	0.118	*
	1.00	0.00	-0.830	0.894	0.510	1276	0.121	*	
	10:1	0.95		-0.809	0.980	0.661	319	0.185 · 10 ⁻¹	355
		0.99	0.01	-0.811	0.948	0.557	540	0.269 · 10 ⁻¹	358
		0.999		-0.812	0.940	0.527	674	0.312 · 10 ⁻¹	445
		0.95		-0.808	0.998	0.698	572	0.225 · 10 ⁻¹	1229
		0.99	0.001	-0.811	0.953	0.572	487	0.250 · 10 ⁻¹	322
0.999			-0.812	0.940	0.528	667	0.309 · 10 ⁻¹	440	
1.00	0.00	-0.812	0.939	0.523	690	0.317 · 10 ⁻¹	454		

TID: 500

METOD: AML

PRBS	S/N	$\lambda(\omega)$	DR	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	\hat{c}_1	$(NML-1) \cdot 10^4$	MERRO	$(MUS-1) \cdot 10^4$	
VAN TIG	1:1	0.95		-0.808	1.001	0.688	80	$0.110 \cdot 10^{-1}$	108	
		0.99	0.01	-0.807	1.003	0.638	148	$0.237 \cdot 10^{-1}$	113	
		0.999		-0.806	1.005	0.602	279	$0.382 \cdot 10^{-1}$	230	
		0.95		-0.810	0.974	0.634	723	$0.467 \cdot 10^{-1}$	639	
		0.99	0.001	-0.806	0.998	0.674	135	$0.100 \cdot 10^{-1}$	172	
		0.999		-0.806	1.004	0.609	248	$0.323 \cdot 10^{-1}$	201	
			1.00	0.00	-0.806	1.005	0.597	299	248	
	10:1		0.95		-0.804	1.000	0.694	42	$0.268 \cdot 10^{-2}$	40
			0.99	0.01	-0.802	1.001	0.637	81	$0.374 \cdot 10^{-2}$	70
			0.999		-0.801	1.001	0.586	214	$0.527 \cdot 10^{-2}$	202
			0.95		-0.807	0.993	0.638	759	$0.140 \cdot 10^{-1}$	898
			0.99	0.001	-0.803	1.000	0.678	81	$0.293 \cdot 10^{-2}$	73
		0.999		-0.801	1.001	0.596	181	$0.461 \cdot 10^{-2}$	171	
		1.00	0.00	-0.800	1.001	0.579	237	$0.550 \cdot 10^{-2}$	227	
UTDRASEN	1:1	0.95		-0.801	0.928	0.700	358	$0.486 \cdot 10^{-1}$	*	
		0.99	0.01	-0.805	0.919	0.667	321	$0.486 \cdot 10^{-1}$	*	
		0.999		-0.809	0.910	0.638	417	$0.548 \cdot 10^{-1}$	*	
		0.95		-0.796	0.882	0.697	*	0.335	*	
		0.99	0.001	-0.801	0.920	0.688	603	$0.782 \cdot 10^{-1}$	*	
		0.999		-0.808	0.911	0.644	404	$0.542 \cdot 10^{-1}$	*	
			1.00	0.00	-0.809	0.908	0.634	444	$0.558 \cdot 10^{-1}$	*
	10:1		0.95		-0.801	0.975	0.701	122	$0.722 \cdot 10^{-2}$	466
			0.99	0.01	-0.803	0.968	0.680	79	$0.746 \cdot 10^{-2}$	247
			0.999		-0.804	0.961	0.655	109	$0.928 \cdot 10^{-2}$	210
			0.95		-0.807	0.952	0.648	6312	$0.402 \cdot 10^{-1}$	*
			0.99	0.001	-0.803	0.967	0.689	202	$0.106 \cdot 10^{-1}$	828
		0.999		-0.804	0.962	0.660	102	$0.888 \cdot 10^{-2}$	226	
		1.00	0.00	-0.804	0.961	0.652	116	$0.957 \cdot 10^{-2}$	208	

