

Förkortning av gemensamma faktorer i skattade  
överföringsfunktioner:

Examensarbete utfört vid Institutionen för Reglerteknik,  
Tekniska Högskolan i Lund, april 1973.

Erik Burström

Handledare: Torsten Söderström

## Abstract.

In this report the following problem has been studied: Given a system, which can be represented by a linear input-output relation. The system is simulated and identified. In this way a transfer function is obtained. The transfer function is not exactly known, but given with a certain known covariance-function.

The problem is to decide whether the transfer function has common factors in statistical sense, and if it has, it is desired to abbreviate these factors, in order to obtain a model of lower order than the given model.

Two different methods of solving the problem has been examined. In this first method, the poles and zeros of the transfer function are computed, and statistical hypothesis tests are made, in order to decide whether some factors can be considered as common.

In the other method, the Euclidean algorithm for polynomials is used, i.e. two polynomials are divided repeatedly, until the remainder-polynomial is zero in statistical sense.

Computer programs, which realizes the two methods, have been written and tested on some simulated and some real systems. The results show that the first method in many situations gives a rather good approximation of the system, while the other method gives satisfactory results only in some special situations.

## Sammanfattning.

I föreliggande examensarbete har studerats problemet att avgöra om en given överföringsfunktion har gemensamma faktorer eller inte. Överföringsfunktionen är inte exakt känd, utan given med en viss känd noggrannhet.

Det givna systemet antas kan representeras av ett lineärt insignal - utsignalsamband. Två olika metoder att lösa problemet har undersökts.

I den första metoden beräknas systemets poler och nollställen och därefter görs statistiska hypotestester för att utröna om vissa faktorer kan betraktas som gemensamma.

I den andra metoden används Euklides algoritim för polynom, dvs två polynom divideras successivt tills restpolynomet blir noll i statistisk mening.

De båda metoderna har testats på några kända och några okända system, och resultaten visar att den första metoden i regel ger ganska bra resultat medan den andra metoden endast i vissa speciella fall ger ett rimligt resultat.

## Innehållsförteckning.

1. Inledning och problemformulering.	1
2. Lösning 1: Algoritmen TPOL.	8
3. Lösning 2: Euklides Algoritm.	25
4. Tillämpningar på testexempel.	38
5. Tillämpningar på verkliga data.	43
6. Referenser.	46
Appendices.	

## 1. Inledning.

### 1. Allmänt.

Det problem som har studerats i detta examensarbete kan formuleras på följande sätt: Givet ett system som kan representaras av

$$y(t) = H_0(s) \cdot u(t) \quad (1.1)$$

där  $u(t)$  är insignalen,  $y(t)$  är utsignalen och  $H_0(s)$  är överföringsfunktionen. Systemet identifieras med en lineär modell enligt

$$y(t) = H_B(q^{-1}) \cdot u(t) + H_C(q^{-1}) \cdot e(t) \quad (1.2)$$

där  $e(t)$  är brus.

$$H_B(q^{-1}) = \frac{b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}} \quad (1.3)$$

och

$$H_C(q^{-1}) = \frac{1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_p q^{-p}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}} \quad (1.4)$$

Vid identifieringen får man en vektor  $T$ , där

$$T = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \quad (1.5)$$

eller

$$T = (a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_p) \quad (1.6)$$

(1,5) kallas i fortsättningen för B-fallet och (1,6) kallas för C-fallet. Vid identifieringen får man ofta en kovariansmatris för  $T$ , i fortsättningen betecknad med  $P_T$ . Det förutsättes nu och framgent att matrisen  $P_T$  är tillgänglig.

Man vill nu avgöra om en given överföringsfunktion har gemensamma faktorer på grundval av statistiska hypotestester. Man bildar en nollhypotes, som innebär att vissa faktorer är lika, beräknar en testkvantitet och förkastar nollhypotesen om testkvantiteten hamnar i det kritiska området, se nedan.

Antag att  $e(t) \equiv 0$ , dvs identifieringen kan göras helt utan inverkan från omgivningen. Då är  $H_C(q^{-1}) \equiv 0$  och  $H_B(q^{-1})$  är fullständigt identifierad, dvs kovariansmatrisen  $P_T \equiv 0$ . Då kan

eventuella gemensamma faktorer bestämmas genom direkt beräkning, och det fallet är alltså ointressant ur allmän synpunkt. I fortsättningen antages därför  $e(t) \neq 0$ .

Två olika metoder för att lösa problemet har studerats. Grundidéerna i dessa finns beskrivna i [1]. Den första går ut på att beräkna poler och nollställen och tillhörande kovariansmatris. Därefter testas varje pol mot varje nollställe och de positiva testerna fås i en tabell. Då basis av alla positiva tester göres flervariabla tester på så sätt, att man bestämmer den kombination av poler och nollställen som gör att så många faktorer som möjligt kan förkortas, dvs ger tillräckligt liten testkvantitet. Om fler olika kombinationer av samma antal faktorer är möjliga väljes den kombination, som ges lägst testkvantitet. Om gemensamma faktorer finns, beräknas värden för dessa genom att minimera en kvadratisk förlustfunktion under givna bivillkor. Därefter beräknas det gemensamma polynomet, dvs det polynom, som består av de gemensamma faktorerna. Slutligen divideras de givna polynomen med detta gemensamma polynom. Denna metod kallas i fortsättningen för TPOL.

Den andra metoden som har undersökts användes Euklides algoritmen. Algoritmen finns beskriven i [2]. Identifieringen antas gjord så att i (1.5) gäller

$$m = n \quad (1.7)$$

och i (1.6) gäller

$$p = n \quad (1.8)$$

kalla de givna polynomen för  $P(x)$  och  $Q(x)$ . För B-fallet (1.5) innebär villkoret (1.7)

$$\text{grad } P = \text{grad } Q + 1 \quad (1.9)$$

och för C-fallet innebär (1.8)

$$\text{grad } P = \text{grad } Q \quad (1.10)$$

Antag först att C-fallet föreligger.

Restpolynomet  $R(x)$  vid divisionen beräknas ur

$$R(x) = P(x) - k \cdot Q(x) \quad (1.11)$$

där

$$\text{grad } R = \text{grad } Q - 1 \quad (1.12)$$

Detta är alltid möjligt enligt divisionsalgoritmen. Sedan testas om  $R(x) = 0$  i statistisk mening. Om så är fallet är divisionen klar,  $Q(x)$  är det gemensamma polynomet och  $P(x)$  och  $Q(x)$  är konstanter. I annat fall sättes

$$P(x) = Q(x) \quad (1.13)$$

och

$$Q(x) = R(x) \quad (1.14)$$

och behandlingen fortsätts enligt B-fallet nedan.

Om B-fallet föreligger, dvs (1.12) är uppfyllt bildas restpolynom  $R(x)$  vid divisionen som

$$R(x) = k_1 \cdot P(x) - (k_2 \cdot x + k_3) \cdot Q(x) \quad (1.15)$$

där

$$\text{grad } R = \text{grad } Q - 1 \quad (1.16)$$

Därefter är testförfarandet och fortsättningen helt analog med den under C-fallet beskrivna. Divisionen (1.15) har utförts på två olika sätt. Det första sättet innebär att  $k_1$  sätts till 1,  $P(x)$  och  $Q(x)$  skalas till motsvarande moniska polynom, dvs polynom med högstgradskoefficient 1 och  $k_2$  resp  $k_3$  väljs så att (1.16) blir uppfyllt. Detta sätt kallas i fortsättningen för normaliserad division. Det andra sättet innebär att  $k_1$ ,  $k_2$  resp  $k_3$  väljs så att (1.16) blir uppfyllt, och kallas i fortsättningen för icke-normaliserad division. Metoderna som helhet kallas i fortsättningen för Euklides algoritmen i version 1 resp version 2.

## 2. Statistisk bakgrund.

Betrakta en  $n$ -dimensionell stokastisk variabel  $\xi$  med väntevärde

$$E(\xi) = m \quad (1.17)$$

och kovariansmatris

$$P = E[(\xi - m)(\xi - m)^T] \quad (1.18)$$

där  $P$  är en  $n \times n$ -matris.

Bestäm ett område i form av en ellipsoid runt  $m$  så att om  $\eta$  är likformigt fördelad i området och har samma första- och andra-momentsfunktioner som  $\xi$ , dvs

$$E(\eta) = m \quad (1.19)$$

$$E[(\eta-m)(\eta-m)^T] = P \quad (1.20)$$

Ellipsoiden ges enligt [3] av

$$(x-m)^T P^{-1} (x-m) \leq \gamma_n = n + 2 \quad (1.21)$$

och kallas koncentrationsellipsoiden för  $\xi$ .

Betrakta två  $n$ -dimensionella stokastiska variabler  $\xi_1$  och  $\xi_2$ , sådana att

$$E(\xi_1) = E(\xi_2) \quad (1.22)$$

$\xi_1$  säges ha större koncentration än  $\xi_2$  om koncentrationsellipsoiden för  $\xi_1$  är helt innesluten i koncentrationsellipsoiden för  $\xi_2$ . En uttömmande redovisning finns i [3].

Antag givet en  $n$ -dimensionell stokastisk variabel  $\xi$ , sådan att

$$\xi \in N(m_\xi, P_\xi) \quad (1.23)$$

och en observation  $x$  av  $\xi$ .

Bilda en ny  $n$ -dimensionell variabel  $\eta$  som

$$\eta = f(\xi) \quad (1.24)$$

med en observation  $y$  av  $\eta$  som

$$y = f(x) \quad (1.25)$$

Vilken fördelning får  $\eta$ ?

Under förutsättning att  $f$  är 2 gånger kontinuerligt deriverbar, kan (1.24) Taylorutvecklas och ger då

$$\eta = f(\xi) = f(\xi_0) + f'(\xi_0) \cdot (\xi - \xi_0) + o(|\xi - \xi_0|) \quad (1.26)$$

där  $\xi_0$  väljes till  $x$ .

Om resttermen i (1.26) är försumbar, dvs linearisering är en lämplig approximation, övergår (1.26) i

$$\eta = f(\xi) = f(\xi_0) + f'(\xi_0) \cdot (\xi - \xi_0) = A\xi + B \quad (1.27)$$

där

$$A = f'(\xi_0) \quad (1.28)$$



och

$$B = f(\xi_0) - f'(\xi_0) \cdot \xi_0 \quad (1.29)$$

Väntevärde och kovariansmatris för  $\eta$  blir då

$$m_\eta = E(\eta) = E[f(\xi)] = f(m_\xi) \quad (1.30)$$

$$P_\eta = \text{Cov}[f(\xi)] = \frac{d\eta}{d\xi} \cdot P_\xi \cdot \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^T \quad (1.31)$$

och fördelningen för  $\eta$  blir

$$\eta \in N(m_\eta, P_\eta) \quad (1.32)$$

där  $m_\eta$  och  $P_\eta$  ges av (1.30) resp (1.31).

Speciellt om  $f(\xi)$  är en lineär avbildning gäller (1.32) exakt. Ur (1.31) ses att en koncentrationsellipsoid för  $\xi$  approximativt avbildas på en koncentrationsellipsoid för  $\eta$ . Teorin för lineariseringen finns i [4]. Lineariseringens inverkan har undersökts och resovisas i kap 2.6.

### 3. Problemformulering.

Problemet kan omformuleras sålunda:

Givet

$$T = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \quad (1.33)$$

svarande mot B-fallet eller

$$T = (a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_p) \quad (1.34)$$

som svarar mot C-fallet och den till vektorn  $T$  hörande kovariansmatrisen  $P_T$ . För flera identifieringsmetoder gäller att vektorn  $T$  är asymptotiskt normalfördelad och detta förutsättes nu i fortsättningen.

Man vill testa om vissa faktorer är gemensamma eller inte, och gör därför ett hypotestest enligt följande. Under nollhypotesen  $H_0$ , gäller att vissa specificerade faktorer är lika. Bilda en  $n$ -dimensionell variabel  $\xi$  som

$$\xi = f(T) \quad (1.35)$$

där  $x$  är en observation av  $\xi$  och där  $\xi$  är så bildad att under nollhypotesen gäller

$$E(\xi) = 0 \quad (1.36)$$

Under de ovan angivna förutsättningarna nämligen att  $T$  är asymptotiskt normalfördelad och linearisering av  $f(T)$  är tillåten gäller

$$\xi \underset{\sim}{\in} N(m_\xi, P_\xi) \quad (1.37)$$

där

$$P_\xi = \frac{d\xi}{dT} \cdot P_T \cdot \left(\frac{d\xi}{dT}\right)^T \quad (1.38)$$

Testa nollhypotesen

$$H_0 : E(\xi) = 0 \quad \text{mot} \quad (1.39)$$

$$H_1 : E(\xi) \neq 0 \quad (1.40)$$

Under nollhypotesen (1.39) gäller

$$\xi^T \cdot P_\xi^{-1} \cdot \xi \underset{\sim}{\in} \chi^2(n) \quad (1.41)$$

som testkvantitet väljes nu

$$\theta = x^T P_\xi^{-1} x \quad (1.42)$$

Som kritiskt område väljs  $\theta \geq \chi_\alpha^2(n)$ , dvs nollhypotesen accepteras om  $\theta \leq \chi_\alpha^2(n)$ , där  $\alpha$  är testets approximativa konfidensgrad. Att den exakta konfidensgraden är okänd beror dels på att  $T$  i allmänhet inte är exakt normalfördelad och dels på den eller de lineariseringar som gjorts.  $\alpha$  har i fortsättningen satts till 5%.  $\chi_{0.05}^2(n)$  har approximerats med en linjär funktion i  $n$  enligt

$$\chi_{0.05}^2(n) \approx 1.54 \cdot n + 3.20 \quad (1.43)$$

Den lineära approximationens avvikelse från de riktiga kvantiteterna framgår av diagram (A.4).

#### 4. Sammanfattning.

I examensarbetet har en stor del bestått i att skriva program på datamaskin för att lösa det ovan angivna problemet dels med metoden TPOL och dels med Euklides algoritmen. Programmen har skrivits i FORTRAN V på UNIVAC 1108 vid Lunds Universitets Datacentral. De subrutiner, som hänvisas till i texten, och som har skrivits för detta examensarbets ändamål finns dokomonterade i appendix D och övriga subrutiner, som har använts finns i [5].

I kapitel 2 beskrives analysen enligt algoritmen TPOL och i kapitel 3 analysen enligt Euklides algoritm. I kapitel 4 redovisas tre olika kända system, som har identifierats med modeller av olika ordningstal och som sedan har använts som testexempel på de båda metoderna. Resultaten visar att TPOL på inte alltför komplicerade system, ofta ger en tämligen god approximation av det verkliga systemet, medan Euklides algoritm ger högst osäkra resultat. I kapitel 5 redovisas två verkliga system, på vilka TPOL har prövats. Tabeller och diagram samt programdokumentation finns slutligen i appendices.

## 2. Lösning 1: Algoritmen TPOL.

### 1. Problemformulering och översikt.

Problemet som är beskrivet i kapitel 1 är följande: Givet två polynom, vars koefficienter utgör element i en vektor  $T$  med  $T$  antingen enligt (1.5), B-fallet,

$$T = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \quad (2.1) = (1.5)$$

eller  $T$  enligt (1.6), C-fallet,

$$T = (a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_p) \quad (2.2) = (1.6)$$

samt den till  $T$  hörande kovariansmatrisen  $P_T$ . Uppgiften att avgöra huruvida de båda polynomen har gemensamma faktorer eller inte, behandlas genom att bilda en vektor  $X$ , vars komponenter är nollställena till de båda polynomen, dvs poler resp nollställen till överföringsfunktionen. Den till vektorn  $X$  hörande kovariansmatrisen  $P_X$  beräknas under förutsättning att linearisering är tillåten. Sedan testas poler och nollställen mot varandra, först individuellt och därefter flervariabelt, på det sätt som beskrivs i kapitel 1.

Gången i programvaran TPOL kan illustreras av nedanstående figur i vilken de olika delarna utgör huvudprogram och subrutiner i programmet.

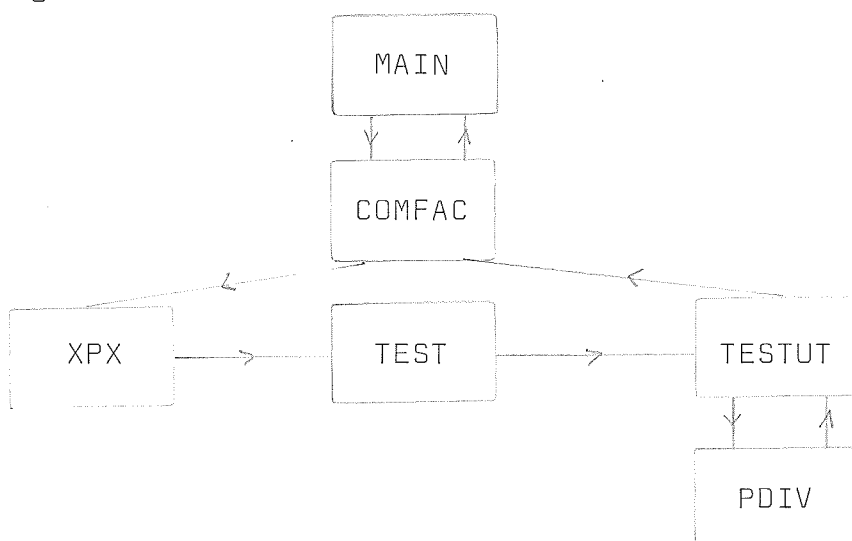


fig 2.1

MAIN är användarens eget huvudprogram, där vektorn  $T$ , dess kovariansmatris  $P_T$  beräknas eller läses in samt avgörs om B- eller C-fallet föreligger. Därefter anropas den överordnade subrutinen COMFAC, som administrerar den fortsatta analysen.

COMFAC, den överordnade subrutinen, har som enda uppgift att i tur och ordning anropa XPX, TEST och TESTUT och därefter lämna resultatet till MAIN.

XPX. I denna subrutin beräknas vektorn

$$X = (p_1, \dots, p_n, z_1, \dots, z_k) \quad (2.3)$$

där  $p_i$  och  $z_i$  betyder poler resp nollställena,  $k = m - 1$  om B-fallet föreligger och  $k = p$  och C fallet föreligger. Dessutom beräknas den till vektorn  $X$  hörande kovariansmatrisen  $P_X$ , under antagandet att sambandet mellan  $T$  och  $X$  kan approximeras med en lineär avbildning.

TEST. I subrutinen TEST testas varje pol mot varje nollställe på det sätt som beskrivits i kapitel 1. Resultaten av de individuella testerna ges i en tabell IQ, där varje rad betyder ett positivt test och elementen utgörs av komponentnumren i vektorn  $X$ , dvs numren på poler och nollställena, se appendix D.

TESTUT. Här göres alla flervariabla tester, dvs de kombinationer av maximalt antal poler och nollställena som ger ett positivt hypotes-test, letas upp. Om flera olika kombinationer av samma antal poler och nollställena ger positiva tester, väljs den kombination som ger lägst testkvantitet. Till sist beräknas nya estimat av de givna polynomen i PDIV, varefter återhopp sker till COMFAC.

PDIV. På grundval av resultaten i TESTUT, dvs vilka poler och nollställena som är lika, beräknas ett gemensamt polynom. Sedan divideras de givna polynomen med detta gemensamma.

Resten av detta kapitel ägnas åt att i detalj redovisa gången i de olika subrutinerna, som finns dokumenterade i appendix D. Exempel på resultatutskrift finns i appendix D.

## 2. XPX.

Här beräknas överföringsfunktionens poler och nollställen, vilka lagras i en vektor  $X$  och sedan beräknas, under de ovan angivna förutsättningarna kovariansmatrisen  $P_X$ .

### Beräkning av poler och nollställen.

Det förutsättes nu och i fortsättningen att polynomen endast har reella koefficienter. Detta medför enligt en känd sats i algebran att komplexa poler och nollställen förekommer parvis komplexkonjugerade.

Poler och nollställen beräknas med hjälp av subrutinen ROT, som har modifierats så att rötter vars argument är absolut mindre än  $10^{-7}$  betraktas som reella. Dessutom sorteras rötterna så att de komplexa kommer först efter växande realdel, och därefter de reella i växande ordning.

Sedan bildas en vektor

$$X' = (p_1, \dots, p_n, z_1, \dots, z_k) \quad (2.4)$$

där

$$k = m - 1 \quad (2.5)$$

för B-fallet och

$$k = p \quad (2.6)$$

för C-fallet.

I fortsättningen av detta kapitel är  $k$  på endera av formerna (2.5) eller (2.6).

Antag att  $z_1$  och  $z_2$  är komplexa och därmed komplexkonjugerade eller

$$p_1 = \alpha + i\beta \quad (2.7)$$

$$p_2 = \alpha - i\beta \quad (2.8)$$

där sorteringen i ROT är sådan att  $\beta > 0$ . I fortsättningen antas komplexa faktorer separerade i real- och imaginärdelar, dvs i exemplet ovan ersätts komponenterna  $p_1$  och  $p_2$  i  $X'$  med  $\alpha$  resp  $\beta$ . Vektorn  $X$  bildas som

$$X = (\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{\frac{ncp}{2}}, \beta_{\frac{ncp}{2}}, p_{ncp+1}, \dots, p_n, \gamma_1, \delta_1, \dots, \gamma_{\frac{ncz}{2}}, \delta_{\frac{ncz}{2}}, z_{ncz+1}, \dots, z_k) \quad (2.9)$$

där

$$\alpha_i = \operatorname{Re} p_{2i-1} = \operatorname{Re} p_{2i} \quad 1 \leq i \leq \frac{ncp}{2} \quad (2.10)$$

$$\beta_i = \operatorname{Im} p_{2i-1} = -\operatorname{Im} p_{2i} \quad 1 \leq i \leq \frac{ncp}{2} \quad (2.11)$$

$$\gamma_i = \operatorname{Re} z_{2i-1} = \operatorname{Re} z_{2i} \quad 1 \leq i \leq \frac{ncz}{2} \quad (2.12)$$

$$\delta_i = \operatorname{Im} z_{2i-1} = -\operatorname{Im} z_{2i} \quad 1 \leq i \leq \frac{ncz}{2} \quad (2.13)$$

$ncp$  och  $ncz$  är antalet komplexa poler resp nollställen, som båda är jämna tal.

Beräkning av kovariansmatrisen  $P_X$ .

$X$  och  $T$  antas kan beskrivas av sambandet

$$X = f(T) \quad (2.14)$$

där  $f(T)$  är åtminstone 2 gånger kontinuerligt deriverbar. Enligt vad som visas i kapitel 1 fås under antagandet att linearisering av (2.14) är tillåten, kovariansmatrisen för  $X$

$$P_X = \frac{dX}{dT} \cdot P_T \cdot \left(\frac{dX}{dT}\right)^T \quad (2.15)$$

Problemet är reducerat till att beräkna  $\frac{dX}{dT}$ , som görs med följande metod, vilken finns beskriven i [6].

Givet ett polynom

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = \prod_{i=1}^n (z - z_i) \quad (2.16)$$

Här förutsätts alla poler vara enkla, ty annars blir  $\frac{dT}{dX}$  singular, dvs  $\frac{dX}{dT}$  existerar ej.

