REGLERING AV TIDSVARIABLA SYSTEM MED KALMAN-TEORI

Håkan Brantmark

Examensarbete vid institutionen för reglerteknik vid LTH.

Ansvarig handledare: Björn Wittenmark.

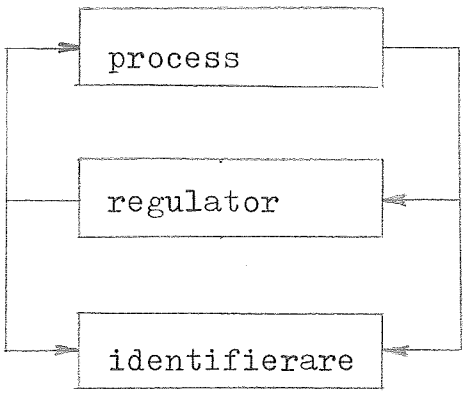
Innehållsförteckning.

Sammanfattning.

I "Stokastiska System" (SS) har behandlats hur linjära tidsinvarianta system utsatta för slumpartade störningar från omgivningen kan regleras medelst minimalvariansstrategi.
I följande arbete skall vi studera något enkelt linjärt system, exempelvis

$$y(t)+a(t)y(t-1) = b(t)u(t-k) + \lambda e(t)$$

där a(t) och b(t) är tidsberoende.
Med hjälp av Kalman teori skall vi ur insignal och utsignal uppskatta parametrarna och försöka styra systemet med en vanlig minimalvariansstrategi.



Genom att ta hänsyn till osäkerheten i uppskattningarna skall vi sedan söka härleda en modifierad minimalvariansstyrlag. Därefter skall vi genom simulering på datamaskin jämföra de olika regulatorernas effekt på några skilda system. Slutligen studerar vi något ett system där till skillnad från tidigare bruset är färgat.

För system som är svåra att styra i den bemärkelsen att b-parametrarna är små, visar det sig att den modifierade styrlagen ger ett avsevärt bättre resultat än den vanliga minimal varians styrlagen. Även för andra system är den modifierade styrlagen i allmänhet bättre.

Comprehension.

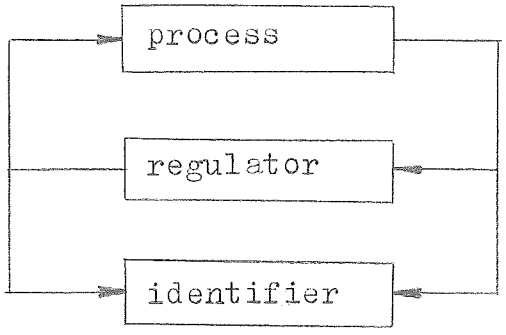
In "Stokastiska System" (SS) by K. J. Åström has been treated, how linear time-independent systems subject to stochastic perturbations from the sorroundings can be controlled by a minimal variance strategy.

In the following work we shall study some simple linear system, for instance:

$y(t) + a(t)y(t-1) = b(t)u(t-k) + e(t)$

where a(t) and b(t) are time-dependent.

With the help of Kalman-theory we shall estimate the parameters from input and output, and try to control the system with a common minimal variance strategy.



Then we shall try to derive a modified minimal variance strategy, by taking into consideration the uncertainty of the estimations. After that we shall compare the efficiency of the two regulators, when applicated to some different systems, by simulating on a dator. Finally we study somewhat a system, where as distinguished from earlierer the noise is coloured.

It will appear that, for processes which are difficult to control in the sense that the b-parameters are small, the modified strategy gives a much better result than the common minimal variance strategy. Generally the modified strategy is better also for other systems.

Problemställning.

Vi betraktar ett system som kan påverkas med en viss styrsignal och vars utsignal y kan observeras. Vi inför följande förutsättningar:

1. Det system som skall regleras antages vara linjärt med en insignal och en utsignal. Systemet antages vara tidsvariabelt.
2. Omgivningens inverkan på systemet kan karakteriseras med ett antal störningar, som antages vara realisationer av stationära normalprocesser med rationella spektra.
3. Systemets syfte är att utsignalens spridning skall vara så liten som möjligt (se nedan).
4. Styrlagen skall realiseras med en datamaskin. Regulatorn skall således vara ett samplat system.

Eftersom regulatorn skall vara ett samplat system väljer vi samplingsintervallet som tidsenhet. Efter att ha skrivit om vårt system på samplad form har vi följande insignal-utsignal samband:

$$y(t) + a_1(t)y(t-1) + \dots + a_n(t)y(t-n) =$$
$$b_0(t)u(t-k) + b_1(t)u(t-k-1) + \dots + b_n(t)u(t-k-n) +$$
$$+ \lambda(e(t) + c_1(t)e(t-1) + \dots + c_n(t)e(t-n)) \qquad (1)$$

Observera att förutsättningarna ovan är identiska med de i SS IV 4 utom på en viktig punkt : Systemets parametrar varierar i tiden. Vi känner därför ej parametrarnas värde (utom möjligen begynnelsevärdena) och dessa måste uppskattas ur tidigare styrsignaler och observerade utsignaler. Som i SS IV 4 kan vi formulera reglerproblemet på följande sätt:

Problem.

Givet det dynamiska system som beskrivs av ekvation (1). Bestäm en styrlag, det vill säga en funktion som ger u(t) som funktion av de mätvärden, som observerats upp till tidpunkten t (eller t-1), och av tidigare styrsignaler, sådan att då denna styrlag insättes i ekvation (1) Ey^2 blir så liten som möjligt.

Vi antar alltså i det följande att syftet är att hålla

utsignalen nära noll. Detta är ingen inskränkning ty vill vi att utsignalen skall antaga värdet y_0, kan vi använda vår regulator för att minimera $E(y-y_0)^2$.

Problemet att minimera Ey^2 kan uppfattas på två i princip olika sätt.

1. Vi kan lösa problemet så att Ey^2 får minimum <u>oberoende av någom speciell realisering.</u>
2. Vi kan lösa problemet så att vi minimerar Ey^2 betingat av att vi känner $y(t)$, $y(t-1)$, ... (eller $y(t-1)$, $y(t-2)$, ...).

I fortsättningen skall vi se problemet på det senare sättet, vilket bör vara det riktigare, eftersom man då hela tiden "gör det bästa möjliga av situationen".

Vårt problem är det samma som formuleras i SS IV 4. Om vårt system varit tidsinvariant hade vi alltså letts fram till den där härledda minimalvariansstrategin. Vår tanke blir då att ur tidigare utsignaler och styrsignaler på något sätt skaffa oss en uppskattning av systemets parametrar. Dessa uppskattningar kan vi sedan använda i ovan nämnda minimalvariansstrategi. Vårt första etappmål blir alltså att härleda bästa uppskattningar av systemets parametrar. För detta använder vi oss av en sats av Kalman.

<u>Sats.</u> (Kalman)

Vi betraktar problemet att uppskatta tillståndsvariablerna för ett tidsdiskret system som beskrivs av tillståndsekvationen:

$$x(t+1) = \Phi x(t) + v(t)$$

$$y(t) = \Theta x(t) + e(t)$$

Vi antar att $e(t)$ och $v(t)$ är realisationer av oberoende stationära stokastiska processer med

$$E\, v(t)v^T(t) = R_1$$

$$E\, v(t)e^T(t) = 0$$

$$E\, e(t)e^T(t) = R_2$$

Vidare antar vi att begynnelsetillståndet $x(t_0)$ är normalfördelat med medelvärde m och kovarians R_0. Matriserna Φ, Θ, R_1 och R_2 får bero av tiden.
Vi vill nu ur de observerade värdena på utsignalen $y(t)$, $y(t-1)$, ... , $y(t_0)$ konstruera en uppskattning $\hat{x}(t+1|t)$ av $x(t+1)$ så att kriteriet

$$E\ g(a^T(x(t+1)-\hat{x}))$$

får minimum.
Funktionen g antages vara symmetrisk och icke avtagande för positiva argument.
Satsen ger oss denna bästa uppskattning i iterativ form på följande sätt:

$$\hat{x}(t+1|t) = \Phi x(t|t-1) + K(t)(y(t) - \Theta x(t|t-1))$$

$$x(t_0|t_0-1) = m$$

$$K(t) = \Phi P(t)\Theta^T(\Theta P(t)\Theta^T + R_2)^{-1}$$

där $P(t)$ är kovariansen av uppskattningen

$$P(t) = E\ (x-\hat{x})(x-\hat{x})^T$$

$$P(t+1) = \Phi P(t)\Phi^T + R_1 - \Phi P(t)\Theta^T(\Theta P(t)\Theta^T + R_2)^{-1}\Theta P(t)\Phi^T$$

$$P(t_0) = R_0$$

Vi återgår nu till vårt system (1). Tills vidare skall vi antaga att bruset är ofärgat dvs
$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ och vi har alltså

$$y(t) + a_1(t)y(t-1) + \ldots + a_n(t)y(t-n) =$$
$$= b_0(t)u(t-k) + \ldots + b_n(t)u(t-k-n) + \lambda e(t) \qquad (2)$$

Våra parametrar $a_1 \ldots a_n$ och $b_0 \ldots b_n$ varierar i tiden.

Sätt
$$\begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \\ b_0(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} = x(t)$$

Vi antar nu att parametrarna varierar enligt:

$x(t+1) = \Phi x(t) + \beta v(t)$

Om parametrarna i verkligheten varierar kring ett medelvärde $\neq 0$, visar det sig att vi uppnår bättre resultat med $\Phi = I$ även om Φ i verkligheten $\neq I$.

Om vi sätter

$C(t) = (-y(t-1), \ldots, y(t-n), u(t-k), \ldots, u(t-k-n))$

så kan vi alltså sammanfatta våra antaganden om det aktuella systemet med följande två ekvationer:

$$\begin{cases} x(t+1) = \Phi x(t) + \beta v(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + \lambda e(t) \end{cases}$$

där $v(t)$ och $e(t)$ oberoende stokastiska normalprocesser med variansen I respektive 1.

Om $\beta\beta^T = R_1$ och $\lambda^2 = R_2$ så ser vi att vi ur

$y(t), y(t-1), \ldots, u(t-k), u(t-k-1), \ldots$

kan uppskatta $x(t+1)$ med vår Kalmanteori. Denna uppskattning $\hat{x}(t+1|t)$ skall vi sedan använda i någon lämplig styrlag.

Systemet kan styras med två i princip olika metoder.

1. Våra uppskattningar användes i stället för de verkliga värdena på parametrarna i en vanlig minimalvariansstyrlag (härledd för konstanta parametrar).
2. Vi kan härleda en ny styrlag som tar hänsyn till att parametrarna uppskattas och till uppskattningarnas fel. Denna styrlag kallar vi modifierad minimalvariansstyrlag.

Vanligen antar man att styrsignalen u vid tidpunkten t beräknas ur $y(t), y(t-1), \ldots, u(t-1), u(t-2), \ldots$.
Om datamaskinen behöver en viss tid, som ej är försumbar med samplingsintervallet, kan vi dock endast använda oss av $y(t-1), y(t-2), \ldots, u(t-1), u(t-2), \ldots$ för att beräkna $u(t)$. Båda dessa antaganden skall behandlas.

Minimalvariansstyrlag.

Vårt system (2) kan skrivas

$$y(t+k) + a_1(t+k)y(t+k-1) + \ldots = b_0(t+k)u(t) + b_1(t+k)u(t-1) + \ldots + \lambda e(t+k)$$

Vi vill nu bilda $u(t)$ så att $E(y^2(t+k))$ får minimum. Beroende på vilket som är det sista tillgängliga värdet på utsignalen, får vi två olika utgångspunkter:

1. Utgångspunkt: $y(t)$, $y(t-1)$,... kända. I en exakt minimalvariansstyrlag borde vi känna $x(t+k)$, $x(t+k-1)$, ... ,$x(t+1)$. Samtliga dessa värden uppskattas med $\hat{x}(t+1|t)$. Vi antar att styrlagen kan skrivas:

   $$u(t) = F_1(z^{-1})y(t)$$

2. Utgångspunkt: $y(t-1)$,$y(t-2)$,... kända. I en exakt minimalvariansstyrlag borde vi känna $x(t+k)$, $x(t+k-1)$, ... , $x(t)$. Samtliga dessa värden uppskattas med $\hat{x}(t|t-1)$. Vi antar att styrlagen i detta fall kan skrivas:

   $$u(t) = F_2(z^{-1})y(t-1).$$

Antag nu att vi med utgångspunkt 1 funnit en styrlag F_1 som minimerar Ey^2. Då gäller att styrlagen med utgångspunkt 2, F_2, har samma utseende som F_1, om tidsfördröjningen k tänkes ökad med en enhet.

Detta kan visas enligt följande:

Betrakta två system:

(1) $y_1(t) = S(u_1(t-k), u_1(t-k-1),\ldots)$

(2) $y_2(t) = S(u_2(t-k-l), u_2(t-k-l-1),\ldots)$

Funktionen S kan innehålla element som varierar slumpartat.
Vi är intresserade av $V_1 = Ey_1^2(t)$ samt $V_2 = Ey_2^2(t)$.
Vi antar att vi känner
i (1) $y_1(t-k-l)$, $y_1(t-k-l-1)$,...
i (2) $y_2(t-k-l)$, $y_2(t-k-l-1)$,...

samt att $y_1(t') = y_2(t')$, $t' \leq t-k-l$.

Vi vill nu välja

i (1) $u_1(t-k)$

i (2) $u_2(t-k-1)$

så att V_1 respektive V_2 får minimum. I (2) använder vi vanlig minimalvariansstrategi som minimerar V_2 för alla t. Genom att välja $u_1(t-k) = u_2(t-k-1)$ för alla t, blir $V_1 = V_2$ för alla t.

Är detta den bästa styrlagen för system (1), dvs finns det ej styrsignaler $u_1'(t-k)$ som ger mindre värde på V_1? I så fall skulle vi kunna välja

$$u_2'(t-k-1) = u_1'(t-k)$$

och också få mindre värde på V_2 vilket dock motsäger antagandet ovan att vi valt en minimalvariansstyrlag för system (2). Följaktligen utgör strategin

$$u_1(t-k) = u_2(t-k-1)$$

en minimalvariansstrategi för system (1).

Om vi för system (2) antar att styrsignalen $u_2(t)$ ges av

$$u_2(t) = R(z^{-1})y_2(t)$$

så ges den alltså för system (1) av

$$u_1(t) = R(z^{-1})y_1(t-1)$$

där R är en funktion som räknas ut enligt någon minimalvariansteori under förutsättning: systemets ordning är n och systemets tidsfördröjning är k+1.

F_1 och F_2 räknar vi ut på två sätt, enligt ovan sidan 5.

<u>Metod 1.</u>

Vi antar att koefficienterna varierar långsamt. Då kan vi använda den styrlag som härletts för konstanta koefficienter. Det vill säga

$$u(t) = -\frac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})E(z^{-1})} \cdot y(t)$$

där $\quad 1 = A(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-k}F(z^{-1})$

Våra A och B polynom bildas alltså ur $\hat{x}(t+1|t)$. (Om ej annat angives: utgångspunkt 1). I fortsättningen kallas denna styrlag minvar styrlag.

Metod 2.

Vi härleder en ny styrlag där vi tar hänsyn till att våra A och B parametrar varierar. Denna styrlag kallar vi i fortsättningen modifierad minvar styrlag (mod.minvar).

Härledning av modifierad minvar styrlag.

Vår modell är enligt (2) :

$$(1 + a_1(t)z^{-1} + \ldots + a_n(t)z^{-n}).y(t) =$$

$$= (b_0(t) + b_1(t)z^{-1} + \ldots + b_n(t)z^{-n}).y(t-k) + \lambda e(t)$$

där vi antar att våra parametrar

$$x(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \\ b_0(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

varierar enligt

$$x(t+1) = FI\ x(t) + BM\ v(t)$$

$$v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_{2n+1}(t) \end{bmatrix}$$

$e(t)$, $v_1(t)$, ... är oberoende normalprocesser $N(0,1)$.

$FI = \Phi$, $BM = \beta$ enligt tidigare beteckningar.

FI antages vara en diagonalmatris.

Vi skall här undersöka tre fall.

1. $n = 1$, $k = 2$. Både A och B parametrarna varierar.
2. n godtycklig, $k = 1$. Både A och B parametrarna varierar.
3. n godtycklig, k godtycklig. A parametrarna konstanta. Endast B parametrarna varierar.

Fall 1.

Modell: $y(t) + a_1(t)y(t-1) = b_0(t)u(t-2) + \lambda e(t)$

Parametervariation:

$$a(t+1) = \varphi_1\ a(t) + \sigma_1 v_1(t)$$
$$b(t+1) = \varphi_2\ b(t) + \sigma_2 v_2(t)$$

Vi antar alltså att a och b varierar oberoende av varandra. (BM diagonalmatris)

$$FI = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad BM = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix}$$

Vi vill minimera $E\ y(t)y^T(t) = V$ med avseende på $u(t-2) = u$. Vi bildar då $\frac{\partial V}{\partial u} = 0$, vilket bör ge minimum eftersom V är nedåt begränsad. Med E menar vi här medelvärdet betingat av att vi känner $y(t-2)$, $y(t-1)$,... .

Genom att byta derivations och integrationsordning får vi:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial u} = E(\frac{\partial}{\partial u}\ y^2(t)) = E(2y(t)\frac{\partial}{\partial u}\ y(t))$$

Men

$$\begin{aligned} y(t) &= -a(t)y(t-1) + b(t)u(t-2) + \lambda e(t) = \\ &= -a(t)(-a(t-1)y(t-2) + b(t-1)u(t-3) + \lambda e(t-1)) + \\ &\quad + b(t)u(t-2) + \lambda e(t) = \\ &= a(t)a(t-1)y(t-2) - a(t)b(t-1)u(t-3) + b(t)u(t-2) + \\ &\quad + (-a(t)\lambda e(t-1) + \lambda e(t)) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\ y(t) = b(t)$$

Vi får:

$$\begin{aligned} 0 &= E(b(t)a(t)a(t-1))y(t-2) - E(b(t)a(t)b(t-1))u(t-3) + \\ &\quad + E(b^2(t))u(t-2) \end{aligned}$$

eller

$$u(t-2) = \frac{E(b(t)a(t)b(t-1))}{E(b^2(t))}.u(t-3) - \frac{E(b(t)a(t)a(t-1))}{E(b^2(t))}.y(t-2)$$

Vi fortsätter med att räkna ut de medelvärden som ingår i denna formel. Observera att dessa medelvärden är betingade

av att vi känner $y(t-2), y(t-3), \ldots$. Så till exempel tecknas $Eb(t-1) = \hat{b}(t-1|t-2)$. Vårt mål är att uttrycka $u(t-2)$ som funktion av parameteruppskattningarna och deras varians vid tidpunkten t-2. Dessa värden är ju tillgängliga ur vår Kalmanteori.

$$E(b^2(t)) = E(\varphi_2 b(t-1) + \sigma_2 v_2(t-1))^2 =$$
$$= \varphi_2^2 \hat{b}^2(t-1|t-2) + \varphi_2^2 P_b(t-1|t-2) + \sigma_2^2$$

ty $b(t-1)$ och $v_2(t-1)$ oberoende.

$$E(b(t)a(t)b(t-1)) = Eb(t)\mathrm{cov}(a(t),b(t-1)) +$$
$$+ Ea(t)\mathrm{cov}(b(t),b(t-1)) + Eb(t-1)\mathrm{cov}(b(t),a(t)) +$$
$$+ Eb(t)\ Ea(t)\ Eb(t-1)$$

$$E\ b(t) = \varphi_2\ \hat{b}(t-1|t-2)$$
$$E\ a(t) = \varphi_1\ \hat{a}(t-1|t-2)$$
$$E\ b(t-1) = \hat{b}(t-1|t-2)$$
$$\mathrm{cov}(a(t),b(t-1)) = \mathrm{cov}(\varphi_1 a(t-1) + \sigma_1 v_1(t-1), b(t-1)) =$$
$$= \varphi_1 P_{ab}(t-1|t-2)$$

ty $v_1(t-1)$, $b(t-1)$ oberoende.

$$\mathrm{cov}(b(t),b(t-1)) = \varphi_2 P_b(t-1|t-2)$$
$$\mathrm{cov}(b(t),a(t)) = \varphi_1\varphi_2 P_{ab}(t-1|t-2)$$

dvs

$$E(b(t)a(t)b(t-1)) = \varphi_1\varphi_2\hat{b}P_{ab} + \varphi_1\varphi_2\hat{a}P_b + \varphi_1\varphi_2\hat{b}P_{ab} + \varphi_1\varphi_2\hat{a}\hat{b}^2 =$$
$$= \varphi_1\varphi_2\hat{a}\hat{b}^2 + 2\varphi_1\varphi_2\hat{b}P_{ab} + \varphi_1\varphi_2\hat{a}P_b$$

$$E(b(t)a(t)a(t-1)) = \qquad \ldots \qquad =$$
$$= \varphi_1\varphi_2\hat{a}^2\hat{b} + 2\varphi_1\varphi_2\hat{a}P_{ab} + \varphi_1\varphi_2\hat{b}P_a$$

och slutligen:

$$u(t-2) = \frac{\varphi_1\varphi_2\hat{a}\hat{b}^2 + 2\varphi_1\varphi_2\hat{b}P_{ab} + \varphi_1\varphi_2\hat{a}P_b}{\varphi_2^2\hat{b}^2 + \varphi_2^2 P_b + \sigma_2^2} \cdot u(t-3) -$$
$$- \frac{\varphi_1\varphi_2\hat{a}^2\hat{b} + 2\varphi_1\varphi_2\hat{a}P_{ab} + \varphi_1\varphi_2\hat{b}P_a}{\varphi_2^2\hat{b}^2 + \varphi_2^2 P_b + \sigma_2^2} \cdot y(t-2)$$

där alltså $\hat{a} = \hat{a}(t-1|t-2)$ $\quad P_a = P_a(t-1|t-2)$

$\hat{b} = \hat{b}(t-1|t-2)$ $\quad P_b = P_b(t-1|t-2)$

$P_{ab} = P_{ab}(t-1|t-2)$

<u>Fall 2.</u>

Modell: $\quad y(t) = S(t).x(t) + \lambda e(t)$

där $\quad S(t) = (-y(t-1),\ldots,-y(t-n),u(t-1),\ldots,u(t-n-1))$

Parametervari ation:

$$x(t+1) = FI\ x(t) + BM\ v(t)$$

Vi söker det värde på $u(t-1)$ som minimerar $V = Ey(t)y^T(t)$.

$$V = E((S(t)x(t) + \lambda e(t))(S(t)x(t) + \lambda e(t))^T) =$$

$$= E\ S(t)x(t)x^T(t)S^T(t) + E\ \lambda e(t)e^T(t)\lambda$$

Sätt $u(t-1) = u$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial u} = E\ \frac{\partial}{\partial u}\ S(t)x(t)x^T(t)S^T(t) =$$

$$= E(\ (0,0,\ldots,1,0,\ldots,0)x(t)x^T(t)S^T(t) + S(t)x(t)x^T(t)\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\ ) =$$

$$= E\ 2(b_0(t)x^T(t)S^T(t)) = 2E(b_0(t)x^T(t))\ S^T(t)$$

Om vi sätter

$$E(b_0(t)x^T(t)) = q_0$$

där q_0 alltså lika med den n+1:sta kolonnen i

$$Q = (P(t|t-1) + \hat{x}(t|t-1)\hat{x}^T(t|t-1))$$

får vi

$$0 = S(t)q_0$$

Härur kan vi sedan lösa ut $u(t-1)$.