METOD: AML

TID: 2000

PRBS	S/N	$\lambda(\alpha)$	AR	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	\hat{c}_1	(NML-1) · 10 ⁴	MERRO	(MNS-1) · 10 ⁴
VANLIG	1:1	0.95		-0.802	0.995	0.690	26	0.535 · 10 ⁻²	26
		0.99	0.01	-0.802	0.996	0.675	42	0.618 · 10 ⁻²	32
		0.999		-0.801	0.997	0.658	78	0.886 · 10 ⁻²	58
		0.95	0.001	-0.803	1.002	0.691	175	0.172 · 10 ⁻¹	201
		0.99		-0.799	0.997	0.704	47	0.540 · 10 ⁻²	59
	10:1	0.999		-0.800	0.996	0.671	51	0.670 · 10 ⁻²	38
		1.00	0.00	-0.801	0.997	0.656	84	0.933 · 10 ⁻²	64
		0.95		-0.802	0.998	0.691	18	0.111 · 10 ⁻²	17
		0.99	0.01	-0.801	0.999	0.676	20	0.131 · 10 ⁻²	17
		0.999		-0.800	0.999	0.656	42	0.166 · 10 ⁻²	37
UTDRASEN	1:1	0.95		-0.802	1.001	0.693	114	0.252 · 10 ⁻²	113
		0.99	0.001	-0.800	0.999	0.703	32	0.686 · 10 ⁻³	34
		0.999		-0.800	0.999	0.671	25	0.131 · 10 ⁻²	22
		1.00	0.00	-0.800	0.999	0.653	47	0.172 · 10 ⁻²	42
		0.95		-0.800	0.979	0.695	117	0.118 · 10 ⁻¹	494
	10:1	0.99	0.01	-0.801	0.973	0.687	113	0.124 · 10 ⁻¹	382
		0.999		-0.802	0.967	0.675	137	0.143 · 10 ⁻¹	453
		0.95	0.001	-0.791	0.989	0.697	600	0.716 · 10 ⁻¹	*
		0.99		-0.796	1.016	0.708	146	0.163 · 10 ⁻¹	1074
		0.999		-0.801	0.978	0.685	117	0.121 · 10 ⁻¹	459
10:1	1.00	0.00	-0.802	0.967	0.673	142	0.147 · 10 ⁻¹	467	
	0.95		-0.800	0.992	0.694	35	0.150 · 10 ⁻²	37	
	0.99	0.01	-0.801	0.988	0.690	31	0.176 · 10 ⁻²	37	
	0.999		-0.802	0.985	0.682	35	0.221 · 10 ⁻²	38	
	0.95	0.001	-0.797	0.999	0.694	165	0.806 · 10 ⁻²	288	
10:1	0.99		-0.799	1.005	0.706	47	0.202 · 10 ⁻²	48	
	0.999		-0.801	0.989	0.688	31	0.169 · 10 ⁻²	34	
	1.00	0.00	-0.802	0.984	0.680	36	0.229 · 10 ⁻²	39	

METOD: AML TID: 100

PRBS	SIN	$\lambda(0)$	DR	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\epsilon}_1$	$\hat{\epsilon}_2$	VML	MERRO	MUS
VAN T I S	1:1	0.95	0.01	-1.015	0.325	1.258	0.692	-0.288	0.033	2.995	5.764	*
		0.99	0.01	-0.900	0.228	1.244	0.968	-0.145	0.013	2.908	5.530	*
	10:1	0.95	0.01	-1.384	0.589	1.099	0.499	-0.530	-0.060	1.860	1.225	*
		0.99	0.01	-1.375	0.586	1.098	0.558	-0.572	-0.050	1.432	0.914	*
DTORSEN	1:1	0.95	0.01	-0.682	0.166	1.452	2.835	-0.026	0.073	10.06	11.56	*
		0.99	0.01	-0.637	0.111	1.367	2.651	0.019	0.033	7.911	8.694	*
	10:1	0.95	0.01	-1.058	0.356	1.309	1.522	-0.220	0.069	3.122	3.932	*
		0.99	0.01	-0.964	0.292	1.262	1.616	-0.133	0.040	3.051	3.925	*

