N U M E R I S K B E H A N D L I N G A V K A L M A N S E K V A T I O N E R F Ö R T I D S D I S K R E T A S Y S T E M.

Författare: Leif Andersson

Handledare: Gustaf Olsson

Examensarbete vid Institutionen för Reglerteknik, Tekniska högskolan i Lund.

INNEHÅLL

S a m m a n f a t t n i n g

I denna rapport diskuteras olika algoritmer för skattning av tillståndsvariabler enligt Kalmanteorin. Det framgår att den högsta noggrannheten uppnås med en algoritm bestående av tre positivt semidefinita delar, men att kortare algoritmer kan ge tillräcklig noggrannhet för vissa system. Nödvändigheten av att symmetrisera algoritmerna diskuteras tillsammans med olika metoder för att utföra detta. En kort diskussion om möjligheten att beräkna vissa matriser i förväg och lagra dem avslutar rapporten.

A b s t r a c t

In this report are discussed different algorithms for the state estimation problem according to the Kalman theory. It is shown that the highest accuracy is obtained with an algorithm consisting of three non-negative definite parts, but that shorter algorithms may be sufficient for certain systems, The necessity of enforcing symmetry on the algorithms is discussed together with different methods for obtaining this. A brief discussion on the possibility of precalculating and storing certain matrices concludes the report.

1. Inledning

1.1 Problemställningen.

Ett inom modern processreglering vanligt delproblem är att skatta tillståndsvariabler, som inte är direkt tillgängliga för mätning. Under förutsättning att systemet är fullständigt observerbart, har problemet alltid en teoretisk lösning. Men svårigheter uppstår på grund av att vår kunskap om ett fysikaliskt system alltid är ofullständig: Mätningen av utsignaler är behäftad med fel, överföringen av insignaler från det yttre ställorganet till systemet blir inexakt, och på systemet verkar också störningar, som kan betraktas som insignaler utanför vår kontroll. Vi söker alltså en metod att skatta tillståndsvariablerna så att skillnaden mellan de faktiska tillståndsvariablerna och vår skattning av dem blir så liten som möjligt i någon mening.

Kalmanteorin ger en lösning av detta problem genom att ange hur man beräknar en viktmatris K, som relaterar den sökta skattningen till en mätning av utsignalerna från systemet. Beräkningen av denna K-matris innefattar bland annat ett antal matrismultiplikationer, och skall naturligtvis utföras på dator. Här, liksom vid allt annat numeriskt arbete uppstår då frågeställningen: Hur skall beräkningarna utföras? Två matematiskt ekvivalenta uttryck kan, som bekant, ha helt olika numeriska egenskaper.

Avsikten med detta arbete är att finna svaret på frågan: Vilken av olika tänkbara algoritmer för beräkning av K-matrisen är den lämpligaste med hänsyn till noggrannhet och snabbhet, och om svaret inte är entydigt, under vilka förutsättningar är den ena eller andra algoritmen lämpligast?

1.2 Sammanfattning av Kalmanteorin, tidsdiskreta fallet.

Betrakta ett system:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \Phi x(t) + \Gamma u(t) + v(t) \\ y(t) &= \Theta x(t) + e(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

där $e(t)$ och $v(t)$ är sekvenser av oberoende normalfördelade stokastiska vektorer med medelvärdet 0 och kovarianserna:

$$\begin{aligned} &Ev(t)v^T(t) = R_1 \\ &Ev(t_1)v^T(t_2) = 0 \qquad t_1 \neq t_2 \\ &Ee(t)e^T(t) = R_2 \\ &Ee(t_1)e^T(t_2) = 0 \qquad t_1 \neq t_2 \\ &Ee(t)v^T(t) = 0 \end{aligned}$$

Betrakta vidare följande matematiska modell av den deterministiska delen av systemet ovan:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= \Phi \hat{x}(t) + \Gamma u(t) \\ \hat{y}(t) &= \Theta \hat{x}(t) \end{aligned} \qquad (2)$$

Ett mått på avvikelsen mellan tillståndsvariablerna i systemet (1) och i modellen (2) ges av skillnaden mellan utsignalerna, $y(t) - \hat{y}(t)$. Vi modifierar därför modellen så att den tar hänsyn till denna skillnad genom att införa en viktmatris K:

$$\hat{x}(t+1) = \Phi \hat{x}(t) + \Gamma u(t) + K(y(t) - \Theta \hat{x}(t)) \qquad (3)$$

Man kan visa att, under förutsättning att matrisen $(\Phi - K\Theta)$ har alla sina egenvärden innanför enhetscirkeln, så kommer felet i skattningen, $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, att konvergera mot 0.

Vi har alltså stora friheter att välja K-matrisen så att konvergensvillkoret är uppfyllt, och söker därför närmare kriterier på den lämpligaste matrisen. Ett kriterium är följande:

> Givet en godtycklig konstant vektor, a. Sökt matrisen K så att variansen av den endimensionella stokastiska variabeln $a^T\tilde{x}$ är så liten som möjligt.

Vi betecknar kovariansmatrisen för felvektorn $\tilde{x}(t)$ med $P(t)$. Genom att kombinera ekvationerna (1) och (3) med hänsyn till

att $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ och beräkna kovariansen kommer man fram till:

$$P(t+1) = E\tilde{x}(t+1)\tilde{x}^T(t+1) =$$
$$= (\Phi - K\Theta)P(t)(\Phi - K\Theta)^T + KR_2K^T + R_1 \qquad (4)$$

Denna ekvation gäller allmänt. Vi söker K så att:

$$E(a^T\tilde{x})^2 = Ea^T\tilde{x}\tilde{x}^Ta = a^TE\tilde{x}\tilde{x}^Ta = a^TP(t)a$$

blir minimum. Lösningen är:

$$K(t) = \Phi P(t)\Theta^T(\Theta P(t)\Theta^T + R_2)^{-1} \qquad (5)$$

Den fullständiga härledningen enligt ovan finns i: Åström: Introduction to Stochastic Control Theory, Academic Press 1970, kap 5.4. Härledningen är gjord med hjälp av två till synes ganska godtyckliga val: dels att över huvud taget införa K-matrisen så som skett här, dels att använda det speciella optimalitetskriterium som vi gjort. Man kan emellertid visa, att den struktur på en skattning $\hat{x}(t+1)$ givet $\hat{x}(t)$, som man kommer fram till på detta sätt, också är den optimala under betydligt allmännare förutsättningar. Beviset för detta finns i kap. 7 av det nämnda verket.

Vi har därmed nått fram till ändamålet med detta arbete. Vi har ett antal ekvationer, som anger den optimala skattningen, och vi söker bästa sättet att beräkna dessa ekvationer med hjälp av dator.

2. Allmänna synpunkter på valet av algoritm

Detta kapitel innehåller ett försök till kvalitativ värdering av olika tänkbara representationer av algoritmerna. Dessa synpunkter utgör grunden för det slutliga urvalet av algoritmer för en mera kvantitativ undersökning.

2.1 Olika sätt att representera ekvationerna.

I detta avsnitt betecknar P i vänsterled i ekvationer alltid $P(t+1)$, medan P i högerled betecknar $P(t)$.

Vi hade följande ekvationer:

$$P = (\Phi - K\Theta)P(\Phi - K\Theta)^T + KR_2K^T + R_1 \tag{4}$$

$$K = \Phi P\Theta^T(\Theta P\Theta^T + R_2)^{-1} \tag{5}$$

Genom att sätta in uttrycket för K enligt (5) i (4) får man följande alternativa skrivsätt:

$$P = (\Phi - K\Theta)P\Phi^T + R_1 \tag{6}$$

$$P = \Phi P\Phi^T - K\Theta P\Phi^T + R_1 \tag{7}$$

Ytterligare tre representationer kan erhållas genom att införa en alternativ viktmatris H:

$$H = P\Theta^T(\Theta P\Theta^T + R_2)^{-1}$$

dvs. så att $K = \Phi H$. Man kan då bryta ut Φ ur ekvationerna och man får:

$$P = \Phi((I - H\Theta)P(I - H\Theta)^T + HR_2H^T)\Phi^T + R_1 \tag{8}$$

$$P = \Phi(P - H\Theta P)\Phi^T + R_1 \tag{9}$$

$$P = \Phi(I - H\Theta)P\Phi^T + R_1 \tag{10}$$

Här betyder I enhetsmatrisen. Observera, att om man använder någon av de tre sista ekvationerna, så behöver man aldrig explicit beräkna K, eftersom ekvation (3) i så fall kan skrivas:

$$\hat{x}(t+1) = \Phi(\hat{x}(t) + H(y(t) - \Theta\hat{x}(t))) + \Gamma u(t)$$

2.2 Egenskaper hos olika matriser.

Den viktigaste egenskapen hos en kovariansmatris är att den är symmetrisk och positivt semidefinit. Detta gäller alltså för P- R_1- och R_2-matriserna. Vidare förekommer i ekvationerna ett antal termer av typen APA^T, ofta med flera faktorer på vardera sidan om den symmetriska matrisen. Dessa termer är då naturligtvis också symmetriska och positivt semidefinita. Ibland framgår detta faktum inte explicit eftersom ett antal faktorer slagits samman under ett gemensamt namn. Så till exempel är termen $K\Theta P\Phi^T$ symmetrisk, eftersom det som egentligen står där är $\Phi P\Theta^T(\Theta P\Theta^T + R_2)^{-1}\Theta P\Phi^T$. P är ju symmetrisk, och alltså är $(\Theta P)^T = P^T\Theta^T = P\Theta^T$. På samma sätt är $H\Theta P = P\Theta^T(\Theta P\Theta^T + R_2)^{-1}\Theta P$ symmetrisk och positivt semidefinit.

2.3 Egenskaper hos algoritmerna.

De algoritmer som vid första påseende förefaller noggrannast är (4) och dess variant (8). De består båda av en summa av positivt semidefinita symmetriska matriser, vilket utgör en garanti för att resultatet åtminstone bibehåller denna för en kovariansmatris absolut nödvändiga egenskap. Emellertid är (8) den absolut längsta algoritmen med tio matrismultiplikationer, och den är knappast så mycket noggrannare att den extra multiplikation som måste utföras är motiverad.

Algoritmerna (6), (7), (9) och (10) kan alla erhållas ur varandra genom att man bryter ut ur och multiplicerar in i parenteser. Av dessa kan (7) omedelbart elimineras, eftersom den dels innebär en subtraktion mellan positivt semidefinita matriser, ett ur noggrannhetssynpunkt riskabelt förfaringssätt, och dels är den längsta, åtta matrismultiplikationer. Även (9) in-

nebär subtraktion mellan positivt semidefinita matriser, men denna algoritm har fördelen att vara den kortaste, sex multiplikationer, varför det trots allt är motiverat att närmare undersöka om den inte i vissa fall är användbar.

Återstår (6) och (10). De förefaller båda noggrannare än (9), eftersom subtraktionen inte sker mellan psitivt definita matriser, men de är också så lika att någon gradering mellan dem inte är möjlig. Eftersom antalet algoritmer i den kvantitativa undersökningen bör vara så lågt som möjligt för överskådlighetens skull, bör endast en av dem komma med, och jag har helt godtyckligt valt (6).

Följande algoritmer kommer alltså med i slutundersökningen:

$$P = (\Phi - K\Theta)P(\Phi - K\Theta)^T + KR_2K^T + R_1$$

$$P = \Phi(P - H\Theta P)\Phi^T + R_1$$

$$P = (\Phi - K\Theta)P\Phi^T + R_1$$

De kommer i fortsättningen att refereras som algoritm 1, 2 resp 3.

3. Testmetoder

3.1 Val av system.

De system som är aktuella för en tillämpning av Kalmanteorin skall ha vissa speciella egenskaper. De måste vara observerbara, och om de också skall styras, vilket ju vanligen är fallet, måste de också vara styrbara. Emellertid kan de räkningar som är aktuella i denna undersökning utföras för alla system, även om de framräknade P- och K-matriserna inte är fysikaliskt meningsfulla.

