

MINIMALVARIANSSTRATEGIER MED BEGRÄNSAD
STYRSIGNAL

CHRISTER FOLKESSON

MINIMALVARIANSSTRATEGIER MED BEGRÄNSAD STYRSIGNAL

Examensarbete utfört vid
Institutionen för regleringsteknik LTH
av
Christer Folkesson

Augusti 1973

Handledare
B. Wittenmark

ABSTRACT

This paper deals with different methods for minimum variance control of linear, timeinvariable and sampled single-input single-output systems. Further more the amplitude of the control signal will be constrained. The most nature method is to make use of a minimum variance strategi, which minimises the variance of the output signal. But this only when no saturation is applied. Saturation of the input signal will give disturbance to the strategi causing a worse result. In one method for investigation, the control law minimises a loss-function also including the input variance. This method however, seldom gives a better result than the ordinary minimum variance strategi. But there are methods, in some cases giving great improvements. One of these performs a one-step-minimising of the output signal variance, under the condition of control signal amplitude being less than the saturation level. The same good result is obtained with a self-tuning regulator. This regulator estimates the parameters of the regulator, making it possible for the parameters of the system to be unknown, but still constant. This condition is often realistic.

SAMMANFATTNING

Denna skrift behandlar olika metoder för minimalvariansreglering av linjära, tidsinvarianta och samplade system med en in- och utsignal. Dessutom gäller att styrsignalens amplitud är begränsad. Den mest naturliga metoden är att använda en minimalvariansstrategi, som då begränsning ej föreligger minimerar utsignalens varians. Då styrsignalen begränsas störs minimalvariansstrategin så att resultatet blir sämre. En metod som innebär, att även styrsignalens varians tages med i den förlustfunktion som styrlagen skall minimera, undersökes. Denna metod ger dock sällan något positivt resultat i jämförelse med den vanliga minimalvariansstrategin. Men det finns metoder, som i vissa fall ger mycket stora förbättringar. En av dem är en styrstrategi som utför enstegsminimering av utsignalens varians, med bivillkoret att styrsignalens amplitud måste vara mindre än den begränsande nivån. Ett, i jämförelse med denna metod, likvärdigt resultat erhålles med en självinställande regulator. Denna regulator estimerar själv sina regulatorparametrar, varför systemets koefficienter får vara okända men konstanta. Detta förhållande är ofta realistiskt.

1 INLEDNING

Vårt problem är att reglera ett linjärt och tidsinvariant system med en insignal och en utsignal, då det gäller att regulatorn skall vara ett samplat system. Dessutom gäller att insignalen, i fortsättningen benämnd styrsignal, skall vara begränsad till amplitud. Regleringens syfte är att, under ovan nämnda förutsättningar, minimera utsignalens varians.

Vilka skäl kan det nu finnas till att man i ett verkligt system vill begränsa styrsignalens amplitud? För det första är det oftast så, att de styrorgan som användes för att reglera en process har en viss utstyrningsnivå, vilken inte kan överskridas. Ett enkelt exempel utgör en ventil som inte kan vara mer än öppen. Ett andra skäl till varför en styrsignal bör begränsas kan vara att någon säkerhetssynpunkt måste beaktas. Flödet av ett visst ämne till en kemisk process behöver kanske begränsas, för att risken att tappa kontrollen över processen skall vara minimal eller att risken för överhettning elimineras. Ett annat exempel är begränsning av ändringshastigheten i en ångpanna eller liknande.

Den strategi för reglering som i våra undersökningar togs som grund för jämförelse med andra metoder är minimalvariansstrategin. Denna styrlag ger en flerstegsminimering av utsignalens varians, då inga som helst begränsningar göres av styrsignalens amplitud. Då styrsignalen begränsas, får vi en större eller mindre avvikelse från minimalvariansstrategin, naturligtvis beroende på hur kraftig begränsningen är. Detta är alltså en metod som undersökes, en annan är Hastings-James' metod. Denna metod innebär att styrlagen minimerar en förlustfunktion där, förutom utsignalens, även styrsignalens varians bestraffas. Detta bör medföra att antalet inträffade begränsningar minskar, i förhållande till det antal som erhålles med minimalvariansstrategin, för samma värde på den begränsande nivån. En annan metod är att använda en styrlag som ger enstegsminimering av utsignalens varians, under bivillkoret att styrsignalens amp-

litud skall vara mindre än eller lika med den begränsande nivån. Metoden för enstegsminimering benämnes Goodwins metod, och visar sig vara ekvivalent med minimalvariansstrategin då den begränsande nivån ligger så högt att någon begränsning av styrsignalen aldrig inträffar. I här hittills nämnda metoder för reglering av ett system, förutsättes att detta är fullständigt känt. Den metod som innebär styrning med självinställande regulator förutsätter endast att systemets parametrar är konstanta, men för övrigt okända. Den självinställande regulatorn estimerar parametrarna i en minimalvariansstyrslag och styr sedan med hjälp av denna. För att kunna välja ett tillräckligt antal parametrar i minimalvariansstyrslagen, måste dock systemets ordning och fördröjning vara kända. Vid simulering av ett antal system, återkopplade enligt ovan nämnda metoder, framkommer bland annat följande. Begränsning av minimalvariansstrategins styrsignaler inverkar ofta kraftigt på utsignalen. Utsignalens varians ökar snabbt med minskande värde på den begränsande nivån. Ett försök att minska antalet inträffade begränsningar av styrsignalen utgör Hastings-James' metod. Vid simulering visar det sig dock, att utsignalens varians oftast växer med ökande bestraffning av styrsignalens varians, trots att antalet inträffade begränsningar samtidigt minskar. Goodwins metod ger i allmänhet mindre varians hos utsignalen än minimalvariansstrategin för samma begränsande nivå. För vissa system ger Goodwins metod en stor förbättring i jämförelse med minimalvariansstrategins resultat. Den självinställande regulatorn visar sig ha samma egenskaper som regulatorn enligt Goodwins metod. Dessa båda metoder ger, tillämpade på samma system, relativt minimalvariansstrategin en förbättring av samma storleksordning, vare sig denna nu är stor eller liten.

Vilken av Goodwins metod och den självinställande regulatorn, som bör föredragas framför minimalvariansstrategin, beror på hur pass väl bestämda systemets parametrar är.

2 PROBLEMFÖRMULERING

Det system som vi vill reglera antages vara linjärt och tidsinvariant med en insignal och en utsignal. Vår regulator skall vara ett samplat system, och om vi då väljer samplingsintervallet som tidsenhet, kan insignal-utsignalsambandet beskrivas med en rationell pulsöverföringsfunktion, som då systemet innehåller tidsfördröjning på k tidsenheter kan skrivas

$$y(t) = \frac{B_1^*(z^{-1})}{A_1^*(z^{-1})} u(t-k) \quad (2.1)$$

Omgivningens resulterande störning av utsignalen antages kunna beskrivas som en realisation av en stationär normalprocess med rationellt spektrum. En sådan process kan alltid representeras som

$$v(t) = \lambda \frac{C_1^*(z^{-1})}{A_2^*(z^{-1})} e(t) \quad (2.2)$$

där $\{e(t), t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ är en svit lika fördelade och oberoende stokastiska variabler med fördelningen $N(0,1)$, d.v.s. tidsdiskret, normalfördelat vitt brus. Genom att summera (2.1) och (2.2) samt göra liknämningt kan systemet och dess omgivning beskrivas så här

$$y(t) = \frac{B^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})} z^{-k} u(t) + \lambda \frac{C^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})} e(t) \quad (2.3)$$

där

$$\begin{aligned} A^*(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \\ B^*(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}, \quad b_0 \neq 0 \\ C^*(z^{-1}) &= 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_n z^{-n} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Syftet med vår reglering skall vara att minimera utsignalens varians, och vi antar att utsignalens önskade värde är noll. Vi vill bestämma en styrstrategi som utför denna reglering så att styrsignalen vid tiden t , $u(t)$ är en funktion av alla observerade utsignaler fram till tiden t , $y(t)$, $y(t-1)$, \dots och alla tidigare pålagda styrsignaler $u(t-1)$, $u(t-2)$, \dots . Dessutom skall gälla att styrsignalen $u(t)$ är begränsad, d.v.s. $|u(t)| \leq M$.

Då systemet innehåller en tidsfördröjning på k tidsenheter, kommer ett styringrepp vid tiden t inte att märkas i utsignalen förrän vid tidpunkten $t+k$. De vid tiden t intressanta storheterna är alltså $u(t)$ och $y(t+k)$. Det bästa möjliga vi, med det givna syftet för regleringen, kan göra är att bestämma en styrstrategi som ger

$$\begin{aligned} \text{Min } E \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y^2(t+k) \\ |u(t)| \leq M \end{aligned} \quad (2.5)$$

Denna strategi som ger flerstegsminimering är ej praktiskt genomförbar med det givna bivillkoret. En styrstrategi som ger enstegsminimering är dock realiserbar. Denna strategi ger alltså vid varje enskild tidpunkt t

$$\begin{aligned} \text{Min } E y^2(t+k) \\ |u(t)| \leq M \end{aligned} \quad (2.6)$$

En annan möjlighet är att bestämma en styrstrategi då vi bortser från bivillkoret $|u(t)| \leq M$, d.v.s. en styrstrategi som ger

$$\text{Min } E y^2(t+k) \quad (2.7)$$

Observera att om vi sedan med denna styrstrategi begränsar styrsignalen gäller (2.7) inte längre. I fallet ingen begränsning av styrsignalen, kan man visa att enstegsminimering blir ekvivalent med flerstegsminimering. D.v.s. en styrlag som ger (2.7) ger även

$$\text{Min } E \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y^2(t+k) \quad (2.8)$$

En ytterligare möjlighet som vi skall undersöka är att i den förlustfunktion som skall minimeras även ta hänsyn till styrsignalen u . Bestäm en styrstrategi som ger

$$\text{Min } E \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y^2(t+k) + \delta \cdot u^2(t)] \quad (2.9)$$

Genom att välja δ tillräckligt stort, kan vi kanske se till att styrsignalen aldrig når upp till den begränsande nivån. Men vad händer då med utsignalens varians?

I alla här hittills nämnda metoder att bestämma en styrstrategi har antagits ett system med helt kända parametrar. Vi kan också tänka oss att vi vill styra ett system med okända men konstanta parametrar, detta är ofta ett realistiskt fall. För att styra ett sådant system kan vi i varje steg söka estimerasystemets parametrar och sedan utifrån dessa beräkna den styrsignal som ger minimalvarians. I nästa avsnitt skall presenteras en metod, där vi nöjer oss med att endast estimerasystemets parametrarna i minimalvariansregulatorn.

Problemet är alltså att försöka komma fram till vilken av dessa nämnda styrstrategier som vanligtvis ger bäst resultat, d.v.s. minst varians hos utsignalen, då vi av något skäl är tvingade att införa en begränsning av styrsignalens amplitud.

3 METODER

I föregående avsnitt framlades ett antal, som grundval för styrning, möjliga förlustfunktioner. Nu skall vi undersöka hur de styrstrategier ser ut som utför minimering av dessa. Vid vår analys antages givet ett system med sin omgivning på formen (2.3).

3.1 Minimalvariansstrategin

Med en minimalvariansstrategi avses en styrlag som, då inga begränsningar finnes på styrsignalen, minimerar förlustfunktionen

$$E \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y^2(t+k) \quad (=2.8)$$

Denna förlustfunktion minimeras med en styrlag som i varje enskild tidpunkt söker minimum hos

$$E y^2(t+k) \quad (=2.7)$$

Detta utnyttjas vid härledningen av minimalvariansstrategin. Se ref. [4]. Omskrivning av (2.3) ger

$$y(t+k) = \frac{B^*}{A^*} u(t) + \lambda \frac{C^*}{A^*} e(t+k) \quad (3.1)$$

Genom att i (3.1) införa identiteten

$$C^* \equiv A^* F_{k-1}^* + z^{-k} G_{n-1}^* \quad (3.2)$$

och sedan ur (3.1) lösa $e(t)$ erhålles

$$\begin{aligned} y(t+k) &= \frac{B^*}{A^*} u(t) + \lambda F_{k-1}^* e(t+k) + \lambda \frac{G_{n-1}^*}{A^*} e(t) \\ &= \lambda F_{k-1}^* e(t+k) + \frac{G_{n-1}^*}{C^*} y(t) + \frac{B^*}{A^*} \left[1 - \frac{G_{n-1}^*}{C^*} z^{-k} \right] u(t) \\ &= \lambda F_{k-1}^* e(t+k) + \frac{G_{n-1}^*}{C^*} y(t) + \frac{B^* F_{k-1}^*}{C^*} u(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

där

$$\begin{aligned} F_{k-1}^* &= 1 + f_1 z^{-1} + \dots + f_{k-1} z^{-k+1} \\ G_{n-1}^* &= g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_{n-1} z^{-n+1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Vi har här separerat effekten av de storheter som bestämmer $y(t+k)$ i två delar. De två sista termerna representerar inverkan från vid tiden t kända storheter, och kan tolkas som en k -stegsprediktion av $y(t+k)$ baserad på $y(t)$, $y(t-1)$, ... och $u(t)$, $u(t-1)$, ... Den första termen innehåller inverkan från vid tiden t okända storheter och är då lika med felet hos k -stegsprediktionen.

Då det gäller att $e(t+1)$, $e(t+2)$, ... är oberoende av $u(t)$, $u(t-1)$, ... och $y(t)$, $y(t-1)$, ... erhålles

$$E\{y^2(t+k)\} = \lambda^2 E\{F_{k-1}^* e(t+k)\}^2 + E\left\{\frac{G_{n-1}^*}{C^*} y(t) + \frac{B^* F_{k-1}^*}{C^*} u(t)\right\}^2 \quad (3.5)$$

Minimum av (3.5) erhålles med

$$u(t) = -\frac{G_{n-1}^*}{B^* F_{k-1}^*} y(t) \quad (3.6)$$

Denna styrlag medför vid återkoppling att systemets beroende av störningen $e(t)$ kan uttryckas

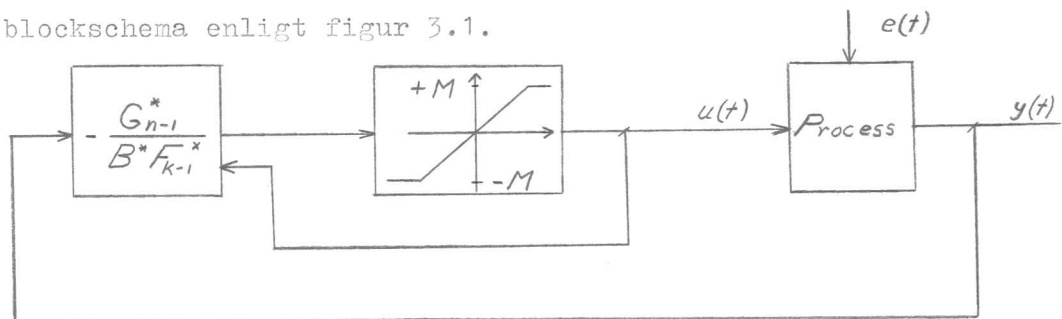
$$y(t) = \lambda F_{k-1}^* e(t) \quad (3.7)$$

Den minimala variansen hos utsignalen blir

$$E\{y^2(t)\} = \lambda^2 \{1 + f_1^2 + \dots + f_{k-1}^2\} \quad (3.8)$$

Observera att detta endast gäller i "steady state", då effekter av störningar i minimalvariansstrategin, som kan uppkomma vid uppstart av ett verkligt system, har dött ut.

Vår avsikt är nu att utnyttja denna styrlag, trots att vi av något skäl är tvingade att hålla styrsignalens amplitud inom vissa gränser. Denna vår strategi kan illustreras med ett blockschema enligt figur 3.1.



Figur 3.1 Minimalvariansstrategi med begränsad styrsignal.