METOD: AML TID: 500

PRBS	S/N	$\lambda(\omega)$	DR	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\epsilon}_1$	$\hat{\epsilon}_2$	VML	MERRO	MVS	
VAN TIG	1:1	0.95	0.01	-1.396	0.600	1.008	0.667	-0.784	0.049	1.6192	1.832	*	
		0.99	0.01	-1.186	0.434	1.033	0.862	-0.475	0.019	1.7143	2.361	*	
	10:1	0.95	0.01	-1.488	0.686	1.006	0.535	-0.865	0.043	1.0868	0.199	1.0602	
		0.99	0.01	-1.452	0.652	1.015	0.565	-0.701	-0.046	1.1676	0.325	*	
	UTDRSEN	1:1	0.95	0.01	-1.190	0.460	1.159	1.053	-0.584	0.051	4.574	5.431	*
			0.99	0.01	-0.761	0.206	1.185	2.395	-0.126	0.067	6.786	7.546	*
10:1		0.95	0.01	-1.371	0.589	1.115	0.620	-0.702	0.044	1.5797	1.743	*	
		0.99	0.01	-1.129	0.417	1.167	1.183	-0.372	0.021	2.199	2.537	*	

METHOD: AML TID: 2000

PRBS	S/N	$\lambda(\sigma)$	DR	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{c}_1	\hat{c}_2	VML	MERRO	MVS	
VAN TIG	1:1	0.95	0.01	-1.460	0.658	0.975	0.581	-0.917	0.136	1.0985	0.312	*	
		0.99	0.01	-1.333	0.548	0.983	0.698	-0.719	0.066	1.3841	1.248	*	
	10:1	0.95	0.01	-1.490	0.689	0.992	0.521	-0.951	0.137	1.0179	$0.374 \cdot 10^{-1}$	1.0089	
		0.99	0.01	-1.462	0.661	0.994	0.545	-0.832	0.047	1.0851	0.199	*	
	UTDRASEN	1:1	0.95	0.01	-1.369	0.607	1.054	0.805	-0.821	0.147	1.7184	1.203	*
			0.99	0.01	-1.063	0.403	1.157	1.608	0.470	0.104	3.380	4.033	*
10:1		0.95	0.01	-1.452	0.662	1.050	0.557	-0.880	0.126	1.1062	0.268	*	
		0.99	0.01	-1.271	0.528	1.141	0.920	-0.603	0.072	1.7175	1.597	*	

APPENDIX D.

I appendix D återfinnes resultaten från identifieringarna med hjälp av MLE-algoritmen.

Först en sammanställning av körningarna på följande 1:a ordningens system:

$$A = 1 - 0.7q^{-1}$$

$$B = 1.0q^{-1}$$

$$C = 1 + 0.7q^{-1}$$

Därefter en sammanställning av resultaten från följande 2:a ordningens system:

$$A = 1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}$$

$$B = 1.0q^{-1} + 0.5q^{-2}$$

$$C = 1 - 1.0q^{-1} + 0.2q^{-2}$$

METOD: MLE TID: 100

PRBS	S/N	$\lambda(\phi)$	DR	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	\hat{c}_1	$(VML-1) \cdot 10^4$	MERRO	$(MVS-1) \cdot 10^4$	
VANLIG	1:1	0.95		-0.795	1.022	0.655	338	0.215	343	
		0.99	0.01	-0.787	1.020	0.582	939	0.359	1050	
		0.999		-0.785	1.021	0.551	1047	0.377	1067	
		0.95		-0.798	1.029	0.661	338	0.166	388	
	10:1	0.99	0.001	-0.787	1.020	0.596	871	0.319	1641	
		0.999		-0.785	1.021	0.553	1042	0.375	1068	
		1.00	0.00	-0.785	1.021	0.548	1058	0.382	1068	
		0.95		-0.795	1.004	0.655	159	0.265 · 10 ⁻¹	179	
	UTDRAGEN	1:1	0.99	0.01	-0.792	1.002	0.492	699	0.326 · 10 ⁻¹	684
			0.999		-0.792	1.001	0.440	993	0.341 · 10 ⁻¹	968
			0.95		-0.797	1.008	0.674	164	0.212 · 10 ⁻¹	172
			0.99	0.001	-0.792	1.002	0.515	582	0.310 · 10 ⁻¹	573
10:1		0.999		-0.792	1.001	0.442	980	0.340 · 10 ⁻¹	956	
		1.00	0.00	-0.792	1.001	0.434	1029	0.343 · 10 ⁻¹	1002	
		0.95		-0.817	1.017	0.644	671	0.136	*	
		0.99	0.01	-0.825	0.913	0.568	818	0.136	*	
1:1		0.999		-0.827	0.887	0.544	1059	0.162	*	
		0.95		-0.808	1.086	0.676	1058	0.263	*	
		0.99	0.001	-0.824	0.928	0.582	711	0.122	*	
		0.999		-0.827	0.889	0.545	1044	0.160	*	
10:1	1.00	0.00	-0.827	0.884	0.541	1090	0.165	*		
	0.95		-0.808	0.997	0.655	273	0.198 · 10 ⁻¹	1708		
	0.99	0.01	-0.812	0.960	0.573	418	0.230 · 10 ⁻¹	200		
	0.999		-0.813	0.952	0.544	546	0.272 · 10 ⁻¹	251		
10:1	0.95		-0.807	1.017	0.681	388	0.414 · 10 ⁻¹	*		
	0.99	0.001	-0.812	0.965	0.587	372	0.213 · 10 ⁻¹	194		
	0.999		-0.813	0.952	0.545	540	0.269 · 10 ⁻¹	248		
	1.00	0.00	-0.813	0.951	0.541	562	0.277 · 10 ⁻¹	260		