Bland de faktorer som påverkar noggrannheten i räkningarna märks systemordningen och storleksordningen på matriselementen. Systemordningen därför att räkningarna väsentligen består av ett antal matrismultiplikationer, och dessa i sin tur av ett antal skalärprodukter. Men här adderas de fel som uppstår i varje enskild multiplikation, och ju fler produkter som adderas, desto större blir naturligtvis sammanlagda felet. Angående inverkan av matriselementens storlek är det uppenbarligen så, att absolutfelet för en matrisprodukt blir större ju större de ingående matrisernas element är. De förberedande undersökningarna antydde emellertid att även relativfelen växer med storleksordningen på matriselementen, varför denna inverkan bör kontrolleras. Med hänsyn till användningen av dessa resultat vid en praktisk tillämpning är det dessutom en fördel att som variabel faktor i undersökningen använda matriselementens storlek, eftersom den för ett givet system direkt kan dontrolleras, medan egenvärden, norm och dylikt i allmänhet måste beräknas speciellt.

En undersökning av detta slag kräver ett stort antal system av olika typ och ordning - typ i detta fall betyder stor-

leksording på elementen - varför de lämpligen bör genereras av datamaskinen.

Av dessa anledningar har jag valt att helt enkelt generera slumpmatriser. Som grund har jag haft en subrutin MCREDI, författad av Sture Lindahl vid institutionen för Reglerteknik. Denna subrutin ger rektangelfördelade slumptal i intervallet (0,1). Genom enkla modifikationer får man dels slumptal i intervallet (-a,a), där a är en ingångsparameter, och dels ger den vid varje anrop ett helt system, dvs. Φ- och Θ-matris. Den modifierade subrutinen, kallad SYSTEM, ger möjlighet att bestämma intervallen för de båda matriserna var för sig. Lista i appendix.

Förutom Φ- och Θ-matriserna behövs också en initial P-matris samt R_1- och R_2-matriserna. Ingen av dessa har någon väsentlig inverkan på räknenoggrannheten eftersom P-matrisen ju förändras redan efter första steget, och R_1- och R_2-matriserna endast kommer in additivt. Jag har därför genomgående valt $P_o = I$, $R_1 = 5I$ och $R_2 = 5I$, I är enhetsmatrisen.

3.2 Kvalitativa test.

Då man önskar jämföra algoritmer för Kalmans ekvationer har man väsentligen två möjligheter: Man kan betrakta viktmatrisen, K resp. H, som ju är det egentliga målet för beräkningarna, eller man kan betrakta P-matrisen. Den senare har en del fördelar. Den skall ha vissa bestämda egenskaper om den är korrekt beräknad, nämligen att vara symmetrisk och positivt semidefinit. Vidare har vi ju två olika viktmatriser, och en jämförelse mellan algoritm 2 och de övriga skulle bli besvärlig om vi använde H och K. P-matrisen däremot är densamma för alla algoritmerna.

En första kvalitativ undersökning av algoritmerna kan man göra med hjälp av följande observation: P-matrisen är ett mått på osäkerheten i skattningen av tillståndsvariablerna. Efter ett antal tidssteg har vi, på grund av störningarna, ingen nytta av den information vi hade om tillståndsvariablerna i början, samtidigt som vi i varje tidssteg får ny information, om än med en viss osäkerhet. Om systemet är tidsinvariant och störningarna kan anses ha konstanta statistiska egenskaper, bör alltså så småningom P-matrisen konvergera och bli konstant. Detta är naturligtvis förutsättningen för att Kalmanfiltrering över huvud taget skall vara praktiskt användbart, annars skulle ju osäkerheten växa obegränsat och mätningarna inte ge någon information alls.

Det visar sig emellertid att med vissa algoritmer och vissa system kommer P- matrisens element att växa obegränsat. Detta måste vara fel, och en grov kontroll på att en algoritm alls är värd att studera närmare är att P-matrisen efter ett antal steg (20 - 30 st) är någorlunda konstant.

Observera, att det faktum att P-matrisen divergerar för ett visst system och en viss algoritm inte har att göra med om systemet som sådant är stabilt eller instabilt. Det enda stabilitetsvillkor som finns är att matrisen $(\Phi - K\Theta)$ skall ha sina egenvärden innanför enhetscirkeln. En divergerande P-matris beror alltid på felaktigheter i räkningarna. Detta påstående kan jag tyvärr inte bevisa strikt, men i alla de fall jag undersökt konvergerar P sedan räknenoggrannheten ökats. Se t.ex. avsnitt 4.2

P-matrisen skulle också vara symmetrisk, och man har här en god möjlighet till ytterligare kontroll. En algoritm som ger en starkt osymmetrisk P-matris, till exempel olika tecken på

de element som i själva verket skulle vara lika stora, är alltså likaledes oanvändbar.

3.3 Kvantitativa test.

I samband med jämförelser mellan algoritmer är ett av de väsentliga problemen att få fram ett "facit" att jämföra med. Den enda möjligheten då det gäller Kalmans ekvationer är att utföra beräkningarna i dubbel precision och använda detta resultat som jämförelse.

Nästa fråga som uppstår är då: Vilken av de tre algoritmerna skall användas till detta, och skall den eventuellt modifieras på något sätt? Här gav de förberedande kvalitativa testen en viss vägledning. Det visade sig nämligen (se avsnitt 4.2) att en symmetrisering av algoritm 2 och 3 var absolut nödvändig för att inte P-matrisen skulle divergera. Emellertid var algoritm 1 betydligt mindre känslig. Jag har därför valt att som "facitalgoritm" använda algoritm 1 och dessutom symmetriserat den genom medelvärdesbildning. Symmetriseringen finns närmare beskriven i avsnitt 4.2.

3.4 Representation av felen.

Att räkna fram P-matrisen med de tre algoritmerna plus jämförelsealgoritmen, och sedan direkt betrakta matriserna och försöka dra några slutsatser är praktiskt taget omöjligt, det blir alldeles för många tal att jämföra. Problemet är då att få fram ett eller två tal per matris som utgör ett mått på felet, och som enkelt kan jämföras.

Jag har använt följande metod: Beteckna P-matrisen beräknad enligt en av de algoritmer som skall jämföras, med (p_{ij}) och P-matrisen beräknad i dubbel precision med (d_{ij}). Beräkna en ny matris (u_{ij}) enligt:

$$(u_{ij}) = \left(\frac{p_{ij} - d_{ij}}{d_{ij}}\right)$$

Den nya matrisen har då de relativa felen som element. Beräkna sedan:

$$q_1 = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j}^{n} |u_{ij}| \qquad \text{och} \qquad q_2 = \max_{i,j} |u_{ij}|$$

Dessa två tal utgör ett mått på felet i räkningarna och kan direkt jämföras med motsvarande tal för andra algoritmer.

Om de jämförda algoritmerna är någorlunda användbara, dvs inte divergerar, kommer båda talen att vara $0 \leqslant q \leqslant 1$. Utskriften från datamaskinen skulle då bli av exponentiell form, dvs se ut exempelvis .6373625-06, och en tabelluppställning skulle bli relativt svåröverskådlig. Jag har därför multiplicerat med 2^{27}, eftersom maskinens kapacitet är 27 bitar, och därefter tagit heltalsdelen av talet. Det så erhållna talet är alltså ett heltal av storleksordningen $0 \leqslant Q < 10^8$, som anger att relativa felet är ungefär $Q \cdot 10^{-8}$. En tabelluppställning får då utseendet:

	alg 1	alg 2	alg 3
Max fel	4210	98	987
Medelfel	350	43	130

Av denna tabell skulle man kunna dra slutsatsen att algoritm 2 är noggrannast, men att samtliga algoritmer i allmänhet är användbara, eftersom högst fyra siffror av åtta är opålitliga, och fysikaliska mätningar sällan kan göras med mer än fyra siffrors noggrannhet. En lista över subrutinen DIFF som använts vid dessa felberäkningar finns i appendix.

4. Numeriska resultat

4.1 Egenvärden hos Φ-matrisen.

För att få fram egenvärdena för de system som genereras av subrutinen SYSTEM, har jag använt ett av institutionens biblioteksprogram, EIGP. Det exakta läget av egenvärdena i komplexa planet är inte av så stort intresse i sammanhanget, utan jag har för ett antal system skrivit ut heltalsdelen av absolutbeloppen. Det visar sig att dessa för varje system ligger ungefär jämt fördelade i ett intervall vars övre gräns bestäms av systemets ordning och elementens gränser. För varje systemtyp beräknades egenvärdena för 15 system, och tabellen nedan visar inom vilket område största egenvärdet för en viss systemtyp befinner sig.

system-ordning	intervall för Φ	område för största egenv.
5	(-1,1)	0 - 2
5	(-5,5)	4 - 9
5	(-10,10)	10 - 17
10	(-1,1)	1 - 2
10	(-5,5)	8 - 11
10	(-10,10)	16 - 21
15	(-1,1)	1 - 2
15	(-5,5)	10 - 13
20	(-1,1)	2 - 3
20	(-5,5)	11 - 18

Dessa matriser är inte identiska med de som använts vid undersökningen av algoritmerna, men man kan utgå ifrån att dessa har ungefär samma egenskaper, eftersom de genererats på samma sätt.

4.2 Behov av symmetrisering.

Som nämnts i avsnitt 3.2 kan ibland P-matrisen divergera och efter ett antal steg få mycket stora element, ibland så stora att de ligger utanför maskinens kapacitet. Ett exempel på detta återfinns i tabell 1 som är en utskrift av P-matrisen för ett antal samplingsintervall, och där de olika algoritmerna programmerats utan modifikationer. Det aktuella systemet har slumpmatriser där elementen är rektangelfördelade slumptal (-10,10). Φ är en (5x5)-matris och Θ en (3x5)-matris.

Man ser att algoritm 1 konvergerar någorlunda, medan algoritmerna 2 och 3 divergerar kraftigt. Matriserna är dessutom starkt osymmetriska, ibland med olika tecken på de element som skall vara lika. Detta faktum ger en antydan om var förklaringen är att söka. Betrakta nämligen algoritm 2:

$$P = \Phi(P - P\Theta^T(\Theta P\Theta^T + R_2)^{-1}\Theta P)\Phi^T + R_1$$

Den andra termen innanför parentesen skall, liksom P, vara symmetrisk. Vi har alltså en subtraktion mellan symmetriska matriser. Men här ligger en stor felkälla. Den andra termen har ju uppkommit genom ett antal matrismultiplikationer. Då dessa beräkningar utföres blir resultatet naturligtvis inte exakt symmetriskt, även om de relativa felen är små. Vid subtraktionen kan felen växa betydligt, och vi får inte längre en symmetrisk P-matris. Vid nästa samplingsintervall upprepas proceduren och felen växer ytterligare.

Här tillkommer en faktor, nämligen sättet på vilket inversionen utföres. Jag har genomgående använt en biblioteksrutin SYMIN för detta. Den är avsedd för symmetriska matriser och är så beskaffad att den endast tar hänsyn till matrisens övre triangel. Om nu den aktuella matrisen i själva verket inte är symmetrisk, blir resultatet naturligtvis inversen av en

helt annan matris, och felet ökar ytterligare.

Med algoritm 1 däremot uppträder inte dessa symmetriproblem lika starkt, eftersom man där aldrig har någon subtraktion mellan positivt definita symmetriska matriser, utan enast en addition, som dessutom är den sista operationen, och man alltså inte genom ytterligare matrismultiplikationer förstärker en liten osymmetri.

Vägen ut ur svårigheterna är uppenbar: man symmetriserar, dvs justerar elementen efter varje operation så att matriserna verkligen är exakt symmetriska. Jag har undersökt två metoder att göra detta:

För det första: Betrakta matrisen (a_{ij}).

Beräkna $\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$, $i \neq j$. Ersätt elementen a_{ij} och a_{ji} med detta tal.

För det andra: Betrakta matrisen (a_{ij}).

Ersätt elementet a_{ji} med a_{ij} om $i < j$, dvs ersätt elementen i undre triangeln med motsvarande i övre.

Den sista metoden har dessutom den fördelen att räkningarna blir kortare än utan symmetrisering eftersom man ju aldrig behöver räkna ut undre triangeln.

