

DIMENSIONERING AV SERVOSYSTEM
- en tillståndsmetod

EBBE ÅKERBERG

RE-148 Oktober 1974
Inst.för Reglerteknik
Lunds Tekniska Högskola

DIMENSIONERING AV SERVOSYSTEM

- en tillståndsmetod.

Ebbe Åkerberg

ABSTRACT

A method to design servo systems has been studied. The method uses linear quadratic control theory and control approximation and is meant to be an alternative to classical frequency methods. Dynamic compensators corresponding to phase advancing and phase retardation in classical design are used. An advantage of the method is that it is deirectly applicable to multivariable systems. The design method has been applied to four systems, three single-input single - output systems and one multivariable system.

SUMMERING

En metod att dimensionera servosystem har studerats. Metoden utnyttjar linjärkvadratisk optimeringsteori och styrlagsapproximation och avser att utgöra ett alternativ till klassiska frekvensmetoder. Dynamiska kompensatorer motsvarande fasavancerande och fasretarderande kompensering i klassisk syntes används. En fördel med metoden är att den är direkt applicerbar på fler-variabla system. Metoden har applicerats på fyra olika system varav tre har en insignal och utsignal och ett är flervariabelt.

<u>INNEHÅLL</u>	Sida
1. INLEDNING	1
2. FÖRBEREDANDE TEORI	2
2.1. Modell	2
2.2. Approximation	3
2.3. Kompensering	5
3. SYNTESMETOD	8
3.1. Fasavancering	8
3.2. Fasretarding	11
3.3. Fasretarderande och fasavancerande kompensering	14
4. FASAVANCERANDE KOMPENSERING	15
5. FASRETARDERANDE OCH FASAVANCERANDE KOMPENSERING	25
6. FLERVARIABELT SYSTEM	30
7. REFERENSER	35

1. INLEDNING

Vid syntes av linjära system är linjärkvadratisk optimering och polplaceringsteori välkända metoder. Ofta är emellertid hela tillståndsvektorn ej direkt mätbar. Även om så vore fallet, skulle en tillståndsåterkoppling ibland resultera i alltför komplicerade regulatorsystem. Ett vanligt sätt att övervinna dessa svårigheter är att mäta ett begränsat antal utsignaler och rekonstruera den fullständiga tillståndsvektorn med hjälp av t.ex. Kalmanfilter. Resultatet blir emellertid fortfarande otillfredsställande eftersom rekonstruktionen i sig kan ge upphov till dynamik av hög ordning i regulatorn.

I detta arbete skall vi studera en metod för syntes av servo. Vi förutsätter linjära tidsinvarianta system och använder en systemmodell på tillståndsform.

Med hjälp av linjärkvadratisk optimering bestäms först en tillståndsåterkoppling sådan att de givna specifikationerna blir uppfyllda. Denna återkoppling reduceras sedan till en liknande återkoppling med en viss given struktur, t.ex. konstant återkoppling från utsignalen.

Genom att introducera dynamiska kompensatorer kan det återkopplade systemets egenskaper förbättras. Dynamisk kompensering motsvarande fasretarderande kompensatorer införes för att minska hastighets- och lägesfel. Vidare införes en fasavancerande kompensator för att erhålla mer information om systemets tillståndsvektor.

En fördel med denna syntesmetod är att den är applicerbar på flervariabla system.

För syntesen har ett interaktivt syntes och simuleringsprogram SYNPAK använts. Metoden har applicerats på fyra olika system. I exempel 1. och 2. inför vi dynamiska kompensatorer av deriverande karaktär. Vi visar att vi på detta sätt kan åstadkomma en fasavancerande kompenseringsslänk liknande den som erhålles i klassisk syntes med Bode-Nichols diagram. I exempel 3. dimensioneras en fasavancerande- fasretarderande kompensator. I det sista exemplet behandlas ett flervariabelt system.

2. FÖRBEREDANDE TEORI

2.1. Modell

Systemet antages vara givet på tillståndsform

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (1.)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

där \mathbf{x} är en n -dimensionell tillståndsvektor, u är en m -dimensionell vektor av insignaler och y är en r -dimensionell vektor av utsignaler.

\mathbf{A} och \mathbf{B} är reellvärda matriser av dimensionen $n \times n$ resp. $n \times m$.
 \mathbf{C} är av dimensionen $r \times n$.

Syftet med detta arbete är att lösa servoproblemet. Med ett servo menas ett system som kan följa en given referenssignal. Speciellt skall vi finna en styrlag som använder information om utsignalen och referenssignalen och som är sådan att differensen $y - y_r = e(t)$ blir så liten som möjligt. Se fig. 1.

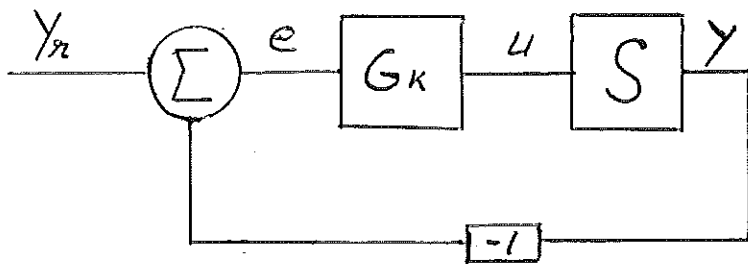


Fig. 1. Blockschema för ett servosystem. S är ett givet system, styrsignalen är $u = G_k(y_r - y)$.

2.2 Approximation

Antag att vi har funnit en tillståndsåterkoppling

$$u = Lx \quad (2.)$$

Som uppfyller de givna specifikationerna. Vi styrning av systemet (1.) lägger vi bestämda villkor på det återkopplade systemet. Avsikten är sedan att reducera styrlagen med hänsyn till dessa villkor. Det enklaste villkoret är att tillåta konstant återkoppling från utsignalen, dvs

$$u = Ky^* \quad (3.)$$

De återkopplade systemen har följande utseende

$$\dot{x} = (A + BL)x \quad (4.)$$

$$y = Cx$$

och

$$\dot{x} = (A + BK^*)x \quad (5.)$$

$$y = Cx$$

Om vi kan lösa

$$K^*C = L \quad (6.)$$

för K så är styrlagarna (2.) och (3.) identiska. Denna ekvation går emellertid i regel ej att lösa. Betrakta då följande. Låt a vara egenvektor till $(A + BL)$, dvs

$$(A + BL)a = \lambda a \quad (7.)$$

där λ är egenvärde till $(A + BL)$

Om ekvationen

$$K^*Ca - La = 0 \quad (8.)$$

är lösbar så gäller

$$(A+BK^*)a = (A+BL)a$$

Men (8.) ger att i så fall

$$(A+BK^*) = \lambda a$$

dvs. λ är också egenvärde till $(A+BK^*)$.

Låt $\lambda_1 \dots \lambda_n$ vara egenvärdena till $(A+BL)$ och låt $a_1 \dots a_n$ vara motsvarande egenvektorer samt betrakta

$$\|K^*(a_1 \dots a_n)W - L(a_1 \dots a_n)W\|^2 \quad (9.)$$

Minimera (9.) i minsta kvadratmening. W är en icke singular $n \times n$ matris. Om W är $= \text{diag. } (w_1 \dots w_n)$ så blir (9.)

$$\sum_{i=1}^n |K^*a_i - La_i|^2 w_i^2 \quad (10.)$$

En ökning i w_i medför att ett egenvärde till $(A+BK^*)$ närmar sig egenvärdet λ_i till $(A+BL)$, jämför (8.).

För närmare genomgång, se ref. [1]. Denna metod kan användas för att göra syntes av servo, se fig. 2.

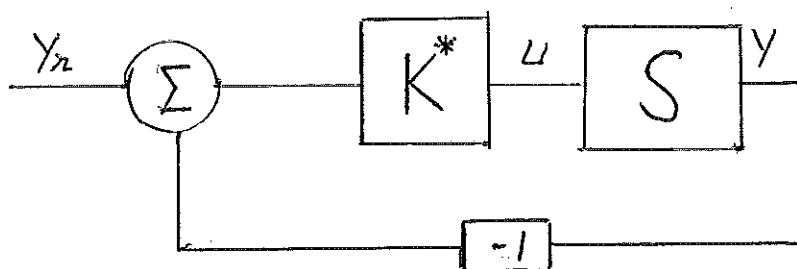


Fig. 2. Blockschema för ett servo. Styrlagen är $u = K^*(y_r - y)$, vilket är en approximation av styrlagen på tillståndsform $u = Lx$.

