

**ADAPTIV STYRNING AV
LINJÄRA SYSTEM
MED HJÄLP AV UTVIDGAT
KALMANFILTER**

Lars Pernebo

RE-110 juli 1972

TILLHÖR REFERENSBIBLIOOTEKET
UTLÄNNAES EJ

A D A P T I V S T Y R H I N G A V L I N J Ä R A S Y S T E M
M E D H J Ä L P A V U T V I D G A T K A L M A N F I L T E R

Examensarbete vid institutionen för
Reglerteknik vid LTH

Utfört våren 1972 av
Lars Pernbo

Handledare:
Univ. lekt. Björn Wittenmark

SAMMANFATTNING

Avisikten med detta examensarbete var att undersöka hur bra det går att styra ett linjärt, samplat system med okända parametrar. Härvid utvidgades tillståndsvektorn med de okända parametrarna och den sårunda utvidgade tillståndsvektorn estimerades med hjälp av ett utvidgat Kalmanfilter. Systemet styrdes enligt en linjärkvadratisk styrstrategi.

Metoden testades på ett första ordningens system och ett andra ordningens system. Tillfredsställande resultat erhölls för första ordningens system med en okänd parameter, men för det andra ordningens system, som undersöktes, gav metoden ett icke tillfredsställande resultat. Anledningen till detta är okänd.

ABSTRACT

The purpose of this work was to examine the possibility of controlling a linear, sampled system containing unknown parameters. To do this the state vector was extended by the unknown parameters and this extended state vector was estimated by an extended Kalman filter. The system was controlled by a linear-quadratic control strategy.

The method was tested on a first order system and a second order system. Satisfying result was obtained for the first order system containing one unknown parameter, but for the examined system of second order the method was giving an unsatisfying result. The reason for this is unknown.

I N N E H Å L L

1.	PRESSENTATION AV PROBLEM OCH LÖSNINGSMETOD	1
2.	FILTER FÖR SAMTIDIG ESTIMERING AV TILLSTÅNDSVEKTOR OCH OKÄNDA PARAMETRAR	3
2.1.	Härledning utgående från Kalmanfilter	3
2.2.	Förbättring av estimatet	8
3.	STYRNING	13
4.	PROGRAMBESKRIVNING	14
5.	SIMULERING	16
5.1.	Allmänt om simuleringsarna	16
5.2.	Test på ett första ordningens system med användande av filtret K1	17
5.3.	Första ordningens system med användande av filtret K2	21
5.4.	Sammanfattning av skillnaderna mellan K1 och K2	29
5.5.	Test på ett system av andra ordningen	30
6.	FÖRSLAG TILL FORTSATTA UNDERSÖKNINGAR	32
7.	REFERENSER	34
8.	NYSKRIVNA PROGRAMAVSNITT	35
8.1.	Huvudprogrammet	35
8.2.	Subroutinen LK	41
8.3.	Subroutinerna MAMULT och TRANSP	42

1. PRESENTATION AV PROBLEM OCH LÖSNINGSMETOD

Som tidigare nämnts är avsikten med detta examensarbete att undersöka hur bra det går att styra ett system, vars struktur är känd, men som innehåller parametrar, vars värden är okända. Det antages att systemet är linjärt och kan representeras på tillståndsform. Styringreppen sker vid diskreta tidpunkter och styrsignalen är konstant över samplingsintervallet. Systemet beskrivs således matematiskt av ekvationerna

$$\begin{cases} x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma u(t) + v(t) \\ y(t) = \Theta x(t) + e(t) \end{cases}$$

där $v(t)$ representerar dels slumpmässiga störningar från systemets omgivning och dels approximationer, som gjorts vid uppställandet av den matematiska modellen. $e(t)$ representerar osäkerhet i mätvärdena. De okända parametrarna utgöres således av något eller några av elementen i matriserna Φ , Γ och Θ . I analysen har dessa parametrar antagits vara tidskonstanta, men kan tillåtas variera långsamt, dvs. så att deras tidsderivata i varje punkt är liten.

Det antages vidare att systemets samplingsintervall inte är mycket stort i förhållande till den tid det tar att beräkna styrignalen. En styrignal baserad på mätvärden upptill och med en viss tidpunkt kan således inte sändas in på systemet förrän i närmast påföljande samplingspunkt.

Avsikten med styringreppen antages vara att minimera en kvadratisk förlustfunktion under förutsättning att sluttidpunkten är avlägsen.

Den optimala styrstrategin är enl. ref. (1), under förutsättning att matriserna är kända men tillståndsvariablene inte direkt mätbara, en linjär återkoppling från samtliga, med Kalmanfilter estimerade tillstånd.

Idén är nu att använda detta resultat i det här aktuella fallet. Eftersom såväl matriserna i Kalmanfiltret som den linjära återkopplingen då kommer att bero på de okända parametrarna, måste även dessa estimeras.

En härledning av filtret för samtidig estimering av tillståndsvariablene och de okända parametrarna återfinnes i kapitel 2. En presen-

tation av styrstrategin ges i kapitel 3 och i kapitel 4 finns en beskrivning av det datamaskinsprogram med subroutines, som användes vid simuleringarna. I kapitel 5 presenteras resultat och slutsatser från simuleringar av ett första och ett andra ordningens system. I kapitel 6 ges några idéer om hur arbetet skulle fortsättas. Kapitel 7 innehåller litteraturreferenser och i kapitel 8 finns en kopia av programmet och de nyskrivna subroutinerna.

2. FILTER FÖR SAMTIDIG ESTIMERING AV TILLSTÄNDSVEKTOR OCH OKÄNDÅ PARAMETRAR

2.1. Härledning utgående från Kalmanfilter

Ett linjärt, samplat system beskrivs av ekvationerna:

$$(1) \quad \begin{cases} x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma u(t) + v(t) \\ y(t) = \Theta x(t) + e(t) \end{cases}$$

Antag att matriserna Φ , Γ och Θ är kända och att vektorerna $v(t)$ och $e(t)$ har normalfördelade komponenter med medelvärde noll samt att $v(t)$ och $e(t)$ är oberoende dels av varandra och dels av $v(s)$ och $e(s)$ då $s \neq t$.

Om $v(t)$ har kovariansmatrisen R_1 och $e(t)$ har kovariansmatrisen R_2 är följande filter för estimering av tillståndsvektorn optimalt i den mening att det minimerar variansen av estimeringsfelet. (Mer exakt: Det minimerar $a^T P(t)a$, där $P(t)$ är kovariansmatrisen för estimeringsfelet, för varje vektor a .) Estimeringsfelet definieras som skillnaden mellan verklig och estimerad tillståndsvektor.

$$(3) \quad K(t) = \Phi P(t) \Theta^T [\Phi P(t) \Theta^T + R_2]^{-1}$$

$$(4) \quad P(t+1) = \Phi P(t) \Phi^T + R_1 - \Phi P(t) \Theta^T [\Phi P(t) \Theta^T + R_2]^{-1} \Phi P(t) \Phi^T$$

$$(5) \quad \hat{x}(t+1) = \Phi \hat{x}(t) + \Gamma u(t) + K(t) [y(t) - \Theta \hat{x}(t)]$$

$$(6) \quad \begin{cases} P(0) = R_0 \\ \hat{x}(0) = E x(0) \end{cases}$$

där R_0 är kovariansmatrisen för $x(0)$.

Detta finns bevisat i ref. (1) kap. 7.

I det system, som skall undersökas, antages matriserna Φ , Γ och Θ bero på en tidsoberoende parametervektor α , vars komponenter är de okända parametrarna.

$$(7) \quad \begin{cases} x(t+1) = \phi(\alpha)x(t) + \Gamma(\alpha)u(t) + v(t) \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} y(t) = \theta(\alpha)x(t) + e(t) \end{cases}$$

Eftersom både α och x måste estimeras utökas tillståndsvektorn x med parametervektorn α . Vi får då följande system:

$$(9) \quad \begin{bmatrix} x(t+1) \\ \alpha(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(\alpha) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \alpha(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} v(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(10) \quad y(t) = \begin{bmatrix} \theta(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \alpha(t) \end{bmatrix} + e(t)$$

Systemet är nu emellertid inte längre linjärt i tillståndsvariablene.

Vektorn $\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \alpha(t+1) \end{bmatrix}$ kan emellertid betraktas som en funktion av $x(t)$, $\alpha(t)$, $u(t)$ och $v(t)$. Denna funktion linjariseras genom Taylorutveckling t.o.m. termer av första graden. Ekv.(9) ger:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t+1) \\ \alpha(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \phi(\alpha)x(t) + \Gamma(\alpha)u(t) \\ \alpha(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v(t) \\ 0 \end{bmatrix} \approx \\ &\approx \begin{bmatrix} \phi(\alpha_0)x_0 + \Gamma(\alpha_0)u_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi(\alpha_0) \\ 0 \end{bmatrix} [x(t) - x_0] + \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (\phi(\alpha)x(t) + \Gamma(\alpha)u(t)) \right]_{x_0, u_0} [\alpha(t) - \alpha_0] + \begin{bmatrix} \Gamma(\alpha_0) \\ 0 \end{bmatrix} [u(t) - u_0] + \\ &+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} [v(t) - v_0] \end{aligned}$$

Sätts:

$$(11) \quad \begin{bmatrix} \Delta x(t+1) \\ \Delta \alpha(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t+1) \\ \alpha(t+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi(\alpha_0)x_0 + \Gamma(\alpha_0)u_0 + v_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ \Delta \alpha(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) - x_0 \\ \alpha(t) - \alpha_0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta u(t) = u(t) - u_0$$

$$\Delta v(t) = v(t) - v_0$$

Då erhålls:

$$(12) \quad \begin{bmatrix} \Delta x(t+1) \\ \Delta \alpha(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(\alpha_0) & \frac{\partial}{\partial \alpha} (\phi(\alpha)x(t) + \Gamma(\alpha)u(t)) \Big|_{x_0, u_0} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ \Delta \alpha(t) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \Gamma(\alpha_0) \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u(t) + \begin{bmatrix} \Delta v(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

P.s.s. betraktas $y(t)$ i ekv.(10) som en funktion av $x(t)$, $\alpha(t)$ och $e(t)$.

Serieutveckling ger:

$$y(t) \approx \theta(\alpha_0)x_0 + e_0 + \theta(\alpha_0)\Delta x(t) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(\theta(\alpha)x(t))_{x_0}\Delta \alpha(t) + I\Delta e(t)$$

$$\text{där } \Delta e(t) = e(t) - e_0$$

$$(13) \text{ sättes även } \Delta y(t) = y(t) - (\theta(\alpha_0)x_0 + e_0) \text{ så erhålls}$$

$$(14) \Delta y(t) = \left[\begin{matrix} \theta(\alpha_0) & \frac{\partial}{\partial \alpha}(\theta(\alpha)x(t))_{x_0} \\ 0 & I \end{matrix} \right] \begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ \Delta \alpha(t) \end{bmatrix} + e(t)$$

$$\text{Med } F = \left[\begin{matrix} \phi(\alpha_0) & \frac{\partial}{\partial \alpha}(\phi(\alpha)x(t) + \Gamma(\alpha)u(t))_{x_0, u_0} \\ 0 & I \end{matrix} \right]$$

$$T = \left[\begin{matrix} \theta(\alpha_0) & \frac{\partial}{\partial \alpha}(\theta(\alpha)x(t))_{x_0} \end{matrix} \right]$$

erhålls således följande linjära system:

$$(12') \quad \begin{bmatrix} \Delta x(t+1) \\ \Delta \alpha(t+1) \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ \Delta \alpha(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma(\alpha_0) \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u(t) + \begin{bmatrix} \Delta v(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(14') \quad \Delta y(t) = T \begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ \Delta \alpha(t) \end{bmatrix} + \Delta e(t)$$

Om man väljer $v_0 = E v(t) = 0$ och $e_0 = E e(t) = 0$ blir $\Delta v(t) = v(t)$ och $\Delta e(t) = e(t)$ normalfördelade med medelvärde noll. I så fall kan Kalmanfiltret ekv.(3)-(6) användas på systemet (12')-(14').

$$(15) \quad \begin{bmatrix} \widehat{\Delta x}(t+1) \\ \widehat{\Delta \alpha}(t+1) \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \widehat{\Delta x}(t) \\ \widehat{\Delta \alpha}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma(\alpha_0) \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u(t) + K(t) \left(\Delta y(t) - T \begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ \Delta \alpha(t) \end{bmatrix} \right)$$

$$\text{där } \begin{cases} K(t) = FP(t)T^T P(t)T^T + R_2^{-1} \\ P(t+1) = FP(t)F^T + R_1 - FP(t)T^T [TP(t)T^T + R_2]^{-1} TP(t)F^T \end{cases}$$

Detta ger således ett estimat av differanserna. Det återstår att välja en lämplig linjariseringpunkt $(x_0, \alpha_0, u_0, v_0, e_0)$. Eftersom (12')-(14') approximerar (9)-(10) bättre ju mindre differanserna är bör man således välja en linjariseringpunkt, som ger så små värden på $\Delta x(t), \Delta \alpha(t), \Delta u(t), \Delta v(t)$ och $\Delta e(t)$ som möjligt. För de två första uppnås detta om man väljer x_0 och α_0 så att $E \Delta x(t) (= \widehat{\Delta x}(t))$ (ref.(1)) och $E \Delta \alpha(t) (= \widehat{\Delta \alpha}(t))$ blir lika med noll.