Metoden ger

$$dz_r = - \frac{z_r^{n-1}}{\prod_{i \neq r} (z_r - z_i)} da_i \quad (2.17)$$

eller i matrisform

$$\frac{dz}{da} = \left[ \begin{array}{cc} - \frac{z_1^{n-1}}{\prod_{j \neq 1} (z_1 - z_j)} & - \frac{1}{\prod_{j \neq 1} (z_1 - z_j)} \\ - \frac{z_i^{n-k}}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)} & \\ - \frac{z_n^{n-1}}{\prod_{j \neq n} (z_n - z_j)} & - \frac{1}{\prod_{j \neq n} (z_n - z_j)} \end{array} \right] \quad (2.18)$$

På samma sätt som  $X$  i (2.9) har separerats i real- och imaginärdelar vill man dela upp (2.18). Antag  $z_1 = \bar{z}_2$ , är då  $dz_1 = \overline{dz_2}$ ? (2.18) ger

$$\begin{aligned} dz_1 - \overline{dz_2} &= - \left[ \frac{1}{\prod_{j \neq 1} (z_1 - z_j)} \sum_{i=1}^n z_1^{n-i} da_i \right] - \\ &- \left[ - \frac{1}{\prod_{j \neq 2} (z_2 - z_j)} \sum_{i=1}^n z_2^{n-i} da_i \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ - \frac{1}{\prod_{j \neq 1} (z_1 - z_j)} z_1^{n-i} + \frac{1}{\prod_{j \neq 2} (z_2 - z_j)} z_2^{n-i} \right] da_i = \\ &= \frac{\prod_{j \neq 1} (z_1 - z_j) - \prod_{j \neq 2} (\bar{z}_2 - \bar{z}_j)}{\prod_{j \neq 1} (z_1 - z_j) \cdot \prod_{j \neq 2} (\bar{z}_2 - \bar{z}_j)} \cdot \sum_{i=1}^n z_1 da_i = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

då  $\bar{z}_2 = z_1$  och  $\{z_1\}_1^n$  antingen reella eller parvis komplexkonjugerade.

Då blir

$$\frac{dX}{d\bar{T}} = S \cdot \frac{dX'}{dT} \quad (2.20)$$

med

$$S = \left[ \begin{array}{c} R \\ R \\ I \end{array} \right] \quad (2.21)$$



$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

I är  $(n-n_c) \times (n-n_c)$  matris där  $n_c$  = antalet komplexa rötter till ekvationen  $P(z) = 0$ .

$\frac{dX'}{dT}$  är funktionsmatrisen på formen (2.18)

Antag att  $P(z)$  inte är ett moniskt polynom, dvs  $P(x)$  ges av:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (2.24)$$

där  $a_0 \neq 0$

$\frac{dX}{dT}$  ges då av

$$\frac{dX}{dT} = S \cdot U \cdot \frac{dX'}{dT} \quad (2.25)$$

där

$$U = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{a_1}{2a_0} & \frac{1}{a_0} & & \\ a_0 & & 0 & \\ \vdots & & & \\ -\frac{a_n}{2a_0} & & 0 & \frac{1}{a_0} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Därmed är  $\frac{dX}{dT}$  fullständigt bestämd och kovariansmatrisen  $P_X$  kan beräknas ur (2.15).

### 3. TEST.

I subrutinen TEST görs alla individuella tester, dvs alla kombinationer av poler och nollställen undersöks om de är lika i statistisk mening eller inte. Om två faktorer är lika beräknas ett nytt gemensamt värde på dessa genom att minimera en kvadratisk förlustfunktion under ett visst bivillkor. Slutligen läggs resultatet av alla positiva tester upp i en tabell.

#### Testförfarande.

Det finns i princip tre olika möjligheter att jämföra faktorer nämligen båda är komplexa, båda är reella samt en är reell och en är komplex. I den fortsatta behandlingen utgör de tre fallen ingen väsentlig skillnad utan sker på följande sätt:

Givet en vektor  $X$  som är en observation av en  $n$ -dimensionell stokastisk variabel  $\xi$  där

$$\xi \in N(m, P_X) \quad (2.27)$$

Bilda en ny variabel  $\eta$  som

$$\eta = S \cdot \xi \quad (2.28)$$

där  $S$  är en matris vars utseende beror på vilket av de tre jämförelsefallen som föreligger. Det gäller att

$$Y = S \cdot X \quad (2.29)$$

är en observation av  $\eta$ .

Betrakta två godtyckliga faktorer  $p_i$  och  $z_j$  och sätt

$$p_i = \alpha_i + i\beta_i \quad (2.30)$$

$$z_j = \gamma_j + i\delta_j \quad (2.31)$$

Vi vill testa om  $p_i = z_j$  i statistisk mening och får då  $S$ -matrisen i de tre olika fallen.

Om  $p_i$  och  $z_j$  båda är komplexa, dvs  $\beta_i \neq 0$  och  $\delta_j \neq 0$  blir

$$S = \begin{bmatrix} 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0 \\ 0, \dots, 0, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

dvs

$$Y = \begin{bmatrix} \alpha_i - \gamma_j \\ \beta_i - \delta_j \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

komponenterna i  $Y$  utgörs av skillnaden mellan faktorernas real- resp imaginärdelar. Om faktorerna är lika är även dess komplexkonjugat lika, dvs om två komplexa faktorer är lika innebär det att ett par poler är lika med ett par nollställen.

Om  $p_i$  och  $z_j$  båda är reella dvs  $\beta_i = \delta_j = 0$  blir

$$S = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0) \quad (2.34)$$

och

$$Y = (\alpha_i - \gamma_j) \quad (2.35)$$

dvs  $Y$  utgörs av skillnaden mellan de två faktorerna.

Om en av faktorerna är komplex och en är reell finns två möjligheter: antingen  $\beta_i \neq 0$  och  $\delta_j = 0$  dvs

$$p_i = \alpha_i + i\beta_i \quad (2.36)$$

$$z_j = \gamma_j \quad (2.37)$$

S-matrisen blir då

$$S = \begin{bmatrix} 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0 \\ 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

dvs

$$Y = \begin{bmatrix} \alpha_i - \gamma_j \\ \beta_i \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Om  $\beta_i = 0$  och  $\delta_j \neq 0$  eller

$$p_i = \alpha_i \quad (2.40)$$

$$z_j = \gamma_j + i\delta_j \quad (2.41)$$

fås S-matrisen som

$$S = \begin{bmatrix} 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0 \\ 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, -1, \dots, 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

dvs

$$Y = \begin{bmatrix} \alpha_i - \gamma_j \\ \delta_j \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

I båda varianterna utgörs komponenterna i  $Y$  av skillnaden mellan faktorernas realdelar resp den komplexa faktorns imaginärdel.

Testet sker nu enligt följande:

Nollhypotesen  $H_0$  är att faktorerna är lika, dvs testa

$$H_0 : E(\eta) = 0 \quad \text{mot} \quad (2.44)$$

$$H_1 : E(\eta) \neq 0 \quad (2.45)$$

Under nollhypotesen gäller

$$\eta \in N(0, S \cdot P_X \cdot S^T) \quad (2.46)$$

eller

$$\eta^T (S \cdot P_X \cdot S^T)^{-1} \cdot \eta \in \chi^2(n) \quad (2.47)$$

där  $n$  är antalet rader i  $S$ -matrisen, 1 eller 2.

Som testkvantitet väljs

$$\theta = Y^T (S \cdot P_X \cdot S^T)^{-1} Y \quad (2.48)$$

och i enlighet med vad som sagts i kapitel 1 godtas nollhypotesen om  $\theta \leq \chi_{0.05}^2(n)$  och förkastas annars.

Ny estimerad vektor  $\hat{X}$ .

Under förutsättning att två faktorer är lika, beräknas ett värde på dessa genom att minimera en kvadratisk förlustfunktion under ett givet bivillkor.

Sök minimum av

$$L(\hat{X}) = (\hat{X} - X)^T \cdot P_X^{-1} \cdot (\hat{X} - X) \quad (2.49)$$

under bivillkoret

$$S \cdot \hat{X} = 0 \quad (2.50)$$

$\hat{X}$  betecknar det nya estimatet av vektorn  $X$  under förutsättningen (2.50), nämligen att två faktorer är lika.

Problemet löses enklast genom att införa Lagrangemultiplikatorn dvs sök en sadelpunkt till

$$L(\hat{X}, \lambda) = (\hat{X} - X)^T \cdot P_X^{-1} \cdot (\hat{X} - X) + \lambda^T S \hat{X} \quad (2.51)$$

Lösningen ges av

$$\hat{X} = X - P_X \cdot S^T \cdot (S \cdot P_X \cdot S^T)^{-1} \cdot S \cdot X \quad (2.52)$$

eller

$$\hat{X} = \left[ I - P_X \cdot S^T \cdot (S \cdot P_X \cdot S^T)^{-1} \cdot S \right] \cdot X = Q \cdot X \quad (2.53)$$

Det gäller

$$\begin{aligned} Q^2 &= \left[ I - P_X \cdot S^T \cdot (S \cdot P_X \cdot S^T)^{-1} \cdot S \right]^2 = \\ &= I^2 - 2 \cdot I \cdot P_X \cdot S^T \cdot (S \cdot P_X \cdot S^T)^{-1} \cdot S + P_X \cdot S^T \cdot (S \cdot P_X \cdot S^T)^{-1} \cdot S \cdot P_X \cdot S^T \cdot (S \cdot P_X \cdot S^T)^{-1} \cdot S = \\ &= I - 2 \cdot P_X \cdot S^T \cdot (S \cdot P_X \cdot S^T)^{-1} \cdot S + P_X \cdot S^T \cdot (S \cdot P_X \cdot S^T)^{-1} \cdot S = \\ &= I - P_X \cdot S^T \cdot (S \cdot P_X \cdot S^T)^{-1} \cdot S = Q \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$Q^T = I - S^T \cdot (S \cdot P_X \cdot S^T)^{-1} \cdot S \cdot P_X \neq Q \quad (2.55)$$

(2.54) innebär att  $Q$  är en projektion och (2.55) att  $Q$  är en icke-ortogonal projektion. Detta faktum har två konsekvenser. För det första om  $x_1$  och  $x_2$  betecknar de gemensamma faktorerna och  $x$  det gemensamma skattade värdet så är följande tre villkor möjliga

$$\hat{x} \leq \min(x_1, x_2) \quad (2.56)$$

$$\min(x_1, x_2) \leq \hat{x} \leq \max(x_1, x_2) \quad (2.57)$$

$$\hat{x} \geq \max(x_1, x_2) \quad (2.58)$$

T ex om  $x_1 = 0.4$  och  $x_2 = 0.5$  kan  $x$  komma såväl innanför som utanför intervallet  $(0.4, 0.5)$ .

För det andra innebär villkoren (2.54) och (2.55) att övriga komponenter i vektorn  $X$  kommer att påverkas av projektionen, något som är ganska naturligt eftersom den är icke-ortogonal.

### Resultat.

Resultaten av de individuella hypotestesterna ges i en NQ|4-tabell IQ, där NQ är antalet positiva tester. Elementen i IQ utgörs av komponentnumren i  $X$ -vektorn och där kolonnerna i tur och ordning betyder:

1:a kolonnen : polens realdel

2:a kolonnen : nollställets realdel

3:e kolonnen : polens imaginärdel

4:e kolonnen : nollställets imaginärdel

Nollor i 3:e eller 4:e kolonnen anger att motsvarande faktor är reell. Exempel på utskrift finns i appendix D.

#### 4. TESTUT.

I subrutinen TESTUT görs på basis av resultaten i TEST flervariabla tester, dvs den kombination av största möjliga antal poler och nollställen som ger ett positivt test bestäms. Om mer än en kombination av samma antal faktorer är möjlig, väljs den som ger minst testkvantitet. Under förutsättning att vissa faktorer är lika beräknas ett nytt estimat av vektorn  $X$ .

#### Testförfarande.

Samma beteckningar som ovan i TEST gäller även här.

Givet en vektor  $X$  som är en observation av en  $n$ -dimensionell stokastisk variabel  $\xi$  där

$$\xi \in N(m, P_X) \quad (2.59)$$

Bilda en ny variabel

$$\eta = S \cdot \xi \quad (2.60)$$

med

$$S = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_2 \\ \vdots \\ S_m \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

$$Y = S \cdot X \quad (2.62)$$

är en observation av  $\eta$ .

$\{S_i\}_1^m$  är på någon av formerna (2.32), (2.34), (2.38) eller (2.42).

Sedan bildas testkvantiteten och, om testet är positivt, ett nytt estimat av vektorn  $X$  på samma sätt som i TEST, se ovan.

#### Bästa möjliga kombination.

För att bestämma den kombination av maximalt antal poler och nollställen som ger ett positivt test förfars på följande sätt.

Ur tabellen IQ bildas någon kombination av så många faktorer som möjligt. Det maximala antalet faktorer ges av:

$$l = \min(n, k) \quad (2.63)$$

där  $n$  = antalet poler och  $k$  = antalet nollställen. Matrisen  $S$

bildas och testet sker på ovan angivet sätt. Sedan letas nya kombinationer upp, alla med samma antal faktorer, så att till sist alla möjligheter med  $l$  st faktorer har undersökts.

Om precis en av dessa kombinationer ger en tillräckligt liten testkvantitet är testet klart, om flera kombinationer är möjliga väljs den, vars testkvantitet är minst och om ingen kombination är tillåten sätts

$$l = l - 1 \quad (2.64)$$

och hela proceduren upprepas. Så småningom kommer någon kombination att vara tillåten eftersom tabellen IQ förutsätts vara icke-tom, dvs minst ett individuellt test är positivt.

#### Kommentarer.

Två saker bör observeras. För det första kommer de individuella tester som ger för stora testkvantiteter aldrig att undersökas som delar av de flervariabla testerna. Detta är, som följande exempel visar, rimligt.

Låt  $y$ ,  $y_1$  och  $y_2$  vara observationer av variablerna  $\eta$ ,  $\eta_1$  resp  $\eta_2$  där  $\eta_1$  och  $\eta_2$  utgör testvariablerna för två individuella tester och

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

är testvariabeln för ett flerdimensionellt test och

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Kovariansmatrisen  $P_\eta$  för  $\eta$  antages vara

$$P_\eta = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & p\sigma_1\sigma_2 \\ p\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

där  $|p| < 1$ .

De individuella testkvantiteterna  $\theta_1$  och  $\theta_2$  resp den flervariabla testkvantiteten  $\theta$  fås som



$$\theta_1 = y_1^2 / \sigma_1^2 \quad (2.68)$$

$$\theta_2 = y_2^2 / \sigma_2^2 \quad (2.69)$$

$$\theta = y^T P_\eta^{-1} y \quad (2.70)$$

Utveckling av (2.70) ger

$$\begin{aligned} \theta &= y^T P_\eta^{-1} y = [y_1^2 \sigma_2^2 + y_2^2 \sigma_1^2 - 2p y_1 y_2 \sigma_1 \sigma_2] / \\ &[\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 (1-p^2)] = [\theta_1 + \theta_2 \cdot 2p \sqrt{\theta_1} \cdot \theta_2] / (1-p^2) = \\ &= [(\sqrt{\theta_2} - p \sqrt{\theta_1})^2 + \theta_1 (1-p^2)] / (1-p^2) \geq \theta_1 \end{aligned} \quad (2.71)$$

På samma sätt fås

$$\theta \geq \theta_2 \quad (2.72)$$

och allmänt

$$\theta \geq \max_i \theta_i \quad (2.73)$$

vilket verkar ganska naturligt.

Resultatet är alltså att om  $\max_i \theta_i$  är stor så är också  $\theta$  stor. Det verkar alltså rimligt att inte ta hänsyn till de individuella tester, som ger för stora testkvantiteter.

För det andra finns möjligheten att en komplex faktor testas mot två olika reella faktorer. Därvid kommer matrisen  $S$  i (2.61) att innehålla samma rad två gånger enligt (2.38) eller (2.42) eftersom man testar om den komplexa faktorns imaginärdel är 0 två gånger. En av dessa rader måste alltså strykas. Detta sker automatisk i programmet.

Till sist när den bästa kombinationen av poler och nollställen har bestämts, anropas subrutinen PDIV, se nedan, som beräknar nya reducerade skattningar av de givna polynomen.

### 5. PDIV.

På grundval av resultaten i TESTUT, nämligen vilka faktorer som kan anses vara gemensamma, vill man på något sätt förkorta bort dessa faktorer ur de givna polynomen, för att få fram en ny modell av lägre ordning.

Tre olika sätt att utföra reduktionen har undersökts, se nästa avsnitt, och resultaten visar att det verkar rimligt att dividera de givna polynomen, med det gemensamma polynomet, som beräknas på basis av resultaten i TESTUT, de gemensamma faktorerna.

Givet två polynom

$$P(x) = p_0 x^n + \dots + p_n \quad (2.74)$$

som är ett av de ursprungliga polynomen, och

$$D(x) = d_0 x^m + \dots + d_m \quad (2.75)$$

som är det gemensamma polynomet.

Bestäm två polynom

$$Q(x) = q_0 x^{n-m} + \dots + q_{n-m} \quad (2.76)$$

och

$$R(x) = r_0 x^{m-1} + \dots + r_{m-1} \quad (2.77)$$

som uppfyller

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x) \quad (2.78)$$

$Q(x)$  och  $R(x)$  är alltså kvot- resp restpolynom.

Beräkningarna sker i två steg. Först beräknas  $Q(x)$  och därefter  $R(x)$ .

Beräkning av kvotpolynomet  $Q(x)$ .

$Q(x)$ , kvotpolynomet, fås ur följande samband:

$$(p_0 x^n + \dots + p_n) = (q_0 x^{n-m} + \dots + q_{n-m}) \cdot (d_0 x^m + \dots + d_m) \quad (2.79)$$

eller i matrisform

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_{n-m} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

som har lösningen

$$q_0 = p_0/d_0 \quad (2.81)$$

$$q_i = (p_i - \sum_{j=2}^{n-m} q_{i-j} \cdot d_j) / d_0, \quad 1 \leq i \leq m \quad (2.82)$$

Om  $n - m > m$ , dvs  $n > 2m$  sättes i (2.82)

$$d_j = 0, \quad m + 1 \leq j \leq n - m \quad (2.83)$$

#### Beräkning av restpolynomet $R(x)$ .

Restpolynomet  $R(x)$  erhålls ur sambandet:

$$\begin{aligned} (r_0 x^{m-1} + \dots + r_{m-1}) &= (p_0 x^n + \dots + p_n) - \\ &- (q_0 x^{n-m} + \dots + q_{n-m}) \cdot (d_0 x^m + \dots + d_m) \end{aligned} \quad (2.84)$$

Identifiering av termerna ger lösningen

$$r_i = p_{n-m+i} - \sum_{j=0}^{m-1} q_{n-2m+1+i-j} \cdot d_{m-j}, \quad 0 \leq i \leq m-1 \quad (2.85)$$

Alla beräkningar är härmed klara och återhopp sker till den överordnade subrutinen COMFAC.

#### Olika sätt att förkorta.

Som nämnts ovan har tre olika sätt att förkorta undersökts.

För det första kan man stryka de gemensamma faktorerna i den ursprungliga  $X$ -vektorn, metod A. För det andra kan man ur det nya estimatet av  $X$ -vektorn beräkna ett gemensamt polynom, och därefter dividera de givna polynomen med detta gemensamma, metod B. För det tredje kan man stryka de gemensamma faktorerna i det nya estimatet av  $X$ -vektorn, metod C.

Man kan tänka sig fler sätt att utföra förkortningar, men dessa tre förefaller vara ganska rimliga. Vilket av de tre sätten som ger bäst resultat har testats på följande sätt:

Ur en given modell har de nya reducerade polynomen  $P^*(x)$  och  $Q^*(x)$  bildats på de tre olika sätten och det gemensamma polynomet  $D(x)$  har erhållits på vanligt sätt. Polynomen  $P(x)$  och  $Q(x)$  bildas som

$$P(x) = P^*(x) \cdot D(x) = p_0 x^n + \dots + p_n \quad (2.86)$$

$$Q(x) = Q^*(x) \cdot D(x) = q_0 x^k + \dots + q_k \quad (2.87)$$

och vektorn

$$T^* = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_k) \quad (2.88)$$

Sedan beräknas testkvantiteten

$$\theta = (T - T^*)^T \cdot P_T^{-1} \cdot (T - T^*) \quad (2.89)$$

där  $T$  är av formen (2,1) eller (2,2) och  $P_T$  är kovariansmatrisen för  $T$ . Man vill ha  $\theta$  så liten som möjligt.

$\theta$  har bildats för några olika modeller av de två testsystemen  $S_1$  och  $S_2$ , se kapitel 4, och resultaten, tabell (A.9) i appendix A, visar att det andra förfaringssättet verkar ge bäst resultat, alltså division av de ursprungliga polynomen med det gemensamma.

### 3. Lösning 2: Euklides Algoritm.

#### 1. Problemformulering och översikt.

Problemet, som har formulerats i kapitel 1, är följande:

Givet två polynom, vars koefficienter kan representeras av en vektor  $T$  som

$$T = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n), \quad \text{B-fallet} \quad (3.1) = (1.5)$$

eller som

$$T = (a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_n), \quad \text{C-fallet} \quad (3.2) = (1.6)$$

samt den till vektorn  $T$  hörande kovariansmatrisen  $P_T$ . Problemet att avgöra om de båda givna polynomen har gemensamma faktorer eller inte, löses i detta fall genom att använda Euklides algoritm för polynom, se kapitel 1, som i korthet fungerar på så sätt att divisionsalgoritmen används på de båda polynomen, till dess att man får ett restpolynom som är nollpolynomet i statistisk mening. De upprepade divisionerna kan utföras på två något olika sätt i fortsättningen kallade version 1 resp version 2, se kapitel 1.

I programvaran som realiserar Euklides algoritm behandlas problemet enligt figur 3.1 nedan, där de olika delarna utgör huvudprogram resp subrutiner.

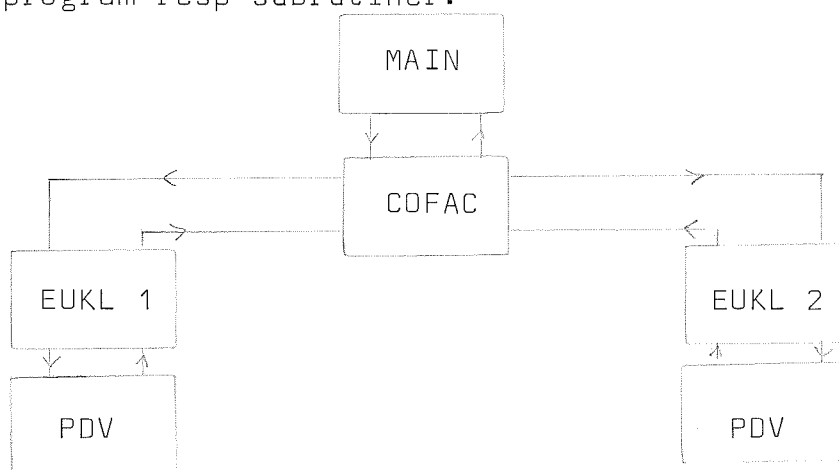


fig 3.1

MAIN är användarnas eget huvudprogram. Här beräknas eller läses vektorn  $T$  och kovariansmatrisen  $P_T$  in, samt avgörs om B- eller C-fallet föreligger. Därefter anropas den överordnade subrutinen COFAC, som organiserar den fortsatta behandlingen. Vid programets slut sker återhopp till MAIN.

COFAC är den överordnade subrutinen. Här modifieras vektorn  $T$  och kovariansmatrisen  $P_T$  beroende på om B- eller C-fallet föreligger och sedan anropas dels EUKL 1 och dels EUKL 2 som använder Euklides algoritm i de båda versionerna.

EUKL 1. Här bestäms gemensamma faktorer till de givna polynomen genom att använda Euklides algoritm i version 1. Om polynomen har gemensamma faktorer anropas subrutinen PDV, som dividerar de ursprungliga polynomen med de gemensamma faktorerna.

EUKL 2 fungerar på precis samma sätt som EUKL 1 med den skillnaden att Euklides algoritm används i version 2.

PDV. Här divideras de givna polynomen med de gemensamma faktorer, som har beräknats dels i EUKL 1 och dels i EUKL 2.