2.3. Kompensering

Konstant återkoppling från utsignalen är oftast inte tillräcklig. Genom att införa en dynamisk kompensator kan man förbättra egenskaperna hos det återkopplade systemet. Kompensatorn kan kopplas i serie med det givna systemet S , som i fig. 3.

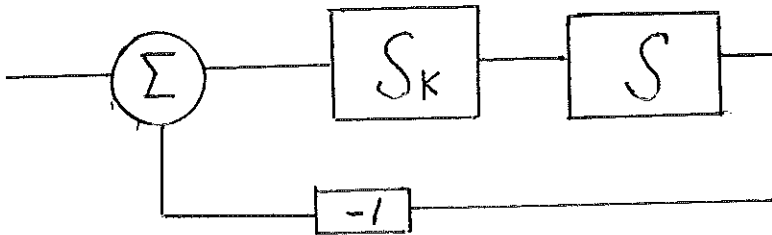


Fig. 3. Dynamisk kompensator i seriekoppling.

Kompensatorn S_k kan t.ex. vara av fasavancerande typ med överföringsfunktionen

$$G_k(s) = N \frac{s+b}{s+bN} \quad (11.)$$

eller av fasretarderande typ med överföringsfunktionen

$$G_k(s) = N \frac{s+a}{Ns+b} \quad (12.)$$

Dessa kompensatorer används i klassisk syntes med Bode-Nichols diagram och Nyquist-kriteriet. Problemet är då att modifiera ett redan existerande system som ej uppfyller de givna specifikationerna.

I detta arbete skall vi lägga till en dynamisk kompensator till vårt givna system enligt fig. 4.

Kompensatorn kan fogas in i tillståndsmodellen som beskriver det givna systemet.

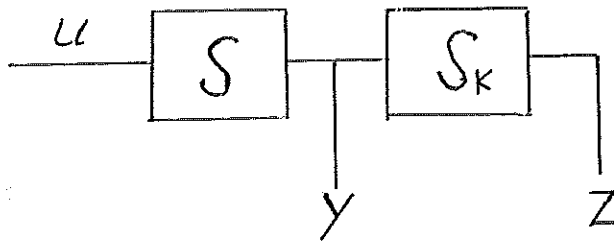


Fig. 4. En dynamisk kompensator S_k har fogats till det ursprungliga systemet S .

Låt tillståndsekvationerna för S_k vara

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c u_c \quad (13.)$$

$$y_c = C_c x_c + D_c u_c$$

För S gäller:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

För det utvidgade systemet som inkluderar systemen S och S_k kopplade som i fig. 5. blir tillståndsekvationerna

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (14.)$$

$$\begin{bmatrix} y \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ D_c C & C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$$

Tillståndsåterkopplingen kan nu skrivas

$$u = \begin{bmatrix} L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \quad (15.)$$

Genom den tillagda kompensatorn, se fig. 4, har vi fått ytterligare en utsignal och därmed mer information om systemet, vilket medför bättre möjligheter att styra. Vi får återkoppling från flera utsignaler och vi visar längre fram att vi med hjälp av den reducerade styrlagen kan dimensionera en kompensator av typen (11) och därmed erhålla ett servo enligt fig 3.

3. SYNTESMETOD

Vi utgår från ett givet system och ställer vissa bestämda krav på det vad beträffar stigtid, lägesfel, översläng och hastighetsfel. Syntesen går till på följande sätt:

STEG 1. Introducera kompensatorer som minskar eller eliminerar läges- och hastighetsfel.
Bestäm sedan med hjälp av linjärkvadratisk teori en tillståndsåterkoppling så att specifikationerna uppfylls.

STEG 2. Reducera tillståndsåterkopplingen till en återkoppling från utsignalerna.
Om specifikationen är uppfylld så är den sökta styr-
lagen funnen. Om inte så är fallet, gå till STEG 3.

STEG 3. Introducera en fasavancerande kompensator.
Gå till STEG 2.

Vid simulering av stegsvar för "optimalt" system initierar vi detta med följande begynnelse-tillståndsvektor

$$x_0 = (A+BL)^{-1} B(C(A+BL)^{-1} B)^{-1} y_s$$

y_s betecknar det stationära värdet på utsignalen, som lämpligen väljes till -1. Detta val av initialtillstånd motsvarar en steg-
ändring i referens för y på en enhet.

Nedan följer en allmän beskrivning av de metoder som används för att åstadkomma fasavancering och fasretardering.

3.1. Fasavancering

Här skall vi använda en dynamisk kompensator S_k med överförings-
funktionen.

$$G(s) = \frac{s}{1+s\alpha} \quad (16)$$

där α är litet.

Denna fasavancerande länk kan betraktas som en approximation av en rent deriverande länk med överföringsfunktionen

$$G(s) = s$$

Approximationen är nödvändig eftersom derivatan ej kan realiseras. Genom att välja α tillräckligt litet introducerar vi en pol som ligger långt in i vänstra halvplanet och därför har litet inflytande på stegsvaret.

Vi urskiljer två metoder för fasavanceringen.

1. Direkt metod

Den fasavancerande länken (16) inkluderas i systemet enl. fig 4.

Fig. 4 ger att

$$z = \frac{s}{1+s\alpha}$$

På tillståndsform blir detta

$$\dot{x}_c = -\frac{1}{\alpha}x_c + y$$

$$z = -\frac{1}{\alpha^2}x_c + \frac{1}{\alpha}y$$

eller

(17)

$$\dot{x}_c = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}C & -\frac{1}{\alpha^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$$

Det utvidgade systemet blir

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ \frac{1}{\alpha} C & -\frac{1}{\alpha^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$\text{Dvs } \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$

$$\hat{y} = \hat{C}\hat{x}$$

Styrlagen blir

$$\hat{u} = (L \quad 0) \hat{x}$$

Systemet i (18) är på samma form som i (1), varför vi kan använda den i kapitel 1.2. redovisade approximeringsmetoden även på detta system. Den reducerade styrlagen blir

$$\hat{u}^* = Ky = k_1^* y + k_2^* z \quad (19)$$

$$= \left[k_1^* + k_2^* \frac{s}{1+s\alpha} \right] y = R(s) y$$

$R(s)$ kan skrivas som

$$R(s) = K \frac{s+\beta}{s+\frac{1}{\alpha}} \quad (20)$$

Vilket är en fasavancerande kompenseringslänk, se fig. 5

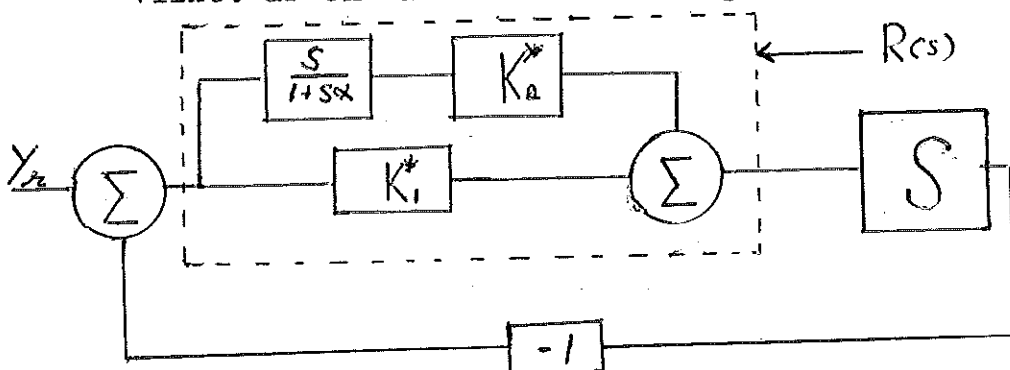


Fig. 5. Servo med fasavancerande länk $R(s)$.

2. Indirekt metod

En annan metod är att betrakta utsignalens derivata som extra utsignal, dvs

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (21)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

I och med att vi infört ytterligare en utsignal får vi som ovan nämnt mera information om systemet och därmed bättre möjligheter att styra.

Vi applicerar approximeringsmetoden på systemet i (21). Därefter ersätts s med $\frac{s}{1+s\alpha}$ där α väljes så att polen $-\frac{1}{\alpha}$ hamnar långt in i vänstra halvplanet. Parametern α kan succesivt ökas från 0 tills godtagbara stegsvar erhålles. Vi får slutligen styrlagen

$$\hat{\mathbf{u}}^* = k_1^* \mathbf{y} + k_2^* \frac{s}{1+s\alpha} \mathbf{y}$$

dvs samma som med metod 1.