Att symmetrisering verkligen ger en klar förbättring framgår av tabell 2, som är en utskrift av P-matrisen för samma system som ovan, men där algoritmerna symmetriserats enligt metoden med medelvärdesbildning.

I och för sig kunde kanske symmetrisering av algoritm 1 verka överflödig, och likaså fungerar även de andra algoritmerna utan symmetrisering om exempelvis Φ-matrisens element är rektangelfördelade (-1,1) istället för (-10,10). Emellertid finns det all anledning att förmoda att noggrannheten även i dessa fall blir större med symmetrisering, och dessu-

tom minskar ju räknetiden om man kan använda metod nummer 2 vid symmetriseringen. För den fortsatta undersökningen har jag därför genomgående använt symmetriserade algoritmer.

4.3 Räknetider.

På UNIVAC finns tyvärr ingen möjlighet att få fram klockan så att man kan ange räknetiden för en viss rutin. En uppskattning ges av antalet multiplikationer i de olika algoritmerna. I sammanställningen nedan förutsätts Φ vara en $(n \times n)$-matris och Θ en $(m \times n)$-matris. Det angivna antalet upptar inte de multiplikationer som ingår i inversionen, men det bör vara ganska litet, eftersom det endast är en $(m \times m)$-matris som inverteras.

Symmetrisering med medelvärdesbildning.

Algoritm 1: $3n^2m + 4nm^2 + 2n^3 + n^2 + m^2$

Ex: $n = 5$, $m = 3$ 689 multiplikationer

$n = 10$, $m = 4$ 3956 -"-

Algoritm 2: $2n^2m + 2nm^2 + 2n^3 + m^2 + 2n^2$

Ex: $n = 5$, $m = 3$ 549 -"-

$n = 10$, $m = 4$ 3336 -"-

Algoritm 3: $3n^2m + 2nm^2 + 2n^3 + m^2 + n^2$

Ex: $n = 5$, $m = 3$ 599 -"-

$n = 10$, $m = 4$ 3636 -"-

Symmetrisering genom att ersätta nedre triangeln med övre

Algoritm 1: $\frac{1}{2}(7n^2m + 5nm^2 + 3n^3 + n^2 + 2nm)$

Ex: $n = 5$, $m = 3$ 590 multiplikationer

$n = 10$, $m = 4$ 3390 -"-

Algoritm 2: $\frac{1}{2}(3n^2m + 3nm^2 + 3n^3 + 2nm + n^2)$

Ex: $n = 5$, $m = 3$ 370 -"-

$n = 10$, $m = 4$ 2430 -"-

Algoritm 3: $\frac{1}{2}(6n^2m + 3nm^2 + 3n^3 + n^2 + nm)$

Ex: $n = 5$, $m = 3$ 500 multiplikationer

$n = 10$, $m = 4$ 3010 -"-

Man ser att algoritm 1 är den längsta och att algoritm 2 och 3 är ca 15% resp 10% kortare om symmetriseringen sker med den första metoden och ca 30% resp 15% kortare om symmetrisering sker med den andra metoden. En jämförelse mellan den längsta, algoritm 1 metod 1, och den kortaste, algoritm 2 metod 2, ger en skillnad på ca 40%

4.4 Tabeller över den kvantitativa undersökningen.

Undersökningen utfördes så att ett system genererades enligt avsnitt 3.1 med systemordning och gränserna för matriselementens storlek som ingångsparametrar. Därefter beräknades P-matrisen för 30 samplingsintervall med de sju olika algoritmerna - tre algoritmer med vardera två symmetriseringsmetoder plus en algoritm i dubbel precision. För samplinginterval 1, 5, 10, 25 och 30 beräknades relativfelen enligt avsnitt 3.3 och 3.4, och de skrevs ut i en tabell. Därefter upprepades proceduren för ett antal system. Systemen är inte utskrivna, eftersom de exakta siffrorna i och för sig inte är intressanta. De utgörs ju av rektangelfördelade slumptal med givna gränser, och det visar sig att resultaten är ganska entydiga för alla system av en given typ.

Beräkningarna är utförda för system av ordning 5, 10, 15 och 20 och med elementgränserna 1, 5 och 10. För system av ordning 5 beräknades 15 system av varje storleksordning och för system av högre ordning beräknades sju system av varje. av dessa har sedan av varje sort valts ut tre representativa system som presenteras i tabellerna 3 - 13.

Tabellerna har tyvärr p.g.a. platsbrist inte blivit så självförklarande som är önskvärt, och därför följer en beskrivning och teckenförklaring. Ett exempel på en tabell finns på nästa sida.

Första raden är en beskrivning av systemet. N = 5 NY = 3 anger att Φ är (5×5) och Θ är (3×5). MAGNITUDE OF FI resp MAGNITUDE OF TET anger gränserna i rektangelfördelningen. TYPE OF SYMMETRY över andra kolonnen syftar åt höger på de andra kolonnhuvudena, som alltså anger vilken symmetriseringsmetod som använts. MEAN VALUE anger symmetrisering med medelvärdesbildning och UPPER TRIANGLE anger symmetrisering genom att undre triangeln ersätts med övre. MEAN ERROR resp MAX ERROR syftar på de två metoder för felangivelse som nämnts i avsnitt 3.4. Den andra tabellen, TOTAL FOR 3 SYSTEMS är en sammanfattning av resultaten för ett antal, i detta fall 3, system av samma typ. TOTAL MAX ERROR är det största relativa fel som fanns för den givna algoritmen bland de tre systemen, medan TOTAL MEAN ERROR anger medelfelet totalt, dvs medeltalet av medelfelen för alla samplingintervallen och alla systemen. Av praktiska skäl har denna tabell samma huvud som de andra, varför rubriken SAMPLING INTERVAL NR inte har någon funktion i detta fall.

I tabellerna förekommer en del asterisker och nollor som båda anger att felet skulle representeras av ett tal med mer än åtta siffror. Nollan anger att talet är för stort för heltalsrepresentation, dvs större än $3 \cdot 10^{11}$ och asteriskerna att det ligger i intervallet $(3 \cdot 10^{11}, 10^{8})$.

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 10 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	5	5	6	4	8	7
	MEAN ERROR	2	2	3	2	2	2
5	MAX ERROR	252	3416	38100163	8799777	15459567	31313825
	MEAN ERROR	97	601	5737445	1104871	2530326	4207196
10	MAX ERROR	2396	30715	9831060	42334242	16823424	4523545
	MEAN ERROR	358	5334	1202963	6225387	2633082	1103870
25	MAX ERROR	1705	12109	19822610	4179012	21059305	76637718
	MEAN ERROR	306	1702	2798397	582680	3091721	11590270
30	MAX ERROR	2283	5055	22963079	39789620	15121169	21079608
	MEAN ERROR	316	932	3131428	6379405	2140153	3090505

TOTAL FOR 3 SYSTEMS

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 10 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
TOTAL	MAX ERROR	8012	258408	38100163	42334242	21059305	76637718
TOTAL	MEAN ERROR	483	9114	864807	989210	703097	1471195

Exempel på tabell från den kvantitativa undersökningen.

Tabeller finns för följande systemtyper:

system-ordning	rader i Θ	gränser för Φ	gränser för Θ	tabell nr
5	3	(-1,1)	(-1,1)	3
5	3	(-5,5)	(-1,1)	4
5	3	(-10,10)	(-1,1)	5
5	3	(-1,1)	(-10,10)	6
5	3	(-10,10)	(-10,10)	7
10	4	(-1,1)	(-1,1)	8
10	4	(-5,5)	(-1,1)	9
10	4	(-10,10)	(-1,1)	10
15	5	(-1,1)	(-1,1)	11
15	5	(-5,5)	(-1,1)	12
20	5	(-1,1)	(-1,1)	13

Anledningen till att det endast finns en typ av Θ-matriser för system av högre ordning är, att det av tabellerna för femte ordningens system framgår att den inte har någon inverkan på noggrannheten.

Listor över de subrutiner som använts för de olika algoritmerna finns i appendix. För att slippa en upprepning av nästan likadana program finns bara fyra subrutiner listade: KALM1 är algoritm 1 symmetriserad med medelvärdesbildning, KALM2 är algoritm 2 symmetriserad genom att sätta undre triangeln lika med övre och KALM3 är algoritm 3 utan symmetrisering.

5. Slutsatser

5.1 Jämförelse mellan algoritmerna, I.

System av ordning 5.

Man kan först konstatera att Θ-matrisen uppenbarligen inte har någon inverkan på noggrannheten. Felen är ungefär lika stora för olika storleksordningar på Θ-elementen om Φ-elementen är lika stora. Se tabell 3 och 6 resp 5 och 7.

Låt oss börja med en jämförelse mellan symmetriseringsmetoderna. För $\Phi \in (-1,1)$ är de båda metoderna lika bra för alla algoritmerna. Felen ligger med få undantag inom samma tiopotens, och en kontrollräkning ger att i ca hälften av fallen är den ena metoden bäst, i hälften den andra. För $\Phi \in (-5,5)$ gäller fortfarande att de båda symmetriseringsmetoderna är lika bra för algoritm 2 och 3, medan för algoritm 1 metoden med medelvärdesbildning ger det klar bästa resultatet. Skillnaden kan ibland uppgå till en tiopotens eller mer.

Denna skillnad mellan de båda symmetriseringsmetoderna för algoritm 1 blir ännu mer markerad då $\Phi \in (-10,10)$. Medan det i föregående fall ibland inträffade att metoden med medelvärdesbildning gav en tiopotens mindre fel, är det i detta fall sällan skillnaden är mindre än en tiopotens, ofta är den två tiopotenser. Någon kontroll av algoritm 2 och 3 finns det i detta fall ingen anledning att göra eftersom felen där under alla omständigheter är så stora att dessa algoritmer är oanvändbara.

Sammanfattningsvis gäller alltså om symmetriseringen att då algoritm 2 eller 3 användes finns det ingen anledning att symmetrisera med medelvärdesbildning, eftersom den tar längre tid men inte ger bättre resultat. Om algoritm 1 användes där-

emot bör medelvärdesmetoden användas eftersom den ger såpsass stor förbättring av noggrannheten.

Vi övergår till en jämförelse mellan algoritmerna, och då bör vi enligt föregående resonemang jämföra algoritm 1 symmetriserad med medelvärdesmetoden och algoritmerna 2 och 3 symmetriserad med den andra metoden.

En jämförelse mellan algoritm 2 och 3 ger ingen skillnad på noggrannheten för dem. Det finns ungefär lika många fall där den ena är noggrannast som den andra. Man kan därmed ange algoritm 3 som den i allmänhet sämsta eftersom den är längre än algoritm 2.

Återstår en jämförelse mellan 1 och 2. Här är algoritm 1 utan tvekan den noggrannaste, men den är också betydligt längre och det är av intresse att se efter när algoritm 2 kan användas. Det visar sig att om $\Phi \in (-1,1)$ uppgår felet med algoritm 1 i allmänhet till ca 10^{-8} - 10^{-7} och med algoritm 2 till ca 10^{-7} - 10^{-6}. Eftersom fysikaliska mätningar i allmänhet inte kan göras bättre än med ett relativfel av ca 10^{-4} och det ofta inte lönar sig att ha felet mindre än 10^{-2}, är de fel som kommer in genom dessa räkningar helt försumbara för båda algoritmerna. Om Φ (-5,5) blir felen med algoritm 1 ca 10^{-5} och med algoritm 2 en tiopotens större. Även hä kommer alltså felen som introduceras genom dessa räkningar att försvinna i jämförelse med mätfelen.

För $\Phi \in (-10,10)$ kommer saken däremot i ett annat läge. Här är felen med algoritm 2 betydligt större, ofta så stora att maskinens heltalskapacitet inte räcker till med den använda felrepresentationen, medan algoritm 1 fortfarande ger fel av storleksordningen 10^{-4}. Alla system av denna typ ger inte så stora fel, men ungefär hälften av de undersökta systemen gör det, och

slutsatsen av detta blir, att om ett givet system har så stora matriselement att det kan karakteriseras som $\Phi \in (-10,10)$, så skall algoritm 1 användas.

