

JÄMFÖRELSE MELLAN KALMAN-  
OCH KOMPLEMENTÄR FILTRERING.

BO KARLSSON

GUNNAR SKOGLUND

RAPPORT RE-100, november 1971

TILLHÖR REFERENSBIBLIOTEKET  
UTLÄNAS EJ

JÄMFÖRELSE MELLAN KALMAN-OCH KOMPLEMENTÄR FILTRERING

UTFÖRT

AV

BO KARLSSON

GUNNAR SKOGLUND

HANDLEDARE: UNIV. LEKTOR B. WITTENMARK

### Sammanfattning.

Examensarbetet avser jämföra två metoder vid filtrering av stokastiska processer. En optimal metod, Kalmanfiltrering, och en mer heuristisk metod, komplementär filtrering, med filter av första ordningen. Undersökningen jämför estimationsfelens varianser och filtrens känslighet för olika parametervariationer. Det undersökta exemplet är valt så att det lämpar sig för den heuristiska metoden. Vi använder endast tidskonstanta filter.

Resultatet kan sägas vara att Kalmanfiltret i stor sett ger ett tio procent bättre värde på estimationsfelens varians. Undantag finns. Ett hypotetiskt fall då signalbrusförhållandet är stort och signalen är en ickestationär process kan man estimera betydligt bättre med ett <sup>fixt</sup>komplementärt filter än med ett <sup>fixt</sup>Kalmanfilter. Parameterkänsligheten kan sägas vara lika för de båda filtertyperna. Med plus för Kalmanfiltret i något fall.

### Abstract

The work intends to give a comparison between two filtering techniques. One optimal method, Kalman filtering technique, and another, more heuristic method, complementary filtering technique, using filters of first order. In the examination we have compared the variances of the estimation errors and the sensibility of the filters for different kinds of parameter variations. The examined example is suitable for the heuristic method. We have only used steady-state filters.

The result mainly is that the Kalman filtering technique attains a ten per cent better value concerning the variance of the estimation error. There are exceptions. A hypothetical case when the signal/noise relation is big and the signal is a nonstationary process, we can estimate better with a complementary filter than with a constant Kalman filter. We can say that the parameter sensibility is the same for both types of filters. The Kalman filter is better in some case.

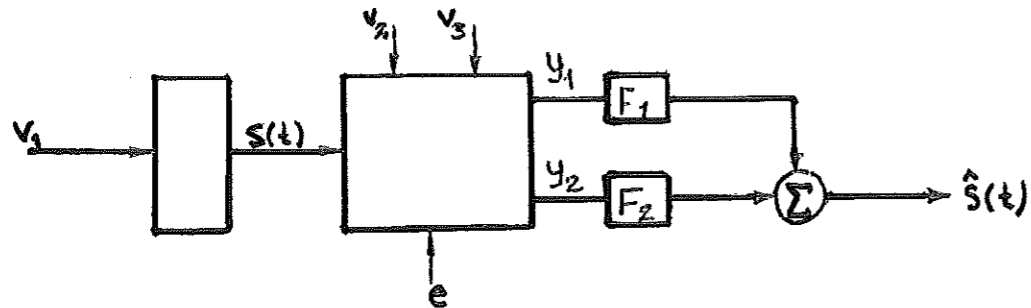
## INNEHÅLL

	Sid.
1. INLEDNING .....	1
2. PROBLEMFÖRMULERING .....	3
3. KOMPLEMENTÄR FILTRERING .....	6
4. KALMANFILTRERING .....	8
5. JÄMFÖRELSE MELLAN KALMANFILTRERING OCH KOMPLEMENTÄR FILTRERING .....	10
Parameterkänslighet .....	15
När är komplementära filter bra ? .....	22
APPENDIX .....	25

Är något av filtren mer parameterkänsligt än det andra?  
När är de komplementära filtren lämpliga?

## 2. Problemformulering.

Låt följande fysikaliska modell vara given:



Vårt problem är nu att på basis av  $y_1(t)$  och  $y_2(t)$  bestämma bästa möjliga stationära uppskattning  $S(t|y(t))$ . Låt oss kalla denna uppskattning för  $\hat{S}(t)$ .

Givet är överföringsfunktionen från  $v_1$  till  $y_1$  och  $y_2$  samt statistiken hos  $v$  och  $e$ .

Signalen  $y_1$  innehåller  $S(t)$  samt lågfrekvent brus och rent mätbrus.

Signalen  $y_2$  innehåller förutom  $S(t)$ , högfrekvent brus och rent mätbrus.

Eftersom vi nu känner strukturen på systemet och statistiken hos bruset, kan vi bestämma  $F_1$  och  $F_2$  med hjälp av Kalmanteori. Filtren  $F_1$  och  $F_2$  blir tidsvariabla, men konvergerar mot konstanta filter, de stationära Kalmanfiltren.

Ett annat problem är att bestämma filter av lägre ordning som ger en god uppskattning av  $S(t)$ . Dessa är i det kontinuerliga fallet lätta att implementera och i det diskreta fallet får vi kortare räknetider. Till modell för filtren av lägre ordning har vi använt de i inledningen nämnda komplementära filtren.

Följande system är givet:

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} \exp(-0,2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-1,8) \end{bmatrix} x(t) + v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + e(t)$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0,3625 & 0 & 0 \\ 0 & 0,032 & 0 \\ 0 & 0 & 2,818 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = 0,0018 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{12} = 0$$

Ovanstående system kan tänkas vara den samplade motsvarigheten till ett system  $S(A,B,C,D)$  där

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

och med samplingsintervallet  $T = 0,2$  s.

Valet av parametrar i  $R_1$  kan förefalla underligt med tanke på antalet decimaler och valet av dessa. Detta förklaras av att systemet är en översättning av ett tänkt kontinuerligt system.