METOD: MLE TID: 500

PRBS	S/N	$\lambda(\alpha)$	DR	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	\hat{c}_1	$(NML-1) \cdot 10^4$	MERRO	$(MNS-1) \cdot 10^4$
VAN TIG	1:1	0.95		-0.804	1.001	0.707	54	$0.123 \cdot 10^{-1}$	80
		0.99	0.01	-0.807	1.001	0.696	31	$0.142 \cdot 10^{-1}$	28
		0.999		-0.807	1.001	0.673	55	$0.249 \cdot 10^{-1}$	30
		0.95		-0.794	0.996	0.702	600	$0.487 \cdot 10^{-1}$	458
		0.99	0.001	-0.801	1.003	0.714	91	$0.145 \cdot 10^{-1}$	104
		0.999		-0.807	1.001	0.680	45	$0.201 \cdot 10^{-1}$	27
			1.00	0.00	-0.807	1.001	0.670	$0.268 \cdot 10^{-1}$	34
	10:1	0.95		-0.803	1.001	0.708	34	$0.407 \cdot 10^{-2}$	36
		0.99	0.01	-0.801	1.000	0.684	21	$0.219 \cdot 10^{-2}$	21
		0.999		-0.800	0.999	0.647	68	$0.266 \cdot 10^{-2}$	64
		0.95		-0.800	0.999	0.695	440	$0.176 \cdot 10^{-1}$	373
		0.99	0.001	-0.801	1.002	0.711	67	$0.581 \cdot 10^{-2}$	65
0.999			-0.800	0.999	0.657	51	$0.239 \cdot 10^{-2}$	48	
		1.00	0.00	-0.800	0.999	0.641	$0.278 \cdot 10^{-2}$	75	
UTDRASEN	1:1	0.95		-0.793	0.962	0.712	480	$0.663 \cdot 10^{-1}$	*
		0.99	0.01	-0.799	0.942	0.704	334	$0.577 \cdot 10^{-1}$	*
		0.999		-0.803	0.927	0.689	349	$0.649 \cdot 10^{-1}$	*
		0.95		-0.777	0.928	0.673	2675	0.455	*
		0.99	0.001	-0.791	0.962	0.714	879	0.119	*
		0.999		-0.802	0.932	0.694	360	$0.651 \cdot 10^{-1}$	*
			1.00	0.00	-0.803	0.925	0.687	$0.663 \cdot 10^{-1}$	*
	10:1	0.95		-0.798	0.988	0.710	116	$0.830 \cdot 10^{-2}$	353
		0.99	0.01	-0.801	0.981	0.705	78	$0.720 \cdot 10^{-2}$	260
		0.999		-0.802	0.974	0.690	77	$0.847 \cdot 10^{-2}$	266
		0.95		-0.800	0.977	0.668	561	$0.541 \cdot 10^{-1}$	*
		0.99	0.001	-0.799	0.986	0.712	187	$0.129 \cdot 10^{-1}$	849
0.999			-0.802	0.976	0.695	79	$0.828 \cdot 10^{-2}$	281	
		1.00	0.00	-0.803	0.973	0.688	$0.871 \cdot 10^{-2}$	272	