5.2 Jämförelse mellan algoritmerna, II.

System av högre ordning.

Slutsatserna i föregående avsnitt angående symmetriserings-metoder och likheten mellan algoritm 2 och 3 gäller även för system av högre ordning. Som väntat minskar noggrannheten med ökande systemordning. Det största system som undersöktes var av ordning 20 och med $\Phi \in (-1,1)$. Här var felen med algoritm 1 ca 10^{-5} och med algoritm 2 ca 10^{-4}. Det måste emellertid observeras att spridningen på felen är betydligt större för system av högre ordning än för system av lägre. Detta framgår av att för system av ordning 5 var skillnaden mellan maxfel och medelfel i allmänhet en tiopotens eller mindre, men för system av ordning 20 blir skillnaden ofta tre tiopotenser med algoritm 2 och 3. Man bör alltså vara försiktig om man använder någon av dessa. Även om medelfelen ligger på en fullt acceptabel nivå, kan fel uppkomma i skattningen genom att något eller några matriselement har stora fel. Med algoritm 1 blir spridningen mindre, i allmänhet en sillnad på en tiopotens mellan maxfel och medelfel.

Denna diskussion har helt rört system av ordning 20. Mindre system kan enklast karakteriseras genom att säga att resultaten ligger mellan resultaten för system av ordning 5 och ordning 20.

Om matriselementen växer, minskar noggrannheten starkt. För system av ordning 10 och med $\Phi \in (-5,5)$ blir felen med algoritm 1 ca 10^{-3} och med de andra algoritmerna två tiopotenser

större. Redan algoritm 1 ger alltså fel som är på gränsen till det acceptabla i den meningen att de rena räknefelen blir lika stora som de troliga fysikaliska mätfelen. De andra algoritmerna ger uppenbarligen alldeles för stora fel.

Om systemordningen är 10 och $\Phi \in (-10,10)$ ger algoritm 1 fel av storleksordningen 10 - 100% och de andra som vanligt ännu större. Det är alltså tveksamt om beräkningar på denna typ av system över huvud taget bör utföras med den noggrannhet som här är aktuell, 27 bitar.

För system av ordning 15 blir felen redan med $\Phi \in (-5,5)$ och algoritm 1 av storleksordningen 100%, och test av system med större element är uppenbarligen meningslös liksom system av högre ordning med matriselement större än 1.

5.3 Sammanfattande kommentarer angående användningen av de olika algoritmerna m.m.

Om räknetiden vid beräkningen av viktmatrisen är av underordnad betydelse, exempelvis om samplingintervallen är långa eller beräkningarna sker off-line, är det uppenbarligen algoritm 1 som är den lämpligaste. Den ger i allmänhet bättre noggrannhet och är, som framgått, för system med stora matriselement den enda användbara. Det är först då en 40%-ig tidsbesparing kan anses väsentlig, som algoritm 2 bör övervägas, och då måste man noga beakta Φ-matrisens utseende. Vid denna undersökning har ingen hänsyn tagits till olika representationer av samma system, utan de matriser som hade stora element visade sig också ha stora egenvärden. Under de förberedande undersökningarna visade det sig emellertid att system med små egenvärden, men där representationen var sådan att matriselementen blev stora, gav dålig noggrannhet. Man kan därför anta att

systemrepresentationen har stor betydelse.

Vid tillämpningar av Kalmanteorin har man alltid ett val mellan att göra beräkningarna on-line eller off-line. Man får alltså väga räknetid mot minneskapacitet. Då är att märka att om systemet är tidsinvariant så konvergerar, som tidigare nämnts, P-matrisen, och därmed även K-matrisen efter ett antal steg, i testexemplen 20 - 25 st. Man behöver alltså endast lagra ca 20 matriser, och får då datorn friställd för andra uppgifter. Detta förfaringssätt är också lämpligt ur den synpunkten att beräkningarna eventuellt kan utföras på en annan maskin med större ordlängd och därmed större noggrannhet än den maskin som är kopplad on-line till processen.

Med tanke på att K-matrisen konvergerar finns också möjligheten att endast använda den konvergerade K-matrisen och alltså skatta suboptimalt i början. Konvergensvillkoret för felet är ju ändå alltid uppfyllt, och kovariansen för felet blir just den P-matris man får efter konvergens.

Referens:

K.J. Åström: Introduction to Stochastic Control Theory, Academic Press 1970.

SAMPLING INTERVAL NR 1

ALGORITHM 1

136.46368	47.672081	44.716486	-94.120839	69.152602
47.672081	30.424687	2.3646089	-26.479555	21.012749
44.716486	2.3646089	156.81245	-108.82776	20.922475
-94.120839	-26.479555	-108.82776	124.96147	-52.687397
69.152602	21.012749	20.922475	-52.687397	46.912678

ALGORITHM 2

136.46368	47.672079	44.716486	-94.120839	69.152604
47.672082	30.424688	2.3646101	-26.479556	21.012750
44.716487	2.3646089	156.81245	-108.82777	20.922476
-94.120840	-26.479555	-108.82777	124.96147	-52.687398
69.152603	21.012748	20.922476	-52.687396	46.912680

ALGORITHM 3

136.46368	47.672081	44.716487	-94.120841	69.152603
47.672081	30.424689	2.3646100	-26.479555	21.012749
44.716488	2.3646103	156.81245	-108.82777	20.922476
-94.120840	-26.479556	-108.82777	124.96147	-52.687397
69.152603	21.012748	20.922476	-52.687397	46.912680

Tabell 1 sid 1 P-matrisen beräknad utan symmetrisering

SAMPLING INTERVAL NR. 5

ALGORITHM 1

24631.264	9268.8374	8420.4727	-18571.737	13085.355
9268.8480	3539.8448	2797.0120	-6788.1904	4931.1507
8420.5481	2797.0522	6427.7394	-8272.1793	4372.2266
-18571.675	-6788.1725	-8272.0518	15063.298	-9817.9684
13085.460	4931.1849	4372.2173	-9818.0760	6967.0001

ALGORITHM 2

15851.797	17568.934	-245947.02	106829.04	28489.581
42346.800	25476.406	-77182.533	7600.7092	30335.111
-120005.55	-51013.787	-249232.68	195263.26	-46316.702
11869.518	-3710.5099	237201.23	-117720.89	-13682.924
-4836.1848	2719.7075	-151379.29	76768.469	8817.6522

ALGORITHM 3

24921.082	28363.791	45417.118	-33418.611	-8055.9606
8468.1725	14802.139	18778.894	-12358.424	-7490.4536
-18522.214	3683.7953	-41962.777	36476.769	-15596.240
-2933.2374	-16039.802	-4290.0782	-1208.5210	12761.567
14414.999	13289.094	27573.725	-20317.052	-2243.2902

Tabell 1 sid 2 P-matrisen beräknad utan symmetrisering.

SAMPLING INTERVAL NR 10

ALGORITHM 1

24628.344	9267.3783	8425.1335	-18572.508	13083.524
9267.4572	3539.1940	2799.1027	-6788.4746	4930.2678
8424.9824	2799.0280	6427.8722	-8274.7035	4374.5480
-18572.621	-6788.4644	-8274.8445	15065.268	-9818.3048
13083.625	4930.2643	4374.6650	-9818.3223	6965.8893

ALGORITHM 2

-.65330688+17	-.35434287+17	-.48842062+17	.69487559+17	-.33318622+17
-.26949768+17	-.14612892+17	-.20159525+17	.28671762+17	-.13745305+17
-.60098600+17	-.32603727+17	-.44908183+17	.63908562+17	-.30648679+17
.68161988+17	.36971964+17	.50952684+17	-.72494917+17	.34762005+17
-.37348955+17	-.20259185+17	-.27917865+17	.39722484+17	-.19047580+17

ALGORITHM 3

-.42856162+10	-.11799735+11	.21666888+11	-.47734664+10	.10739004+10
-.12476056+10	-.45386232+10	.90730587+10	-.24617522+10	.67524830+09
.12437283+09	-.42334606+10	.10778337+11	-.42814631+10	.14822418+10
.35739138+10	.11257198+11	-.21582965+11	.53418079+10	-.13671822+10
-.30672918+10	-.73635575+10	.12798379+11	-.23663728+10	.41294234+09

Tabell 1 sid 3 P-matrisen beräknad utan symmetrisering.

SAMPLING INTERVAL NR 25

ALGORITHM 1

24654.498	9279.3093	8411.9751	-18580.282	13098.163
9279.2804	3544.5602	2793.2028	-6792.0201	4936.8927
8411.9532	2793.1986	6431.2277	-8269.1407	4367.4301
-18580.330	-6792.0565	-8269.1803	15066.615	-9822.7145
13098.133	4936.8957	4367.4448	-9822.6735	6974.0002

ALGORITHM 2

.14452369+39	.39138632+38	.91604869+38	-.11956373+39	.16746675+39
-.82546684+38	-.95976764+38	.45541025+38	-.42405000+38	-.16446547+39
-.26314540+38	-.59550716+38	-.92221716+38	-.92221716+38	-.92221716+38
-.10559289+39	-.16498768+39	-.16498768+39	-.16498768+39	-.16498768+39
.33380313+38	-.13018290+39	.68979955+38	-.42857568+38	.57257533+38

ALGORITHM 3

.37756641+19	.15201876+20	-.33933280+20	.10056069+20	-.20641429+19
.22402031+19	.83285815+19	-.18154424+20	.51908485+19	-.10383496+19
.33858041+19	.13675427+20	-.30707226+20	.91311351+19	-.18372817+19
-.38516459+19	-.16414553+20	.37307989+20	-.11316297+20	.23345080+19
.16075250+19	.70939791+19	-.16224696+20	.49779612+19	-.10469361+19

Tabell 1 sid 4 P-matrisen beräknad utan symmetrisering.

SAMPLING INTERVAL NR 30

ALGORITHM 1

24617.134	9262.1180	8428.4537	-18568.062	13077.496
9262.0956	3536.6390	2800.7026	-6786.3696	4927.4022
8428.4114	2800.7017	6423.2770	-8274.2383	4376.6362
-18567.983	-6786.3605	-8274.2460	15062.409	-9815.9297
13077.434	4927.3934	4376.6080	-9815.9084	6962.5366

ALGORITHM 2

.97767517+38	-.13268786+39	.10434859+39	-.15506154+39	.12528473+39
.22744998+38	-.92531917+38	.14222777+39	.81100480+38	.11021715+39
-.43057399+38	.36398844+38	-.15089860+39	-.15089860+39	-.15089860+39
.87069569+38	-.77974702+38	.11804366+39	.11804366+39	.10673302+39
-.10297127+39	.60170535+37	.44441414+38	-.72572956+38	-.69692185+37

ALGORITHM 3

.21509098+23	.37689335+23	-.54314498+23	.28410370+22	.16079125+22
.79533619+22	.14525651+23	-.21647558+23	.16597523+22	.41520431+21
.13964253+23	.25293759+23	-.37904181+23	.28883682+22	.86747831+21
-.24786808+23	-.43189835+23	.62226788+23	-.31410334+22	-.19729366+22
.13593857+23	.23272569+23	-.32866320+23	.12262096+22	.11813435+22

Tabell 1 sid 5 P-matrisen beräknad utan symmetrisering.

SAMPLING INTERVAL NR 1

ALGORITHM 1

136.46368	47.672081	44.716486	-94.120839	69.152602
47.672081	30.424687	2.3646089	-26.479555	21.012749
44.716486	2.3646089	156.81245	-108.82776	20.922475
-94.120839	-26.479555	-108.82776	124.96147	-52.687397
69.152602	21.012749	20.922475	-52.687397	46.912678

ALGORITHM 2

136.46367	47.672080	44.716486	-94.120839	69.152603
47.672080	30.424687	2.3646095	-26.479555	21.012748
44.716486	2.3646095	156.81245	-108.82777	20.922476
-94.120839	-26.479555	-108.82777	124.96147	-52.687397
69.152603	21.012748	20.922476	-52.687397	46.912680

ALGORITHM 3

136.46368	47.672081	44.716488	-94.120840	69.152603
47.672081	30.424689	2.3646101	-26.479556	21.012749
44.716488	2.3646101	156.81245	-108.82777	20.922476
-94.120840	-26.479556	-108.82777	124.96147	-52.687397
69.152603	21.012749	20.922476	-52.687397	46.912680

Tabell 2 sid 1 P-matrisen beräknad med symmetrisering.