Resten av detta kapitel ägnas åt att i detalj studera verknings sättet hos de fyra subrutinerna. Det bör observeras att båda versionerna alltid anropas från subrutinen COFAC. De fyra subrutinerna är dokumenterade i appendix D. Exempel på resultatutskrift finns i appendix D.

## 2. COFAC.

Från huvudprogrammet MAIN har man vektorn  $T$  och dess kovariansmatris  $P_T$ . Man vill modifiera  $T$  och  $P_T$  så att polynomets högstgradskoefficienter läggs till  $T$  och motsvarande kovarianser till  $P_T$ .

I B-fallet bildas vektorn

$$T' = (1, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \quad (3.3)$$

och kovariansmatrisen

$$P_{T'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & P_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{1,2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & P_{2n,1} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{2n,2n} \end{array} \end{array} \quad (3.4)$$

Den inramade delen utgör den ursprungliga kovariansmatrisen  $P_T$ .

I C-fallet fås på motsvarande sätt

$$T' = (1, a_1, \dots, a_n, 1, c_1, \dots, c_n) \quad (3.5)$$

och dess kovariansmatris blir:

$$P_T' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{1,1} & & p_{1,n} & 0 & p_{1,n+1} & & p_{1,2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & p_{n,1} & \cdot & \cdot & p_{n,n} & 0 & p_{n,n+1} & p_{n,2n} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{n+1,1} & \cdot & \cdot & p_{n+1,n} & 0 & p_{n+1,n+1} & \cdot & \cdot & p_{n+1,2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & p_{2n,1} & \cdot & \cdot & p_{2n,n} & 0 & p_{2n,n+1} & \cdot & \cdot & p_{2n,2n} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

där de inramade delarna utgör den ursprungliga kovariansmatrisen  $P_T$ .

Anledningen till dessa modifieringar är att den fortsatta behandlingen blir enhetligare.

### 3. EUKL 1.

I denna surutin beräknas gemensamma faktorer till två givna polynom, genom att använda version 1 av Euklides algoritm, se kapitel 1.

#### Division av polynomen.

Givet är två polynom

$$P(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n \quad (3.7)$$

$$Q(x) = q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \dots + q_n \quad (3.8)$$

där  $q_0 = 0$ , B-fallet, eller  $q_0 = 1$ , C-fallet.

Antag först att  $q_0 = 1$ , dvs C-fallet föreligger.

Restpolynomet

$$R(x) = r_1 x^{n-1} + \dots + r_n \quad (3.9)$$

fås ur sambandet

$$R(x) = P(x) - \frac{p_0}{q_0} \cdot Q(x) \quad (3.10)$$

eller

$$r_i = p_i - \frac{p_0}{q_0} \cdot q_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.11)$$

Inför vektorerna  $X$  och  $Y$  genom

$$X = T' = (p_0, \dots, p_n, q_0, \dots, q_n) \quad (3.12)$$

$$Y = (r_1, \dots, r_n, q_0, \dots, q_n) \quad (3.13)$$

Motsvarande kovariansmatriser är  $P_X$  resp  $P_Y$  med

$$P_X = P_T, \quad (3.14)$$

kovariansmatrisen  $P_Y$  bildas ur  $P_X$  under antagandet att

$$Y = f(X) \quad (3.15)$$

är en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion och att linearisering av (3.13) är tillåten. Då blir

$$P_Y = \frac{dY}{dX} \cdot P_X \cdot \left(\frac{dY}{dX}\right)^T \quad (3.16)$$

i enlighet med vad som har visats i kapitel 1.



Funktionalmatrisen  $\frac{dY}{dX}$  fås som

$$\frac{dY}{dX} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad (3.17)$$

där  $n \mid (n+1)$ -matrisen

$$H_1 = \begin{bmatrix} -\frac{q_1}{q_0} & 1 & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & 0 & \\ \cdot & & 0 & & \\ -\frac{q_1}{q_0} & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

och  $n \mid n+1$ -matrisen

$$H_2 = \begin{bmatrix} \frac{p_0}{q_0} \cdot q_1 & -\frac{p_0}{q_0} & & & \\ \cdot & & & & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & 0 & \\ \frac{p_0}{q_0} \cdot q_n & & & & -\frac{p_0}{q_0} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$\frac{dY}{dX}$  är bestämd och därmed kan  $P_Y$  beräknas.

Sedan görs hypotestestet enligt nedan angivet sätt.

Om  $q_0 = 0$  dvs B-fallet föreligger sker divisionen på följande sätt.

Givet polynomen

$$P(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n \quad (3.20)$$

$$Q(x) = q_1 x^{n-1} + \dots + q_n \quad (3.21)$$

Restpolynomet

$$R(x) = r_1 x^{n-2} + \dots + r_{n-1} \quad (3.22)$$

fås ur sambandet

$$R(x) = P(x) - (k_1 x + k_2) \cdot Q(x) \quad (3.23)$$

Identifiering av termerna i (3.23) ger

$$k_1 = \frac{p_0}{q_1} \tag{3.24}$$

$$k_2 = \frac{p_1 q_1 - p_0 q_2}{q_1^2} \tag{3.25}$$

koefficienterna i  $R(x)$  ges av

$$r_i = p_{i+1} - k_2 \cdot q_{i+1} - k_1 \cdot q_{i+2}, \quad 1 \leq i \leq n - 2 \tag{3.26}$$

$$r_{n-1} = p_n - k_2 \cdot q_n \tag{3.27}$$

Inför som tidigare vektorerna

$$X = T' = (p_0, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \tag{3.28}$$

$$Y = (r_1, \dots, r_{n-1}, q_1, \dots, q_n)$$

och kovariansmatriserna  $P_X$  resp  $P_Y$ , där

$$P_X = P_{T'} \tag{3.29}$$

Med samma förutsättning som ovan för C-fallet blir

$$P_Y = \frac{dY}{dX} \cdot P_X \cdot \left(\frac{dY}{dX}\right)^T \tag{3.30}$$

Funktionalmatrisen  $\frac{dY}{dX}$  beräknas ur

$$\frac{dY}{dX} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ 0 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

där  $(n-1) | (n+1)$ -matrisen

$$H_1 = \begin{bmatrix} \frac{q_2 \cdot q_2 - q_3}{q_1^2} & -\frac{p_1 \cdot q_2}{q_1} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \frac{q_2 \cdot q_{n-1} - q_n}{q_1^2} & \cdot & & & \\ \vdots & & 0 & & \\ \frac{q_2 \cdot q_n}{q_1^2} & -\frac{p_1 \cdot q_n}{q_1} & & & 1 \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

och  $(n-1) \times n$ -matrisen

$$H_2 = \begin{bmatrix} \alpha \cdot q_2 + \frac{p_0}{2} \cdot q_3 & -\alpha & -k_1 \\ \alpha \cdot q_3 + \frac{p_0}{2} \cdot q_4 & \frac{p_0}{2} \cdot q_3 & -k_2 \\ \alpha \cdot q_{n-1} + \frac{p_0}{2} \cdot q_n & & -k_1 \\ \alpha \cdot q_n & \frac{p_0}{2} \cdot q_n & -k_2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

där

$$\alpha = \frac{p_1 q_1 - 2p_0 q_2^2}{q_1^3}$$

och  $k_1$  och  $k_2$  definieras av (3.24) resp (3.25).

Därmed är  $\frac{dY}{dX}$  bestämd och  $P_Y$  kan beräknas.

#### Testförfarande.

Hypotestestet sker på följande sätt.

Inför en 1-dimensionell stokastisk variabel  $\zeta$ ; med en observation  $Z$  av  $\zeta$  där vektorn

$$Z = (r_1, \dots, r_1) \quad (3.35)$$

utgörs av restpolynomets koefficienter.

Nollhypotesen  $H_0$  är att divisionen är slutförd, dvs restpolynommet är identiskt noll. Testa alltså nollhypotesen

$$H_0 : E(\zeta) = 0 \quad \text{mot} \quad (3.36)$$

$$H_1 : E(\zeta) \neq 0 \quad (3.37)$$

Under nollhypotesen och med de antagnaden om normalfördelning, som preciseras i kapitel 1 gäller

$$\zeta \stackrel{L}{\sim} N(0, P_Z) \quad (3.38)$$

där  $1 \times 1$ -matrisen

$$P_Y = \begin{bmatrix} P_Z \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Under nollhypotesen, dvs om (3.38) är uppfylld gäller

$$\zeta^T P_Z^{-1} \zeta \underset{\sim}{\in} \chi^2(1) \quad (3.40)$$

Testkvantitet och kritiskt område väljs nu som i fallet TPOL, dvs testkvantiteten väljs som

$$\theta = Z^T P_Z^{-1} Z \quad (3.41)$$

och nollhypotesen förkastas om  $\theta \geq \chi_{0.05}^2(1)$  och annars godtas den.

Om nollhypotesen förkastas sätts

$$P(x) = Q(x) \quad (3.42)$$

$$Q(x) = R(x) \quad (3.43)$$

och proceduren upprepas enligt B-fallet ovan tills antingen testet utfaller positivt eller restpolynomet är konstant. Om detta senare fall inträffar saknar polynomen gemensamma faktorer.

Om nollhypotesen godtas utgör det aktuella kvotpolynomet de gemensamma faktorerna och subrutinen PDV anropas och de ursprungliga polynomen divideras med det gemensamma.

#### 4. EUKL 2.

Här beräknas gemensamma faktorer till två givna polynom, genom att använda Euklides algoritm i version 2, se kapitel 1. Enda skillnaden jämfört med version 1 är algoritmerna (3.11) resp (3.26) och (3.27), som beräknar restpolynomets koefficienter. Därmed påverkas utseendet av funktionalmatriserna (3.17) resp (3.31).

##### Division av polynomen.

Som tidigare är två polynom givna genom

$$P(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n \quad (3.44)$$

$$Q(x) = q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \dots + q_n \quad (3.45)$$

där  $q_0 = 0$ , B-fallet, eller  $q_0 = 1$ , C-fallet.

Antag först att  $q_0 = 1$ , dvs C-fallet föreligger.

Restpolynomets

$$R(x) = r_1 x^{n-1} + \dots + r_n \quad (3.46)$$

fås ur sambandet

$$R(x) = q_0 \cdot P(x) - p_0 \cdot Q(x) \quad (3.47)$$

eller

$$r_i = q_0 \cdot p_i - p_0 \cdot q_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.48)$$

Inför vektorerna  $X$  och  $Y$  genom

$$X = T' = (p_0, \dots, p_n, q_0, \dots, q_n) \quad (3.49)$$

$$Y = (r_1, \dots, r_n, q_0, \dots, q_n)$$

Motsvarande kovariansmatriser är  $P_X$  och  $P_Y$  med

$$P_X = P_T, \quad (3.50)$$

Under förutsättning att  $X$  och  $Y$  kan beskrivas av en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion

$$Y = f(X) \quad (3.51)$$

erhålles kovariansmatrisen  $P_Y$  genom linearisering av (3.51)

$$P_Y = \frac{dY}{dX} \cdot P_X \cdot \left(\frac{dY}{dX}\right)^T \quad (3.52)$$

Funktionalmatrisen erhålles som

$$\frac{dY}{dX} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

där  $n \mid (n+1)$ -matrisen

$$H_1 = \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ -q_n & & & q_0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

och  $n \mid (n+1)$ -matrisen

$$H_2 = \begin{bmatrix} p_1 & -p_0 & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ p_n & & & -p_0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Därmed är funktionalmatrisen  $\frac{dY}{dX}$  bestämd och kovariansmatrisen  $P_Y$  kan beräknas.

Hypotestestet sker därför på samma sätt som beskrivits ovan under EUKL 1.

Om  $q_0 = 0$ , dvs B-fallet är för handen, utförs divisionen enligt följande:

Givet de två polynomen

$$P(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n \quad (3.56)$$

$$Q(x) = q_1 x^{n-1} + \dots + q_n \quad (3.55)$$

Restpolynomet

$$R(x) = r_1 x^{n-2} + \dots + r_{n-1} \quad (3.58)$$

fås ur sambandet

$$R(x) = k_1 P(x) + (k_2 + k_3 x) Q(x) \quad (3.59)$$

konstanterna  $k_1, k_2$  och  $k_3$  fås genom att identifiera termvis i (3.59)

$$k_1 = -q_1^2 \quad (3.60)$$

$$k_2 = p_1 q_1 - p_0 q_2 \quad (3.61)$$

$$k_3 = p_0 q_1 \quad (3.62)$$

koefficienterna i  $R(x)$  ges av

$$r_i = k_1 \cdot p_{i+1} + k_2 \cdot q_{i+1} + k_3 \cdot q_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-2 \quad (3.63)$$

$$r_{n-1} = k_1 \cdot p_n + k_2 \cdot q_n \quad (3.64)$$

som tidigare införs vektorerna

$$X = T' = (p_0, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \quad (3.65)$$

$$Y = (r_1, \dots, r_{n-1}, q_1, \dots, q_n) \quad (3.66)$$

och tillhörande kovariansmatriser  $P_X$  och  $P_Y$  med

$$P_X = P_T, \quad (3.67)$$

Med samma förutsättningar som i C-fallet ovan fås kovariansmatrisen

$$P_Y = \frac{dY}{dX} \cdot P_X \cdot \left(\frac{dY}{dX}\right)^T \quad (3.68)$$

Funktionalmatrisen beräknas som

$$\frac{dY}{dX} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

där  $(n-1) | (n+1)$ -matrisen

$$H_1 = \begin{bmatrix} -q_2 \cdot q_2 + q_1 \cdot q_3 & q_1 \cdot q_2 & -p_1^2 & & \\ & \vdots & & & 0 \\ & \vdots & & & \\ & \vdots & & & 0 \\ & \vdots & & & \\ -q_2 \cdot q_{n-1} + q_1 \cdot q_n & q_1 \cdot q_{n-1} & & & \\ -q_2 \cdot q_n & q_1 \cdot q_n & & & -p_1^2 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

och  $(n-1) | n$ -matrisen

$$H_2 = \begin{bmatrix} -2q_1p_2 + p_1q_2 + p_0q_3 & -p_0q_2 + k_2 & k_3 & 0 \\ & -p_0q_3 & k_2 & \\ & & & k_3 \\ -2q_1p_{n-1} + p_1q_{n-1} + p_0q_n & & 0 & \\ -2q_1p_n + p_1q_n & -p_0q_n & & k_2 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Därmed är  $\frac{dY}{dX}$  fullständigt bestämd och kovariansmatrisen  $P_Y$  kan beräknas. Sedan vidtar testandet.

### Testförfarande.

Testet sker på precis samma sätt som det under EUKL 1 beskrivna.



### 5. PDV.

Då basis av de resultat som erhållits i EUKL 1 resp EUKL 2 vill man förkorta de givna polynomen med det gemensamma.

Givet är de två ursprungliga polynomen  $P(x)$  och  $Q(x)$  samt det genom analysen bestämda gemensamma polynomet  $D(x)$ . Bestäm de reducerade polynomen  $\hat{P}(x)$  och  $\hat{Q}(x)$  samt resp restpolynom  $R_1(x)$  och  $R_2(x)$  så att

$$P(x) = \hat{P}(x) \cdot D(x) + R_1(x) \quad (3.72)$$

$$Q(x) = \hat{Q}(x) \cdot D(x) + R_2(x) \quad (3.73)$$

så att

$$\text{grad } R_1 = \text{grad } D - 1 \quad (3.74)$$

$$\text{grad } R_2 = \text{grad } D - 1 \quad (3.75)$$

Beräkningarna blir därvid exakt desamma som motsvarande beskrivna i kapitel 2 under PDIV.

#### 4. Tillämpningar på testexempel.

I syfte att testa ut de båda metoderna, TPOL resp Euklides algoritm, har de prövats på modeller av olika ordningstal av tre olika kända system. De tre systemen, som i fortsättningen kallas  $S_1$ ,  $S_2$  resp  $S_3$ , beskrivs i det följande.

##### 1. De tre systemen.

###### System $S_1$ :

Det första systemet är ett första ordningens system som representeras av

$$(1.0 - 0.5 \cdot q^{-1})y(t) = 1.0 \cdot q^{-1} \cdot u(t) + (1.0 + 0.5 \cdot q^{-1})e(t) \quad (4.1)$$

där  $u(t)$  och  $y(t)$  betyder in- resp utsignal. Bruset,  $e(t)$  har vid simuleringarna utgjorts av vitt brus.  $q^{-1}$  betyder som vanligt skiftoperatoren bakåt, dvs  $q^{-1}y(t) = y(t-1)$ .

Systemets överföringsfunktion har som framgår av (4.1) en pol i 0.5 och saknar nollställen.

###### Systemet $S_2$ .

Nästa system är ett andra ordningens system som ges av

$$(1.0 - 1.5 \cdot q^{-1} + 0.7 \cdot q^{-2})y(t) = (1.0 \cdot q^{-1} + 0.5 \cdot q^{-2})u(t) + (1.0 - 1.0 \cdot q^{-1} + 0.2 \cdot q^{-2})e(t) \quad (4.2)$$

Här har systemets överföringsfunktion poler i  $0.75 \pm i \cdot 0.37$  och ett nollställe i  $-0.5$ .

###### Systemet $S_3$ .

Betrakta följande kontinuerliga system

$$Y(s) = \left( \frac{1}{s+1} + \frac{5}{s+5} \right) U(s) \quad (4.3)$$

där versalerna betecknar Laplacetransformen av in- resp utsignal. Systemet samplas med ett samplingsintervall 0.1 sek och vitt mätbrus adderas. Systemet representeras då av:

$$(1.0 - 1.511q^{-1} + 0.540q^{-2})y(t) = (0.489q^{-1} - 0.413q^{-2})u(t) + (1.0 - 1.511q^{-1} + 0.549q^{-2})e(t) \quad (4.4)$$

Detta system betecknas i fortsättningen med  $S_3$ . Systemets överföringsfunktion har poler i 0.606 och 0.906 samt ett nollställe i 0.845.

## 2. Modellidentifiering.

Modeller av systemen  $S_1$  och  $S_2$  har bildats med hjälp av subrutinen LST, som beräknar en teoretisk, asymptotisk minstakvadratmodell av ett givet system. Modellernas ordningstal har varierats mellan 2 och 5. Insignalen har utgjorts av vitt brus vars varians har varit dels 1.0 och för  $S_2$  även 0.01. Antalet mätpunkter har hela tiden varit 500. Modeller, som är bildade på detta sätt, kallas i fortsättningen för LST-modeller.

Modeller av systemet  $S_3$  har bildats på följande sätt. Först har systemet simulerats med hjälp av subrutinen SIMUL. Därvid har som insignal valts en PRBS med amplituden 1.0 och antalet mätpunkter har varit 500. Brusets varians har satts till 1.0. Därefter har minstakvadratmodeller bildats med hjälp av subrutinen LS. Modellernas ordningstal har varierats från 2 till 5. Modeller som bildats på detta sätt kallas i fortsättningen för LS-modeller.

Det visar sig att systemet  $S_3$  är svårt att identifiera på ett tillfredsställande sätt, och därför gjordes försök att som insignal vid simuleringen välja en utdragen PRBS, men resultaten blev inte bättre och redovisas därför inte.

### 3. Sammanfattning av resultaten.

#### TPOL

För systemet  $S_1$  gäller att TPOL ger rätt ordningstal för 3:e, 4:e och 5:e ordningens modeller. Det reducerade systemets pol hamnar i allmänhet ganska långt från det verkliga systemets, avvikelsen är i storleksordningen 10-20 %, se tabell A.1. Stegsvaren för  $S_1$ , 5:e ordningens LST-modell och 1:a ordningens reducerade modell finns återgiven i diagram A.1. Stegsvaren har beräknats med hjälp av subrutinen SIMUL. LST-modeller av  $S_2$  har bildats med brusets varians dels 0.01, tabell A.2, och dels 1.0 tabell A.3. I det första fallet ger samtliga reduktioner rätt ordningstal, medan i det andra fallet reduktionen av 2:a och 4:e ordningens modeller ger rätt ordningstal. Reduktion av 3:e och 5:e ordningens modeller ger till resultat två 3:e ordningens modeller. Dessa två modeller är dock otillfredsställande då båda systemens överföringsfunktioner har en negativ reell pol, dvs systemen saknar en kontinuerlig motsvarighet. Stegsvaren för  $S_2$ , 4:e ordningens LST-modell med brusets varians 1.0 och den till 2:a ordningen reducerade modellen finns återgivna i diagram A.2. Vid reduktion av modeller av  $S_3$  erhålles i samtliga fall ett 1:a ordningens system. Som framgår av tabell A.4 kommer endast den snabba polen med vid identifieringen medan den långsamma polen och nollstället aldrig kommer med. Slutsatsen är att LS-identifiering av system av  $S_3$ :s struktur följt av reduktion enligt algoritmen TPOL, i regel ger en modell av för lågt ordningstal. Den erhållna modellen behöver dock inte bli alldeles oacceptabel. För att visa de fysikaliska likheterna mellan dels  $S_3$  och dels 1:a ordningens reducerade modellens fysikaliska egenskaper, har Bodediagrammen för de kontinuerliga motsvarigheterna till  $S_3$  och den från 5:e till 1:a ordningen reducerade LS-modellen återgivits i diagram A.3. 1:a ordningens kontinuerliga system ges av överföringsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{1.3}{1+0.22s} \quad (4.5)$$

och andra ordningens kontinuerliga system ges av överföringsfunktionen

$$G_2(s) = \frac{2 \cdot (1+0.5 \cdot s)}{(1+0.2 \cdot s) \cdot (1+s)} \quad (4.6)$$

Som framgår av diagrammet skiljer sig de båda systemens uppförande inte alltför mycket.

Sammanfattningsvis kan sägas att metoden fungerar ganska bra på system, vars struktur inte är alltför komplicerad, dvs systemets poler och nollställena ligger inte alltför nära varandra. Det reducerade systemets poler och nollställena kan dock skilja sig avsevärt från det verkliga systemets. Dessutom får, för båda systemen  $S_1$  och  $S_2$ , det reducerade systemet, en högre statisk förstärkning än både det verkliga systemet och den icke-reducerade modellen.

På modeller av system, som har poler och nollställena nära varandra, exempelvis  $S_3$ , mixer-settlern och kärnkraftreaktorn i Ågesta, se nedan, kan TPOL inte användas, då poler och nollställena som ligger nära varandra, i regel kommer att förkortas. Den reducerade modellen får då för lågt ordningstal. Detta är emellertid ett rimligt resultat med tanke på TPOLs karaktär.

## Euklides algoritm.

### Version 1.

Euklides algoritm i version 1 ger på LST-modeller av  $S_1$  rätt ordningstal för alla modellerna, och dessutom gäller att det reducerade systemets pol hamnar exakt rätt när modellens ordningstal är minst två. Resultaten finns i tabell A.5.

Verkande på modeller av  $S_2$  ger algoritmen rätt ordningstal i alla fallen. När modellens ordningstal är minst fyra, hamnar det reducerade systemets nollställe och polernas realdel rätt, och när modellens ordningstal är minst fem, hamnar både nollstället och polerna precis rätt, se tabell A.6.

### Version 2.

För LST-modeller av  $S_1$  gäller att Euklides algoritm i version 2 inte kan reducera andra ordningens modell, men för övrigt fås precis samma resultat som i version 1, se tabell A.7.

Vid reduktion av LST-modeller av  $S_2$  ger de båda versionerna precis samma resultat, se tabell A.8.

Genomgående gäller att version 2 ger större testkvantitet än version 1, c:a 2 - 10 gånger större, men testkvantiteterna i de båda versionerna är här inget mått på den statistiska signifikansen och skall således inte tillmätas någon avgörande betydelse.