Fall 3.

Modell: $y(t) = S_y(t)A + S_u(t)x_b(t) + \lambda e(t)$

där $S_y(t) = (-y(t-1), \ldots, -y(t-n))$

$S_u(t) = (u(t-k), \ldots, u(t-k-n))$

och $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ $\quad x_b(t) = \begin{bmatrix} b_0(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$

$x_b(t)$ varierar enligt

$x_b(t+1) = FI_b x_b(t) + BM_b v_b(t)$

där FI_b antages vara en diagonalmatris.

$$FI_b = \begin{bmatrix} \varphi_0 & & & 0 \\ & \varphi_1 & & \\ & & \varphi_2 & \\ 0 & & & \ddots \; \varphi_n \end{bmatrix}, \quad BM_b = \begin{bmatrix} \sigma_{00} & \sigma_{01} & \ldots & \sigma_{0n} \\ \sigma_{10} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ & & & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

Vi söker nu som tidigare det värde på $u = u(t-k)$ som minimerar $V = E\, y(t)y^T(t)$.

$V = E\, y(t)y^T(t) = E(\, S_y(t)A + S_u(t)x_b(t))(\, S_y(t)A + S_u(t)x_b(t))^T + \lambda^2$

ty $e(t)$ oberoende av $y(t-1)$, $y(t-2)$,...

$$V = E(\, S_y(t)AA^TS_y{}^T(t) + S_y(t)Ax_b{}^T(t)S_u{}^T(t) + S_u(t)x_b(t)A^TS_y{}^T(t) + S_u(t)x_b(t)x_b{}^T(t)S_u{}^T(t)\,) + \lambda^2$$

Sätt
$$M_1 = S_y(t)AA^TS_y{}^T(t)$$
$$M_2 = S_y(t)Ax_b{}^T(t)S_u{}^T(t)$$
$$M_3 = S_u(t)x_b(t)A^TS_y{}^T(t) \qquad (\text{obs. } M_2 = M_3)$$
$$M_4 = S_u(t)x_b(t)x_b{}^T(t)S_u{}^T(t)$$

Problemet är nu: Sök det värde på $u(t-k)$ som ger minsta värde på V. Detta värde fås ur ekvationen:

$$\frac{\partial V}{\partial u} = 0 \iff \frac{\partial}{\partial u} E(\, M_1 + M_2 + M_2 + M_4\,) = 0 \iff$$
$$\iff E\left(\frac{\partial M_1}{\partial u} + \frac{\partial M_2}{\partial u} + \frac{\partial M_3}{\partial u} + \frac{\partial M_4}{\partial u}\right) = 0$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial u} = 2\frac{\partial}{\partial u}(\ S_y(t)\ ).AA^T S_y^{\ T}(t) = 0 \qquad \text{ty}$$

y(t-1), y(t-2), ..., y(t-n) är samtliga oberoende av u(t-k).

$$\frac{\partial M_2}{\partial u} = \frac{\partial M_3}{\partial u} = S_y(t)Ax_b^{\ T}(t)\frac{\partial}{\partial u}(S_u^{\ T}(t)) = S_y(t)Ab_0(t)$$

$$E\frac{\partial M_2}{\partial u} = -(a_1E(b_0(t)y(t-1) + \ldots + a_{k-1}E(b_0(t)y(t-k+1)) +$$
$$+ a_k y(t-k)Eb_0(t) + \ldots + a_n y(t-n)Eb_0(t)\ )$$

Vi inför följande beteckningar:

$$\mu_i = E(\ b_0(t)y(t-k+i)\ )$$
$$S_i = -\sum_{j=i}^{n} a_j y(t+i-j-k)$$

Det gäller

$$E\ b_0(t) = \varphi_0^{k-1}\hat{b}_0(t-k+1|t-k) = \varphi_0^{k-1}\hat{b}_0$$

(vid våra uppskattningar utgår vi från y(t-k), y(t-k-1),.. .)

Vi kan nu skriva :

$$E\frac{\partial M_2}{\partial u} = -(a_1\mu_{k-1} + \ldots + a_{k-1}\mu_1) + S_k\varphi_0^{k-1}\hat{b}_0$$

Vi räknar nu ut μ_i :

$$\mu_i = E(\ b_0(t)y(t-k+i)\ ) =$$
$$= E(\ b_0(t)(S_y(t-k+i)A + S_u(t-k+i)x_b(t-k+i) + \lambda e(t-k+i))\ ) =$$
$$= E(\ b_0(t)S_y(t-k+i)\ )A + E(b_0(t)S_u(t-k+i)x_b(t-k+i)\ )$$

$$E(\ b_0(t)S_y(t-k+i))A = -(a_1E(b_0(t)y(t-k+i-1) + \ldots +$$
$$+ a_{i-1}E(b_0(t)y(t-k+1))\ ) - (a_i y(t-k) + \ldots + a_n y(t-k\ldots))Eb_0(t) =$$
$$= -(a_1\mu_{i-1} + \ldots + a_{i-1}\mu_1) + S_i\varphi_0^{k-1}\hat{b}_0$$

$$E(b_0(t)S_u(t-k+i)x_b(t-k+i)\ ) = S_u(t-k+i)E(b_0(t)x_b(t-k+i)\ )$$

Vi inför

$$\nu_i = E(b_0(t)x_b(t-k+i)\ )$$
$$\nu_i = E(b_0(t)(FI_b x_b(t-k+i-1) + BM_b v(t-k+i-1))\ ) =$$
$$= FI_b\nu_{i-1} + E(b_0(t)BM_b v(t-k+i-1)\ )$$

men

$$b_0(t) = \varphi_0 b_0(t-1) + (\sigma_{00},\sigma_{01},\ldots,\sigma_{0n})v(t-1) =$$
$$= \varphi_0^{k-1}(\varphi_0 b_0(t-k+i-1) + (\sigma_{00}, \ldots,\sigma_{0n})v(t-k+i-1)) +$$

$$+ \varphi_0^{k-i-1}(\sigma_{00},\ldots,\sigma_{0n})v(t-k+i) + \ldots + (\sigma_{00},\ldots,\sigma_{0n})v(t-1)$$

Eftersom $v(t-k+i)$, $v(t-k+i+1)$, ..., $v(t-1)$ samt $b_0(t-k+i-1)$ är oberoende av $v(t-k+i-1)$ får vi:

$$\nu_i = FI_b\nu_{i-1} + E(\varphi_0^{k-i}(\sigma_{00},\ldots,\sigma_{0n})v(t-k+i-1)BM_b v(t-k+i-1)\ ) =$$

$$= FI_b\nu_{i-1} + \varphi_0^{k-i}BM_b E(v(t-k+i-1)v^T(t-k+i-1)) \begin{bmatrix} \sigma_{00} \\ \vdots \\ \sigma_{0n} \end{bmatrix} =$$

$$= FI_b\nu_{i-1} + \varphi_0^{k-i}BM_b \begin{bmatrix} \sigma_{00} \\ \sigma_{01} \\ \vdots \\ \sigma_{0n} \end{bmatrix}$$

Slutligen får vi alltså:

$$\mu_i = -(a_1\mu_{i-1} + \ldots + a_{i-1}\mu_1) + S_i\varphi_0^{k-1}\hat{b}_0 + S_u(t-k+i)\nu_i \quad ,$$

$$\text{med} \quad \nu_i = FI_b\nu_{i-1} + \varphi_0^{k-i}BM_b \begin{bmatrix} \sigma_{00} \\ \vdots \\ \sigma_{0n} \end{bmatrix}$$

Dessa formler gäller för $i = 2,3,\ldots,k$.

För $i = 1$ gäller:

$$\mu_1 = E(b_0(t)y(t-k+1)) = E(b_0(t)(S_y(t-k+1)A + S_u(t-k+1)x_b(t-k+1))\ ) =$$

$$= \varphi_0^{k-1}\hat{b}_0 S_1 + S_u(t-k+1)E(b_0(t)x_b(t-k+1)\ ) =$$

$$= \varphi_0^{k-1}\hat{b}_0 S_1 + S_u(t-k+1)\nu_1$$

$$\nu_1 = E(b_0(t)x_b(t-k+1)\ ) = E((\varphi_0^{k-1}b_0(t-k+1) +$$

$$+ \varphi_0^{k-2}(\sigma_{00},\ldots\sigma_{0n})v(t-k+1) + \ldots + (\sigma_{00},\ldots,\sigma_{0n})v(t-1))x_b(t-k+1))$$

$$= \varphi_0^{k-1}E(b_0(t-k+1)x_b(t-k+1))$$

ty $x_b(t-k+1)$ är oberoende av $v(t-k+1),\ldots, v(t-1)$.

$E(b_0(t-k+1)x_b(t-k+1))$ är första kolonnen i matrisen

$$Q = E(x_b(t-k+1)x_b^T(t-k+1))$$

$$Q = E(\ (x_b(t-k+1) - \hat{x}_b)(x_b(t-k+1) - \hat{x}_b)^T\ ) + E(\ x_b(t-k+1)x_b^T(t-k+1))$$

$$Q = P_b + \hat{x}_b\hat{x}_b^T \qquad \text{där } P_b = P_b(t-k+1|t-k)$$

Om Q_1 är första kolonnen i Q gäller alltså:

$$\nu_1 = \varphi_0^{k-1} Q_1$$

Vi har nu behandlat $E\frac{\partial M}{\partial u}1$, $E\frac{\partial M}{\partial u}2 = E\frac{\partial M}{\partial u}3$ i vår ursprungliga formel. Vi har kvar att undersöka $E\frac{\partial M}{\partial u}4$.

$$\frac{\partial M}{\partial u}4 = 2S_u(t)b_0(t)x_b(t)$$

$$E\frac{\partial M}{\partial u}4 = 2S_u(t)E(\ b_0(t)x_b(t)\ ) = 2S_u(t)\nu_k$$

Det värde på $u = u(t-k)$ som ger minsta värde på V är det u som löser följande ekvation:

$$2\frac{\partial M}{\partial u}2 + \frac{\partial M}{\partial u}4 = 0$$

dvs

$$-(a_1\mu_{k-1} + \ldots + a_{k-1}\mu_1) + S_k\varphi_0^{k-1}\hat{b}_0 + S_u(t)\nu_k = 0$$

Eller med kortare skrivsätt enligt definitionen på u_k:

$$u_k = 0$$

För att räkna ut u rekursivt förfar vi sålunda:

Räkna först ut

$$\nu_1 = \varphi_0^{k-1}\begin{bmatrix} p_{00}+\hat{x}_0\hat{x}_0 \\ p_{10}+\hat{x}_1\hat{x}_0 \\ \vdots \\ p_{n0}+\hat{x}_n\hat{x}_0 \end{bmatrix}$$

där $p_{i0} = E(\ (b_i(t-k+1) - b_i)(b_0(t-k+1) - b_0)^T\ )$

Därefter utträknas

$$\nu_i = FI_b\nu_{i-1} + \varphi_0^{k-i}BM_b\begin{bmatrix} \sigma_{00} \\ \sigma_{01} \\ \vdots \\ \sigma_{0n} \end{bmatrix} \qquad \text{för } i = 2,3,\ldots,k\ .$$

Då våra ν_i är kända utträknas

$$\mu_i = -(a_1\mu_{i-1} + \ldots + a_{i-1}\mu_1) + S_i\varphi_0^{k-1}b_0 + S_u(t-k+i)\nu_i$$

där $S_i = -\sum_{j=i}^{n} a_j y(t+i-j-k)$ för $i = 1,2,\ldots,k-1$.

Välj sedan $u(t-k)$ så att u_k blir lika med noll.

<u>Fortranprogram för nyss genomgångna modifierade minimalvariansstyrlag, fall 3.</u>

Systemmodell:

$$y(t) + a_1y(t-1) + \ldots + a_ny(t-n) = b_0(t)u(t-k) + \ldots + b_n(t)u(t-k-n) + \lambda e(t)$$

B-parametrarna varierar i tiden.

Om $x(t) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ gäller:

$$x(t+1) = FIx(t) + BMv(t)$$

Vi antar att $FI = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$ dvs en diagonalmatris.

BM kan skrivas:

$$BM = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & BM_b \end{array}\right]$$

Vi förutsätter att vi känner de konstanta A-parametrarna, samt Kalman-uppskattningarna av B-parametrarna.

Vi bildar A och B vektorer enligt:

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad , \; B = (b_0, b_1, \ldots, b_n) \quad .$$

Kalmanteorin ger oss en kovariansmatris P för felet i våra uppskattningar:

$$P = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & P_b \end{array}\right]$$

Vi bildar $Y = (y(t-k), y(t-k-1), \ldots, y(t-k-n+1))$

$U = (u(t-k-1), u(t-k-2), \ldots, u(t-2k-n+1))$

$UNY = u(t-k)$

MN, MM är två dimensionstal.

Vårt program följer i princip gången skissad på sidan 15 och 16 och lyder:

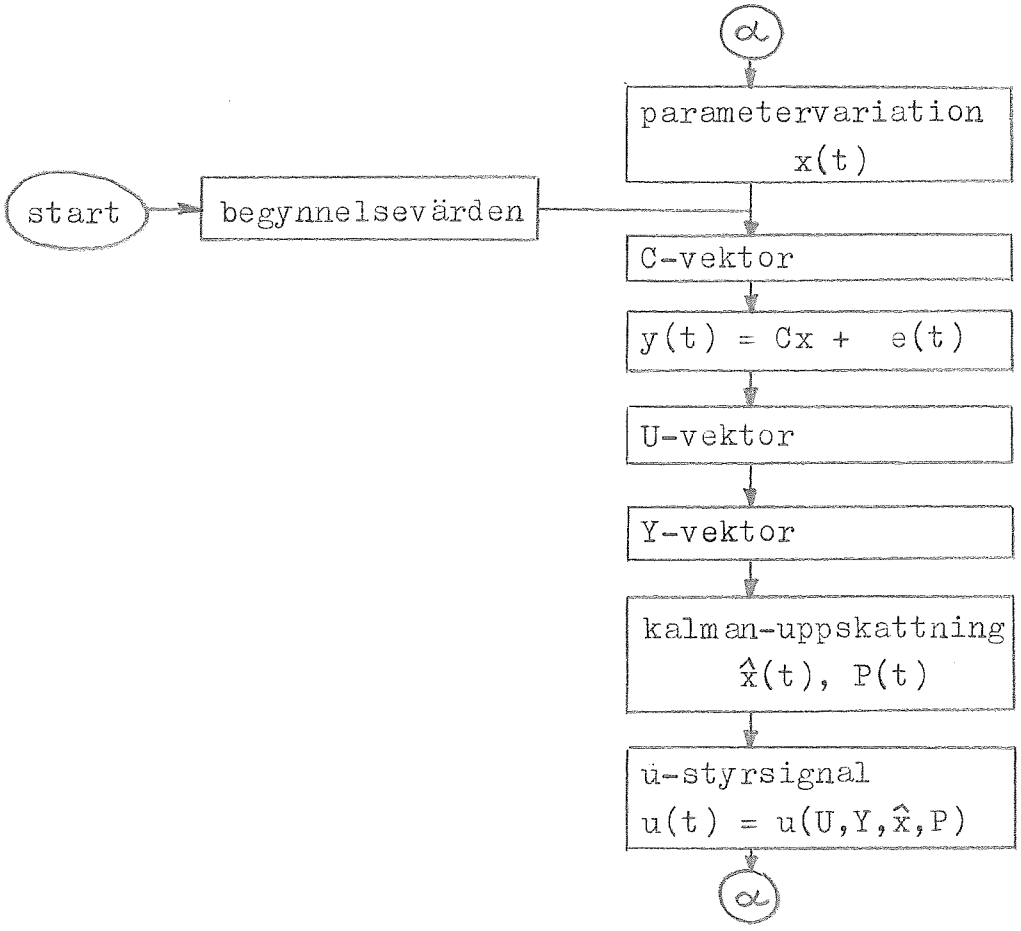
```
      SUBROUTINE MODMV(A,B,P,Y,U,UNY,K,N,MN,MM,BM)
      DIMENSION A(MN),B(MN),P(MM,MM),Y(MN),U(MM),ANY(11),AMY(10),
     1BM(MM,MM)
      L=N+1
      DO 10 J=1,L
      MY=N+J
   10 ANY(J)=P(MY,N+1)+B(1)*B(J)
      I=1
   15 SUM=0.
      DO 20 J=I,N
      MY=J-I+1
   20 SUM=SUM+A(J)*Y(MY)
      SI=-SUM
      SUM=0.
      IF(I.EQ.1)GO TO 30
      L=I-1
      IF(I-1.GE.N)L=N
      DO 25 J=1,L
      MY=I-J
   25 SUM=SUM+A(J)*AMY(MY)
   30 SUM=-SUM+SI*B(1)
      IF(I.EQ.K)GO TO 45
      L=N+1
      DO 35 J=1,L
      MY=K-I+J-1
   35 SUM=SUM+ANY(J)*U(MY)
      AMY(I)=SUM
      I=I+1
      L=N+1
      LL=2*N+1
      DO 40 J=1,L
      MY=N+J
      DO 40 JJ=L,LL
   40 ANY(J)=ANY(J)+BM(MY,JJ)*BM(N+1,JJ)
      GO TO 15
   45 DO 50 J=1,N
   50 SUM=SUM+ANY(J+1)*U(J)
      UNY=-SUM/ANY(1)
      RETURN
      END
```

Simuleringar.

Några enkla exempel skall nu exekveras på datamaskin.

Till att börja med i exempel 1 och 2 antar vi att styrsignalen $u(t)$ räknas ut med hjälp av $y(t)$, $y(t-1)$,... dvs utgångspunkt 1 enligt sid. 6.

Ett flödesschema för våra program ges då av:



	antal termer
$C = (-y(t-1),\ldots,-y(t-n),u(t-k),\ldots,u(t-k-n))$	$2n+1$
$U = (u(t-1),\ldots,u(t-n-k+1))$	$n+k-1$
$Y = (y(t),\ldots,y(t-n+1))$	n

Flödesschemat ändras något vid utgångspunkt 2. Se exempel 3.

I våra exempel skall vi söka styra system av typen (1) sid. 2, med variabla parametrar $x(t)$. Hur parametrarna $x(t)$ varierar

är godtyckligt. För att kunna använda våra styrlagar antar vi att systemet har ett utseende enligt (2) sid. 4. (Obs. skillnad mellan verkligt och antaget system endast om verkliga systemet har färgat brus). Vidare antar vi att parametervariationen kan beskrivas enligt sid. 8 mitten. Kalmanuppskattningar och styrlag uträknas sedan på dessa antaganden. Ibland använder vi olika matriser BM i kalmanuppskattning och i styrlag. (Se exempel 3)

<u>Exempel 1.</u>

Detta exempel är endast en kontroll på att vårt program fungerar.

Verkligt och antaget system:

$n=2,\ k=2.$

$$y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) = b_0 u(t-2) + b_1 u(t-3) + e(t)$$

Verklig parametervariation:

$$a_1(t+1) = a_1(t) + 0.01 v_1(t)$$

$$a_2(t+1) = a_2(t) + 0.01 v_2(t) \qquad v_1,\ v_2 \text{ oberoende } N(0,1).$$

$$b_0(t+1) = b_0(t)$$

$$b_1(t+1) = b_1(t)$$

med begynnelsevärden vid $t=0$

$$a_1 = -1.5 \qquad a_2 = 0.5 \qquad b_0 = 1. \qquad b_1 = 0.5$$

Antagen parametervariation:

$$FI = I$$

$$BM = \begin{bmatrix} .01 & & & & 0 \\ & .01 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad P(0) = \begin{bmatrix} 1. & & & & 0 \\ & 1. & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$\hat{x}(0)$ enligt ovan.

Systemet styres endast med minvarstyrlag. Förlustfunktionen $V = \sum_t y^2(t)$ blir över 800 tidpunkter $V = 2650$.
Den teoretiska förlustfunktionen, dvs den vi skulle fått om alla parametrar vore exakt kända ges av $\sum \lambda^2(1+a_1^2(t))$
Såsom jämförelse skall vi nu och i fortsättningen betrakta V_0 uträknat med hjälp av uppskattningarna av parametrarna.
Här blir $V_0 = \sum \lambda^2(1+\hat{a}_1^2(t)) = 2380$.

Resultat.

Skillnaden mellan V och V_0 är ganska liten. Ett system av ovanstående typ går alltså bra att styra med en vanlig minimalvariansstyrlag. Observera att systemet med ovanstående B-parametrar alltid är stabilt, vilket är en förutsättning.

Exempel 2.