SAMPLING INTERVAL NR 5

ALGORITHM 1

24616.785	9261.8798	8428.7168	-18567.937	13077.288
9261.8798	3536.5117	2800.8072	-6786.2784	4927.2789
8428.7168	2800.8072	6423.1916	-8274.3445	4376.8029
-18567.937	-6786.2784	-8274.3445	15062.383	-9815.8931
13077.288	4927.2789	4376.8029	-9815.8931	6962.4443

ALGORITHM 2

21902.855	8123.6290	8693.9529	-17176.233	11598.658
8123.6290	3065.9673	2841.8761	-6163.2253	4309.5583
8693.9529	2841.8761	7124.7235	-8810.8019	4499.8134
-17176.233	-6163.2253	-8810.8019	14566.846	-9046.1278
11598.658	4309.5583	4499.8134	-9046.1278	6157.7183

ALGORITHM 3

24227.214	9068.2191	8753.9453	-18514.364	12857.179
9068.2191	3446.7752	2898.2504	-6726.3723	4820.0584
8753.9453	2898.2504	6787.3181	-8644.6484	4540.6461
-18514.364	-6726.3723	-8644.6484	15224.706	-9775.1726
12857.179	4820.0584	4540.6461	-9775.1726	6838.0444

Tabell 2 sid 2 P-matrisen beräknad med symmetrisering.

SAMPLING INTERVAL NR 10

ALGORITHM 1

24615.636	9261.4176	8428.3478	-18567.119	13076.592
9261.4176	3536.3291	2800.6482	-6785.9434	4927.0030
8428.3478	2800.6482	6423.0297	-8274.0535	4376.5652
-18567.119	-6785.9434	-8274.0535	15061.784	-9815.3882
13076.592	4927.0030	4376.5652	-9815.3882	6962.0307

ALGORITHM 2

23103.201	8737.2402	7500.9182	-17202.960	12282.902
8737.2402	3355.6242	2470.1458	-6308.2670	4652.1103
7500.9182	2470.1458	5934.5906	-7481.3645	3887.6988
-17202.960	-6308.2670	-7481.3645	13855.539	-9098.3762
12282.902	4652.1103	3887.6988	-9098.3762	6545.5180

ALGORITHM 3

25988.734	9727.2816	9312.7117	-19813.762	13798.780
9727.2816	3694.1373	3104.1262	-7212.2590	5171.4473
9312.7117	3104.1262	6938.7291	-9041.8789	4843.5356
-19813.762	-7212.2590	-9041.8789	16174.851	-10471.292
13798.780	5171.4473	4843.5356	-10471.292	7341.9142

Tabell 2 sid 3 P-matrisen beräknad med symmetrisering.

SAMPLING INTERVAL NR 25

ALGORITHM 1

24617.435	9262.1206	8428.8507	-18568.349	13077.499
9262.1206	3536.5999	2800.8596	-6786.4319	4927.3553
8428.8507	2800.8596	6423.2347	-8274.4376	4376.8351
-18568.349	-6786.4319	-8274.4376	15062.647	-9816.0144
13077.499	4927.3553	4376.8351	-9816.0144	6962.4846

ALGORITHM 2

25271.500	9536.6639	8374.6379	-18909.116	13437.080
9536.6639	3649.8740	2796.3077	-6939.5508	5077.4303
8374.6379	2796.3077	6255.8068	-8150.1552	4355.9021
-18909.116	-6939.5508	-8150.1552	15187.102	-10007.878
13437.080	5077.4303	4355.9021	-10007.878	7160.0483

ALGORITHM 3

27914.819	10423.425	10340.484	-21485.667	14803.879
10423.425	3944.1521	3485.4121	-7818.6979	5535.8108
10340.484	3485.4121	7458.4894	-9927.6084	5377.7832
-21485.667	-7818.6979	-9927.6084	17622.320	-11344.332
14803.879	5535.8108	5377.7832	-11344.332	7865.8201

Tabell 2 sid 4 P-matrisen beräknad med symmetrisering.

SAMPLING INTERVAL NR 30

ALGORITHM 1

24616.408	9261.8085	8428.6968	-18567.778	13077.123
9261.8085	3536.5089	2800.8399	-6786.2796	4927.2540
8428.6968	2800.8399	6423.1494	-8274.3403	4376.8054
-18567.778	-6786.2796	-8274.3403	15062.345	-9815.8358
13077.123	4927.2540	4376.8054	-9815.8358	6962.3757

ALGORITHM 2

25756.885	9647.7460	9238.1309	-19661.351	13671.433
9647.7460	3666.0242	3084.4865	-7161.0790	5128.3859
9238.1309	3084.4865	6917.6945	-9008.2894	4800.4371
-19661.351	-7161.0790	-9008.2894	16087.338	-10386.956
13671.433	5128.3859	4800.4371	-10386.956	7272.0765

ALGORITHM 3

22962.807	8640.6010	7901.9899	-17339.620	12194.520
8640.6010	3302.9196	2603.2206	-6324.6523	4596.1326
7901.9899	2603.2206	6277.0519	-7892.8286	4093.1281
-17339.620	-6324.6523	-7892.8286	14155.179	-9159.1840
12194.520	4596.1326	4093.1281	-9159.1840	6491.0270

Tabell 2 sid 5 P-matrisen beräknad med symmetrisering.

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	11	11	6	11	17	58
	MEAN ERROR	2	2	1	2	2	6
5	MAX ERROR	16	20	61	95	74	27
	MEAN ERROR	3	4	10	20	11	9
10	MAX ERROR	51	40	144	178	181	185
	MEAN ERROR	9	9	28	33	29	33
25	MAX ERROR	15	42	185	70	182	63
	MEAN ERROR	3	7	31	13	38	14
30	MAX ERROR	30	70	158	104	134	125
	MEAN ERROR	9	12	31	16	26	22

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	22	23	13	14	32	35
	MEAN ERROR	2	3	2	2	3	4
5	MAX ERROR	22	41	32	152	102	183
	MEAN ERROR	3	5	7	20	16	26
10	MAX ERROR	59	29	45	290	81	36
	MEAN ERROR	6	4	9	35	18	15
25	MAX ERROR	49	50	56	107	105	111
	MEAN ERROR	7	8	11	15	22	17
30	MAX ERROR	5	22	353	160	79	127
	MEAN ERROR	1	4	36	21	10	22

Tabell 3 sid 1 Relativfelen hos algoritmerna.

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	4	4	7	8	2	3
	MEAN ERROR	1	1	1	2	0	1
5	MAX ERROR	2266	5016	4883	56587	27018	42419
	MEAN ERROR	183	404	410	4535	2174	3399
10	MAX ERROR	127	218	521	1238	85	825
	MEAN ERROR	11	20	63	114	16	86
25	MAX ERROR	649	739	1282	860	1945	224
	MEAN ERROR	56	63	118	98	172	34
30	MAX ERROR	348	318	860	1222	1704	3151
	MEAN ERROR	31	30	98	111	151	278

TOTAL FOR 15 SYSTEMS

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
TOTAL	MAX ERROR	2266	5016	4883	56587	27018	42419
TOTAL	MEAN ERROR	12	17	37	93	56	80

Tabell 3 sid 2 Relativfelen hos algoritmerna

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 5 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	9	9	62	62	19	19
	MEAN ERROR	2	2	7	7	3	3
5	MAX ERROR	100	806	647927	245319	281487	308732
	MEAN ERROR	38	196	76038	28197	33837	35792
10	MAX ERROR	1554	5880	591413	1115558	150235	457001
	MEAN ERROR	154	610	71472	132039	16142	54221
25	MAX ERROR	279	697	581889	665391	256618	820504
	MEAN ERROR	69	196	75971	82370	33847	96306
30	MAX ERROR	3551	3487	371730	483793	32558	852423
	MEAN ERROR	340	396	46207	62546	8127	105771

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 5 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	10	10	23	57	10	10
	MEAN ERROR	2	2	4	9	2	1
5	MAX ERROR	2496	22205	6814	73021	103643	183287
	MEAN ERROR	1491	14224	1939	34174	55928	120916
10	MAX ERROR	3840	23974	171277	131375	69159	137424
	MEAN ERROR	2323	9949	72898	51181	36110	93141
25	MAX ERROR	1546	58090	28130	52462	68707	169221
	MEAN ERROR	943	31688	14741	14792	26817	71062
30	MAX ERROR	4916	125104	56774	91162	40292	218738
	MEAN ERROR	2322	55277	24541	40612	13950	131266

Tabell 4 sid 1 Relativfelen hos algoritmerna.

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 5 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	3	3	2	5	3	5
	MEAN ERROR	1	1	1	1	1	1
5	MAX ERROR	430	524	300750	558650	527941	591674
	MEAN ERROR	262	167	78100	196639	73435	97107
10	MAX ERROR	199	1064	658830	463146	506407	369047
	MEAN ERROR	74	588	493410	145603	291512	136331
25	MAX ERROR	240	879	292647	774435	616731	537031
	MEAN ERROR	119	666	119739	588222	214582	303703
30	MAX ERROR	561	222	463636	578091	277542	591041
	MEAN ERROR	149	107	299275	402902	84041	246929

TOTAL FOR 15 SYSTEMS

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 5 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
TOTAL	MAX ERROR	15733	833171	1657211	2733194	1810442	7996619
TOTAL	MEAN ERROR	418	7655	55401	63852	60041	124334

Tabell 4 sid 2 Relativfelen hos algoritmerna.

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 10 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	23	23	64	71	43	57
	MEAN ERROR	3	3	8	9	5	5
5	MAX ERROR	643	997	46377	42908	30479	144851
	MEAN ERROR	412	413	23665	12280	16624	42288
10	MAX ERROR	3415	59893	1884233	7910675	4843573	4238856
	MEAN ERROR	2312	56663	1658191	7453845	4679552	3302122
25	MAX ERROR	1159	13889	1780273	1500751	5680518	43894568
	MEAN ERROR	1026	13103	1693558	1369009	5470965	42058729
30	MAX ERROR	781	11168	8582411	1656572	4666473	18117122
	MEAN ERROR	340	8322	8189301	1386127	4129514	17183568

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 10 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	5	5	7	9	6	6
	MEAN ERROR	2	2	2	2	2	2
5	MAX ERROR	18922	620280	32435747	21970934	51813816	60619534
	MEAN ERROR	6359	332960	28507242	17097691	45258224	39921764
10	MAX ERROR	74076	2315242	********	71434324	99367682	********
	MEAN ERROR	53984	1668478	********	51193817	83435034	********
25	MAX ERROR	61340	6394703	********	********	********	0
	MEAN ERROR	25325	4337562	********	********	********	0
30	MAX ERROR	217769	918815	********	********	18446381	0
	MEAN ERROR	137616	824998	********	********	14629899	0

Tabell 5 sid 1 Relativfelen hos algoritmerna.

SYSTEM N= 5 MY= 3 MAGNITUDE OF FI 10 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	6	6	13	10	7	5
	MEAN ERROR	1	1	3	3	2	3
5	MAX ERROR	1261	107422	940668	152213	172415	494893
	MEAN ERROR	499	89317	697208	114789	131252	236529
10	MAX ERROR	4036	374197	217622	781211	304895	476007
	MEAN ERROR	2627	245489	157017	518899	197224	367190
25	MAX ERROR	2674	146519	310332	245321	115710	1756218
	MEAN ERROR	1567	90479	228973	109650	69780	1226946
30	MAX ERROR	2405	83681	519549	80526	359620	1141794
	MEAN ERROR	1877	61793	360835	32484	208086	752727

TOTAL FOR 15 SYSTEMS

SYSTEM N= 5 MY= 3 MAGNITUDE OF FI 10 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
TOTAL	MAX ERROR	335927	93672008	********	********	********	********
TOTAL	MEAN ERROR	15529	2852346	-********	********	********	46980081

Tabell 5 sid 2 Relativfelen hos algoritmerna.