Låt  $n$  beteckna systemets verkliga ordningstal,  $n^*$  modellens ordningstal, insignalen utgöres av vitt brus och mätbruset vara oberoende av insignalen. Om sambandet

$$n^* \geq 3 \cdot n - 1 \quad (4.7)$$

gäller så är det visat i [1] att Euklides algoritm ger rätt resultat både vad beträffar den reducerade modellens ordningstal och läget av dess poler och nollställena, helt i överensstämmelse med de ovan redovisade resultaten.

Om emellertid insignalen ej utgöres av vitt brus, ger metoden i allmänhet ett dåligt resultat, t ex kan stabila modeller reduceras till instabila modeller.

Euklides algoritm får allmänt sägas vara ett olämpligt sätt att avgöra om en given överföringsfunktion har gemensamma faktorer eller inte. Metoden har därför inte använts på LS-modeller av  $S_3$  eller de båda praktikfallen, mixer-settlern resp kärnkraftreaktorn i Ågesta.

## 5. Tillämpningar på verkliga data.

Algoritmen TPOL har också testats på två verkliga system, det ena, den s k mixer-settlern, finns beskrivet i [7] och det andra, kärnkraftreaktorn i Ågesta, finns beskrivet i [8].

### 1. Mixer-settlern.

Systemet kan beskrivas av två olika utsignaler, och deras relation till en gemensam insignal. Utsignalerna representerar dels en vattenfas och dels en organisk fas, i fortsättningen betecknade med AQ-fas resp ORG-fas. TPOL har undersökts på modeller bildade genom maximum-likelihood skattningen, s k ML-modeller, för både AQ- resp ORG-fas. ML-modellerna har varit av andra ordningen. För de ursprungliga och de reducerade modellerna har stegsvar, modellfel och residualer beräknats. Resultaten, tabeller och kurvor, finns i appendix B, och en sammanfattning följer nedan.

### 2. Kärnkraftreaktorn i Ågesta.

Detta system antas kunna beskrivas av ett enkelt insignal - utsignal samband. TPOL har undersökts på en tredje ordningens LS-modell. Stegsvär, modellfel och residualer har beräknats dels för ett tredje ordningens ML-modell, givet i [8], och dels för en tredje ordningens LS-modell och dels reducerade modeller. Resultaten återges i appendix C och en sammanfattning av resultaten följer nedan.

### 3. Sammanfattning av resultaten.

#### Mixer-settlern.

Försöket finns beskrivet i [7], och här ges endast en redovisning av resultaten.

#### AQ-fas.

Andra ordningens maximum-likelihood modell, ML-modell är enligt [7]

$$(1.0 - 1.46q^{-1} + 0.48q^{-2})y(t) = (0.22q^{-1} - 0.20q^{-2})u(t) + (1.0 - 1.12q^{-1} + 0.17q^{-2})e(t) \quad (5.1)$$

TPOL reducerar till en första ordningens modell

$$(1.0 - 0.52q^{-1})y(t) = 0.22q^{-1}u(t) + (1.0 - 0.16q^{-1})e(t) \quad (5.2)$$

Modellfel och residualer har för båda modellerna beräknats och ritats med hjälp av programmet MLPLOT och resultaten finns återgivna i tabell B.1 resp diagram B.1 och B.2. Som framgår av diagrammen utgör andra ordningens modell (5.1) en bättre modell av systemet än första ordningens modell (5.2). Enligt [7] bör en andra ordningens modell vara lämplig av fysikaliska skäl. Stegsvaren för båda systemen har beräknats och är återgivna i diagram B.3.

Vid försök att reducera en tredje ordningens ML-modell erhöles en andra ordningens modell, men eftersom denna har en negativ reell pol, representerar modellen ett fysikaliskt orimligt system, då en kontinuerlig motsvarighet saknas. TPOL fungerar alltså dåligt i dessa fall.

#### ORG-fas.

En andra ordningens ML-modell är enligt [7]:

$$(1.0-1.44q^{-1}+0.46q^{-2})y(t) = (0.048q^{-1}-0.043q^{-2})u(t) + (1.0-1.17q^{-1}+0.26q^{-2})e(t) \quad (5.3)$$

Denna modell reducerar TPOL till en första ordningens modell

$$(1.0-0.51q^{-1})y(t) = 0.047q^{-1}u(t) + (1.0-0.26q^{-1})e(t) \quad (5.4)$$

Modellfel och residualer har beräknats och ritats upp för de två systemen och finns i tabell B.2 resp diagram B.4 och B.5. Även här verkar en andra ordningens modell vara att föredra framför en första ordningens modell, något som understryks av de systemets fysikaliska egenskaper, beskrivna i [7]. De båda systemens stegsvar har beräknats och är återgivna i diagram B.6.

Vid försök att reducera en tredje ordningens ML-modell erhöles en andra ordningens modell, vars ena pol är reell och negativ, dvs modellen representerar ett fysikaliskt orimligt system.

Resultaten visar att TPOL har en benägenhet att förkorta för mycket, dvs poler och nollställen som ligger nära varandra, betraktas ofta som lika utan att de är det.



### Kärnkraftreaktorn i Ågesta.

Försöket är hämtat från [8] och här återges endast resultaten. Enligt [8] bör en tredje ordningens modell vara en lämplig approximation av systemet. Följande modell anges:

$$(1.0-2.06q^{-1}+1.25q^{-2}-0.19q^3)y(t) = (168.4q^{-1}-297.6q^{-2}+129.6q^{-3})u(t)+(1.0-2.01q^{-1}+1.22q^{-2}-0.20q^{-3})e(t) \quad (5.5)$$

Då uppgift om kovariansmatris för denna modell saknas i [8] har en tredje ordningens LS-modell beräknats ur en given mätserie av in- och utsignaler, och sedan har TPOL testats på LS-modellen.

Tredje ordningens LS-modell är

$$(1.0-0.30q^{-1}-0.26q^{-2}+0.0046q^{-3})y(t) = (166.1q^{-1}+6.64q^{-2}-45.2q^{-3})u(t) + e(t) \quad (5.6)$$

Modellen representerar som framgår av tabell C.1, ett fysikaliskt orimligt system. Reduktion med hjälp av TPOL gav första ordningens modell:

$$(1.0-0.24q^{-1})y(t) = 166.1q^{-1}u(t) + e(t) \quad (5.7)$$

Som tidigare har modellfel och residualer för de tre systemen beräknats och ritats med hjälp av programmet MLPLOT. Resultaten finns i tabell C.1 resp diagrammen C.1, C.2 och C.3. Slutligen har stegsvaren för de tre systemen beräknats och är återgivna i diagram C.4.

6. Referenser.

- [1] - T.Söderström: On the Simplification of Dynamic Models Obtained by Least Squares Identification. Forthcoming report, Lund Institute of Technology, Division of Automatic Control.
- [2] - T.Nagell: Lärobok i algebra. Almqvist & Wiksell, 1962.
- [3] - H.Cramér: The Mathematical Methods of Statistics. Almqvist & Wiksell, 1945.
- [4] - G.Blom: Statistikteori med tillämpningar. Studentlitteratur, 1970.
- [5] - Inst. för Reglerteknik: Programbibliotek i FORTRAN V på UNIVAC 1108. BIB × REGRL\$.
- [6] - J.H.Wilkinson: Rounding Errors in Algebraic Processes. Her Majesty's Stationary Office, London, 1963.
- [7] - G.Aly, B.Wittenmark: Dynamic Behaviour of Mixer-settlers II. Mathematical Models and Identification Methods. Journal of Applied Chemistry and Biotechnology, 1972, 22, 1165-1184.
- [8] - I.Gustavsson: Maximum Likelihood Identification of Dynamic of the Ågesta Reactor and Comparison with Results of Spectral Analysis. Report 6903, Lund Institute of Technology, Division of Automatic Control, 1969.

## Appendix A.

TPOL verkande på LST-modeller av  $S_1$ 

n	poler	nollst	k				
1	0.5		2.0				

$n^*$	poler	nollst	k	$n_{red}^*$	poler	nollst	k	$\theta$
2	$0.46 \pm i \cdot 0.24$	0.42	1.67					
3	$0.19 \pm i \cdot 0.42$ 0.60	$0.24 \pm i \cdot 0.38$	2.17	1	0.54		2.16	5.1
4	$-0.012 \pm i \cdot 0.47$ $0.51 \pm i \cdot 0.17$	$0.019 \pm i \cdot 0.47$ 0.46	1.92	1	0.60		2.48	1.8
5	$-0.15 \pm i \cdot 0.46$ $0.36 \pm i \cdot 0.33$ 0.58	$-0.13 \pm i \cdot 0.46$ $0.38 \pm i \cdot 0.27$	2.04	1	0.59		2.45	0.99

Tabell A.1.

- $n$  = systemets verkliga ordningstal  
 $n^*$  = modellens ordningstal  
 $n_{red}^*$  = den reducerade modellens ordningstal  
 $k$  = statisk förstärkning  
 $\theta$  = testkvantitet

Stegsvar för olika modeller av  $S_1$

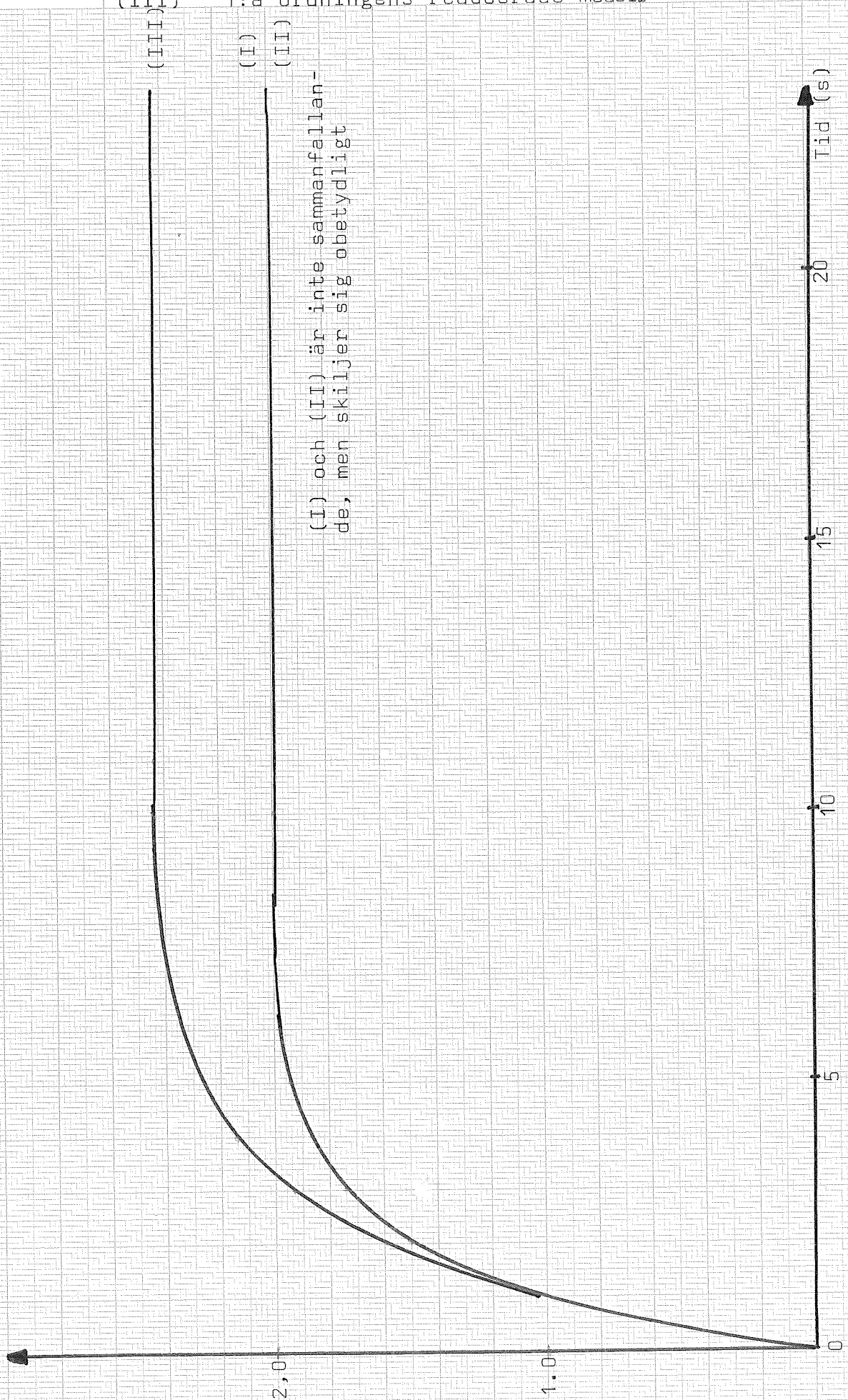
A:2

(I) - Det verkliga systemet

(II) - 5:e ordningens LST-modell

Diagram A.1.

(III) - 1:a ordningens reducerade modell



TPOL verkande på LST-modeller av  $S_2$  med brusets varians 0.01

n	poler	nollst	k
1	$0.75 \pm i \cdot 0.37$	-0.50	7.5

$n^*$	poler	nollst	k	$n^*$ <sub>red</sub>	poler	nollst	k	$\theta$
2	$0.75 \pm i \cdot 0.37$	-0.50	7.5					
3	$0.75 \pm i \cdot 0.37$ -0.59	-0.56	7.5	2	$0.75 \pm i \cdot 0.37$	-0.50	7.6	0.002
4	$-0.41 \pm i \cdot 0.46$ $0.75 \pm i \cdot 0.37$	$-0.40 \pm i \cdot 0.46$ -0.52	7.5	2	$0.75 \pm i \cdot 0.36$	-0.51	7.8	0.02
5	$-0.14 \pm i \cdot 0.62$ $0.75 \pm i \cdot 0.37$ -0.62	$-0.14 \pm i \cdot 0.62$ -0.62 -0.51	7.5	2	$0.75 \pm i \cdot 0.36$	-0.51	7.7	0.003

Tabell A.2

TPOL verkande på LST-modeller av  $S_2$  med brusets varians 1.0

n	poler	nollst	k					
2	$0.75 \pm i \cdot 0.37$	-0.5	7.5					
$n^*$	poler	nollst	k	$n_{red}^*$	poler	nollst	k	$\theta$
2	$0.61 \pm i \cdot 0.28$	-0.77	7.9					
3	$0.70 \pm i \cdot 0.36$ 0.55	$-0.58 \pm i \cdot 0.35$	7.7					
4	$-0.39 \pm i \cdot 0.45$ 0.72 $\pm i \cdot 0.37$	$-0.31 \pm i \cdot 0.56$ 0.72	7.6	2	$0.70 \pm i \cdot 0.25$	-0.60	10.4	5.3
5	$-0.14 \pm i \cdot 0.61$ 0.74 $\pm i \cdot 0.38$ 0.61	$-0.64 \pm i \cdot 0.25$ $-0.070 \pm i \cdot 0.64$	7.5	3	$0.73 \pm i \cdot 0.36$ 0.62	$-0.58 \pm i \cdot 0.20$	7.7	1.0

Tabell A.3

Stegsvar för olika modeller av  $S_2$

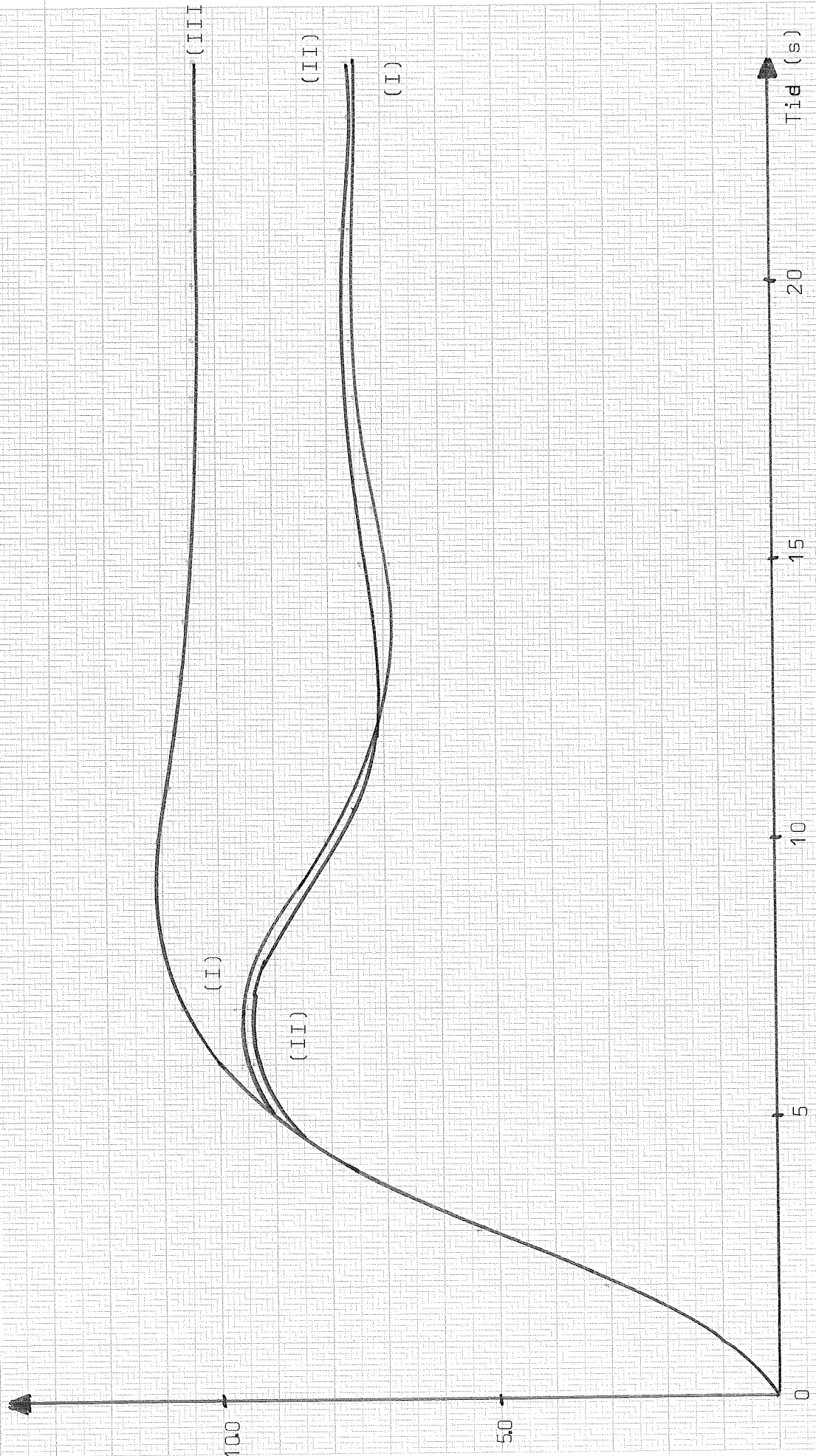
A:5

(I) - Det verkliga systemet

(II) - 4:e ordningens LST-modell

(III) - 2:a ordningens reducerade modell

Diagram A.2



TPOL verkande på LS-modeller av  $S_3$

n	poler	nollst	k
2	0.606 0.909	0.845	1.0

$n^*$	poler	nollst	k	$n^*$ <sub>red</sub>	poler	nollst	k	$\theta$
2	-0.34 0.45	-0.58	0.96					
3	-0.29±0.46 0.63	-0.31±0.54	1.4	1	0.62		1.2	0.71
4	-0.18±0.49 -0.28 0.67	-0.26±0.53 -0.15	1.5	1	0.69		1.5	1.0
5	-0.42±0.39 0.080±0.49 0.71	-0.48±0.52 0.15±0.48	1.6	1	0.63		1.3	5.2

Tabell A.4



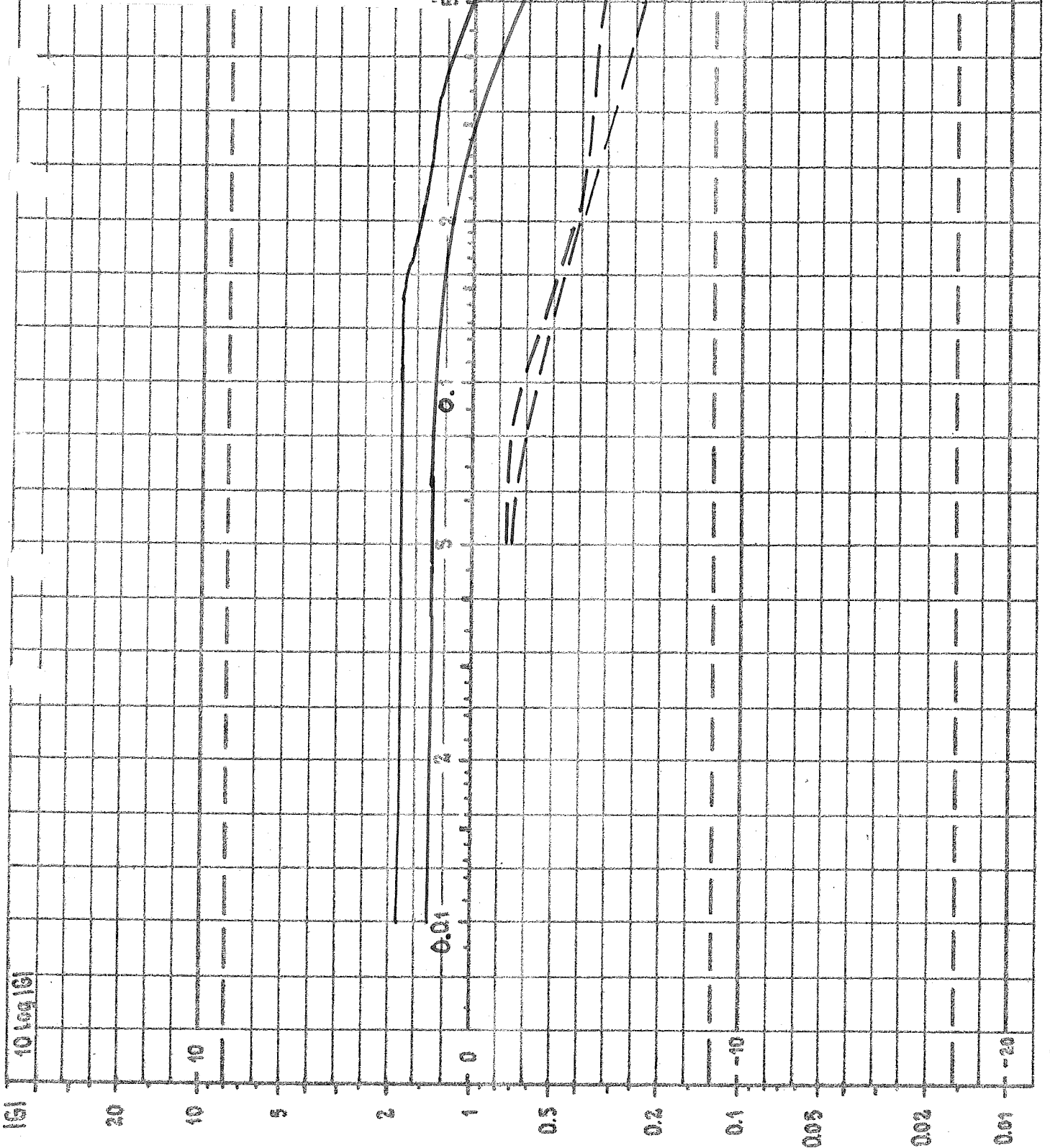
Bode-diagram för olika modeller av  $S_3$ .