Vi skall studera följande samplade system:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) = b_1(t)u(t-1) + b_2(t)u(t-2) + e(t)$$

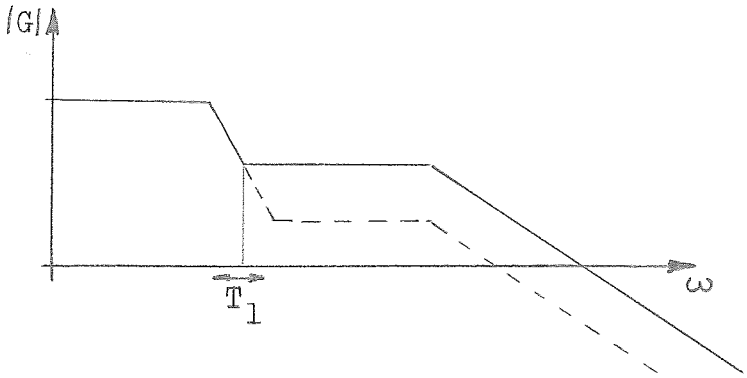
med $\begin{cases} a_1 = -1.56 \\ a_2 = 0.58 \end{cases}$ $\begin{cases} b_1(t) = 0.0572 + SL \\ b_2(t) = 0.043 - SL \end{cases}$

där $SL = 1.913 \cdot T_1$

$T_1 = T_1 + 0.05\ RND$; $RND \in N(0,1)$

$T_{1start} = 1.9$

I det kontinuerliga fallet motsvaras detta av en överförings-funktion med Bodediagram:



T_1 varierar slumpartat.

Vi skall styra systemet med minvar och modifierad minvar regulator, samt med en vanlig PI-regulator. Detta system visar sig vara lätt att styra och alla tre regulatorerna ger gott resultat.

Verkligt och antaget system:

$n = 2,\ k = 1.$

$$y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) = b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + e(t)$$

Verklig parametervariation:

$$\begin{cases} a_1 = -1.56 \\ a_2 = \ \ 0.58 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1(t+1) = b_1(t) + 0.09565\ v(t) \\ b_2(t+1) = b_2(t) - 0.09565\ v(t) \end{cases} \qquad v \in N(0,1)$$

med värden vid $t = 0$: $\quad b_1 = 3.1219 \quad b_2 = -3.0217$

Antagen parametervariation:

$FI = I$

$$BM = \begin{bmatrix} 0 & & & & & 0 \\ & 0 & & & & \\ & & f & 0 & & \\ & & f & 0 & & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad , \quad f = 0.09565$$

$$P(0) = \begin{bmatrix} 0 & & & & & 0 \\ & 0 & & & & \\ & & 1. & & & \\ & & & 1. & & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} -1.5600 \\ 0.5800 \\ 3.1219 \\ -3.0217 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Systemet styrs med både minvarstyrlag och mod. minvarstyrlag. Vid minvar styrlag ligger karakteristiska ekvationens rötter nära nollställen till B-polynomet dvs nära $-\frac{b_1}{b_0}$. Med variation enligt ovan gäller alltid $\left|\frac{b_1}{b_0}\right|<1$, dvs systemet bör alltid vara stabilt.

Ett teoretiskt värde på förlustfunktionen ges av $V_0 = 800$.

Resultat.

Vid körning över 800 punkter :

Med minvar styrlag	$V = 1029$
Med mod. minvar styrlag	$V = 957.5$

Skillnaden mellan styrlagarna är tydligen ganska liten. Mod. minvar styrlagen visar dock sin överlägsenhet då B-parametrarna ligger nära noll. Sålunda mellan t lika med 750 och 800:

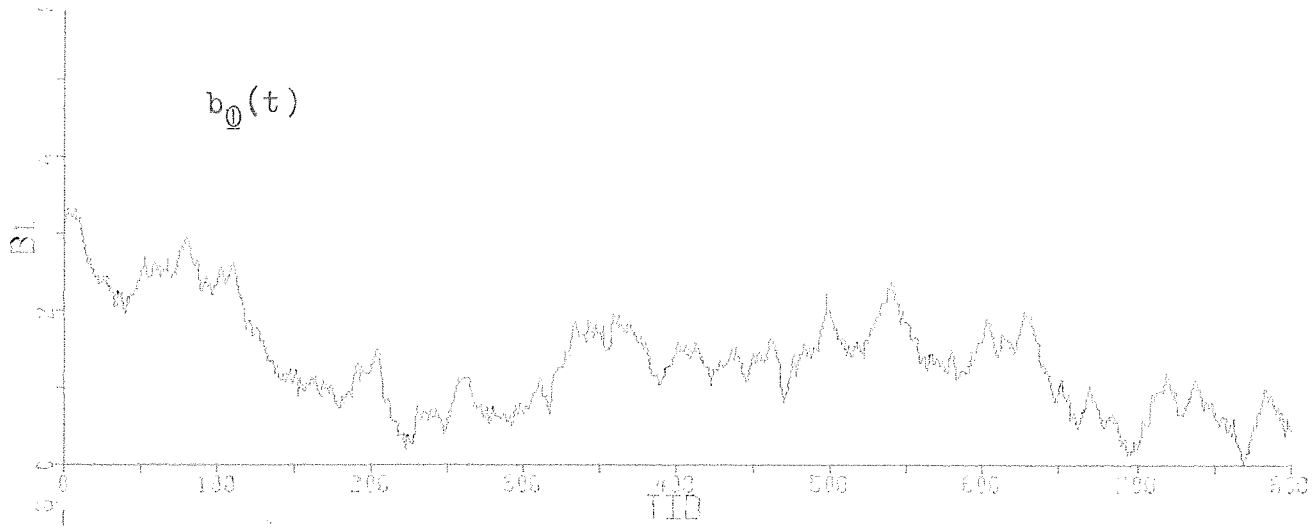
Minvar	$V = 95.7$
Mod. minvar	$V = 49.0$
	$V_0 = 50.0$

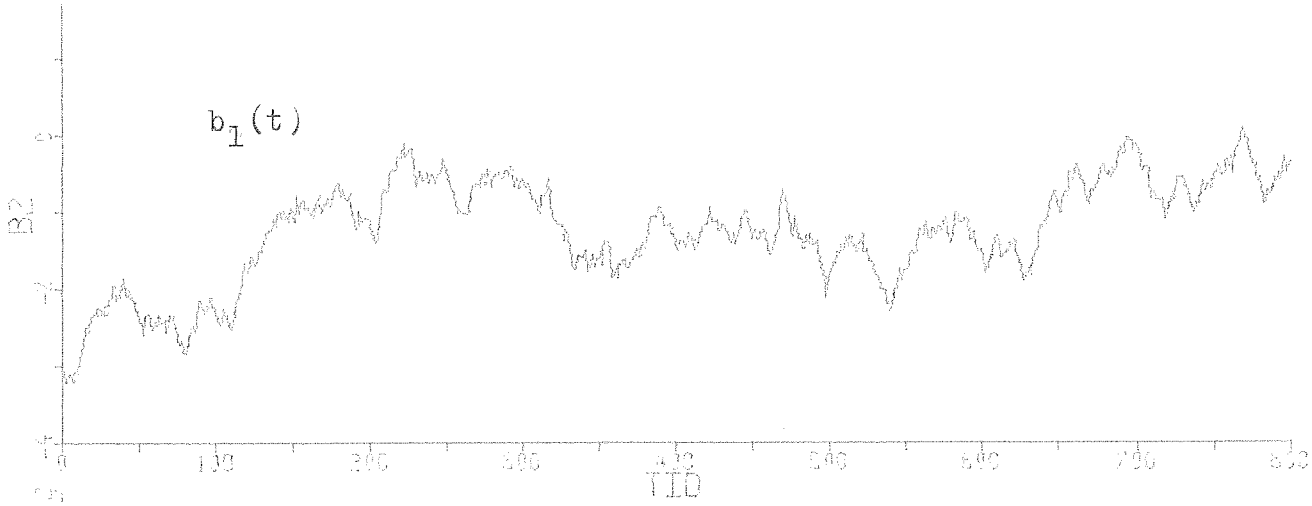
Om alltså B-parametrarna i ett system enligt ovan varierar men hela tiden är väl skilda från noll, så är mod. minvar endast något bättre än minvar styrlag. Om B-parametrarna ligger nära noll, (dvs systemet kräver stora styrsignaler) är mod. minvar styrlag att föredra.

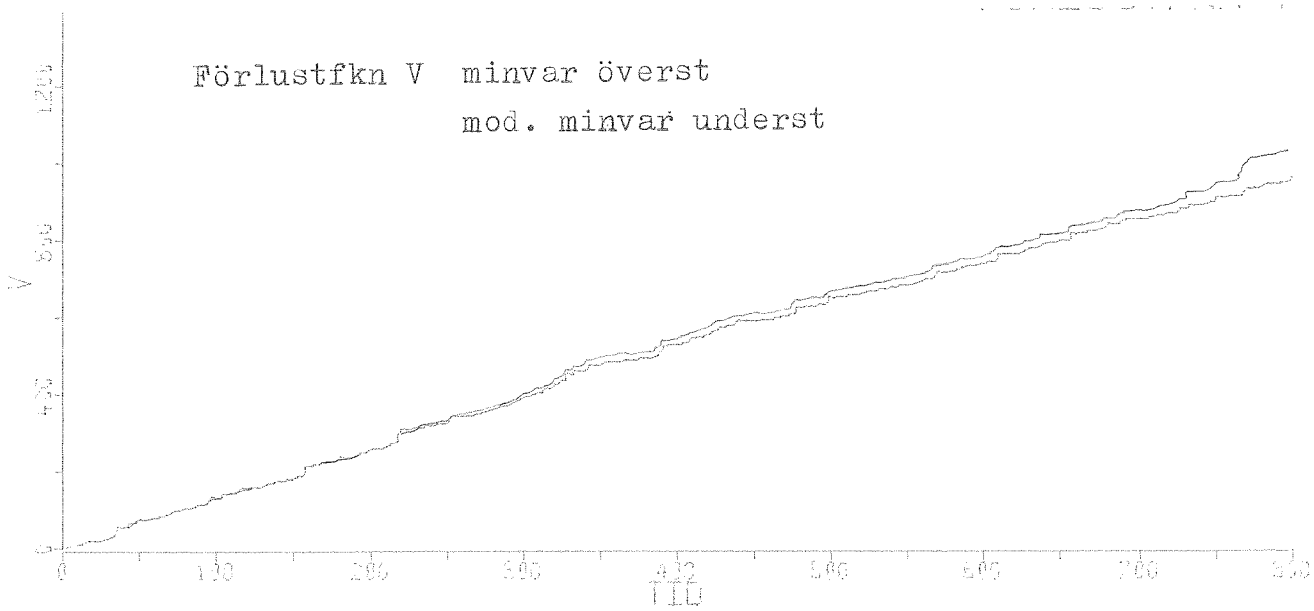
Se figur sid. 24.

PI-styrning av exempel 2.

Vi skall göra ett försök att som styrlag använda en vanlig PI-regulator. För att konstruera en PI-regulator för vårt samplade system utgår vi från ett kontinuerligt system.







Parametervariation och förlustfunktion för ett system enligt exempel 2.

För ett sådant lyder ekvationen för en PI-regulator:

$$u(t) = -K\,y(t) - T^{-1}\int^{t} y(s)ds \qquad \Rightarrow$$

$$\dot{u}(t) = -K\dot{y}(t) - T^{-1}y(t)$$

Om vi sätter $\dot{x}(t) = y(t)$ kan regulatorn skrivas:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0\cdot x(t) + y(t) \\ u(t) = -T^{-1}x(t) - Ky(t) \end{cases}$$

Vi samplar detta system med samplingsintervallet h=1.

$$x(t+1) = \phi x(t) + \Gamma\,y(t)$$

$$u(t) = -T^{-1}x(t) - K\,y(t)$$

där $\phi = e^{Ah} = 1 \qquad \Gamma = \int_0^1 e^{As}ds\cdot 1 = 1$

Vi kan också skriva:

$$u(t) = -T^{-1}(zI - \phi)^{-1}\Gamma\,y(t) - K\,y(t)$$

som ger

$$u(t) = -T^{-1}\cdot\frac{1}{z-1}\,y(t) - K\,y(t)$$

$$(1-z^{-1})u(t) = -\frac{z^{-1}}{T}\,y(t) - K(1-z^{-1})y(t)$$

och slutligen:

$$u(t) = u(t-1) - K\,y(t) + (K - T^{-1})\,y(t-1) \qquad (\S)$$

Jämför denna styrlag med minvar styrlag:

$$u(t) = -\frac{b_1}{b_0}\,u(t-1) - \frac{f_0}{b_0}\,y(t) - \frac{f_1}{b_0}\,y(t-1)$$

De båda styrlagarna är nästan lika om vi sätter

$$K = \frac{f_0}{b_0}\,, \quad K - \frac{1}{T} = -\frac{f_1}{b_0}$$

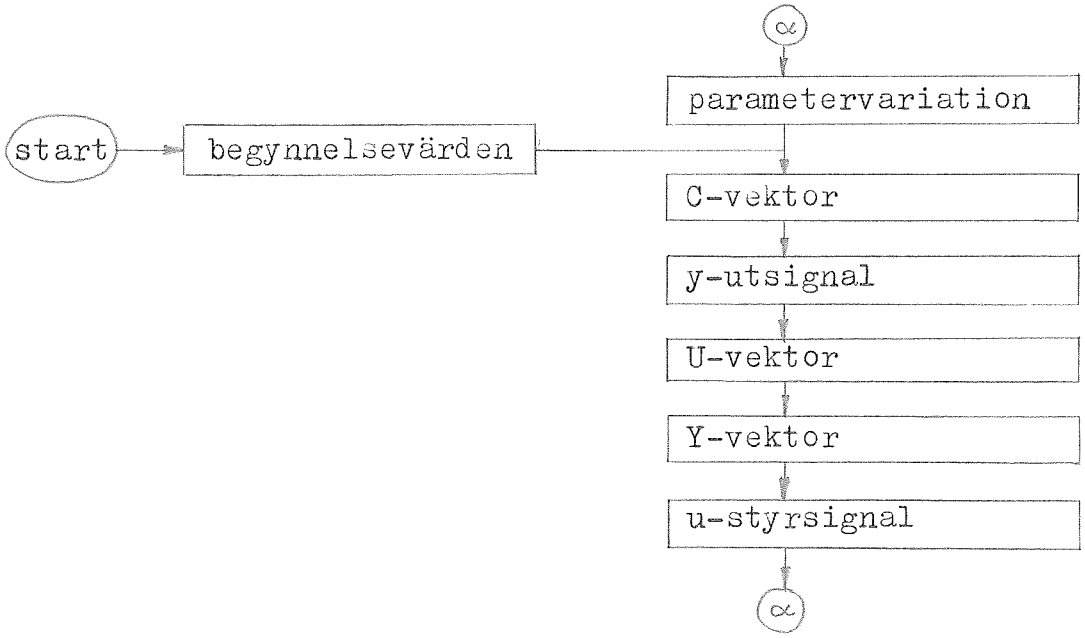
Genom att testa olika värden på K och T bör vi kunna utvälja optimala värden som medför minsta förlustfunktion.

Innan vi testar olika värden undersöker vi det PI-återkopplade systemets stabilitet. Som nämnts är det med en minvar styrlag återkopplade systemet stabilt om $\left|\frac{b_1}{b_0}\right| < 1$.
Om systemet är återkopplat med en PI-regulator enligt (§) kan vi få instabilitet även om $\left|\frac{b_1}{b_0}\right| < 1$.
Karakteristiska ekvationen för det PI-återkopplade systemet lyder:

$$z^3 + (a_1 - 1 + b_0K_1)z^2 + (a_2 - a_1 + b_1K_1 - b_0K_2)z - a_2 - b_1K_2 = 0$$

där $K_1 = K$, $K_2 = K - \frac{1}{T}$

Vill vi testa vår PI-regulator på samma slumptalsserie som för minvar och mod. minvar kommer b_0 och b_1 att variera mellan 3. och 0.1 . Genom att pröva ekvationen ovan med avseende på rötternas läge, kan vi få fram ett område i K_1 och K_2 där systemet är stabilt för $0.1 < b_0, b_1 < 3.$.
Genom att testa vårt PI-återkopplade system med K_1 och K_2 värden i det område vi på så sätt får fram skall vi försöka räkna ut minsta värdet på förlustfunktionen V. Följande flödesschema användes för simeleringen av vårt PI-system.



Resultat.

Det visar sig att minsta värdet på förlustfunktionen uppnås för $K_1 = 0.8$, $K_2 = 0.15$, och det är lika med $V = 1015$. Detta värde är något bättre än fö r minvar styrlag ($V = 1029$) men sämre än mod. minvar styrlag ($V = 958$). Resultatet visar att vi för system av denna typ mycket väl kan nöja oss med en styrlag av typ PI-regulator. Parametrarna måste dock ställas in noggrant, vilket förutsätter god kännedom om de värden systemets parametrar varierar över. B-parametrarna bör dessutom vara väl skilda från noll.

Exempel 3.

Sammanfattning av exemplet.

I förra exemplet såg vi att trassel kunde inträffa då B-parametrarna var nära noll. I detta exempel skall vi betrakta ett system enligt:

$$y(t) + a(t)y(t-1) = b(t)u(t-1) + \lambda e(t)$$

För olika parametervariationer skall vi undersöka minvar och modifierade minvar styrlagarnas effekt. Styrsignalen skall bildas ur $y(t-1)$, $y(t-2)$,... dvs utgångspunkt 2, sid 6.

Vi börjar med att studera styrlagens utseende i de båda fallen, samt härleder det återkopplade systemets karakteristiska ekvation. Därefter följer en teoretisk undersökning av det styrda systemets stabilitet vid olika styrlagar och vid olika värden på parametrarna.

Det visar sig att exemplet beroende på parametrarnas värden kan delas upp på tre underexempel.

I 3 a undersöks systemets uppförande då $a(t)$ varierar kring -1 och $b(t)$ hela tiden är väl skild från noll $(b>0)$.

Systemet är då lätt att styra.

I 3 b varierar $a(t)$ kring -1 och $b(t)$ kring 0. Härvid uppstår vissa problem eftersom systemet blir instabilt och svårt att styra. Gemom att i vår mod. minvar styrlag ansätta ett större värde på BM-matrisen (se sid 8) , än vad som verkligen är fallet kan dock resultatet avsevärt förbättras.

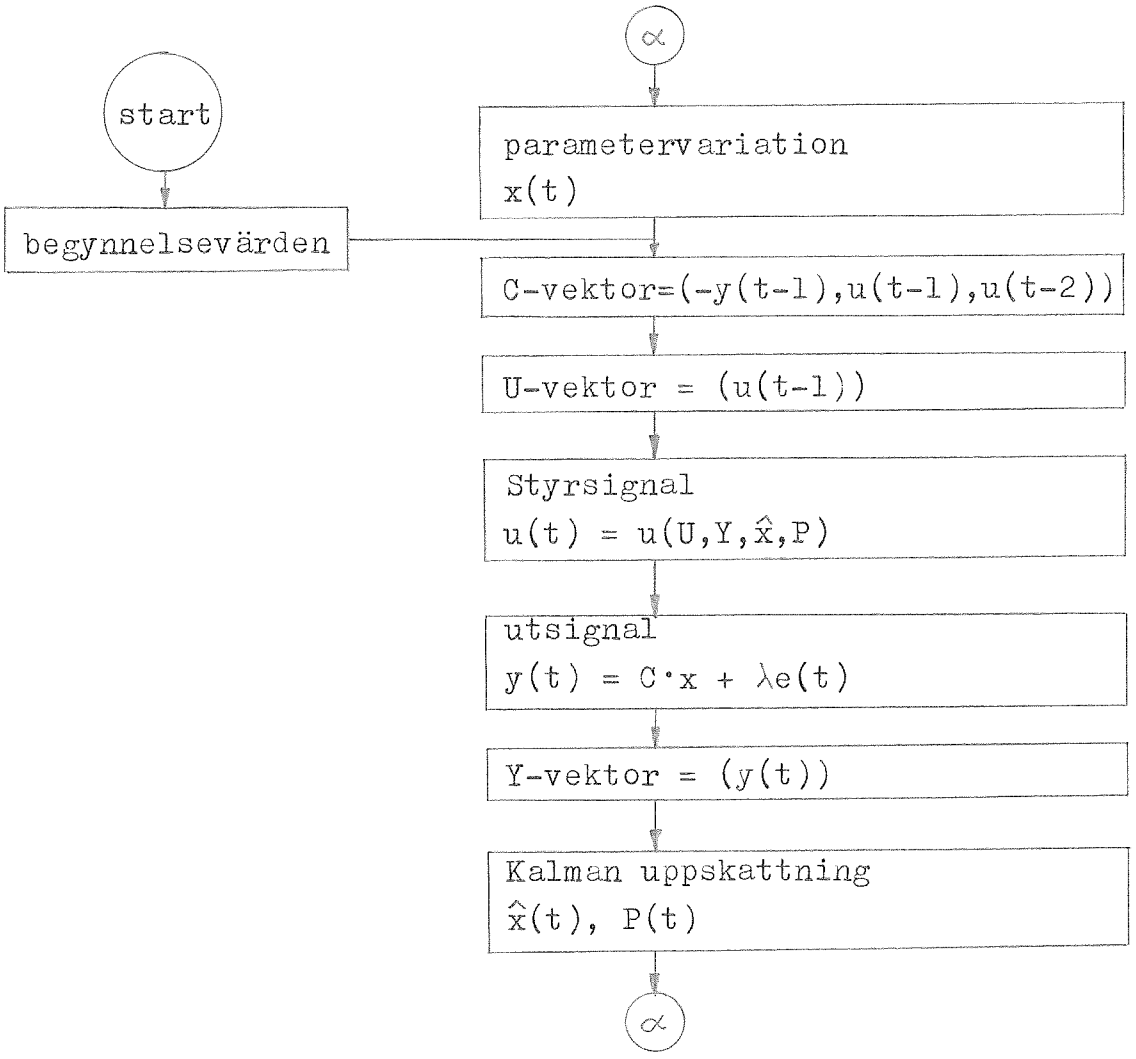
I 3 c slutligen ligger $a(t)$ i intervallet $-1 < a < 0$, medan $b(t)$ varierar kring noll. Det visar sig att det minvar återkopplade systemet blir instabilt, medan det mod. minvar återkopplade systemet hela tiden är stabilt. I det senare fallet

uppträder dock en insomningseffekt i styrsignal och i uppskattningen av b(t). Genom att till styrsignalen lägga en störsignal av lämplig storlek kan dock denna effekt elimineras.