$\widehat{\Delta x}(t)$ är estimatet vid tidpunkt t , baserat på information t.o.m. tidpunkt $t-1$, av $\Delta x(t) = x(t) - x_0$. Dvs. $\widehat{\Delta x}(t) = \widehat{x}(t|t-1) - x_0$. $\widehat{\Delta x}(t)=0$ medför således att $x_0 = \widehat{x}(t|t-1)$. P.s.s. $\widehat{\Delta x}(t)=0 \Rightarrow \alpha_0 = \widehat{\alpha}(t|t-1)$.

Eftersom insignalen är känd kan $\Delta u(t)$ direkt sättas lika med noll: $\Delta u(t) = u(t) - u_0 = 0 \quad u_0 = u(t)$.

Vidare bör man sätta $E\Delta v(t)=0$ och $E\Delta e(t)=0$. Detta ger $v_0 = Ev(t)=0$ och $e_0 = Ee(t)=0$, ett resultat som, enligt vad som tidigare sagts, berättigar användandet av Kalmanfiltret (ekv.(15)).

Sammanfattningsvis erhålls således linjariseringspunkten

$$(x_0, \alpha_0, u_0, v_0, e_0) = (\widehat{x}(t|t-1), \widehat{\alpha}(t|t-1), u(t), 0, 0).$$

Ann. Trots att $\begin{bmatrix} \widehat{\Delta x}(t) \\ \widehat{\Delta \alpha}(t) \end{bmatrix} = 0$ blir $\begin{bmatrix} \widehat{\Delta x}(t+1) \\ \widehat{\Delta \alpha}(t+1) \end{bmatrix} \neq 0$. Detta är emellertid

ingen paradox ty linjariseringen är gjord vid tidpunkt t så att

$\begin{bmatrix} \widehat{\Delta x}(t) \\ \widehat{\Delta \alpha}(t) \end{bmatrix} = 0$, för att göra ett estimat av $\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \alpha(t+1) \end{bmatrix}$, baserad på information t.o.m. tidpunkt t . Detta estimat används sedan som ny linjariseringspunkt vid tidpunkt $t+1$ så att $\begin{bmatrix} \widehat{\Delta x}(t+1) \\ \widehat{\Delta \alpha}(t+1) \end{bmatrix}$ blir noll.

Ekv.(15). ger nu:

$$(17) \quad \begin{bmatrix} \widehat{\Delta x}(t+1) \\ \widehat{\Delta \alpha}(t+1) \end{bmatrix} = K(t)\Delta y(t) = K(t)[y(t) - \theta(\widehat{\alpha}(t|t-1))\widehat{x}(t|t-1)]$$

där (13) utnyttjats.

Eftersom $\begin{bmatrix} \widehat{\Delta x}(t+1) \\ \widehat{\Delta \alpha}(t+1) \end{bmatrix}$ är estimatet av $\begin{bmatrix} \Delta x(t+1) \\ \Delta \alpha(t+1) \end{bmatrix}$ baserat på information t.o.m. tidpunkt t ger ekv.(11)

$$(18) \quad \begin{bmatrix} \widehat{\Delta x}(t+1) \\ \widehat{\Delta \alpha}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{x}(t+1|t) \\ \widehat{\alpha}(t+1|t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi(\alpha_0)x_0 + \Gamma(\alpha_0)u_0 + v_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

Tillsammans med (16) och (17) erhålls

$$(18') \quad \begin{bmatrix} \widehat{x}(t+1|t) \\ \widehat{\alpha}(t+1|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(\widehat{\alpha}(t|t-1))\widehat{x}(t|t-1) + \Gamma(\widehat{\alpha}(t|t-1))u(t) \\ \widehat{\alpha}(t|t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{\Delta x}(t+1) \\ \widehat{\Delta \alpha}(t+1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \phi(\widehat{\alpha}(t|t-1)) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x}(t|t-1) \\ \widehat{\alpha}(t|t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma(\widehat{\alpha}(t|t-1)) \\ 0 \end{bmatrix} u(t) +$$

$$+ K(t)[y(t) - \theta(\widehat{\alpha}(t|t-1))\widehat{x}(t|t-1)]$$

Sammanfattningsvis har vi erhållit följande filter (kallat K1):

$$(19) \quad K(t) = FP(t)T^T [TP(t)T^T + R_2]^{-1}$$

$$(20) \quad P(t+1) = FP(t)F^T + R_1 = FP(t)T^T [TP(t)T^T + R_2]^{-1} TP(t)F^T$$

$$(18') \quad \begin{bmatrix} \hat{x}(t+1|t) \\ \hat{\alpha}(t+1|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(\hat{\alpha}(t|t-1)) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t|t-1) \\ \hat{\alpha}(t|t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma(\hat{\alpha}(t|t-1)) \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \\ + K(t) \left[y(t) - \theta(\hat{\alpha}(t|t-1))x(t|t-1) \right]$$

$$\text{där } F = F(t|t-1) = \begin{bmatrix} \phi(\hat{\alpha}(t|t-1)) & \frac{\partial}{\partial \alpha} (\phi(\alpha)x(t) + \Gamma(\alpha)u(t)) \hat{x}(t|t-1), u(t) \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$T = T(t|t-1) = \begin{bmatrix} \theta(\hat{\alpha}(t|t-1)) & \frac{\partial}{\partial \alpha} (\theta(\alpha)x(t)) \hat{x}(t|t-1) \end{bmatrix}$$

Ann. 1 Fysikalisk tolkning.

Den första termen i högerledet av ekv.(18') är ett estimat av tillståndsvektorn baserat på information t.o.m. tidpunkt $t-1$ dvs. $\begin{bmatrix} \hat{x}(t+1|t-1) \\ \hat{\alpha}(t+1|t-1) \end{bmatrix}$. Den andra termen representerar den förbättring, som kan göras då $u(t)$ är känd och den sista termen ger en ytterligare förbättring på grund av att $y(t)$ är känd.

$P(t+1)$ är variansen för reglerfelet vid tidpunkt $t+1$ och $K(t)$ är bestämd så att denna blir minimal. Första termen i högerledet av ekv.(20) visar hur $P(t)$ ändras p.g.a. systemdynamiken, R_1 representerar ökningen p.g.a. bruset $v(t)$ och den sista termen minskningen p.g.a. att en förbättring av estimatet görs då $y(t)$ blir känd.

Ann. 2

Filtret är nu inte längre optimalt och en enkel förbättring kan göras, vilket visas i följande avdelning.

2.2. Förbättring av estimatet

Resultatet i föregående avdelning kan på följande sätt förbättras något.

Ekv.(15) blir om fullständiga indices sättes ut:

$$(21) \quad \begin{bmatrix} \hat{\Delta x}(t+1|t) \\ \hat{\Delta \alpha}(t+1|t) \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \hat{\Delta x}(t|t-1) \\ \hat{\Delta \alpha}(t|t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma(\alpha_0) \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u(t) + \\ + K(t|t-1) \left(\Delta y(t) - T \begin{bmatrix} \hat{\Delta x}(t|t-1) \\ \hat{\Delta \alpha}(t|t-1) \end{bmatrix} \right)$$

Om matriserna F , Γ och T vore kända dvs. oberoende av linjariseringpunkten är detta ett optimalt estimat av tillståndsvektorn för systemet (12')-(14') (som emellertid bara är en approximation av det verkliga systemet (9)-(10)).

Definiera nu

$$(22) \quad \begin{bmatrix} \hat{\Delta x}(t|t) \\ \hat{\Delta \alpha}(t|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\Delta x}(t|t-1) \\ \hat{\Delta \alpha}(t|t-1) \end{bmatrix} + W(t|t-1) \left(\Delta y(t) - T \begin{bmatrix} \hat{\Delta x}(t|t-1) \\ \hat{\Delta \alpha}(t|t-1) \end{bmatrix} \right)$$

där W definieras ur $K = F \cdot W$.

Detta är uppenbarligen ett estimat av tillståndsvektorn vid tidpunkt t , baserat på utsignaler t.o.m. tidpunkt t . Att det dessutom under förutsättning att F , Γ och T är kända är optimalt inses på följande sätt.

Ekv.(21) kan skrivas

$$(21') \quad \begin{bmatrix} \hat{\Delta x}(t+1|t) \\ \hat{\Delta \alpha}(t+1|t) \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \hat{\Delta x}(t|t) \\ \hat{\Delta \alpha}(t|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma(\alpha_0) \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u(t)$$

Antag att $\begin{bmatrix} \hat{\Delta x}(t|t) \\ \hat{\Delta \alpha}(t|t) \end{bmatrix}$ är ett icke-optimalt estimat. Enda sättet att utgående från detta erhålla ett estimat av tillståndsvektorn vid tidpunkt $t+1$, då ingen ny information erhållits är att låta det genomlöpa systemet ett tidssteg, vilket är just vad ekv.(21') innebär. Resultatet kan emellertid i så fall inte bli optimalt, men vänsterledet i (21') vet vi är optimalt. Antagandet är alltså felaktigt och estimatet ekv.(22) optimalt.

Som linjariseringspunkt i ekv.(22) väljes som tidigare $x_0 = \hat{x}(t|t-1)$ och $\alpha_0 = \hat{\alpha}(t|t-1)$, ty det ger $\Delta\hat{x}(t|t-1)=0$ och $\Delta\hat{\alpha}(t|t-1)=0$. Detta ger:

$$\begin{bmatrix} \Delta\hat{x}(t|t) \\ \Delta\hat{\alpha}(t|t) \end{bmatrix} = w(t|t-1)\Delta y(t) = w(t|t-1) \left[y(t) - \theta(\hat{\alpha}(t|t-1))\hat{x}(t|t-1) \right]$$

Detta kan fysiskaliskt tolkas som den förbättring av estimatelet av $\begin{bmatrix} x(t) \\ \alpha(t) \end{bmatrix}$ vid tidpunkt t , som kan göras då utsignalen $y(t)$ blivit känd. Man får således:

$$(23) \quad \begin{bmatrix} \hat{x}(t|t) \\ \hat{\alpha}(t|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}(t|t-1) \\ \hat{\alpha}(t|t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\hat{x}(t|t) \\ \Delta\hat{\alpha}(t|t) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{x}(t|t-1) \\ \hat{\alpha}(t|t-1) \end{bmatrix} + w(t|t-1) \left[y(t) - \theta(\hat{\alpha}(t|t-1))\hat{x}(t|t-1) \right]$$

Man ser nu att (21') inte är optimalt om man har matriser F och F' , som innehåller parametrar, vilka succesivt förbättras. I (21') beror nämligen F och F' på $\hat{x}(t|t-1)$ och $\hat{\alpha}(t|t-1)$, men då det bättre estimatelet (23) är känt får man ett bättre resultat om man istället använder dessa värden.

Detta uppnås om man i (21') som ny linjariseringspunkt väljer $\hat{x}(t|t)$ och $\hat{\alpha}(t|t)$, vilket ger $\Delta\hat{x}(t|t)=0$ och $\Delta\hat{\alpha}(t|t)=0$, samt som tidigare $u_0=u(t)$ dvs. $\Delta u(t)=0$.

$$\text{Ekv. (21')} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta\hat{x}(t+1|t) \\ \Delta\hat{\alpha}(t+1|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ekv.(18) ger i så fall:

$$(24) \quad \begin{bmatrix} \hat{x}(t+1|t) \\ \hat{\alpha}(t+1|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(\hat{\alpha}(t|t))\hat{x}(t|t) + F(\hat{\alpha}(t|t))u(t) \\ \hat{\alpha}(t|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \phi(\hat{\alpha}(t|t)) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t|t) \\ \hat{\alpha}(t|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F(\hat{\alpha}(t|t)) \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Med (23) och (24) estimerar man således tillståndet i två steg.

Med (23) förbättras det redan kända estimatelet av tillståndsvektorn vid tidpunkt t m.h.a. utsignalen vid samma tidpunkt. I ekv.(24) stegas den bästa nu kända modellen av systemet fram ett tidssteg då insignalen är känd men ingen ny utsignal erhållits.

Ekv.(20), som bestämmer kovariansmatrisen för estimeringsfelet, kan nu delas upp på motsvarande sätt.

Betrakta estimeringsfelet då det linjära systemets (12')-(14') tillståndsyektor estimeras med ekv.(22)-(21'). Subtrahera ekv.(22) från $\begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ \Delta \alpha(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ \Delta \alpha(t) \end{bmatrix}$ och använd (14') där $\Delta e(t) = e(t)$.

$$(25) \quad \begin{bmatrix} \tilde{\Delta x}(t|t) \\ \tilde{\Delta \alpha}(t|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\Delta x}(t|t-1) \\ \tilde{\Delta \alpha}(t|t-1) \end{bmatrix} - W(t|t-1) \left(\begin{bmatrix} \tilde{\Delta x}(t|t-1) \\ \tilde{\Delta \alpha}(t|t-1) \end{bmatrix} + e(t) \right)$$

där $\tilde{\Delta x} = \Delta x - \widehat{\Delta x}$.

Bilda $P(t|t) = E \begin{bmatrix} \tilde{\Delta x}(t|t) \\ \tilde{\Delta \alpha}(t|t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Delta x}(t|t) \\ \tilde{\Delta \alpha}(t|t) \end{bmatrix}^T$, vilket ger

$$P(t|t) = [I - W(t|t-1)T] P(t|t-1) [I - W(t|t-1)T]^T + W(t|t-1) R_1 W^T(t|t-1).$$

Ty $\tilde{\Delta x}(t|t-1)$ och $e(t)$ är oberoende.

Om $P(t|t)$ minimeras (genom kvadratkomplettering) m.a.p. $W(t|t-1)$ erhålls

$$(26) \quad W(t|t-1) = P(t|t-1) T^T [T P(t|t-1) T^T + R_2]^{-1}$$

$$(27) \quad P(t|t) = P(t|t-1) - P(t|t-1) T^T [T P(t|t-1) T^T + R_2]^{-1} T P(t|t-1)$$

där $T = T(t|t-1)$.