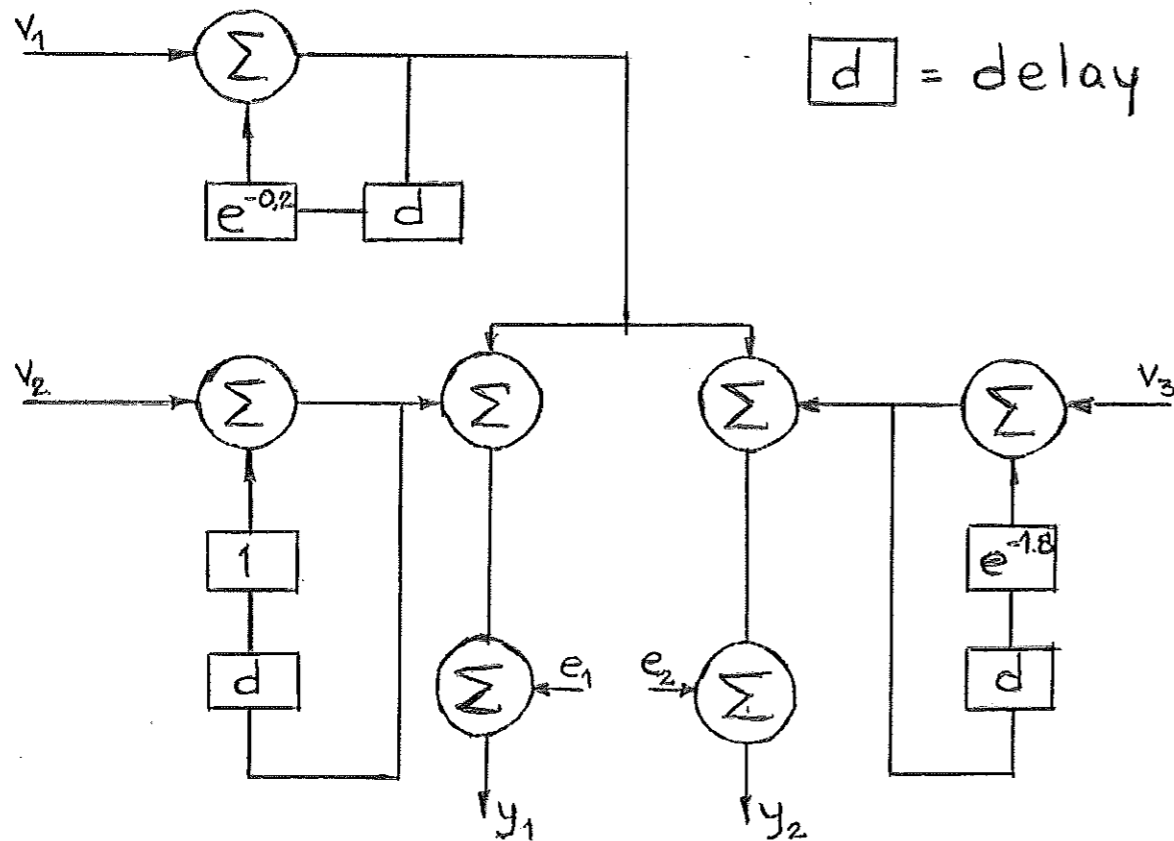
Valet av samplingsintervallet  $T$  bestäms av i det kontinuerliga systemet förekommande högsta frekvens.

Tredje komponenten  $x_3(t) = \frac{v_3}{s+9}$ , där  $v_3$  är kontinuerligt vitt brus, innehåller högsta frekvenser av intresse. Härav fås  $\omega_{\max} \approx 9$  rad/s.

$1/T > 2f_{\max}$  detta medför  $T < 1/2f_{\max} = \pi/\omega_{\max}$ .

Vi får att  $T < \pi/9 \approx 0,3$ .

Vi väljer  $T = 0,2$  s.



Undersökningen avser jämförelse mellan stationär Kalmanfiltrering och komplementär filtrering med avseende på estimationfelets varians och filtrens känslighet för parametervariationer.

### 3. Komplementär filtrering

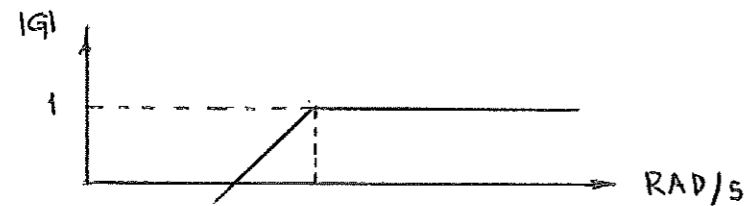
Vi skall nu försöka rekonstruera  $x_1(t)$  ur  $y$  med hjälp av komplementära filter.

$y_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + e_1(t)$  och innehåller således onyttigt lågfrekvent brus och mätbrus.

$y_2(t) = x_1(t) + x_3(t) + e_2(t)$  och innehåller onyttigt högfrekvent brus plus mätbrus.

Vi angriper problemet genom att tänka "kontinuerligt". Ett kontinuerligt filter av första ordningen som "silar bort" lågfrekvens är följande filter.

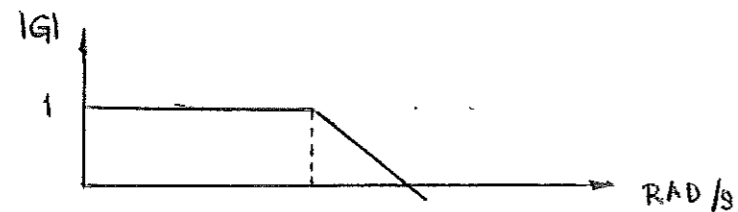
Bode-diagram:



Filtret har överföringsfunktionen  $\frac{s}{s+d}$ .

På motsvarande sätt silar man bort högfrekvens med filtret:

Bode-diagram:



Om vi nu hade haft ett kontinuerligt system, så skulle filtrering med första ordningens filter få följande utseende.

$$\hat{x}_1(t) = k_1 \frac{s}{s+d} y_1(t) + k_2 \frac{d}{s+d} y_2(t)$$

Här finns alltså tre parametrar att variera på  $k_1$ ,  $k_2$  och  $d$ .

Vi försöker nu sampla ovanstående system.

Vi får då med samplingsintervallet  $T$ .

1.  $\frac{s}{s+d}$  ger efter sampling  $\frac{z-1}{z-\exp(-dT)} = 1 - \frac{1-\exp(-dT)}{z-\exp(-dT)}$
2.  $\frac{d}{s+d}$  ger efter sampling  $\frac{1-\exp(-dT)}{z-\exp(-dT)}$

Vi kallar de nu erhållna filtren för  $G_1$  och  $G_2$ .

Lägg märke till att  $G_1$  har en direktterm.

Bestämning av optimalt komplementärt filter.

Om vi använder den diskreta modellen  $\hat{x}_1(t) = k_1 G_1 y_1 + k_2 G_2 y_2$  vid rekonstruktionen av  $x_1(t)$  frågar man sig hur man ska välja  $k_1$  och  $k_2$  för att få minimalt fel. Vi vill ha så enkelt filter som möjligt att arbeta med och sätter därför  $k_1 = k_2$ . Vi har använt denna modell och jämfört optimala stationära Kalman-rekonstruktionen i olika fall för att utröna när det valda komplementära filtret är bra, hur bra det är och när det eventuellt är dåligt. För vårt ursprungliga system har vi beräknat  $k = k_1 = k_2$  och  $a = \exp(-dT)$  med hjälp av minimeringsprogram på dator.

Vi fick  $k \approx 0,75$  och  $a = \exp(-dT) = 0,91$ .

Att utföra denna minimering är möjligt, ty vi känner överföringsfunktionen från vitt brus till estimationsfel. Det blir rättare sagt en summa överföringsfunktioner från okorrelerat vitt brus till estimationsfelet.