I samtliga tre fall ovan fungerar, som vi skall se, mod. minvar styrlagen bättre än minvar styrlagen. I en del fall är den avsevärt bättre.

Det sista av snittet visar hur långt vi skulle kunna komma om vi på något sätt kunde förbättra våra uppskattningar. Detta för att vi skall få ett optimalt värde att jämföra våra tidigare resultat med.

Flödesschema vid simulering av exempel 3:



Minvar styrlag.

$$u(t) = - \frac{\hat{a}^2(t\ t-1)}{\hat{b}(t|t-1)(1-z^{-1}\hat{a}(t|t-1))}\ y(t-1)$$

karakteristiska ekvationen för det minvar återkopplade systemet:

$$z^2 + (a-\hat{a})z - a\hat{a} + \hat{a}^2 \frac{b}{\hat{b}} = 0$$

Modifierad minvar styrlag.

Vi antar att våra parametrar a och b varierar enligt:

$$\begin{bmatrix} a(t+1) \\ b(t+1) \end{bmatrix} = FI \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix} + BM \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \qquad \text{där}$$

$$FI = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad BM = \begin{bmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & \sigma_b \end{bmatrix}$$

Mod. minvar styrlagen får då utseendet (se sid. 10)

$$u(t) = \frac{\hat{a}\hat{b}^2 + 2\hat{b}P_{ab} + \hat{a}P_b}{\hat{b}^2 + P_b + \sigma_b^2}\ u(t-1) - \frac{\hat{a}^2\hat{b} + 2\hat{a}P_{ab} + \hat{b}P_a}{\hat{b}^2 + P_b + \sigma_b^2}\ y(t-1)$$

där $\hat{a} = \hat{a}(t|t-1)$ osv.

Styrlagen kan också skrivas

$$u(t) = - \frac{\rho_2 z^{-1}}{1-\rho_1 z^{-1}}\ y(t) = - H(z^{-1})\ y(t) = - \frac{H_T}{H_N}\ y(t)$$

där

$$\rho_1 = \frac{\hat{a}\hat{b}^2 + 2\hat{b}P_{ab} + \hat{a}P_b}{b^2 + P_b + \sigma_b^2}$$

$$\rho_2 = \frac{\hat{a}^2\hat{b} + 2\hat{a}P_{ab} + \hat{b}P_a}{\hat{b}^2 + P_b + \sigma_b^2}$$

Om vi för det öppna systemet sätter $G_0 = \frac{B}{A} z^{-1}$ får vi för för det återkopplade systemet:

$$G = \frac{G_0}{1+HG_0} = \frac{z^{-1}BH_N}{AH_N+z^{-1}BH_T}$$

Karakteristiska ekvationen ges av nämnaren ovan:

$$z^2((1+az^{-1})H_N + z^{-1}bH_T) = 0$$

Det återkopplade systemet är av tredje ordningen. En rot ligger i origo. De båda övriga ges av:

$$(z+a)((\hat{b}^2+P_b+\sigma_b^2)z - \hat{a}\hat{b} - \hat{a}P_b) + (\hat{a}^2\hat{b}+\hat{b}P_a)b = 0$$

eller

$$z^2 + (a - \frac{\hat{a}(\hat{b}^2+P_b)}{\hat{b}^2+P_b+\sigma_b^2}) z - \frac{a\hat{a}(\hat{b}^2+P_b)}{\hat{b}^2+P_b+\sigma_b^2} + \frac{(\hat{a}^2+P_a)b\hat{b}}{\hat{b}^2+P_b+\sigma_b^2} = 0$$

<u>Stabilitet.</u>

Vi vill nu undersöka det återkopplade systemets stbilitet vid de båda olika styrlagarna.

Karakteristiska ekvationen vid minvarstyrning löd:

$$z^2 + (a-\hat{a})z - a\hat{a} + \hat{a}^2 \frac{b}{\hat{b}} = 0$$

Om b ej nära noll och om $\hat{a} \approx a$, $\hat{b} \approx b$ är systemet alltid stabilt och lätt att styra. Detta visas i exempel 3 a.

Om $b \approx 0$ kan systemet bli instabilt:

Antag $\hat{a} \approx a < 0$ vilket ger karakteristiska ekvationen

$$z^2 = a\hat{a} - \hat{a}^2 \frac{b}{\hat{b}} \qquad a\hat{a} > 0$$

Antag vidare $b \approx 0$

Ekvationen kan ha rötter utanför $|z| = 1$ i tre fall:

1. Om $|\hat{b}|<|b|$ och $\hat{b}$ och b har samma tecken, kan vi få komplexa rötter utanför enhetscirkeln.
2. Om $|\hat{b}|<|b|$ och $\hat{b}$ och b har motsatt tecken, kan vi få reella rötter utanför enhetscirkeln.
3. Om $|\hat{b}|>|b|$ och $|\hat{a}|>1$, kan vi få reella rötter utanför enhetscirkeln.

I exempel 3 b blir systemet instabilt då b antar värden nära eller lika med noll, och utsignalen antar plötsligt mycket höga värden (burst). Ovanstående utgör alltså förklaring på detta. Denna instabilitet vid små b-värden kan, som vi såg redan i exempel 2 i viss mån motverkas av en modifierad minvar styrlag. Dock uppträder burst också vid denna.

Vi vill se vad som händer då $b, \hat{b}$ nära noll. Vi antar

$P_a,\ P_b \ll |a|, |\hat{a}|$

$a \approx \hat{a}$

$\hat{b}^2 \ll P_a,\ P_b$

vilket ger karakteristiska ekvationen:

$$z^2 + \left(1 - \frac{P_b}{P_b+\sigma_b^2}\right) az - a^2 \frac{P_b}{P_b+\sigma_b^2} = 0$$

Sätt $\dfrac{P_b}{P_b+\sigma_b^2} = \alpha$ och lösningen blir

$$\begin{cases} z_1 = \alpha a \\ z_2 = -a \end{cases}$$

Systemet är alltså instabilt om $a<-1$, samt om villkoren ovan är uppfyllda. Om som i 3 b 3 P_a och P_b är stora blir instabilitetsområdet stort, vilket motverkar den förbättring vi är ute efter då vi förstorar σ_b^2.

Simulering på datamaskin.

Som tidigare sagts gör vi en uppdelning på tre underexempel. Verklig och antagen parametervariation specificeras för de olika körningarna i slutet av kapitlet. Antalet tidpunkter är 800.

Exempel 3 a

visar hur systemet uppför sig om a varierar kring -1 och b hålles konstant skild från noll. I 3 a 1 har vi slumpmässig variation på a. b = 1, och antages känd. I 3 a 2 har vi sinusformig variation på a, medan b = 0.5 och uppskattas.

Resultat:

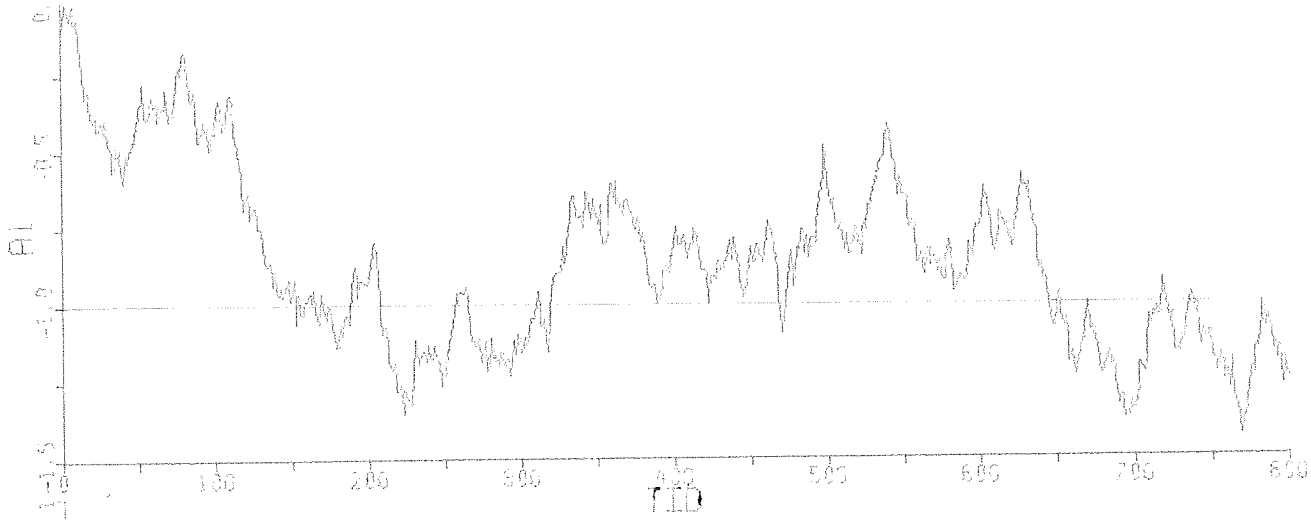
Båda exemplen visar att såväl minvar som mod. minvar är goda styrstrategier. Om vi i 3 a 2 bortser från insvängningsförloppet gäller för förlustfunktionerna:

3 a 1	minvar	$V = 1532$
	mod. minvar	$V = 1525$
3 a 2	minvar	$V = 1450$
	mod. minvar	$V = 1433$
		$V_0 = 1293$

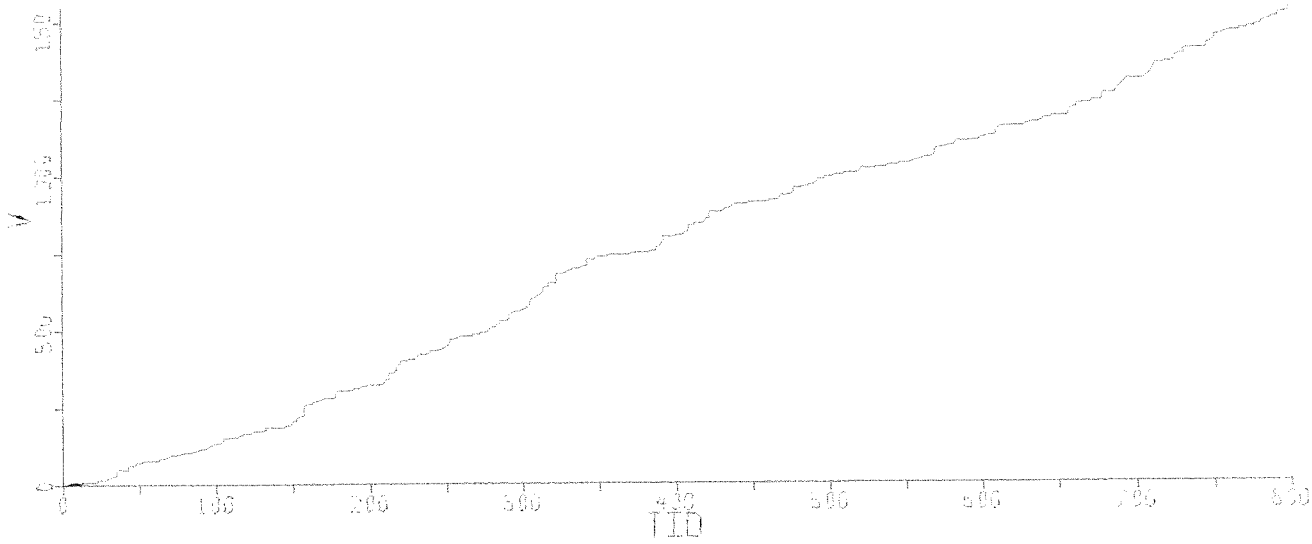
Se sid. 34 och 35.

Insomningseffekt.

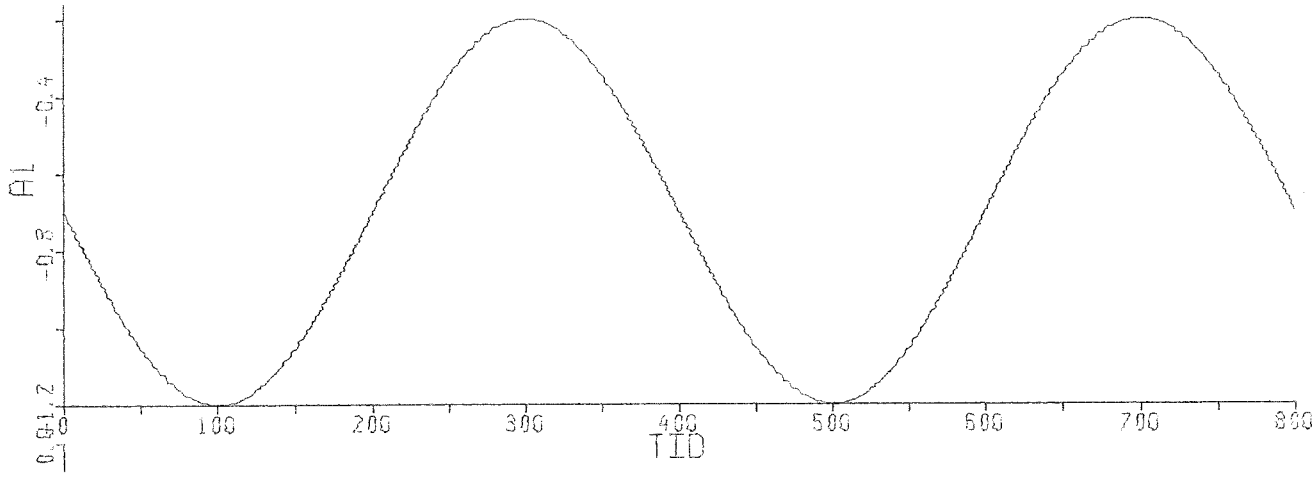
För ideal minvar, dvs om parametervärdena fullständigt kända i varje punkt, gäller $Ey^2 = (1+a^2)\lambda^2$. Om däremot styrsignalen u(t) hela tiden sättes lika med noll gäller $Ey^2 = \frac{\lambda^2}{1-a^2}$. Se fig.



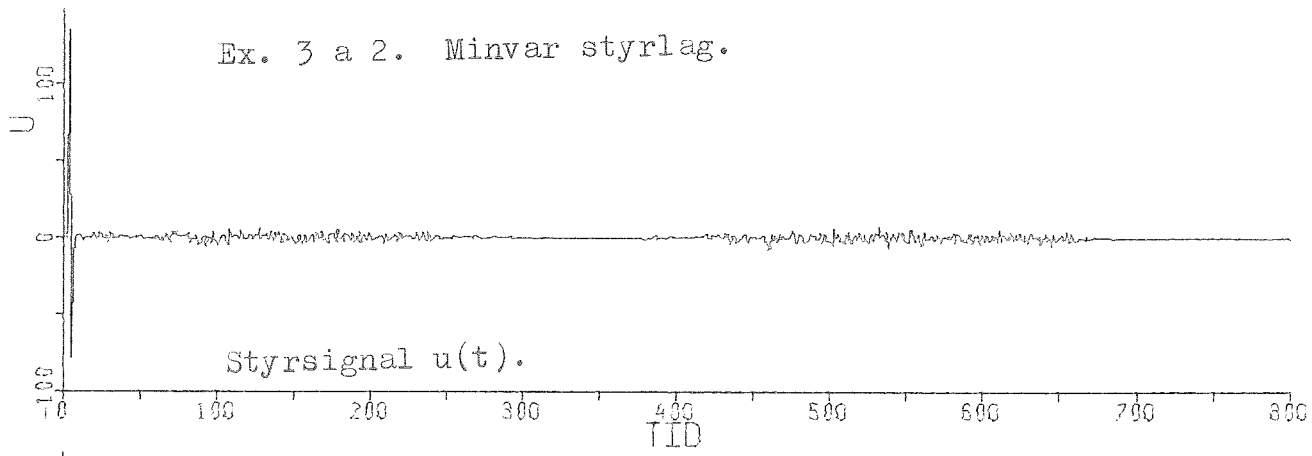
Ex. 3 a 1. Parametervariation a(t). b = 1.

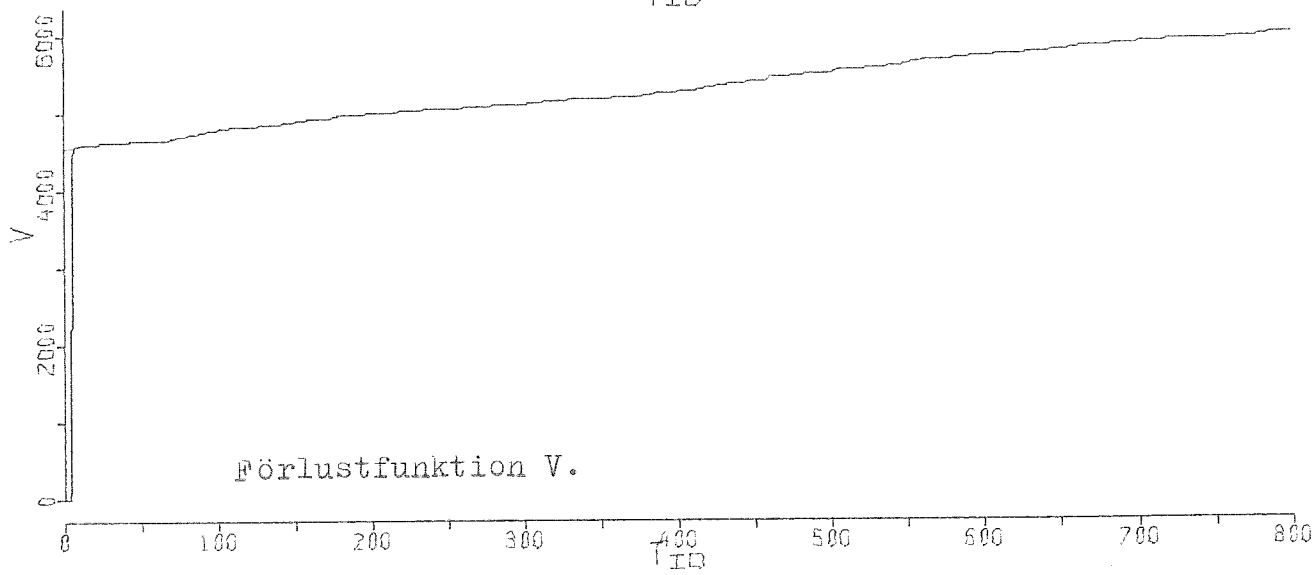


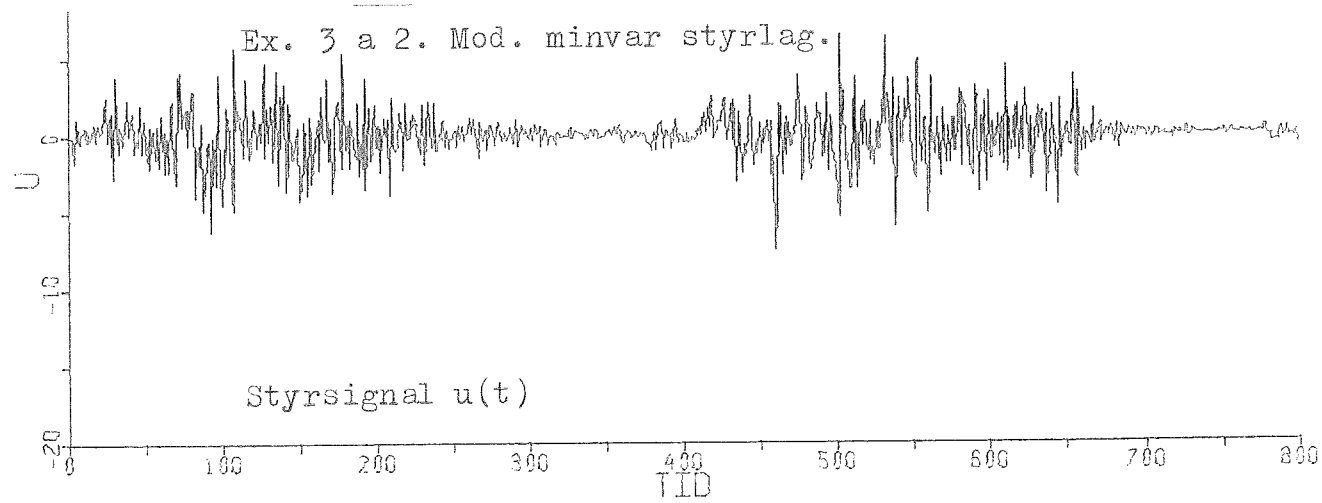
Ex. 3 a 1. Förlustfunktion, minvar och mod. minvar styrlag.