Detta visar att W , såsom det tidigare definierats, minimerar estimeringsfelets varians.

Ekv.(21') subtraheras från ekv.(12').

$$(28) \quad \begin{bmatrix} \tilde{\Delta x}(t+1|t) \\ \tilde{\Delta \alpha}(t+1|t) \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \tilde{\Delta x}(t|t) \\ \tilde{\Delta \alpha}(t|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ vilket ger}$$

$$(29) \quad P(t+1|t) = FP(t|t)F^T + R_1$$

där $F = F(t|t)$.

Sammanfattningsvis har således följande filter (kallat K2) erhållits.

$$(26) \quad W(t|t-1) = P(t|t-1)T^T(t|t-1) \left[T(t|t-1)P(t|t-1)T^T(t|t-1) + R_2 \right]^{-1}$$

$$(27) \quad P(t|t) = P(t|t-1) - P(t|t-1)T^T(t|t-1) \left[T(t|t-1)P(t|t-1)T^T(t|t-1) + R_2 \right]^{-1} T(t|t-1)P(t|t-1)$$

$$(23) \quad \begin{bmatrix} \hat{x}(t|t) \\ \hat{\alpha}(t|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}(t|t-1) \\ \hat{\alpha}(t|t-1) \end{bmatrix} + W(t|t-1) \left[y(t) - \theta(t|t-1)\hat{x}(t|t-1) \right]$$

$$(29) \quad P(t+1|t) = P(t|t)P(t|t)F^T(t|t) + R_1$$

$$(24) \quad \begin{bmatrix} \hat{x}(t+1|t) \\ \hat{\alpha}(t+1|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(t|t) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t|t) \\ \hat{\alpha}(t|t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F(t|t) \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

där $F(t|t) = \begin{bmatrix} \phi(\hat{\alpha}(t|t)) & \frac{\partial}{\partial \alpha} (\phi(\alpha)x(t) + F(\alpha)u(t)) \hat{x}(t|t), u(t) \\ 0 & I \end{bmatrix}$

$$T(t|t-1) = \begin{bmatrix} \theta(\hat{\alpha}(t|t-1)) & \frac{\partial}{\partial \alpha} (\theta(\alpha)x(t)) \hat{x}(t|t-1) \end{bmatrix}$$

Ann. 1

För kända matriser ϕ , F , θ , P , T överensstämmer detta filter med filtret K1, vilket erhålls om man i ekvationerna ovan elemineras $\hat{x}(t|t)$, $\hat{\alpha}(t|t)$ och $P(t|t)$. Om matriserna emellertid, som här, beror på tillståndsvektorn blir K2 bättre eftersom det estimerar tillståndsvektorn dubbelt så ofta.

Ann. 2 Fysikalisk tolkning.

I ekv.(23) modifieras prediktionen av tillståndsvektorn vid tidpunkt t med hjälp av utsignalen vid samma tidpunkt. Ekv.(27) visar hur variansen hos estimeringsfelet därvid minskar. Ekv.(24) predicerar därefter tillståndet vid tidpunkt t+1 då ingen ny utsignal erhållits och ekv.(29) visar hur estimeringsfelets varians härvid ökar.

Anm. 3

Matrisen P är beräknad som kovariansmatrisen för $\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\alpha} \end{bmatrix}$, men denna är lika med $\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix}$ serieutvecklad t.o.m. första gradens termor. Detta inses t.ex. genom att jämföra ekv.(9) och (24) med (28) samt ekv.(23) med (25). P är således approximativt lika med kovariansmatrisen för estimeringsfelet $\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix}$.

Anm. 4

Filtret K2 är ett så kallat utvidgat Kalmanfilter. Detta filters egenskaper finns beskrivna i ref.(2).

3. STYRNING

Som tidigare nämnts är den optimala styrstrategin då det gäller att minimera en förlustfunktion, som är en positivt definit kvadratisk form i tillståndsvariablerna och insignalerna, en linjär återkoppling från samtliga tillstånd, om dessa är direkt mätbara, i annat fall från de med Kalmanfilter estimerade tillstånden.

Förlustfunktionen

$$(30) \quad V = x^T(N) Q_0 x(N) + \sum_{t=0}^N x^T(t) Q_1 x(t) + u^T(t) Q_2 u(t)$$

minimeras således av

$$u(t) = -L(t)\hat{x}(t)$$

där

$$(31) \quad L(t) = [Q_2 + R^T S(t+1) R]^{-1} R^T S(t+1) \phi$$

$$(32) \quad S(t) = \phi^T S(t+1) \phi + Q_1 - \phi^T S(t+1) R [Q_2 + R^T S(t+1) R]^{-1} R^T S(t+1) \phi$$

Detta finns härlett i ref.(1) kap.8, där det också visas att förlustfunktionens medelökning per tidssteg i så fall blir

$$(33) \quad \Delta V = \text{tr}(S(t+1) R_1) + \text{tr}(P(t) L^T(t) R^T S(t+1) \phi)$$

Ovanstående formler gäller för kända matriser ϕ och R och ekv.(32) skall lösas bakåt i tiden med begynnelsevärdet $S(N) = Q_0$.

I det här undersökta fallet antages sluttidpunkten N hela tiden vara avlägsen, vilket medför att den stationära lösningen till ekv.(32) används. Eftersom matriserna ϕ och R beror på okända parametrar och uppdateras i varje tidssteg måste således i varje tidssteg en ny stationär lösning beräknas.

Eftersom styringreppet sker i tidpunkten efter det att den senaste utsignalen blivit känd beräknas styrsignalen ur

$$u(t+1) = -L(\hat{x}(t+1|t))\hat{x}(t+1|t).$$

Anm. Fysikalisk tolkning av ekv.(33)

I det deterministiska fallet blir $\Delta V = 0$ då sluttidpunkten är avlägsen. Första termen i högerledet ger ökningen p.g.a. att systemet påverkas av störningar, medan den andra termen representerar den ytterligare ökningen p.g.a. estimeringsfelet då tillståndsvektorn inte är direkt mätbar.

4. PROGRAMBESKRIVNING

För utförande av simuleringsar skrevs ett huvudprogram och tre subrutiner. Dessa utnyttjar de i programbiblioteket befintliga subrutinerna GLISY, MNODI, NORM, DESYM, SOLVS och NODI.

Subroutinen GLISY används för att beräkna

$$\begin{cases} x(t+1) = \phi x(t) + f u(t) \\ y(t) = \theta x(t) \end{cases}$$

MNODI beräknar en vektor, vars komponenter är normalfördelade med medelvärde noll och med en godtycklig kovariansmatris. Vektorerna vid olika tidpunkter är oberoende. De används som brus på systemet.

NODI används av MNODI för generering av slumptal.

NORM beräknar normen av en matris.

DESYM och SOLVS beräknar inversen till en symmetrisk matris.

Huvudprogrammet och de tre nyskrivna subrutinerna finns på sid. 35 - 42. Programmeringsspråket är FORTRAN.

Subroutinen LK itererar Riccati-ekvationen ekv.(32) ett steg och beräknar den linjära återkopplingen (31). Jämföres ekv.(31) med (19) och ekv.(32) med (20) så inses att man genom att göra följande byten

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow F^T \\ S(t) &\rightarrow P(t+1) \\ S(t+1) &\rightarrow P(t) \\ F &\rightarrow \theta^T \\ Q_1 &\rightarrow R_1 \\ Q_2 &\rightarrow R_2 \\ L(t) &\rightarrow K^T(t) \end{aligned}$$

även kan beräkna $K(t)$ och $P(t+1)$. Om man i ekv.(19) och (20) sätter $F = I$ och $R_1 = 0$ erhålls ekv.(26) och (27). Man kan således använda LK även för att beräkna $W(t|t-1)$ och $P(t|t)$.

Subroutinen MAMULT multiplicerar och TRANSP transponerar matriser, som är deklarerade som tvådimensionella fält.

Huvudprogrammet utför i korthet följande.

Efter inläsning och utskrift av de inlästa värdena beräknas stationära värden på $S(t)$, $P(t+1|t)$ och $L(t)$. M.h.a. ekv.(33) beräknas sedan minimala ökningen av förlustfunktionen per tidssteg. För dessa beräkningar används de riktiga värdena av matriserna Φ , Γ och Θ .

Resten av programmet består av en slinga, som genomlöpes en gång per tidssteg. Först stegas det verkliga systemet fram ett tidssteg och därefter utföres beräkningarna för filtret K_2 . Den linjära återkopplingen beräknas sedan på det sätt, som beskrives i föregående kapitel. Slutligen ökas förlustfunktionens värde och utskrifter sker.

Genom att införa vissa ändringar kan istället filtret K_1 användas.

5. SIMULERING

5.1. Allmänt om simuleringsarna

Den i de tidigare kapitlen beskrivna metoden att styra ett system, som innehåller okända parametrar, testades på några olika system. Vid test på ett första ordningens system provades för estimeringsdelen såväl filtret K1 som K2. Vid de fortsatta försöken användes endast K2.

Om R'_1 är kovariansmatrisen för $v(t)$ i ekv.(7), så bildades motsvarande matris för det utvidgade systemet ekv.(9) som $R_1 = \begin{pmatrix} R'_1 & 0 \\ 0 & \epsilon I \end{pmatrix}$.

I allmänhet användes $\epsilon = 0$, men även andra värden på ϵ valdes i avsikt att härigenom öka konvergenshastigheten för de okända parameterna. De båda matriserna R'_1 och R'_2 valdes diagonala, vilket innebär att komponenterna i brusvektorerna är inbördes oberoende. Även matriserna Q_1 och Q_2 valdes diagonala och för det mesta sattes Q_2 lika med nollmatrisen och Q_1 lika med enhetsmatrisen. Detta medför att summan av tillståndsvektorns komponenters andramoment minimeras. Medelvärdet blir härvid noll och summan av varianserna minimeras. Som startvärde på $P(t|t-1)$ valdes i allmänhet en enhetsmatris och på $\hat{x}(t|t-1)$ nollvektorn eller vektorn med alla komponenter lika med ett.

5.2. Test på ett första ordningens system med användande av filtret K1

Följande system undersöktes

$$(34) \quad \begin{cases} x(t+1) = 0,8x(t) + 2u(t) + v(t) \\ y(t) = x(t) + e(t) \end{cases}$$

Matriserna i ekv.(7) har således följande konstanta värden

$$\Phi = 0,8, \Gamma = 2 \text{ och } \Theta = 1.$$

Systemet undersöktes för $R_2 = 1$ och $R'_1 = 0,36$ resp. $0,16$. Vidare

sattes $\epsilon = 0$, $Q_2 = 0$ och $Q_1 = 1$. Följande startvärdar användes:

$$P(t|t-1) = I \text{ och } \hat{x}(t|t-1) = 1.$$

Först antogs att parametern 0,8 i ekv.(34) var okänd och kallades α .

Det visade sig att man har ett konvergensområde för $\hat{\alpha}$. Om således startvärdet på $\hat{\alpha}$ väljs mellan -0,1 och 4,0 så erhålls konvergens, dvs. estimatet av α ligger nära det korrekta värdet efter ett antal tidssteg. Väljs startvärdet utanför detta intervall kommer styrlagen, som ju är baserad på estimatet av α , att bli sådan att det återkopplade systemet blir instabilt. Såväl estimatet av α som tillståndsvariabeln kommer då att växa obegränsat. Konvergensområdets storlek är ungefär densamma för $R'_1 = 0,16$ som för $R'_1 = 0,36$.