— : amplitudkurva

- - - : faskurva

(I) : Det verkliga systemet

(II) : 1:a ordningens reducerade LST-modell



Euklides algoritim, version 1, verkande på LST-modeller av  $S_1$

n	poler	nollst	k
1	0.5		2.0

$n^*$	poler	nollst	k	$n_{red}^*$	poler	nollst	k	$\theta$
2	0.46± ±i·0.24	0.42	1.7	1	0.50		2.0	1.7
3	0.19± ±i·0.42 0.60	0.24± ±i·0.38	2.2	1	0.50		2.0	0.12
4	-0.012± ±i·0.47 0.51± ±i·0.17	0.019± ±i·0.47 0.46	1.9	1	0.50		2.0	0.03
5	-0.15± ±i·0.46 0.36± ±i·0.33 0.58	0.13± ±i·0.46 0.38± ±i·0.27	2.0	1	0.50		2.0	0.007

Tabell A.5

Euklides algoritim, version 2, verkande på LST-modeller av  $S_1$

n	poler	nollst	k
1	0.5		2.0

$n^*$	poler	nollst	k	$n^*$ red	poler	nollst	k	$\theta$
2	$0.46 \pm$ $\pm i \cdot 0.24$	0.42	1.7					
3	$0.19 \pm$ $\pm i \cdot 0.42$ 0.60	$0.24 \pm$ $\pm i \cdot 0.38$	2.2	1	0.50		2.0	0.24
4	$-0.012 \pm$ $\pm i \cdot 0.47$ 0.51 $\pm i \cdot 0.17$	$0.019 \pm$ $\pm i \cdot 0.47$ 0.46	1.9	1	0.50		2.0	0.05
5	$-0.15 \pm$ $\pm i \cdot 0.46$ 0.36 $\pm i \cdot 0.33$ 0.58	$-0.13 \pm$ $\pm i \cdot 0.46$ 0.38 $\pm i \cdot 0.27$	2.0	1	0.50		2.0	0.01

Tabell A.6

Euklides algoritm, version 1, verkande på LST-modeller av  $S_2$

n	poler	nollst	k
2	$0.75 \pm$ $\pm i \cdot 0.37$		7.5

$n^*$	poler	nollst	k	$n_{red}^*$	poler	nollst	k	$\theta$
2	$0.61 \pm$ $\pm i \cdot 0.28$	-0.77	7.9					
3	$0.70 \pm$ $\pm i \cdot 0.36$ -0.55	$-0.58 \pm$ $\pm i \cdot 0.35$	7.7	2	$0.79 \pm$ $\pm i \cdot 0.37$	-0.42	7.8	3.3
4	$-0.39 \pm$ $\pm i \cdot 0.45$ 0.72 $\pm i \cdot 0.37$	$-0.31 \pm$ $\pm i \cdot 0.56$ 0.72	7.6	2	$0.75 \pm$ $\pm i \cdot 0.30$	-0.50	9.9	0.5
5	$-0.14 \pm$ $\pm i \cdot 0.61$ 0.74 $\pm i \cdot 0.38$ -0.61	$-0.64 \pm$ $\pm i \cdot 0.25$ -0.070 $\pm i \cdot 0.64$	7.5	2	$0.75 \pm$ $\pm i \cdot 0.37$	-0.50	7.5	0.2

Tabell A.7

Euklides algoritim, version 2, verkande på LST-modeller av  $S_2$

n	poler	nollst	k
2	$0.75 \pm$ $\pm i \cdot 0.37$	-0.50	7.5

$n^x$	poler	nollst	k	$n^x_{red}$	poler	nollst	k	$\theta$
2	$0.61 \pm$ $\pm i \cdot 0.28$	-0.77	7.9	2				
3	$0.70 \pm$ $\pm i \cdot 0.36$ -0.55	$-0.58 \pm$ $\pm i \cdot 0.35$	7.7	2	$0.79 \pm$ $\pm i \cdot 0.37$	-0.42	7.8	3.3
4	$-0.39 \pm$ $\pm i \cdot 0.45$  $0.72 \pm$ $\pm i \cdot 0.37$	$-0.31 \pm$ $\pm i \cdot 0.56$  0.72	7.6	2	$0.75 \pm$ $\pm i \cdot 0.30$	-0.50	9.9	0.5
5	$-0.14 \pm$ $\pm i \cdot 0.61$  $0.74 \pm$ $\pm i \cdot 0.38$ -0.61	$-0.64 \pm$ $\pm i \cdot 0.25$  $-0.070 \pm$ $\pm i \cdot 0.64$	7.5	2	$0.75 \pm$ $\pm i \cdot 0.37$	-0.50	7.5	0.2

Tabell A.8

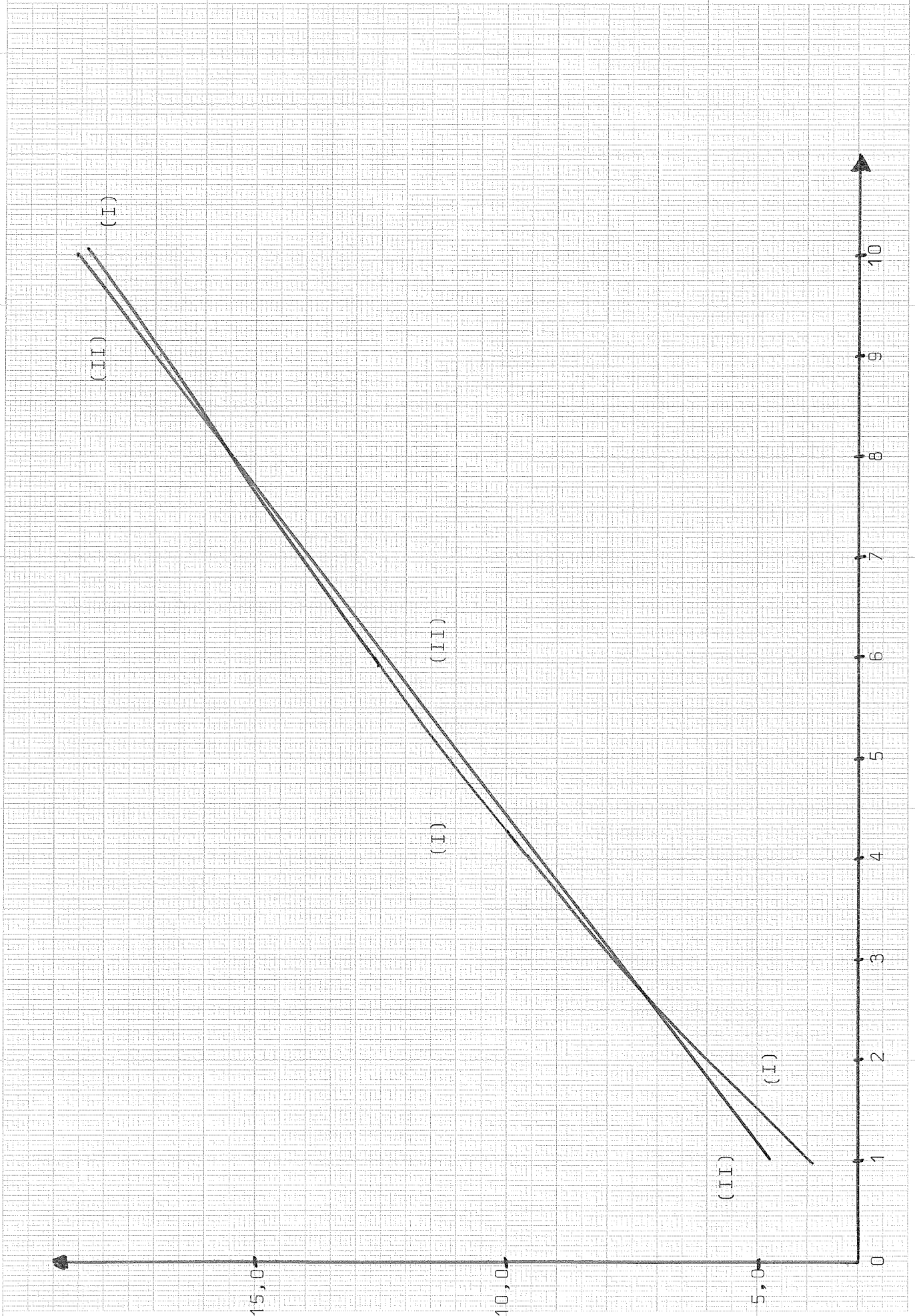
$\chi^2_{0.05}(n)$  som funktion av  $n$ , antalet frihetsgrader.

(I) - De verkliga kvantiteterna.

(II) - Den lineära approximationen.

A:12

Diagram A.4



Olika sätt att förkorta.

$S_1$  :

$S_2$  :

$n^*$	$\theta_A$	$\theta_B$	$\theta_C$
2	16	0.35	198
3	0.64	1.8	45
4	40	3.7	198
5	0.62	0.73	1.5

$n^*$	$\theta_A$	$\theta_B$	$\theta_C$
3	29	13	10
4	0.75	248	21
5	9.0	213	$24 \cdot 10^3$

Tabell A.9.

Testkvantiteterna  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  och  $\theta_C$  har bildats på i kapitel 2 angivet sätt. A,B resp C hänför sig till resp metod.

Som testexempel har valts LST-modeller av systemen  $S_1$  och  $S_2$  med brusets varians 0.01.

$n^*$  är modellernas ordningstal.

Appendix B.AQ-fas.

2:a ordningens ML-modell

$$(1.0 - 1.46q^{-1} + 0.48q^{-2})y(t) = (0.22q^{-1} - 0.20q^{-2})u(t) + (1.0 - 1.12q^{-1} + 0.17q^{-2})e(t) \quad (\text{B.1})$$

1:a ordningens reducerade modell

$$(1.0 - 0.51q^{-1})y(t) = 0.22q^{-1}u(t) + (1.0 - 0.16q^{-1})e(t) \quad (\text{B.2})$$

$n^*$	poler	nollst	nollst	$\epsilon_m$	$e_m$
2	0.50 0.96	0.92	0.18 0.94	$0.27 \pm 0.33$	0.72
3	0.51		0.16	$0.95 \pm 0.26$	1.63

Tabell B.1

 $n^*$  = modellens ordningstal

nollst i kol 3 = B-polynomets nollställen

nollst i kol 4 = C-polynomets nollställen

 $\epsilon_m$  = medelvärdet av residualerna $e_m$  = medelvärdet av modellfelen

$$\text{modellens utsignal } y_m(t) = \frac{\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})} u(t)$$

$$\text{modellfel: } e_m(t) = y(t) - y_m(t)$$

$$\text{residualer: } \hat{C}(q^{-1}) \cdot \epsilon(t) = \hat{A}(q^{-1}) \cdot y(t) - \hat{B}(q^{-1}) \cdot u(t)$$

$$\frac{\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})} = \text{skattad överföringsfunktion}$$

$$\hat{C}(q^{-1}) \equiv 1 \text{ vid minstakvadratidentifiering}$$



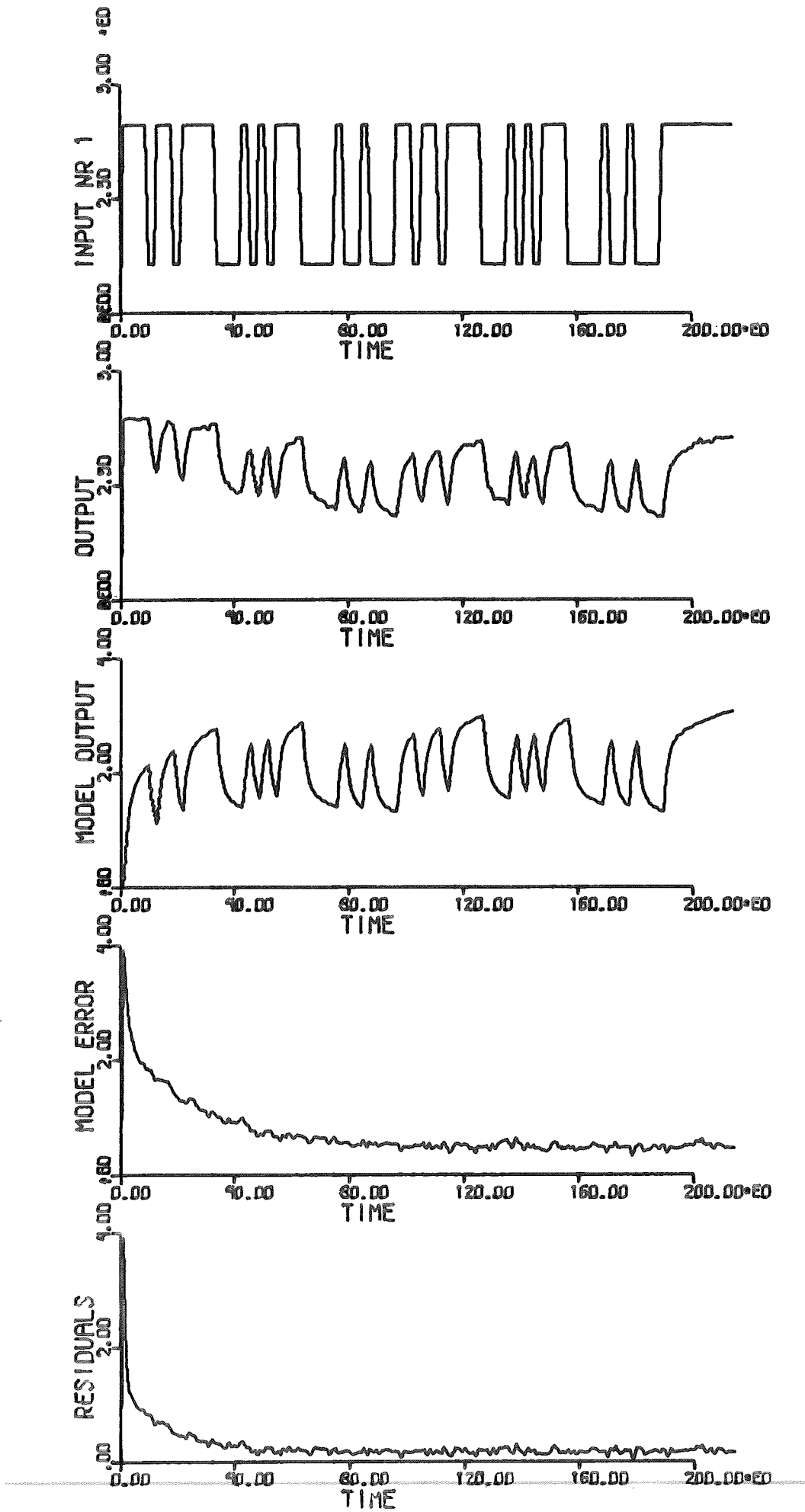


Diagram B.1

Mixer-settlern, AQ-fas, 2:a ordningens ML-modell.

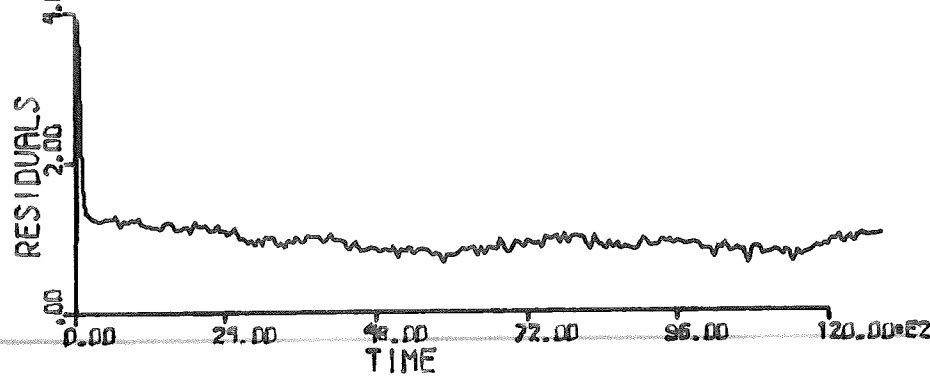
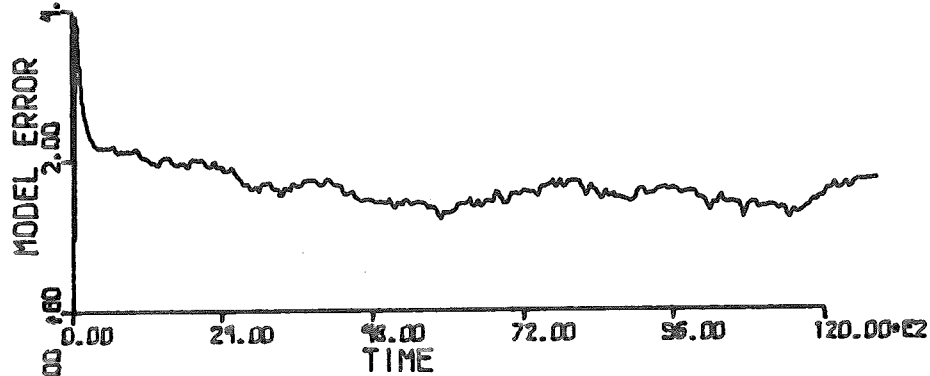
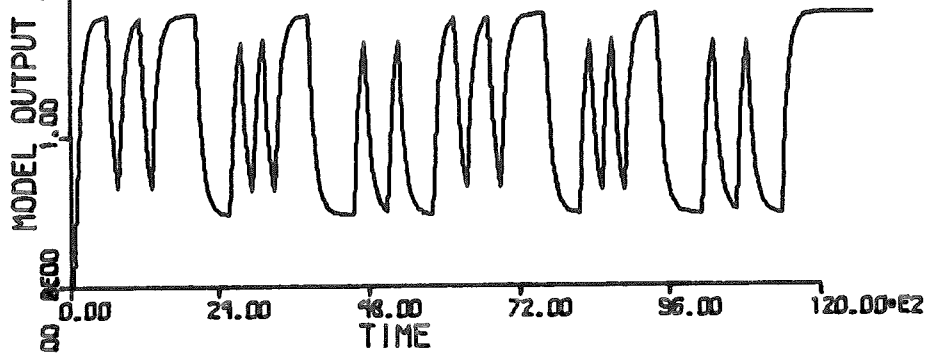
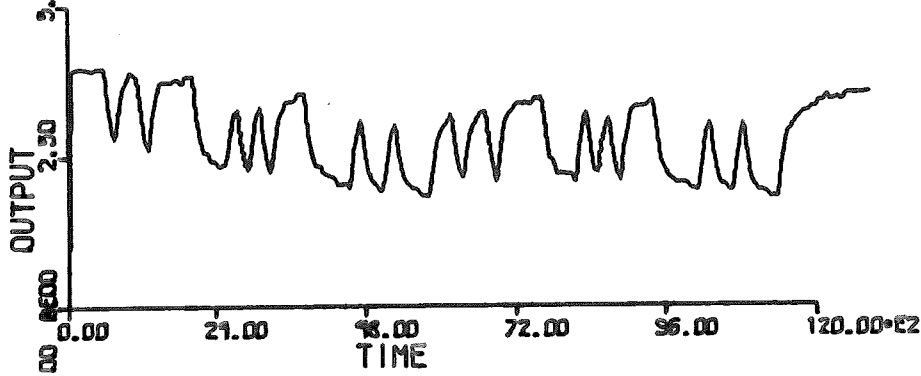
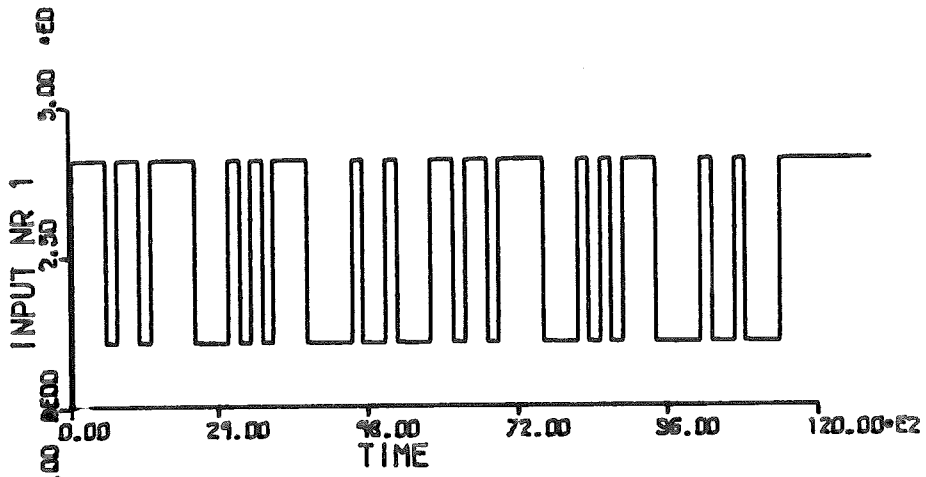


Diagram B.2

Mixer-settlern, AQ-fas, 1:a ordningens reducerade modell.

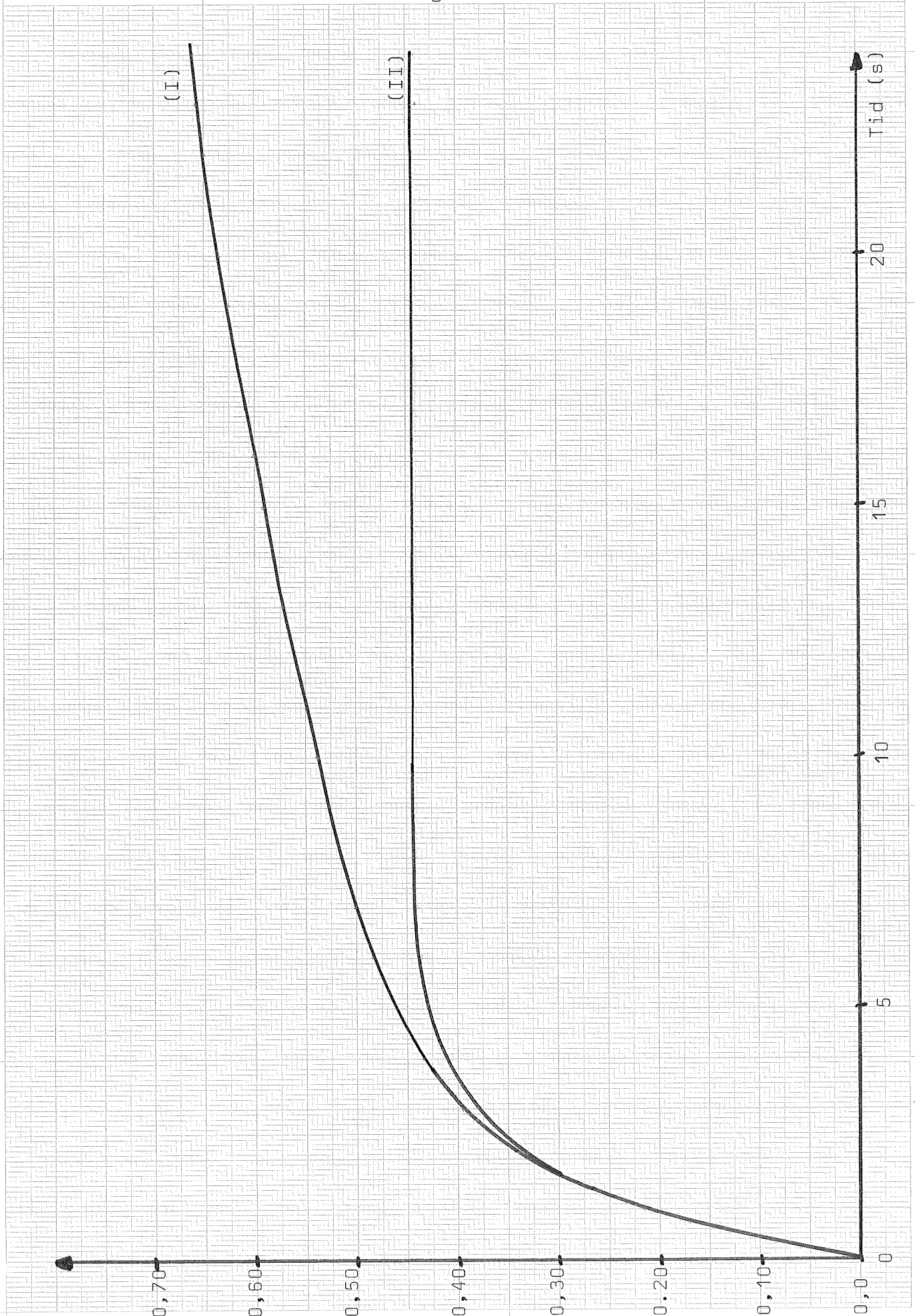
Stegsvar för olika modeller av mixer-  
settlern, AQ-fas

B:4

(I) - 2:a ordningens ML-modell

Diagram B.3

(II) - 1:a ordningens reducerade modell



732501 - 314 A4 - 1 A 1 mm

ORG-fas.