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 10

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	5	5	154	200	103	91
	MEAN ERROR	3	3	17	22	13	12
5	MAX ERROR	7	10	49	33	24	156
	MEAN ERROR	3	5	16	11	12	31
10	MAX ERROR	19	8	97	90	41	76
	MEAN ERROR	5	5	24	17	16	22
25	MAX ERROR	16	7	19	69	34	78
	MEAN ERROR	5	4	6	15	14	11
30	MAX ERROR	11	9	123	43	55	33
	MEAN ERROR	5	5	18	10	16	13

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 10

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	5	5	15	16	22	23
	MEAN ERROR	3	3	4	5	4	5
5	MAX ERROR	9	8	28	27	34	19
	MEAN ERROR	5	3	10	12	15	5
10	MAX ERROR	5	6	21	22	24	20
	MEAN ERROR	3	3	8	10	9	8
25	MAX ERROR	5	5	22	14	34	22
	MEAN ERROR	2	2	10	6	13	7
30	MAX ERROR	5	6	16	10	19	24
	MEAN ERROR	2	3	6	4	8	12

Tabell 6 sid 1 Relativfelen hos algoritmerna.

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 10

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	2291	2291	24415	18635	25212	23020
	MEAN ERROR	187	187	1970	1513	2034	1861
5	MAX ERROR	11	8	57	186	56	24
	MEAN ERROR	3	4	11	28	14	7
10	MAX ERROR	16	23	87	32	162	39
	MEAN ERROR	6	6	15	6	20	13
25	MAX ERROR	17	23	58	50	119	63
	MEAN ERROR	4	6	10	11	19	13
30	MAX ERROR	14	17	119	60	102	53
	MEAN ERROR	4	4	15	16	19	17

TOTAL FOR 15 SYSTEMS

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 10

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
TOTAL	MAX ERROR	2291	2291	24415	18635	25212	23020
TOTAL	MEAN ERROR	10	11	96	77	86	79

Tabell 6 sid 2 Relativfelen hos algoritmerna.

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 10 MAGNITUDE OF TET 10

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	54	54	969	726	852	1047
	MEAN ERROR	6	6	113	91	104	107
5	MAX ERROR	322	1795	5127834	15759770	9391995	4754878
	MEAN ERROR	151	514	2067797	6883929	3758272	1411687
10	MAX ERROR	323	3954	2633121	2907100	12425314	22471010
	MEAN ERROR	113	1264	1109406	1431511	5349479	7506439
25	MAX ERROR	113	1017	5569250	5288158	34415504	22106450
	MEAN ERROR	36	289	2548092	2263610	14812950	11608715
30	MAX ERROR	183	3375	9062587	3762394	14903103	18010394
	MEAN ERROR	45	1159	3636795	1550941	6358363	6945023

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 10 MAGNITUDE OF TET 10

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	7	7	59	76	100	81
	MEAN ERROR	2	2	13	13	15	16
5	MAX ERROR	6136	120886	********	********	********	66117196
	MEAN ERROR	4191	83628	********	82357671	********	23246521
10	MAX ERROR	4325	143497	49729292	********	********	********
	MEAN ERROR	2965	116140	18885109	********	********	********
25	MAX ERROR	2566	80597	********	********	83504365	********
	MEAN ERROR	2025	48316	********	********	57448577	********
30	MAX ERROR	7204	291735	********	********	31877592	********
	MEAN ERROR	4520	180892	72970829	********	19136674	59507933

Tabell 7 sid 1 Relativfelen hos algoritmerna.

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 10 MAGNITUDE OF TET 10

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	30	30	403	226	593	433
	MEAN ERROR	6	6	62	42	85	81
5	MAX ERROR	1000	9117	16830189	28698958	17514217	4603463
	MEAN ERROR	140	1943	2296913	4131164	1966948	1895417
10	MAX ERROR	501	12612	7765834	8400241	4372572	20556352
	MEAN ERROR	93	2172	2010763	1609684	690841	3260176
25	MAX ERROR	488	10755	8919489	10895583	13230148	9844701
	MEAN ERROR	97	2528	2315406	1813873	2596390	1284713
30	MAX ERROR	861	4725	5198039	28997067	4840498	10336017
	MEAN ERROR	138	1628	1304801	6048742	2196301	2718050

TOTAL FOR 15 SYSTEMS

SYSTEM N= 5 NY= 3 MAGNITUDE OF FI 10 MAGNITUDE OF TET 10

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
TOTAL	MAX ERROR	26014	691735	********	********	********	********
TOTAL	MEAN ERROR	577	19862	53240704	51934574	39697520	13174987

Tabell 7 sid 2 Relativfelen hos algoritmerna.

SYSTEM N=10 NY= 4 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	140	140	1755	1167	1167	1314
	MEAN ERROR	8	8	73	65	44	42
5	MAX ERROR	36	25	72	179	139	80
	MEAN ERROR	11	12	15	26	18	15
10	MAX ERROR	145	34	374	136	427	396
	MEAN ERROR	12	7	104	50	103	92
25	MAX ERROR	66	85	235	488	270	880
	MEAN ERROR	8	14	80	141	33	123
30	MAX ERROR	114	28	312	268	625	407
	MEAN ERROR	10	8	28	51	154	51

SYSTEM N=10 NY= 4 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	21	21	35	53	132	141
	MEAN ERROR	3	3	5	6	6	6
5	MAX ERROR	1412	528	3567	4935	1163	4890
	MEAN ERROR	75	47	148	173	59	240
10	MAX ERROR	806	1809	1310	1522	931	5639
	MEAN ERROR	41	89	217	194	128	356
25	MAX ERROR	112	696	2459	3358	3675	9891
	MEAN ERROR	20	47	180	310	290	406
30	MAX ERROR	668	458	1058	2441	5607	2869
	MEAN ERROR	38	45	188	312	277	179

Tabell 8 sid 1 Relativfelen hos algoritmerna.

SYSTEM N=10 NY= 4 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	13	11	135	106	17	17
	MEAN ERROR	2	2	5	4	2	2
5	MAX ERROR	133336	137774	102034	226099	89886	255682
	MEAN ERROR	2689	2780	2071	4662	1830	5144
10	MAX ERROR	201	142	1592	4644	848	3639
	MEAN ERROR	28	31	346	465	231	358
25	MAX ERROR	185	259	1090	5314	856	1222
	MEAN ERROR	32	39	224	583	106	231
30	MAX ERROR	162	338	2012	2110	747	5912
	MEAN ERROR	29	39	391	446	168	701

TOTAL FOR 7 SYSTEMS

SYSTEM N=10 NY= 4 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
TOTAL	MAX ERROR	133336	137774	102034	226099	89886	255682
TOTAL	MEAN ERROR	100	116	234	307	161	347

Tabell 8 sid 2 Relativfelen hos algoritmerna

SYSTEM N=10 NY= 4 MAGNITUDE OF FI 5 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	25	25	22	23	18	19
	MEAN ERROR	3	3	4	4	3	3
5	MAX ERROR	107228	45857	2713681	4445603	1439370	4735287
	MEAN ERROR	4141	9681	230831	452497	99967	217059
10	MAX ERROR	1083739	15260376	********	********	********	********
	MEAN ERROR	48140	1783983	19564059	20911749	20612612	95546929
25	MAX ERROR	269761	7114177	26706003	********	********	********
	MEAN ERROR	41559	1360721	7786665	31031979	16995056	56668221
30	MAX ERROR	205935	4051560	63428172	********	********	********
	MEAN ERROR	46088	838026	13508503	19907153	18424909	********

SYSTEM N=10 NY= 4 MAGNITUDE OF FI 5 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	35	35	75	94	52	21
	MEAN ERROR	3	3	6	7	4	3
5	MAX ERROR	91813	261338	496417	1685140	1941700	2176818
	MEAN ERROR	11176	34026	61855	115961	152909	120688
10	MAX ERROR	366301	9628577	2007620	8286246	4645037	7815828
	MEAN ERROR	53694	1094163	409295	688205	776751	2246540
25	MAX ERROR	1762139	5656309	5452354	5077103	7137629	59062608
	MEAN ERROR	258183	1431055	761003	782634	1266698	6816424
30	MAX ERROR	477289	17875518	1933558	5373096	7114501	17640333
	MEAN ERROR	79573	1957048	592074	1575005	460749	2183868

Tabell 9 sid 1 Relativfelen hos algoritmerna.

SYSTEM N=10 NY= 4 MAGNITUDE OF FI 5 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	87	87	60	19	78	122
	MEAN ERROR	4	4	4	3	4	5
5	MAX ERROR	36559	162332	596997	520038	722927	3071185
	MEAN ERROR	15522	74875	76213	98737	59600	220391
10	MAX ERROR	139485	7545980	8144082	11014762	2866144	37868288
	MEAN ERROR	81484	3224687	585240	896386	797295	14293233
25	MAX ERROR	199248	1980189	835736	8749704	3136992	40389528
	MEAN ERROR	97067	943041	353244	1168489	507846	15517888
30	MAX ERROR	279261	4849954	3199427	7038362	6693374	13645574
	MEAN ERROR	146641	2097982	319357	615892	343162	1980901

TOTAL FOR 7 SYSTEMS

SYSTEM N=10 NY= 4 MAGNITUDE OF FI 5 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
TOTAL	MAX ERROR	4222368	********	********	********	********	********
TOTAL	MEAN ERROR	43117	1073820	49223614	6385457	6948673	********

Tabell 9 sid 2 Relativfelen hos algoritmerna.

SYSTEM N=10 NY= 4 MAGNITUDE OF FI 10 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	13	13	91	49	21	49
	MEAN ERROR	2	2	5	5	3	4
5	MAX ERROR	282343	1722126	1998681	2716131	2057703	14194303
	MEAN ERROR	113550	201916	229399	807742	478072	2593217
10	MAX ERROR	3225239	********	********	********	********	2578294
	MEAN ERROR	847599	30800335	********	********	********	26384592
25	MAX ERROR	3422384	********	85114307	0	9491891	0
	MEAN ERROR	924736	********	********	0	57370576	0
30	MAX ERROR	3803987	********	********	0	2346008	0
	MEAN ERROR	1457870	********	********	0	11982093	0

SYSTEM N=10 NY= 4 MAGNITUDE OF FI 10 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	102	102	85	173	64	68
	MEAN ERROR	6	6	7	9	7	7
5	MAX ERROR	12967880	44164248	********	********	********	********
	MEAN ERROR	560474	2327525	23089943	41764396	23704353	43850728
10	MAX ERROR	23894396	********	4377693	********	********	********
	MEAN ERROR	1302757	********	********	********	********	********
25	MAX ERROR	23382333	********	3387	674	4080587	0
	MEAN ERROR	1110351	76350314	47758	8304	53017848	0
30	MAX ERROR	31807608	********	257	40	1568008	0
	MEAN ERROR	1785485	74557699	14140	351	59557044	0

Tabell 10 sid 1 Relativfelen hos algoritmerna.

SYSTEM N=10 NY= 4 MAGNITUDE OF FI 10 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	100	100	188	425	150	245
	MEAN ERROR	5	5	10	15	7	9
5	MAX ERROR	139412	1597084	1912124	3780894	2283950	8476201
	MEAN ERROR	38588	294953	518832	529459	570112	1233234
10	MAX ERROR	2391176	********	49828375	********	11914532	********
	MEAN ERROR	886801	********	19430054	43729123	4664885	********
25	MAX ERROR	4311031	********	30544495	833	59896416	0
	MEAN ERROR	3419926	********	4767058	7781	24405820	0
30	MAX ERROR	831263	18662618	********	6	********	12718432
	MEAN ERROR	414970	6301217	57470885	5	72829894	********

TOTAL FOR 7 SYSTEMS

SYSTEM N=10 NY= 4 MAGNITUDE OF FI 10 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
TOTAL	MAX ERROR	87106623	********	********	********	********	********
TOTAL	MEAN ERROR	1405126	********	********	********	********	********

Tabell 10 sid 2 Relativfelen hos algoritmerna.