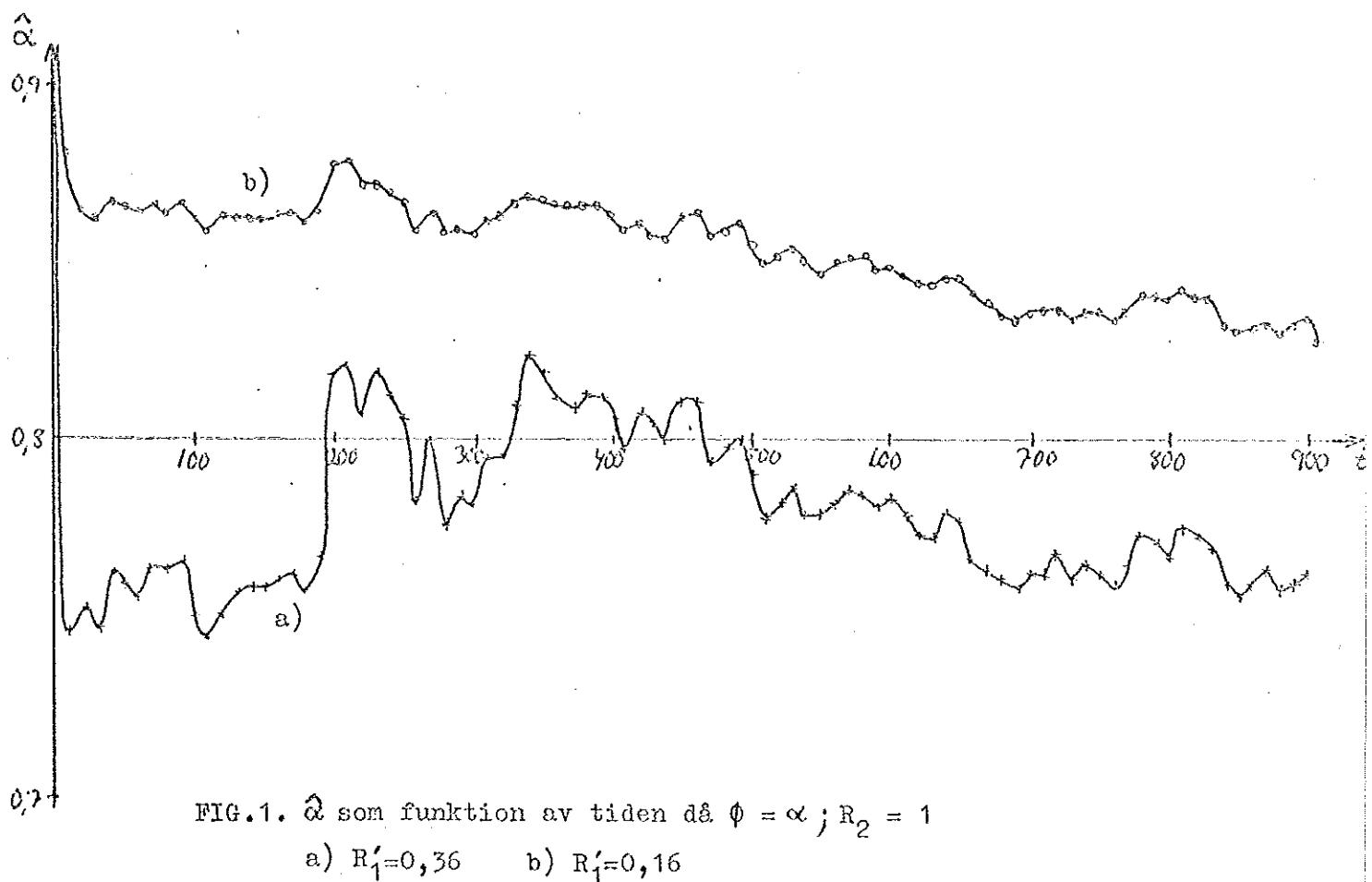


FIG.1. $\hat{\alpha}$ som funktion av tiden då $\phi = \alpha$; $R_2 = 1$
 a) $R'_1 = 0,36$ b) $R'_1 = 0,16$

Fig. 1 visar ett typiskt beteende hos estimatet av α . Startvärdet är $\hat{\alpha} = 2$. Redan efter ungefär fem tidssteg ligger estimatet högst 0,1 ifrån det korrekta värdet. Sedan går emellertid konvergensen mycket långsamt. I de båda fallen är systembrusets varians det ända som skiljer. Ett lägre brus ger mindre varians hos tillståndsvektorn och därmed mindre varians hos $y(t) - \theta(t|t-1)\hat{x}(t|t-1)$ i ekv.(18'). $\hat{\alpha}$ kommer således inte att korrigeras så mycket i varje tidssteg. Detta kan iakttagas i fig.1, där kurvan b) är jämnare och konvergerar något långsammare. Kurva b) finns inritad i fig.3 och 5 (nästa kapitel) för 5000 resp. 25000 tidssteg. Av fig.5 framgår det ännu tydligare hur långsam konvergensen är, men efter ungefär 20000 tidssteg tycks estimatet inte avvika mer än 0,01 från det riktiga värdet. Redan långt tidigare är emellertid estimatet av $\hat{\alpha}$ tillräckligt bra för att estimera tillståndet och beräkna styrlagen och därmed styra på ett tillfredsställande sätt. Ett mått på hur bra detta går kan fås genom att studera förlustfunktionens medelökning per tidssteg. Om matriserna Φ , Γ och Θ är kända ges det matematiska förväntningsvärdet för denna av ekv.(33). Under varje simuleringsberäkningades det stationära värdet av $S(t)$, $P(t)$ och $L(t)$ för det verkliga systemet samt med hjälp av dessa och ekv.(33) ΔV . Detta värde kan användas som jämförelsevärde då systemet hunnit stabilisera sig och betecknas ΔV_{\min} , eftersom värdet antas bli något större då parametrar måste estimeras samtidigt.

I fig.4 (nästa kapitel) visas hur förlustfunktionen beter sig. Under de första tidsstegen innan systemet hunnit stabilisera sig antar tillståndsvariabeln i regel något större värden, vilket medför att förlustfunktionen växer snabbt. Därefter blir, som framgår av figuren, ökningen per tidssteg ungefär konstant. Den räta linjen visar hur förlustfunktionen skulle sett ut om ökningen i varje tidssteg vore ΔV_{\min} .

Som ett ytterligare jämförelsevärde på förlustfunktionens ökning per tidssteg kan användas den ökning, som fås för det verkliga systemet då det inte styres. För ett första ordningens system kan denna beräknas med hjälp av

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \Phi x(t) + e(t) \\ \Rightarrow Q_1 E[x^2(t+1)] &= \Phi^2 Q_1 E[x^2(t)] + Q_1 E[e^2(t)] \end{aligned}$$

eftersom $x(t)$ och $e(t)$ är oberoende.

I stationärt tillstånd är $Q_1 E[x^2(t+1)] = Q_1 E[x^2(t)] = \Delta V_o$.

$$(35) \because \Delta V_o = \frac{Q_1 E[e^2(t)]}{1 - \phi^2} = \frac{Q_1 R'_1}{1 - \phi^2}$$

För fall a) i fig.1 erhålls $\Delta V_{\min} = 0,74$ och $\Delta V_o = 1,00$.

Förlustfunktionens medelvärde per tidssteg i intervallet

100-1000 tidssteg uppmättes till $\Delta V(100-1000) = 0,78$. I fall b)

erhålls $\Delta V_{\min} = 0,36$, $\Delta V_o = 0,45$ och $\Delta V(100-1000) = 0,37$.

Om man således som kriterium på bra reglering har att ΔV inte får avvika för mycket från ΔV_{\min} jämfört med hur mycket ΔV_o avviker, så reglerar styrlagen i de båda i fig.1 betraktade fallen bra trots att den är baserad på ett \hat{Q} , som avviker nästan 0,1 från det riktiga värdet.

Den linjära återkopplingen $L(t)$ blir för detta system lika med $\frac{\hat{Q}}{2}$.

Dess kvalitativa tidsberoende kan således utläsas ur fig.1. Det korrekta värdet är 0,4.

När Γ väljes som okänd parameter och det korrekta värdet på α således är 2 erhålls för $R'_1 = 0,36$ ett konvergensområde, som sträcker sig från -0,1 till åtminstone 4 (den övre gränsen beständes aldrig).

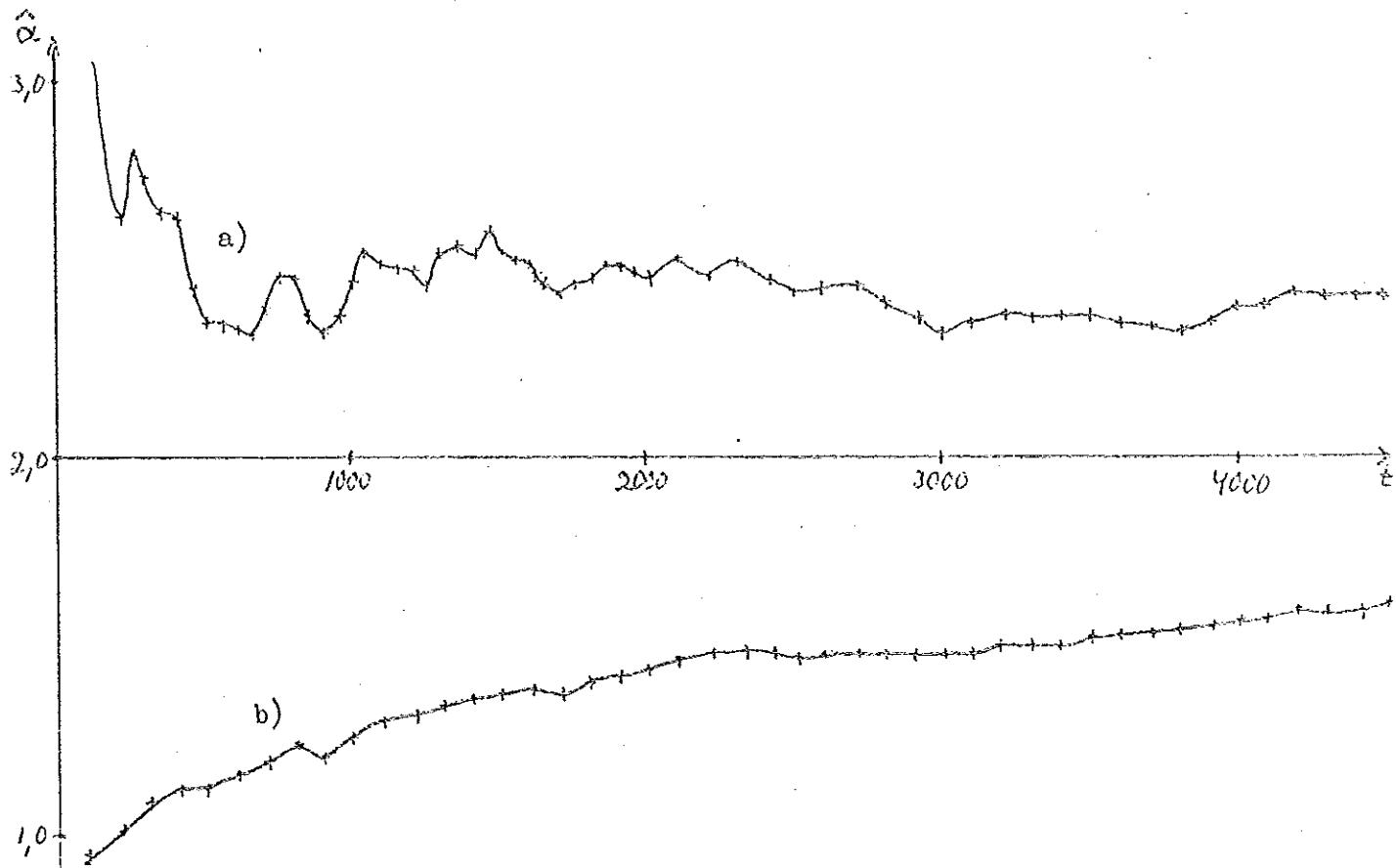


FIG.2. $\hat{\alpha}$ som funktion av tiden då $\Gamma = \alpha$; $R'_1 = 0,36$; $R_2 = 1$
a) Startvärde 4. b) Startvärde 0,5.

I fig.2 finns tidsberoendet hos $\hat{\alpha}$ inritat för två olika startvärden. Bruset är $R'_1 = 0,36$ i båda fallen. Som framgår av figuren är konvergensen betydligt långsammare än då $\phi = \alpha$ och det är tveksamt om $\hat{\alpha}$ över huvud taget kommer att konvergera mot 2. Att $\hat{\alpha}$ går mot fel värde eller långsamt mot rätt värde kan komma att ställa till besvärs såtillvida att det kan förorsaka divergens om man samtidigt försöker att estimera två eller flera okända parametrar. En långsam konvergens har emellertid i sig ingen betydelse. Det väsentliga är att styrlagen blir sådan att den reglerar bra. Med de tidigare beteckningarna blir i detta fall $\Delta V_{\min} = 0,74$ och $\Delta V_0 = 1,00$. I fall a) (fig.2) erhölls $\Delta V(4000-5000) = 0,73$ och i fall b) $\Delta V(4000-5000) = 0,74$. Regleringen är således i detta fall fullt tillfredsställande trots att $\hat{\alpha}$ ligger ungefär 0,5 från det riktiga värdet.

Då θ väljes som okänd parameter (korrekt värde: 1,0) erhålls konvergens från $\sim 0,1$ till åtminstone 10 då $R'_1 = 0,36$. Konvergensen är även i detta fall mycket långsam men regleringen bra. Värdena på ΔV_{\min} och ΔV_0 är desamma som ovan. För startvärden nära det riktiga värdet erhölls $\Delta V(100-1000) = 0,78$. Startade man med $\hat{\alpha} = 10$ avtog estimateat långsamt men monotont och hade efter 1000 tidssteg nått 3,0. Även i detta fall då $\hat{\alpha}$ avvek med flera enheter från det riktiga värdet erhölls en så pass bra styrlag att $\Delta V(100-1000)$ endast blev 0,85.

Sammanfattningsvis kan om filtret K1 sägas att det i allmänhet existerar ett konvergensområde. Det går att välja ett startvärde några gånger större än det riktiga värdet, men inte för stort. Konvergensen är mycket långsam, men trots det är regleringen bra.

5.3. Första ordningens system med användande av filtret K2

Med hjälp av samma första ordningens system som i föregående avsnitt testades för estimeringsdelen filtret K2. Den mest markanta skillnaden jämfört med då K1 användes är att det för K2 inte tycks finnas något avgränsat konvergensområde. Estimatelet av α divergerar således inte för något av de undersökta startvärdena.

Vid samtliga simuleringar var $Q_1=1$ och startvärdet på $P(t|t-1) = I$ samt $\hat{x}(t|t-1) = 0,5$. Då inget annat säges var $Q_2=0$, $\epsilon=0$ och $R_2=1$. För R'_1 Användes de båda värdena 0,36 och 0,16.

Först antages ϕ vara den okända parametern. Det korrekta värdet på α är således 0,8. För startvärdet på \hat{x} mellan -10 och 50 erhålls konvergens. För startvärdet, som ligger inom konvergensområdet för K1, beter sig estimatelet ungefär som tidigare. Om man succesivt ökar startvärdet blir konvergensen bättre och bättre. Med startvärde 7 kommer \hat{x} efter 7 tidssteg ej att avvika mer än 0,05 från det riktiga värdet och för ett startvärde på 30 eller större avviker estimatelet efter 5 tidssteg mindre än 0,0005. För negativa startvärden kan samma tendens iakttagas. Med startvärde -10 kommer således estimatelet att efter 7 tidssteg ligga på konstant 0,801.