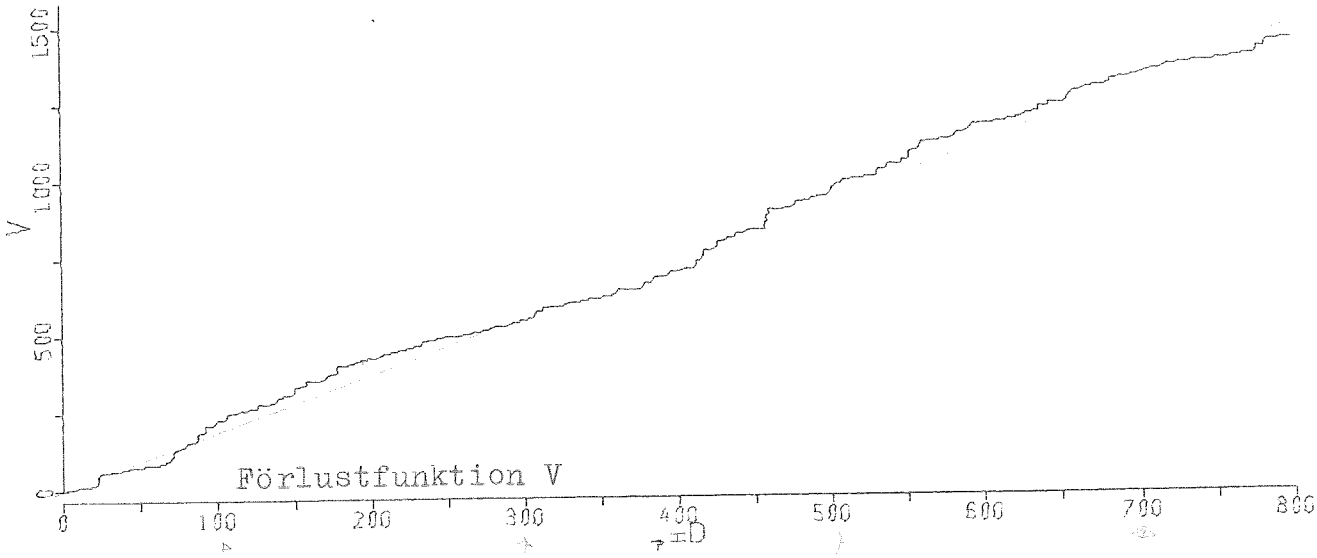


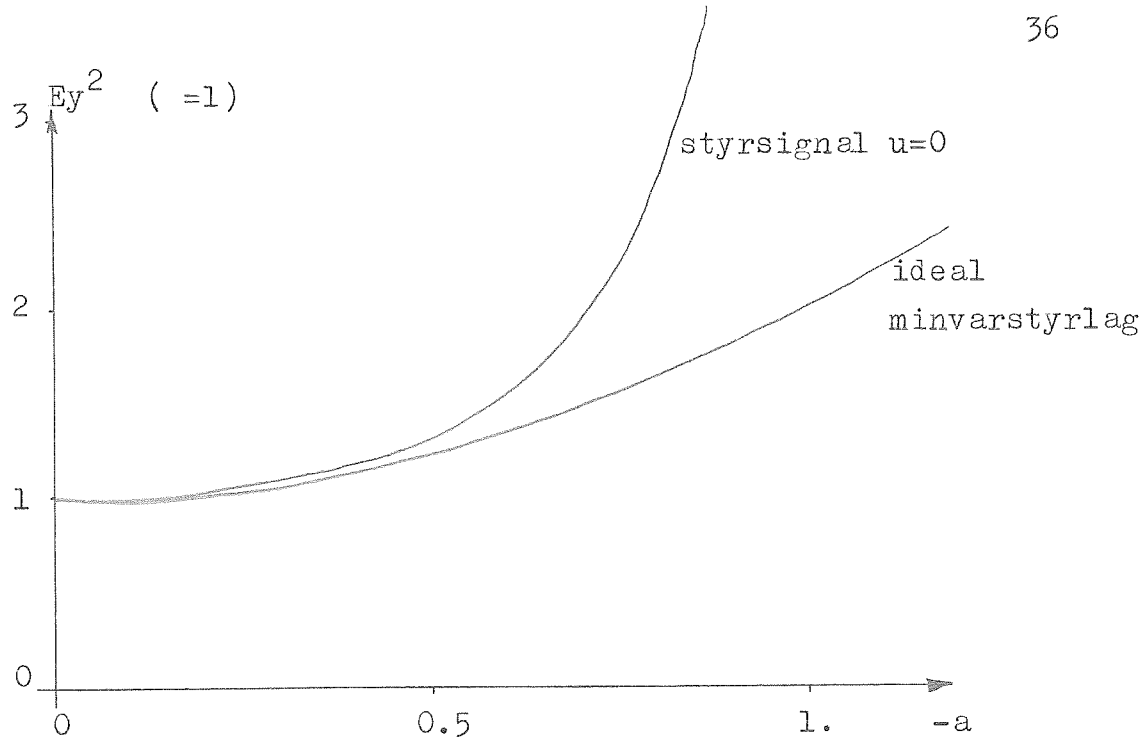
Ex. 3 a 2. Parametervariation a(t). b = 0.5 .


Ex. 3 a 2. Minvar styrlag.
U
100
0
-100
Styrsignal u(t).
0
100
200
300
400
500
600
700
800
TID


V
6000
4000
2000
0
Förlustfunktion V.
0
100
200
300
400
500
600
700
800
TID


Ex. 3 a 2. Mod. minvar styrlag.
U
0
-10
-20
Styrsignal u(t)
0
100
200
300
400
500
600
700
800
TID


V
1500
1000
500
0
Förlustfunktion V
0
100
200
300
400
500
600
700
800
TID



E y^2 som funktion av a för två olika styrlagar.

Förlustfunktionerna för de båda strategierna överensstämmer ganska väl om $-a < 0.75$. Om $a > -0.75$ bör alltså styrsignalen vara nära noll. (se exempel 3 a).Ur ekvationen för P i kalmanteorin följer att ju mindre styrsignal eller utsignal, desto större värde på motsvarande P-element, och alltså desto sämre uppskattning.

(Om vi antar att $P = \alpha I$, $\theta = I$ får vi

$$P = \alpha I + R_1 - \frac{\theta^T\theta}{\alpha\theta\theta^T + R_2}\alpha^2$$

Om nu y och u i θ är små kommer $R_1 - \frac{\theta^T\theta}{\alpha\theta\theta^T + R_2}\alpha^2 > 0$ och P växer.)

Om vi har en mod. minvar styrlag kommer vi att få en koppling mellan litet u värde och dålig b-uppskattning enligt följande. Ett litet värde på u medför dålig uppskattning av b och stort värde på P_b. Stort värde på P_b medför litet värde på u, eftersom P_b förekommer i nämnaren i uttrycket för u. Detta kan medföra en insomning av u och b. Med minvar styrlag förekommer ej denna effekt.

Exempel 3 b 1

illustrerar ovanstående. Vi låter a variera stokastiskt kring -1, och b stokastiskt kring noll, med $\Phi = \begin{bmatrix} 0.95 & 0 \\ 0 & 0.95 \end{bmatrix}$ (se sid. 3). Vår kalmanuppskattning och våra styrlagar är dock härledda för parametermedelvärde lika med noll. Om vi nu i vår uppskattning använder FI enligt ovan, kommer $\hat{a}$ då utsignalen är liten att glida mot noll. Detta inträffar särskilt då $a > -1$. Om a åter blir mindre än -1, ökar y och $\hat{a}$ följer bättre.

Vid minvar blir systemet som vi sett instabilt om $b \approx 0$. Detta visar sig i form av burst vid exempelvis t= 210, 300, 630. Ingen insomningseffekt förmärkes vid minvar styrning.

Vid mod. minvar styrning har vi däremot tydlig insomning hos $\hat{b}$. Detta eftersom u enligt ovan kan bli mycket liten och därmed medföra en mycket dålig uppskattning av b.

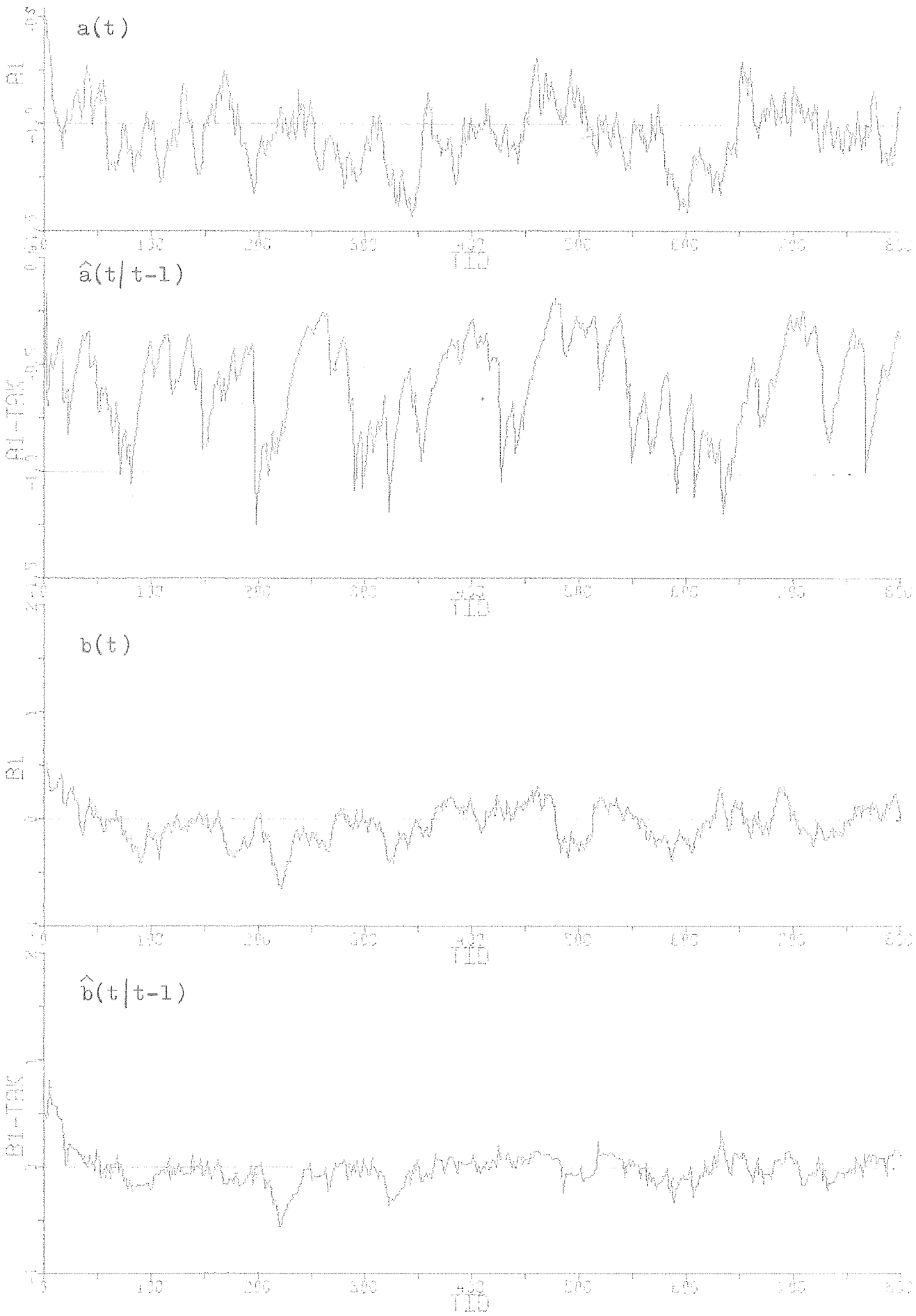
Observera att insomningen inträffar om $a > -1$. Då a därefter glider under -1 ökar y och $\hat{a}$ följer därmed bättre. Samtidigt ger styrlagen större värden på u och $\hat{b}$ vaknar därmed upp. Se ex.vis $500 < t < 560$.

Även med mod. minvar styrlag blir systemet instabilt och vi får burst.

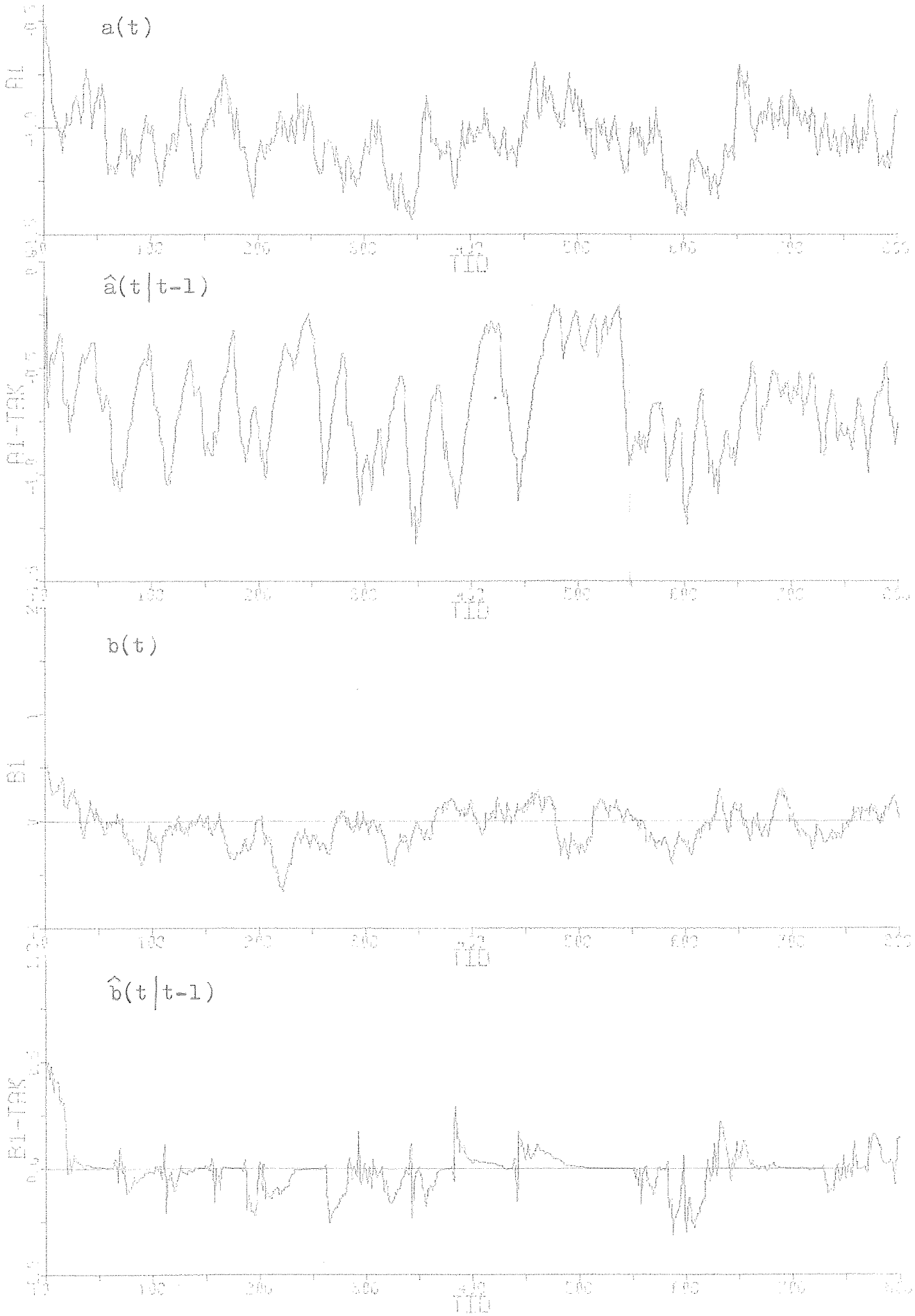
Resultat.

Minvar	$V = 6.52 \cdot 10^{15}$
Mod. minvar	$V = 1.83 \cdot 10^{5}$
	$V_0 = 1.21 \cdot 10^{3}$

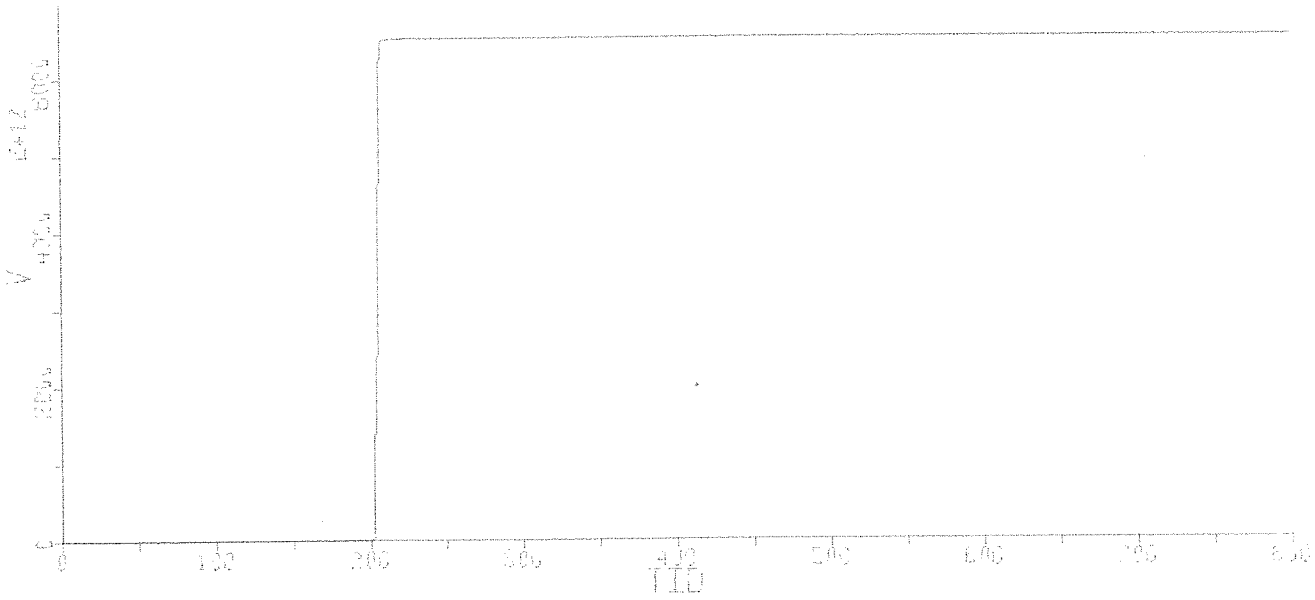
Mod. minvar styrlagen är alltså klart överlägsen minvarstyrning. För att få bättre följning i uppskattningarna skall vi i fortsättningen (om parametermedelvärden $\neq 0$) anta att FI = I.



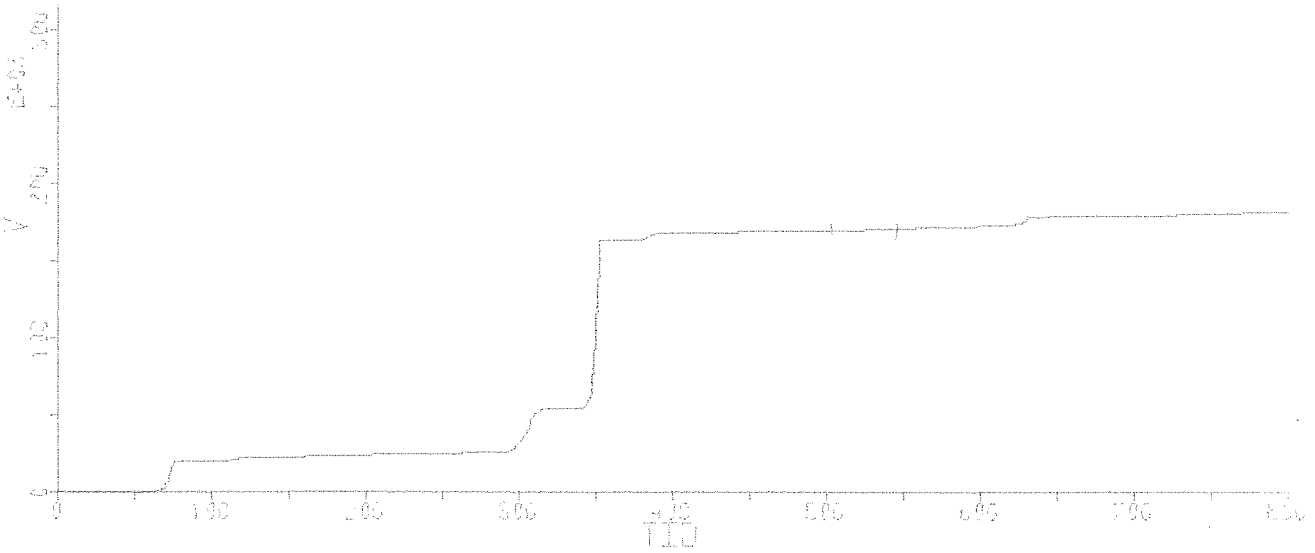
Exempel 3 b 1. Minvar styrlag. Parametervariation och uppskattning.



Exempel 3 b 1. Mod. minvar styrlag. Parametervariation och uppskattning.



Exempel 3 b 1. Minvar styrlag. Förlustfunktion V.



Exempel 3 b 1. Mod. minvar styrlag. Förlustfunktion V.

Exempel 3 b 2.

I detta exempel skall vi lite märmare studera när det mod. minvar återkopplade systemet blir instabilt. För att få bättre uppskattning av a och b mot 3 b 1 antar vi FI=I. Vi skall låta a och b variera slumpartat kring -1 respektive 0. I styrlag och kalmanuppskattning antar vi dock att a och b varierar båda kring noll.

3 b 2 är lik 3 b 1 så när som på annan FI-matris.

Resultat.