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 - x_1 &= (k-1) \frac{v_1}{z - \exp(-0,2)} + \frac{k v_2}{z - a} + \frac{k(1-a)v_3}{(z-a)(z - \exp(-1,8))} + \\ &+ \frac{k(z-1)e_1}{z-a} + \frac{k(1-a)e_2}{z-a} \end{aligned}$$

där  $v_1, v_2, v_3, e_1, e_2$  enligt förutsättningarna är okorrelerade vita brus. Okända parametrar är här  $k$  och  $a$ . om vi känner överföringsfunktionerna på ovanstående sätt, kan vi med hjälp av standardprogram minimera variansen av  $\hat{x}_1 - x_1$  med avseende på parametrarna  $k$  och  $a$ .

#### 4. Kalmanfiltrering.

Vid konventionell Kalmanfiltrering (Se K. J. Åström: Introduction to Stochastic Processes sid 243) <sup>fås</sup> då följande systemekvationer är givna.

$$\left. \begin{aligned} x(t+1) &= \phi x(t) + v(t) \\ y(t) &= \Theta x(t) + e(t) \end{aligned} \right\} \text{Systemekvationer}$$

$$\hat{x}(t+1|t) = \phi \hat{x}(t|t-1) + K(t)(y(t) - \Theta \hat{x}(t|t-1))$$

$$\text{Där } K(t) = \phi P(t) \Theta^T (\Theta P(t) \Theta^T + R_2)^{-1} \text{ och}$$

$$P(t+1) = (\phi - K(t)\Theta)P(t)\phi^T + R_1$$

$$R_1 = E v(t) v^T(t)$$

$$R_2 = E e(t) e^T(t)$$

$$R_{12} = E v(t) e^T(t) = 0$$

$$P(t) = E(\hat{x}(t) - x(t))(\hat{x}(t) - x(t))^T$$

Detta ger ett estimat i tidpunkten  $t$  som är baserat på mätvärdena upp till tidpunkten  $t-1$ . Detta filtreringsätt kallas i fortsättningen för Kalman I.

Eftersom vi skall jämföra Kalmanfiltrering med komplementär filtrering, kan vi ej använda ovanstående filterekvationer, ty vi har i filterekvation 1, för komplementära filtren en direktterm, vilket innebär att vi använder information upp till tidpunkten  $t$ , för att estimeratillståndet i tidpunkt  $t$ . Detta medför att vi måste modifiera Kalmanekvationerna en smula. Vi vill alltså ha ett optimalt estimat av  $x(t)$  baserat på mätningar upp till tidpunkten  $t$ .

Detta leder till följande ekvationer:

$$\hat{x}(t+1) = \phi \hat{x}(t) + K(t+1)(y(t+1) - \theta \phi \hat{x}(t))$$

Där  $K(t) = P(t) \Theta^T (R_2 + \Theta P(t) \Theta^T)^{-1}$  och

$$P(t) = \phi S(t-1) \phi^T + R_1$$

$$S(t) = P(t) - K(t) \Theta P(t)$$

$$S(t) = E \hat{x}(t|t) \hat{x}^T(t|t)$$

$$P(t) = E \hat{x}(t|t-1) \hat{x}^T(t|t-1)$$

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

Där  $P(t)$  lyder samma ekvationer som i Kalman I. Detta system benämnes Kalman II.

$K(t)$  varierar med tiden och kommer att ge upphov till ett tidskontinuerligt filter, men konvergerar mot ett stationärt värde.

Med hjälp av detta stationära värde fås ett tidskonstant filter. Lägga märke till att  $K(t)$  ej följer samma ekvationer i Kalman I som i Kalman II.

Med hjälp av standardprogram beräknas det stationära  $K$  i Kalman I. Detta sker på så sätt att  $P(t)$  itereras fram med  $R_1$  som begynnelsevärde enligt ekvationerna för Kalman I. Därefter framräknas  $K(t)$  med hjälp av  $P(t)$  enligt givna ekvationer. Vårt  $K(t)$  till Kalman II fås genom att multiplicera  $K(t)$  från Kalman I från vänster med  $\phi^{-1}$ . (Standardprogram se institutionens programbibliotek.)

5. Jämförelse mellan Kalman- och Komplementär filtrering.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \exp(-0.2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-1.8) \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.3625 & 0 & 0 \\ 0 & 0.032 & 0 \\ 0 & 0 & 2.818 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = 0.0018 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{12} = 0$$

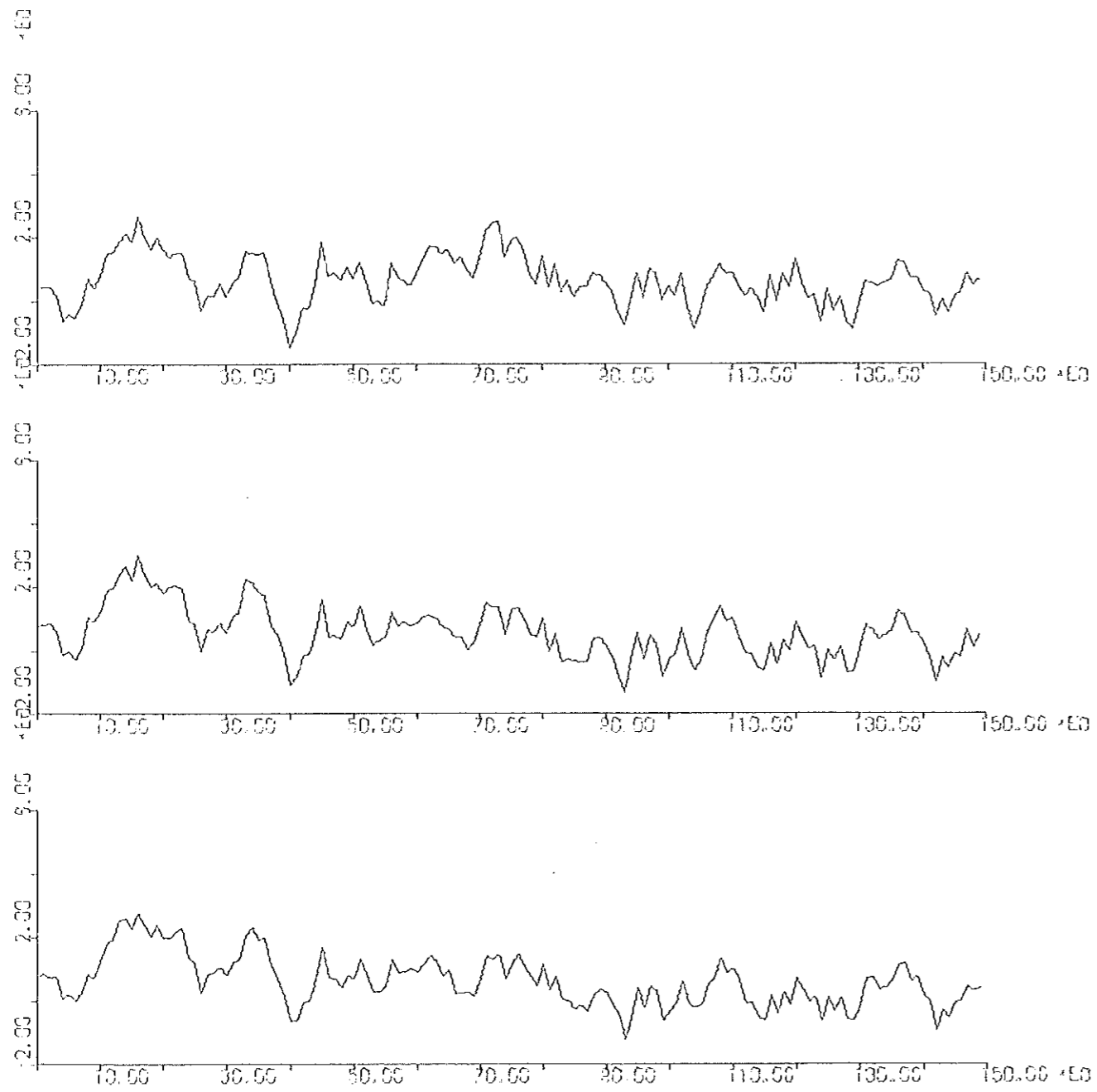
De något konstiga värdena på parametrarna förklaras av att systemet är en direkt "översättning" från ett kontinuerligt system.