SYSTEM N=15 NY= 5 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	852	852	786	1410	236	675
	MEAN ERROR	13	13	14	19	5	11
5	MAX ERROR	2540	3941	6313	4666	1470	2205
	MEAN ERROR	58	90	122	124	72	126
10	MAX ERROR	12617	29456	58643	49263	125976	63012
	MEAN ERROR	287	813	1320	1028	1772	2071
25	MAX ERROR	13406	20737	44940	18892	31773	62975
	MEAN ERROR	308	503	983	710	702	1433
30	MAX ERROR	16281	32212	43850	19372	33132	44352
	MEAN ERROR	264	818	715	797	987	1687

SYSTEM N=15 NY= 5 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	233	233	439	576	577	577
	MEAN ERROR	7	7	17	17	12	11
5	MAX ERROR	8025	3942	17359	20306	13926	16012
	MEAN ERROR	139	113	291	434	249	368
10	MAX ERROR	4672	14940	23902	17713	26551	62152
	MEAN ERROR	200	472	997	1001	1016	2177
25	MAX ERROR	8408	6528	26695	16710	11878	50466
	MEAN ERROR	255	324	933	1079	729	1765
30	MAX ERROR	7549	1837	30790	26144	26182	31980
	MEAN ERROR	295	151	1102	959	986	1427

Tabell 11 sid 1 Relativfelen hos algoritmerna.

SYSTEM N=15 NY= 5 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	30	26	24	81	21	33
	MEAN ERROR	3	3	4	6	3	4
5	MAX ERROR	204	2123	2410	5087	1058	1626
	MEAN ERROR	25	54	104	156	88	131
10	MAX ERROR	1887	7854	16436	34246	36800	23616
	MEAN ERROR	87	183	500	769	998	1153
25	MAX ERROR	1607	2418	22112	21714	21561	36420
	MEAN ERROR	64	122	563	810	793	1298
30	MAX ERROR	3592	3870	4004	16179	44521	16030
	MEAN ERROR	84	130	309	757	1218	688

TOTAL FOR 7 SYSTEMS

SYSTEM N=15 NY= 5 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
TOTAL	MAX ERROR	33249	112819	408725	329405	397736	531921
TOTAL	MEAN ERROR	161	358	1417	1439	1421	2408

Tabell 11 sid 2 Relativfelen hos algoritmerna.

SYSTEM N=15 NY= 5 MAGNITUDE OF FI 5 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	TYPE OF SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	341	335	92	182	284	233
	MEAN ERROR	6	6	7	9	7	7
5	MAX ERROR	12671	23079	7702942	3799894	20984323	3326850
	MEAN ERROR	1933	4714	376362	267609	672191	217192
10	MAX ERROR	91887244	********	********	********	********	********
	MEAN ERROR	75116584	********	********	********	********	********
25	MAX ERROR	********	93446	24129047	0	276	0
	MEAN ERROR	********	1710229	62982535	0	30871	0
30	MAX ERROR	81279914	27291	3277842	0	172	0
	MEAN ERROR	43165076	201448	7794886	0	1832	0

SYSTEM N=15 NY= 5 MAGNITUDE OF FI 5 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	TYPE OF SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	1011	1011	102	659	229	72
	MEAN ERROR	13	13	5	12	5	4
5	MAX ERROR	2565021	8248641	11758717	********	15903271	80936848
	MEAN ERROR	36946	227309	605306	2109883	955039	2905624
10	MAX ERROR	54351007	********	********	********	********	********
	MEAN ERROR	2200331	43011369	********	********	********	********
25	MAX ERROR	35066132	********	87229963	6247713	425477	238373
	MEAN ERROR	1756685	58009328	********	********	28269637	602629
30	MAX ERROR	7601189	********	22412829	4478	1753919	110365
	MEAN ERROR	849632	********	********	266578	18570012	2810817

Tabell 12 sid 1 Relativfelen hos algoritmerna.

SYSTEM N=15 NY= 5 MAGNITUDE OF FI 5 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	266	252	358	969	262	154
	MEAN ERROR	7	7	12	18	8	7
5	MAX ERROR	906245	13310071	7974532	8673149	3481353	31569977
	MEAN ERROR	15692	143043	102542	194987	52685	391849
10	MAX ERROR	19705310	********	********	********	********	********
	MEAN ERROR	706516	18936581	12771495	16016729	10957065	********
25	MAX ERROR	********	********	********	********	********	********
	MEAN ERROR	2826581	13224488	13905045	7671838	10953234	********
30	MAX ERROR	********	********	********	********	********	10185581
	MEAN ERROR	3361254	9620591	21399075	25993956	9400531	********

TOTAL FOR 7 SYSTEMS

SYSTEM N=15 NY= 5 MAGNITUDE OF FI 5 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
TOTAL	MAX ERROR	********	********	********	********	********	********
TOTAL	MEAN ERROR	38066992	********	********	********	********	********

Tabell 12 sid 2 Relativfelen hos algoritmerna.

SYSTEM N=20 NY= 5 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	623	662	2092	2472	369	737
	MEAN ERROR	11	11	23	24	10	13
5	MAX ERROR	1795	1215	2290	4033	3788	3593
	MEAN ERROR	78	76	125	207	139	194
10	MAX ERROR	48827	712682	216546	200372	223541	1240318
	MEAN ERROR	1517	7127	5921	5014	5910	14100
25	MAX ERROR	66895	336823	445211	397459	553930	334426
	MEAN ERROR	1338	5778	5452	7483	11032	10158
30	MAX ERROR	223202	378415	373986	932831	954943	1595616
	MEAN ERROR	2373	6618	7718	9902	12980	27932

SYSTEM N=20 NY= 5 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	290	279	177	241	290	246
	MEAN ERROR	5	5	9	9	6	6
5	MAX ERROR	3023	9066	5986	4663	2376	13608
	MEAN ERROR	108	155	151	152	116	314
10	MAX ERROR	287231	813871	174809	233794	300253	642165
	MEAN ERROR	4738	13470	5100	4818	11405	13819
25	MAX ERROR	58179	460702	505492	225216	502768	1038601
	MEAN ERROR	2114	10803	12159	6758	17146	28285
30	MAX ERROR	71070	305314	394111	227781	279310	640189
	MEAN ERROR	3139	9080	12035	8372	6699	17967

Tabell 13 sid 1 Relativfelen hos algoritmerna.

SYSTEM N=20 NY= 5 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	74	74	193	193	106	128
	MEAN ERROR	5	5	9	11	5	6
5	MAX ERROR	22130	34814	121188	266875	63551	92180
	MEAN ERROR	268	470	967	1897	868	1226
10	MAX ERROR	15126	36596	105114	125607	84498	105441
	MEAN ERROR	653	1572	4318	4945	4802	5498
25	MAX ERROR	73471	109183	203260	234424	421188	233273
	MEAN ERROR	1704	3554	7793	6970	10856	7888
30	MAX ERROR	41923	82290	236776	207740	325287	169674
	MEAN ERROR	976	1898	7548	5437	8427	10274

SYSTEM N=20 NY= 5 MAGNITUDE OF FI 1 MAGNITUDE OF TET 1

SAMPLING INTERVAL	* TYPE OF * SYMMETRY	ALGORITHM 1 MEAN VALUE	ALGORITHM 1 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 2 MEAN VALUE	ALGORITHM 2 UPPER TRIANGLE	ALGORITHM 3 MEAN VALUE	ALGORITHM 3 UPPER TRIANGLE
1	MAX ERROR	2135	2078	728	1282	1041	941
	MEAN ERROR	22	22	23	28	17	21
5	MAX ERROR	2760	1523	5950	6218	4375	12437
	MEAN ERROR	57	55	216	218	138	344
10	MAX ERROR	17124	31869	117913	207550	389962	388629
	MEAN ERROR	397	718	5020	10834	9432	7953
25	MAX ERROR	20232	12555	379595	801179	277568	885645
	MEAN ERROR	429	564	11003	13946	6042	30182
30	MAX ERROR	35343	59194	305884	734702	568373	1435560
	MEAN ERROR	540	1002	6409	16356	11876	16774

Tabell 13 sid 28 Relativfelen hos algoritmerna.