3.2. Fasretarding

Vi använder en kompensator S_k med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s+a} \quad (22)$$

där a är litet

Denna fasretarderande länk är en approximation av en rent integrerande länk med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Se fig. 6

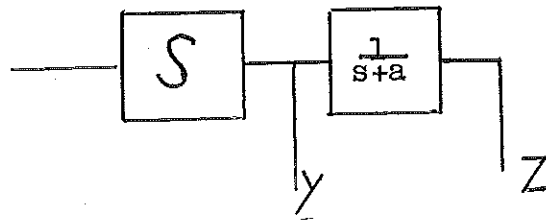


Fig. 6. Fasretarderande länk har tillfogats det givna systemet S.

På tillståndsform blir den integrerande länken

$$\dot{z} = -az + y = -az + Cx \quad (23)$$

Kompensatorn kan fogas till tillståndsekvationerna för systemet S varvid vi får

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

Genom att variera a i (22) kan vi minska hastighetsfelet i önskad utsträckning.

Betrakta det utökade systemet (24). Vi skall finna ett \hat{L} för det. Genom linjärkvadratisk optimering på detta system, där vi varierar straffen på y och $\int y^2 dt$ erhåller vi en styrlag som blir

$$u = L_1 x + L_2 z = \hat{\hat{L}} x \quad (25)$$

Denna styrlag reduceras sedan på vanligt sätt.

På liknande sätt som vid fasavancering kan vi urskilja två metoder.

Vi kan som ovan inkludera länken $\frac{1}{s+a}$, och reducera det sammansatta systemet.

Det andra sättet är att lägga till en rent integrerande länk $\frac{1}{s}$,
reducera och därefter ersätta $\frac{1}{s}$ med $\frac{1}{s+a}$.

Den reducerade styrlagen blir

$$\hat{u}^* = K^* y = k_1^* y + k_2^* \frac{1}{s+a} y \quad (26)$$

Se fig. 7.

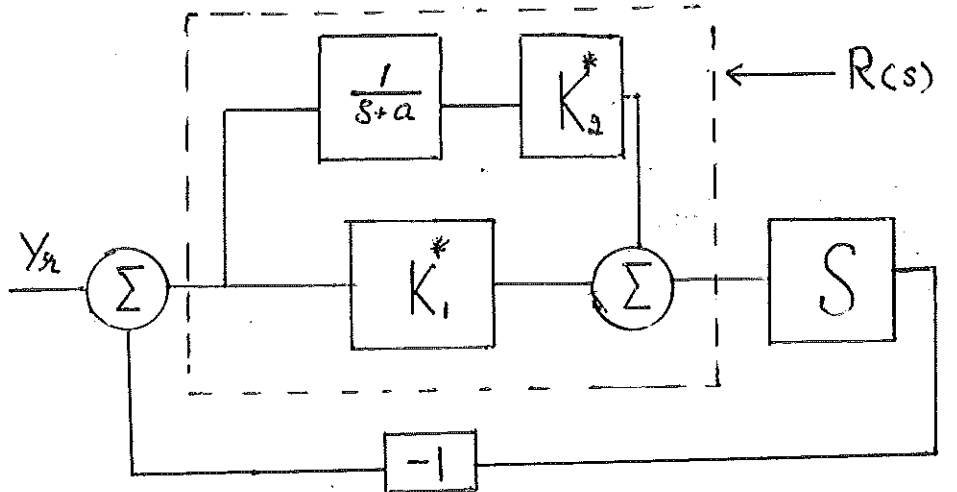


Fig 7. Systemet S kopplat med fasretarderande kompensator $R(s)$.

3.3 Fasavancerande och fasretarderande kompensering.

Vi kombinerar fasavancering och fasretardering. Först lägger vi till en integrerande länk och bestämmer en styrlag $u = -Ix$, genom linjärkvadratisk optimering. Därefter lägger vi till en deriverande länk och reducerar det sålunda uppkomna systemet. Vi erhåller ett system med en fasavancerande -fasretarderande kompensator enligt fig. 8.

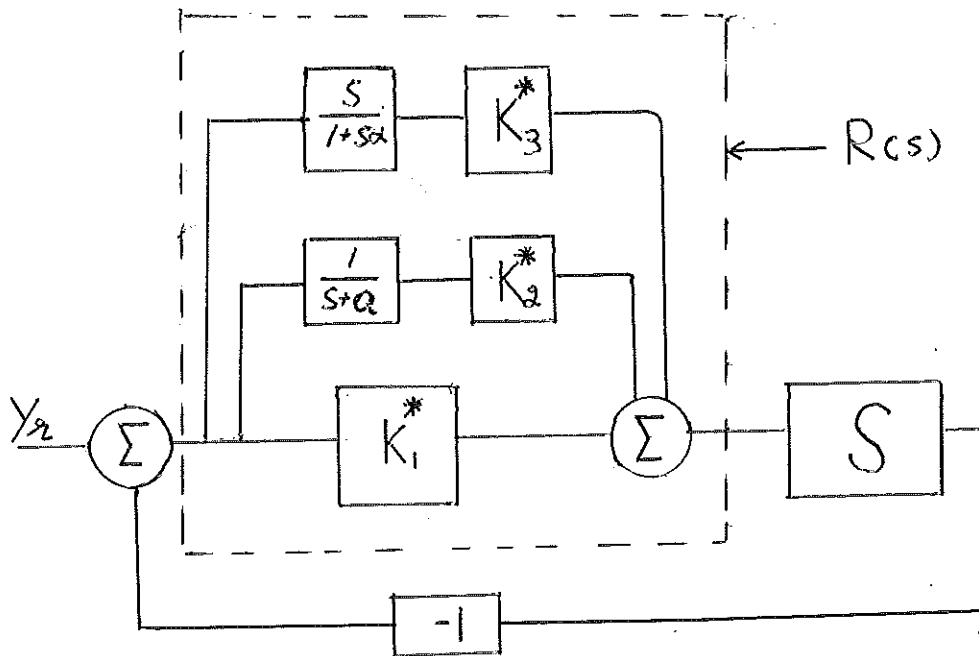


Fig. 8. System med fasavancerande-fasretarderande kompensator $R(s)$.

Den reducerade styrlagen blir

$$u = \left(k_1^* + k_2^* \frac{1}{s+a} + k_3^* \frac{s}{1+s\alpha} \right) (y_r - y)$$

4. FASAVANCERANDE KOMPENSERING

Två system behandlas. Exempelen är hämtade från "Syntes av fasavancerande system, se ref. [3]. Servon har där dimensionerats med klassisk syntes.

Med endast enkel återkoppling av systemen går det inte att uppfylla de ställda kraven. Det är därför nödvändigt att införa en fasavancerande kompensator i syfte att minska stigtiden på stegsvaret.

I det första exemplet används metod 1, dvs en fasavancerande länk $\frac{s}{1+s\alpha}$ introduceras, varefter styrlagen reduceras.

I det andra exemplet används metod 2, dvs utsignalens derivata betraktas som extra utsignal. Styrlagen reduceras och därefter ersätts derivatan med länken $\frac{s}{1+s\alpha}$.

Systemen simuleras enligt fig. 9.

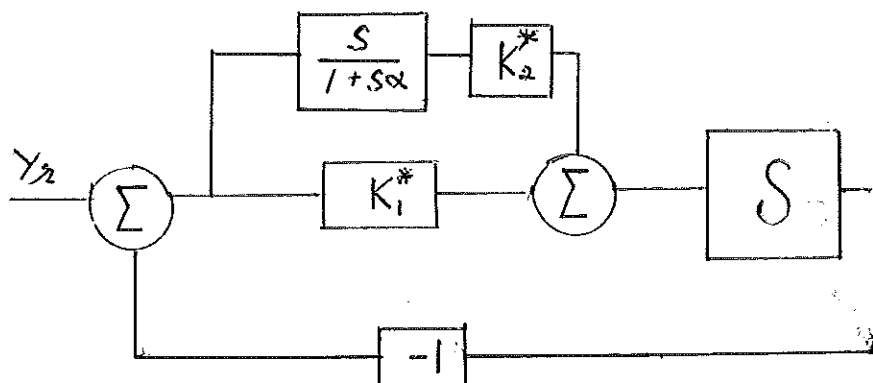


Fig. 9. Servo med fasavancerande kompensering.

Exempel 1.