Detta system kallas i fortsättningen för det ursprungliga. Ovanstående exempel gav vid simulering ungefär samma resultat på estimatsfelets varians vid både Kalman- och komplementär filtrering.

Kalman filtrering ger ungefär ett tio procent bättre värde på estimatsfelets varians. (Se tabell på sidan 18.)

Vid simulering har vi kört ut 400 sample per försök och för att undvika störningar från insvängningsförlopp har vi beräknat estimatsfelets varians ur 200 sample. Mellan sample nr. 200 och sample nr. 400.

I vårt försök har komplementära filtret parametrarna  $k=0.75$  och  $a=0.90$ . Det komplementära filtret är optimerat m.a.p. ovan beskrivna system.

**DIAGRAM 1.**

Överst: Den verkliga signalen. I mitten: Kalmanestimatet.

Underst: Det komplementära estimatet.

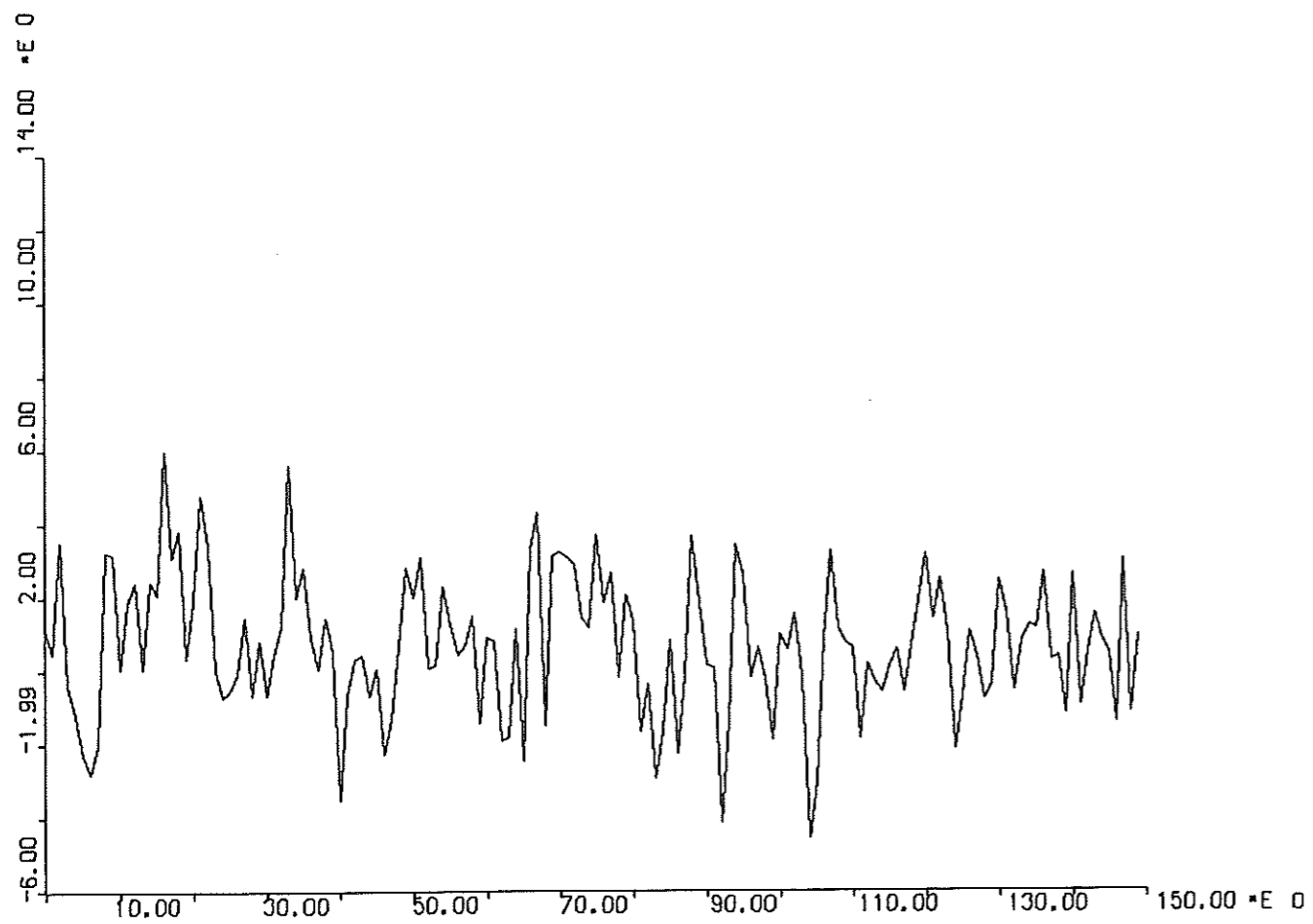
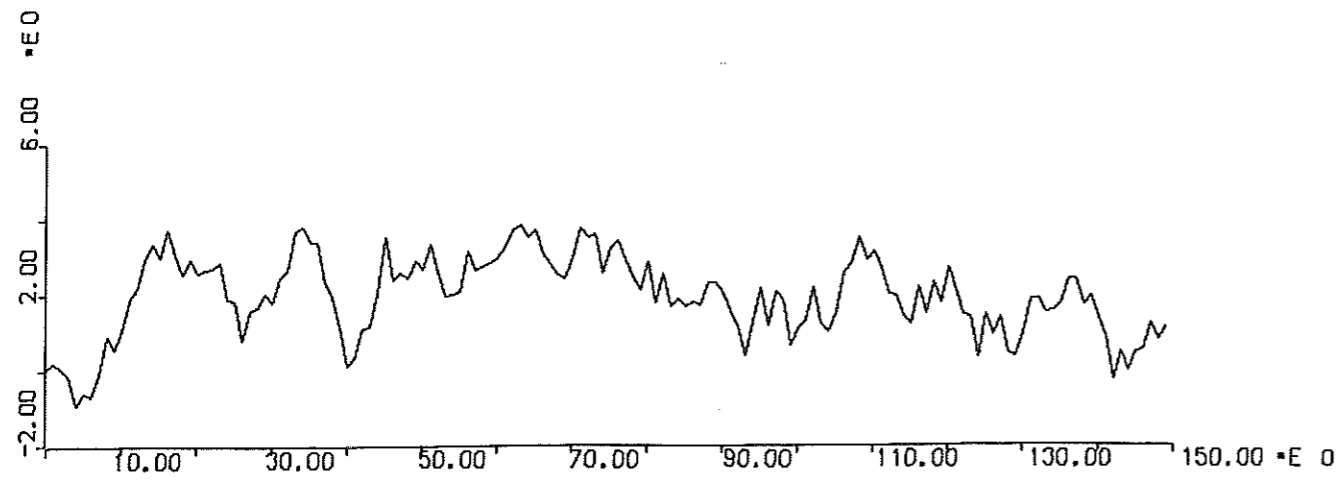