Minvar styrlag:

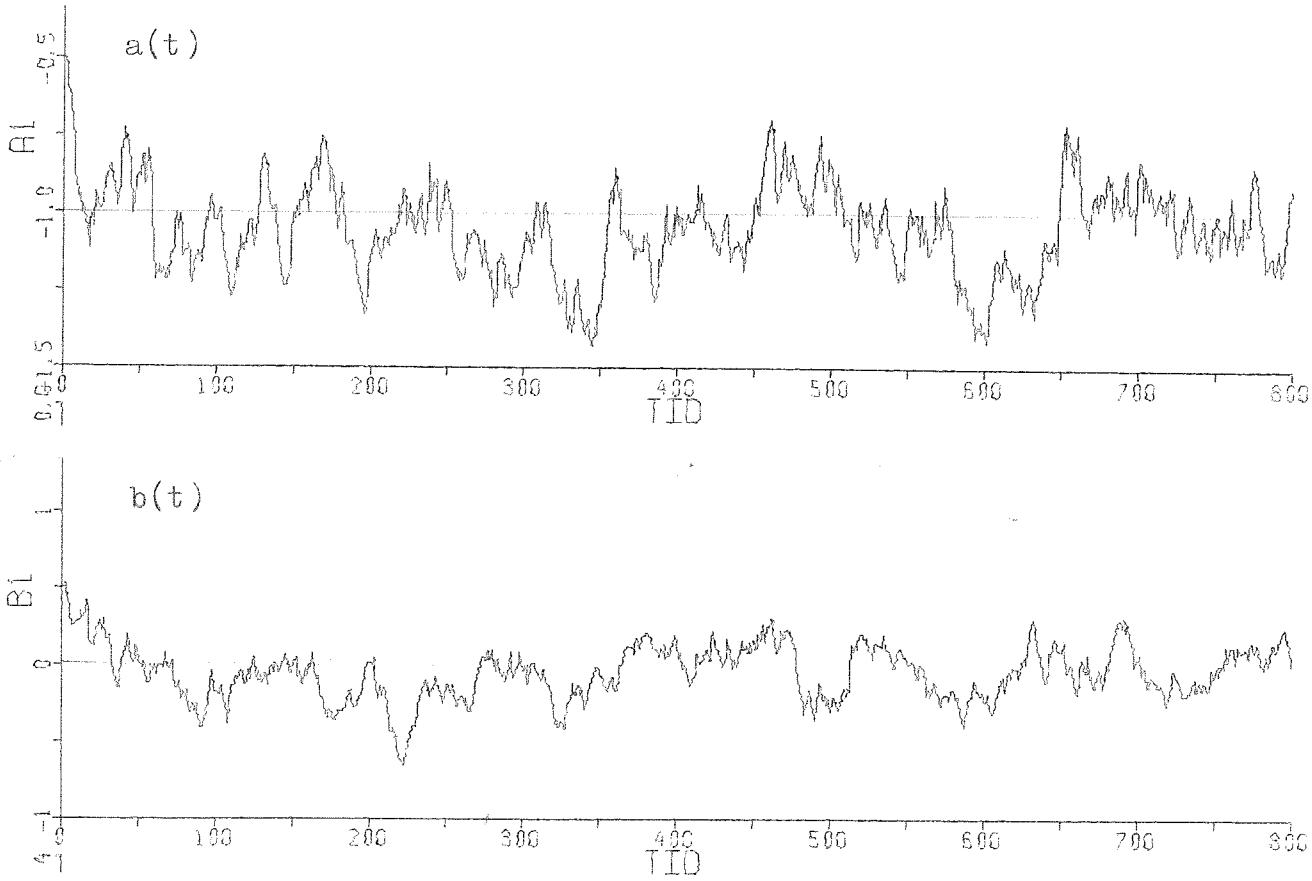
Systemet kan bli instabilt då $b \approx 0$. En undersökning av karakteristiska ekvationens rötter kring t = 300, där vi har hög instabilitet, exemplifierar alla de tre fall som är nämnda på sid. 32. Förlustfunktionen blir $V = 3.43 \cdot 10^{18}$

Mod. minvar styrlag:

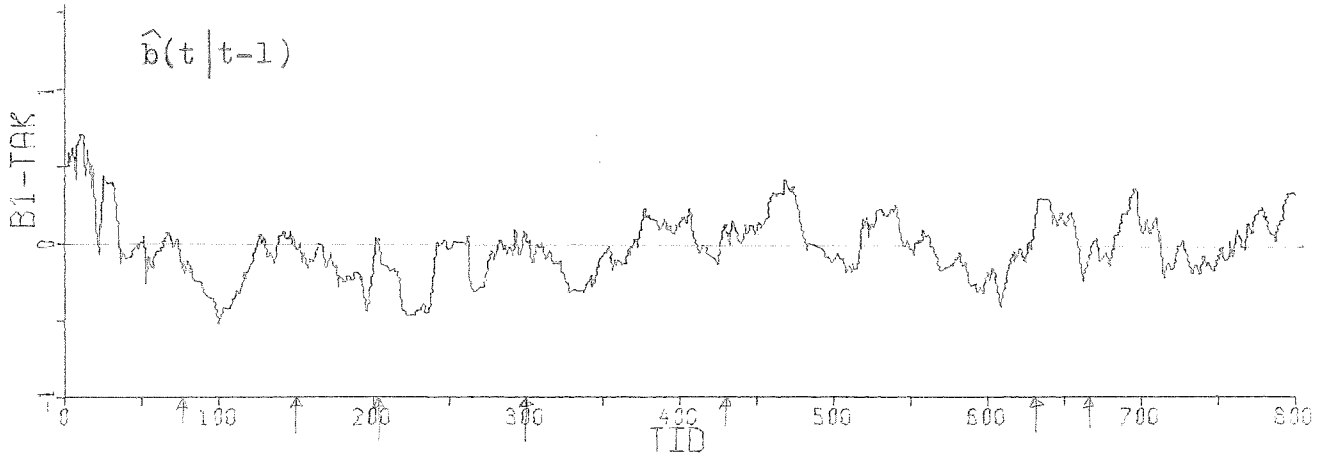
Ingen insomningseffekt uppträder, vilket måste bero på att vi ändrat FI. Eftersom nämnaren i styrlagen förutom $\hat{b}$ innehåller P_b och σ_b^2 bör detta motverka alltför stora styrsignaler då $b \approx 0$. Om både P_b och $\hat{b}$ och b är nära noll samtidigt, kan systemet dock fortfarande bli instabilt.

Litet P_b innebär god följning i b, dvs vi bör ha stor styrsignal vilket är fallet om $a < -1$. Villkoren är uppfyllda vid exempelvis t = 75, 150, 205, 300, 435, 630, 665, där vi också har burst.

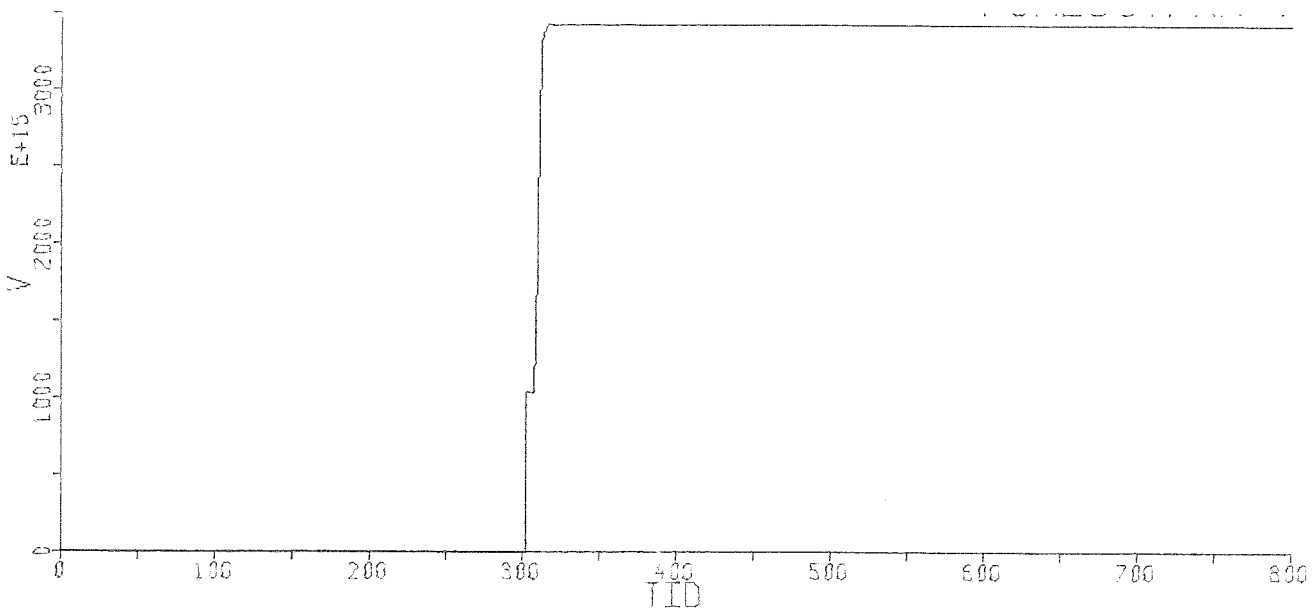
Minvar styrlag	$V = 3.43 \cdot 10^{18}$
Mod. minvar styrlag	$V = 2.68 \cdot 10^{5}$
	$V_0 = 1.70 \cdot 10^{3}$



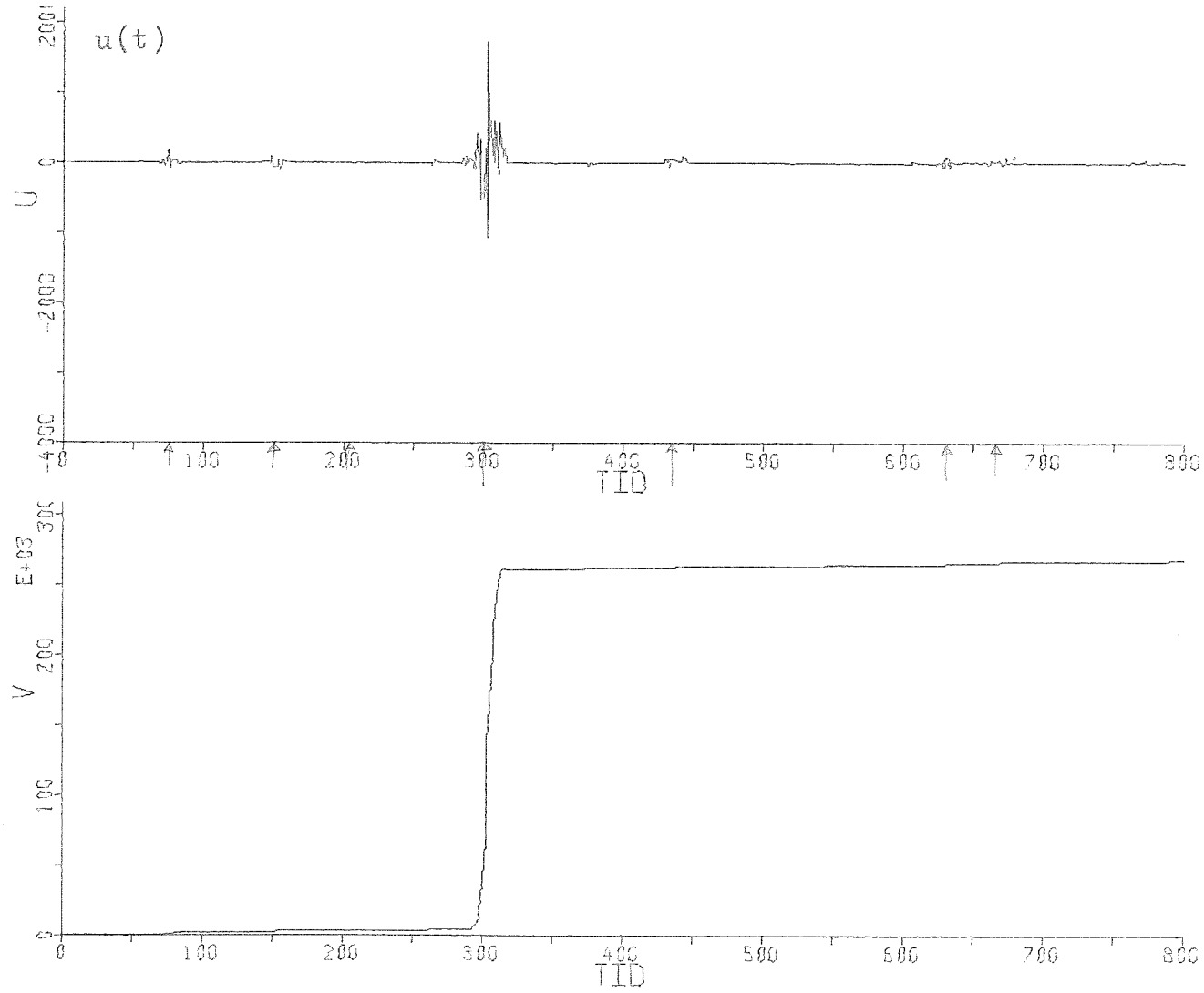
Exempel 3 b 2. Parametervariation.



Exempel 3 b 2. Parameteruppskattning $\hat{b}$, vid mod. minvar styrning.



Exempel 3 b 2. Förlustfunktion V vid minvarstyrning.



Exempel 3 b 2. Styrsignal u och förlustfunktion V vid mod. minvar styrning.

Exempel 3 b 3.

Eftersom mod. minvar återkopplade systemet blir instabilt delvis beroende på att nämnaren i styrlagen blir liten, vill vi försöka med ett större värde på σ_b. Vi sätter i ett första försök σ_b tio gånger större än det verkliga värdet.

Resultat.

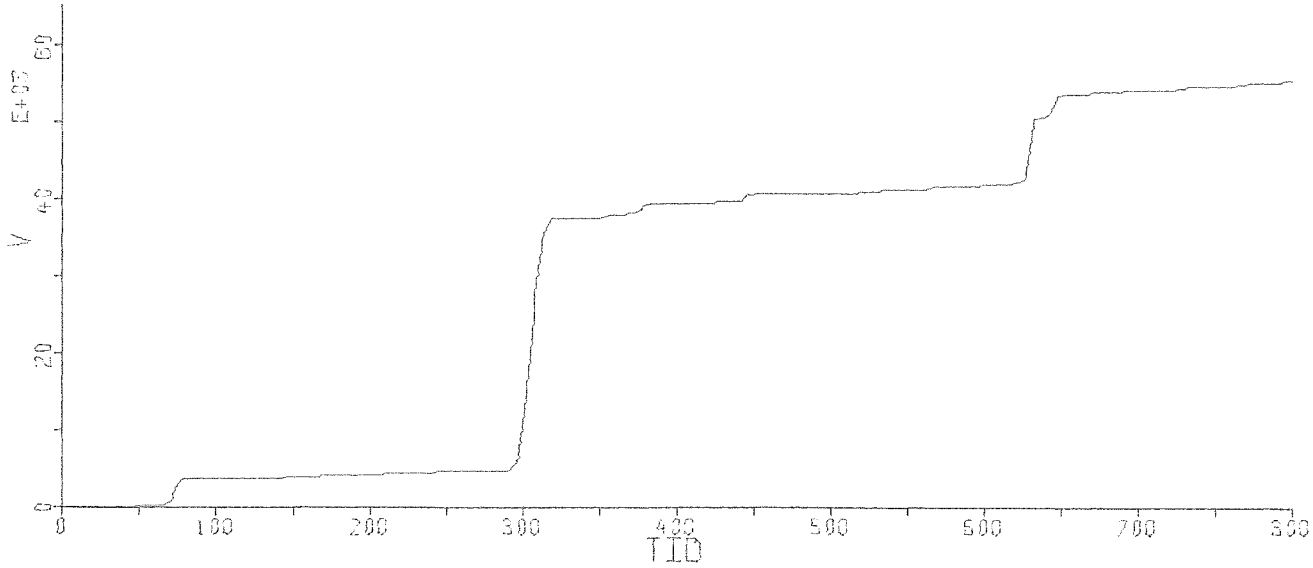
	Minvar	$V = 5.1 \cdot 10^{13}$
	Mod. minvar	$V = 2.2 \cdot 10^{19}$
		$V_0 = 1.7 \cdot 10^{3}$

Styrlagen blir i fallet mod. minvar väldigt dålig. Stabilitetsundersökningen på sid. 32 förklarar varför. Det mod. minvar återkopplade systemet är instabilt om $a < -1$, samt om $\hat{b}^2 \ll P_a, P_b \ll |a|, |\hat{a}|$. σ_b stort $\Rightarrow$ P_{bmin} stor $\Rightarrow$ stort instabilitetsområde, vilket motverkar den förbättring vi var ute efter då vi förstorade σ_b.

Förlustfunktionen V måste dock ha ett minsta värde för något σ_b. Genom att beräkna V för några olika värden på $\sigma_a = \sigma_b = \sigma$ skall vi försöka finna detta optimala värde. För att uppskattningarna ej skall bli sämre använder vi i kalman uppskattningen en σ-matris som överensstämmer med den verkliga. Parametrarna varierar som i 3 b 1 men i styrlagen antar vi alltså en σ-matris (BM) lika med $\begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$.

Resultat.

	σ	V (mod. minvar)	
	0.075	209	$\cdot 10^3$
	0.100	45.0	"
	0.103	21.3	"
	0.106	97.9	"
	0.110	725	"
	0.115	46500	"
	0.125	582	"
	0.130	725	"
	0.160	9930	"
	0.200	138000	"
jämför ex. 3 b 2	0.050	268	"



Exempel 3 b 3. Förlustfunktionen V för $\sigma = 0.100$. Mod. minvar.

Genom att i styrlagen välja ett större värde på σ än det verkliga kan förlusten tydligen nedbringas väsentligt, här med en faktor tio. Jämför med $V_0 = 1.70 \cdot 10^3$.
De egendomligt höga värdena för V i mitten av tabellen kan bero på spridning, eftersom vi bara kört för ett brus.

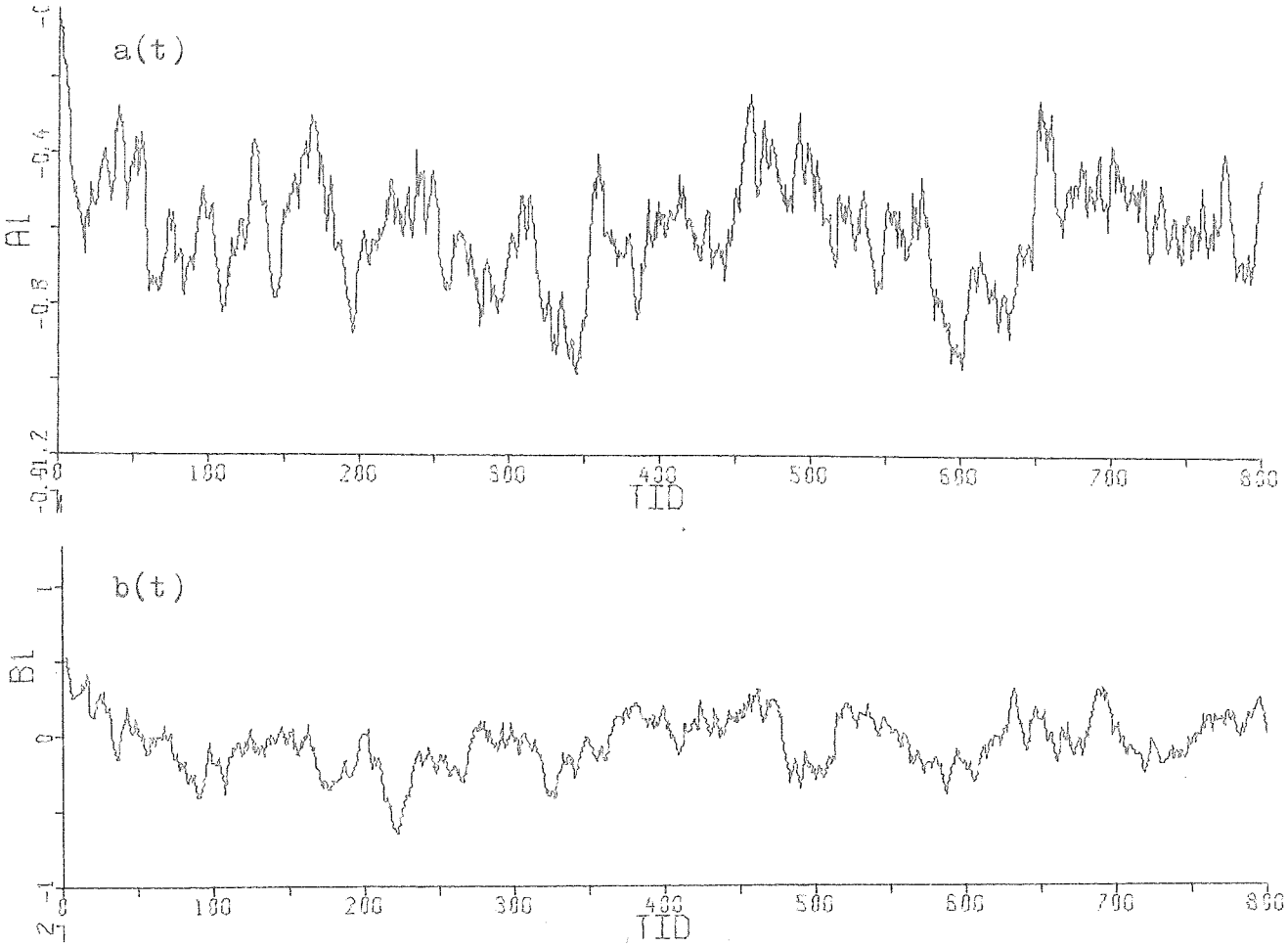
Exempel 3 c.

3 c 1.

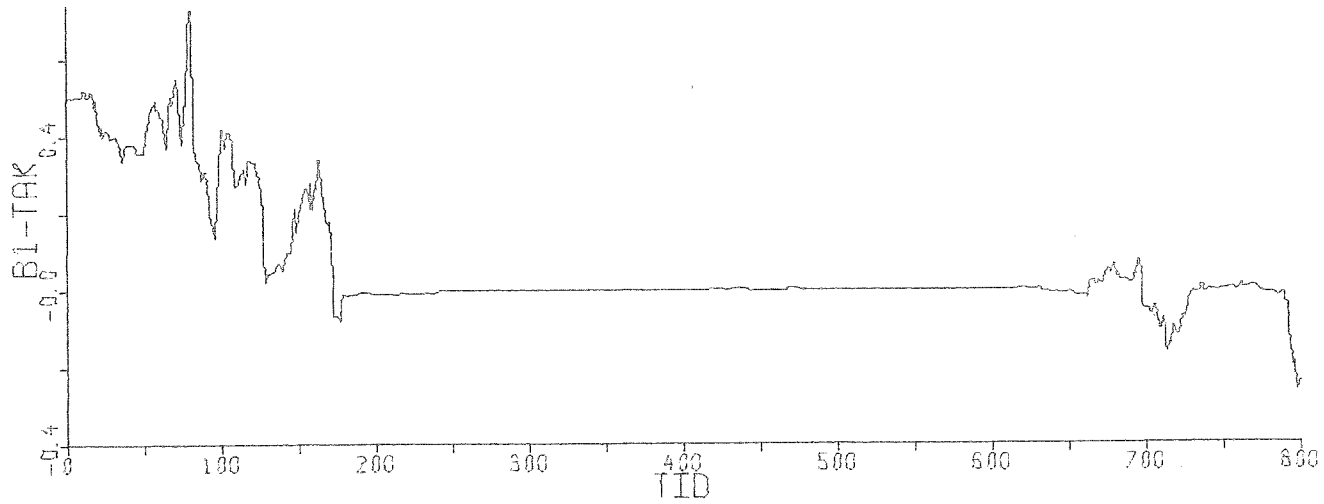
Vi har sett att om $\hat{b}$ litet samt $a < -1$ blir det mod. minvar återkopplade systemet instabilt. För att verifiera att inga burst uppträder om $a > -1$ genomför vi en körning med $a > -1$, samt b stokastiskt varierande kring noll.