Betrakta system med överföringsfunktionen

$$G_0(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

se ref. [3]. Systemet skrivs på kanonisk observerbar form:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Det enkelt återkopplade systemets stegsvar har en stigtid på 1.7 sekunder och en översläng på 17% för $k=1.1$, se fig. 10.

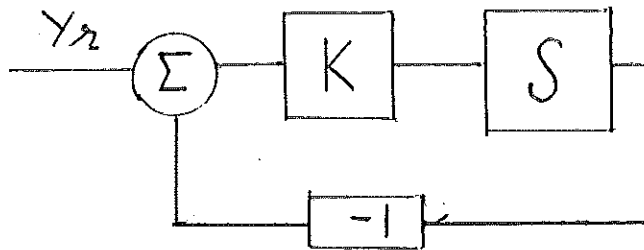


Fig. 10. Enkelt återkopplat system. För $k=1.1$ erhålles bästa värdena på stigtid och översläng.

Systemspecifikation

1. Stegsvarets stigtid skall minska med hälften av det enkelt återkopplade systemets stigtid.
2. Överslängen bibehålles.

Vi bestämmer en styrlag med linjärkvadratisk optimering och straffar därvid y så att specifikationen uppfylls.

Matriserna $Q1$ och $Q2$ har utseendet

$$Q1 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q2 = (1)$$

Detta ger

$$L = (6.42 \quad 3.58)$$

Först gjordes ett försök med konstant återkoppling från utsignalen. Styrlagen blev efter approximation

$$u = 1.05(y_r - y)$$

vilken ger ungefär samma stigtid som med $k=1.1$.

Det är alltså nödvändigt att införa en fasavancerande kompensator. Vi använder metod 1, vilket innebär att vi får ett utökat system, som på tillståndsform blir

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$$

Det uppkomna systemet har en styrlag

$$L = (6.42 \quad 3.58 \quad 0)$$

Denna skall ersättas med en reducerad styrlag med återkoppling från två utsignaler. Vi "viktar" egenvärdena hos det "optimala" systemet. Ganska godtyckligt väljer vi viktmatrisen

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

α får variera från 0 till $\frac{1}{4}$, se fig. 11c. Den fasavancerande kompensatorns utseende för olika α visas i tabell 1.

Fig. 11c visar att egenvärdena till $(A+BL)$ ligger stilla för olika värden på α .

$\alpha = 1/6$ ger ett stegsvar som uppfyller specifikationen. $\alpha = 1/10$ ger mindre översläng.

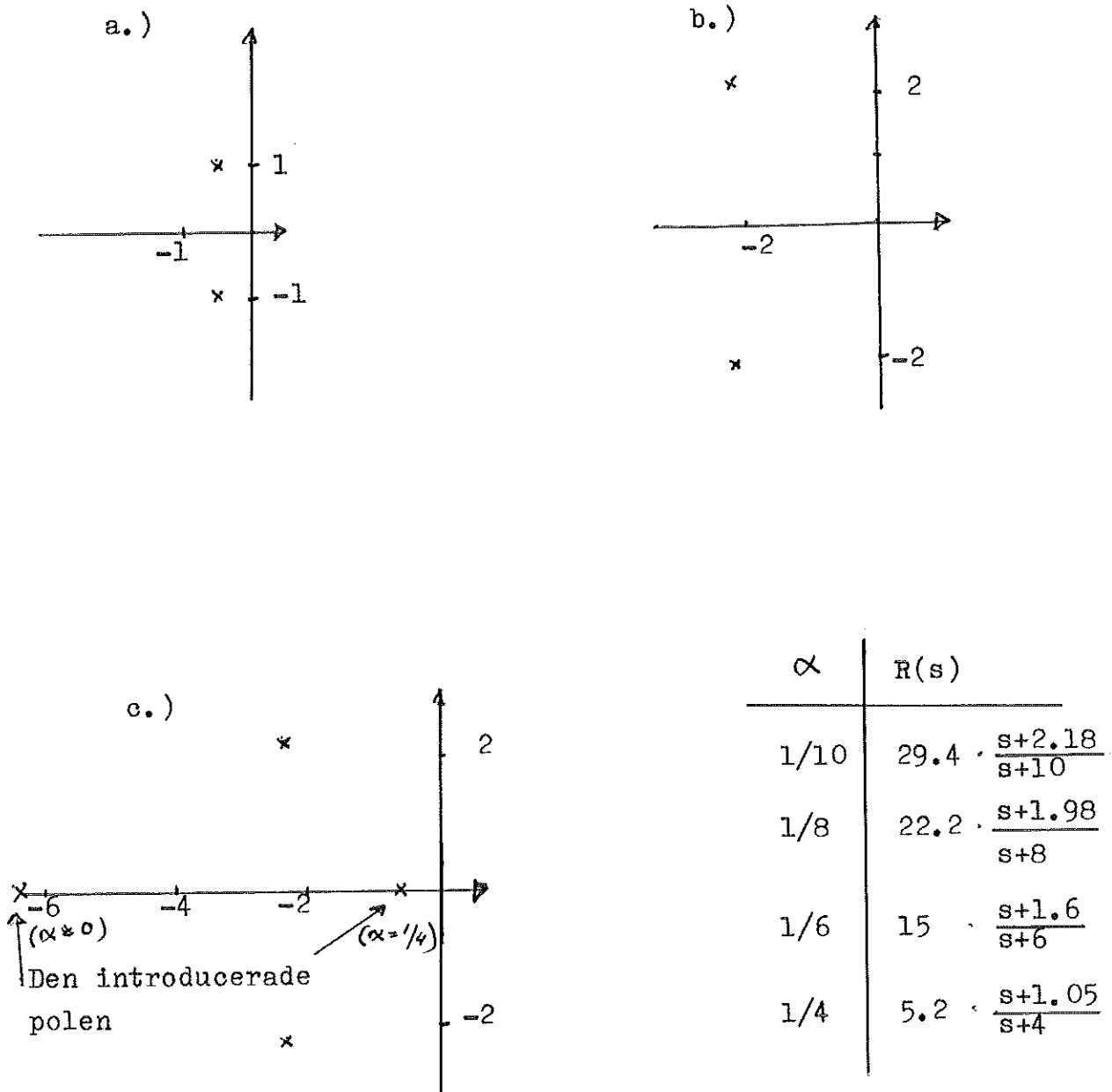
Simuleringarna visas på fig. 12. Som kurvorna visar går det lätt att uppfylla specifikationen när vi återkopplar från alla tillstånd. När vi återkopplar från två utsignaler har vi mer information om systemet än vid enkel återkoppling och kan därför styra systemet bättre.

Kompensatorn för $\alpha = 1/6$ blir

$$R(s) = 15 \cdot \frac{s+1.6}{s+6}$$

Jämför med kompensatorn som är framtagen med klassisk syntes i ref. [3]

$$G_k(s) = 2 \cdot \frac{s+1.05}{s+2}$$



Tabell 1.

Fig. 11. Polkonfiguration för:

a.) Enkelt återkopplat system.