Om vi låter uttrycket $\text{Sat}[x]$ betyda en begränsning av x till området $-1 \leq x \leq 1$ kan styrstrategin i figur 3.1 uttryckas

$$u(t) = -M \cdot \text{Sat} \left[\frac{1}{M} \left\{ \frac{1}{b_0} [B^* F_{k-1}^* - b_0] u(t) + \frac{1}{b_0} G_{n-1}^* y(t) \right\} \right] \quad (3.9)$$

3.2 Hastings-James' metod

Vi söker nu en styrlag baserad på en förlustfunktion i vilken vi, förutom utsignalens varians, även bestraffar styrsignalens varians. Se ref. [3]. Vi väljer en förlustfunktion med utseendet

$$E \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y^2(t+k) + \delta \cdot u^2(t)] \quad (=2.9)$$

För att minimera denna kan vi, på samma sätt som tidigare då ingen direkt begränsning av styrsignalen göres, välja att i varje enskild tidpunkt söka minimum av

$$I = E \{y^2(t+k) + \delta \cdot u^2(t)\} \quad (3.10)$$

För att söka en styrlag som minimerar (3.10), använder vi det tidigare framtagna uttrycket (3.5). Vi får

$$\begin{aligned} I &= E \{y^2(t+k) + \delta \cdot u^2(t)\} = \\ &= E \left\{ \lambda^2 [F_{k-1}^* e(t+k)]^2 + \left[\frac{G_{n-1}^*}{C^*} y(t) + \frac{B^* F_{k-1}^*}{C^*} u(t) \right]^2 + \delta \cdot u^2(t) \right\} \end{aligned}$$

För att minimera denna förlustfunktion deriverar vi med avseende på styrsignalen vid tiden t , $u(t)$.

$$\frac{\partial I}{\partial u(t)} = E \left\{ 2 \left[\frac{G_{n-1}^*}{C^*} y(t) + \frac{B^* F_{k-1}^*}{C^*} u(t) \right] b_0 + 2 \delta \cdot u(t) \right\}$$

Sättes denna derivata lika med noll erhålles

$$\left[\frac{B^* F_{k-1}^*}{C^*} b_0 + \delta \right] u(t) = \frac{b_0 B^* F_{k-1}^* + \delta \cdot C^*}{C^*} u(t) = - \frac{b_0 G_{n-1}^*}{C^*} y(t)$$

$$u(t) = - \frac{b_0 G_{n-1}^*}{b_0 B^* F_{k-1}^* + \delta \cdot C^*} y(t) \quad (3.11)$$

Styrlagen (3.11) minimerar förlustfunktionen (3.10). Observera att då $\delta=0$ blir styrlagen (3.11) lika med styrlagen (3.6).

Låter vi δ gå mot oändligheten, kommer alla styrsignaler att gå mot noll, vilket motsvarar ett helt ostyrt system. Substituerar vi nu styrlagen (3.11) i det uttryck som beskriver systemet och dess omgivning, d.v.s. (2.3), erhålles

$$\left[b_0 A^* B^* F_{k-1}^* + \delta A^* C^* + q^{-k} b_0 B^* G_{n-1}^* \right] y(t+k) = \lambda C^* \left[b_0 B^* F_{k-1}^* + \delta C^* \right] e(t+k)$$

Utnyttjas sedan identiteten (3.2) erhålles

$$\begin{aligned} [b_0 A^* B^* F_{k-1}^* + \delta A^* C^* + b_0 B^* (C^* - A^* F_{k-1}^*)] y(t+k) &= \lambda C^* [b_0 B^* F_{k-1}^* + \delta C^*] e(t+k) \\ [b_0 B^* + \delta A^*] C^* y(t+k) &= \lambda C^* [b_0 B^* F_{k-1}^* + \delta C^*] e(t+k) \end{aligned}$$

Det uttryck som beskriver systemets beroende av störningen $e(t)$, vid återkoppling med styrlagen (3.11), blir alltså i "steady state"

$$y(t) = \lambda \frac{b_0 B^* F_{k-1}^* + \delta C^*}{b_0 B^* + \delta A^*} e(t) \quad (3.12)$$

Som kontroll observerar vi att då $\delta=0$ övergår (3.12) i (3.7). Låter vi δ gå mot oändligheten kommer (3.12) att gå mot

$$y(t) = \lambda \frac{C^*}{A^*} e(t) \quad (3.13)$$

Detta motsvarar ett ostyrt system, alla styrsignaler lika med noll.

Vår strategi blir liksom i avsnitt 3.1 att utnyttja denna styrlag (3.11), trots att en begränsning av styrsignalen kommer att sabotera minimeringen av den aktuella förlustfunktionen (3.10). Genom att välja δ lämpligt i förhållande till begränsningens storlek, kan vi kanske i en viss mening erhålla en optimal styrlag.

3.3 Goodwins metod

Vi antar nu att vi vet att styrsignalens amplitud måste hålla sig inom vissa gränser, $|u| \leq M$. Denna information vill vi utnyttja när vi bestämmer vår styrstrategi och väljer att göra en enstegsminimering med bivillkor. Se ref. [1]. Vi låter alltså styrsignalen $u(t)$ vara sådan att den vid varje enskild tidpunkt t ger

$$\begin{aligned} \text{Min } E y^2(t+k) & \quad (=2.6) \\ |u(t)| \leq M \end{aligned}$$

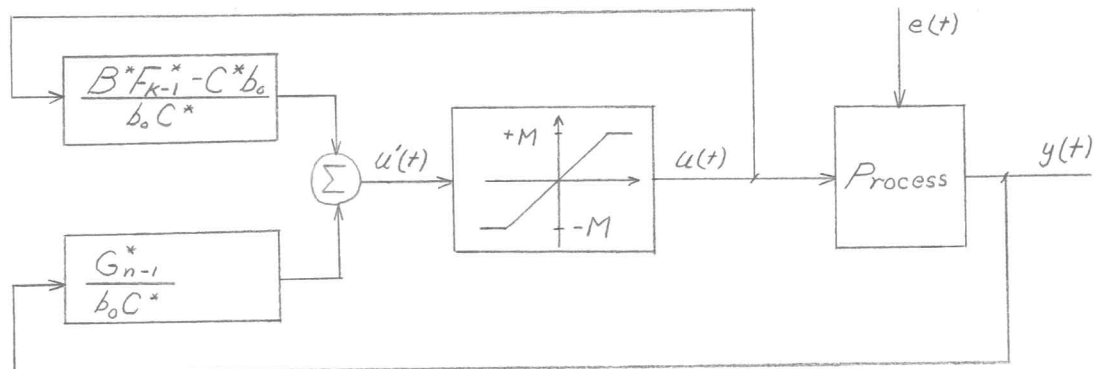
Liksom tidigare måste för $u(t)$ även gälla realiserbarhetsvillkoret, d.v.s $u(t)$ är en funktion av $y(t)$, $y(t-1)$, ..., $u(t-1)$, $u(t-2)$, ... Vi utgår från uttrycket (3.5), som efter omskrivning ger

$$E y^2(t+k) = \lambda^2 E \{F_{k-1}^* e(t+k)\}^2 + E \left\{ \frac{G_{n-1}^*}{C^*} y(t) + \frac{B^* F_{k-1}^* - C^* b_0}{C^*} u(t) + b_0 u(t) \right\}^2 \quad (3.14)$$

Vi har här separerat effekten av styrsignalen $u(t)$ från tidigare styrsignaler $u(t-1)$, $u(t-2)$, ... Om vi nu tar hänsyn till bivillkoret $|u(t)| \leq M$, ser vi att (3.14) minimeras av

$$u(t) = -M \text{Sat} \left[\frac{1}{M} \left\{ \frac{B^* F_{k-1}^* - C^* b_0}{b_0 C^*} u(t) + \frac{G_{n-1}^*}{b_0 C^*} y(t) \right\} \right] \quad (3.15)$$

Denna styrstrategi kan åskådliggöras med ett blockschema enligt figur 3.2.



Figur 3.2 Goodwins metod.

Om vi antar, att M är så stort, att någon begränsning aldrig inträffar, kan vi i (3.15) multiplicera på båda sidor om likhetstecknet med $b_0 C^*$, varefter erhålles

$$u(t) = - \frac{G_{n-1}^*}{B^* F_{k-1}^*} y(t) \quad (=3.6)$$

Om någon begränsning av styrsignalen aldrig inträffar, är alltså styrlagen (3.15) ekvivalent med minimalvariansstrategin. Vi ser då även, att i "steady state" blir enstegsminimering ekvivalent med flerstegsminimering. Oavsett om begränsning sker eller ej, ser vi att ekvivalens även erhålles då $C^*=1$, ty då övergår (3.15) i (3.9).

$C^* \neq 1$ inför alltså ytterligare dynamik i systemet. Denna dynamik kommer att innehålla information om tidigare önskvärda styrsignaler innan begränsaren fått verka, d.v.s. $u'(t-1)$, $u'(t-2), \dots, u'(t-n)$, se figur 3.2. Frågan är nu hur detta kommer att inverka på vår styrning.

Vi kommer vid våra simuleringar att upptäcka, att styrstrategin (3.15) vid inträffade begränsningar, i jämförelse med minimalvariansstrategin (3.9), uppför sig något annorlunda. Se figur 3.3 och figur 3.4, som visar avvikelse från minimalvariansstrategin för utsignal och styrsignal, då en störning av styrsignalen inträffat. För att kunna förklara vissa fenomen som erhålles med strategin (3.15), skall vi här försöka att närmare analysera denna. Hur kommer framtida styrsignaler och utsignaler, efter en inträffad begränsning av styrsignalen, att skilja sig från de som erhållits om någon begränsning inte inträffat?

Vi observerar, att uttrycket inom $\{ \}$ i (3.15) utgör ett självständigt dynamiskt system. Vi kan även skriva (3.15) så här

$$u'(t) = - \frac{B^* F_{k-1}^* - C^* b_0}{b_0 C^*} u(t) - \frac{G_{n-1}^*}{b_0 C^*} y(t) \quad (3.16)$$

$$u(t) = M \operatorname{Sat} \left[\frac{1}{M} \{ u'(t) \} \right] \quad (3.17)$$

Antag, att det vid tidpunkten t_0 inträffar en begränsning av styrsignalen $u(t)$ så att $u(t_0) = u'(t_0) - \Delta u$. Dessförinnan har inga

begränsningar skett, d.v.s. $u(t)=u'(t)$ för alla $t < t_0$. Det gäller alltså

$$u(t_0) = \left\{ -\frac{B^*F_{k-1}^* - C^*b_0}{b_0C^*} u(t_0) - \frac{G_{n-1}^*}{b_0C^*} y(t_0) \right\} - \Delta u = \{u'(t_0)\} - \Delta u \quad (3.18)$$

Omskrivning av uttrycket (3.3) med utnyttjande av (3.18) ger

$$\begin{aligned} y(t_0+k) &= \lambda F_{k-1}^* e(t_0+k) + \frac{G_{n-1}^*}{C^*} y(t_0) + \frac{B^*F_{k-1}^* - C^*b_0}{C^*} u(t_0) + b_0 \{u(t_0)\} \\ &= \lambda F_{k-1}^* e(t_0+k) + \frac{G_{n-1}^*}{C^*} y(t_0) + \frac{B^*F_{k-1}^* - C^*b_0}{C^*} u(t_0) + \\ &+ \left\{ -\frac{B^*F_{k-1}^* - C^*b_0}{C^*} u(t_0) - \frac{G_{n-1}^*}{C^*} y(t_0) \right\} - b_0 \Delta u \\ &= \lambda F_{k-1}^* e(t_0+k) - b_0 \Delta u \end{aligned} \quad (3.19)$$

Om begränsningen vid tiden t_0 inte inträffat, hade utsignalen vid tidpunkten t_0+k varit lika med den som den ostörda minimalvariansstyrningen ger, d.v.s.

$$y_0(t_0+k) = \lambda F_{k-1}^* e(t_0+k) \quad (3.20)$$

Den verkliga utsignalen vid tidpunkten t_0+k kan nu skrivas

$$y(t_0+k) = y_0(t_0+k) - \Delta y(t_0+k) \quad (3.21)$$

där

$$\Delta y(t_0+k) = b_0 \Delta u \quad (3.22)$$

Vi antar nu, att någon ytterligare begränsning av styrsignalen inte inträffar, d.v.s. $u(t)=u'(t)$ för $t > t_0$. Om vi låter beteckningen $\{ \}_p$ betyda p :te-gradstermen av det polynom i q^{-1} som finns inom klammer, så kan vi m.h.a. (3.16) skriva

$$\begin{aligned} u'(t_0+1) &= -\frac{B^*F_{k-1}^* - C^*b_0}{b_0C^*} u(t_0+1) - \frac{G_{n-1}^*}{b_0C^*} y(t_0+1) \\ &= -\frac{B^*F_{k-1}^* - C^*b_0}{b_0C^*} u'(t_0+1) + \frac{\{B^*F_{k-1}^* - C^*b_0\}_1}{b_0C^*} \Delta u - \frac{G_{n-1}^*}{b_0C^*} y(t_0+1) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Genom omskrivning av (3.3) som tidigare samt införande av (3.23) erhålles

$$\begin{aligned} y(t_0+k+1) &= \lambda F_{k-1}^* e(t_0+k+1) + \frac{G_{n-1}^*}{C^*} y(t_0+1) + \frac{B^* F_{k-1}^* - C^* b_0}{C^*} u(t_0+1) + b_0 \{u(t_0+1)\} \\ &= \lambda F_{k-1}^* e(t_0+k+1) + \frac{G_{n-1}^*}{C^*} y(t_0+1) + \frac{B^* F_{k-1}^* - C^* b_0}{C^*} u'(t_0+1) - \\ &\quad - \frac{\{B^* F_{k-1}^* - C^* b_0\}_1 \Delta u}{C^*} - \frac{B^* F_{k-1}^* - C^* b_0}{C^*} u'(t_0+1) + \frac{\{B^* F_{k-1}^* - C^* b_0\}_1 \Delta u}{C^*} - \frac{G_{n-1}^*}{C^*} y(t_0+1) \\ &= \lambda F_{k-1}^* e(t_0+k+1) = y_0(t_0+k+1) \end{aligned}$$

p.s.s. ger

$$u'(t_0+p) = - \frac{B^* F_{k-1}^* - C^* b_0}{b_0 C^*} u'(t_0+p) + \frac{\{B^* F_{k-1}^* - C^* b_0\}_P \Delta u}{b_0 C^*} - \frac{G_{n-1}^*}{b_0 C^*} y(t_0+p)$$

att utsignalen vid tidpunkten t_0+k+p blir

$$y(t_0+k+p) = \lambda F_{k-1}^* e(t_0+k+p) = y_0(t_0+k+p)$$

Generellt gäller alltså, att en störning av styrlagen (3.15) endast stör utsignalen vid en enda tidpunkt k tidsenheter senare. Störning av utsignalen innebär avvikelse från den utsignal som erhålles med en ostörd minimalvariansstrategi. I frånvaro av störningar, d.v.s. begränsningar av styrsignalen, kommer både styrlagen (3.6) och (3.15) att ge minimalvarians för utsignalen. En störning av styrlagen (3.6) kommer också att medföra en störning av utsignalen k tidsenheter efter det att styrsignalen störts. Men denna störning kommer, som vi strax skall se, inte sedan att försvinna, utan får ett mer eller mindre snabbt avklingande förlopp. Det i (3.15), i jämförelse med (3.9), i nämnaren tillkommande C^* -polynomet inför ytterligare dynamik i det återkopplade systemet. Styrlagen (3.15) kan naturligtvis inte göra något åt den momentana störning som kommer att uppträda i utsignalen på grund av styrsignalens begränsning. Men den ytterligare dynamiken hos styrlagen gör, att det i denna lagras information om hur mycket en tidigare styrsignal skiljde sig från det önskade värdet. Denna information utnyttjas sedan i efterföljande steg för att korrigera för

ytterligare fel i minimalvariansstrategin.

Vi skall nu se närmare på ett par speciella system, för att verifiera nyssnämnda påståenden. Systemen simuleras för det första med en ostörd minimalvariansstrategi, vilken erhålles både med minimalvariansstyrlagen (3.6) och styrlagen enligt Goodwins metod (3.15) då inga begränsningar göres av styrsignalen. Dessutom göres simuleringar med båda styrslagarna, då en enstaka störning av styrsignalen vid en viss tidpunkt implementeras. Förhållandena vid de störda simuleringarna blir alltså just de som antogs vid analysen tidigare. För ett antal tidpunkter beräknas sedan skillnaden mellan de ostörda styr- och utsignalerna och motsvarande störda, d.v.s. $\Delta u(t) = u_o(t) - u(t)$ och $\Delta y(t) = y_o(t) - y(t)$.

Exempel 3.1

Vi skall först se på ett system med utseendet

$$[1 + a_1 q^{-1}]y(t) = b_0 u(t-2) + [1 + c_1 q^{-1}]e(t)$$

där speciellt gäller $a_1 = -0.99$, $b_0 = 0.2$, $c_1 = -0.5$.

Figur 3.3 visar resultatet av simuleringar av detta system, dels då styrning sker med minimalvariansstyrlagen och dels då Goodwins metod användes. Vid tidpunkten $t = t_0 = 7$ störes styrsignalen med $\Delta u = -1$, och vi ser att det framtida beroendet av störningen får helt olika förlopp beroende på vilken styrslag som användes. Eftersom fördröjningen i systemet är två tidsenheter, d.v.s. $k=2$, kommer störningen inte att märkas i utsignalen förrän vid tidpunkten $t=9$. I enlighet med (3.22) blir $\Delta y(9) = 0.2 \cdot (-1) = -0.2$. I alla efterföljande tidpunkter ser vi att Goodwins styrslag helt slår ner störningen i utsignalen, detta är i enlighet med vad vi tidigare generellt visade. Minimalvariansstyrlagen däremot ger ett exponentiellt utdöende av $\Delta y(t)$.