Startvärde på \hat{x}	Slutvärde på \hat{x}	$\Delta V(50-150)$	Slutvärde på V	Maxvärde på u
-10	0,80	----	$6 \cdot 10^5$	189
-0,1	0,93	0,81	171	0,4
2	0,87	0,79	184	-2
4	0,77	0,82	5568	-44
50	0,80	----	$6 \cdot 10^9$	$> 10^5$

TABELL 1. Uppförandet hos \hat{x} då $\phi = \alpha$.

Simuleringen pågick i 200 tidssteg och R'_1 var 0,36.

Som framgår av tabell 1 kommer utsignalen att för stora startvärden anta mycket stora värden. Detta sker under de 6 - 7 första tidsstegen och samma sak gäller för såväl tillståndsvariabeln och estimatelet av denna som för utsignalen.

Om denna metod skall användas praktiskt är det helt oacceptabelt att en tillståndsvariabel, som skall vara av storleksordningen 1, antar värden, som är $10^4 - 10^5$ gånger större. De höga värdena hos såväl tillståndsvariabeln som in- och utsignalen begränsas om insignalen begränsas. Detta kan ske på två olika sätt. Genom att ge Q_2 ett högt värde kommer inte styrlagen att ge så stor insignal, eftersom den är sådan att den minimerar förlustfunktionen V ekv.(30). Det andra sättet är att direkt begränsa insignalen, dvs. inte tillåta att dess belopp överstiger ett visst värde u_{\max} .

Q_2	Maxvärde på u	Slutvärde på V
0	-295	$241 \cdot 10^3$
10	-256	$219 \cdot 10^3$
100	-253	$329 \cdot 10^3$
1000	-252	$400 \cdot 10^3$
10000	-252	$412 \cdot 10^3$

TABELL 2. Beroendet av Q_2 hos insignalens maxvärde
då $Q_1=1$. Startvärde på $\hat{\alpha}$ är 7. Simuleringarna
utfördes under 200 tidssteg.

Som framgår av tabell 2 minskas insignalens största värde inte särskilt mycket av ett ökat värde på Q_2 . Anledningen är att variationen i tiden hos den linjära återkopplingen $L(t)$ endast beror på tidsvariationen hos $\hat{\alpha}$ och att $L(t)$ är så konstruerad att den, för varje $\hat{\alpha}$ -värde, minimerar matematisk förväntan av förlustfunktionens slutvärde för det system, som har $\phi=\hat{\alpha}$. $L(t)$ är således helt oberoende av de enstaka höga värden som tillståndsvariabeln och därmed dess estimat antar på grund av att $\hat{\alpha}$ avviker från det korrekta α -värdet. Dessa höga värden är emellertid orsak till de höga insignalerna. Metoden är således inte effektiv om man avser att begränsa enstaka mycket höga värden på insignalen. En nackdel med metoden är dessutom att ett högt Q_2 -värde medför att mindre hänsyn tages till att minimera variansen hos tillståndsvariabeln. Detta bör kunna iakttagas som en större medelökning per tidssteg hos funktionen $V' = \sum x^T Q_1 x$.

Vid simuleringarna visade det sig dock att ökningen blev ungefär densamma. Det skall emellertid understyckas att simuleringarna endast utfördes under 200 tidssteg, vilket är alldeles för litet för att dra några säkra slutsatser. Som framgår av tabellen var förlustfunktionens slutvärde av storleksordningen 10^5 . Slutvärdet på $\hat{\alpha}$ var 0,80 och oberoende av Q_2 -värdet.

Om Q_2 väljs noll men insignalens belopp istället ej tillåts överstiga 5 kommer såväl slutvärdet på $\hat{\alpha}$ (efter 200 tidssteg) som förlustfunktionens stationära ökning per tidssteg att anta ungefär samma värden som i föregående fall. Då således övriga försöksbetingelser var lika t.ex. startvärdet på $\hat{\alpha}$ var 7 och $R'_1=0,36$, vilket medför att ΔV_{\min} blir 0,74 och $\Delta V_0=1,0$, blev slutvärdet på $\hat{\alpha}=0,83$, vilket är något sämre än i föregående fall men fullt acceptabelt. Förlustfunktionens stationära ökning per tidssteg blev 0,83. I föregående fall blev den 0,80. Den stora fördelen med den senare metoden är emellertid, förutom att insignalens värden ligger lågt, att tillståndsvariabeln inte antar så höga värden, vilket avspeglar sig i förlustfunktionens slutvärde, som blir ungefär 500, dvs. tre tiopotenser lägre än i föregående fall.

Det visar sig således varg bättre att direkt begränsa insignalens belopp än att försöka åstadkomma detta genom att öka Q_2 .

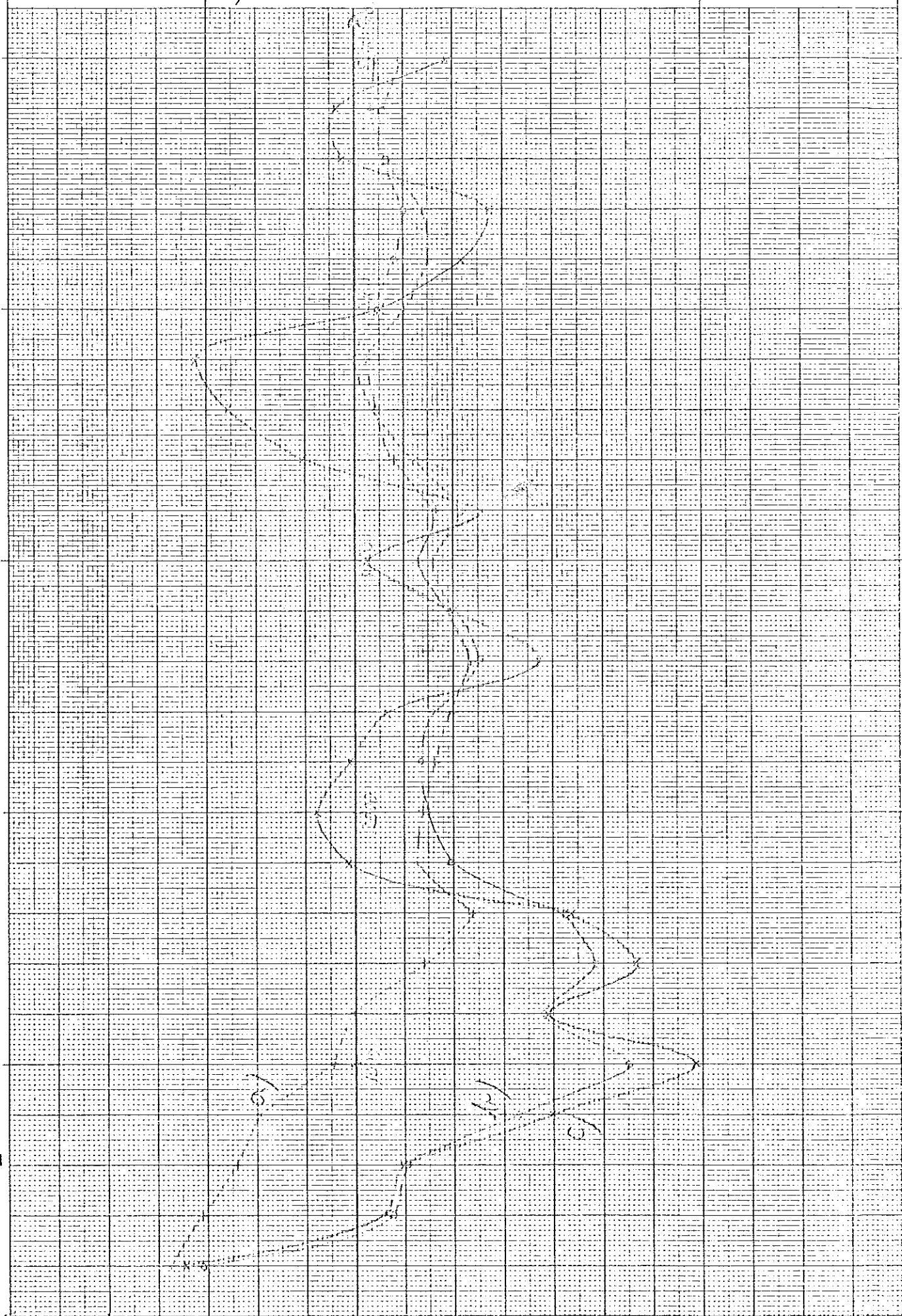
För startvärden inom K1:s konvergensområde uppför sig, som tidigare påpekats, K2 på ungefär samma sätt som K1, dvs. även här fås en mycket långsam konvergens. Detta illustreras av fig.3. Om $\epsilon=0$ kommer $\hat{\alpha}$ vid beräkningen av korrigeringssmatrisen W (ekv.(26)) att behandlas som en tillståndsvariabel, som inte påverkas av något brus. Detta innebär att det element i matrisen W , som korrigrar $\hat{\alpha}$ -värdet (ekv.(23)) ganska snabbt kommer att gå mot noll. Dvs. efter en tid sker en mycket liten korrigering av $\hat{\alpha}$. Detta skulle kunna vara en orsak till den långsamma konvergensen. Genom att välja ett litet positivt värde på ϵ borde man kunna snabba upp konvergensen något, men får istället ett osäkrare estimat av α . Dvs. variansen hos $\hat{\alpha}$ kommer att öka. $\epsilon=10^{-3}$ medför att $\hat{\alpha}$ svänger snabbt och med ganska stor amplitud (ungefär 0,5) kring det riktiga värdet. Uppförandet hos $\hat{\alpha}$ för $\epsilon=10^{-5}$ finns inritat i fig.3. För $\epsilon=10^{-6}$ skiljer sig uppförandet inte mycket från det med $\epsilon=0$. I detta fall erhålls

$\hat{\alpha}$ som funktion av tiden då $\phi = \alpha$
 $R_1' = 0,16$; $R_2 = 1$; Startvärde på $\hat{\alpha} = 2$

a) K1 med $\epsilon = 0$ (+) b) K2 med $\epsilon = 0$ (o)

c) K2 med $\epsilon = 10^{-5}$ (x)

Fig. 3



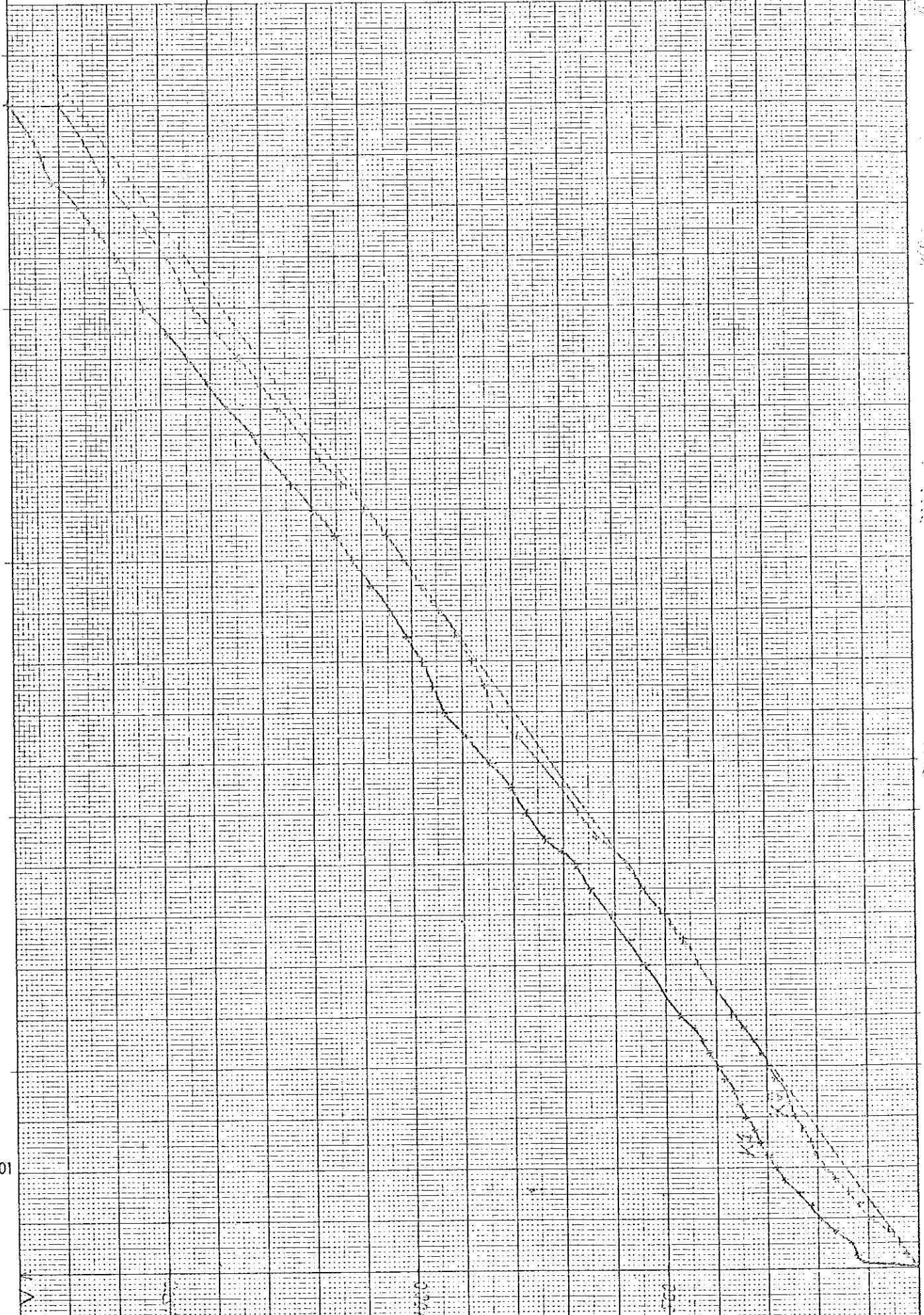
Förlustfunktionen V som funktion
av tiden då $\phi = \alpha$

$$R_1' = 0,16 ; R_2 = 1$$

Startvärde: $\hat{\alpha} = 2$

25.