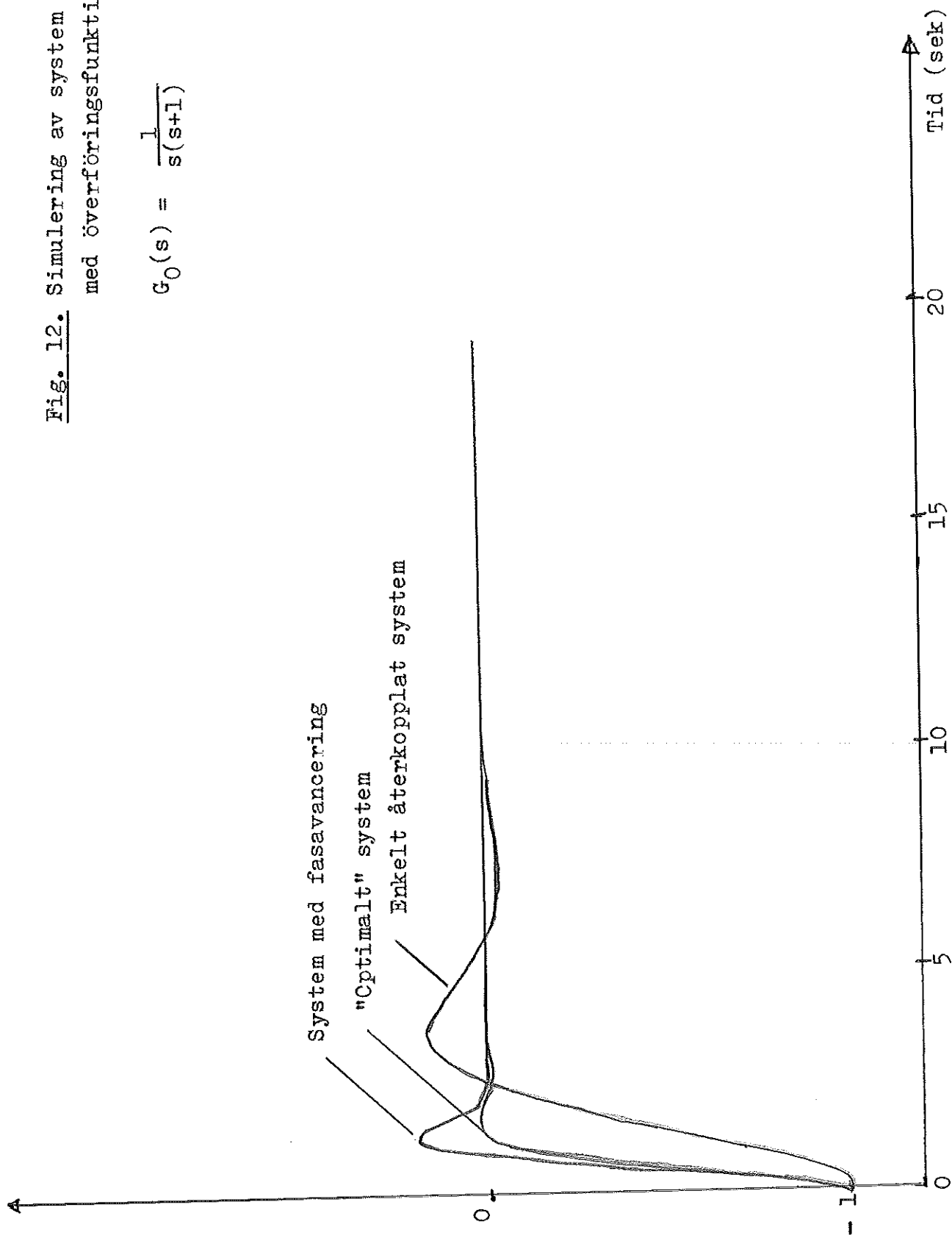
b.) System med tillståndsåterkoppling (A+BL)

c.) System med fasavancerande återkoppling för olika α .

Tabell 1. Den fasavancerande kompensatorn för olika α .

Fig. 12. Simulering av system
med överföringsfunktion

$$G_0(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$



Exempel 2.

Betrakta systemet

$$G_0(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Se ref [3].

Systemet skrivs på observerbar kanonisk form

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] x$$

Det enkelt återkopplade systemets stegsvar har en stigtid på 2.5 sekunder och en översläng på 17%, då $k=1$.

Systemspecifikation

1. Systemets stigtid skall minska med tre gånger jämfört med det enkelt återkopplade systemet.
2. Överslängen bibehålles.

I detta exempel fungerade inte metod 1, utan metod 2 användes. Vi börjar med att bestämma en tillståndsåterkoppling som blir

$$L = (0.48 \quad 5.15 \quad 3.21)$$

Vi betraktar utsignalens derivata som extra utsignal och reducerar därefter styrlagen. Vi får

$$K = (2.17 \quad 2.58)$$

Därefter ersätter vi derivatan med $\frac{s}{1+s\alpha}$ och varierar α . Vi återkopplar systemet enligt fig.13.

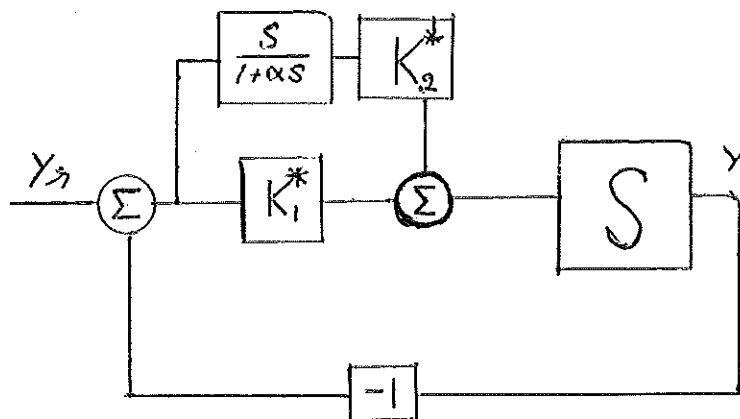


Fig. 13 Återkopplat system med reducerad återkoppling från utsignalen.

Fig. 14 visar polkonfigurationen för systemet med olika återkopplingar. Simuleringar av systemen visas i fig 15.

$\alpha = 1/4$ ger ett stegsvar som uppfyller specifikationen och kompensatorn blir då

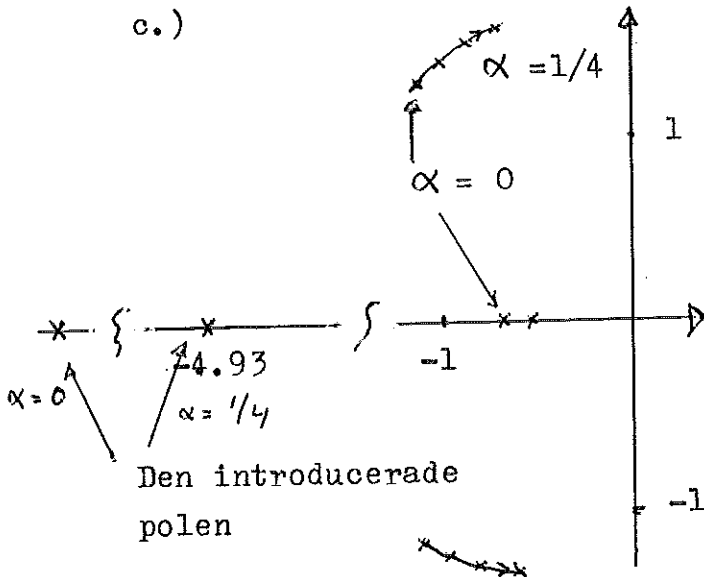
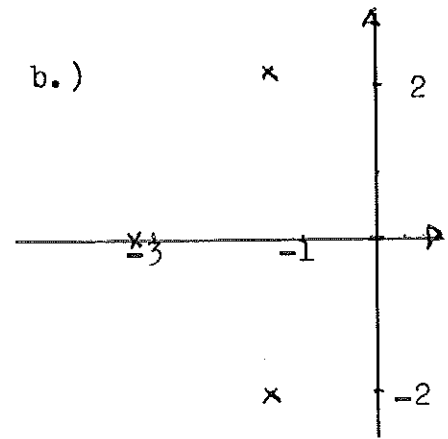
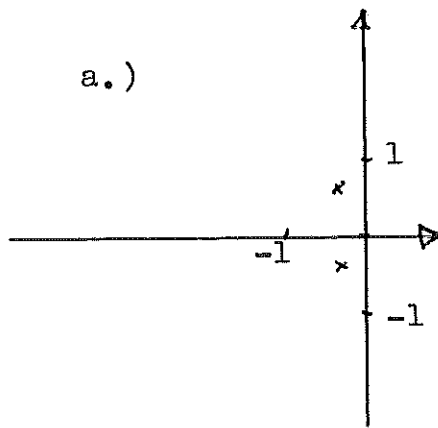
$$R(s) = 12.5 \cdot \frac{s+0.7}{s+4}$$

Jämför med den med klassisk syntes framtagna, (se ref. [3])

$$G(s) = 6 \cdot \frac{s+0.55}{s+3.30}$$

Kompensatorn för olika α visas i tabell 2.

Liksom i exempel 1 ser vi att möjligheterna att styra systemet ökar väsentligt när vi återkopplar från två utsignaler, dvs vi har dels en konstant återkoppling från utsignalen, dels en återkoppling via en dynamisk kompensator.



α	$R(s)$
1/10	$28 \cdot \frac{s+0.78}{s+10}$
1/9	$25.3 \cdot \frac{s+0.77}{s+9}$
1/7	$20.2 \cdot \frac{s+0.75}{s+7}$
1/5	$15.1 \cdot \frac{s+0.72}{s+5}$
1/4	$12.5 \cdot \frac{s+0.7}{s+4}$

Fig. 14 Polkonfiguration för

$$G_0(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

med

- Enkelt återkopplat system.
- Tillståndsåterkopplat system (A+BL).
- System med reducerad återkoppling för olika α .