I figur 3.3 ser vi att minimalvariansstyrlagen, även då det gäller styrsignalen, ger ett från Goodwins metod avvikande förlopp. I motsats till minimalvariansstyrlagen, behöver Goodwins styrslag här bara göra en från den ostörda minimal-

variansstrategin avvikande styrning för att, efter den påtvingade störningen av utsignalen, i fortsättningen se till att denna störning blir noll. Att detta förhållande i det här exemplet gäller oberoende av koefficienternas värden, kan visas analytiskt.

Exempel 3.2

I vårt andra exempel låter vi systemet ha följande utseende

$$\begin{aligned} [1 - 1.85q^{-1} + 0.855q^{-2}]y(t) = & [1 - 0.95q^{-1} + 0.5q^{-2}]u(t-2) + \\ & + [1 - 0.7q^{-1} - 0.18q^{-2}]e(t) \end{aligned}$$

Resultatet av motsvarande simuleringar, som i föregående exempel, av detta system visas i figur 3.4. Vi kan av detta exempel konstatera, att förloppet hos $\Delta u(t)$ i det förra exemplet, då Goodwins styrlag användes, var ett specialfall. Utsignalens avvikelse från den ostörda minimalvariansstrategin uppträder även här vid endast en tidpunkt, närmare bestämt då $t=t_0+k$ som tidigare generellt visades. Minimalvariansstrategin medför däremot att störningen kommer att märkas i utsignalen långt framåt i tiden.

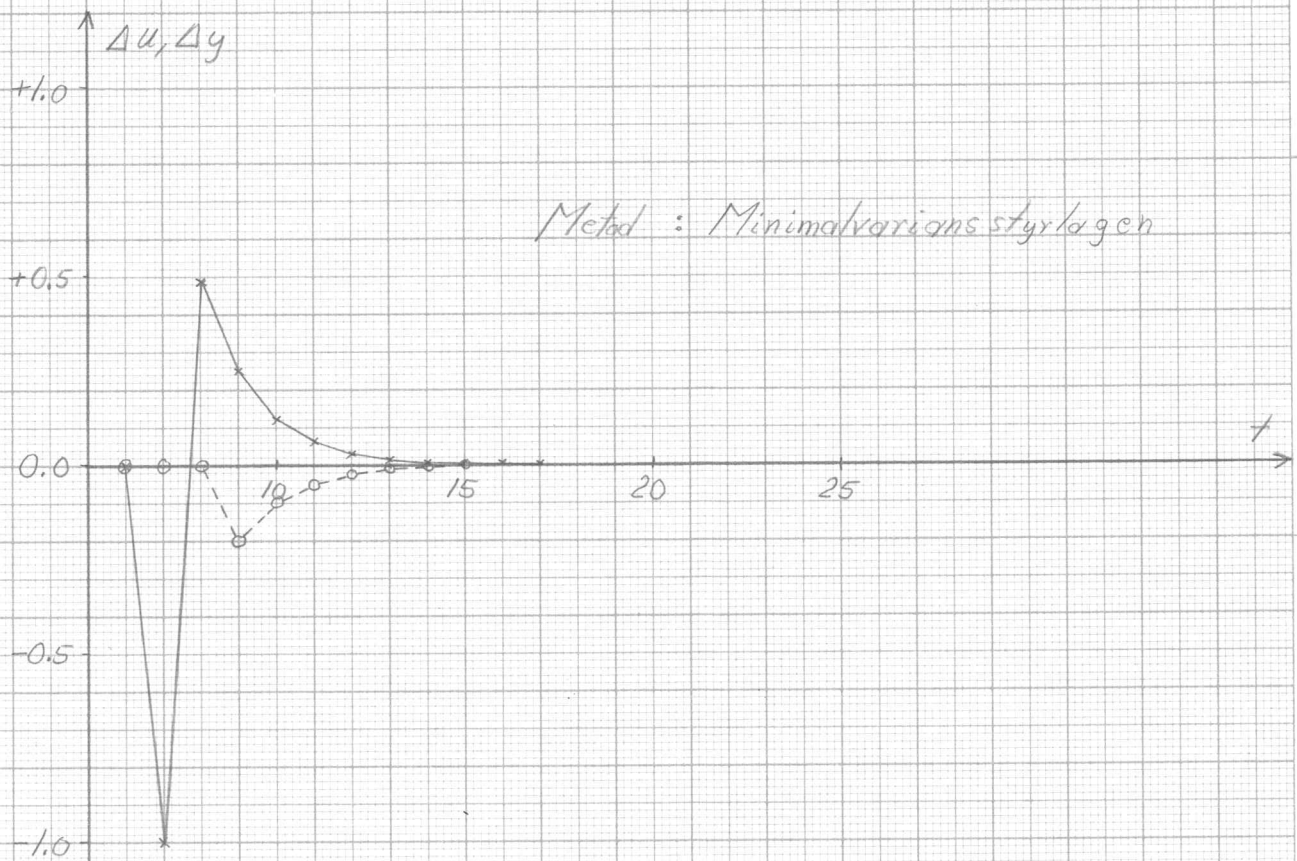
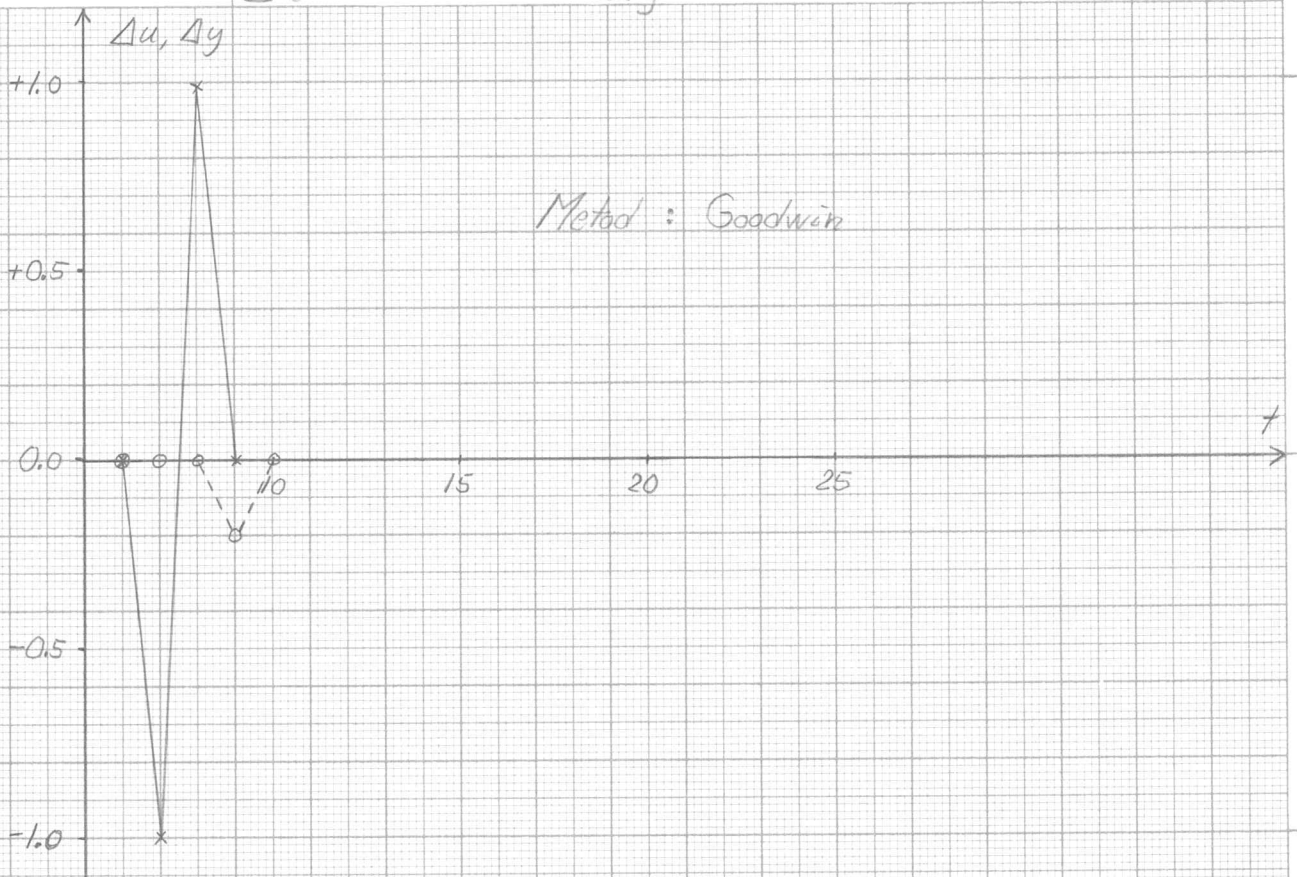
Den intressanta frågeställningen är nu, om den generella egenskap som Goodwins metod, i jämförelse med minimalvariansstyrlagen, uppvisar under ovanstående speciella förhållanden, ger en förbättring under de förhållanden som vi här närmast är intresserade av. D.v.s. ger Goodwins styrlag en lägre varians hos utsignalen än minimalvariansstyrlagen, då styrsignalen påverkas av ständigt återkommande störningar, vilka åstadkommes av en relativt hård begränsning av styrsignalens amplitud.

Exempel 3.1

System : $A^* = 1 - 0.99q^{-1}$
 $B^* = 0.2$
 $C^* = 1 - 0.50q^{-1}$ $K = 2$

Figur 3.3

Δu — Δy - - -



Exempel 3.2

System: $A^* = 1 - 1.85q^{-1} + 0.855q^{-2}$

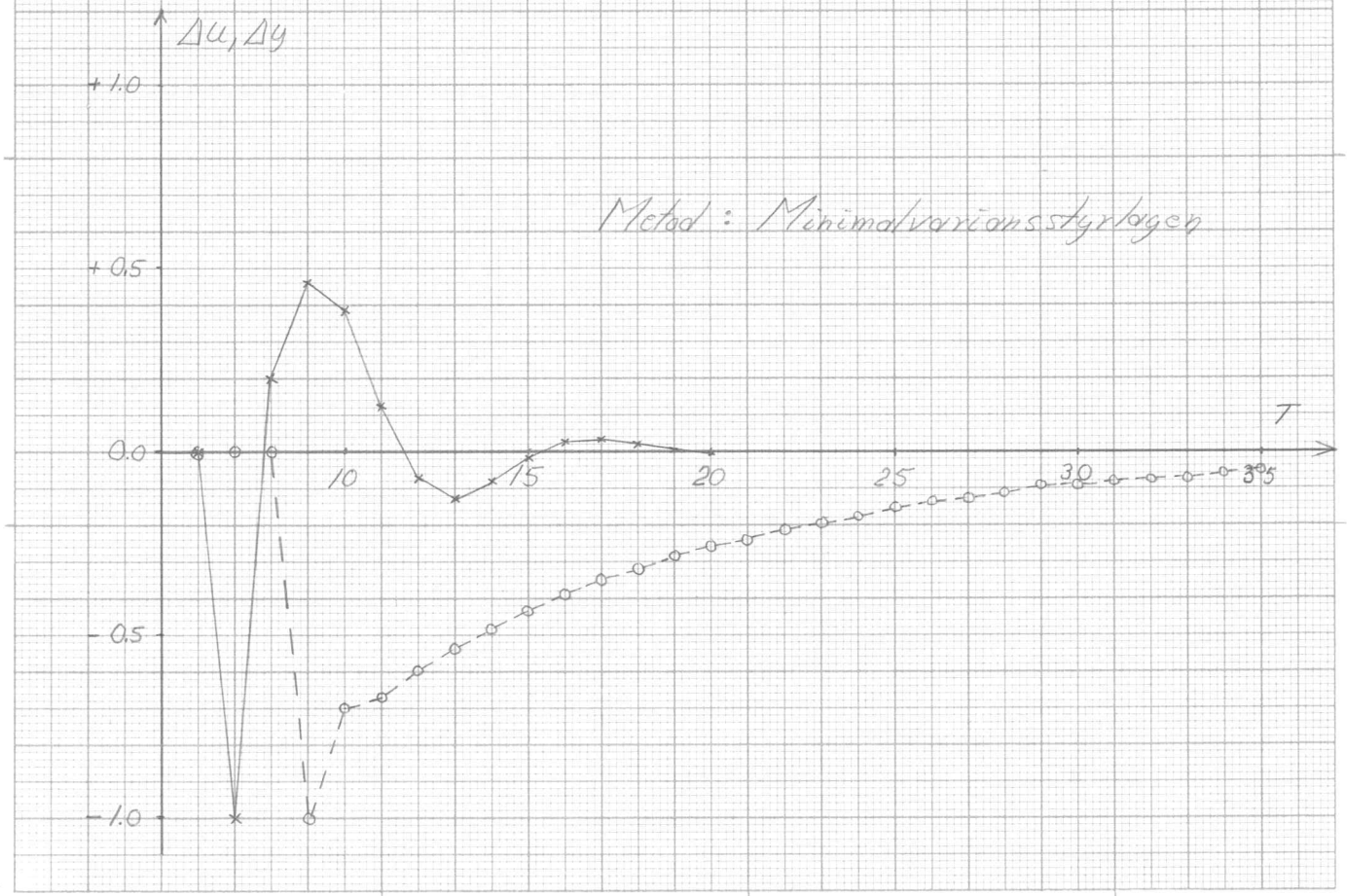
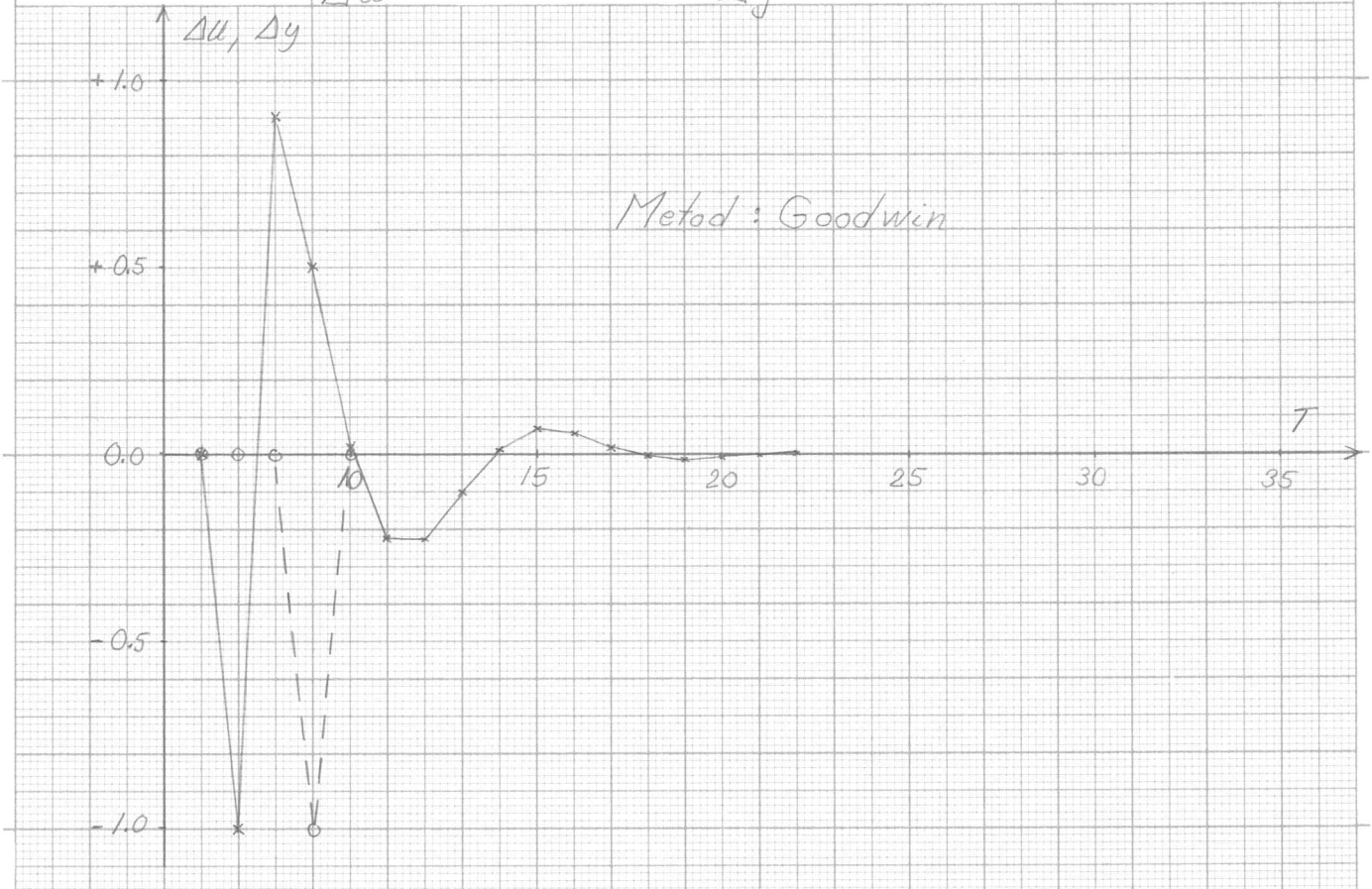
$B^* = 1 - 0.95q^{-1} + 0.5q^{-2}$

$C^* = 1 - 0.7q^{-1} - 0.18q^{-2}$

$k=2$

Figur 3.4

Δu ——— Δy - - -



3.4 Självinställande regulator

Den självinställande regulatorn är härledd för att reglera system med konstanta men okända parametrar. Se referenser [2] och [5]. Regulatorn består av två delar. För det första identifieras de okända regulatorparametrarna med hjälp av minsta kvadratmetoden. För det andra beräknas en minimalvariansregulator baserad på de estimerade parametrarna. Den självinställande regulatorn har egenskapen att den konvergerar till den optimala regulatorn om minsta kvadrattimeringen konvergerar och om regulatorn innehåller tillräckligt många parametrar. Detta gäller under förutsättning att styrsignalen ej är hårt begränsad.