Resultat.

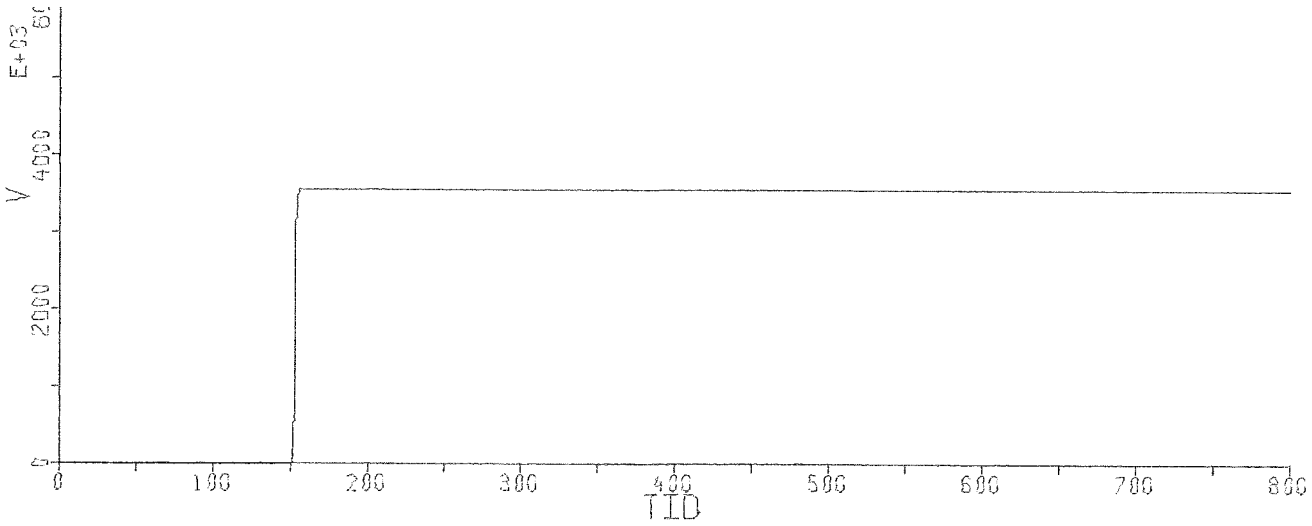
Minvar styrningen är fortfarande dålig och burst uppträder. Mod. minvar styrningen är nu bra och ingen instabilitet uppträder då b passerar noll. En annan effekt uppträder dock, nämligen insomning. Detta är i linje med vad vi sagt tidigare. Om $a > -1$ blir styrsignalen liten, vilket medför dålig följning



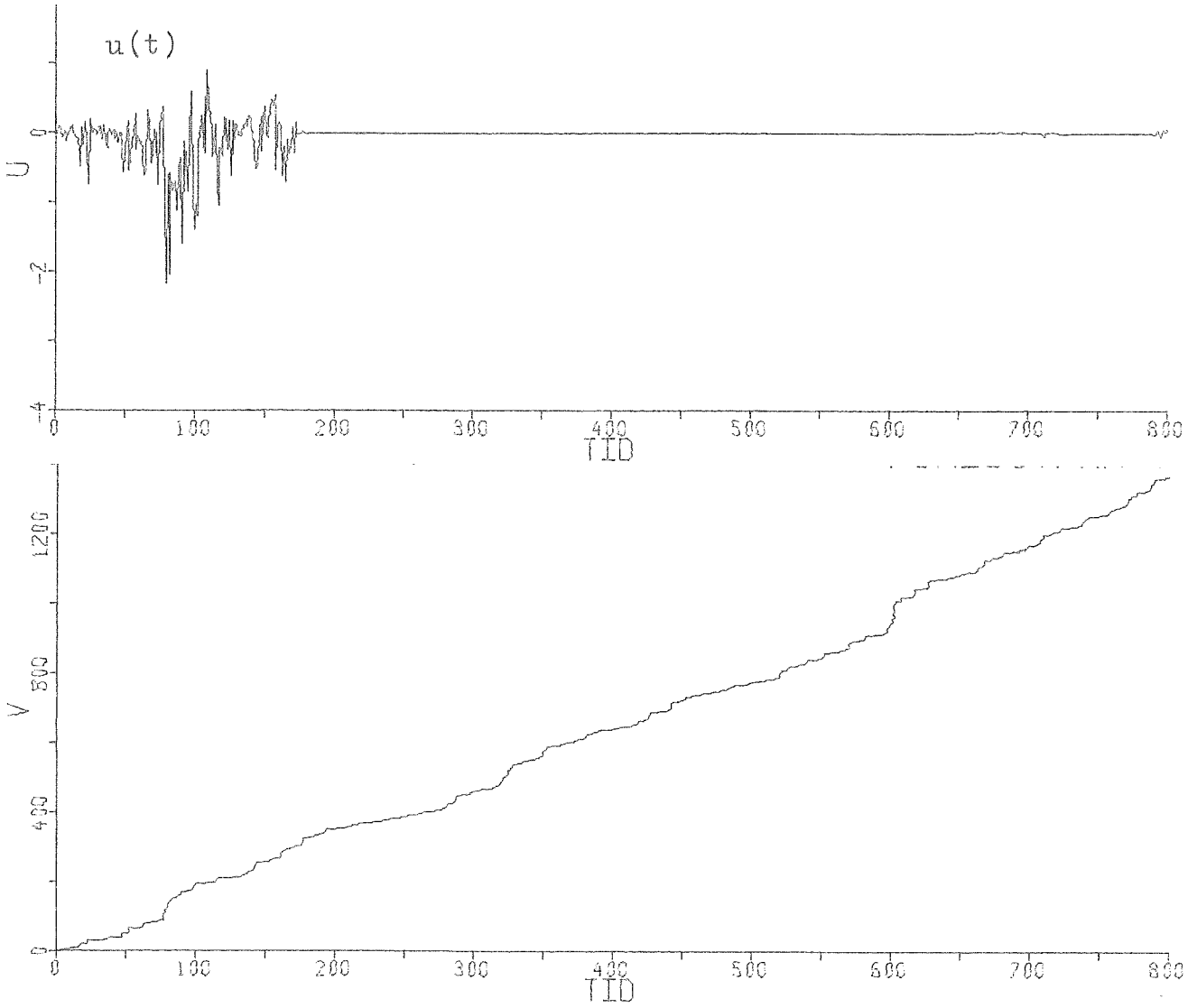
Exempel 3 c 1. Parameter variation.



Exempel 3 c 1. Parameteruppskattning $\hat{b}$, vid mod. minvar styrning.



Exempel 3 c 1. Förlustfunktion V vid minvar styrning.



Exempel 3 c 1. Styrsignal u och förlustfunktion V vid mod. minvar styrning.

i b, dvs stort P_b. Om nu $\hat{b}$ blir liten ($\hat{b}^2 \ll P_b$) kommer u enligt styrlagen att gå mot noll. Detta i sin tur medför att $\hat{b}$ bibehåller sitt låga värde. u vaknar först då utsignalen blir större exempelvis på grund av att a närmar sig -1.

Minvar styrlag	$V = 3.55 \cdot 10^6$
Mod. minvar styrlag	$V = 1370$
	$V_0 = 1106$

3 c 2.

Ett sätt att undvika insomning hos u och b, är att till den av mod. minvar styrlagen uträknade styrsignalen lägga en signal $\Delta(t)$, med värde exempelvis $\Delta(t) = \delta(-1)^t$. Eftersom då u aldrig kan bli riktigt liten bör vi ej heller få någon insomning i $\hat{b}$. Detta i sin tur bör medföra ett bättre värde på förlustfunktionen.

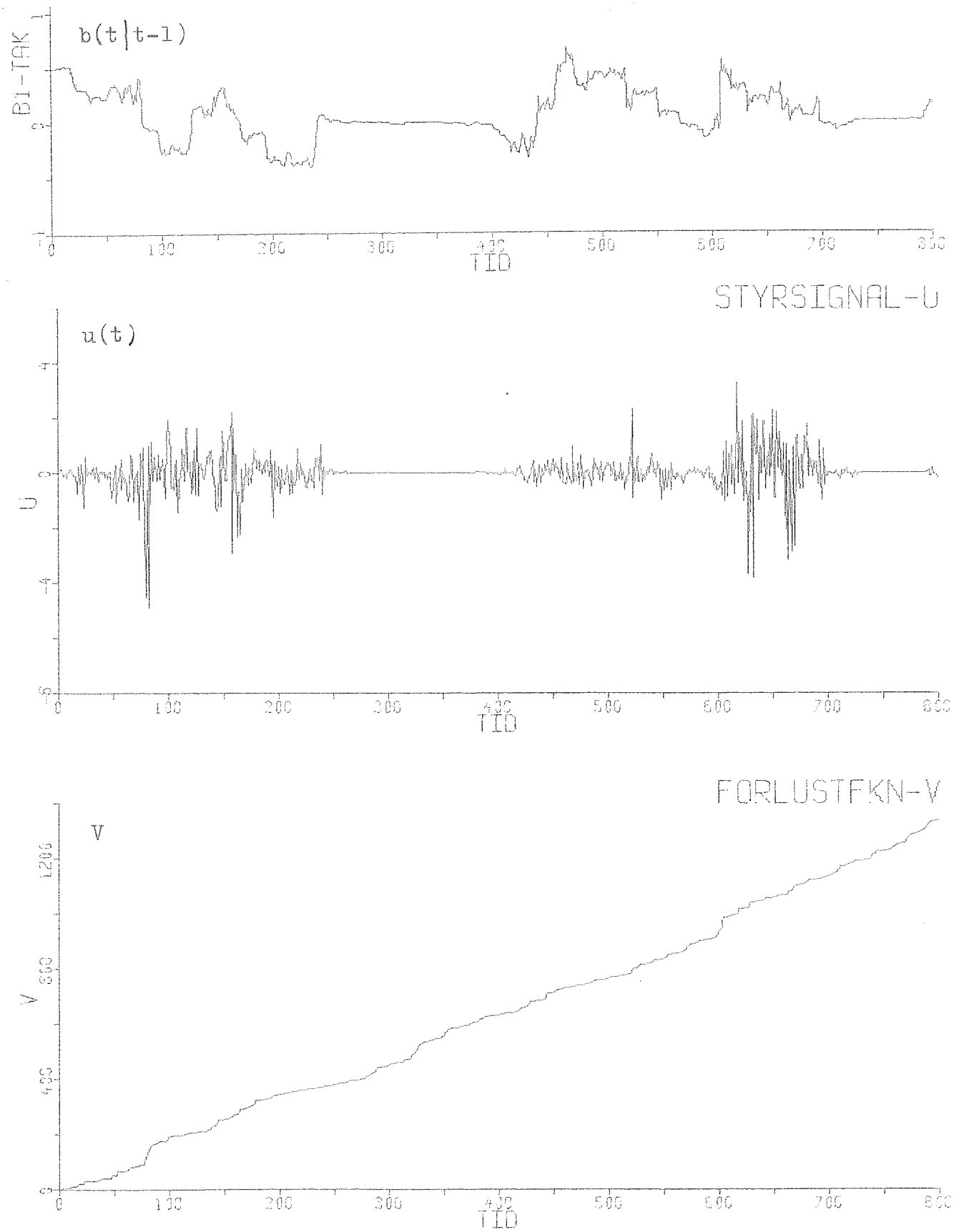
Resultat.

För några olika värden på δ får vi V enligt:

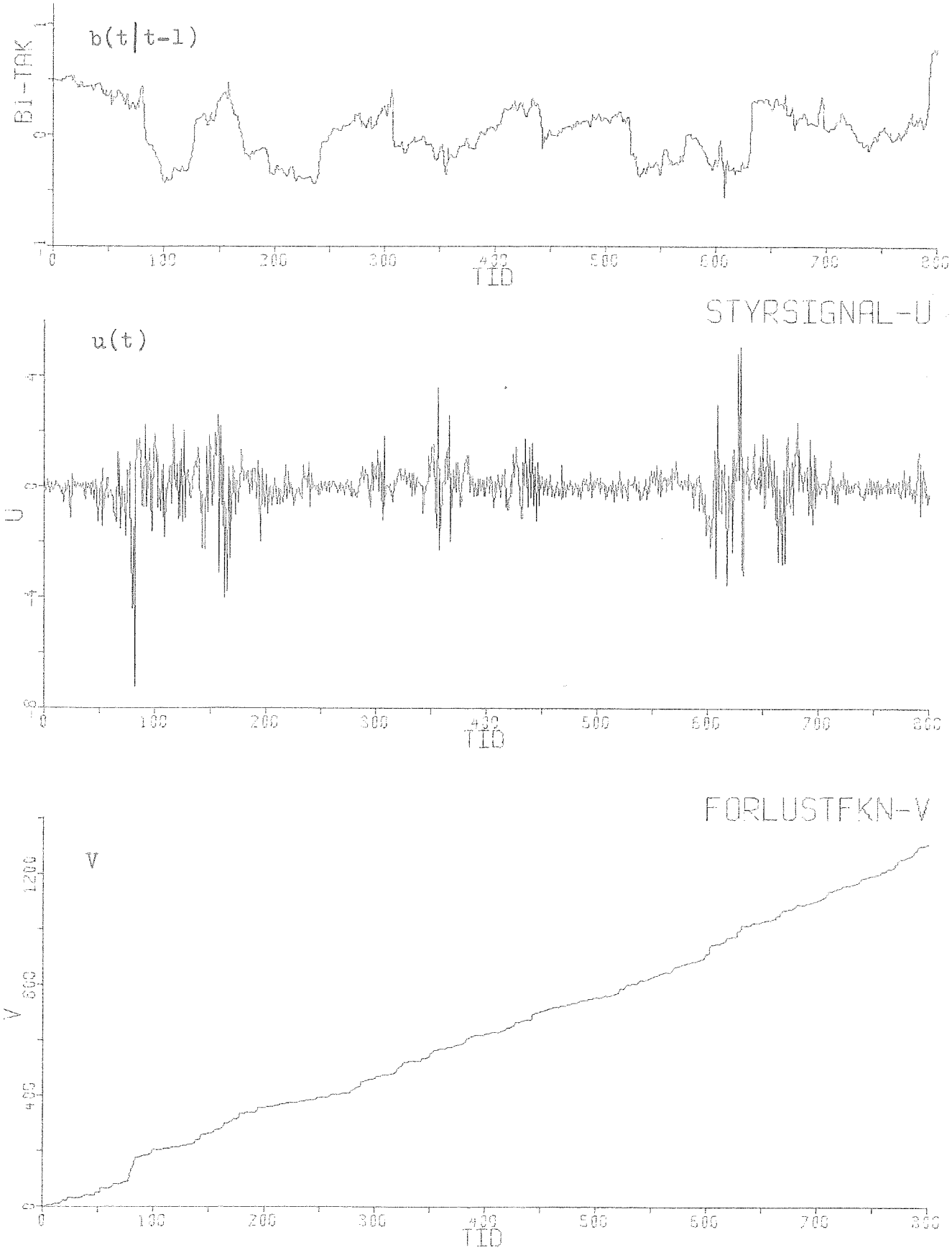
δ	V
0.00	1340
0.02	1331
0.05	1314
0.10	1310
0.15	1330

(Att V för δ=0. ej överensstämmer helt med 3 c 1, beror på att vi något ändrat BM i styrlag.)

Enligt figur sid. 49 och 50 har vi tydlig insomning i fallet $\delta = 0.$, däremot ingen i fallet $\delta = 0.10$.



Exempel 3 c 2. b-uppskattning, styrsignal samt förlustfunktion för $\delta = 0.00$



Exempel 3 c 2. b-uppskattning, styrsignal smat förlustfunktion för $\delta = 0.10$

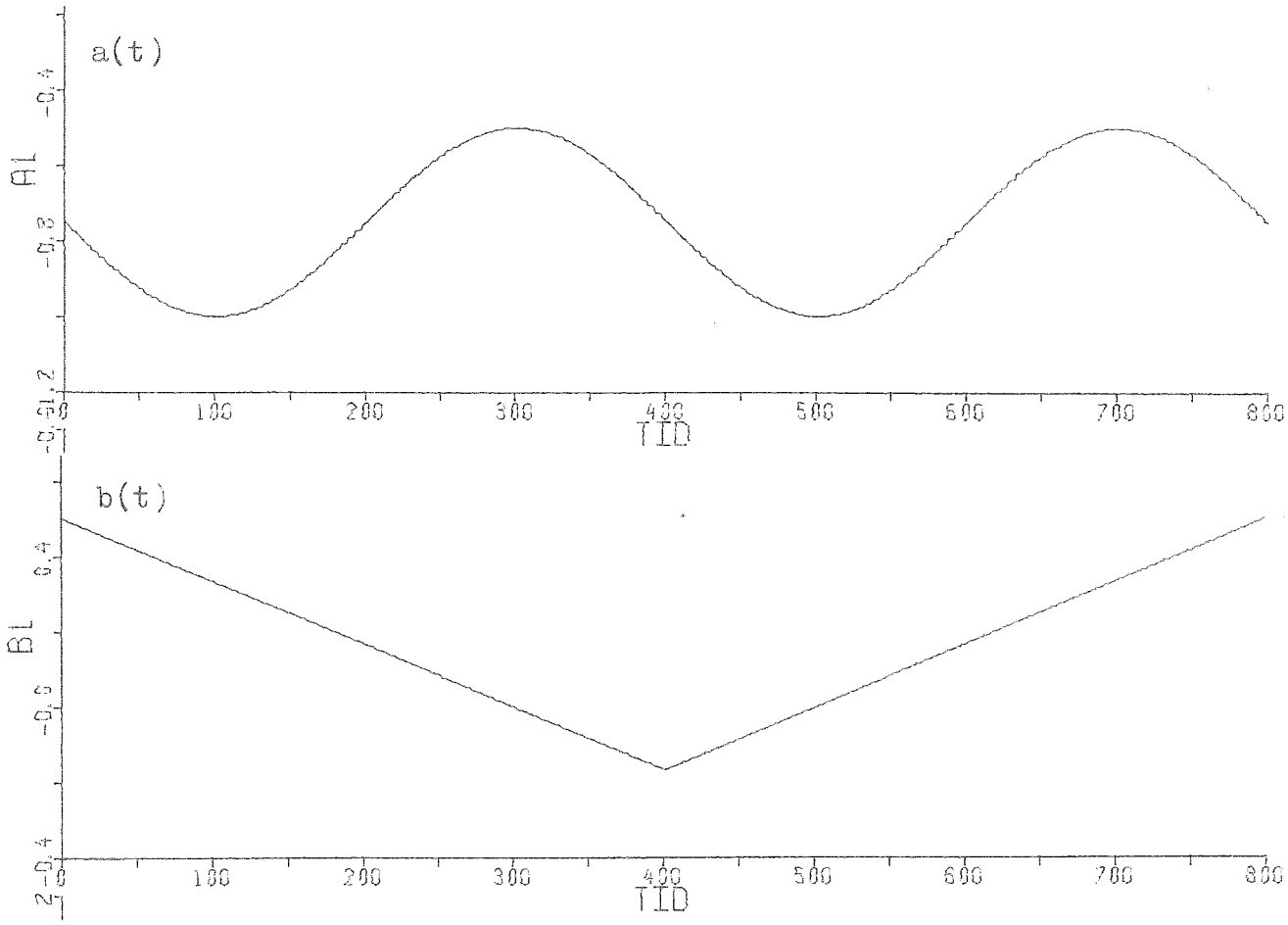
3 c 3.

För att ytterligare belysa ett system med -1 a 1 och b varierande kring noll, har simulering enligt 3 c 3 utförts. Parameter variation se figur sid. 52.

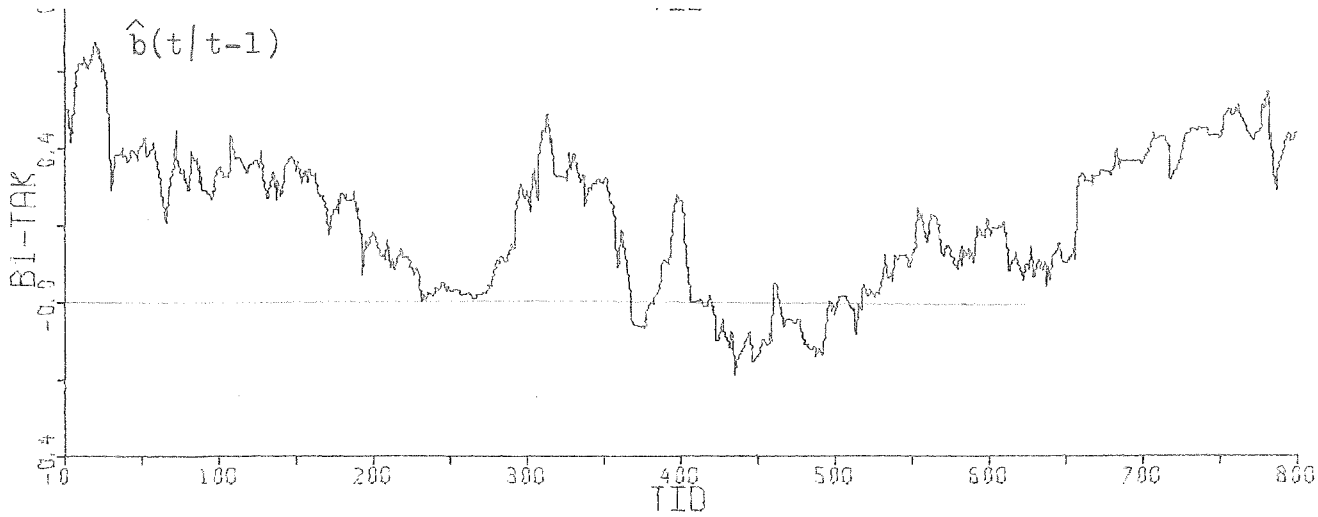
Resultat.