Tabell 2. Den fasavancerande kompensatorn för olika α .

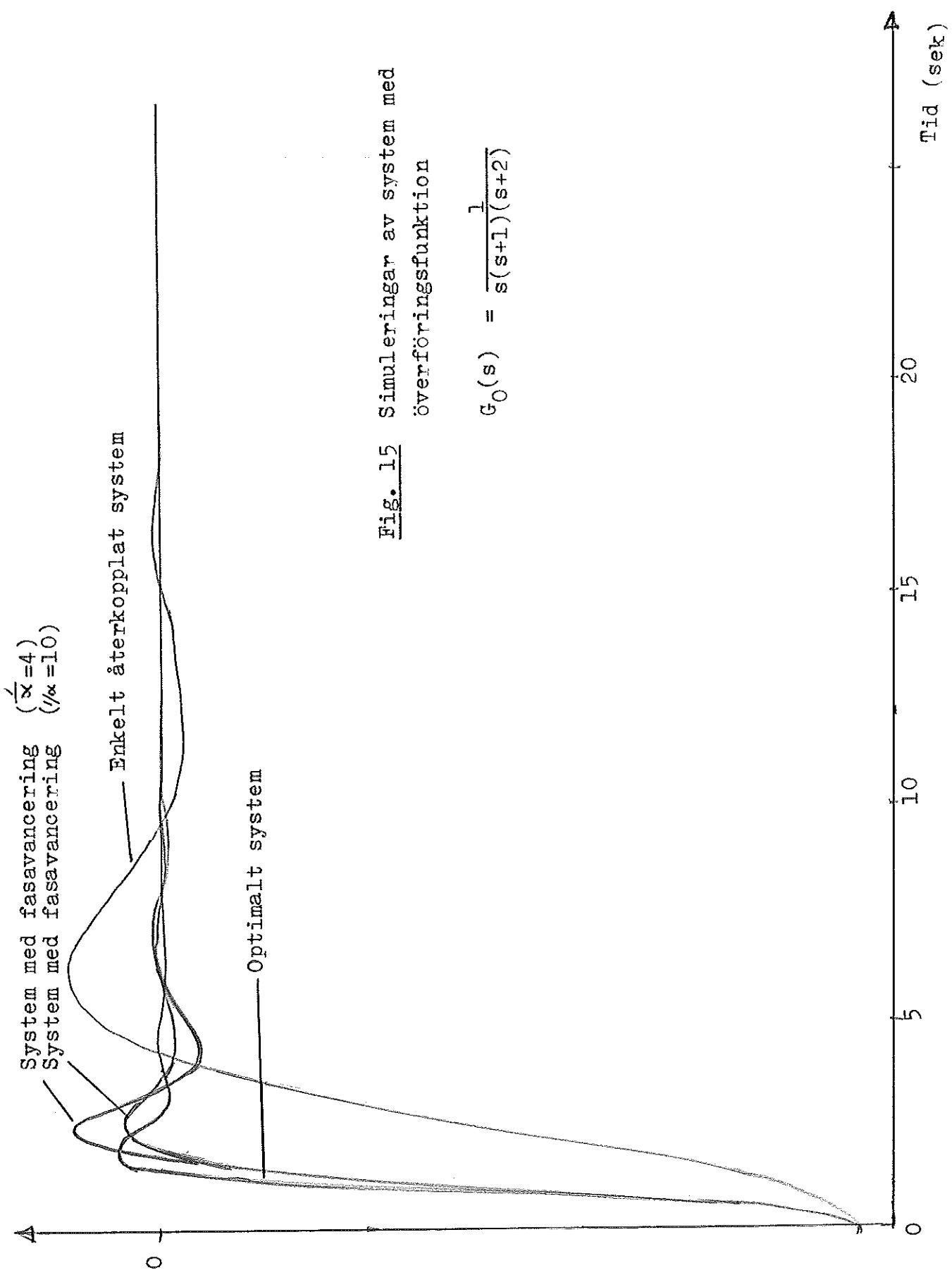


Fig. 15 Simuleringar av system med överföringsfunktion

$$G_0(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

5. FASRETARDERANDE OCH FASAVANCERANDE KOMPENSERING

Följande exempel är hämtat från laborationshandledning till "Analys och syntes av elektriskt servosystem", se ref [2]. Servots överföringsfunktion är

$$G_0(s) = \frac{100}{s(s+10)}$$

Detta skriver vi på styrbar kanonisk form

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = (0 \quad 100) \mathbf{x}$$

Systemspecifikation:

1. Stegsvarets stigtid skall minskas med hälften, jämfört med stigtiden för det enkelt återkopplade systemet.
2. Hastighetsfelet skall minskas tio gånger jämfört med det enkelt återkopplade systemet

Fasretardering

För att minska hastighetsfelet lägger vi till en fasretarderande länk enligt fig. 16.

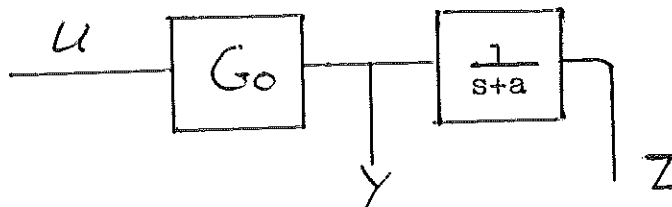


Fig. 16. En fasretarderande kompensator har lagts till systemet, för att minska hastighetsfelet.

Som vi tidigare sett är

$$\dot{z} = -az + y$$

Det utvidgade systemet blir

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix}$$

En linjärvadratisk återkoppling bestäms, varvid straffen på y och z väljs så att specifikationen uppfylls. Genom att variera straffet på z kan vi få önskad integrationstid.

Vi optimeringen varierar parametern a . Om $a=0$, dvs en rent integrerande länk, blir hastighetsfelet $=0$. För växande värden på a ökar hastighetsfelet. För $a = 5$ erhålles godtagbara värden på stigtid och översläng. För $a = 5$ blir

$$L = (11.53 \quad 181.8 \quad 1.52)$$

Fasavancering

Fasavancering åstadkommes enligt metod 2, dvs vi reducerar

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

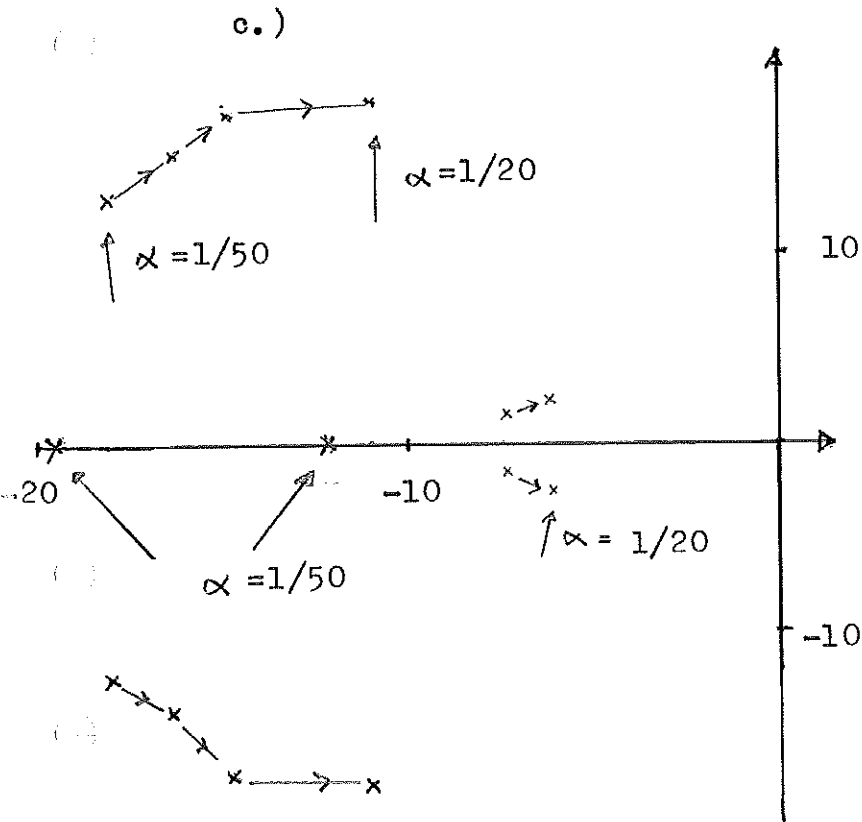
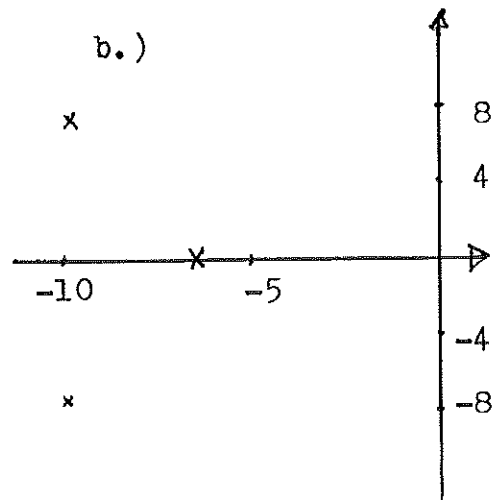
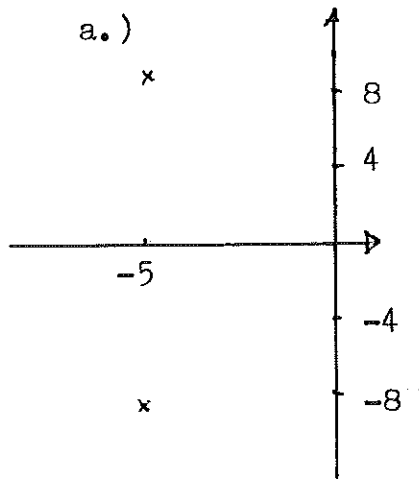
$$\begin{bmatrix} y \\ z \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \\ CA & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