Appendix

```
      SUBROUTINE SYSTEM(IA,N,NY,FI,TET,LA,LB,IZ)
C
C  GENERATES A RANDOM SYSTEM WITH MATRIX ELEMENTS OF
C  RECTANGULAR DISTRIBUTION.
C  AUTHOR LEIF ANDERSSON
C
C  IA - DIMENSION PARAMETER
C  FI - SYSTEM MATRIX ORDER N*N
C  TET - SYSTEM MATRIX ORDER NY*N
C  LA - DISTRIBUTION LIMIT FOR FI
C  LB - DISTRIBUTION LIMIT FOR TET
C  IZ - IZ IS TO HAVE AN ODD INITIAL VALUE
C
C  SUBROUTINE REQUIRED
C           NONE
C
      DIMENSION FI(IA,IA), TET(IA,IA)
      DO 15 I=1,N
      DO 15 J=1,N
      IZ=IZ*259+1
      IZ=IABS(IZ)
      IZ=MOD(IZ,131072)
   15 FI(I,J)=2*LA*(-0.5+IZ*0.7629395E-5)
      DO 20 I=1,NY
      DO 20 J=1,N
      IZ=IZ*259+1
      IZ=IABS(IZ)
      IZ=MOD(IZ,131072)
   20 TET(I,J)=2*LB*(-0.5+IZ*0.7629395E-5)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE DIFF(IA,N,A,D,IMAX,MEAN)
C
C     COMPUTES THE MAXIMUM AND MEAN RELATIVE DIFFERENCE
C     BETWEEN A SINGLE PRECISION AND A DOUBLE PRECISION
C     SQUARE MATRIX. THE DIFFERENCES ARE MULTIPLIED BY
C     2**27 AND CONVERTED TO INTEGERS.
C     AUTHOR LEIF ANDERSSON
C
C     IA - DIMENSION PARAMETER
C     A - SINGLE PRECISION MATRIX, ORDER N*N
C     D - DOUBLE PRECISION MATRIX, ORDER N*N
C     IMAX - MAX DIFFERENCE
C     MEAN - MEAN DIFFERENCE
C
C     SUBROUTINE REQUIRED
C             NONE
C
      DIMENSION A(IA,IA)
      DOUBLE PRECISION D(IA,IA)
      X=0.
      Y=0.
      DO 10 I=1,N
      DO 10 J=1,N
      Z=(A(I,J)-D(I,J))/D(I,J)
      Z=(2**27)*ABS(Z)
      Y=Y+Z
   10 X=AMAX1(X,Z)
      MEAN=INT(Y/(N*N))
      IMAX=INT(X)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE KALM1(IA,IB,N,NY,FI,TET,R1,R2,P,G,U,V,ISING)
C     COMPUTES THE P- AND GAIN MATRIX OF THE KALMAN THEORY.
C     AUTHOR LEIF ANDERSSON
C
C     IA, IB - DIMENSION PARAMETERS
C     FI - SYSTEM MATRIX ORDER N*N. NO DIMENSION LIMIT.
C     TET - SYSTEM MATRIX ORDER NY*N. MAX NY=40
C     R1 - COVARIANCE MATRIX OF NOISE ON STATEVARIABLES.
C          ORDER N*N
C     R2 - COVARIANCE MATRIX OF NOISE ON OUTPUTS.
C          ORDER NY*NY.
C     P - COVARIANCE MATRIX OF ERROR IN ESTIMATION OF
C          STATEVARIABLES, ORDER N*N. CONTAINS P(T+1)
C          UPON RETURN.
C     G - GAIN MATRIX ORDER N*NY.
C     U, V - THESE MATRICES ARE USED IN THE COMPUTATIONS
C            BUT HAVE NO INPUT OR OUTPUT.
C     ISING - RETURNED 1 IF INVERSION HAS FAILED,
C             OTHERWISE 0.
C
C     NOTATION. FI' APPEARING IN COMMENTS DENOTES
C     FI TRANSPOSED.
C     ALGORITHM  P(T+1)=(FI-G*TET)*P(T)*(FI-G*TET)'+G*R2*G'+R1
C                        G=FI*P(T)*TET'*(TET*P(T)*TET'+R2)INV
C
C     SUBROUTINE REQUIRED
C             SYMIN
C
      DIMENSION FI(IA,IA), TET(IB,IA), R1(IA,IA), R2(IB,IB),
     *          P(IA,IA), G(IA,IB), U(IA,IA), V(IA,IA)
      NA=N-1
      NYA=NY-1
C
C  COMPUTATION OF G=P*TET'
      DO 10 I=1,N
      DO 10 J=1,NY
      SUM=0.
      DO 9 K=1,N
    9 SUM=SUM+P(I,K)*TET(J,K)
   10 G(I,J)=SUM
C
C  COMPUTATION OF U=(TET*G+R2)INV
      DO 15 I=1,NY
      DO 15 J=1,NY
      SUM=0.
      DO 14 K=1,N
   14 SUM=SUM+TET(I,K)*G(K,J)
   15 U(I,J)=SUM+R2(I,J)
      IF(NY.EQ.1)GO TO 21
      DO 16 I=1,NYA
      IM=I+1
      DO 16 J=IM,NY
      U(I,J)=(U(I,J)+U(J,I))/2
   16 U(J,I)=U(I,J)
      CALL SYMIN (NY,IA,ISING,U)
      IF(ISING.EQ.1)RETURN
C
C  COMPUTATION OF V=G*U
      DO 20 I=1,N
      DO 20 J=1,NY
      SUM=0.
      DO 19 K=1,NY
```

```
   19  SUM=SUM+G(I,K)*U(K,J)
   20  V(I,J)=SUM
       GO TO 25
   21  IF(ABS(U(1,1)-1E-15))65
       ISING=0
       SUM=U(1,1)
       DO 22 I=1,N
   22  V(I,1)=G(I,1)/SUM
C
C  COMPUTATION OF G=FI*V
   25  DO 30 I=1,N
       DO 30 J=1,NY
       SUM=0.
       DO 29 K=1,N
   29  SUM=SUM+FI(I,K)*V(K,J)
   30  G(I,J)=SUM
C
C  COMPUTATION OF U=FI-G*TET
       DO 35 I=1,N
       DO 35 J=1,N
       SUM=0.
       DO 34 K=1,NY
   34  SUM=SUM+G(I,K)*TET(K,J)
   35  U(I,J)=FI(I,J)-SUM
C
C  COMPUTATION OF V=U*P
       DO 40 I=1,N
       DO 40 J=1,N
       SUM=0.
       DO 39 K=1,N
   39  SUM=SUM+U(I,K)*P(K,J)
   40  V(I,J)=SUM
C
C  COMPUTATION OF P=V*U'
       DO 45 I=1,N
       DO 45 J=1,N
       SUM=0.
       DO 44 K=1,N
   44  SUM=SUM+V(I,K)*U(J,K)
   45  P(I,J)=SUM
C
C  COMPUTATION OF U=G*R2
       DO 50 I=1,N
       DO 50 J=1,NY
       SUM=0.
       DO 49 K=1,NY
   49  SUM=SUM+G(I,K)*R2(K,J)
   50  U(I,J)=SUM
C
C  COMPUTATION OF P=P+U*G'+R1
       DO 60 I=1,N
       DO 60 J=1,N
       SUM=0.
       DO 59 K=1,NY
   59  SUM=SUM+U(I,K)*G(J,K)
   60  P(I,J)=P(I,J)+R1(I,J)+SUM
       DO 61 I=1,NA
       IM=I+1
       DO 61 J=IM,N
       P(I,J)=(P(I,J)+P(J,I))/2
   61  P(J,I)=P(I,J)
       RETURN
   65  ISING=1
       RETURN
       END
```

```
      SUBROUTINE KALM2(IA,IB,N,NY,FI,TET,R1,R2,P,H,U,V,ISING)
C
C     COMPUTES THE P- AND GAIN MATRIX OF THE KALMAN THEORY.
C     AUTHOR LEIF ANDERSSON
C
C     IA, IB - DIMENSION PARAMETERS
C     FI - SYSTEM MATRIX ORDER N*N. NO DIMENSION LIMIT.
C     TET - SYSTEM MATRIX ORDER NY*N. MAX NY=40
C     R1 - COVARIANCE MATRIX OF NOISE ON STATEVARIABLES.
C          ORDER N*N
C     R2 - COVARIANCE MATRIX OF NOISE ON OUTPUTS.
C          ORDER NY*NY.
C     P - COVARIANCE MATRIX OF ERROR IN ESTIMATION OF
C          STATEVARIABLES, ORDER N*N. CONTAINS P(T+1)
C          UPON RETURN.
C     H - MODIFIED GAIN MATRIX. THE USUAL GAIN MATRIX IS OB-
C         TAINED THROUGH PREMULTIPLYING BY FI.
C     U, V - THESE MATRICES ARE USED IN THE COMPUTATIONS
C            BUT HAVE NO INPUT OR OUTPUT.
C     ISING - RETURNED 1 IF INVERSION HAS FAILED,
C             OTHERWISE 0.
C     NOTATION. FI' APPEARING IN COMMENTS DENOTES
C     FI TRANSPOSED.
C     ALGORITHM  P(T+1)=FI*(P(T)-H*TET*P(T))*FI'+R1
C                        H=P(T)*TET'*(TET*P(T)*TET'+R2)INV
C
C     SUBROUTINE REQUIRED
C             SYMIN
C
      DIMENSION FI(IA,IA), TET(IB,IA), R1(IA,IA), R2(IB,IB),
     *          P(IA,IA), H(IA,IB), U(IA,IA), V(IA,IA)
C
C  COMPUTATION OF V=P*TET
      DO 10 I=1,N
      DO 10 J=1,NY
      SUM=0.
      DO 9 K=1,N
    9 SUM=SUM+P(I,K)*TET(J,K)
   10 V(I,J)=SUM
C
C  COMPUTATION OF U=(TET*V+R2)INV
      DO 15 I=1,NY
      DO 15 J=I,NY
      SUM=0.
      DO 14 K=1,N
   14 SUM=SUM+TET(I,K)*V(K,J)
   15 U(I,J)=SUM+R2(I,J)
      IF(NY.EQ.1)GO TO 21
      DO 16 I=2,N
      I1=I-1
      DO 16 J=1,I1
```

```
   16  U(I,J)=U(J,I)
       CALL SYMIN (NY,IA,ISING,U)
       IF(ISING.EQ.1)RETURN
C
C  COMPUTATION OF H=V*U
       DO 20 I=1,N
       DO 20 J=1,NY
       SUM=0.
       DO 19 K=1,NY
   19  SUM=SUM+V(I,K)*U(K,J)
   20  H(I,J)=SUM
       GO TO 25
   21  IF(ABS(U(1,1)-1E-15))65
       ISING=0
       SUM=U(1,1)
       DO 22 I=1,N
   22  H(I,1)=V(I,1)/SUM
C
C  COMPUTATION OF U=P-H*V'
   25  DO 30 I=1,N
       DO 30 J=I,N
       SUM=0.
       DO 29 K=1,NY
   29  SUM=SUM+H(I,K)*V(J,K)
   30  U(I,J)=P(I,J)-SUM
       DO 31 I=2,N
       I1=I-1
       DO 31 J=1,I1
   31  U(I,J)=U(J,I)
C
C  COMPUTATION OF V=FI*U
       DO 40 I=1,N
       DO 40 J=1,N
       SUM=0.
       DO 39 K=1,N
   39  SUM=SUM+FI(I,K)*U(K,J)
   40  V(I,J)=SUM
C
C  COMPUTATION OF P=V*FI'+R1
       DO 45 I=1,N
       DO 45 J=I,N
       SUM=0.
       DO 44 K=1,N
   44  SUM=SUM+V(I,K)*FI(J,K)
   45  P(I,J)=SUM+R1(I,J)
       DO 46 I=2,N
       I1=I-1
       DO 46 J=1,I1
   46  P(I,J)=P(J,I)
       RETURN
   65  ISING=1
       RETURN
       END
```

```
      SUBROUTINE KALM3(IA,IB,N,NY,FI,TET,R1,R2,P,G,U,V,ISING)
C     COMPUTES THE P- AND GAIN MATRIX OF THE KALMAN THEORY.
C     AUTHOR LEIF ANDERSSON
C
C     IA, IB - DIMENSION PARAMETERS
C     FI - SYSTEM MATRIX ORDER N*N. NO DIMENSION LIMIT.
C     TET - SYSTEM MATRIX ORDER NY*N. MAX NY=40
C     R1 - COVARIANCE MATRIX OF NOISE ON STATEVARIABLES.
C          ORDER N*N
C     R2 - COVARIANCE MATRIX OF NOISE ON OUTPUTS.
C          ORDER NY*NY.
C     P - COVARIANCE MATRIX OF ERROR IN ESTIMATION OF
C          STATEVARIABLES, ORDER N*N. CONTAINS P(T+1)
C          UPON RETURN.
C     G - GAIN MATRIX ORDER N*NY.
C     U, V - THESE MATRICES ARE USED IN THE COMPUTATIONS
C            BUT HAVE NO INPUT OR OUTPUT.
C     ISING - RETURNED 1 IF INVERSION HAS FAILED,
C             OTHERWISE 0.
C     NOTATION. FI' APPEARING IN COMMENTS DENOTES
C     FI TRANSPOSED.
C     ALGORITHM  P(T+1)=(FI-G*TET)*P(T)*FI'+R1
C                        G=FI*P(T)*TET'*(TET*P(T)*TET'+R2)INV
C
C     SUBROUTINE REQUIRED
C             SYMIN
      DIMENSION FI(IA,IA), TET(IB,IA), R1(IA,IA), R2(IB,IB),
     *          P(IA,IA), G(IA,IB), U(IA,IA), V(IA,IA)
C
C  COMPUTATION OF G=P*TET'
      DO 10 I=1,N
      DO 10 J=1,NY
      SUM=0.
      DO 9 K=1,N
    9 SUM=SUM+P(I,K)*TET(J,K)
   10 G(I,J)=SUM
C
C  COMPUTATION OF U=(TET*G+R2)INV
      DO 15 I=1,NY
      DO 15 J=1,NY
      SUM=0.
      DO 14 K=1,N
   14 SUM=SUM+TET(I,K)*G(K,J)
   15 U(I,J)=SUM+R2(I,J)
      IF(NY.EQ.1)GO TO 21
      CALL SYMIN (NY,IA,ISING,U)
      IF(ISING.EQ.1)RETURN
C
C  COMPUTATION OF V=G*U
      DO 20 I=1,N
      DO 20 J=1,NY
      SUM=0.
      DO 19 K=1,NY
   19 SUM=SUM+G(I,K)*U(K,J)
   20 V(I,J)=SUM
      GO TO 25
   21 IF(ABS(U(1,1)-1E-15))65
      ISING=0
      SUM=U(1,1)
```

```
      DO 22 I=1,N
   22 V(I,1)=G(I,1)/SUM
C
C  COMPUTATION OF G=FI*V
   25 DO 30 I=1,N
      DO 30 J=1,NY
      SUM=0.
      DO 29 K=1,N
   29 SUM=SUM+FI(I,K)*V(K,J)
   30 G(I,J)=SUM
C
C  COMPUTATION OF U=FI-G*TET
      DO 35 I=1,N
      DO 35 J=1,N
      SUM=0.
      DO 34 K=1,NY
   34 SUM=SUM+G(I,K)*TET(K,J)
   35 U(I,J)=FI(I,J)-SUM
C
C  COMPUTATION OF V=U*P
      DO 40 I=1,N
      DO 40 J=1,N
      SUM=0.
      DO 39 K=1,N
   39 SUM=SUM+U(I,K)*P(K,J)
   40 V(I,J)=SUM
C
C  COMPUTATION OF P=V*FI'+R1
      DO 45 I=1,N
      DO 45 J=1,N
      SUM=0.
      DO 44 K=1,N
   44 SUM=SUM+V(I,K)*FI(J,K)
   45 P(I,J)=SUM+R1(I,J)
      RETURN
   65 ISING=1
      RETURN
      END
```