DIAGRAM 2.

Överst: Den signal som innehåller mest lågfrekvens=Y(1).

Underst: Den signal som innehåller mest högfrekvens=Y(2).



I diagram 1 har den signal som skall estimeras plottats tillsammans med Kalmanestimat och komplementärt estimat. I diagram 2 finns de båda signalerna ur vilka vi med hjälp av filtren får våra estimat. Förlustfunktionerna har dokumenterats i diagram 3. Simulering av systemen har skett på dator med ett program vars flödesschema finns i appendix.

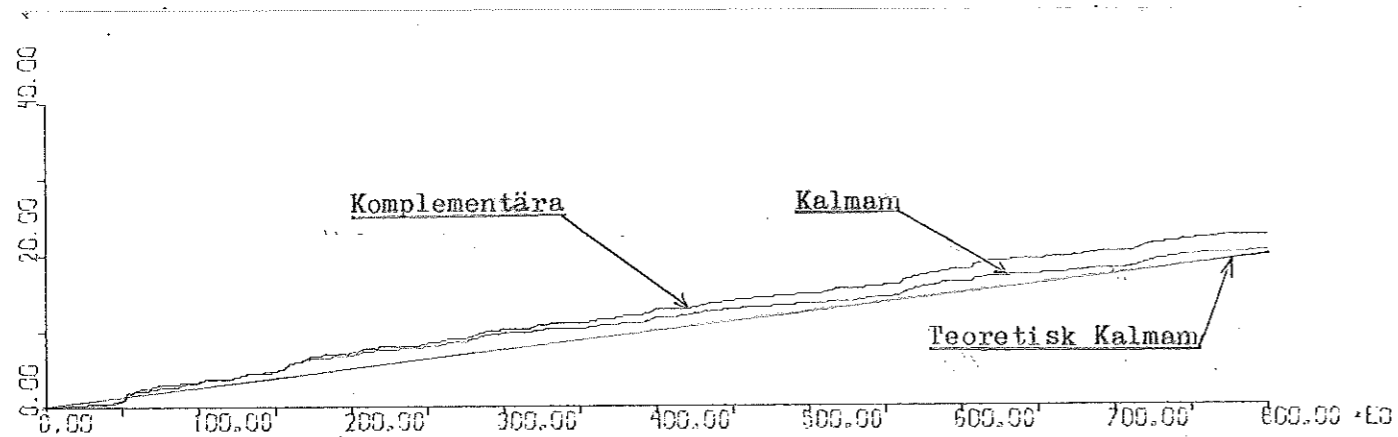


DIAGRAM 3. Förlustfunktionerna.

När är de komplementära filtren dåliga?

Vi har för en serie system beräknat estimatsfelets varians dels med Kalmanteori dels med optimering av komplementära filter med hjälp av dator enligt standardprogram.

Vi ändrar på storleken av störningarna  $x_2$  och  $x_3$  och undersöker hur de optimala teoretiska varianserna ser ut för de båda filtertyperna.

Problem uppstår då vi skall förklara vad vi menar med en "stor" störning därför att integrerat vitt brus, vilket förekommer som störning, alltid har oändlig varians. Vi gör där följande definition av stor resp. liten störning. Våra signaler ur vilka vi skall rekonstruera (se också avsnitt om komplementära filter):

$$y_1 = x_1 + x_2 + e_1 \quad x_2 \text{ störning}$$

$$y_2 = x_1 + x_3 + e_2 \quad x_3 \text{ störning}$$

$G_1$  och  $G_2$  är de komplementära filtren.

$$\hat{x}_1 = G_1 y_1 + G_2 y_2 = (G_1 + G_2) x_1 + G_1 x_2 + G_2 x_3 + G_1 e_1 + G_2 e_2$$

Välj komplementära filter så att  $\text{Var}(G_1 x_1) \ll \text{Var}(G_2 x_1)$  genom lämpligt vald parameter d. Med uttalandet att  $x_2$  är en större

störning än  $x_3$  menar vi att  $\text{Var}(G_1 x_2) > \text{Var}(G_2 x_3)$  dvs. om  $\text{Var}(G_1 x_2) \approx \text{Var}(G_2 x_3)$  har vi lika stora störningar på signalerna ur vilka vi vill göra vår rekonstruktion (Vi bortser från  $e_1$  och  $e_2$ ).

Resultaten finns i nedanstående tabell.