TID: 2000

METOD: MLE

PRBS	S/N	$\lambda(\hat{\theta})$	DR	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	\hat{c}_1	$(NML-1) \cdot 10^4$	MERRO	$(MUS-1) \cdot 10^4$	
VAN LIG	1:1	0.95		-0.800	0.997	0.695	17	$0.532 \cdot 10^{-2}$	16	
		0.99	0.01	-0.801	0.997	0.693	15	$0.532 \cdot 10^{-2}$	10	
		0.999		-0.802	0.998	0.689	16	$0.624 \cdot 10^{-2}$	9	
		0.95		-0.805	0.996	0.687	22	$0.276 \cdot 10^{-1}$	186	
		0.99	0.001	-0.801	0.996	0.698	17	$0.523 \cdot 10^{-2}$	24	
		0.999		-0.801	0.997	0.692	16	$0.553 \cdot 10^{-2}$	10	
			1.00	0.00	-0.802	0.998	0.689	17	$0.644 \cdot 10^{-2}$	9
	10:1		0.95		-0.801	0.999	0.694	11	$0.935 \cdot 10^{-3}$	10
			0.99	0.01	-0.800	0.999	0.690	11	$0.899 \cdot 10^{-3}$	9
			0.999		-0.800	0.999	0.683	15	$0.949 \cdot 10^{-3}$	13
			0.95		-0.803	0.999	0.688	33	$0.426 \cdot 10^{-2}$	43
			0.99	0.001	-0.801	0.999	0.698	8	$0.692 \cdot 10^{-3}$	9
		0.999		-0.800	0.999	0.688	12	$0.851 \cdot 10^{-3}$	10	
		1.00	0.00	-0.800	0.999	0.681	16	$0.965 \cdot 10^{-3}$	13	
DFRASEN	1:1	0.95		-0.799	0.992	0.694	102	$0.113 \cdot 10^{-1}$	221	
		0.99	0.01	-0.800	0.985	0.694	100	$0.119 \cdot 10^{-1}$	243	
		0.999		-0.801	0.980	0.691	108	$0.140 \cdot 10^{-1}$	303	
		0.95		-0.784	0.994	0.691	698	0.109	247	
		0.99	0.001	-0.796	1.015	0.698	123	$0.217 \cdot 10^{-1}$	226	
		0.999		-0.800	0.988	0.693	99	$0.121 \cdot 10^{-1}$	316	
			1.00	0.00	-0.802	0.979	0.691	110	$0.144 \cdot 10^{-1}$	28
	10:1		0.95		-0.800	0.996	0.693	23	$0.141 \cdot 10^{-2}$	31
			0.99	0.01	-0.801	0.994	0.693	22	$0.139 \cdot 10^{-2}$	33
			0.999		-0.801	0.992	0.691	24	$0.158 \cdot 10^{-2}$	110
			0.95		-0.794	1.002	0.688	91	$0.138 \cdot 10^{-1}$	25
			0.99	0.001	-0.798	1.006	0.698	23	$0.310 \cdot 10^{-2}$	26
		0.999		-0.801	0.995	0.693	22	$0.143 \cdot 10^{-2}$	34	
		1.00	0.00	-0.801	0.991	0.691	24	$0.162 \cdot 10^{-2}$		

METOD : MLE TID : 100

PREs	S/N	$\lambda(\omega)$	DR	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\epsilon}_1$	$\hat{\epsilon}_2$	VML	MERRO	MVS	
VANTIG	1:1	0.95	0.01	-0.888	0.299	1.135	0.790	-0.104	0.092	3.701	6.952	*	
		0.99	0.01	-0.708	0.182	1.065	0.868	-0.024	0.140	3.986	7.619	*	
	10:1	0.95	0.01	-1.265	0.482	1.037	0.588	-0.281	0.089	1.630	2.240	*	
		0.99	0.01	-1.088	0.323	1.039	0.700	0.025	0.183	2.119	4.146	*	
	JTDRASEN	1:1	0.95	0.01	-0.621	0.126	1.453	3.016	0.016	0.063	13.27	13.67	*
			0.99	0.01	-0.536	0.067	0.897	3.024	0.088	0.079	14.36	12.86	*
10:1		0.95	0.01	-0.983	0.315	1.307	1.690	-0.176	0.057	3.641	3.805	*	
		0.99	0.01	-0.844	0.194	0.978	2.229	-0.103	0.042	6.405	7.474	*	