Fig. 4



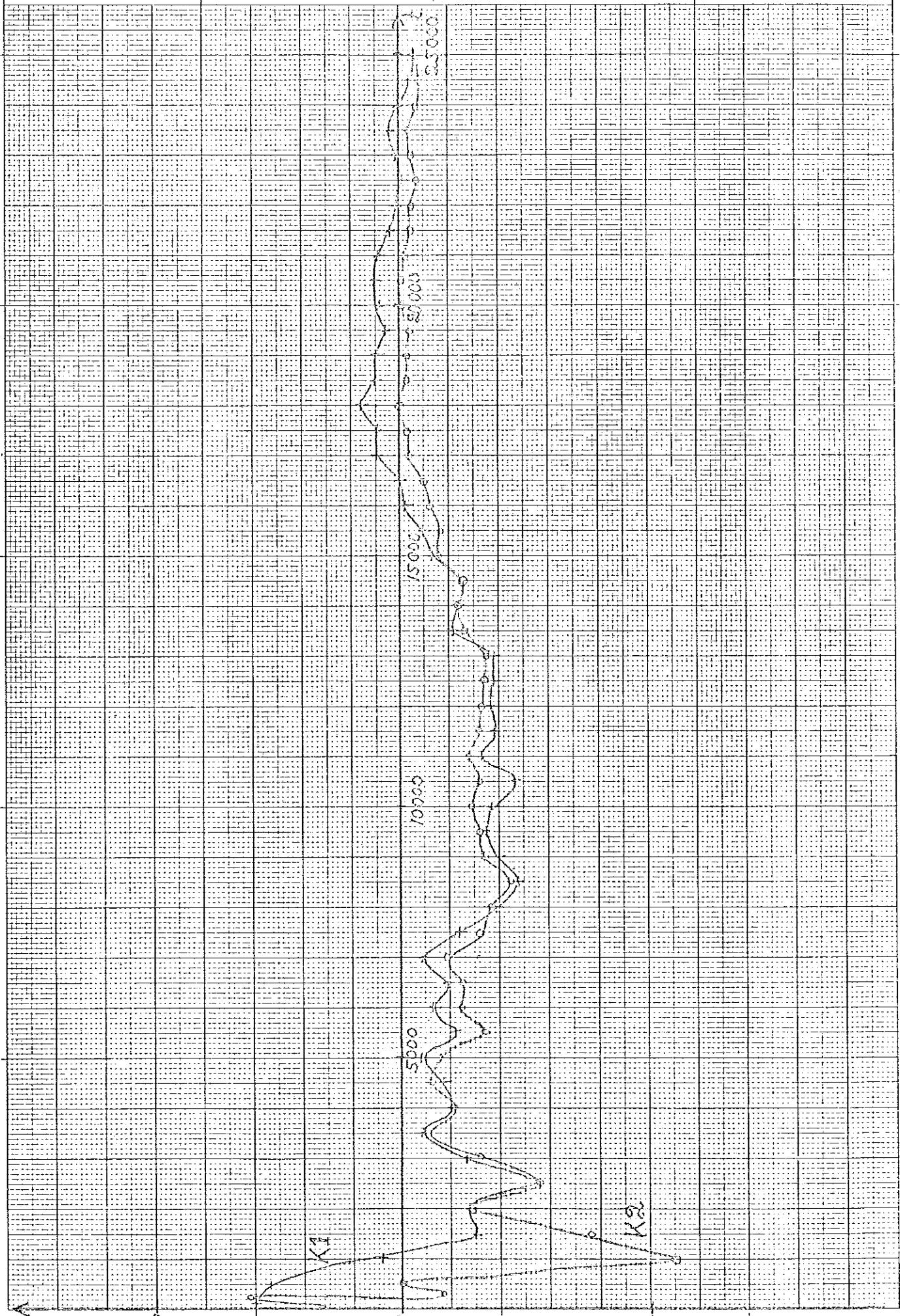
$\hat{\alpha}$ som funktion av tiden då $\phi = \alpha$

26

$$R_1' = 0,16 ; R_2 = 1$$

Startvärde på $\hat{\alpha} = 9$.

Fig 5



514 A4
SIS 732501

(TULLERGS
KLIPPAN)

Nr 1624

således ingen konvergensförbättring genom att välja ϵ skilt från noll. Det bör emellertid påpekas att erfarenheten har visat att ett litet, positivt ϵ -värde i allmänhet ger en förbättrad konvergens.

Även för små startvärden finns det en klar skillnad mellan K_1 och K_2 . Som framgår av fig.4 ökar förlustfunktionen inte lika mycket i början för K_2 . Eftersom estimateen av α och därmed $L(t)$ inte skiljer sig nämnvärt måste detta bero på att tillståndsvariabeln x estimeras bättre och att man därmed får en korrektare insignal.

Fig.5 visar tidsberoendet hos $\hat{\alpha}$ för de båda filtren. Efter lång tid, då systemet hunnit stabilisera sig och $\hat{\alpha}$ ligger nära det riktiga värdet finns det, som framgår av figuren, ingen skillnad mellan de båda metoderna.

En kort undersökaning av systemets uppförande utan brus visar att om endast mätbruset avlägsnas uppträder ingen väsentlig skillnad i konverghastighet hos $\hat{\alpha}$. Förlustfunktionens ökning per tidssteg blir emellertid betydligt mindre. Om allt brus avlägsnas antar $\hat{\alpha}$ rätt värde efter 2 tidssteg och tillståndsvariabeln blir noll efter 3 tidssteg.

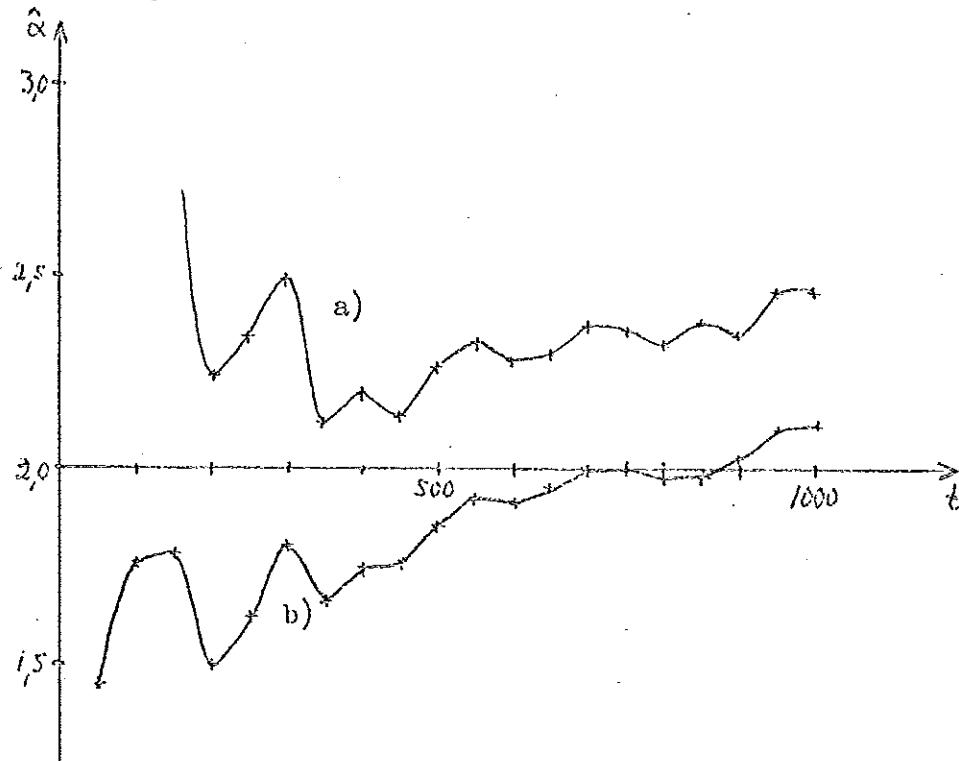


FIG.6. $\hat{\alpha}$ som funktion av tiden då $r=\alpha$; $R'_1=0,36$; $R_2=1$
a) Startvärde 4. b) Startvärde 0,5.

Då f' är okänd parameter visas konvergensens förlopp i fig.6. Bruset är $R'_1=0,36$ och en jämförelse med fig.2 visar att konvergensen, då startvärdet är 0,5, blir betydligt bättre om K2 används. För startvärdet 4 kan man dock inte dra samma slutsats.

För $\Theta = \alpha$ ger både K1 och K2 samma resultat.

5.4. Sammanfattning av skillnaderna mellan K1 och K2

Det har inte kunnat påvisas att K1 är klart bättre än K2 i något avseende. Ofta ger de båda estimeringsmetoderna likvärdiga resultat men i vissa avseenden är K2 klart bättre. Den mest markanta skillnaden är det mycket större konvergensområdet hos K2. Om insignalens belopp begränsas (t.ex. till 5) minskar visserligen konvergensområdet, men det är ändå betydligt större än det för K1. En annan fördel hos K2 är en bättre reglering alldeles i början innan systemet hunnit stabilisera sig. I enstaka fall iakttogs dessutom en snabbare konvergens då K2 användes.

På grund av ovanstående skillnader användes endast K2 i fortsättningen.

5.5. Test på ett system av andra ordningen

Metoden testades även på följande system av andra ordningen:

$$\begin{cases} x(t+1) = \begin{bmatrix} 1,5 & 1 \\ -0,7 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -0,5 \end{bmatrix} u(t) + e(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + v(t) \end{cases}$$

I detta fall valdes $Q_1=1$ och $Q_2=0$ samt följande startvärdet:

$P(t|t-1) = I$ och $x(t|t) = 0$ (nollvektorn). Om inget annat påpekas var $R'_1 = 0,36 \cdot I$, $\epsilon = 0$ och $R_2 = 1$.

Först undersöktes uppförandet då vart och ett av elementen i ϕ -matrisen sattes lika med α . Det visade sig att då ϕ_{12} , ϕ_{21} eller ϕ_{22} antogs vara okänd kunde estimatet av α inte fås att konvergera trots att startvärdet låg mycket nära det korrekta värdet (<0,5 ifrån). För $\phi_{11}=\alpha$ konvergerade estimatet men, precis som tidigare, långsamt. Efter 5000 tidssteg var således $\hat{\alpha}=1,37$, vilket inte är bättre än värdet efter 200 steg. Det verkar således som om $\hat{\alpha}$ inte konvergerar mot korrekt värde.

I detta fall blir $\Delta V_{\min}=2,6$ och $\Delta V(4000-5000)$ uppnätt till 9,8. Om insignalen sattes lika med noll blev $\Delta V(4000-5000) = 10,1$. Detta antyder att styrningen inte är så bra.

Även i detta fall visade det sig att det inte går att snabba upp konvergensen genom att välja ϵ positivt. Ej heller de som divergerade kunde fås att konvergera med $\epsilon \neq 0$ ($\epsilon=10^{-4}$).

Ett mindre startvärde på $P(t|t-1)$ ($=0,16 \cdot I$) visade sig inte medföra någon väsentlig skillnad på uppförandet hos $\hat{\alpha}$.

Försök gjordes även att få konvergens genom att minska eller helt ta bort bruset. Det visade sig då emellertid att problem uppstår för den parameter som konvergerar (ϕ_{11}).

Om allt brus tas bort divergerar $\hat{\alpha}$ i fallet $\phi_{11}=\alpha$, då startvärdet är 2. Även för $R'_1=0,16 \cdot I$ och $R_2=0$ divergerar estimatet. Insignalen blir i detta fall tidvis ganska stor, men inte heller om insignalens belopp maximeras till 15 eller 10 erhålls någon konvergens. Om man emellertid sätter $R_2=0,1$ vid beräkningen av filtret, ekv.(26) och (27), men trots detta inte har något mätbrus fås konvergens. Detta hänger

samman med att för $R_2=0$ blir den matris i ekv.(26) och (27), som skall inverteras, efter ett tag noll. För $R_2=0,1$ förhindras detta, men $R_2=0,001$ räcker inte. Konvergensen blir emellertid inte bättre då mätbrus saknas.

Då något av elementen i Γ - eller Θ -matrisen valdes som okänd parameter erhölls aldrig divergens. Startvärdet låg emellertid nära det korrekta värdet (<1 ifrån). ϵ valdes i dessa fall godtyckligt lika med 10^{-5} . Som ovan fås $\Delta V_{\min} = 2,6$.

Okänd parameter	Korrekt värde	Startvärde på $\hat{\alpha}$	Slutvärde på $\hat{\alpha}$	$\Delta V(50-150)$
Γ_{11}	1	1,5	1,84	10,0
Γ_{21}	-0,5	-1,0	0,74	9,7
Θ_{11}	1	2,0	1,17	19,1
Θ_{12}	0	0,5	-0,03	24,5

TABELL 3. Beteendet hos estimaten av elementen i Γ - och Θ -matriserna. $R_1=0,36 \cdot I$, $R_2=1$ och $\Delta V_{\min}=2,6$. Simuleringarna utfördes under 200 tidssteg.