Om vi som tidigare beskriver vårt system med uttrycket (2.3) och inför identiteten (3.2) erhåller vi en beskrivning av systemet enligt formel (3.3). För att förenkla estimeringen av parametrarna antar vi nu att $C^*=1$, varvid (3.3) övergår i

$$y(t+k) = G_{n-1}^* y(t) + B^* F_{k-1}^* u(t) + \varepsilon(t+k) \quad (3.24)$$

där $\varepsilon(t) = \lambda F_{k-1}^* e(t)$ d.v.s. ett glidande medelvärde av ordning $k-1$ av bruset $e(t)$.

Vid varje samplingsintervall utföres beräkningarna i två steg. Först estimeras de n parametrarna i polynomet G_{n-1}^* och de $n+k-1$ okända parametrarna i polynomet $B^* F_{k-1}^*$, då b_0 antas känd. Bestämningen av parametrarna utföres genom minsta kvadrattimering baserad på alla data kända vid den aktuella tidpunkten t , d.v.s. minimera uttrycket

$$\sum_{k=0}^t \varepsilon^2(k) \quad (3.25)$$

I det andra steget beräknas minimalvariansregulatorn enligt

$$u(t) = -\frac{1}{b_0} [B^* F_{k-1}^* - 1] u(t) - \frac{1}{b_0} G_{n-1}^* y(t) \quad (3.26)$$

Det intressanta för oss är nu hur denna styrstrategi kommer att uppföra sig då styrsignalen begränsas.

3.5 Flerstegsminimering

I avsnitt 2 nämndes att vi, då begränsad styrsignal föreligger, är intresserade av att bestämma en styrstrategi som ger

$$\begin{aligned} \text{Min } E \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y^2(t+k) \\ |u(t)| \leq M \end{aligned} \quad (=2.5)$$

Där N kan väljas godtyckligt stort. Då en sådan strategi inte är praktiskt genomförbar, har vi nöjt oss med att välja $N=1$. Denna strategi är ekvivalent med Goodwins metod. Försök har dock gjorts med $N=2$, tvåstegsminimering.

I avsnitt 3.4, där Goodwins metod beskrives, visades att enstegsminimering blir ekvivalent med flerstegsminimering om någon begränsning av styrsignalen aldrig inträffar. Detta gäller i "steady state", då störningar i minimalvariansstrategin, uppkomna vid uppstart av reglersystemet, har dött ut. Vid simuleringar av system kommer man ifrån dessa effekter, genom att i startpunkten ge alla tidigare brus- styr- och ut-signaler värdena noll.

Om vi inte kan bortse från begränsningar av styrsignalens amplitud, gäller ej, att en strategi som i varje enskild tidpunkt ger

$$\begin{aligned} \text{Min } E y^2(t+k) \\ |u(t)| \leq M \end{aligned} \quad (=2.6)$$

även medför (2.5).

Exempel 3.3

För att förtydliga ovanstående skall vi se på ett enkelt exempel, där systemet har utseendet

$$y(t) = 0.5y(t-1) - u(t-1) + u(t-2) + e(t)$$

och där $e(t)$ är en svit oberoende stokastiska variabler med de möjliga utfallen ± 2 , vardera med sannolikheten 0.5. Då blir $Ee(t)=0$ och $Ee^2(t)=4$.

Vi vill nu minimera

$$E \sum_{t=1}^2 y^2(t)$$

under bivillkoret $|u(t)| \leq 1$, då vi vet att $y(-1)=u(-1)=u(-2)=0$.

De styrsignaler som vi kan välja och som påverkar vår förlustfunktion är $u(0)$ och $u(1)$. Vårt kriterium blir således,

sök

$$\underset{u(0), u(1)}{\text{Min}} E \sum_{t=1}^2 y^2(t)$$

$$|u(t)| \leq 1$$

De brustermer som stör $y(0)$ och $y(1)$ är $e(0)$ och $e(1)$, dessa har fyra möjliga utfall, alla med sannolikheten 0.25.

$$\underline{1. e(0)=2, e(1)=2}$$

medför att $y(0)=2$ och $y(1)=1-u(0)+e(1)$.

Minimum för $Ey^2(1)$ erhålles med $u(0)=1$, vi väljer istället

$u(0)=1-x$, $x \geq 0$, som ger

$y(1)=x+e(1)=x+2$, då blir

$y(2)=0.5(x+2)-u(1)+(1-x)+e(2)=2-0.5x-u(1)+e(2)$.

Minimum för $Ey^2(2)$ erhålles med $u(1)=2-0.5x$, p.g.a. bivillkoret väljer vi $u(1)=1$, vilket ger

$y(2)=1-0.5x+e(2)$

Vår förlustfunktion blir då speciellt

$$I_1 = y^2(1) + y^2(2) = (x+2)^2 + (1-0.5x+e(2))^2$$

$$\underline{2. e(0)=2, e(1)=-2}$$

medför $y(0)=2$ och $y(1)=1-u(0)+e(1)$.

Minimum för $Ey^2(1)$ erhålles för $u(0)=1$, vi väljer

$u(0)=1-x$, vilket ger

$y(1)=x+e(1)=x-2$, då blir

$y(2)=0.5(x-2)-u(1)+(1-x)+e(2)=-0.5x-u(1)+e(2)$.

Minimum för $Ey^2(2)$ erhålles för $u(1)=-0.5x$, vilket ger

$y(2)=e(2)$ och

$$I_2 = (x-2)^2 + e^2(2)$$

$$\underline{3. e(0)=-2, e(1)=2}$$

medför $y(0)=-2$ och $y(1)=-1-u(0)+e(1)$.

Minimum för $Ey^2(1)$ erhålles med $u(0)=-1$, vi väljer

$u(0)=-1+x$, som ger

$y(1)=-x+e(1)=-x+2$, då blir

$$y(2)=0.5(-x+2)-u(1)+(-1+x)+e(2)=0.5x-u(1)+e(2).$$

Minimum för $Ey^2(2)$ erhålles för $u(1)=0.5x$, vilket medför

$y(2)=e(2)$ och

$$I_3 = (-x+2)^2 + e(2)^2.$$

$$\underline{4. e(0)=-2, e(1)=-2}$$

medför $y(0)=-2$ och $y(1)=-1-u(0)+e(1)$.

Minimum för $Ey^2(1)$ erhålles för $u(0)=-1$, vi väljer istället

$u(0)=-1+x$, som ger

$y(1)=-x+e(1)=-x-2$, då blir

$$y(2)=0.5(-x-2)-u(1)+(-1+x)+e(2)=-2+0.5x-u(1)+e(2).$$

Minimum för $Ey^2(2)$ erhålles med $u(1)=-2+0.5x$, p.g.a. bivill-

koret får vi välja $u(1)=-1$, vilket ger

$y(2)=-1+0.5x+e(2)$ och

$$I_4 = (-x-2)^2 + (-1+0.5x+e(2))^2.$$

Vår förlustfunktion I kan nu beräknas.

$$I = E\{y^2(1) + y^2(2)\} = E\{0.25[I_1 + I_2 + I_3 + I_4]\} = \dots = 8 + x^2 + 0.5(1 - 0.5x)^2.$$

Termerna i förlustfunktionen skall tolkas så här:

Minimala förlusten då styrsignalen obegränsad = 8.

Tilllägg till förlusten p.g.a. icke optimal styrning i steg 1 = $0.25(x^2 + x^2 + x^2 + x^2) = x^2$.

Tilllägg till förlusten p.g.a. icke optimal styrning i steg 2 = $0.25[(1 - 0.5x)^2 + 0 + 0 + (-1 + 0.5x)^2] = 0.5(1 - 0.5x)^2$.

I har minimum för $x=2/9$, vilket ger

$I(x=2/9) = 8 + 36/81 \approx 8 + 0.444$. Detta är alltså det optimala resultatet vid tvåstegsminimering. Enstegsminimering, d.v.s.

$x=0$ skulle ge

$$I(x=0) = 8 + 0.500.$$

Vårt exempel bekräftar, att en skillnad föreligger mellan enstegsminimering och flerstegsminimering, då begränsande bivillkor lägges på styrsignalen.

4 SIMULERINGAR

Simuleringarna utföres dels vid Lunds Datacentral på dator Univac 1108, och dels vid Institutionen för regleringsteknik LTH på dator PDP-15. På Univac 1108 användes som brus-källa subrutin NODI, som ger oberoende tal med fördelningen $N(0,1)$. Motsvarande subrutin skriven för PDP-15 är MCNODI.

På PDP-15 simuleras den självinställande regulatorn med program-paket STURE, i vilket användes regulatorn STURE1 med parametrarna $PO=10$ och $RL=1$. Simulering av övriga styrstrategier utföres på Univac 1108. Vi observerar att subrutinerna NODI och MCNODI, även om lika startvärden för dessa väljes, inte ger ekvivalent brus. För att kunna göra jämförelser med större säkerhet, simuleras även minimalvariansstyrlagen på PDP-15. I samma syfte göres för några system simuleringar med ett antal olika startvärden för subrutinerna NODI och MCNODI. Vid simulering av den självinställande regulatorn observerar vi, att denna inte omedelbart efter uppstart kan ge en hyfsad reglering. Algoritmen för estimering av regulatorns parametrar behöver nämligen ett antal steg för att konvergera. Av denna anledning baserar vi då beräkningen av utsignalens spridning på värden, som erhålles efter de 1000 första samplepunkterna. Något olika förutsättningar gäller alltså för de simuleringar, vilkas resultat vi skall presentera. För att lättare för varje speciell simulering sätta rätt etikett på denna, benämner vi de olika fallen A,B,C och D, och låter dessa beteckningar ha följande betydelser.

Simulering A: Utsignalens spridning beräknas som medelvärdet av y^2 över samplepunkterna $T=1001-2000$ och för 5 olika simuleringar, med startvärdena för NODI lika med 19,51,4711,163 och 1063.

Simulering B: Samma som för A, men brus-källa är här istället MCNODI.

Simulering C: Utsignalens spridning beräknas som medelvärdet av y^2 över samplepunkterna $T=1001-2000$ med startvärde för MCNODI lika med 19.

Simulering D: Utsignalens spridning beräknas som medelvärdet av y^2 över samplepunkterna $T=1-1000$ med startvärde för NODI lika med 19.

I det följande skall, för ett antal olika system, presenteras resultat erhållna vid simulering med de aktuella styrstrategierna.

Exempel 4.1

Vårt system bestäms av polynomen A^*, B^*, C^* , fördröjningen k samt λ . För detta exempel gäller:

$$A^* = 1 - 0.99q^{-1}, \quad B^* = 0.2, \quad C^* = 1 - 0.5q^{-1}, \quad k=2 \quad \text{och} \quad \lambda=1.$$

Med hjälp av identiteten (3.2) kan vi beräkna F_{k-1}^* och G_{n-1}^* och erhåller:

$$F_{k-1}^* = 1 + 0.49q^{-1} \quad \text{och} \quad G_{n-1}^* = 0.4851.$$

Uttrycket (3.6) ger sedan minimalvariansstyrlagen

$$u(t) = -0.49u(t-1) - 2.4255y(t)$$

vilken utan några begränsningar medför att det förväntade värdet av utsignalens varians blir

$$E y^2(t) = 1 + 0.49^2 \approx 1.24.$$

Hastings-James' medför, som tidigare visats, styrlagen (3.11), som här speciellt får utseendet

$$u(t) = -\frac{0.0196 - \delta \cdot 0.5}{0.04 + \delta} u(t-1) - \frac{0.09702}{0.04 + \delta} y(t)$$

Vi observerar att $\delta = 0$ medför minimalvariansstyrlagen ovan.

Goodwins metod, uttrycket (3.15), medför i detta exempel en styrlag som får detta utseende

$$u(t) = M \cdot \text{Sat} \left[\frac{1}{M} \{ u'(t) \} \right]$$

där

$$u'(t) = 0.5u'(t-1) - 0.99u(t-1) - 2.4255y(t).$$

Här kan vi se att om $u(t-1)$ inte begränsats, d.v.s. $u'(t-1) = -u(t-1)$ så blir $u'(t) = -0.49u(t-1) - 2.4255y(t)$. Begränsas ej heller $u(t)$ så blir $u(t) = u'(t)$ och uttrycket för styrlagen blir lika med minimalvariansstyrlagen.

Nu är vi intresserade av hur vårt system uppför sig då det återkopplas med dessa nu nämnda styrlagar, baserade på ett system med kända värden på koefficienterna. Dessutom vill vi jämföra dessa resultat med de som erhålles då styrning sker med en självinställande regulator, där vi betraktar systemets koefficienter som okända men konstanta. Vi måste däremot veta ordningstalen på systemets polynom samt fördröjningen k , för att kunna välja ett tillräckligt antal regulatorparametrar.

Vårt verktyg för studium av styrlagarnas egenskaper är simulering, och vi börjar med att visa resultatet av ett antal simuleringar med Hastings-James' metod. Se figur 4.1 där, i det övre diagrammet, erhållen spridning hos utsignalen inprickats som funktion av styrsignalens viktparameter δ (Se 2.9) för ett antal olika värden på M , styrsignalens begränsning. I samma diagram har också streckats spridningen hos den obegränsade styrsignalen som funktion av δ . I det undre diagrammet i figur 4.1, åskådliggöres hur det procentuella antalet inträffade begränsningar av styrsignalen beror av viktparametern δ . Detta för två olika värden på styrsignalens begränsning M . Eftersom $\delta=0$ medför minimalvariansstrategin, kan vi i diagrammen enkelt göra jämförelser mellan denna och Hastings-James' metod för andra δ -värden.