$$L = (11.53 \quad 181.8 \quad 1.52)$$

Därefter ersätter vi derivatan med $\frac{s}{1+\alpha s}$ och styrlagen blir

$$u^* = k_1^* y + k_2^* \frac{1}{s+a} y + k_3^* \frac{s}{1+\alpha s} y$$

Polkonfigurationen för olika återkopplingar visas i fig. 17. Den fasavancerande - fasretarderande kompensatorn för olika α visas i tabell 3. Simuleringarna av servot visas i fig. 18. Den visar att den bästa styrningen är möjlig när vi har återkoppling från alla tillstånd, dvs när vi har mest information om systemet. Med återkoppling från tre utsignaler kan vi också styra systemet hyggligt.



α	R(s)		
1/20	1.94	$\frac{s+18.8}{s+5}$	$\frac{s+5.8}{s+20}$
1/30	1.94	$\frac{s+27.8}{s+5}$	$\frac{s+6.2}{s+30}$
1/40	1.94	$\frac{s+37.4}{s+5}$	$\frac{s+5.8}{s+40}$
1/50	1.94	$\frac{s+46.8}{s+5}$	$\frac{s+6}{s+50}$

Tabell 3. Kompensatorn för olika α .

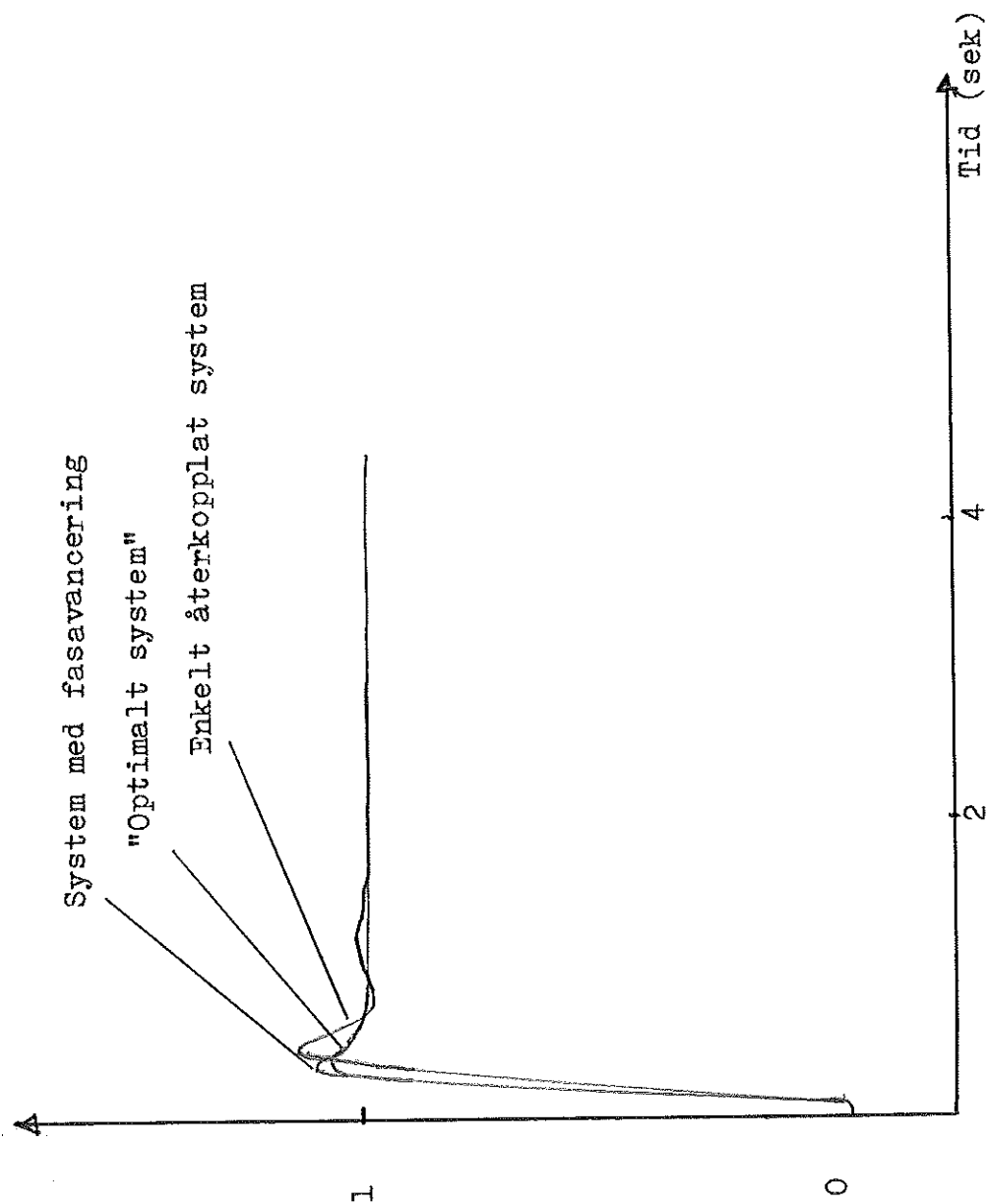
Fig. 17. Polkonfiguration för $G_0(s) = \frac{100}{s(s+10)}$ med

- a.) Enkelt återkopplat system.
- b.) "Optimalt" system.
- c.) System med fasavancerande- fasretarderande kompensator.

Fig. 18. Simuleringar av systemet

$$G_0(s) = \frac{100}{s(s+10)}$$

för olika återkopplingar



6. FLERVARIABELT SYSTEM

Syntesmetoden som beskrivits ovan har fördelen att den kan appliceras på flervariabla system. Syntesen blir helt analog med de redovisade exemplen med enkla system.

Systemet som skall behandlas här är en ångpanna, se ref [1]. De lineariserade ekvationerna för ångpannan kring en viss arbetspunkt kan skrivas

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gv$$

$$Y = Cx$$

De olika tillstånden är

$$x_1 = \text{domtryck (bar)}$$

$$x_2 = \text{domnivå (m)}$$

$$x_3 = \text{vattentemperatur i domen (}^\circ\text{C)}$$

$$x_4 = \text{stigtubernas temperatur (}^\circ\text{C)}$$

$$x_5 = \text{ångkvalitet (\%)}$$

Styrsignalerna är

$$u_1 = \text{värmeflöde till stigtuberna (kJ/s)}$$

$$u_2 = \text{matarvattenflöde (kg/s)}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.129 & 0.000 & 0.396 \times 10^{-1} & 0.250 \times 10^{-1} & 0.191 \times 10^{-1} \\ 0.329 \times 10^{-2} & 0.000 & -0.779 \times 10^{-4} & 0.122 \times 10^{-3} & -0.621 \\ 0.718 \times 10^{-1} & 0.000 & -0.100 & 0.887 \times 10^{-3} & -0.385 \times 10^1 \\ 0.411 \times 10^{-1} & 0.000 & 0.000 & -0.822 \times 10^{-1} & 0.000 \\ 0.361 \times 10^{-3} & 0.000 & 0.350 \times 10^{-4} & 0.426 \times 10^{-4} & -0.743 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.139 \times 10^{-2} \\ 0.000 & 0.359 \times 10^{-4} \\ 0.000 & -0.989 \times 10^{-2} \\ 0.249 \times 10^{-4} & 0.000 \\ 0.000 & -0.534 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi lägger en integrerande länk till det givna systemet S enligt fig. 19.