Som framgår av tabell 3 konvergerar estimaten bättre för elementen i Θ -matrisen, men trots detta blir förlustfunktionens medelökning per tidssteg mycket hög. För elementen i Γ -matrisen tycks estimaten av α konvergera mot felaktigt värde, men trots detta blir regleringen bättre så tillvida att ΔV blir lägre. ΔV är dock av ungefär samma storlek som då ingen reglering utföres och i samtliga fall mycket större än $\Delta V_{\min}=2,6$.

Sammanfattningsvis tvingas man nog konstatera att den använda metoden för styrning av icke fullständigt kända system inte går att tillämpa på detta exempel. Även om estimaten konvergerar så förmår styrlagen inte styra så att tillståndsvektorns varians blir mindre än den skulle blivit utan styrning.

6. FÖRSLAG TILL FORTSATTA UNDERSÖKNINGAR

Den mest annärmningsvärda egenskapen hos den använda metoden att styra linjära system med okända parametrar är den långsamma konvergensen hos det parameterestimat, som måste göras. Sammanhangande hämed är förmodligen den divergens eller kovergens mot fel värde, som i vissa fall uppträder då metoden tillämpas på något mer kompliserade system.

Det verkar som om estimatets konvergenshastighet är relativt oberoende av ändringar på startvärdet (*t.ex.* på P) eller parametervärdet (*t.ex.* på ϵ). Små ändringar av denna typ kommer således förmodligen inte att kunna medföra konvergens i de fall där divergens erhölls eller i övrigt medföra några väsentliga förbättringar.

För att komma någon vart måste man nog undersöka om det är berättigat att utnyttja den här använda estimeringsmetoden, eller denna måste förbättras eller helt bytas ut.

I det fall då endast matrisen Γ innehåller okända parametrar gäller följande likhet exakt:

$$\begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \alpha(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = \begin{bmatrix} \phi & \frac{\partial}{\partial \alpha} (\Gamma(\alpha)u(t))_{u(t)} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \alpha(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma(0) \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Härur inses att de båda filtren K1 och K2 övergår (som sig bör) i ett vanligt Kalmanfilter. Man har således ett linjärt system med kända tidsvariabla matriser ($\frac{\partial}{\partial \alpha} (\Gamma(\alpha)u(t))_{u(t)}$ beror endast av $u(t)$). Systemet påverkas av normalfördelat, vitt brus med medelvärde noll och dess tillståndsvektor estimeras med ett Kalmanfilter. Enligt ref.(1) är det erhållna estimatet optimalt. Det lönar sig således inte att försöka förbättra konvergensen hos $\hat{\alpha}$ i detta fall. Detta gäller under förutsättning att man inte manipulerar med insignalen. Givetvis får man ett annat system om man väljer insignalen på annat sätt, eftersom ϕ -matrisen beror på $u(t)$. Det är möjligt att man kan välja insignalerna på ett sådant sätt att det erhållna systemets parameterestimat konvergerar snabbare. Det utsprungliga syftet med styrningen var emellertid att minimera en kvadratisk förlustfunktion. En kompromiss mellan dessa två styrstrategier kan kanske ge resultat.

Då det förekommer okända parametrar i ϕ - eller θ -matriserna är det linjära systemet ekv.(12') - (14') endast en approximation av det verkliga systemet ekv.(9) - (10). Den term, som fattas i högerledet av ekv.(12') för att denna skall bli identisk med ekv.(9), är en vektor $\delta = \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial \alpha_j} \Delta x_i \Delta \alpha_j$, där $\psi = \begin{bmatrix} \phi(\alpha)x(t) \\ 0 \end{bmatrix}$ och där det har förutsatts att $\Delta u(t)=0$, vilket ju blir fallet med den linjäriseringspunkt, som senare väljes. I detta fall är komponenterna av $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial \alpha_j}$ lika med 0 eller 1. Eftersom simuleringarna visade att, i detta fall då det gäller att hålla x så litet som möjligt, Δx är av samma storleksordning som \hat{x} och u , kommer således δ att bli av samma storleksordning som en av de i ekv.(12') ingående förstogradstermerna, nämligen $\frac{\partial}{\partial \alpha} (\phi(\alpha)x(t) + \Gamma(\alpha)u(t))_{\hat{x}, u} \Delta \alpha$. Ett analogt resonemang gäller för ekv.(10) och (14').

Det är således möjligt att man med ett filter, som tar hänsyn till termer av andra graden, kan förbättra resultaten i detta fall och eventuellt förhindra den divergens, som för de undersökta systemen endast uppträdde för element i ϕ -matrisen. Ett sådant filter finns beskrivet t.ex. i "Automatica", Vol.5 sid. 487-496 (Pergamon Press, 1969).

7. REFERENSER

- (1) K-J. Åström: Introduction to stochastic control theory.
- (2) B. L. Ho: Sensitivity of the Kalman Filter with respect to parameter variations. (March 1968, Project 5188-305)

8. HYSKRIVNA PROGRAMAVSNITT

8.1. Huvudprogrammet

```

1* C THIS PROGRAM SIMULATES A LINEAR, DISCRETE-TIME, DYNAMIC
2* C SYSTEM OF THE TYPE
3* C  $X(T+1) = F \cdot X(T) + G \cdot U(T) + E(T)$ 
4* C  $Y(T) = T \cdot X(T) + V(T)$ 
5* C WHERE
6* C X(T) IS A VECTOR OF ORDER N (MAX 10)
7* C U(T) IS A VECTOR OF ORDER M (MAX 10)
8* C Y(T) IS A VECTOR OF ORDER L (MAX 10)
9* C F IS A N*N MATRIX
0* C G IS A N*M MATRIX
1* C T IS A L*N MATRIX
2* C E(T) AND V(T) ARE NORMAL DISTRIBUTED NOISEVECTORS WITH ZERO MEAN
3* C
4* C DURING EACH TIME-STEP THE STATE VECTOR X(T) AND UNKNOWN
5* C PARAMETERS OF THE MATRICES F, G AND T ARE ESTIMATED BY EXTENDING
6* C THE STATE VECTOR WITH THE UNKNOWN PARAMETERS AND USING AN
7* C EXTENDED KALMAN FILTER
8* C THE SYSTEM IS SIMULTANEOUSLY CONTROLLED BY USING A LINEAR FEEDBACK
9* C FROM THE ESTEMATED STATE IN ORDER TO MINIMIZE A QUADRATIC
0* C LOSSFUNCTION. THE VALUE OF THE LOSSFUNCTION AS WELL AS THE
1* C MINIMAL EXPECTED LOSS PER TIME STEP ARE ESTIMATED.
2* C
3* C SUBROUTINES REQUIRED: LK, MAMULT, TRANSP, NORM, GLISY AND MNODI.
4* C SOME OF THESE ALSO REQUIRE DESYM, SOLVS AND NODI.
5* C
6* C DIMENSION F(10,10),G(10,10),T(10,10),X(10),U(10),Y(10),XE(10),
7* C *ALFA(10),P(20,20),R1(20,20),R2(10,10),B1(10),B2(10),FF(10,10),
8* C *GG(10,10),TT(10,10),FP(10,10),TP(10,10),FS(20,20),TS(10,20),
9* C *FST(20,20),TST(20,10),CK(20,10),CKT(10,20),S(10,10),Q1(10,10),
0* C *Q2(10,10),EL(10,10),A(10),B(20),C(10),D(20,20),R(10,10)
1* C *,PP(10,10),SS(10,10),E(20,20),H(20,20)
2* C GO TO 201
3* C 200 CONTINUE
4* C
5* C THE UNKNOWN PARAMETERS ARE DEFINED AND ASSIGNED TO ELEMENTS
6* C OF THE VECTOR ALFA.
7* C THE NON-ZERO ELEMENTS OF THE DERIVATIVES CONTAINED IN THE
8* C EXTENDED SYSTEM MATRICES ARE ALSO DEFINED.
9* C FF(1,1)=ALFA(1)
0* C FP(1,1)=XE(1)
1* C IF(LIM=1)131,71,185
2* C 201 CONTINUE
3* C
4* C READING THE INFORMATION OF THE DATACARDS AND WRITING IT.
5* C
6* C FIRST CARD:
7* C N,M AND L ARE DEFINED ABOVE
8* C K=NUMBER OF UNKNOWN PARAMETERS (MAX 10)
9* C LOP=MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS PER TIME STEP OF THE RICCATI-EQUATION
0* C MTID=NUMBER OF TIME STEPS
1* C NOUT: DISPLAY WILL OCCUR AFTER EACH NUMBER OF TIME STEPS THAT IS
2* C AN INTEGER MULTIPLE OF NOUT. (HOWEVER DISPLAY ALWAYS OCCURS AFTER
3* C EACH OF THE FIRST TWENTY TIME STEPS)
4* C EPS: THE ITERATION OF THE RICCATI-EQUATION CEASES WHEN
5* C NORM(S(T)-S(T+1))<EPS*S(T) (OR WHEN LOP IS REACHED)
6* C

```

```

    READ(5,100)N,M,L,K,LOP,MTID,NOUT,EPS
100 FORMAT(7I5,E6.0)
      WRITE(6,99)EPS
99 FORMAT(1H1,10X,4HEPS=,E20.5)

C CONCERNING THE INFORMATION ON THE FOLLOWING CARDS:
C SEE THE CONTENTS OF THE FORMAT-SENTENCES NR. 104-117. (EXCEPT 105)
C
C FOR FULL MATRICES: ONE ROW ON EACH CARD
C FOR MATRICES WITH ONLY DIAGONAL ELEMENTS NON-ZERO:
C ALL ELEMENTS ON ONE CARD.

C
C NNF=N+K
101 FORMAT(10F8.3)
105 FORMAT(1H0,13F10.3)
      WRITE(6,104)
104 FORMAT(9H0MATRIX F)
      DO 31 I=1,N
      READ(5,101)(F(I,J),J=1,N)
31  WRITE(6,105)(F(I,J),J=1,N)
      WRITE(6,106)
106 FORMAT(9H0MATRIX G)
      DO 32 I=1,N
      READ(5,101)(G(I,J),J=1,M)
32  WRITE(6,105)(G(I,J),J=1,M)
      WRITE(6,107)
107 FORMAT(9H0MATRIX T)
      DO 33 I=1,L
      READ(5,101)(T(I,J),J=1,N)
33  WRITE(6,105)(T(I,J),J=1,N)
108 FORMAT(33H0STARTING VALUE OF STATE VECTOR X)
      WRITE(6,108)
      READ(5,101)(X(I),I=1,N)
      WRITE(6,105)(X(I),I=1,N)
      WRITE(6,109)
109 FORMAT(44H0STARTING VALUE OF ESTIMATED STATE VECTOR XE)
      READ(5,101)(XE(I),I=1,N)
      WRITE(6,105)(XE(I),I=1,N)
      WRITE(6,110)
110 FORMAT(40H0STARTING VALUE OF PARAMETER VECTOR ALFA)
      READ(5,101)(ALFA(I),I=1,K)
      WRITE(6,105)(ALFA(I),I=1,K)
      WRITE(6,111)
111 FORMAT(33H0STARTING VALUE OF INPUT VECTOR U)
      READ(5,101)(U(I),I=1,M)
      WRITE(6,105)(U(I),I=1,M)
      DO 34 I=1,20
      DO 34 J=1,20
      P(I,J)=0
34   R1(I,J)=0
      DO 35 I=1,10
      DO 35 J=1,10
      R2(I,J)=0
      S(I,J)=0
      Q1(I,J)=0
35   Q2(I,J)=0
      READ(5,101)(P(I,I),I=1,NN)
      READ(5,121)(R1(I,I),I=1,NN)
121 FORMAT(10F8.6)
      READ(5,101)(R2(I,I),I=1,L)
      READ(5,101)(S(I,I),I=1,N)
      READ(5,101)(Q1(I,I),I=1,N)
      READ(5,101)(Q2(I,I),I=1,M)
      WRITE(6,112)