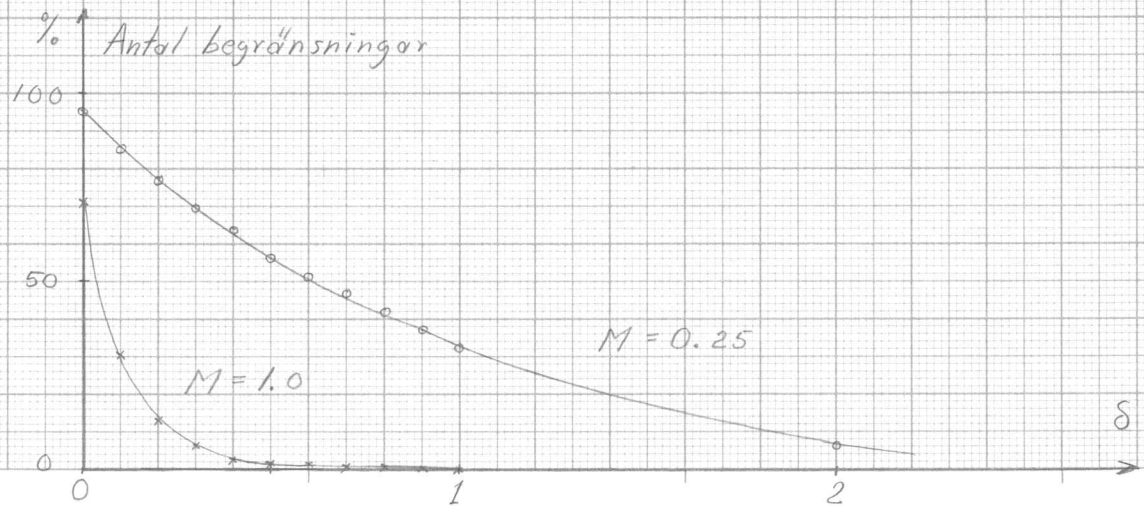
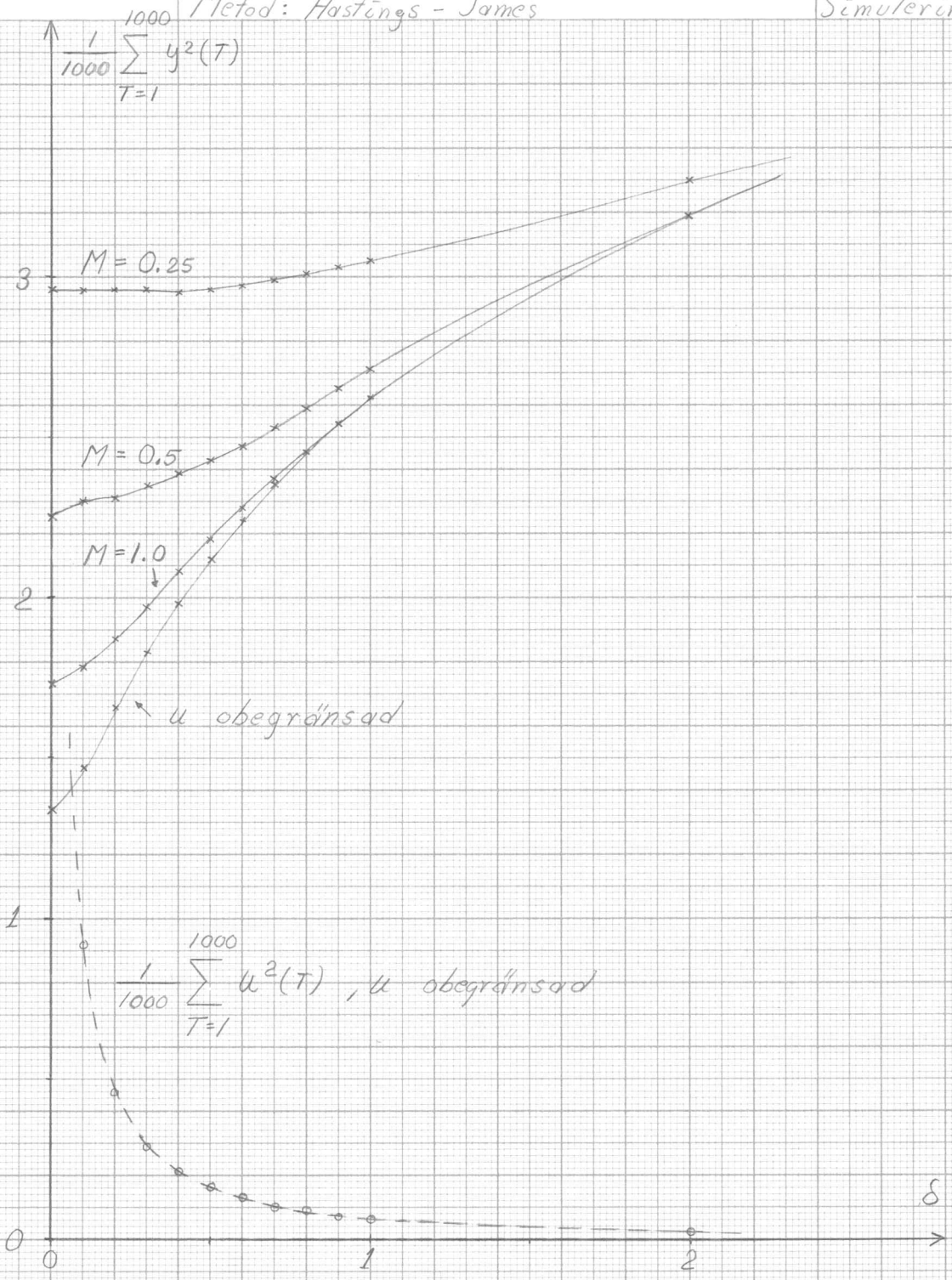
I diagrammen ser vi den inverkan som en begränsning av styrsignalens amplitud får på utsignalen. Ju mindre M , d.v.s. ju kraftigare begränsning, desto större antal inträffade begränsningar av styrsignalen. Av detta följer ökande avvikelse från den optimala styrlagen, vilket i sin tur ger ökande spridning i utsignalen.

Vi kan också se att styrsignalens spridning minskar snabbt för ökande värde på δ . Då begränsning lägges på styrsignalens amplitud, minskar följaktligen också antalet inträffade begränsningar då δ ökar. Detta medför dock, som vi ser i det övre diagrammet, inte någon positiv utveckling för utsignalens spridning. Ökande värde på δ minskar visserligen antalet begränsningar, men medför också att utsignalens spridning ökar. Den sistnämnda egenskapen är här så markant, att den blir den helt bestämmande för utsignalens uppförande. Då begränsningen är kraftig ($M=0.25$) ser vi att utsignalens spridning som funktion av δ till en början får ett ganska vågrätt förlopp. Detta beroende på att antalet begränsningar är stort och sjunker relativt sakta för ökande δ (jämför $M=1$), och styrsignalen således, oberoende av δ , ligger på den begränsande nivån, ± 0.25 , vid nästan varje samplepunkt. För mycket

System: $A^* = 1 - 0.99q^{-1}$
 $B^* = 0.2$ $K = 2$
 $C^* = 1 - 0.5q^{-1}$

Figur 4.1
 Simulering D

Metod: Hastings - James



stora värden på δ , får vi en så liten spridning i styrsignalen, att inga begränsningar inträffar, och kurvorna för olika M kommer då att sammanfalla till en enda, som det övre diagrammet antyder.

Den heldragna linjen i figur 4.2 visar spridningen i utsignalen som funktion av begränsningens storlek, då vårt system simuleras med minimalvariansstyrslagen. Motsvarande resultat, erhållna vid simulering med styrslagen enligt Goodwins metod, är markerade med \circ i samma figur. Vi erhåller med Goodwins metod, som synes, en liten förbättring. Förbättringen är störst vid medelhård begränsning. Då M är så stort, att inga begränsningar av styrsignalen göres, blir resultaten helt lika, ty styrslagarna blir då, som tidigare visats, ekvivalenta. Vid mycket hårda begränsningar ger styrslagarna också nära sammanfallande resultat, ty styrsignalen ligger då mestadels på den begränsande nivån $\pm M$.

Figur 4.3 visar resultatet av simulering med minimalvariansstyrslagen och den självinställande regulatorn på samma system. Även här uppvisas mycket liten skillnad, med ett plus för den självinställande regulatorn. Vi kan inte här direkt, genom att se på erhållna värden, jämföra Goodwins metod med den självinställande regulatorn, beroende på att simuleringarna utförts med olika brusällor. För att ändå göra en jämförelse, beräknar vi för Goodwins metod och den självinställande regulatorn minskningen i utsignalens spridning i procent relativt respektive minimalvariansresultat. Resultatet redovisas i figur 4.4. Vi ser här att metod Goodwin lyckas något bättre än den självinställande regulatorn, men förbättringarna i båda fallen är små.

För det här betraktade systemet kan sammanfattningsvis sägas, att metod Hastings-James inte för något värde på viktparametern δ ger bättre resultat än minimalvariansstyrslagen och, att metod Goodwin och den självinställande regulatorn uppvisar små förbättringar relativt minimalvariansstrategin.

$$11 \quad \frac{1}{1000} \sum_{T=1001}^{2000} y^2(T)$$

System : $A^* = 1 - 0.99q^{-1}$ $K=2$
 $B^* = 0.2$
 $C^* = 1 - 0.5q^{-1}$

32

Figur 4.2
 Simulering A

Metoder: Minimalvarians \times och Goodwin \circ

10

9

8

7

6

5

4

3

2

1

0

0 1 2 3 4 5

M

$$\frac{1}{1000} \sum_{T=1001}^{2000} y^2(T)$$

System : $A^* = 1 - 0.99 q^{-1}$ $K=2$
 $B^* = 0.2$
 $C^* = 1 - 0.5 q^{-1}$

Figur 4.3
 Simulering B

Metoder : Minimalvarians x och
 Självinställande regulator 0

10

9

8

7

6

5

4

3

2

1

0

0

1

2

3

4

5

M

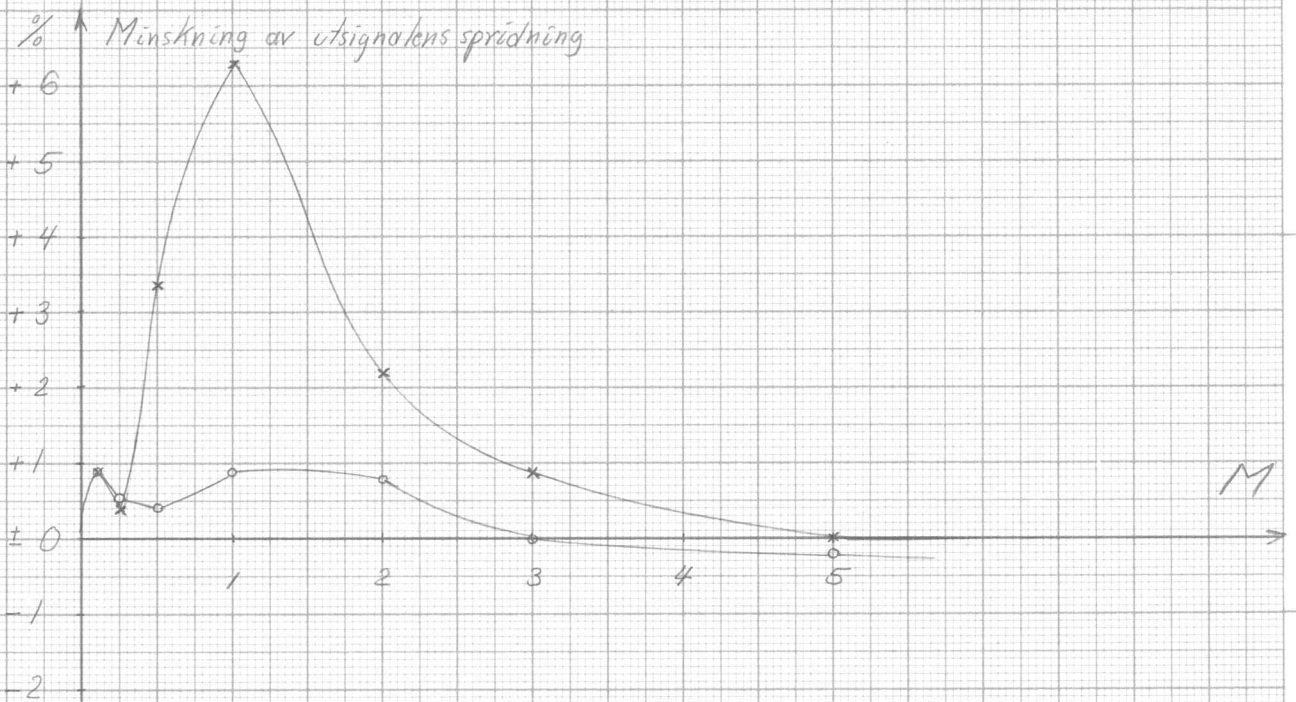
$$\text{System : } A^* = 1 - 0.99q^{-1}$$

$$B^* = 0.2 \quad K = 2$$

$$C^* = 1 - 0.5q^{-1}$$

34

Figur 4.4

Minskning metod Goodwin relativt Minimalvarians \times Simulering AMinskning med Självinställande Regulator
relativt Minimalvarians \circ Simulering B

Exempel 4.2

Som andra exempel väljer vi ett system med utseendet

$$y(t) = \frac{1}{1-0.9q^{-1}} q^{-1} u(t) + \frac{1+0.2q^{-1}}{1-0.95q^{-1}} e(t)$$

Genom att göra liknämningt erhåller vi systemet på formen

(2.3) med följande parametrar:

$$A^* = 1 - 1.85q^{-1} + 0.855q^{-2}$$

$$B^* = 1 - 0.95q^{-1} \quad k=2$$

$$C^* = 1 - 0.7q^{-1} - 0.18q^{-2} \quad \lambda=1$$

Identiteten (3.2) ger polynomen F_{k-1}^* och G_{n-1}^* .

$$F_{k-1}^* = 1 + 1.15q^{-1} \quad \text{och} \quad G_{n-1}^* = 1.0925 - 0.98325q^{-1}.$$

Minimalvariansstyrlagen (3.6) blir då

$$u(t) = -0.2u(t-1) + 1.0925u(t-2) - 1.0925y(t) + 0.98325y(t-1).$$

Återkoppling av systemet med denna styrlag, utan några inskränkningar, medför att det förväntade värdet av utsignalens varians blir

$$E y^2(t) = 1 + 1.15 \approx 2.32.$$

Styrlagen (3.11) enligt Hastings-James' metod får utseendet

$$u(t) = -\frac{0.2 - \delta \cdot 0.7}{1 + \delta} u(t-1) + \frac{1.0925 + \delta \cdot 0.18}{1 + \delta} u(t-2) - \frac{1.0925}{1 + \delta} y(t) + \frac{0.98325}{1 + \delta} y(t-1)$$

En enkel kontroll av denna styrlag kan även här göras genom att sätta $\delta=0$, varvid minimalvariansstyrlagen ovan erhålles.

Goodwins metod (3.15) medför en styrlag som ser ut så här

$$u(t) = M \cdot \text{Sat} \left[\frac{1}{M} \{ \dot{u}(t) \} \right]$$

där

$$\dot{u}(t) = 0.7\dot{u}(t-1) + 0.18\dot{u}(t-2) - 0.9u(t-1) + 0.9125u(t-2) - 1.0925y(t) + 0.98325y(t-1).$$

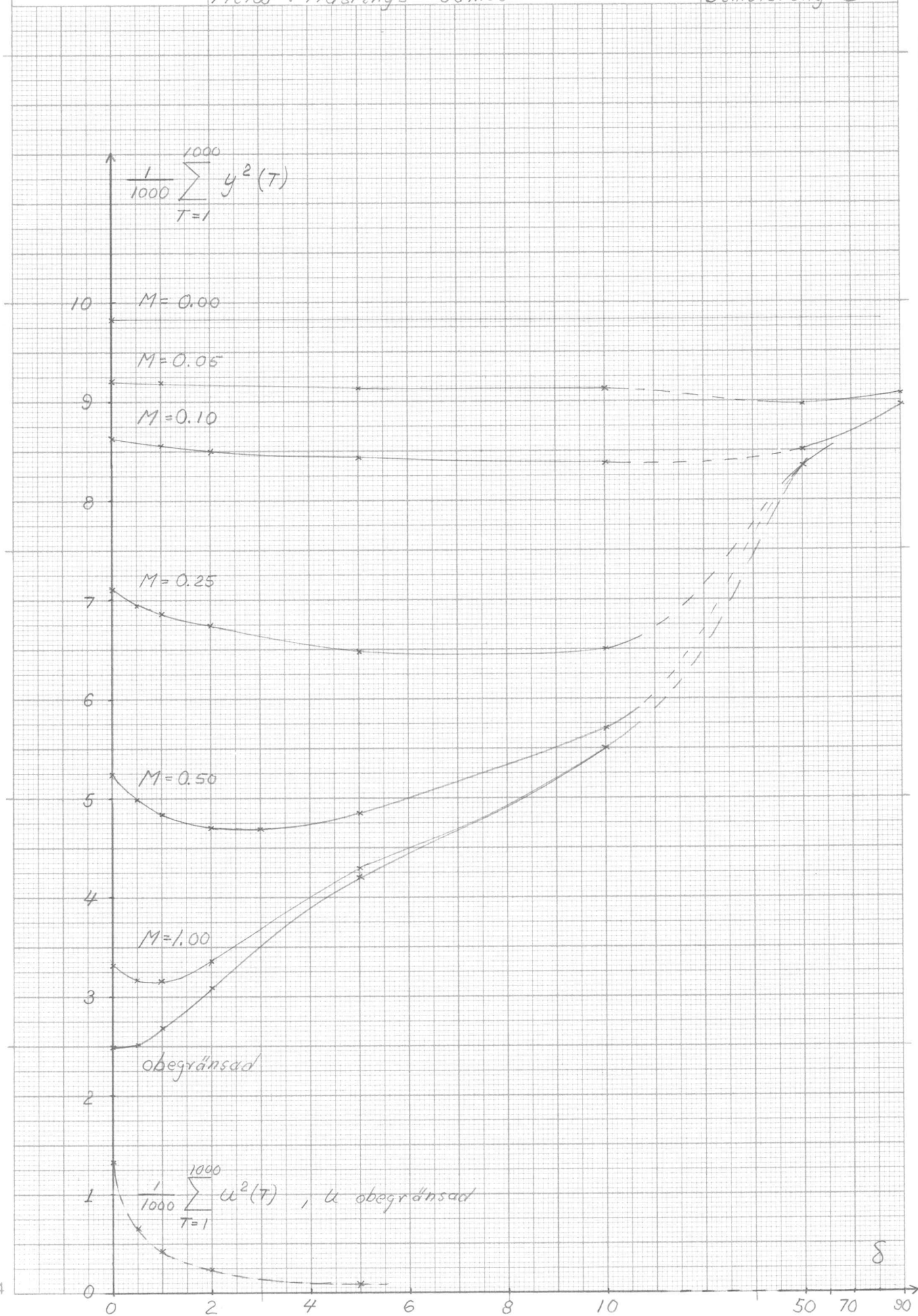
Om inga begränsningar av styrsignalen göres, d.v.s. $\dot{u}(t) = u(t)$ för alla t , kan vi lätt övertyga oss om att denna styrlag blir ekvivalent med minimalvariansstyrlagen.