2:a ordningens ML-modell:

$$(1.0 - 1.44q^{-1} + 0.46q^{-2})y(t) = (0.047q^{-1} - 0.043q^{-2})u(t) + (1.0 - 1.17q^{-1} + 0.26q^{-2})e(t) \quad (\text{B.3})$$

1:a ordningens reducerade modell:

$$(1.0 - 0.51q^{-1})y(t) = 0.047q^{-1}u(t) + (1.0 - 0.23q^{-1})e(t) \quad (\text{B.4})$$

$n^*$	poler	nollst	nollst	$\epsilon_m$	$e_m$
2	0.49	0.91	0.30	0.21±0.11	0.71
	0.95		0.87		
1	0.51		0.23	0.56±0.08	0.88

Tabell B.2

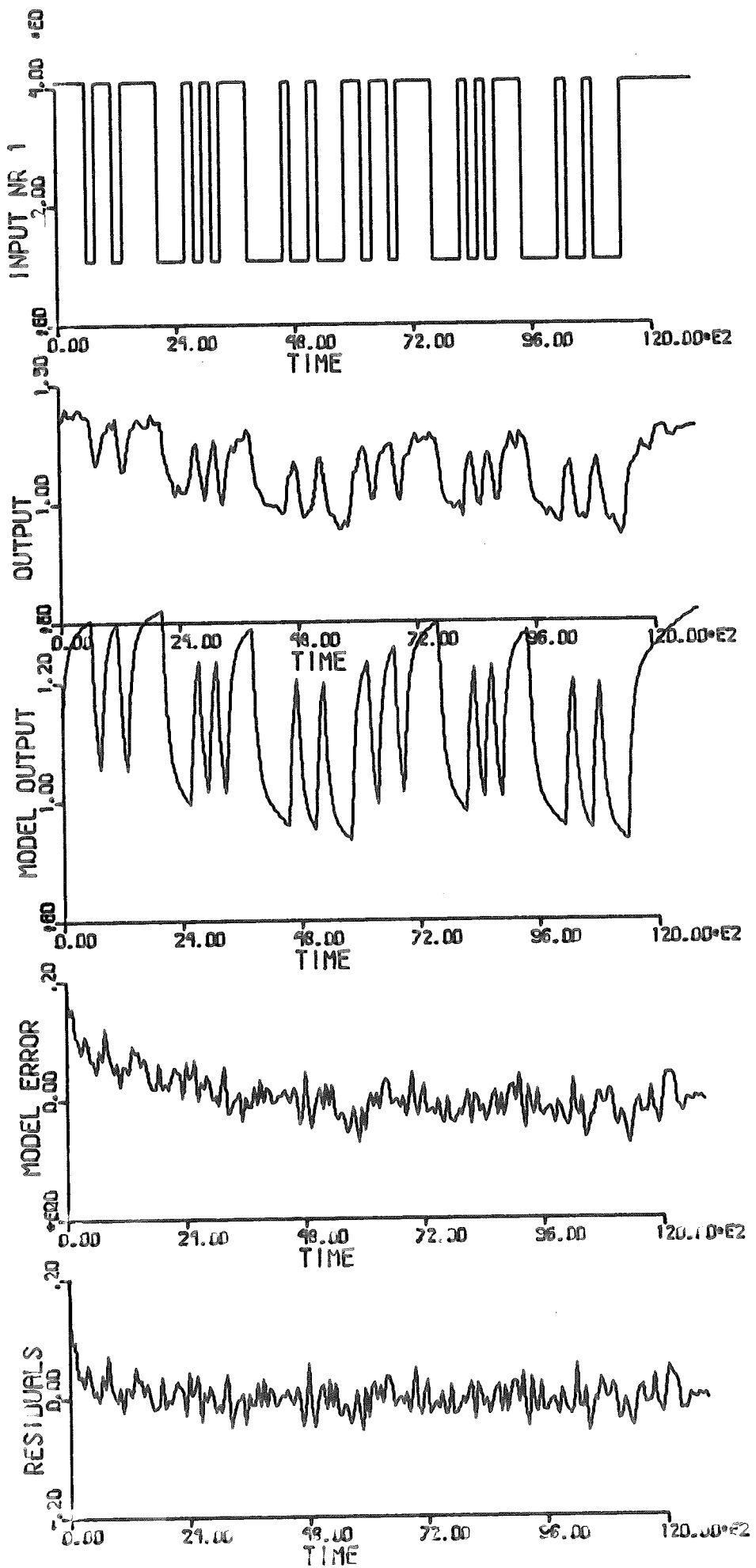


Diagram B.4

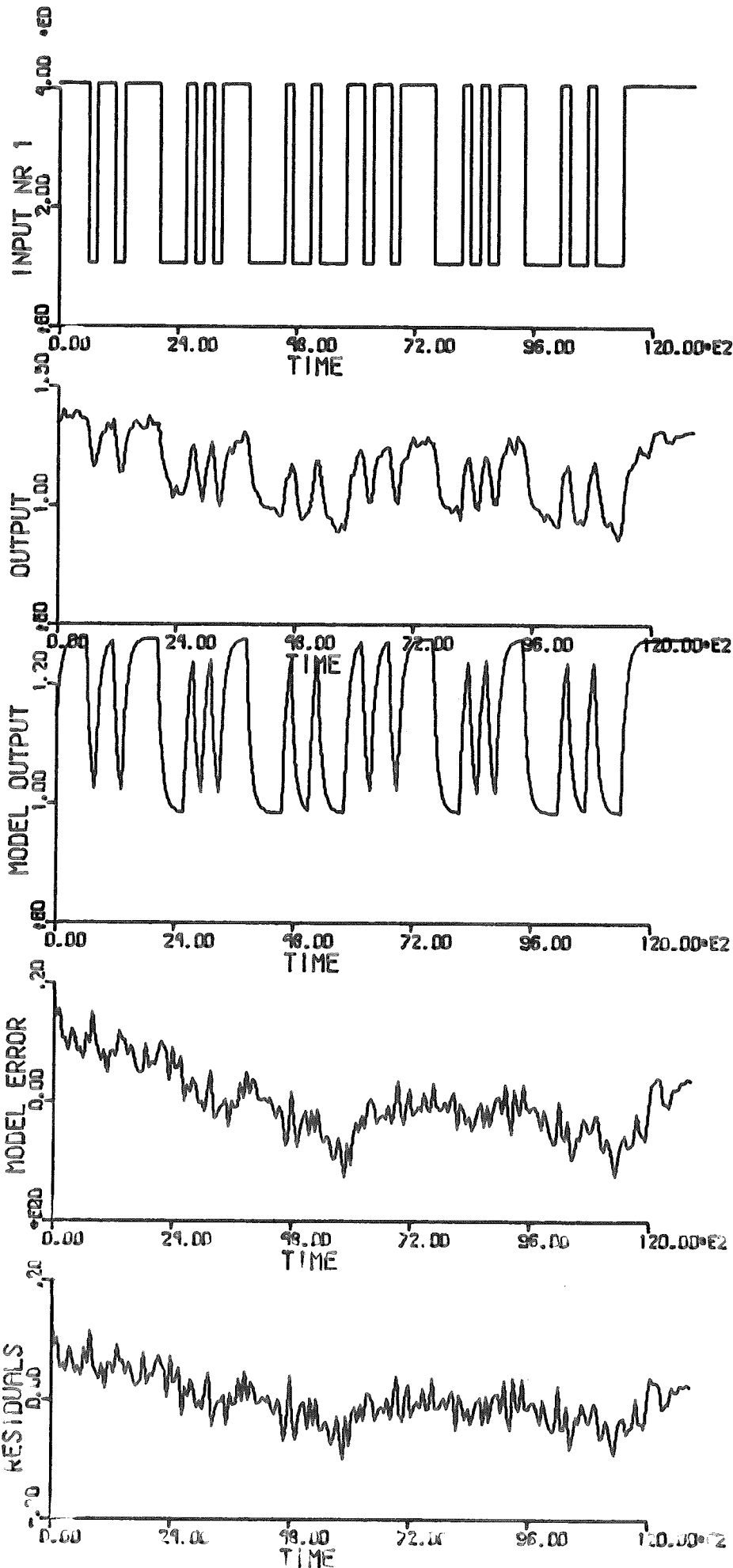


Diagram B.3

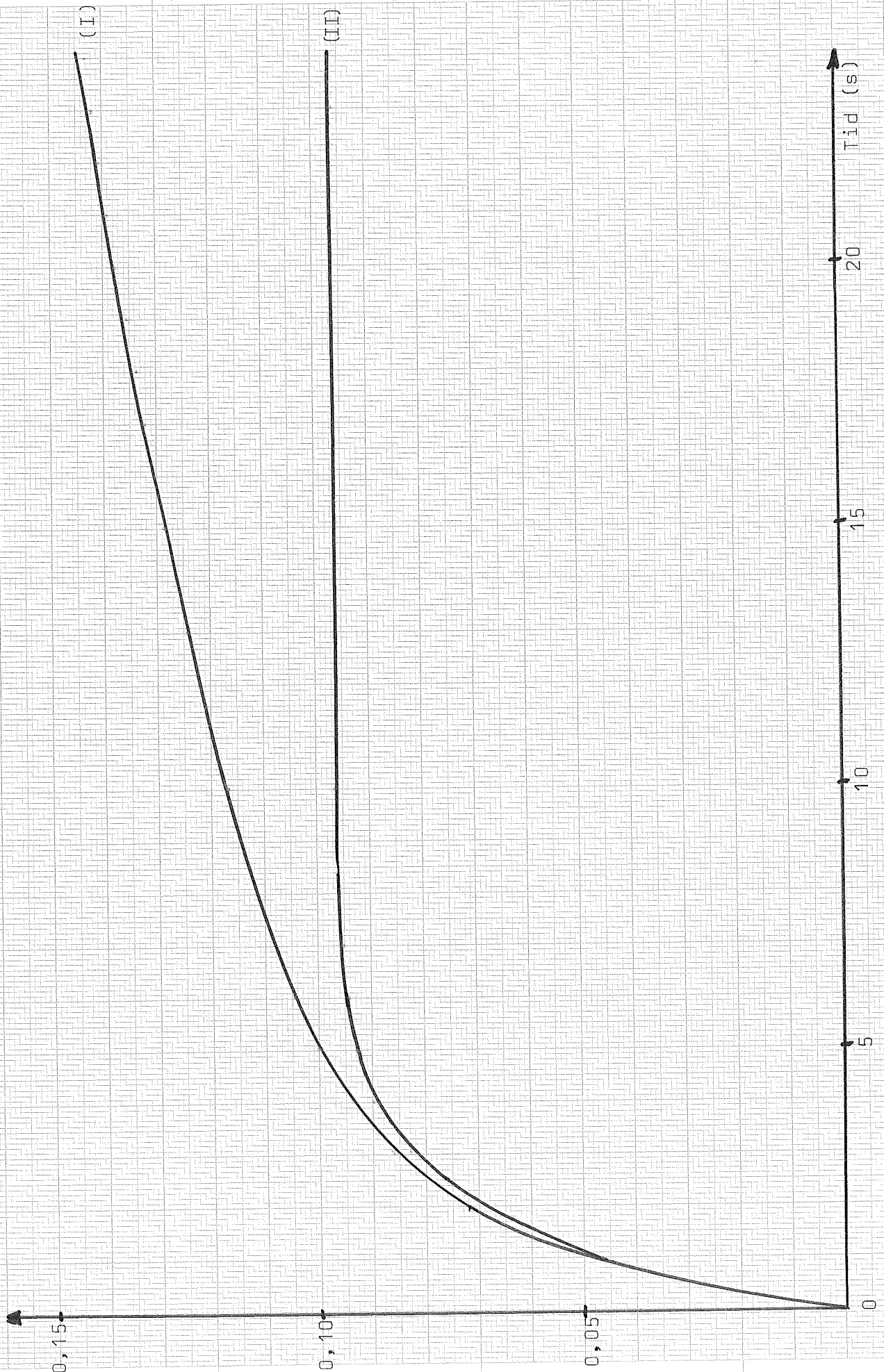
Stegsvar för olika modeller av mixer-  
settlern, ORG-fas.

B:8

(I) - 2:a ordningens ML-modell.

Diagram B.6

(II) - 1:a ordningens reducerade modell



Appendix C.Kärnkraftreaktorn i Ågesta.

3:e ordningens ML-modell

$$(1.0-2.06q^{-1}+1.25q^{-2}-0.19q^{-3})y(t) = (168.4q^{-1}-297.6q^{-2} + 129.6q^{-3})y(t) + (1.0-2.01q^{-1}+1.22q^{-2}-0.20q^{-3})e(t) \quad (C.1)$$

3:e ordningens LS-modell

$$(1.0-0.30q^{-1}-0.26q^{-2}+0.0046q^{-3})y(t) = (166.1q^{-1} + 6.64q^{-2}-45.2q^{-3})u(t) + e(t) \quad (C.2)$$

1:a ordningens reducerade modell

$$(1.0-0.24q^{-1})y(t) = 166.1q^{-1}u(t) + e(t) \quad (C.3)$$

n	poler	nollst	nollst	$\epsilon_m$	$e_m$
3	0.22	0.78	0.25	0.32±16.3	0.84
	0.87	0.99	0.86		
	0.97		0.90		
3	-0.40	-0.54		-0.21±17.8	-0.57
	0.017	0.50			
	0.67				
1	0.24			-0.26±31.6	

Tabell C.1

Beteckningar som i appendix B.



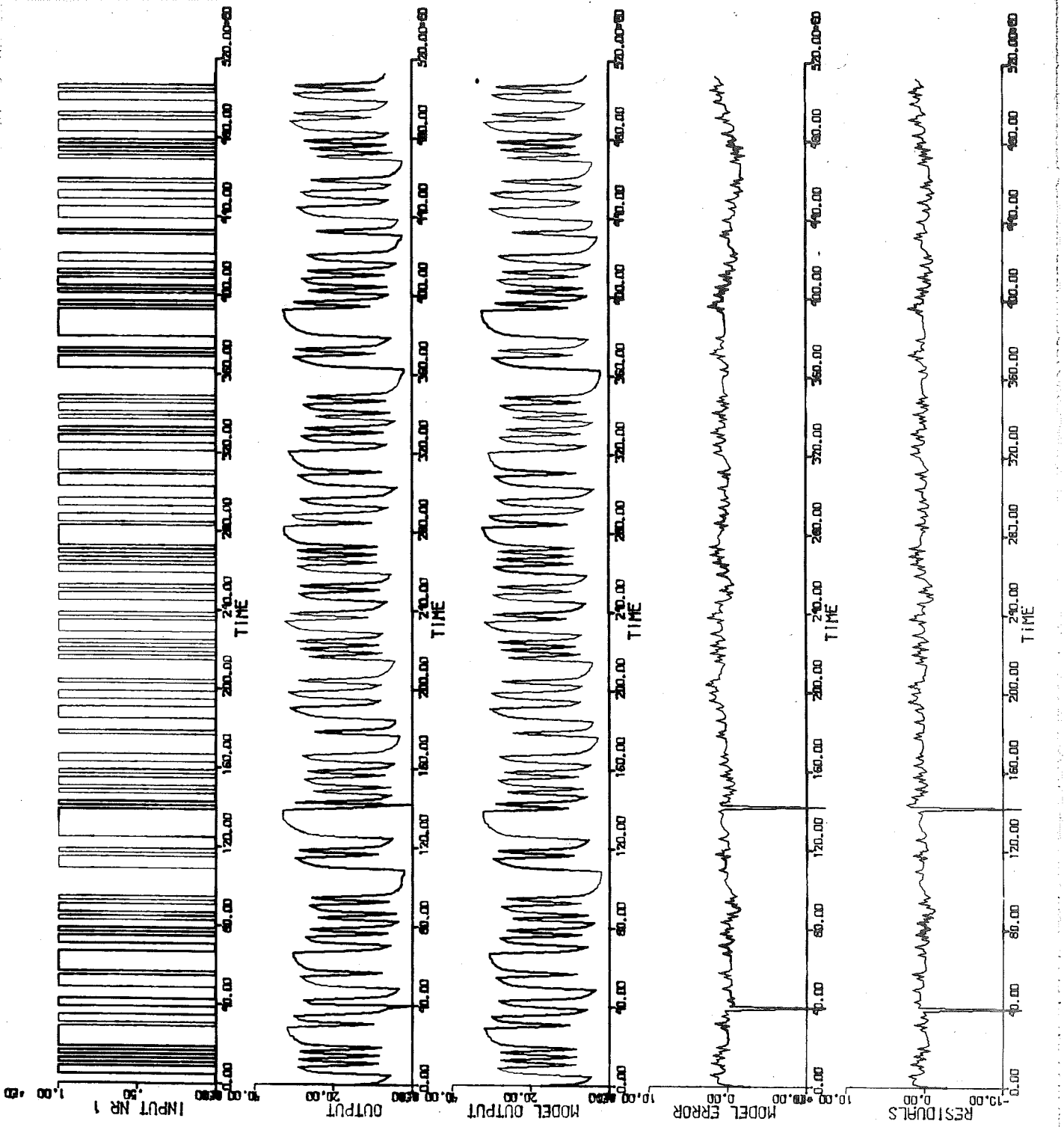


Diagram C.1

Kärnkraftreaktorn i Ägesta, 3:e ordningens ML-modell.

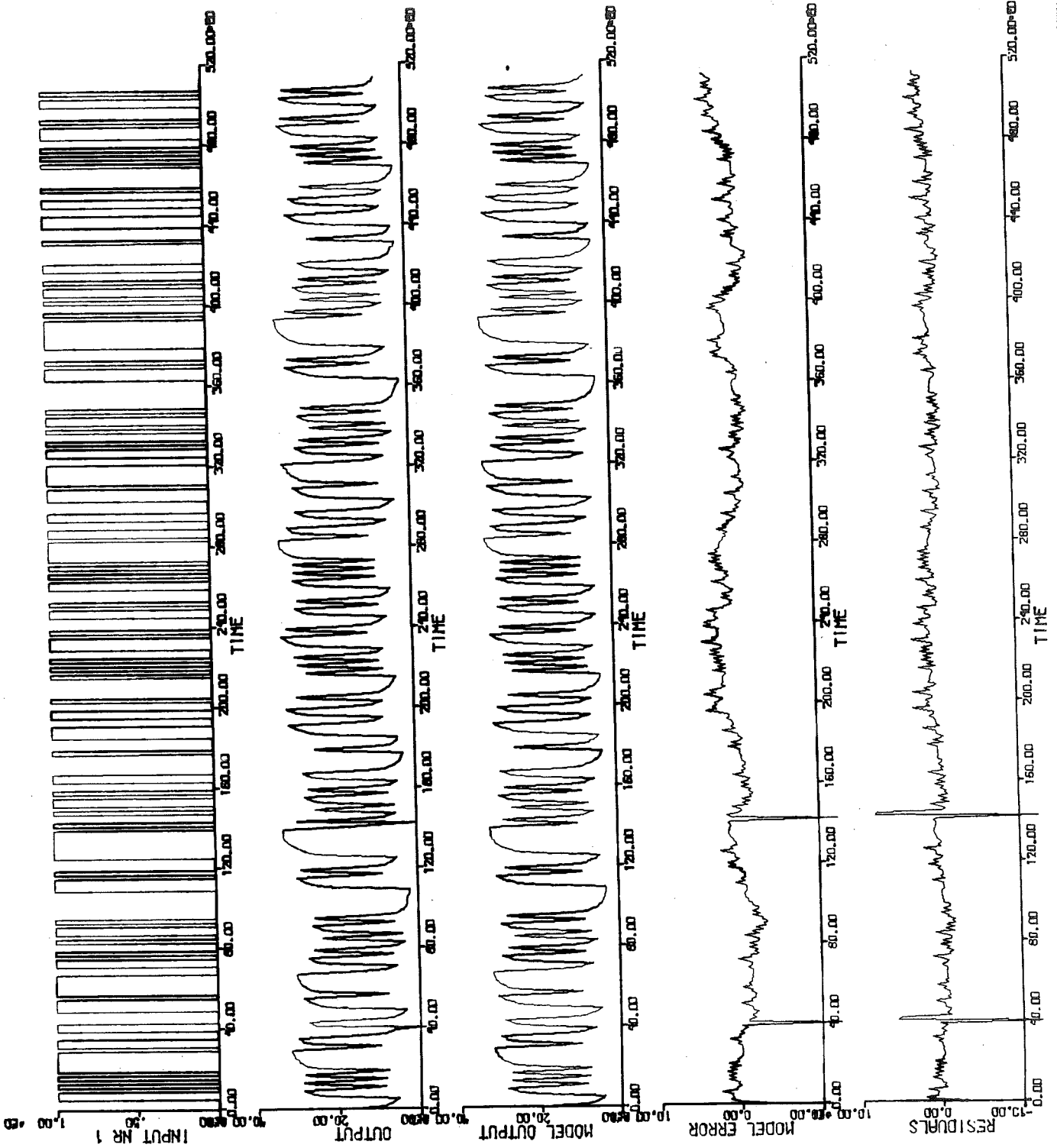


Diagram C.2

Kärnkraftreaktorn i Ägesta, 3:e ordningens LS-modell.