System/ ändring	Optimal teoretisk Kalman varians	Optimal teoretisk kompl. varians	k-värde	$\text{Var}(G_1 x_2)$	$\text{Var}(G_2 x_3)$
Urspr.	0.2509	0.2750	0.75	0.102	0.115
Rl <sub>22</sub> =4xursp.	0.4032	0.4508	0.59	0.408	0.115
Rl <sub>22</sub> =8 --#--	0.4606	0.5494	0.52	0.816	0.115
Rl <sub>22</sub> =16 --#--	0.5444	0.6576	0.43	1.632	0.115
Rl <sub>22</sub> =32 --#--	0.5996	0.7571	0.35	3.264	0.115
Rl <sub>22</sub> =64 --#--	0.6244	0.8536	0.28	6.528	0.115
Rl <sub>33</sub> =4xursp.	0.3625	0.4382	0.60	0.102	0.460
Rl <sub>33</sub> =8 --#--	0.4076	0.5277	0.50	0.102	0.920
Rl <sub>33</sub> =16 --#--	0.4260	0.6241	0.40	0.102	1.840
Rl <sub>33</sub> =32 --#--	0.4432	0.7115	0.31	0.102	3.680
Rl <sub>33</sub> =64 --#--	0.4479	0.7952	0.22	0.102	7.360

OBS.  $G_1$  och  $G_2$  är hela tiden samma filter vid jämförelse mellan spalt 5 och 6 enligt definition av stor och liten störning.  $\text{Var}(G_1 x_1) \approx \text{Var}(G_2 x_1) \approx 0.02$ .

Ur tabellen framgår att vår modell av komplementära filter ger ett betydligt sämre resultat jämfört med motsvarande Kalmanfilter, om vi har en stor störning på ena signalen, ur vilken vi rekonstruerar, och en liten störning på den andra. Vidare ser vi att komplementära filtrets förstärkningsparameter  $k$  blir liten då vi har en stor störning med. Detta indikerar att vi utnyttjar lite information. Förmodligen skulle vi kunna få ett bättre estimat om vi endast utnyttjade den signal med liten störning på.

#### Anmärkning

I det följande jämförs ibland teoretiska och simulerade värden på varianser. Då de simulerade varianserna är baserade på 200 värden betyder det att de har en relativt stor osäkerhet. Detta medför att det ibland kan skilja en del mellan teoretiska och simulerade värden.

### Parameterkänslighet.

Antag att vi inte känner statistiken fullständigt i vårt system. Vi beräknar ett Kalmanfilter och ett komplementärt filter grundat på våra antagande om systemets statistik. Vi frågar oss nu hur känsligt är det komplementära filtret i jämförelse med Kalmanfiltret för variationer i systemets statistik. Vi har därför undersökt känsligheten hos de båda filtertyperna för variationer i varianser och brussammansättning i de olika signalerna.

Detta tillgick på så sätt att vi använde det stationära Kalmanfiltret avpassat till system 1 (ursprungliga systemet) och komplementära filtret avpassat till samma system. Vi har där- efter ändrat på frekvenssammansättningen eller varianserna i det brusgenererande systemet, simulerat systemet och estimerat bl.a. med hjälp av Kalmanfiltret hörande till detta system. Detta estimat har vi jämfört med dels ett estimat erhållet med hjälp av Kalmanfiltret hörande till det ursprungliga systemet dels ett annat estimat erhållet med hjälp av komplementära filtret hörande till ursprungliga systemet. Det till systemet hörande Stationära Kalmanfiltret kallas i tabellrubrikerna för det optimala Kalmanfiltret. Kalmanfiltret och det komplementära filtret hörande till det ursprungliga systemet kallas i tabellrubriker fixt Kalmanfilter respektive fixt komplementärt filter.

Två typer av parametervariationer har undersökts.

1. Tillståndsvariablernas brussammansättning har ändrats med bibehållande av varianser.
2. Tillståndsvariablerna varianser har ändrats med bibehållande av brussammansättningen.

Båda typerna av parametervariationer illustreras med exempel.

Exempel 1.Ursprungliga systemet:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0,8187 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1653 \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0,3625 & 0 & 0 \\ 0 & 0,032 & 0 \\ 0 & 0 & 2,82 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0,0018 & 0 \\ 0 & 0,0018 \end{bmatrix}$$

Vi vill nu ändra tillståndens brussammansättning och bibehålla varianserna konstanta.

Om vi ändrar  $x_1$  - komponentens brussammansättning innebär detta att vi får ändra på  $\Phi_{11}$  och för att hålla variansen hos  $x_1$  konstant måste också  $R_{111}$  ändras. Ty antag att vi ändrar  $\Phi_{11}$  från 0,8187 till 0,4 så medför detta att  $x_1$  ändras från

$$\frac{v_1}{z - 0,8187} \quad \text{till} \quad \frac{v_1}{z - 0,4} \quad \text{och variansen av } x_1 \text{ från}$$

$$\frac{\text{Var}(v_1)}{1 - 0,8187^2} \quad \text{till} \quad \frac{\text{Var}(v_1)}{1 - 0,4^2}$$

Av ovanstående torde framgå att  $R_{111}$  - komponenten skall ändras om variansen på  $x_1$  skall hållas konstant.

$$R_{111}(t) = \text{Var}(v_1(t)) = E v_1 v_1 = \text{konstant.}$$

Vi får vårt nya system.

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1653 \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1^1 = \begin{bmatrix} 0,92 & 0 & 0 \\ 0 & 0,032 & 0 \\ 0 & 0 & 2,82 \end{bmatrix}$$

$$R_2^1 = \begin{bmatrix} 0,018 & 0 \\ 0 & 0,018 \end{bmatrix}$$

Ändrade parametrar och erhållna resultat finns dokumenterade i olika tabeller. Tabellerna kräver en liten förklaring.

Vänstra kolumnen innehåller de ändringar som har gjorts i förhållande till det ursprungliga systemet.

#### EXEMPEL

Ursprungliga systemet :

$$\begin{bmatrix} 0,8187 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1653 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{33} \end{bmatrix}$$

Om det i tabellen står  $\Phi_{11} = 0,2$  så innebär det att  $\Phi_{11}$  ändrats från 0,8187 till 0,2. På motsvarande sätt kan ändringar i  $R_1$  - matrisen införas. I de försökda både  $\Phi$  - matrisen och  $R_1$  - matrisen har ändrats har endast ändringen i  $\Phi$  - matrisen angivits. Detta påpekas särskilt för varje tabell, det är aktuellt. Övrigt om tabellernas utformning torde framgå av respektive tabell.

Ändring av frekvenssammansättningen, med bibehållande av variansen, hos den signal vi vill estimeras. Estimationsfelens varianser för respektive filter och system.

(OBS. Erforderlig ändring av  $R_{111}$  för bibehållandet av konstant varians har ej angivits.)

System/ ändring.	Optimala Kalmanfilter		Fixa filter (Simulerade)	
	Teoretiskt värde	Simulerat värde	Kalmanfilter	Komplementärt
$\phi_{11} = 0.2000$	0,1731	0,1646	0,2293	0,2825
$\phi_{11} = 0.4000$	0,2129	0,1789	0,2306	0,2795
$\phi_{11} = 0.6000$	0,2210	0,2142	0,2351	0,2788
$\phi_{11} = 0.8000$	0,2480	0,2401	0,2415	0,2763
* $\phi_{11} = 0.8187$	0,2509	0,2422	0,2422	0,2750
$\phi_{11} = 0.8500$	0,2542	0,2538	0,2430	0,2732
$\phi_{11} = 0.9000$	0,2593	0,2474	0,2441	0,2697

\* = Ursprungliga systemet

Jämför vi nu estimationsfelen i tabellen, framgår det att det fixa Kalmanfiltret visar en bättre följsamhet med det optimala Kalmanfiltret än det fixa komplementära filtret. "Minskar" det optimala Kalmanfiltret så minskar det fixa också allt under det att det komplementära filtret ökar, och tvärt om.