Vi skall nu se på de resultat som erhålles vid simulering av det aktuella systemet, då det återkopplas med olika styrlagar. Figur 4.5 visar utsignalens spridning som funktion av styrsignalens viktparameter δ , vid styrning med Hastings-James'

System: $A^* = 1 - 1.85 q^{-1} + 0.855 q^{-2}$
 $B^* = 1 - 0.95 q^{-1}$ $K=2$
 $C^* = 1 - 0.7 q^{-1} - 0.18 q^{-2}$

Figur 4.5
 Simulering D

Metod: Hastings - James



metod. Vi ser att för några värden på M , storleken av styrsignalens begränsning, har vi möjligheter att minska spridningen i utsignalen. Detta genom att välja ett lämpligt värde på δ . I figur 4.8, visar den undre kurvan den optimala minskningen av utsignalens spridning med Hastings-James' metod relativt minimalvariansstyrslagen. Maximalt erhålles en förbättring på cirka 10 %. Svårigheten med den här metoden är naturligtvis att finna det optimala värdet på δ . I figur 4.5 visas också, hur styrsignalens spridning beror av δ . Resultatet av simulering med minimalvariansstyrslagen och Goodwins metod åskådliggöres i figur 4.6. Vi ser här att en betydande minskning i utsignalens spridning erhålles om vi, istället för att använda minimalvariansstyrslagen, väljer att styra systemet med Goodwins metod. Förbättringen är störst vid medelhårda begränsningar. Vid mycket hård begränsning kan styrslagen inte göra så mycket mer än att lägga styrsignalen på den begränsande nivån $\pm M$, och då M är mycket stort blir styrslagarna ekvivalenta.

Figur 4.7 visar simuleringsresultat med självinställande regulator och minimalvariansstyrslag. Den självinställande regulatorn uppvisar en förbättring av samma storleksordning som Goodwins styrslag.

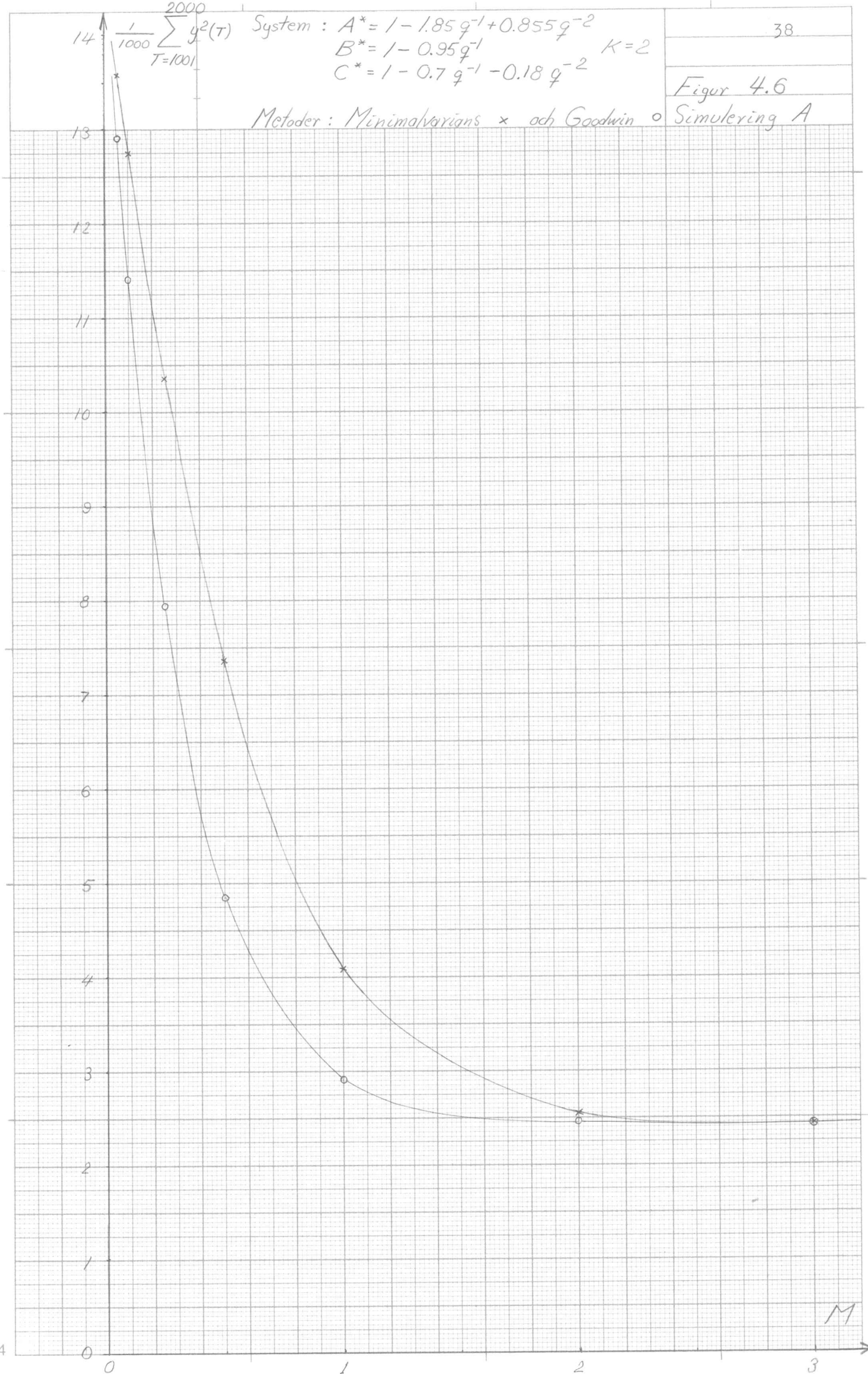
För att jämföra Goodwins metod med den självinställande regulatorn måste vi, liksom i föregående exempel, göra detta genom att jämföra minskningen i utsignalens spridning i förhållande till motsvarande minimalvarianssimulering. Detta visas i figur 4.8. Maximalt erhålles med Goodwins metod och den självinställande regulatorn en minskning av utsignalens spridning på 34 respektive 37 %. För stora M lyckas den självinställande regulatorn något sämre, eftersom den i varje steg måste estimerar sina regulatorparametrar. Skillnaden mellan resultaten för de båda styrslagarna är dock små för alla värden på M . Kurvan i samma figur för Hastings-James' metod bör inte jämföras alltför strängt, då den utgör resultatet av en enda simulering.

$$14 \left| \frac{1}{1000} \sum_{T=1001}^{2000} y^2(T) \right.$$

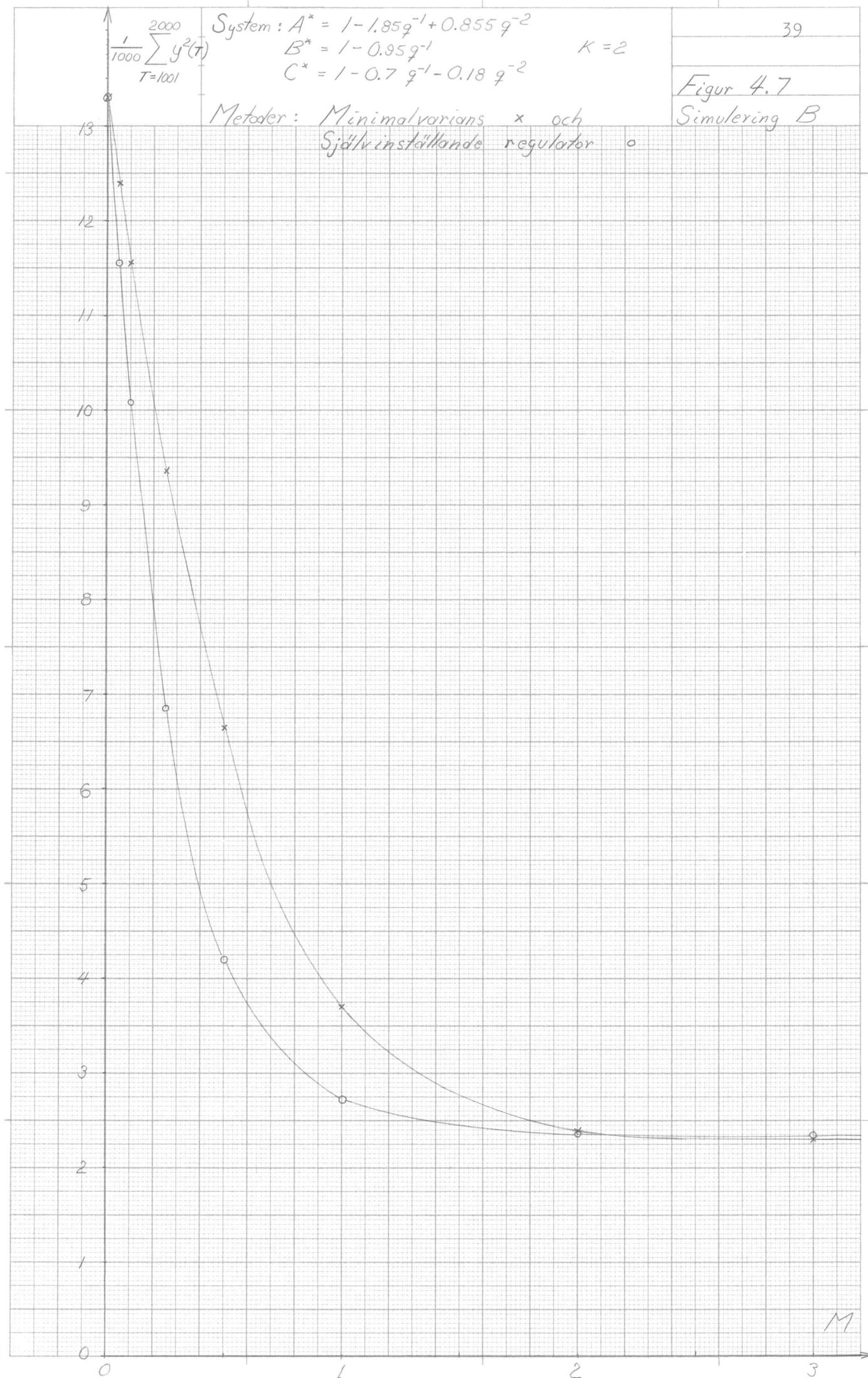
System : $A^* = 1 - 1.85q^{-1} + 0.855q^{-2}$
 $B^* = 1 - 0.95q^{-1}$ $K=2$
 $C^* = 1 - 0.7q^{-1} - 0.18q^{-2}$

Figur 4.6

Metoder : Minimalvarians * och Goodwin o Simulering A



M

Figur 4.7
Simulering B

M

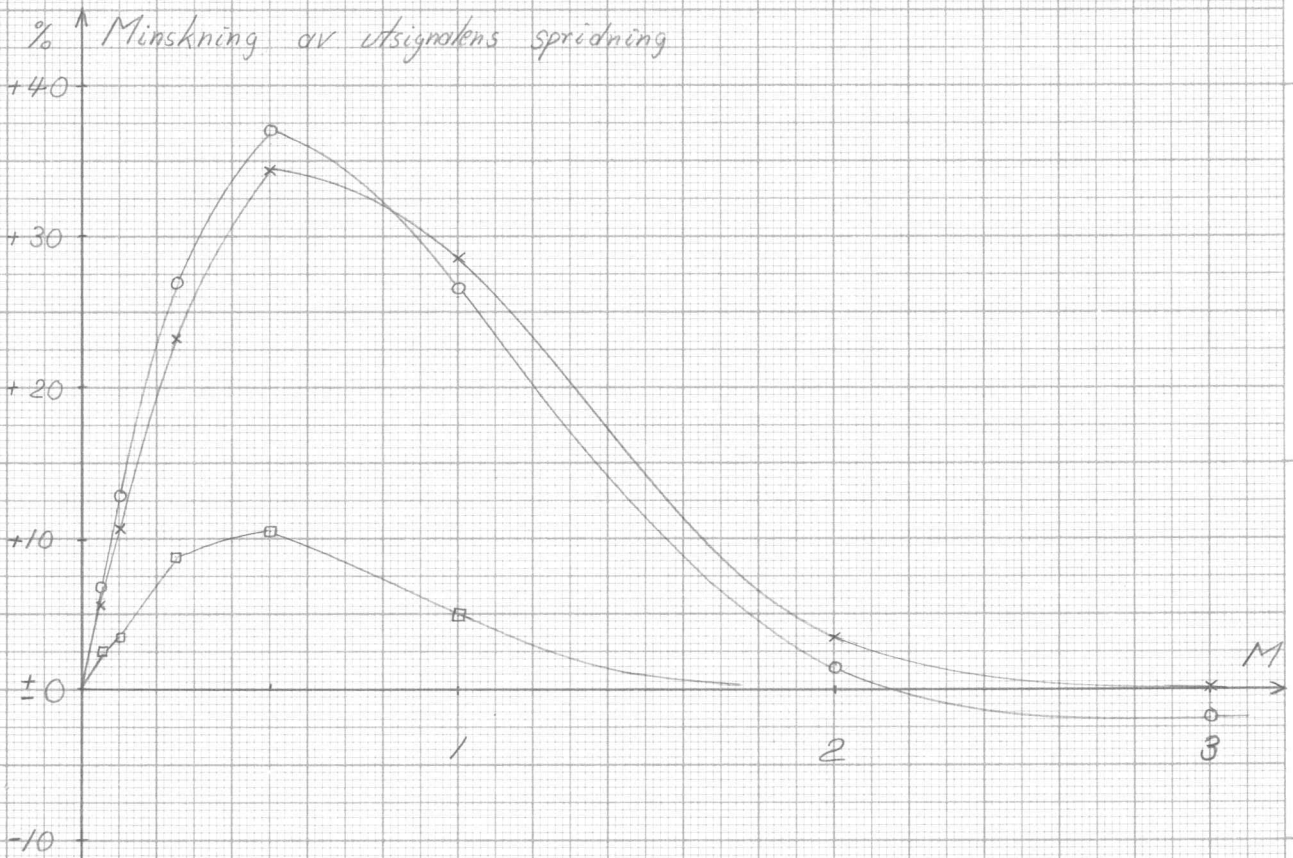
System : $A^* = 1 - 1.85q^{-1} + 0.855q^{-2}$
 $B^* = 1 - 0.95q^{-1}$ $K=2$
 $C^* = 1 - 0.7q^{-1} - 0.18q^{-2}$

Figur 4.8

Minskning metod Goodwin relativt Minimalvarians \times Simulering A

Minskning med Självinställande Regulator relativt Minimalvarians \circ Simulering B

Optimal minskning metod Hastings-Jones relativt Minimalvarians \square Simulering D



Sammanfattningsvis kan för detta system sägas, att det är betydligt känsligare för val av styrlag än föregående exempel. Om vi utgår från de resultat som erhålles med minimalvariansstyrlagen, kan vi säga att Hasting-James' metod kan ge en mindre spridning i utsignalen om vi lyckas välja viktparametern δ optimalt. Förbättringen vid styrning med Goodwins metod och den självinställande regulatorn är dock betydligt större, och detta utan att vi behöver bekymra oss om några parameterintervall. Dessa två senast nämnda metoder är i detta exempel likvärdiga.

Som avslutning på detta delavsnitt, skall vi kommentera ett system med utseendet

$$y(t) = \frac{1}{1-0.8q^{-1}} q^{-2} u(t) + \frac{1+0.2q^{-1}}{1-q^{-1}} e(t)$$

Vid första påseendet verkar detta system vara väldigt likt det vi nyss närmare undersökt. Det finns dock en viktig skillnad. Som vi ser har brustermen en pol som befinner sig på enhetscirkeln. Detta medför att denna term kan driva iväg mot stora positiva eller negativa värden och få ett medelvärde som skiljer sig mycket från noll. Denna effekt, som benämnes drivande brus, kommer vid återkoppling med någon av våra styrlagar att medföra att även styrsignalens medelvärde kommer att driva iväg. Försöker vi nu göra en begränsning av styrsignalen, kommer detta att medföra en mycket stor störning av minimalvariansstrategin, vilket i sin tur medför att utsignalen kommer att ligga långt ifrån det önskade värdet. Alla de styrlagar som vi här har undersökt blir då likvärdiga vid begränsning, eftersom styrsignalen kommer att ligga konstant på den begränsande nivån.

System av den här typen kan styras relativt bra genom att införa en begränsning av styrsignalens ändringshastighet. Vi skall här inte gå in närmare på detta.

Exempel 4.3

Systemet i detta exempel bestäms av följande polynom:

$$A^* = 1 - 1.5q^{-1} + 0.54q^{-2}$$

$$B^* = 2 - 1.8q^{-1}$$

$$C^* = 1 + 0.2q^{-1} - 0.48q^{-2}$$

Dessutom gäller att systemets fördröjning $k=1$ och att $\lambda=1$.