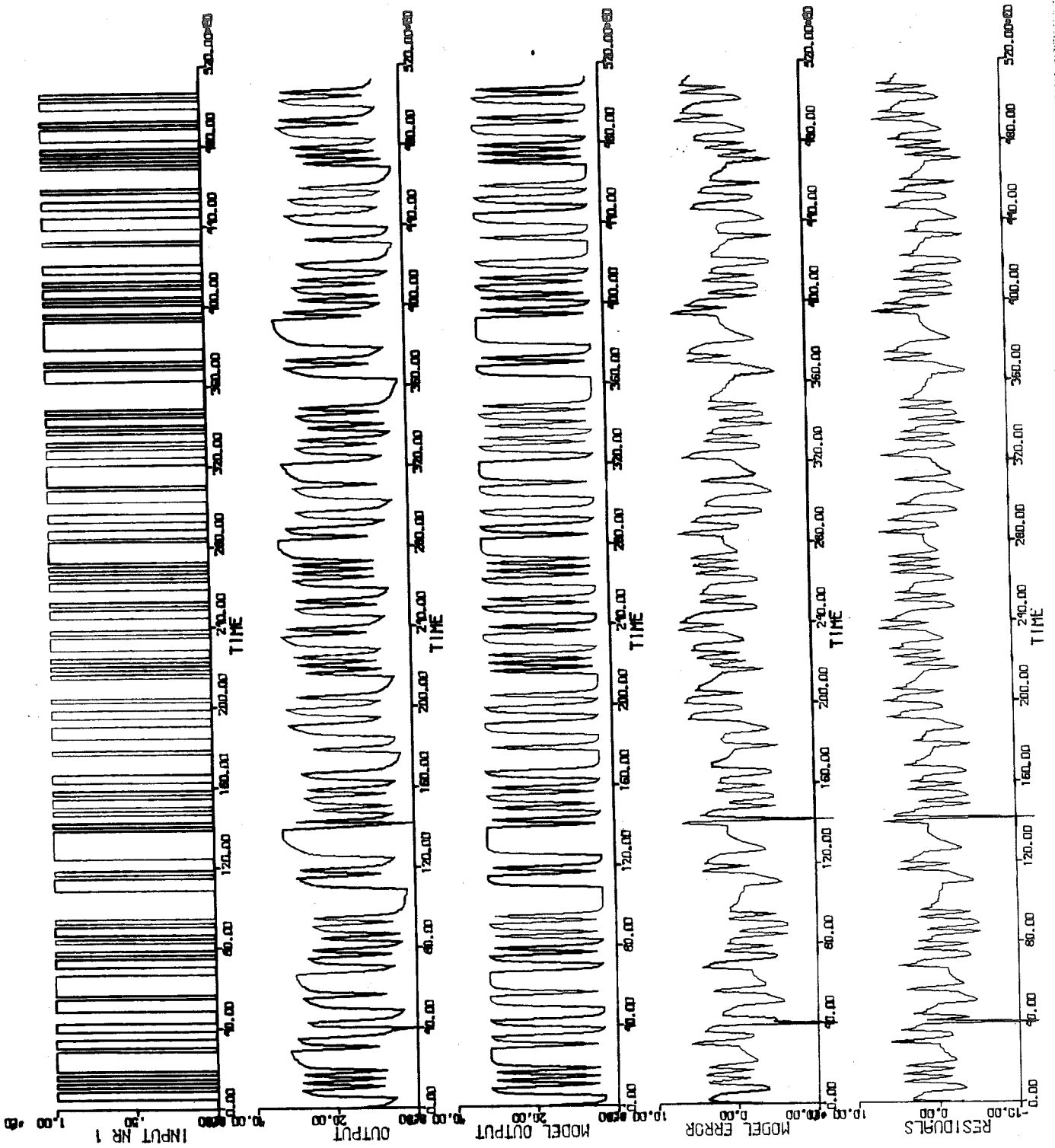


Diagram C.3

Kärnkraftreaktorn i Ägesta, 1:a ordningens reducerade LS-modell.

Stegsvar för olika modeller av kärnkraftreaktorn i Ågesta.

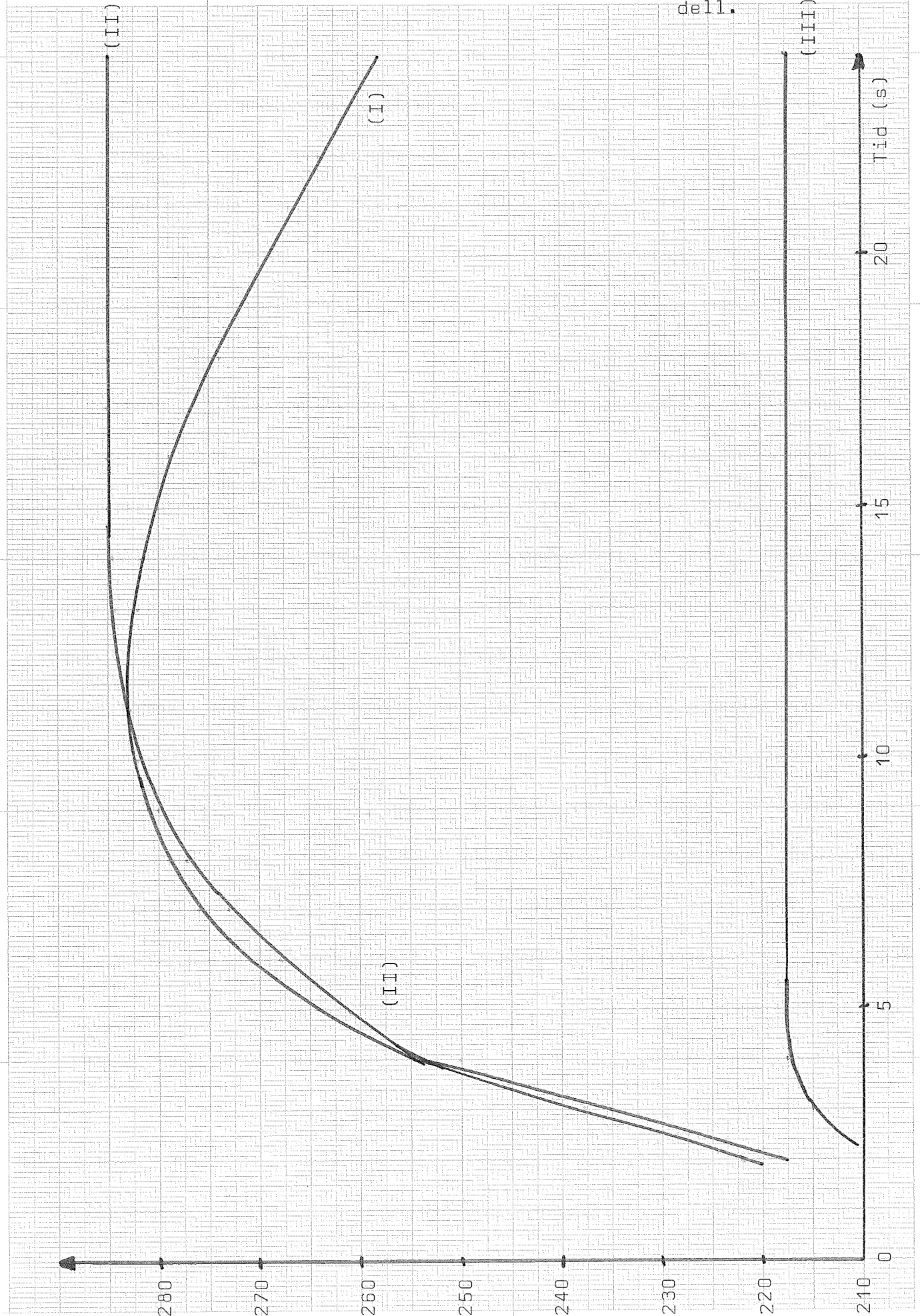
(I) - 3:e ordningens ML-modell.

(II) - 3:e ordningens LS-modell.

(III) - 1:a ordningens reducerade LS-modell.

C:5

Diagram C.4



ISSSELTE 4441

AC  
SUBROUTINE COMFAC(T,PT,AM,BM,TT,NA,NB,NMA,NMB,IPR,IERR,IA,IB)

C  
C THE SUBROUTINE COMPUTES COMMON FACTORS TO TWO GIVEN POLYNOMIALS, AND  
C THE GIVEN POLYNOMIALS ARE ABBREVIATED WITH THE COMMON POLYNOMIAL.  
C AN HYPOTHESIS TEST IS USED IN ORDER TO DECIDE WHETHER THE TWO GIVEN  
C POLYNOMIALS HAVE COMMON FACTORS OR NOT. THE COEFFICIENTS OF THE TWO  
C GIVEN POLYNOMIALS SHOULD BE NORMALLY DISTRIBUTED FOR OBTAINING  
C BEST RESULTS, BECAUSE A CHI-SQUARE TEST WITH THE SIGNIFICANCE LEVEL  
C OF 5% IS USED.

C AUTHOR ERIK BURSTRÖM 1972-12-24

C T=(A(1),...,A(NA),B(1),...,B(NB)) VECTOR OF ORDER (NA+NB), (MIN 2, MAX 20)  
C CONTAINING THE COEFFICIENTS OF THE A- RESP. B-POLYNOMIAL.

C PT MATRIX OF ORDER (NA+NB)\*(NA+NB) THE COVARIANCE MATRIX OF T.

C AM VECTOR OF ORDER NMA AT OUTPUT CONTAINING THE NEW ESTIMATED A-COEFFI-  
C CIENTS.

C BM VECTOR OF ORDER NMB AT OUTPUT CONTAINING THE NEW ESTIMATED B-COEFFI-  
C CIENTS.

C TT STATISTICAL TEST QUANTITY.

C NA NUMBER OF A-COEFFICIENTS (MIN 1, MAX 10).

C NB NUMBER OF B-COEFFICIENTS (MIN 1, MAX 10).

C NMA NUMBER OF AM-COEFFICIENTS.

C NMB NUMBER OF BM-COEFFICIENTS.

C IPR IF IPR=0 NOTHING IS PRINTED.

C IF IPR=1 VECTOR T, POLES, ZEROS AND STATIC GAIN FOR THE ORIGINAL  
C SYSTEM, VECTOR X CONSISTING OF POLES AND ZEROS, ALL POSITIVE  
C INDIVIDUELL TESTS WHEN TWO FACTORS ARE EQUAL AND CORRESPONDING  
C TEST QUANTITIES, MATRIX IQ WHERE EACH ROW MEANS A POSSIBLE  
C COMBINATION FOR TWO FACTORS TO BE EQUAL, THE PART OF MATRIX IQ  
C THAT REPRESENTS THE BEST MULTIVARIATE TEST, I.E. THE HIGHEST  
C NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM AND WITHIN THAT NUMBER THE TEST  
C WITH SMALLEST TEST QUANTITY, A NEW ESTIMATED VECTOR X, THE NEW A-  
C POLYNOMIAL, DEGREE OF A AND POLES, THE NEW B-POLYNOMIAL, DEGREE  
C OF B AND ZEROS AND THE STATIC GAIN FOR THE NEW SYSTEM ARE PRINTED.  
C IF IPR=2 AS IPR=1 + THE COVARIANCE MATRIX OF T AND THE APPROXIMATE  
C COVARIANCE MATRIX OF X, THE COMMON POLYNOMIAL AND THE TWO REST-  
C POLYNOMIALS ARE PRINTED.

C IF IPR=3 AS IPR=2 + ALL NEGATIVE INDIVIDUELL TESTS AND ALL MULTI-  
C VARIATE TESTS, I.E. THE COMBINATIONS OF FACTORS AND TEST QUANTITIES,  
C WITH HIGHER AND THE SAME DEGREE OF FREEDOM AS THE BEST POSITIVE  
C TEST ARE PRINTED.

C IF IPR=4 AS IPR=3 + ALL MULTIVARIATE TESTS WITH LOWER DEGREES OF  
C FREEDOM THAN THE BEST POSITIVE TEST ARE PRINTED.

C IERR IF IERR=0 NORMAL OUTPUT.

C IF IERR=-1 EITHER THE COVARIANCE MATRIX OF X IS NOT POSITIVE DEFINITE  
C OR IS IT IMPOSSIBLE TO COMPUTE POLES OR ZEROS TO THE ORIGINAL  
C OR THE NEW SYSTEM. IN THE FIRST CASE, THE INTERESTING EIGENVALUES  
C AND CORRESPONDING EIGENVECTORS OF PT ARE COMPUTED AND PRINTED.

C IA DIMENSION PARAMETER OF PT.

C IB IF IB=0 B(0)=0 IS ASSUMED.

C IF IB=1 B(0)=1 IS ASSUMED.

C THE FOLLOWING VARIABLE LIES IN A COMMON-BLOCK CALLED COMPOL.

C D VECTOR OF ORDER 10 CONTAINING THE COEFFICIENTS OF THE COMMON  
C POLYNOMIAL.

C SUBROUTINE REQUIRED

C XPX

C TEST

C TESTUT

C PDIV

C ROT

```
C
C  DESYM
C  SOLVS
C  EIGS
C  PMPY
```

```
C  DIMENSION T(1),PT(IA,IA),AM(1),BM(1)
C  COMMON/COMPOL/D(10)
```

---

SUBROUTINE XPX(T,PT,X,PX,NA,NB,NCA,NCB,IPR,IERR,IA,IB)

SUBROUTINE FOR TRANSFORMING T-VECTOR TO X-VECTOR AND COVARIANCE MATRIX PT TO THE APPROXIMATE COVARIANCE MATRIX PX OF VECTOR X.

NO MULTIPLE POLES OR ZEROS IS ASSUMED.

THE ELEMENTS OF VECTOR T MUST BE REAL.

COMPLEX FACTORS ARE SEPARATED INTO REAL AND IMAGINARY PARTS.

AUTHOR TORSTEN SÖDERSTRÖM 1971-12-24

REVISED ERIK BURSTRÖM 1972-11-01

T=(A(1),...,A(NA),B(1),...,B(NB)) VECTOR OF ORDER (NA+NB).

PT MATRIX OF ORDER (NA+NB)\*(NA+NB), THE COVARIANCE MATRIX OF T.

X VECTOR OF ORDER (NA+NB). THE ELEMENTS OF X ARE NCA/2 REAL PARTS OF COMPLEX POLES, NCA/2 POSITIVE IMAGINARY PARTS OF COMPLEX POLES, NA-NCA REAL POLES, NCB/2 REAL PARTS OF COMPLEX ZEROS, NCB/2 POSITIVE IMAGINARY PARTS OF COMPLEX ZEROS, NB-NCB REAL ZEROS. IF IB=0 X(NA+NB)=T(NA+1). PX MATRIX OF ORDER (NA+NB)\*(NA+NB) AT RETURN CONTAINING THE APPROXIMATE COVARIANCE MATRIX OF X.

NA NUMBER OF A-COEFFICIENTS (MIN 1, MAX 10).

NB NUMBER OF B-COEFFICIENTS (MIN 1, MAX 10).

NCA NUMBER OF COMPLEXVALUED POLES (MIN 0, MAX 10).

NCB NUMBER OF COMPLEXVALUED ZEROS (MIN 0, MAX 10).

IPR IF IPR=0 NOTHING IS PRINTED.

IF IPR=1 VECTOR T, THE POLES, THE NUMBER OF A-COEFFICIENTS, THE NUMBER OF COMPLEX RESP. REAL POLES, THE ZEROS, THE NUMBER OF B-COEFFICIENTS, THE NUMBER OF COMPLEX RESP. REAL ZEROS, VECTOR X AND STATIC GAIN ARE PRINTED.

IF IPR=2 AS IPR=1 + THE COVARIANCE MATRIX OF X.

IERR IF IERR =0 NORMAL RETURN

IF IERR=-1 ROT HAS FAILED.

IA DIMENSION PARAMETER OF PT AND PX.

IB IF IB=0 B(0)=0 IS ASSUMED.

IF IB=1 B(0)=1 IS ASSUMED.

SUBROUTINE REQUIRED

ROT

DIMENSION T(1),PT(IA,IA),X(1),PX(IA,IA)

SUBROUTINE TEST(X,PX,IQ,NA,NB,NCA,NCB,NQ,IPR,IERR,IA,IR,IC)

SUBROUTINE FOR EXAMINING WHICH POLES AND WHICH ZEROS THAT CAN BE CONSIDERED TO BE EQUAL IN STATISTICAL SENSE.

EVERY POLE IS TESTED AGAINST EVERY ZERO.

THE TESTS ARE BASED ON THE ASSUMPTION THAT THE POLES AND THE ZEROS ARE NORMAL DISTRIBUTED I.E. A CHI-SQUARE TEST WITH THE SIGNIFICANCE LEVEL 0.05 IS USED.

THE RESULTS ARE GIVEN IN THE MATRIX IQ WHERE EVERY ROW MEANS A POSSIBLE COMBINATION FOR TWO FACTORS TO BE EQUAL.

THE ELEMENTS IN A ROW MEANS FROM LEFT TO RIGHT:

THE REAL PART OF THE POLE,

THE REAL PART OF THE ZERO,

THE IMAGINARY PART OF THE POLE,

THE IMAGINARY PART OF THE ZERO.

IF ANY OR BOTH ELEMENTS IN THE THIRD OR FORTH COLUMN IS ZERO, THE POLE RESP. THE ZERO IS REAL.

THE NUMBER OF POSSIBLE COMBINATIONS, I.E. THE NUMBER OF ROWS IN THE MATRIX IQ IS NQ.

AUTHOR ERIK BURSTRÖM 1972-12-24

X VECTOR OF ORDER (NA+NB), CONTAINING THE POLES AND THE ZEROS COMPUTED IN SUBROUTINE XPX.

PX THE COVARIANCE MATRIX OF ORDER (NA+NB)\*(NA+NB) COMPUTED IN SUBROUTINE XPX.

IQ THE MATRIX OF ORDER (NQ\*4) CONTAINING ALL POSSIBLE TESTS.

NA THE NUMBER OF A-COEFFICIENTS (MIN 1, MAX 10). A(0)=1 IS ASSUMED.

NB THE NUMBER OF B-COEFFICIENTS (MIN 1, MAX 10).

NCA THE NUMBER OF COMPLEXVALUED POLES COMPUTED IN SUBROUTINE XPX.

NCB THE NUMBER OF COMPLEXVALUED ZEROS COMPUTED IN SUBROUTINE XPX.

NQ THE NUMBER OF POSSIBLE INDIVIDUELL TESTS.

IPR IF IPR=0 NOTHING IS PRINTED.

IF IPR=1 ALL POSITIVE TESTS, THE ESTIMATED COMMON VALUES, THE TEST QUANTITIES AND THE MATRIX IQ IS PRINTED.

IF IPR=2 AS IPR=1 + ALL NEGATIVE TESTS.

IERR IF IERR=0 NORMAL OUTPUT.

IF IERR=-1 THE COVARIANCE MATRIX PX IS NOT POSITIVE DEFINITE. THE EIGENVALUES OF MATRIX PX ARE COMPUTED AND PRINTED.

IA DIMENSION PARAMETER OF MATRIX PX.

IB IF IB=0 B(0)=0 IS ASSUMED.

IF IB=1 B(0)=1 IS ASSUMED.

IC DIMENSION PARAMETER OF MATRIX IQ.

SUBROUTINE REQUIRED

DESYM

SOLVS

EIGS

DIMENSION X(1),PX(IA,IA),IQ(IC,1)



UT  
SUBROUTINE TESTUT(T,X,PX,AM,BM,TT1,IQ,NA,NB,NMA,NMB,NQ,IPR,IERR,  
\*IA,IB,IC)

C  
C THE SUBROUTINE COMPUTES THE GREATEST COMMON POLYNOMIAL TO TWO GIVEN  
C POLYNOMIALS IN STATISTICAL SENSE.  
C THE COMMON POLYNOMIAL IS FOUND BY EXAMINING COMBINATIONS OF THE INDI-  
C VIDUELL TESTS COMPUTED IN SUBROUTINE TEST.  
C AUTHOR ERIK BURSTRÖM 1972-12-24

C  
C T VECTOR OF ORDER (NA+NB), CONTAINING THE A-COEFFICIENTS AND THE  
C B-COEFFICIENTS.  
C X VECTOR OF ORDER (NA+NB), CONTAINING THE POLES AND THE ZEROS COMPUTED  
C IN SUBROUTINE XPX.  
C PX THE COVARIANCE MATRIX OF VECTOR X, OF ORDER (NA+NB)\*(NA+NB), COMPUTED  
C IN SUBROUTINE XPX.  
C AM VECTOR CONTAINING THE NEW ESTIMATED A-COEFFICIENTS.  
C BM VECTOR CONTAINING THE NEW B-COEFFICIENTS.  
C TT1 STATISTICAL TEST QUANTITY.  
C IQ MATRIX OF ORDER(NQ\*4), CONTAINING ALL POSSIBLE INDIVIDUELL TESTS  
C COMPUTED IN SUBROUTINE TEST.  
C NA THE NUMBER OF A-COEFFICIENTS (MIN 1, MAX 10).  
C NB THE NUMBER OF B-COEFFICIENTS (MIN 0, MAX 10).  
C NMA THE NUMBER OF A-COEFFICIENTS (MIN 1, MAX 10).  
C NMB THE NUMBER OF B-COEFFICIENTS (MIN 1, MAX 10).  
C NQ THE NUMBER OF POSSIBLE INDIVIDUELL TESTS, COMPUTED IN SUBROUTINE TEST.  
C IPR IF IPR=0 NOTHING IS PRINTED.  
C IF IPR=1 THE COMPONENTS THAT CAN BE ABBREVIATED, THE TEST QUANTITY  
C AND DEGREES OF FREEDOM, THE NEW ESTIMATED X-VECTOR, THE COMPONENTS  
C THAT ARE EQUAL, THE NEW A-POLYNOMIAL, DEGREE OF A AND POLES, THE NEW  
C B-POLYNOMIAL, DEGREE OF B AND ZEROS AND STATIC GAIN FOR THE NEW  
C MODEL ARE PRINTED ONCE.  
C IF IPR=2 AS IPR=1 + THE COMMON POLYNOMIAL AND THE TWO REST-POLYNO-  
C MIALS ARE PRINTED ONCE.  
C IF IPR=3 AS IPR=2 + ALL POSSIBLE COMBINATIONS AND TEST QUANTITIES OF  
C ALL TESTS WITH GREATER AND THE SAME DEGREE OF FREEDOM AS THE BEST  
C POSITIVE TEST.  
C IF IPR=4 AS IPR=3 + ALL POSSIBLE COMBINATIONS AND CORRESPONDING  
C TEST QUANTITIES OF ALL DEGREES OF FREEDOM ARE PRINTED.  
C IERR IF IERR=0 NORMAL OUTPUT.  
C IF IERR=-1 THE COVARIANCE MATRIX PX IS NOT POSITIVE DEFINITE. THE  
C EIGENVALUES AND CORRESPONDING EIGENVECTORS OF MATRIX PX ARE COMPUTED  
C AND PRINTED.  
C IA DIMENSION PARAMETER OF MATRIX PX.  
C IB IF IB=0 B(0)=0 IS ASSUMED.  
C IF IB=1 B(0)=1 IS ASSUMED.  
C IC DIMENSION PARAMETER OF MATRIX IQ.

C  
C D VECTOR OF ORDER 10 CONTAINING THE COEFFICIENTS OF THE COMMON  
C POLYNOMIAL.

C  
C SUBROUTINE REQUIRED

C DESYM  
C SOLVS  
C ROT  
C EIGS  
C PDIV  
C PMPY

C  
C DIMENSION T(1),X(1),PX(IA,IA),IQ(IC,1),AM(1),BM(1)  
C COMMON/COMPOL/D(10)

SUBROUTINE PDIV(T,X,F,AM,BM,IQ,MIX,MAX,NA,NB,NMA,NMB,NQ,IPR,IERR,  
\*IB,IC)

THE SUBROUTINE DIVIDES TWO GIVEN POLYNOMIALS WITH THE GREATEST COMMON  
POLYNOMIAL. THE COMMON POLYNOMIAL IS COMPUTED IN SUBROUTINE TESTUT.  
THE POLES, ZEROS AND STATIC GAIN FOR THE NEW SYSTEM IS COMPUTED.  
THIS SUBROUTINE MUST BE CALLED FROM SUBROUTINE TESTUT.  
AUTHOR ERIK BURSTRÖM 1972-12-24

T=(A(1),...,A(NA),B(1),...,B(NB)) VECTOR OF ORDER (NA+NB).  
X VECTOR OF ORDER (NA+NB) CONTAINING POLES AND ZEROS, COMPUTED IN SUB-  
ROUTINE XPX.  
F VECTOR OF ORDER (NA+NB) CONTAINING NEW ESTIMATES OF POLES AND ZEROS  
ON THE ASSUMPTION THAT SOME FACTORS ARE EQUAL, COMPUTED IN SUB-  
ROUTINE TESTUT.  
AM VECTOR OF ORDER NMA (MIN 1, MAX 10) CONTAINING THE NEW A-COEFFICIENTS.  
BM VECTOR OF ORDER NMB (MIN 1, MAX 10) CONTAINING THE NEW B-COEFFICIENTS.  
IQ MATRIX CONTAINING ALL POSSIBLE INDIVIDUELL TESTS COMPUTED IN SUB-  
ROUTINE TEST.  
MIX VECTOR OF ORDER NQ COMPUTED IN SUBROUTINE TESTUT. IF MIX(I)=1  
A CERTAIN COMBINATION OF FACTORS WILL BE ABBREVIATED AND IF MIX(I)=0  
A CERTAIN COMBINATION WILL NOT BE ABBREVIATED.  
MAX VECTOR OF ORDER NQ COMPUTED IN SUBROUTINE TESTUT. IF MAX(I)=0 TWO  
REAL FACTORS CAN BE ABBREVIATED, IF MAX(I)=1 ONE REAL AND ONE COMPLEX  
FACTOR CAN BE ABBREVIATED AND IF MAX(I)=2 TWO COMPLEX FACTORS CAN BE  
ABBREVIATED. NOTE THAT IF MAX(I)=1 THERE ARE TWO DEGREES OF FREEDOM  
ALTHOUGH ONLY ONE POLE AND ONE ZERO CAN BE ABBREVIATED.  
NA NUMBER OF A-COEFFICIENTS.  
NB NUMBER OF B-COEFFICIENTS.  
NMA NUMBER OF NEW A-COEFFICIENTS.  
NMB NUMBER OF NEW B-COEFFICIENTS.  
NQ NUMBER OF POSSIBLE INDIVIDUELL TESTS COMPUTED IN SUBROUTINE TEST.  
IPR IF IPR=0 NOTHING IS PRINTED.  
IF IPR=1 THE NEW A- AND B-POLYNOMIALS, POLES, ZEROS AND STATIC GAIN  
ARE PRINTED.  
IF IPR=2 AS IPR=1 + THE COMMON POLYNOMIAL AND THE REST POLYNOMIALS  
ARE PRINTED.  
IERR IF IERR=0 NORMAL OUTPUT  
IF IERR=-1 COMPUTATION OF POLES OR ZEROS HAS FAILED.  
IB IF IB=0 B(0)=0 IS ASSUMED.  
IF IB=1 B(0)=1 IS ASSUMED.  
IC DIMENSION PARAMETER OF MATRIX IQ.