METOD: MLE TID: 500

PRBS	S/N	$\lambda(\sigma)$	DR	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\epsilon}_1$	$\hat{\epsilon}_2$	VML	MERO	MNS
VAN T I G	1:1	0.95	0.01	-1.460	0.678	0.992	0.661	-0.888	0.149	1.1550	0.502	*
		0.99	0.01	-1.239	0.501	0.979	0.811	-0.565	0.102	1.5706	2.116	*
		0.95	0.01	-1.496	0.699	1.006	0.525	-0.891	0.101	1.0414	$0.540 \cdot 10^{-1}$	1.0593
	10:1	0.99	0.01	-1.339	0.556	0.990	0.600	-0.422	0.066	1.4112	1.411	*
		0.95	0.01	-1.261	0.537	0.893	1.284	-0.679	0.114	4.123	4.323	*
		0.99	0.01	-0.894	0.294	1.004	2.165	-0.279	0.107	5.560	6.191	*
UTDRAGEN	1:1	0.95	0.01	-1.484	0.687	0.919	0.611	-0.880	0.111	1.2105	0.319	*
		0.99	0.01	-1.116	0.412	1.003	1.415	-0.418	0.049	2.950	2.637	*
		0.95	0.01	-1.484	0.687	0.919	0.611	-0.880	0.111	1.2105	0.319	*
	10:1	0.99	0.01	-1.116	0.412	1.003	1.415	-0.418	0.049	2.950	2.637	*
		0.95	0.01	-1.484	0.687	0.919	0.611	-0.880	0.111	1.2105	0.319	*
		0.99	0.01	-1.116	0.412	1.003	1.415	-0.418	0.049	2.950	2.637	*

METOD: MLE TID: 2000

PRBS	S/N	$\lambda(\lambda)$	DR	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{c}_1	\hat{c}_2	VML	MERRO	MNS	
VAN TIG	1:1	0.95	0.01	-1.497	0.698	0.970	0.549	-0.980	0.182	1.0329	$0.871 \cdot 10^{-1}$	*	
		0.99	0.01	-1.455	0.662	0.965	0.607	-0.880	0.128	1.0792	0.218	*	
		0.95	0.01	-1.498	0.698	0.991	0.515	-0.973	0.172	1.0063	$0.997 \cdot 10^{-2}$	1.0043	
	10:1	0.99	0.01	-1.459	0.661	1.002	0.533	-0.724	0.061		1.1464	0.260	1.1134
		0.95	0.01	-1.494	0.695	0.989	0.512	-0.968	0.172		1.1086	0.232	*
		0.99	0.01	-1.333	0.593	1.013	1.001	-0.773	0.150		2.025	1.729	*
UTDRASER	1:1	0.95	0.01	-1.499	0.699	0.992	0.509	-0.975	0.176	1.0105	$0.231 \cdot 10^{-1}$	1.0097	
		0.99	0.01	-1.362	0.600	1.030	0.827	-0.749	0.104		1.5610	0.896	*
		0.95	0.01	-1.499	0.699	0.992	0.509	-0.975	0.176		1.0105	$0.231 \cdot 10^{-1}$	1.0097
	10:1	0.99	0.01	-1.362	0.600	1.030	0.827	-0.749	0.104		1.5610	0.896	*
		0.95	0.01	-1.499	0.699	0.992	0.509	-0.975	0.176		1.0105	$0.231 \cdot 10^{-1}$	1.0097
		0.99	0.01	-1.362	0.600	1.030	0.827	-0.749	0.104		1.5610	0.896	*

APPENDIX E.

I appendix E återfinnes resultaten från identifieringarna av ett 3:e ordningens system med hjälp av AML- och MLE-algoritmerna.