Detta medför att polynomet F_{k-1}^* här helt enkelt blir lika med 1. Det förväntade värdet av utsignalens varians blir då vid minimalvariansstyrning

$$E y^2(t) = 1.$$

Liksom tidigare simuleras detta system med de aktuella styrlagarna. Resultatet av simulering med styrlag enligt Hastings-James' metod visas i figur 4.9. Utsignalens spridning kan som synes inte minskas genom att välja något annat värde på δ än $\delta=0$. Eftersom $\delta=0$ ger minimalvariansstyrlagen, kan alltså Hastings-James' metod här inte ge bättre resultat än denna. Figur 4.10 och figur 4.11 respektive visar, att metod Goodwin och den självinställande regulatorn båda ger en något mindre spridning i utsignalen än minimalvariansstyrlagen. Skillnaden är dock ganska obetydlig.

Trots att systemen i detta och föregående exempel, vid en snabb jämförelse, tyckes vara ganska lika, är skillnaden stor om vi ser till vad som kan vinnas genom att byta minimalvariansstyrlagen mot Goodwins styrlag eller den självinställande regulatorn. Systemet i exempel 4.2 har den egenskapen, att utsignalens spridning kan minskas betydligt genom att styra med Goodwins metod eller med den självinställande regulatorn istället för med minimalvariansstyrlagen, då styrsignalen begränsas. För systemet i detta exempel är förbättringen, som ovan nämndes, liten. Den största skillnaden mellan de båda systemen står att finna i läget hos C^* -polynomets nollställena. Försök har gjorts att sammanknyta den ovan nämnda egenskapen med C^* -polynomets utseende. Det har dock visat sig vid simulering med olika C^* -polynom, att fenomenet inte är så enkelt att förklara.

System : $A^* = 1 - 1.5q^{-1} + 0.54q^{-2}$
 $B^* = 2 - 1.8q^{-1}$
 $C^* = 1 + 0.2q^{-1} - 0.48q^{-2}$

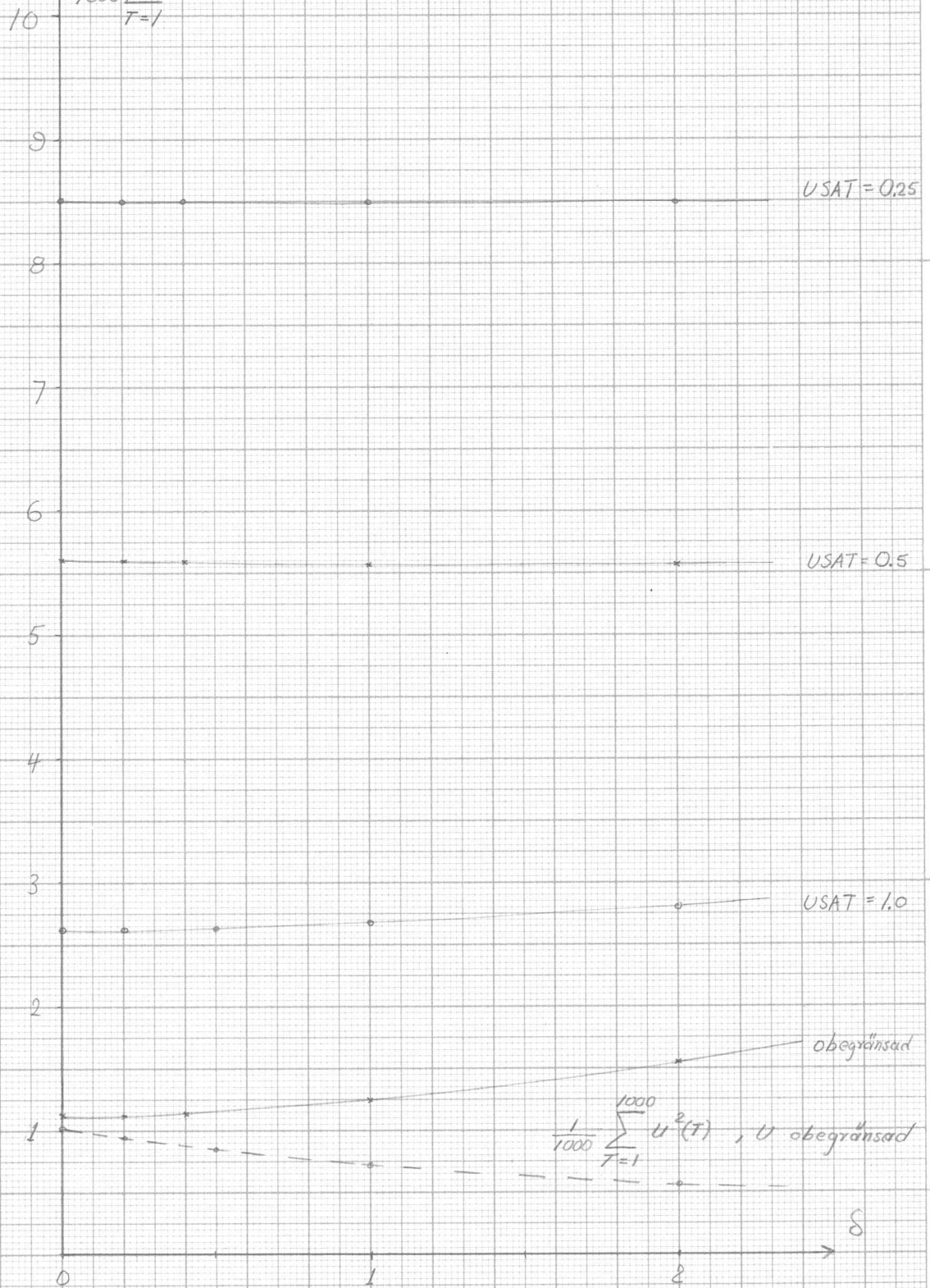
$K=1$

43

Figur 4.9
 Simulering D

Metod : Hastings-James

$\frac{1}{1000} \sum_{T=1}^{1000} y^2(T)$



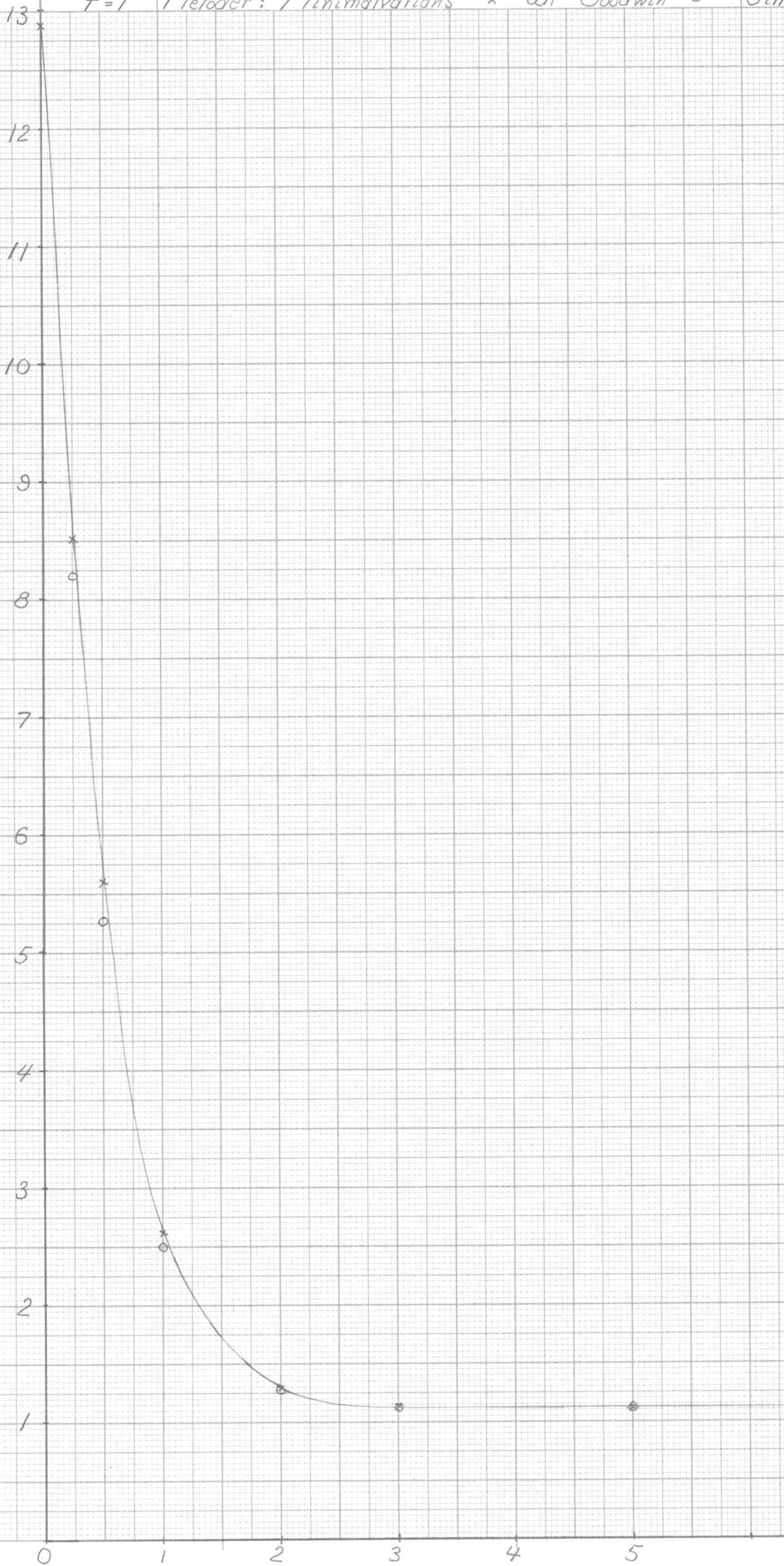
System: $A^* = 1 - 1.5q^{-1} + 0.54q^{-2}$
 $B^* = 2 - 1.8q^{-1}$
 $C^* = 1 + 0.2q^{-1} - 0.48q^{-2}$

$k=1$

Figur 4.10
Simulering D

$\frac{1}{1000} \sum_{T=1}^{1000} y^2(T)$

Metoder: Minimalvarians \times och Goodwin \circ

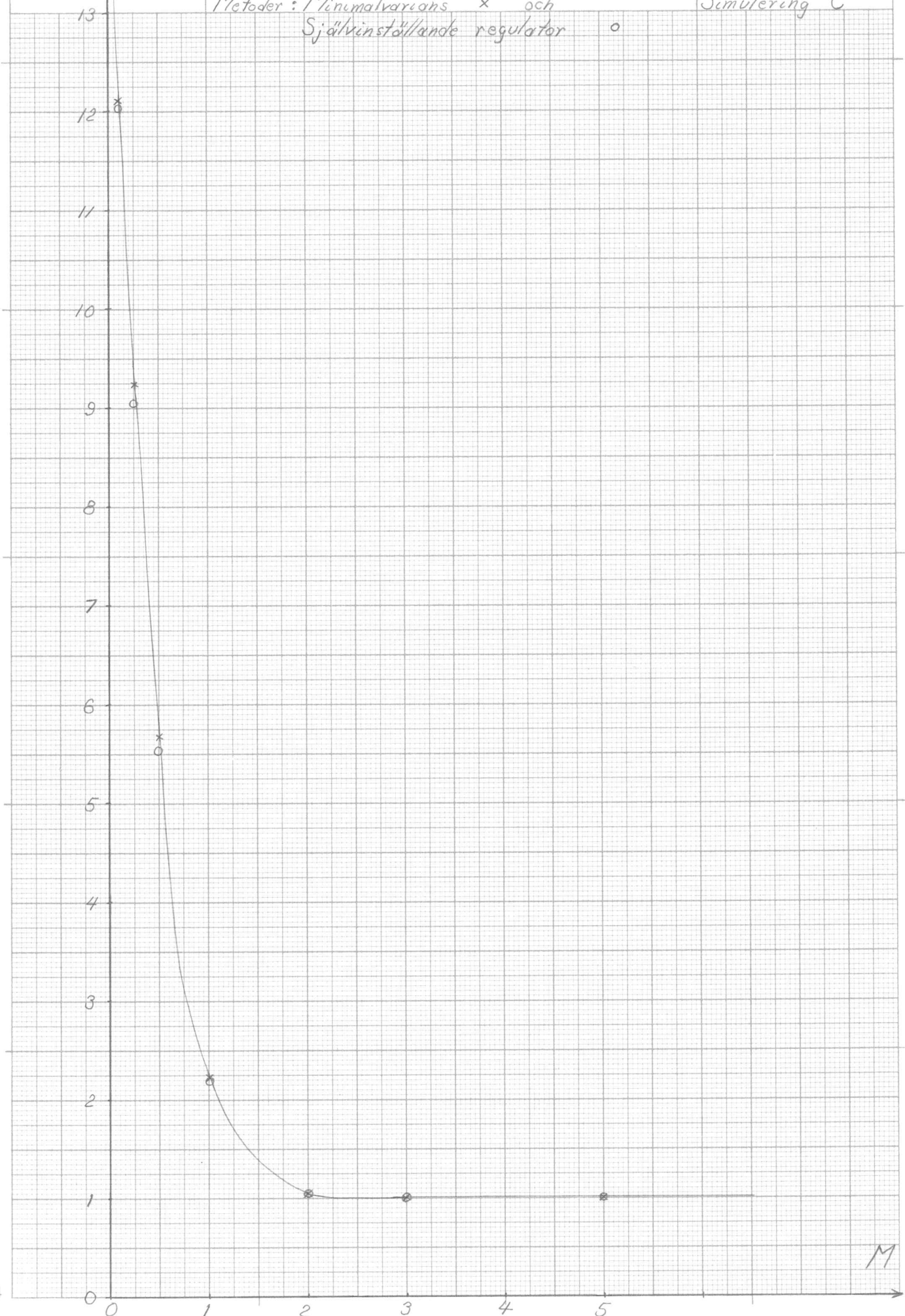


M

$\frac{1}{1000} \sum_{T=1001}^{2000} y^2(T)$ System : $A^* = 1 - 1.5q^{-1} + 0.54q^{-2}$
 $B^* = 2 - 1.8q^{-1}$ $k = 1$
 $C^* = 1 + 0.2q^{-1} - 0.48q^{-2}$

Figur 4.11
Simulering C

Metoder : Minimalvarians \times och
Självinställande regulator \circ



M

Exempel 4.4

Som sista exempel väljer vi ett tredje ordningens system med fördröjningen $k=1, \lambda=1$ och följande polynom:

$$A^* = 1 - 1.16q^{-1} - 0.048q^{-2} + 0.2304q^{-3}$$

$$B^* = 0.9 - 1.204q^{-1} + 0.3264q^{-2}$$

$$C^* = 1 - 0.7q^{-1} - 0.42q^{-2} - 0.216q^{-3}$$

Då $k=1$ och $\lambda=1$ blir det förväntade värdet av utsignalens varians vid en ostörd minimalvariansstyrning

$$E_{y^2}(t) = 1.$$

Figur 4.12 visar hur utsignalens spridning beror av begränsningens storlek M och styrsignalens viktparameter δ , då systemet återkopplas enligt Hastings-James' metod. I samma figur ser vi att styrsignalens spridning minskar kraftigt för ökande värde på δ . Trots detta ökar samtidigt utsignalens spridning.

Här gäller, liksom för systemet i exempel 4.3, att styrlagen enligt Goodwins metod och den självinställande regulatorn båda ger en liten minskning av utsignalens spridning, då styrsignalen begränsas. Resultatet av dessa simuleringar åskådliggöres i figur 4.13 och figur 4.14.