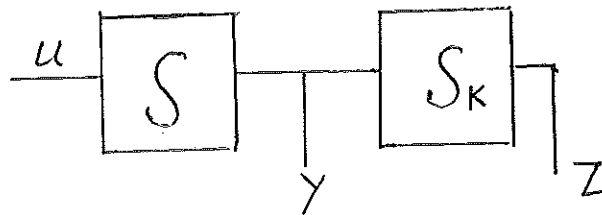


Fig. 19 Ångpanna S med integrerande länk S_k .

Integratorn kan på tillståndsform skrivas

$$\dot{z} = y$$

$$\int y = z$$

$$\text{dvs} \quad \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Detta kan, som tidigare, fogas till det givna systemets S tillståndsmodell, varvid vi får:

$$\hat{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \int y_1 \\ \int y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Vi "optimerar" systemet genom att straffa utsignalerna y och $\int y$. Vi erhåller därvid en tillståndsåterkoppling $u = -Lx$, där

$$L = \begin{bmatrix} 0.314 \times 10^3 & 0.640 \times 10^4 & 0.982 \times 10^2 & 0.753 \times 10^2 & -0.573 \times 10^5 \\ -0.158 \times 10^2 & 0.503 \times 10^4 & 0.111 \times 10^2 & 0.134 \times 10^2 & -0.410 \times 10^4 \\ 0.301 \times 10^2 & 0.940 \times 10^1 \\ -0.933 \times 10^1 & 0.302 \times 10^2 \end{bmatrix}$$

När vi reducerar detta system förbinder vi utsignaler och insignaler enligt fig. 20.

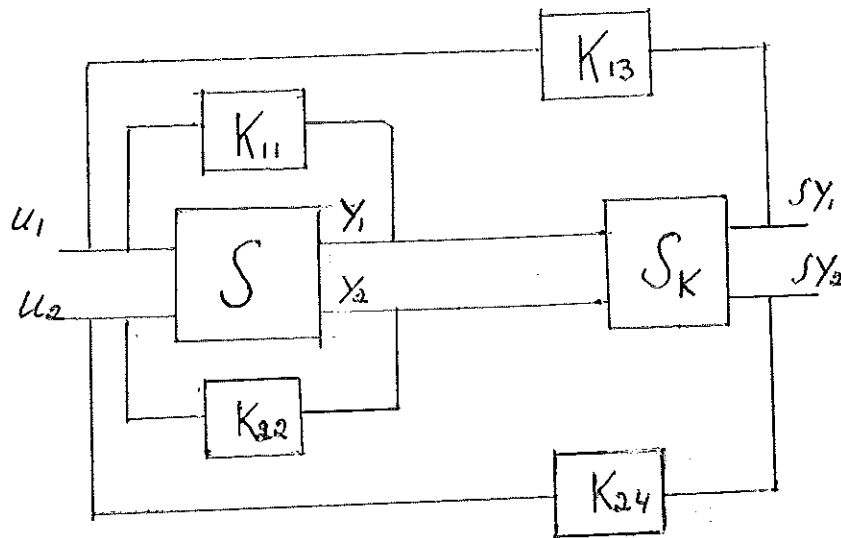


Fig. 20. Schema som visar hur insignaler och utsignaler förbindes.

Genom reduceringen erhålles:

$$* K = \begin{bmatrix} -0.770 \times 10^2 & 0.000 & 0.212 \times 10^2 & 0.000 \\ 0.000 & 0.226 \times 10^3 & 0.000 & 0.870 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{dvs } u_1 &= -77.0y_1 + 21.2 \int y_1 dt \\ u_2 &= 226.0y_2 + 0.87 \int y_2 dt \end{aligned}$$

Polkonfigurationen för olika återkopplingar visas i fig. 21. Systemet simuleras med en rampfunktion som stiger 10 bar per minut, se fig. 22.

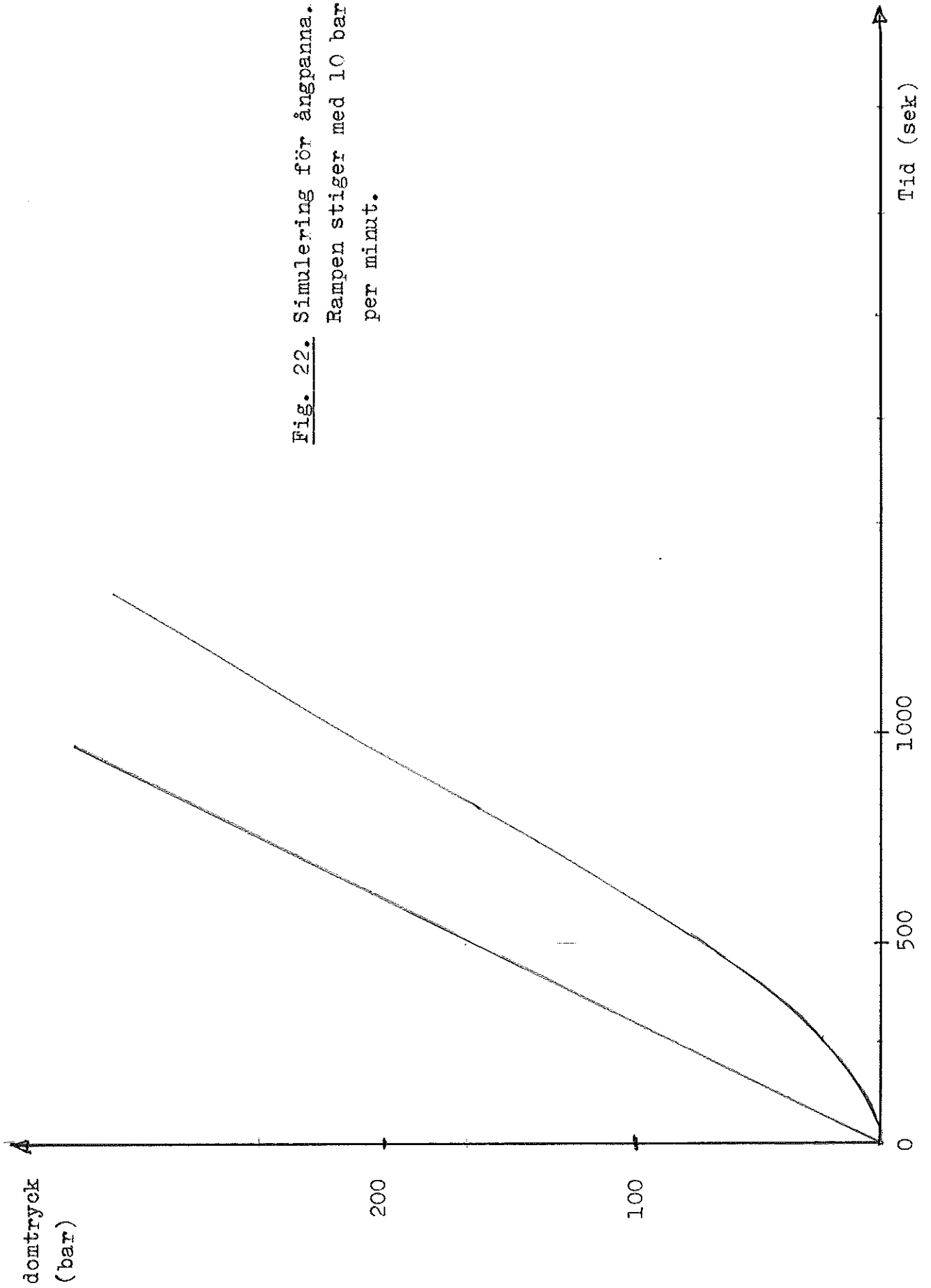


Fig. 22. Simulering för ångpanna.
Rampen stiger med 10 bar
per minut.

REFERENSER

- [1.] G. Bengtsson: A Theory for Control of Linear Multi-variable systems.
Rapport nr 7341, nov. 1973 ,Institutionen för reglerteknik,Lunds Tekniska Högskola.
- [2.] L. Andersson: Analys och syntes av elektriskt servosystem.
- [3.] Bo Leden: Fasavancerande kompensering.