```

```

112 FORMAT(30H0DIAGONAL ELEMENTS OF MATRIX P)
      WRITE(6,105)(P(I,I),I=1,NN)
      WRITE(6,113)
113 FORMAT(31H0DIAGONAL ELEMENTS OF MATRIX R1)
      WRITE(6,123)(R1(I,I),I=1,NN)
114 FORMAT(1H0,9F9.6)
      WRITE(6,114)
115 FORMAT(30H0DIAGONAL ELEMENTS OF MATRIX S)
      WRITE(6,105)(S(I,I),I=1,N)
      WRITE(6,116)
116 FORMAT(31H0DIAGONAL ELEMENTS OF MATRIX Q1)
      WRITE(6,105)(Q1(I,I),I=1,N)
      WRITE(6,117)
117 FORMAT(31H0DIAGONAL ELEMENTS OF MATRIX Q2)
      WRITE(6,105)(Q2(I,I),I=1,M)

C
C   ESTIMATE THE STATIONARY VALUES OF THE MATRICES P(T+1|T), S(T) AND L(T)
C   FOR THE REAL SYSTEM AND ALSO ESTIMATE THE MINIMAL EXPECTED LOSS
C   PER TIME STEP.
C

      DO 50 I=1,N
      DO 50 J=1,N
      PP(I,J)=P(I,J)
50  SS(I,J)=S(I,J)
      LOOPS=0
      LOOPPP=0
51  LOOPPP=LOOPPP+1
      DO 52 I=1,N
      DO 52 J=1,N
52  R(I,J)=PP(I,J)
      CALL TRANSP(F,10,N,N,FF,10)
      CALL TRANSP(T,10,L,N,TT,10)
      CALL LK(FF,N,10,TT,L,10,R1,R2,PP,EL)
      DO 53 I=1,N
      DO 53 J=1,N
53  R(I,J)=R(I,J)-PP(I,J)
      CALL NORM(R,N,10,RNORM)
      CALL NORM(PP,N,10,PNORM)
      IF(RNORM-EPS*PNORM)55,55,54
54  IF(LOOPPP-100)51,55,55
55  LOOPS=LOOPS+1
      DO 56 I=1,N
      DO 56 J=1,N
56  R(I,J)=SS(I,J)
      CALL LK(F,N,10,G,M,10,Q1,Q2,SS,EL)
      DO 57 I=1,N
      DO 57 J=1,N
57  R(I,J)=R(I,J)-SS(I,J)
      CALL NORM(R,N,10,RNORM)
      CALL NORM(SS,N,10,SNORM)
      IF(RNORM-EPS*SNORM)59,59,58
58  IF(LOOPS-100)55,59,59
59  CALL MAMULT(SS,10,N,N,R1,10,N,FF,10)
      CALL TRANSP(EL,10,M,N,TT,10)
      CALL TRANSP(G,10,N,M,GG,10)
      CALL MAMULT(PP,10,N,N,TT,10,M,TP,10)
      CALL MAMULT(TP,10,N,M,GG,10,N,TT,10)
      CALL MAMULT(TT,10,N,N,SS,10,N,TP,10)
      CALL MAMULT(TP,10,N,N,F,10,N,TT,10)
      VMLN=0
      DO 60 I=1,N

```

```

55*
56*          60 VMIN=VMIN+FF(I,I)+TT(I,I)
57*          WRITE(6,118)
58*          118 FORMAT(31H0MINIMAL EXPECTED LOSS PER STEP)
59*          WRITE(6,105)VMIN
60*          WRITE(6,119)
61*          119 FORMAT(34H0TRUE STATIONARY VALUE OF MATRIX S)
62*          DO 61 I=1,N
63*          61 WRITE(6,105)(SS(I,J),J=1,N)
64*          WRITE(6,120)
65*          120 FORMAT(34H0TRUE STATIONARY VALUE OF MATRIX P)
66*          DO 62 I=1,N
67*          62 WRITE(6,105)(PP(I,J),J=1,N)
68*          WRITE(6,122)
69*          122 FORMAT(34H0TRUE STATIONARY VALUE OF MATRIX L)
70*          DO 63 I=1,M
71*          63 WRITE(6,105)(EL(I,J),J=1,N)

C
72*          DO 1 I=1,N
73*          DO 1 J=1,N
74*          1 FF(I,J)=F(I,J)
75*          DO 2 I=1,N
76*          DO 2 J=1,M
77*          2 GG(I,J)=G(I,J)
78*          DO 3 I=1,L
79*          DO 3 J=1,N
80*          3 TT(I,J)=T(I,J)
81*          DO 4 I=1,N
82*          DO 4 J=1,K
83*          4 FP(I,J)=0
84*          DO 5 I=1,L
85*          DO 5 J=1,K
86*          5 TP(I,J)=0
87*          N1=N+1
88*          DO 7 I=N1,NN
89*          DO 6 J=1,NN
90*          6 FS(I,J)=0
91*          7 FS(I,I)=1
92*          L1M=1
93*          GO TO 200
94*          71 CONTINUE
95*          NODD=19
96*          NOO=1
97*          DO 9 I=1,20
98*          DO 8 J=1,20
99*          E(I,J)=0
100*         8 D(I,J)=0
101*         9 E(I,I)=1
102*         V=0
103*         ITID=0
104*         NUT=0
105*         WRITE(6,103)
106*         103 FORMAT(55H1    TID    X(1)    X(2)    XE(1)    XE(2)    ALFA1    ALFA2    L(1,1),
107*           *56H L(1,2)    Y(1)    U(1)    P(1,1)    P(2,2)    P(3,3)    P(4,4)    S(1,1),
108*           *21H S(2,2)    V    LOOP)

C          BEGINNING OF THE LOOP
C
109*         11 CALL GLISY(F,G,T,D,X,U,Y,N,M,L,10,0)
110*         ILOG=0
111*         CALL MNODI(B1,R1,N,20,NODD,ILOG,INDD)
112*         DO 12 I=1,N
113*         12 X(I)=X(I)+B1(I)
114*         ILOGG=0

```

```

10*
11*      CALL MNODI(B2,R2,L,10,NOD,ILOGG,IND)
12*      DO 13 I=1,L
13*      13 Y(I)=Y(I)+B2(I)
C
C      FORM TS(T|T-1)
14*      DO 17 I=1,L
15*      DO 16 J=1,N
16*      16 TS(I,J)=TT(I,J)
17*      DO 17 J=N1,NN
18*      JJ=J-N
19*      17 TS(I,J)=TP(I,JJ)
C
C      ESTIMATE K(T|T-1) AND P(T|T)
20*      CALL TRANSP(TS+10,L,NN,TST,20)
21*      CALL LK(E,NN,20,TST,L,10,D,R2,P,CKT)
22*      CALL TRANSP(CKT+10,L,NN,CK,20)
C
C      ESTIMATE XE(T|T) AND ALFA(T|T)
23*      DO 18 I=1,L
24*      A(I)=0
25*      DO 171 J=1,N
26*      171 A(I)=A(I)+TT(I,J)*XE(J)
27*      18 A(I)=Y(I)-A(I)
28*      DO 181 I=1,NN
29*      B(I)=0
30*      DO 181 J=1,L
31*      181 B(I)=B(I)+CK(I,J)*A(J)
32*      DO 19 I=1,N
33*      19 XE(I)=XE(I)+B(I)
34*      DO 20 I=1,K
35*      II=I+N
36*      20 ALFA(I)=ALFA(I)+B(II)
C
C      UPDATING OF THE MATRICES CONTAINING UNKNOWN PARAMETERS
37*      L1M=0
38*      GO TO 200
39*      131 CONTINUE
C
C      FORM FS(T|T)
40*      DO 15 I=1,N
41*      DO 14 J=1,N
42*      14 FS(I,J)=FF(I,J)
43*      DO 15 J=N1,NN
44*      JJ=J-N
45*      15 FS(I,J)=FP(I,JJ)
C
C      ESTIMATE P(T+1|T)
46*      CALL TRANSP(FS,20,NN,NN,FST,20)
47*      CALL MAMULT(FS,20,NN,NN,P,20,NN,H,20)
48*      CALL MAMULT(H,20,NN,NN,FST,20,NN,P,20)
49*      DO 172 I=1,NN
50*      DO 172 J=1,NN
51*      172 P(I,J)=P(I,J)+R1(I,J)
C
C      ESTIMATE XE(T+1|T) --- ALFA(T+1|T)=ALFA(T|T)
52*      DO 184 I=1,N
53*      A(I)=0
54*      C(I)=0
55*      DO 182 J=1,M
56*      182 A(I)=A(I)+GG(I,J)*U(J)
57*      DO 183 J=1,N
58*      183 C(I)=C(I)+FF(I,J)*XE(J)
59*      184 XE(I)=C(I)+A(I)
C

```

```

14*      SUBROUTINE FOR OPTIMIZING CONTINUOUS UNKNOWN PARAMETERS
15*      LIM=2
16*      GO TO 200
17*      165 CONTINUE
C
18*      C   ESTIMATE L(T+1)
19*      LOOP=0
20*      21 LOOP=LOOP+1
21*      DO 22 I=1,N
22*      DO 22 J=1,N
23*      22 R(I,J)=S(I,J)
24*      CALL LK(FF,N,10,GG,M,10,Q1,Q2,S,EL)
25*      DO 23 I=1,N
26*      DO 23 J=1,N
27*      23 R(I,J)=R(I,J)-S(I,J)
28*      CALL NORM(R,N,10,RNORM)
29*      CALL NORM(S,N,10,SNORM)
30*      IF(RNORM-EPS*SNORM)25,25,24
31*      24 IF(LOOP=LOP)21,25,25
32*
C
33*      C   ESTIMATE U(T+1)
34*      25 DO 26 I=1,M
35*          U(I)=0
36*          DO 26 J=1,N
37*          26 U(I)=U(I)+EL(I,J)*XE(J)
38*
C
39*      C   INCREASE THE VALUE OF THE LOSSFUNCTION
40*      W=0
41*      DO 28 I=1,N
42*          A(I)=0
43*          DO 27 J=1,N
44*          27 A(I)=A(I)+Q1(I,J)*X(J)
45*          28 W=W+A(I)*X(I)
46*          VV=0
47*          DO 30 I=1,M
48*              A(I)=0
49*              DO 29 J=1,M
50*              29 A(I)=A(I)+Q2(I,J)*U(J)
51*              30 VV=VV+A(I)*U(I)
52*              V=V+W+VV
53*
C
54*      C   WRITE THE RESULT
55*      ITID=ITID+1
56*      NUT=NUT+1
57*      IF(NUT=NOUT)42,39,39
58*      42 IF(ITID=20)43,43,40
59*      39 NUT=0
60*      43 CONTINUE
61*      WRITE(6,102)ITID,X(1),X(2),XE(1),XE(2),ALFA(1),ALFA(2),EL(1,1)
62*      *,EL(1,2),Y(1),U(1),P(1,1),P(2,2),P(3,3),P(4,4),S(1,1)
63*      *,S(2,2),V,LOOP
64*      102 FORMAT(1X,I5,14F7.3,2F6.3,E13.8,I3)
65*      40 IF(ITID-MTID)11,41,41
66*      41 CONTINUE
67*      STOP
68*      END

```

8.2. Subroutinen LK

Följande subrutiner används: MAMULT, TRANSP, DESYM och SOLVS.

```

1*      SUBROUTINE LK(F,N,IN,G,M,IM,Q1,Q2,S,EL)
2*      DIMENSION F(IN,1),G(IN,1),Q1(IN,1),Q2(IM,1),S(IN,1),EL(IM,1),
3*      THIS SUBROUTINE ITERATES THE RICCATI EQUATION ONE STEP AND ESTIMATES
4*      THE LINEAR FEED-BACK MATRIX L FOR THE SYSTEM
5*      X(T+1)=F*X(T)+G*U(T)
6*      N=NUMBER OF STATE VARIABLES
7*      IN=DIMENSION PARAMETER
8*      M=NUMBER OF INPUTS
9*      IM=DIMENSION PARAMETER
10*     Q1=SYMMETRIC MATRIX ASSOCIATED WITH X IN LOSS FUNCTION
11*     Q2=SYMMETRIC MATRIX ASSOCIATED WITH U IN LOSS FUNCTION
12*     S=S(T+1); S IS RETURNED AS S(T)
13*     EL=L(T)
14*
15*      *FT(20,20),GT(10,20),A(10,20),B(10,20),C(10,10),E(10,10),X(10,10),
16*      *D(20,10),Y(20,20),Z(20,20),H(10,10),Q(20,20)
17*      CALL TRANSP(F,IN,N,N,FT,20)
18*      CALL TRANSP(G,IN,N,M,GT,10)
19*      CALL MAMULT(GT,10,M,N,S,IN,N,A,10)
20*      CALL MAMULT(A,10,M,N,F,IN,N,B,10)
21*      CALL MAMULT(A,10,M,N,G,IN,M,C,10)
22*      DO 3 I=1,M
23*      DO 3 J=1,M
24*      3 C(I,J)=C(I,J)+Q2(I,J)
25*      DO 5 I=1,M
26*      DO 4 J=1,M
27*      4 E(I,J)=0
28*      5 E(I,I)=1
29*      CALL DESYM(C,H,M,1,E-7,IRANK,10)
30*      CALL SOLVS(H,E,X,M,M,10)
31*      CALL MAMULT(X,10,M,M,B,10,N,EL,IM)
32*      CALL TRANSP(B,10,M,N,D,20)
33*      CALL MAMULT(D,20,N,M,EL,IM,N,Y,20)
34*      CALL MAMULT(FT,20,N,N,S,IN,N,Z,20)
35*      CALL MAMULT(Z,20,N,N,F,IN,N,Q,20)
36*      DO 6 I=1,N
37*      DO 6 J=1,N
38*      6 S(I,J)=Q(I,J)+Q1(I,J)-Y(I,J)
39*      RETURN
40*      END

```

8.3. Subroutines MAMULT och TRANSP

```

1*      SUBROUTINE MAMULT(A,IA,M,N,B,IB,L,C,IC)
2*      C=A*B
3*      C=MATRIX OF ORDER M*N
4*      C=B=MATRIX OF ORDER N*L
5*      C=C=MATRIX OF ORDER M*L
6*      A+B AND C MUST BE 2-DIMENSIONAL FIELDS
7*      DIMENSION A(IA+1),B(IB+1),C(IC+1)
8*      DO 1 I=1,M
9*      DO 1 J=1,L
10*      C(I,J)=0
11*      DO 1 K=1,N
12*      1 C(I,J)=C(I,J)+A(I,K)*B(K,J)
13*      RETURN
14*      END

```

```

1*      SUBROUTINE TRANSP(A,IA,M,N,B,IB)
2*      DIMENSION A(IA+1),B(IB+1)
3*      C=A=MATRIX OF ORDER M*N
4*      C=B=THE TRANSPONATE OF A
5*      C=A IS NOT DESTROYED
6*      C
7*      DO 1 I=1,N
8*      DO 1 J=1,M
9*      1 B(I,J)=A(J,I)
10*      RETURN
11*      END

```