En teoretisk betraktelse för det fixa komplementära filtret ger:

$$\hat{x}_1 - x_1 = (k-1) \frac{v_1}{z - \phi_{11}} + \frac{k v_2}{z - a} + \frac{k(1-a)v_3}{(z-a)(z - \exp(-1,8))} + \frac{k(z-1)e_1}{z-a} + \frac{k(1-a)e_2}{z-a}$$

Det framgår att det endast <sup>är</sup> första termens parametrar som har ändrats i tabellen ovan. Vidare skulle parametrarna ändras så

att  $E \frac{v_1}{z - \phi_{11}} \frac{v_1}{z - \phi_{11}}$  hålls konstant. Detta medför att det fixa komplementära filtret teoretiskt skulle ha gett samma estimationsfelvarians för alla system i ovanstående tabell.

Av detta försök vill vi dra slutsatsen att det komplementära filtret verkar något mer parameterkänsligt än Kalmanfiltret i aktuella parametrar. Ötvivelaktigt är dock att det fixa Kalmanfiltret ger ett bättre estimat än det fixa komplementära filtret.

Högfrekventa störningens frekvenssammansättning ändras med bibehållande av dess varians. Estimationsfelens varianser för respektive filter och system. (OBS. Erforderlig ändring av  $R_{133}$  för bibehållandet av konstant varians har ej angivits.)

System eller ändring	Optimala Kalmanfilter		Fixa filter (Simulerade)	
	Teoretiskt värde	Simulerat värde	Kalmanfilter	Komplementärt
$\phi_{33} = 0.02$	0,2279	0,2193	0,2257	0,2525
$\phi_{33} = 0.04$	0,2302	0,2216	0,2273	0,2537
$\phi_{33} = 0.08$	0,2451	0,2276	0,2306	0,2587
* $\phi_{33} = 0.16$	0,2509	0,2422	0,2422	0,2750
$\phi_{33} = 0.25$	0,2618	0,2536	0,2534	0,2896
$\phi_{33} = 0.50$	0,2607	0,2669	0,3010	0,3592

\* URSPRUNGLIGA SYSTEMET.

Det fixa Kalmanfiltret ger även här ett estimat som hela tiden är bättre än det fixa komplementära filtrets. Av tabellen att döma tycks dock ej det komplementära filtret vara mer känsligt än Kalmanfiltret för i tabellen varierade parametrar.

Om man gör det högfrekventa bruset alltför lågfrekvent, dvs  $\phi_{33} \rightarrow 1$  så ökar dock estimationsfelvarianserna rätt så mycket för det fixa Kalmanfiltret och det fixa komplementära filtret, jämfört med variansen för det optimala Kalmanfiltret. Kanske är också det komplementära filtret något känsligare än Kalmanfiltret för denna ändring. (Se fallet  $\phi_{33} = 0.50$ ).

Exempel 2.

ändra  
Vi vill nu enbart på varianserna för de olika tillstånden.

Detta kan ske genom ändring av

$R_{111}$  för ändring av  $x_1$  - komponentens varians,

$R_{122}$  för ändring av  $x_2$  - komponentens varians och

$R_{133}$  för ändring av  $x_3$  - komponentens varians.

$R_1 = E v v^T$ ,  $R_{133} = E v_3 v_3$  osv.

En reservation för  $x_2$  - komponenten, ty  $x_2$  är summerat vitt brus och har således oändlig varians. I någon mening ändrar vi dock på  $x_2$  - komponentens storlek. Detta behandlades utförligare i samband med stor resp. liten störning på sidan 13.

Ändring av störbrusens storlek. Estimationsfelens varianser för respektive system och filter.

System eller ändring	Fixa filter (Simulerade)		
	Kalman	Komplementärt $k = 0,75$	Komplementärt $k = 0,50$
$R_{122} = 0,032$	0,2422	0,2750	0,3000
$R_{122} = 0,128$	0,5950	0,5818	0,4812
$R_{122} = 0,256$	0,9447	0,9490	0,6556
$R_{122} = 0,512$	1,6751	1,6401	0,9882
$R_{133} = 2,82$	0,2422	0,2750	0,3000
$R_{133} = 11,28$	0,4220	0,5206	0,4350
$R_{133} = 22,56$	0,6416	0,8200	0,5738
$R_{133} = 45,12$	1,0550	1,3800	0,8425

Ur ovanstående tabell drages slutsatsen att det komplementära filtret ej är känsligare än Kalmanfiltret förändring i lågfrekvensstörningen men kanske något känsligare för ändring i nivån av högfrekvensstörningen. Denna känslighet hos det komplementära filtret botas om vi väljer ett lämpligt värde på förstärkningsparametern  $k$ . Bäst vore kanske att ha en varierande förstärkningsparameter som var beroende av signal-brusförhållandet.



Detta framgår om man jämför komplementärt filter dels med  $k=0.75$ , dels med  $k=0.50$  och jämför med det fixa Kalmanfiltret. Att man kan filtrera bättre med ett till systemet hörande optimalt Kalmanfilter torde framgå av senare kommande tabell. Likaså att ett komplementärt filter är olämpligt om störningen i någon mening blir större på den ena signalen. Detta har behandlats utförligare tidigare på sidan 14.

När är komplementära filter bra?

Man kan i vårt fall med fördel välja ett komplementärt filter i stället för ett Kalmanfilter då signal - brusförhållandet är så stort att det medför att det optimala komplementära filtret får en förstärkningsparameter  $k = 1$ . Detta framgår av följande tabell där vi har låtit den signal vi skall estimera bli större och större. Vi har med andra ord ökat på  $R_{111}$ .

System eller ändring.	Optimalt Kalmanfilter teoretiskt värde	Fixa filter (Simulerade)	
		Kalmanfilter	Komplementärt
$R_{111} = 0,3625$	0,2509	0,2422	0,3317
$R_{111} = 2,9000$	0,3275	0,5328	0,3317
$R_{111} = 5,8000$	0,3444	0,8229	0,3317
$R_{111} = 11,600$	0,3495	1,3702	0,3317
$R_{111} = 23,200$	0,3651	2,4251	0,3317

Att estimationsfelets varians blir konstant för det komplementära filtret vid ovanstående variansändring kan vid en första anblick verka konstigt, men är lätt att förstå om vi gör följande teoretiska överläggning. Följande filterekvation gäller för det komplementära filtret:

$$\hat{x}_1 - x_1 = (k-1) \frac{v_1}{z - \exp(-0,7)} + \frac{k v_2}{z - a} + \frac{k(1-a) v_3}{(z-a)(z - \exp(-1,8))} + \frac{k(z-1) e_1}{z-a} + \frac{k(1-a) e_2}{z-a}$$

Om  $k = 1$  framgår det av ekvationen att estimationsfelet är oberoende av hur stor signalen  $x_1$  är.