Det simulerade 3:e ordningens system hade följande utseende:

$$\begin{aligned}A &= 1 - 1.6q^{-1} + 1.61q^{-2} - 0.776q^{-3} \\B &= 1.2q^{-1} - 0.95q^{-2} + 0.2q^{-3} \\C &= 1 + 0.1q^{-1} + 0.25q^{-2} + 0.873q^{-3}\end{aligned}$$

METODER: AML OCH MLE TID: 100

PRBS	S/N	METOD	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{b}_3	\hat{c}_1	\hat{c}_2	\hat{c}_3	VML	MERRO	MNS	
VANLIG	1:1	AML	-1.655	1.607	-0.800	1.262	-1.057	0.137	0.088	0.017	0.232	1.6923	10.34	*	
		MLE	-1.565	1.464	-0.695	1.320	-0.955	0.095	0.133	-0.019	0.176	2.1401	16.56	*	
	10:1	AML	-1.645	1.640	-0.816	1.212	-1.021	0.188	0.100	0.051	0.280	1.4401	1.302	1.453	
		MLE	-1.556	1.571	-0.736	1.200	-0.933	0.187	0.142	0.147	0.252	1.5835	2.091	1.564	
	UTDRAGEN	1:1	AML	-1.637	1.481	-0.700	1.138	-1.013	0.154	0.061	0.045	0.274	2.5811	13.66	*
			MLE	-1.371	1.142	-0.528	1.106	-0.759	0.017	0.329	0.146	0.252	3.484	14.91	*
10:1		AML	-1.656	1.624	-0.806	1.201	-1.021	0.163	0.054	0.066	0.280	1.4561	5.943	1.397	
		MLE	-1.015	1.099	-0.367	1.093	-0.322	0.164	0.614	0.464	0.296	2.698	12.31	*	

METODER: AML OCH MLE TID: 500

PRBS	S/N	METOD	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\epsilon}_1$	$\hat{\epsilon}_2$	$\hat{\epsilon}_3$	VML	MERRO	MVS	
VAN TIG	1:1	AML	-1.594	1.599	1.199	-0.903	0.235	0.145	0.162	0.703	1.1712	1.157	*	
		MLE	-1.603	1.606	1.181	-0.960	0.204	0.110	0.172	0.713	1.1174	0.766	1.139	
	10:1	AML	-1.596	1.606	1.200	-0.932	0.213	0.141	0.170	0.720	1.1083	0.081	1.103	
		MLE	-1.597	1.608	1.195	-0.947	0.209	0.138	0.189	0.740	1.0680	0.028	1.070	
	DTDRÅSEN	1:1	AML	-1.594	1.583	1.185	-1.028	0.236	0.144	0.148	0.707	1.5383	4.527	*
			MLE	-1.596	1.599	1.187	-1.006	0.222	0.144	0.175	0.750	1.1564	1.174	*
10:1		AML	-1.599	1.606	1.196	-0.974	0.214	0.133	0.155	0.712	1.1573	0.465	*	
		MLE	-1.431	1.465	1.200	-0.758	0.211	0.361	0.282	0.647	1.3078	1.753	1.243	

METODER: AML OCH MLE TID: 2000

PREP	S/N	METOD	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\epsilon}_1$	$\hat{\epsilon}_2$	$\hat{\epsilon}_3$	VML	MERRO	MVS	
VANLIG	1:1	AML	-1.588	1.600	-0.764	1.188	-0.929	0.204	0.133	0.226	0.798	1.0604	0.236	*	
		MLE	-1.594	1.606	-0.770	1.193	-0.946	0.202	0.104	0.239	0.840	1.0224	0.038	1.0270	
	10:1	AML	-1.589	1.602	-0.766	1.197	-0.935	0.202	0.130	0.225	0.800	1.0365	0.025	1.0355	
		MLE	-1.594	1.609	-0.770	1.198	-0.944	0.200	0.107	0.244	0.851	1.0078	0.004	1.008	
	UTDRASSEN	1:1	AML	-1.587	1.594	-0.761	1.191	-0.938	0.189	0.129	0.224	0.801	1.1091	0.680	*
			MLE	-1.594	1.605	-0.770	1.205	-0.947	0.196	0.108	0.242	0.852	1.0209	0.048	1.023
10:1		AML	-1.594	1.605	-0.770	1.197	-0.947	0.198	0.120	0.218	0.793	1.0411	0.055	1.042	
		MLE	-1.496	1.516	-0.687	1.204	-0.818	0.201	0.251	0.307	0.790	1.1379	1.303	1.101	