Det minvaråterkopplade systemet blir tydligt instabilt då b nära noll, och förlustfunktionen blir $V = 37.6 \cdot 10^3$. Enligt vad vi tidigare sagt skall det modminvar återkopplade systemet alltid vara stabilt. Detta stämmer också, även om utsignalen blir stor då a nära -1, samtidigt som b nära noll. Om a -0.4 och b 0 märks dock inget speciellt. (Vid minvarstyrning uppträdde här burst.) Insomningseffekten är knappt märkbar, möjligen vid t = 250. $V = 2.04 \cdot 10^3$ dvs en avsevärd förbättring mot minvarstyrning.

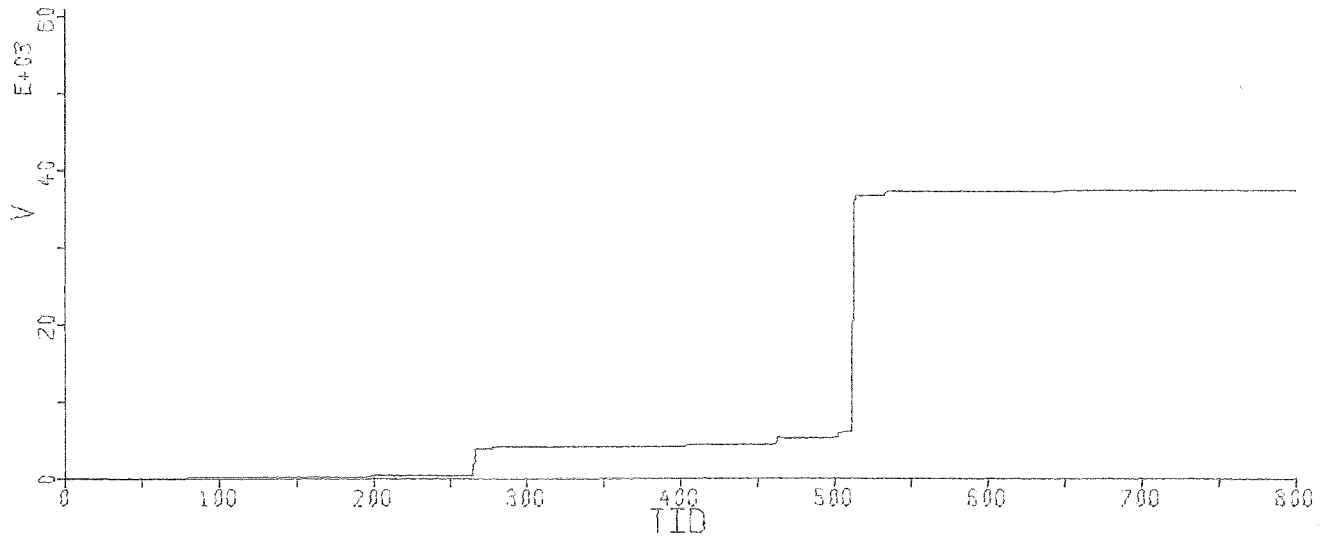
Minvar styrlag	$V = 37.6 \cdot 10^3$
Mod. minvar styrlag	$V = 2.04 \cdot 10^3$
	$V_0 = 1.27 \cdot 10^3$



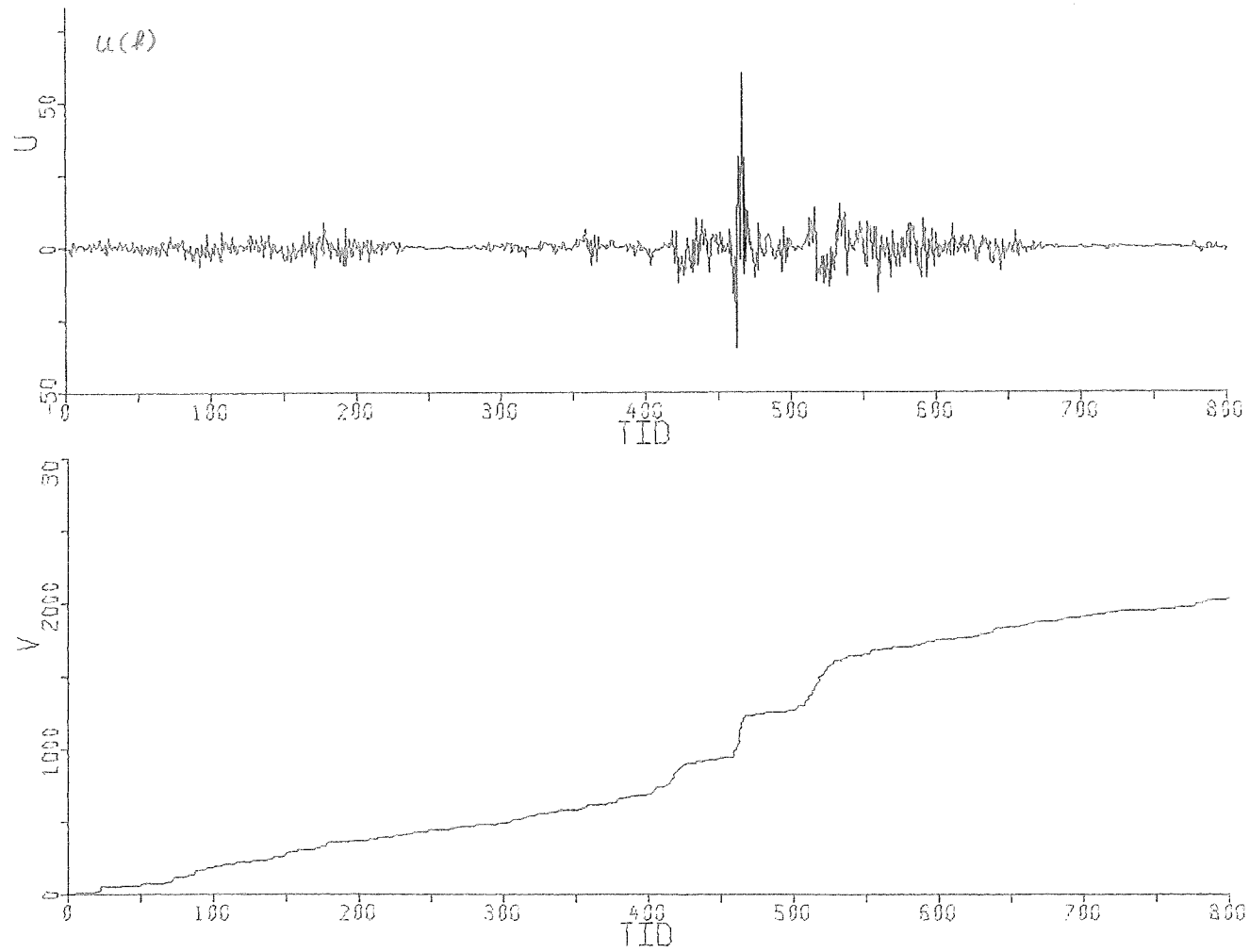
Exempel 3 c 3. Parametervariation.



Exempel 3 c 3. Parameteruppskattning $\hat{b}$ vid mod. minvar styrning.



Exempel 3 c 3. Förlustfunktion V vid minvarstyrning.



Exempel 3 c 3. Styrsignal u och förlustfunktion V vid mod. minvar styrning.

Exempel 3 d.

Vi vill undersöka hur långt vi överhuvudtaget kan komma genom att förbättra våra uppskattningar. Optimala förlustfunktionen V_0 erhålles ur $V_0 = \sum \lambda^2(1+a^2(t))$. För att uppnå detta värde måste både a och b vara fullständigt kända vid varje tidpunkt. Styrlagen får följande utseende:

$$u(t) = \frac{a(t+1)b(t)}{b(t+1)} u(t-1) - \frac{a(t+1)a(t)}{b(t+1)} y(t-1)$$

3 d 1.

visar en körning under dessa betingelser. Parametervariation som i 3 b 2.

Resultat:	Förlustfunktion	$V = 1.71 \cdot 10^3$
	Jämför	$V_0 = 1.70 \cdot 10^3$

I praktiken måste vi dock alltid uppskatta åtminstone a(t+1) och b(t+1). Både a(t+1) och a(t) uppskattas med $\hat{a}(t|t-1)$, och samma för b. Den bästa uppskattning vi kan få har variansen $P = R_1 = BM \cdot BM^T$.

För att undersöka förlustfunktionen i ett sådant fall ansätter vi konstlade uppskattningar enligt

$$\hat{a}(t|t-1) = a(t) + \sigma r_1(t)$$
$$\hat{b}(t|t-1) = b(t) + \sigma r_2(t)$$

där $\begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} = BM$, r_1 och r_2 oberoende $\in N(0,1)$.

Detta är den bästa uppskattning vi kan uppnå.

3 d 2

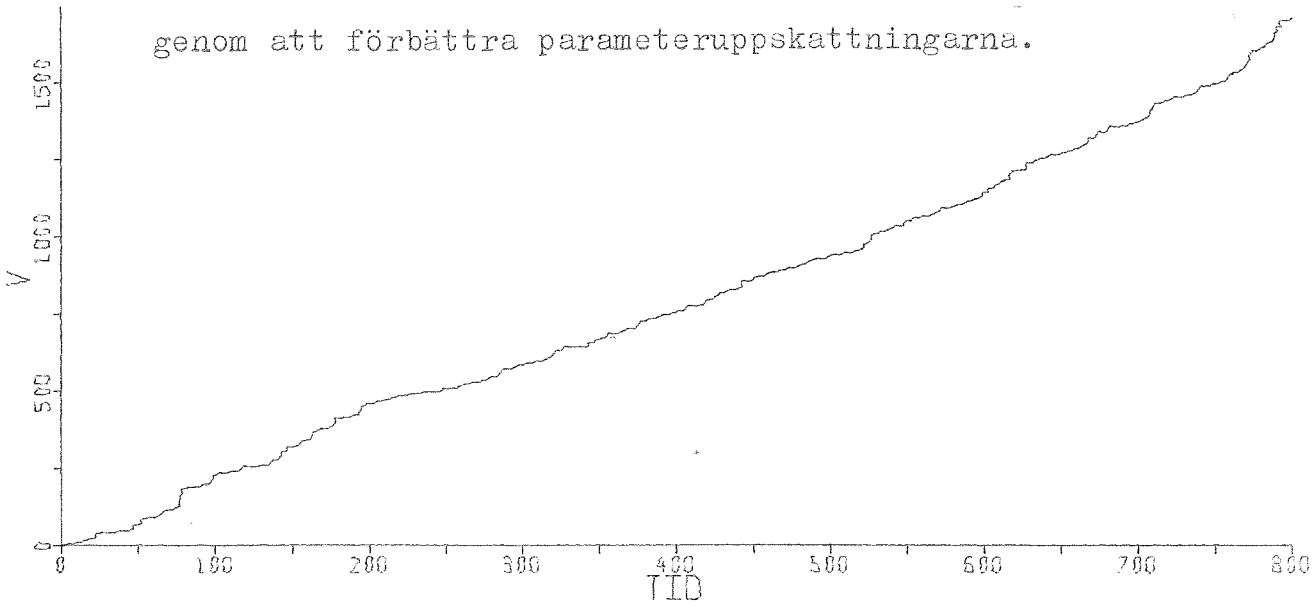
visar hur det mod. minvar återkopplade systemet med parameter variation enligt 3 b 2 fungerar med dessa så kallade uppskattningar.

I styrlag antar vi $BM = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}$, $P(t) = \begin{bmatrix} 0.025 & 0 \\ 0 & 0.025 \end{bmatrix}$, $FI=I$.

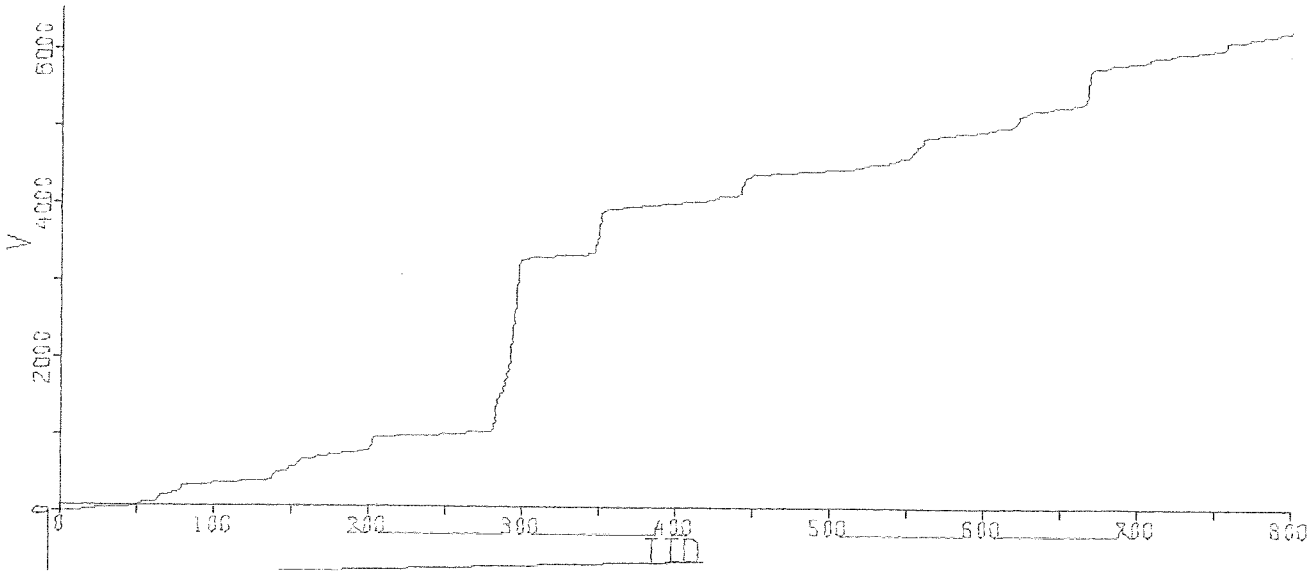
Resultat. Förlustfunktion $V = 6.23 \cdot 10^3$

Jämför med bästa resultat i 3 b 3 $V = 21.3 \cdot 10^3$

I praktiken kan vi alltså aldrig underskrida värdet $V = 6.23 \cdot 10^3$ genom att förbättra parameteruppskattningarna.



Exempel 3 d 1. Förlustfunktion V.



Exempel 3 d 2 . Förlustfunktion V.

Verklig och antagen parametervariation, data och begynnelsevärden vid simulering av exempel 3.

3 a 1.

Verklig p-variation:

$a(t+1) = a(t) + 0.0411\ v_1(t)$

$b(t+1) = b(t)$

$a(0) = -0.1 \qquad b = 1.$

Antagen p-variation:

$FI = I \qquad BM = \begin{bmatrix} 0.0411 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$P(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad a(0) = -0.1 \qquad b = 1.$

3 a 2.

Verklig p-variation:

$a(t) = -0.5 \sin(0.01571 \cdot t) - 0.7$

$b(t) = 0.5$

Antagen p-variation:

$FI = I \qquad BM = \begin{bmatrix} 0.015 & 0 \\ 0 & 0.015 \end{bmatrix}$

$P(0) = \begin{bmatrix} 1. & 0 \\ 0 & 1. \end{bmatrix} \qquad a(0) = -0.7 \qquad b(0) = 0.5$

3 b 1.

Verklig p-variation:

$a(t) = a'(t) - 1. \qquad a'(t+1) = 0.95\ a'(t) + 0.05\ v_1(t)$

$b(t+1) = 0.95\ b(t) + 0.05\ v_2(t)$

$a'(0) = 0.5 \qquad b(0) = 0.5$

Antagen p-variation:

$FI = \begin{bmatrix} 0.95 & 0 \\ 0 & 0.95 \end{bmatrix} \qquad BM = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}$

$P(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad a(0) = -0.5 \qquad b(0) = 0.5$

3 b 2.

Verklig p-v.

enligt 3 b 1 .

Antagen p-v.

FI = I i övrigt enligt 3 b 1 .

3 b 3.

Verklig p-v. enligt 3 b 1.

Antagen p-v.

försök 1 : FI = I $BM = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$

$P(0) = 0.1I \quad a(0) = -0.5 \quad b(0) = 0.5$

försök 2: enligt ovan men med

$BM = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$

3 c 1.

Verklig p-v.

$a(t) = a'(t) - 0.55 \qquad a'(t+1) = 0.95\, a'(t) + 0.05\, v_1(t)$

$b(t+1) = 0.95\, b(t) + 0.05\, v_2(t)$

$a'(0) = 0.5 \qquad b(0) = 0.5$

Antagen p-v.

FI = I Kalman : $BM = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}$

Styrlag : $BM = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}$

$P(0) = 0.1I \quad a(0) = -0.05 \qquad b(0) = 0.5$

3 c 2.

Verklig p-v. enligt 3 c 1 .

Antagen p-v. enligt 3 c 1,

men i styrlag: $BM = \begin{bmatrix} 0.10 & 0 \\ 0 & 0.10 \end{bmatrix}$

Vidare bildas styrsignal enligt

$u(t) = u(t) + \delta(-1)^t$

3 c 3.

Verklig p-v.

$a(t) = -0.25 \sin(0.01571\ t) - 0.75$

$$b(t) = \begin{cases} -0.00167 \cdot t + 0.5 & t \leq 400 \\ 0.00167(t-400) - 0.168 & t > 400 \end{cases}$$

Antagen p-v.

$FI = I$ $\qquad BM = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix}$

$P(0) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$

Exempel 4.

Såsom ett sista exempel skall vi något syssla med ett system där omgivningens störning orsakar färgat brus.

Vi skall studera ett system av följande typ:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) = K(t)(\beta_1 u(t-1) + \beta_2 u(t-2)) + \\ + \lambda(e(t) + c_1 e(t-1))$$

a_1, a_2, β_1, β_2 är konstanter medan $K(t)$ varierar slumpartat. Kalmanteorin och våra styrlagar är härledda under antagandet ofärgat brus. De kan dock oförändrade appliceras också på ovanstående system. Detta ger dock inget optimalt resultat, och vi bör med någon modifikation kunna förbättra det. Ett försök i den riktningen göres med antagandet, att vi har att göra med ett högre ordningens system än det verkliga, men att bruset är ofärgat.

Resultatet blir dock negativt i det att förlustfunktionen ej blir mindre. Detta kan förklaras med att då vi ökar systemets ordningstal, ökar antalet uppskattade parametrar och därmed det sammanlagda felet.

Utökning av ordningstalet.

Genom att dividera med C-polynomet kan vi skriva vårt system:

$$\frac{(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}{1 + c_1 z^{-1}} \cdot y(t) = \frac{(b_1 + b_2 z^{-1})}{1 + c_1 z^{-1}} \cdot u(t-1) + \lambda e(t)$$

Men $$\frac{1}{1+c_1 z^{-1}} = 1 - c_1 z^{-1} + c_1^2 z^{-2} - c_1^3 z^{-3} + \ldots$$

Om vi försummar c_1^3 och högre termer , skrives systemet:

$$y(t) + a_1'y(t-1) + a_2'y(t-2) + a_3'y(t-3) + a_4'y(t-4) =$$

$$= b_1'u(t-1) + b_2'u(t-2) + b_3'u(t-3) + b_4'u(t-4) + \lambda e(t)$$

där

$$a_1' = a_1 - c_1 \qquad b_1' = b_1$$
$$a_2' = a_2 - a_1c_1 + c_1^2 \qquad b_2' = b_2 - b_1c_1$$
$$a_3' = -a_2c_1 + a_1c_1^2 \qquad b_3' = -b_2c_1 + b_1c_1^2$$
$$a_4' = a_2c_1 \qquad b_4' = b_2c_1^2$$

Det ursprungliga systemet med färgat brus skall alltså motsvaras av ett fjärde ordningens system med ofärgat brus. Naturligtvis kan vi på motsvarande sätt ytterligare öka ordningstalet. Genom att på så sätt antaga ett högre ordningens system kan vi alltså direkt använda vår kalman-teori och våra härledda styrlagar. De nya parametrarnas begynnelse värden kan fås ur tabellen ovan. Därefter uppskattas de på vanligt sätt ur in och utsignal.

I vår modifierade minvar styrlag skall vi använda oss av den på sid. 12 - 18 härledda formeln. Detta betyder att vi antar att a-parametrarna är exakt kända, vilket inte spelar någon roll.

I försöken antar vi att vid tidpunkten t är $y(t-1)$, $y(t-2)$,... osv kända.

Vi har gjort två försök 4 a och 4 b , med två olika värden på c_1. I övrigt är försöken lika. Med antagandet att systemets ordningstal är två respektive fyra testar vi vår regulator över ett tidsintervall 0 - 300.

Verklig parametervariation:

$a_1 = -1.5 \qquad b_1 = K(t)$

$a_2 = 0.5 \qquad b_2 = 0.7\,K(t) \qquad ; \quad K(t) = 0.8 + 0.6\sin(0.04 \cdot t)$

4a: $c_1 = 0.3 \qquad \lambda = 1.$

4b: $c_1 = 0.5 \qquad \lambda = 1.$

Resultat:

4a.

Förlustfunktion V

	n = 2	n = 4
Minvar styrning	1561	1754
Mod. minvar styrning	1527	1697
	V_0 =	1270

4b.

Förlustfunktion V

	n = 2	n = 4
Minvar styrning	1967	2205
Mod. minvar styrning	1943	2138
	V_0 =	1500

Referenser.

Åström, K. J., "Stokastiska System" .

Kalman-uppskattning, särtryck.