System: $A^* = 1 - 1.16q^{-1} - 0.048q^{-2} + 0.2304q^{-3}$
 $B^* = 0.9 - 1.204q^{-1} + 0.3264q^{-2}$
 $C^* = 1 - 0.7q^{-1} - 0.42q^{-2} - 0.216q^{-3}$ $K=1$

Figur 4.12
 Simulering D

$\frac{1}{1000} \sum_{T=1}^{1000} y^2(T)$
 Metod: Hastings-James

USAT = 0.5

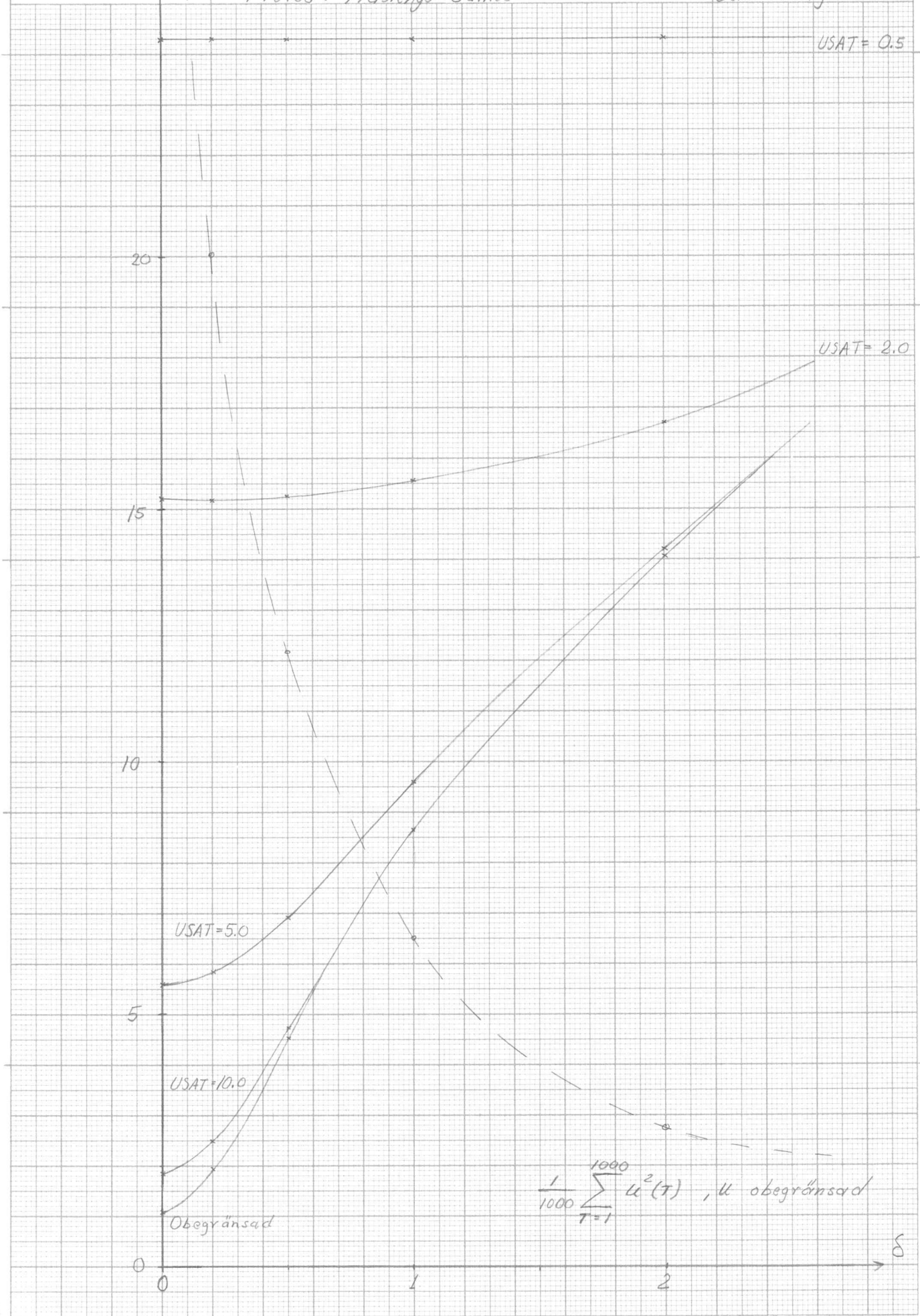
USAT = 2.0

USAT = 5.0

USAT = 10.0

Obegränsad

$\frac{1}{1000} \sum_{T=1}^{1000} u^2(T)$, u obegränsad



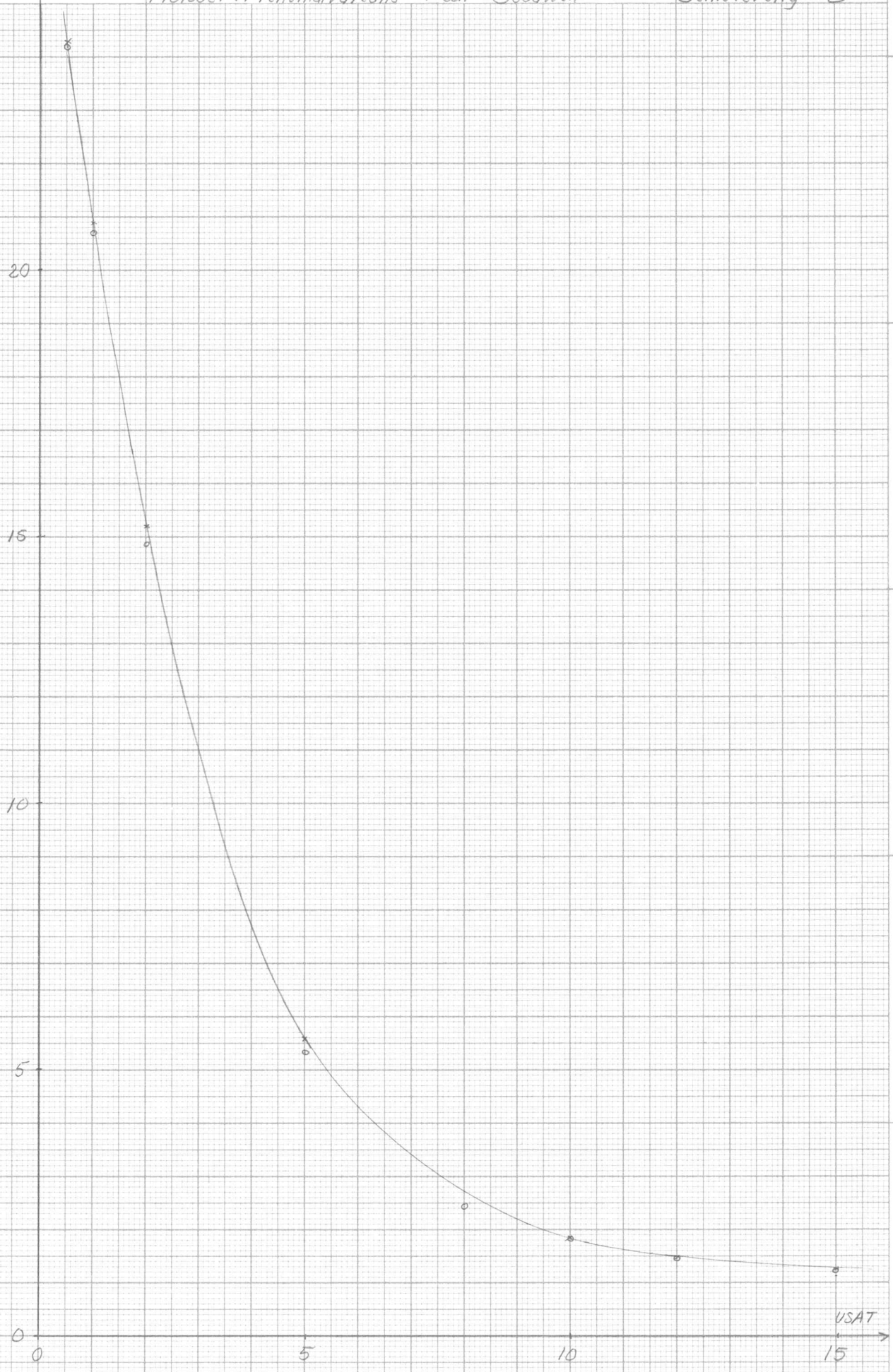
System : $A^* = 1 - 1.16z^{-1} - 0.048z^{-2} + 0.2304z^{-3}$
 $B^* = 0.9 - 1.204z^{-1} + 0.3264z^{-2}$
 $C^* = 1 - 0.7z^{-1} - 0.42z^{-2} - 0.216z^{-3}$

$K=1$

$\frac{1}{1000} \sum_{T=1}^{1000} y^2(T)$

Metoder: Minimalvarians * och Goodwin o

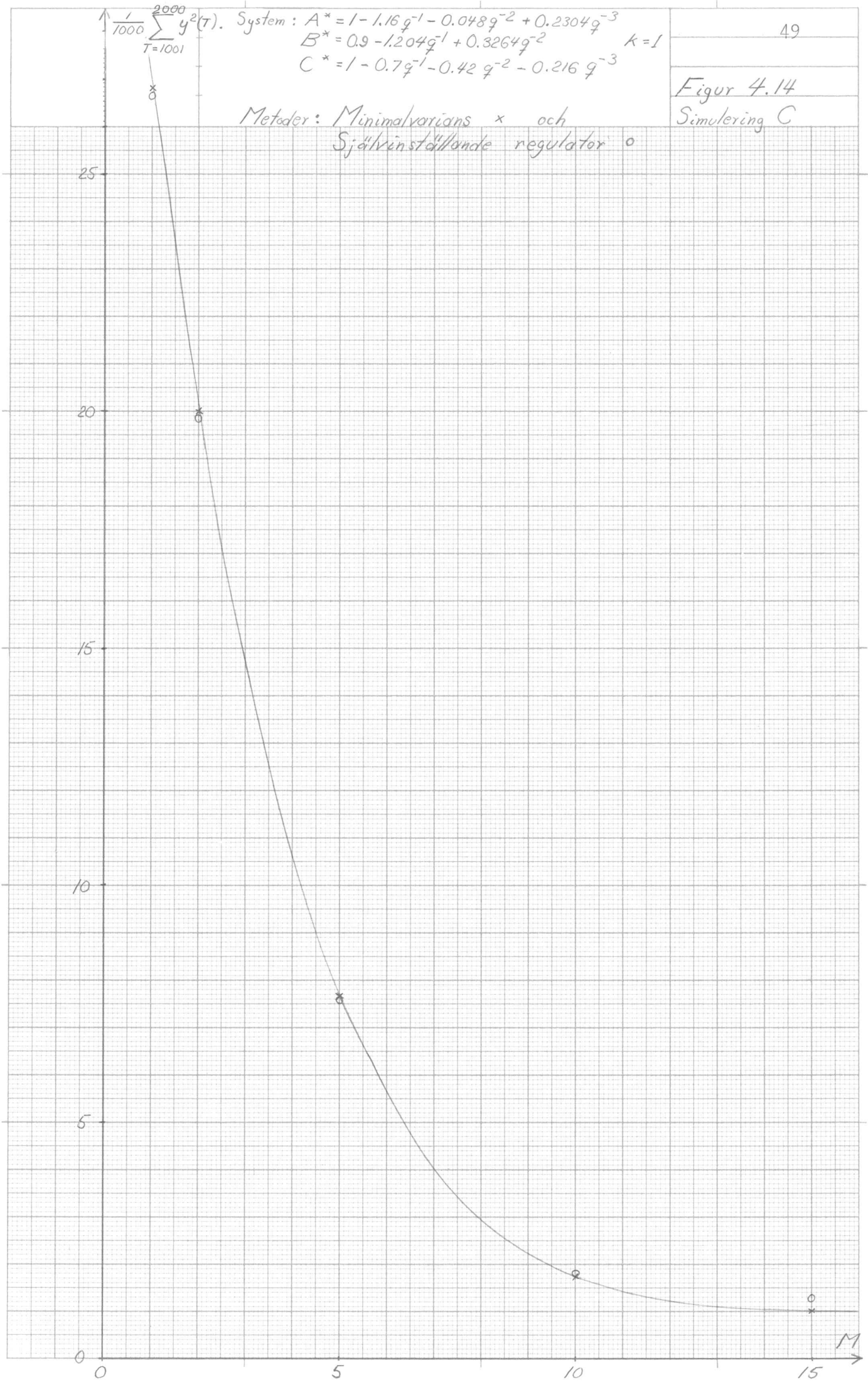
Figur 4.13
Simulering D



$\frac{1}{1000} \sum_{T=1001}^{2000} y^2(T)$. System: $A^* = 1 - 1.16q^{-1} - 0.048q^{-2} + 0.2304q^{-3}$
 $B^* = 0.9 - 1.204q^{-1} + 0.3264q^{-2}$ $k=1$
 $C^* = 1 - 0.7q^{-1} - 0.42q^{-2} - 0.216q^{-3}$

Figur 4.14
Simulering C

Metoder: Minimalvarians \times och
Självinställande regulator \circ



5 SLUTSATSER

Vår uppgift är att undersöka utsignalens spridning för några system, då dessa återkopplas med ett antal olika styrlagar. Det väsentliga problemet är att finna en lämplig styrlag då begränsningar göres av styrsignalens amplitud. I föregående avsnitt presenteras resultatet av ett antal simuleringar av olika system, återkopplade med de aktuella styrstrategierna och med varierande värden på styrsignalens begränsning. Nu skall vi försöka dra några generella slutsatser utifrån dessa simuleringar.

Som bas för våra jämförelser väljer vi de resultat som erhålles vid styrning med minimalvariansstrategin. Denna styrstrategi är, som namnet antyder, härledd för att ge minimal varians hos utsignalen. Detta gäller dock endast då inga begränsningar lägges på styrsignalens amplitud. Vid gjorda simuleringar visar det sig att utsignalens spridning i allmänhet ökar kraftigt då den begränsande nivån för styrsignalen minskar.

Ett sätt att försöka minska denna effekt är att, i den förlustfunktion som styrlagen skall minimera, förutom utsignalen även bestraffa styrsignalen. Denna strategi benämnes här Hastings-James' metod. I gjorda simuleringar visar det sig dock att utsignalens spridning mestadels ökar med ökande bestraffning av styrsignalens amplitud (ökande värde på parametern δ), trots att detta också medför en minskande spridning hos styrsignalen och därmed ett lägre antal inträffade begränsningar. I ett fall (figur 4.5) lyckas vi välja parametern δ så att utsignalens spridning blir mindre än för $\delta=0$, d.v.s. då minimalvariansstyrlagen användes. Svårigheterna, att i ett praktiskt fall finna det optimala värdet på δ , är troligtvis så stora att Hastings-James' metod får anses ointressant i det här sammanhanget.

En styrstrategi som i vissa system visar sig ha mycket goda egenskaper då styrsignalen måste begränsas erhålles med Good-

wins metod. Metoden innebär enstegsminimering av utsignalens varians under bivillkoret att styrsignalens amplitud måste hålla sig under ett visst värde. Då detta värde är så stort, att bivillkoret aldrig behöver tillämpas blir styrlagen enligt Goodwins metod helt ekvivalent med minimalvariansstrategin (obegränsad). För varje inträffad begränsning, har Goodwins styrlag den speciella egenskapen, att utsignalen endast vid en sampletidpunkt skiljer sig från den utsignal som erhålles med en obegränsad minimalvariensstrategi. Om fördröjningen i systemet är k steg, inträffar denna störning i utsignalen k steg efter motsvarande störning av styrsignalen. Uppförandet hos ett system återkopplat med minimalvariensstyrlagen och vars styrsignal begränsas är helt annorlunda, ty störningen i utsignalen får här ett exponentiellt utdöende förlopp. Den här speciella egenskapen hos Goodwins metod kan förklaras med, att denna strategi i systemet inför ytterligare dynamik, med vars hjälp systemet minns hur stor en inträffad begränsning var och därmed i fortsättningen kan kompensera denna. Den maximala förbättringen, d.v.s. minskningen av utsignalens spridning relativt motsvarande resultat med minimalvariensstrategin, då Goodwins metod användes är i våra simuleringar 34 %. Ofta är skillnaden inte så stor, men i allmänhet kan sägas att metoden ger en större eller mindre förbättring, som är störst vid medelhårda begränsningar. Vi har här tyvärr inte lyckats komma fram till vilken eller vilka egenskaper hos ett system som medför att Goodwins metod lyckas mer eller mindre bra. Någon enstaka simulering har gett en någon liten försämring med Goodwins metod relativt minimalvariensstrategin, men detta vid extremt hård begränsning av styrsignalen. Vid en mycket hård begränsning kommer resultaten att bli i det närmaste ekvivalenta, då styrsignalen mestadels kommer att ligga på den begränsande nivån.

En annorlunda filosofi för styrning av ett samplat system innebär den självinställande regulatorn. Denna regulator estimerar i varje steg parametrarna i en minimalvariens-

strategi och styr sedan med hjälp av denna. Resultatet av våra simuleringar är, att även denna metod kan ge stora förbättringar relativt en minimalvariansstrategi då styrsignalen begränsas. Storleksordningen hos denna förbättring är densamma som med Goodwins metod, då styrlagarna implementeras på samma system. Det gäller alltså, att där Goodwins metod ger ett gott resultat, ger även den självinställande regulatorn ett bra resultat. Det kan nämnas, att då inga begränsningar av styrsignalen inträffar, ger den självinställande regulatorn ett något sämre resultat än minimalvariansstyrlagen. Detta är naturligt med tanke på att den självinställande regulatorn i varje steg måste estimerera sina regulatorparametrar.

En självinställande regulator innebär naturligtvis, att ett mycket större antal beräkningar måste utföras i varje steg i jämförelse med övriga regulator typer. Denna regulator har istället den enorma fördelen, att man hos det system som skall styras, endast behöver känna ordningstalet och fördröjningen samt konstanten b_0 . Detta förhållande är ofta mer realistiskt än att förutsätta ett helt känt system.

6 REFERENSER

- [1] Goodwin G.C.: An Amplitude-Constrained Minimum Variance Controller. Elec.Lttrs, Vol.8, s181 (1972).
- [2] Wittenmark B.: A self-tuning regulator, Report 7311, Division of Automatic Control, Lund Institute of Technology.
- [3] Young P.C., Hastings-James R.: Identification and control of discrete linear systems subject to disturbances with rational spektral density. 1970 IEEE Symposium on Adaptive Processes, Paper no IV-6.
- [4] Åström K.J.: Introduction to stochastic control theory, Academic Press 1970.
- [5] Åström K.J., Wittenmark B.: On self-tuning regulators, Automatica, Vol.9, No 2, March 1973, s185-199.