Vi kan således se att det komplementära filtret, som vid alla i ovanstående tabell angivna försök är detsamma, dvs. det är fixt, är helt okänsligt för ändring i nivån hos den signal vi vill estimeras. Det fixa Kalmanfiltret ger ett varierande och mycket sämre resultat.

Ett hypotetiskt fall där de högfrekventa och lågfrekventa störbrusen är av stationär typ och den signal vi vill estimeras är en tidsvariabel process och så "stor" att  $k = 1$  i komplementära filtret ger ett tillfredsställande estimat, så ställer sig således det komplementära tidskonstanta filtret fördelaktigt i förhållande ett tidskonstant Kalmanfilter.

Vidare kan vi välja ett komplementärt filter då följande två villkor är uppfyllda.

1. Störbrusen i de två signalerna ur vilka vi skall estimeras är "lika stora", med betydelsen av "lika stora" enligt definition i ett tidigare kapitel.

2. Då en ökning av estimationsfelets varians med ca tio procent, jämfört med den felvariansen ett Kalmanestimat skulle ge, är av mindre betydelse.

Detta stödes av följande tabell.

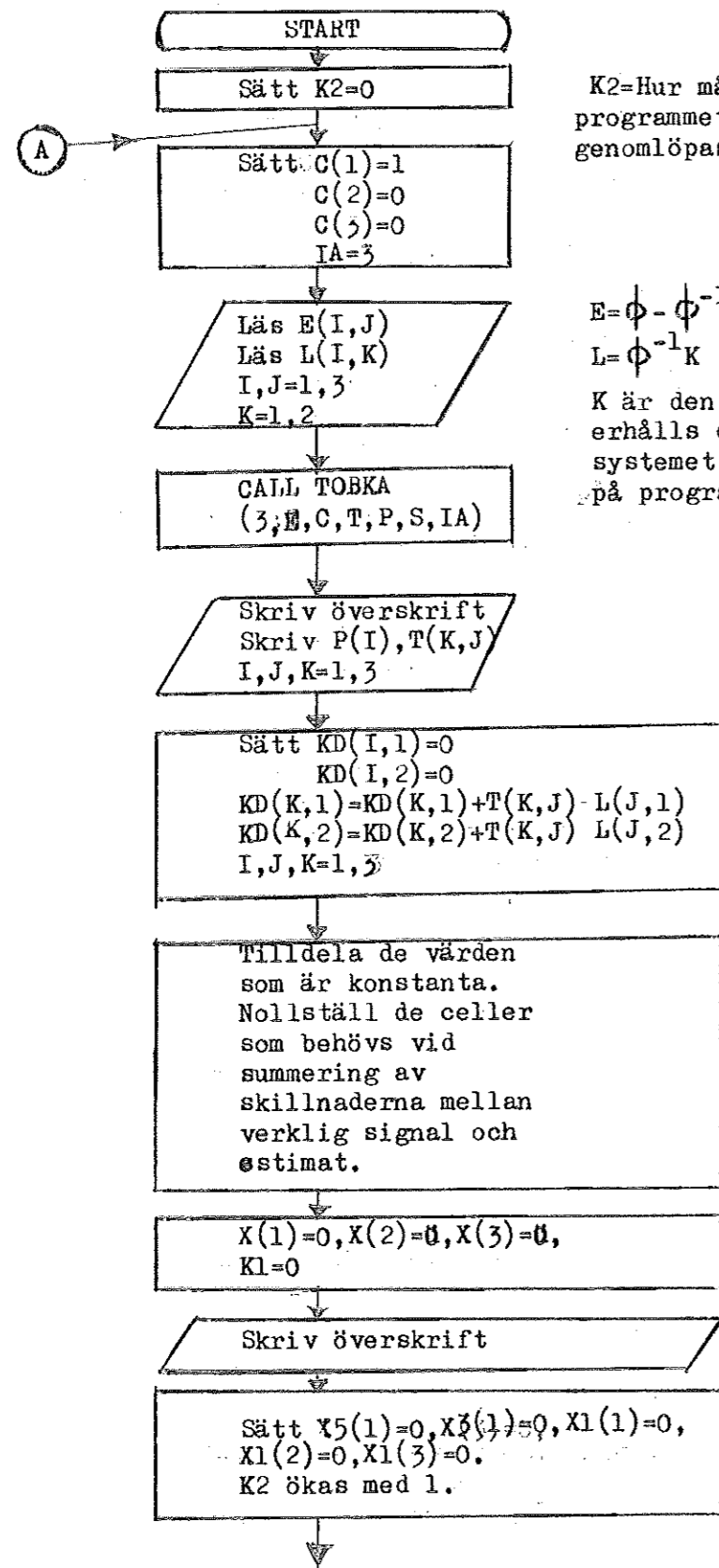
System eller ändring	Teoretiska estimationsfelvarianser		Procentuella skillnaden
	Kalmanfilter	Komplementärt filter	
$R_{122}^* = 0,032$ $R_{133} = 2,820$	0,2222	0,2750	9,6 %
$R_{122} = 0,072$ $R_{133} = 6,845$	0,4291	0,4736	10,4 %
$R_{122} = 0,128$ $R_{133} = 11,28$	0,5752	0,6304	9,6 %
$R_{122} = 0,288$ $R_{133} = 27,38$	0,7699	0,8259	7,3 %
$R_{122} = 0,512$ $R_{133} = 45,20$	0,8782	0,9267	5,2 %

\*Ursprungliga systemet.

Störbrusen är sins emellan "lika stora" hela tiden men förhållandet till den signal vi skall estimeras har ändrats genom att båda störbrusen har ökat lika mycket. För så erhållna system har den teoretiska felvariansen för optimala Kalmanestimat och optimala komplementära estimat beräknats med dator på tidigare angivet sätt. Procentuella skillnaden för estimationsfelvarianserna har också angivits i tabellen.

APPENDIX

## FLÖDESSCHEMA:



K2=Hur många ggr  
programmet skall  
genomlöpas.

$$E = \Phi - \Phi^{-1} K \Theta \Phi$$

$$L = \Phi^{-1} K$$

K är den matris som  
erhålls då Kalman  $\hat{x}$ -  
systemet skickas in  
på program LOCSA