D VECTOR OF ORDER 10 CONTAINING THE COEFFICIENTS OF THE COMMON  
POLYNOMIAL.

SUBROUTINE REQUIRED  
ROT  
PMPY

DIMENSION T(1),X(1),F(1),IQ(IC,1),MIX(1),MAX(1),AM(1),BM(1)  
COMMON/COMPOL/D(10)

```

SUBROUTINE COFAC(T,PT,T1,T2,TT1,TT2,NA,NB,NMA1,NMB1,NMA2,NMB2,IPR,
*IERR,IA,IB)

```

```

THIS SUBROUTINE COMPUTES THE GREATEST COMMON POLYNOMIAL TO TWO GIVEN
POLYNOMIALS BY USING THE EUCLIDEAN ALGORITHM. THE ORIGINAL POLY-
NOMIALS ARE ABBREVIATED WITH THE COMMON POLYNOMIALS. TO DECIDE
WHETHER TWO POLYNOMIALS HAVE COMMON FACTORS OR NOT, THE REST-POLY-
NOMIAL COMPUTED AT EACH DIVISION IS TESTED TO BE ZERO ON THE
ASSUMPTION THAT THE COEFFICIENTS ARE GAUSSIAN, I.E. A CHI-
SQUARE TEST WITH THE SIGNIFICANCE LEVEL OF 5% IS USED.
TWO DIFFERENT METHODS ARE USED WHEN THE DIVISIONS ARE DONE. ON ONE
HAND THE DIVISOR POLYNOMIAL IS NORMALIZED, I.E. THE HIGHEST DEGREE
COEFFICIENT IS 1 (VERSION 1), AND ON THE OTHER HAND THE DIVISOR
POLYNOMIAL IS NOT NORMALIZED, I.E. THE DIVISIONS ARE DONE STRAIGHT-
FORWARD (VERSION 2).

```

```

AUTHOR ERIK BURSTRÖM 1972-12-24

```

```

T=(A(1),...,A(NA),B(1),...,B(NB)) VECTOR OF ORDER (NA+NB) CONTAINING
THE COEFFICIENTS OF THE ORIGINAL A- RESP. B-POLYNOMIALS.

```

```

PT MATRIX OF ORDER (NA+NB)*(NA+NB) THE COVARIANCE MATRIX OF T.

```

```

T1 VECTOR OF ORDER (NMA1+NMB1) AT OUTPUT CONTAINING THE COEFFICIENTS
OF THE NEW A- RESP. B-POLYNOMIALS, WHEN VERSION 1 OF THE EUCLIDEAN
ALGORITHM IS USED.

```

```

T2 VECTOR OF ORDER (NMA2+NMB2) AT OUTPUT CONTAINING THE COEFFICIENTS
OF THE NEW A- RESP. B-POLYNOMIALS, WHEN VERSION 2 OF THE EUCLIDEAN
ALGORITHM IS USED.

```

```

TT1 STATISTICAL TEST-QUANTITY COMPUTED IN VERSION 1.

```

```

TT2 STATISTICAL TEST-QUANTITY COMPUTED IN VERSION 2.

```

```

NA NUMBER OF ORIGINAL A-COEFFICIENTS (MIN 1, MAX 10).

```

```

NB NUMBER OF ORIGINAL B-COEFFICIENTS (MIN 1, MAX 10). NA AND NB MUST
BE EQUAL.

```

```

NMA1 NUMBER OF ESTIMATED A-COEFFICIENTS IN VERSION 1.

```

```

NMB1 NUMBER OF ESTIMATED B-COEFFICIENTS IN VERSION 1.

```

```

NMA2 NUMBER OF ESTIMATED A-COEFFICIENTS IN VERSION 2.

```

```

NMB2 NUMBER OF ESTIMATED B-COEFFICIENTS IN VERSION 2.

```

```

IPR IF IPR=0 NOTHING IS PRINTED.

```

```

IF IPR=1 VECTOR T, MATRIX PT AND THE STATIC GAIN FOR THE ORIGINAL
SYSTEM ARE PRINTED. ALL TEST-QUANTITIES DOWN TO THE FIRST ONE WHICH
MEANS A POSITIVE TEST, THE NEW A-POLYNOMIAL, DEGREE OF A AND POLES,
THE NEW B-POLYNOMIAL, DEGREE OF B AND ZEROS, THE STATIC GAIN FOR
THE NEW SYSTEM, THE NEW VECTOR T, NUMBER OF NEW A- RESP. B-COEFFI-
CIENTS ARE PRINTED FOR BOTH VERSIONS.

```

```

IF IPR=2 AS IPR=1 + ALL REST-POLYNOMIALS AND CORRESPONDING COVA-
RIANCE MATRICES COMPUTED AT EACH DIVISION AND THE REST-POLY-
NOMIALS COMPUTED AT THE FINAL ABBREVIATION ARE PRINTED FOR
BOTH VERSIONS.

```

```

IERR IF IERR=0 NORMAL OUTPUT.

```

```

IF IERR=-1 EITHER IS MATRIX PT NOT POSITIVE DEFINITE OR IS IT
IMPOSSIBLE TO COMPUTE POLES OR ZEROS TO THE NEW SYSTEMS.

```

```

IA DIMENSION PARAMETER OF PT.

```

```

IB IF IB=0 B(0)=0 IS ASSUMED.

```

```

IF IB=1 B(0)=1 IS ASSUMED.

```

```

SUBROUTINE REQUIRED

```

```

EUKL1

```

```

EUKL2

```

```

PDV

```

```

ROT

```

```

DESYM

```

```

SOLVS

```

```

DIMENSION T(1),PT(IA,IA),T1(1),T2(1)

```

1 SUBROUTINE EUKL1(X1,PX1,X2,TT,NA1,NB1,NMA,NMB,NC,IPR,IERR,IA1,IB)

C THIS SUBROUTINE COMPUTES COMMON FACTORS TO TWO GIVEN POLYNOMIALS BY  
 C USING THE EUCLIDEAN ALGORITHM. THE DIVISOR-POLYNOMIAL IS NORMA-  
 C LIZED, I.E. THE HIGHEST DEGREE COEFFICIENT IS 1. TO DECIDE WHETHER  
 C TWO POLYNOMIALS HAVE COMMON FACTORS OR NOT, THE REST-POLY-  
 C NOMIAL COMPUTED AT EVERY DIVISION IS TESTED TO BE ZERO ON THE ASSUMPTION  
 C THAT THE COEFFICIENTS IN THE ORIGINAL POLYNOMIALS ARE GAUSSIAN.  
 C IF THE TWO GIVEN POLYNOMIALS HAVE COMMON FACTORS THEY ARE ABBRE-  
 C VIATED WITH THE GREATEST COMMON POLYNOMIAL.  
 C AUTHOR ERIK BURSTRÖM 1972-12-24

C X1=(1,A(1),...,A(NA),B(0),...,B(NB)) VECTOR OF ORDER (NA1+NB1). IF  
 C B(0)=0 B(0) IS OMITTED.

C PX1 MATRIX OF ORDER (NA1+NB1)\*(NA1+NB1) THE COVARIANCE MATRIX  
 C OF X1.

C X2 VECTOR OF ORDER (NMA+NMB) CONTAINING THE NEW ESTIMATED A- RESP. B-  
 C POLYNOMIALS.

C TT STATISTICAL TEST QUANTITY.

C NA1 NUMBER OF A-COEFFICIENTS (MIN 2, MAX 11).

C NB1 NUMBER OF B-COEFFICIENTS (MIN 1, MAX 11).

C NMA NUMBER OF NEW A-COEFFICIENTS.

C NMB NUMBER OF NEW B-COEFFICIENTS.

C NC NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM.

C IPR IF IPR=0 NOTHING IS PRINTED.

C IF IPR=1 THE STATIC GAIN FOR THE ORIGINAL SYSTEM, THE TEST QUANTITY  
 C AND THE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM AT EACH DIVISION DOWN TO  
 C THE FIRST POSITIVE TEST, THE NEW A-POLYNOMIAL, DEGREE OF A AND  
 C POLES, THE NEW B-POLYNOMIAL, DEGREE OF B AND ZEROS AND THE STATIC  
 C GAIN FOR THE NEW SYSTEM ARE PRINTED.

C IF IPR=2 AS IPR=1 + THE REST-POLYNOMIAL AND CORRESPONDING  
 C COVARIANCE MATRIX OBTAINED AT EACH DIVISION AND THE TWO REST-POLY-  
 C NOMIALS OBTAINED AT THE FINAL ABBREVIATION ARE PRINTED.

C IERR IF IERR=0 NORMAL OUTPUT.

C IF IERR=-1 EITHER IS THE COVARIANCE MATRIX PX1 NOT POSITIVE  
 C DEFINITE, OR IS IT IMPOSSIBLE TO COMPUTE POLES OR ZEROS TO  
 C THE NEW SYSTEM.

C IA1 DIMENSION PARAMETER OF X1 AND PX1.

C IB IF IB=0 B(0)=0 IS ASSUMED.

C IF IB=1 B(0)=1 IS ASSUMED.

C SUBROUTINE REQUIRED

C PDV

C DESYM

C SOLVS

C ROT

C DIMENSION X1(1),PX1(IA1,IA1),X2(1)

-2  
 SUBROUTINE EUKL2(X1,PX1,X2,TT,NA1,NB1,NMA,NMB,NC,IPR,IERR,IA1,IB)

THIS SUBROUTINE COMPUTES COMMON FACTORS TO TWO GIVEN POLYNOMIALS BY USING THE EUCLIDEAN ALGORITHM. THE DIVISOR-POLYNOMIAL IS NOT NORMALIZED, I.E. THE SUCCECIVE DIVISIONS ARE DONE STRAIGHTFORWARD. TO DECIDE WHETHER TWO POLYNOMIALS HAVE COMMON FACTORS OR NOT, THE REST-POLYNOMIALS COMPUTED AT EACH DIVISION IS TESTED TO BE ZERO ON THE ASSUMPTION THAT THE COEFFICIENTS OF THE ORIGINAL POLYNOMIALS ARE GAUSSIAN. IF THE ORIGINAL POLYNOMIALS HAVE COMMON FACTORS, THEY ARE ABBREVIATED WITH THE GREATEST COMMON POLYNOMIAL.  
 AUTHOR ERIK BURSTRÖM 1972-12-24

X1=(1,A(1),...,A(NA),B(0),B(1),...,B(NB)) VECTOR OF ORDER (NA1+NB1) CONTAINING THE COEFFICIENTS OF THE ORIGINAL POLYNOMIALS. IF B(0)=0, B(0) IS OMITTED.

PX1 MATRIX OF ORDER (NA1+NB1)\*(NA1+NB1) THE COVARIANCE MATRIX OF X1.

X2 VECTOR OF ORDER (NMA+NMB) CONTAINING THE COEFFICIENTS OF THE NEW ESTIMATED A- RESP. B-POLYNOMIALS.

TT STATISTICAL TEST QUANTITY.

NA1 NUMBER OF A-COEFFICIENTS (MIN 2, MAX 10).

NB1 NUMBER OF B-COEFFICIENTS (MIN 1, MAX 11).

NMA NUMBER OF NEW A-COEFFICIENTS.

NMB NUMBER OF NEW B-COEFFICIENTS.

NC NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM.

IPR IF IPR=0 NOTHING IS PRINTED.

IF IPR=1 THE STATIC GAIN FOR THE ORIGINAL SYSTEM, THE TEST QUANTITY AND CORRESPONDING NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM AT EACH DIVISION DOWN TO THE FIRST POSITIVE TEST, THE NEW A-POLYNOMIAL, DEGREE OF A AND POLES, THE NEW B-POLYNOMIAL, DEGREE OF B AND ZEROS AND THE STATIC GAIN FOR THE NEW SYSTEM ARE PRINTED.

IF IPR=2 AS IPR=1 + THE REST-POLYNOMIAL AND CORRESPONDING COVARIANCE MATRIX OBTAINED AT EACH DIVISION AND THE TWO REST-POLYNOMIALS OBTAINED AT THE FINAL ABBREVIATION ARE PRINTED.

IERR IF IERR=0 NORMAL OUTPUT.

IF IERR=-1 EITHER IS THE COVARIANCE MATRIX PX1 NOT POSITIVE DEFINITE OR IS IT IMPOSSIBLE TO COMPUTE POLES OR ZEROS FOR THE NEW SYSTEM.

IA1 DIMENSION PARAMETER OF X1 AND PX1

IB IF IB =0 B(0)=0 IS ASSUMED.

IF IB=1 B(0)=1 IS ASSUMED.

SUBROUTINE REQUIRED

PDV

DESYM

SOLVS

ROT

DIMENSION X1(1),PX1(IA1,IA1),X2(1)

SUBROUTINE PDV(DVND,DIVI,R,IDV,IDI,IDR,IPR,IERR,IK)

THIS SUBROUTINE COMPUTES THE NEW A- RESP. B-POLYNOMIAL BY ABBREVIATING THE ORIGINAL POLYNOMIAL WITH THE GREATEST COMMON POLYNOMIAL COMPUTED IN SUBROUTINE EUKL1 OR IN SUBROUTINE EUKL2. THE REST-POLYNOMIAL IS ALSO COMPUTED. THIS SUBROUTINE MUST BE CALLED EITHER FROM SUBROUTINE EUKL1 OR FROM SUBROUTINE EUKL2.  
AUTHOR ERIK BURSTRÖM 1972-12-24

DVND VECTOR OF ORDER IDV CONTAINING THE COEFFICIENTS OF THE DIVIDEND POLYNOMIAL.

DIVI VECTOR OF ORDER IDV CONTAINING THE COEFFICIENTS OF THE DIVISOR POLYNOMIAL.

R VECTOR OF ORDER IDR AT OUTPUT CONTAINING THE COEFFICIENTS OF THE QUOTE-POLYNOMIAL.

IDV NUMBER OF COEFFICIENTS OF THE DIVIDEND POLYNOMIAL.

IDI NUMBER OF COEFFICIENTS OF THE DIVISOR POLYNOMIAL.

IDR NUMBER OF COEFFICIENTS OF THE QUOTE POLYNOMIAL.

IPR IF IPR=0 NOTHING IS PRINTED.

IF IPR=1 THE NEW ESTIMATED QUOTE-POLYNOMIAL, DEGREE AND ROOTS OF IT ARE PRINTED.

IF IPR=2 AS IPR=1 + THE REST-POLYNOMIAL.

IERR IF IERR=0 NORMAL OUTPUT.

IF IERR=-1 COMPUTATION OF THE ROOTS HAS FAILED.

IK IF IK=1 THE NEW A-POLYNOMIAL IS COMPUTED.

IF IK=2 THE NEW B-POLYNOMIAL IS COMPUTED.

SUBROUTINE REQUIRED

ROT

DIMENSION DVND(1),DIVI(1),R(1)

```

PRINTOUT FROM COMFAC
*****
VECTOR T      .49562  -.24052  .10568  -.23676-01  1.0000  -.49854  .24635  -.11734  .47006-01
ROOTS OF A
  -.125734J   .4585725
  -.125734J   -.4585725
  .3733009    .2620373
  .3733009    -.2620373
  .5034061    .0000000
R(0)=0.  B(1)= 1.0000
ROOTS OF B
  -.1252590    .4587751
  -.1252590   -.4587751
  .3745289    .2599392
  .3745289   -.2599392
5 A-COEFFICIENTS
4 COMPLEX POLES
1 REAL POLES
STATIC GAIN  2.0010
VECTOR X
-----
COMPONENT NUMBER
  1  -----
  2  -----
  3  -----
  4  -----
  5  -----
  6  -----
  7  -----
  8  -----
  9  -----
-.12573  .45857  .37330  .26204  .50341  -.12526  .45878  .37453  .25994
COMPONENTS 1 AND 6 ARE TESTED
COMPONENTS 2 AND 7 ARE TESTED
TEST QUANTITY .75992-04
PREDICTED VALUE OF THE REAL PARTS  -.12550
PREDICTED VALUE OF THE IMAGINARY PARTS  .45935
COMPONENTS 3 AND 8 ARE TESTED
COMPONENTS 4 AND 9 ARE TESTED
TEST QUANTITY .28957-03
PREDICTED VALUE OF THE REAL PARTS  .37314
PREDICTED VALUE OF THE IMAGINARY PARTS  .25864
COMPONENTS 5 AND 8 ARE TESTED
COMPONENT 9 IS TESTED
TEST QUANTITY 4.3066
PREDICTED VALUE OF THE REAL PARTS  .28829
PREDICTED VALUE OF THE IMAGINARY PART  .00000
MATRIX Iq
REAL PART OF POLE, REAL PART OF ZERO, IMAGINARY PART OF POLE, IMAGINARY PART OF ZERO
  1  6  2  7
  3  8  4  9
  5  8  0  9
THE REAL PARTS OF TWO COMPLEX FACTORS
THE IMAGINARY PARTS OF TWO COMPLEX FACTORS
THE REAL PARTS OF TWO COMPLEX FACTORS
THE IMAGINARY PARTS OF TWO COMPLEX FACTORS
THE REAL PARTS OF ONE COMPLEX AND ONE REAL FACTOR
THE IMAGINARY PART OF ONE COMPLEX FACTOR

```

Forts nästa sida

Exempel på utskrift enligt algoritmen TPOL.

THE FOLLOWING COMPONENTS ARE TESTED  
 -----  
 REAL PART OF POLE, REAL PART OF ZERO, IMAGINARY PART OF POLE, IMAGINARY PART OF ZERO

1	6	2	7	3	4	5	6	7	8	9
TEST QUANTITY	.81199-01									
		DEGREES OF FREEDOM 4								
ESTIMATED VECTOR X										
COMPONENT NUMBER										
1	2	3	4	5	6	7	8	9		
-.12531	.45919	.37273	.26073	.50526	-.12531	.45919	.37273	.26073		

COMPONENTS 1 AND 6 ARE EQUAL THE REAL PARTS  
 COMPONENTS 2 AND 7 ARE EQUAL THE IMAGINARY PARTS  
 TWO COMPLEX POLES AND TWO COMPLEX ZEROS CAN BE ABBREVIATED  
 COMPONENTS 3 AND 8 ARE EQUAL THE REAL PARTS  
 COMPONENTS 4 AND 9 ARE EQUAL THE IMAGINARY PARTS  
 TWO COMPLEX POLES AND TWO COMPLEX ZEROS CAN BE ABBREVIATED

THE NEW A-POLYNOMIAL DEGREE OF A 1 ROOTS OF A

A(0) = 1.0000  
 A(1) = -.50370 .50370 .00000

THE B-POLYNOMIAL IS A CONSTANT 1.0000

STATIC GAIN 2.0149



```

PRINTOUT FROM COFAC      NA= 5  NB= 5
*****
VECTOR T
1.0000
.47006-01

COVARIANCE MATRIX
.00000
.00000
.19956-02
-.18816-03
.56448-03
.00000
-.12231-02
.24932-02
.00000
-.10070-02
.00000
.00000
.19956-02
-.18816-03
.47040-03
.00000
-.98785-03
.00000
.20193-02

.49562      -.24052      .10568      -.23676-01      1.0000      .24635      -.49854      .00000      .00000      .00000
.00000      .00000      .00000      .00000      .00000      .00000      .00000      .00000      .00000      .00000
.19956-02      .96277-03      -.42301-03      .94773-04      .00000      .00000      .19956-02      -.98612-03      .46971-03
-.19639-02      .39503-02      -.28883-02      .12690-02      -.28432-03      .00000      -.19839-02      .29584-02      -.14091-02
.96277-03      -.28883-02      .42566-02      -.27496-02      .61603-03      .00000      .96277-03      -.24069-02      .30531-02
-.42301-03      .12690-02      -.27496-02      .36036-02      -.12558-02      .00000      -.42301-03      .10575-02      -.22208-02
.94773-04      -.28432-03      .61603-03      -.12558-02      .52196-03      .00000      .94773-04      -.23693-03      .49757-03
.00000      .00000      .00000      .00000      .00000      .20014-04      .00000      .00000      .00000
.19956-02      -.19839-02      .96277-03      -.42301-03      .94773-04      .00000      .20156-02      -.98612-03      .46971-03
-.98612-03      .29584-02      .10575-02      -.23693-03      .00000      .00000      -.98612-03      .24853-02      -.11743-02
.46971-03      -.14091-02      .30531-02      -.22208-02      .49757-03      .00000      .46971-03      -.11743-02      .24860-02
-.18816-03      .56448-03      -.12231-02      .24932-02      -.10070-02      .00000      -.18816-03      .47040-03      -.98785-03
.20193-02

VERSION 1 THE B-POLYNOMIAL IS SCALED  b(0)= 1.0000
-----
STATIC GAIN      2.0010
TEST QUANTITY  .46324-05      DEGREES OF FREEDOM      4
-----
THE NEW A-POLYNOMIAL      DEGREE OF A      1      ROOTS OF A
A(0)= 1.0000
A(1)= -.50000      .50000      .00000
THE B-POLYNOMIAL IS CONSTANT 1.0000
STATIC GAIN      2.0000
THE NEW ESTIMATED VECTOR T      NMA= 1      NMB= 1
.50000      1.0000
VERSION 2 THE B-POLYNOMIAL IS UNSCALED  B(0)= 1.0000
-----
STATIC GAIN      2.0010
TEST QUANTITY  .18363-04      DEGREES OF FREEDOM      4
-----
THE NEW A-POLYNOMIAL      DEGREE OF A      1      ROOTS OF A
A(0)= 1.0000

```

Exempel på utskrift enligt Euklides algoritim.

```
A(1)= -.50000          .50000          .00000
THE B-POLYNOMIAL IS CONSTANT 1.0:00
STATIC GAIN          2.0000
THE NEW ESTIMATED VECTOR T          NMA= 1  NIB= 1
-.50000          1.0000
```

Exempel på utskrift enligt Euklides algorit, forts.