

MATEMATISK MODELL FÖR
SJÖN TRUMMEN

STIG BROQVIST

RAPPORT RE-87, oktober 1970

M A T E M A T I S K M O D E L L F Ö R S J Ö N T R U M M E N

Examensarbete utfört vid Institutionen för Reglerteknik,

Lunds Tekniska Högskola

av Stig Broqvist

Ansvarig handledare: Karl Eklund

Lund, oktober 1970

ABSTRACT

The purpose with mathematical models in ecology is

- 1) to help to create better understanding of ecological systems behaviour
- 2) to make it possible to estimate more accurate the effects of human interferences in nature.

A simplified mathematical model for a lake has been developed. This model consists of a set of four ordinary differential equations with three input signals. Two of the differential equations are non-linear.

Simulations on an analogue computer have been made for some different parameter values. Model responses to sinusoidal inputs correspond to some principle features in field data. Maximum and minimum values approximately equal estimated real values.

This work has been done in cooperation with the institutions for limnology and for plant ecology, specially to get ecological facts and to get numeral values for the lake.

I N N E H Å L L S F Ö R T E C K N I N G

	Sid.
1. INLEDNING	1
Bakgrund	1
Syfte	2
Inledande kontakter	3
2. TRUMMEN-PROJEKTET	5
Historik	5
Restaurering	5
Forskning	6
3. BILDMODELLER	7
Allmän bakgrund	7
Bildmodell för en sjö	10
Energiflödesdiagram	12
Årstidsvariationer	12
Blockschema för den valda modellen, valda insignaler och tillståndsvariabler	13
4. MATEMATISK MODELL	15
Matematiska samband ur litteraturen	15
Gissad modell. Resonemang.	17
Värden på parametrar och dimensioner på insignaler och tillståndsvariabler	22
5. SIMULERING	28
Förenkling i modellen	28
x_1 -simulering	28
Fasporträtt	29
x_1 , x_2 och x_3 sammankopplade	32
6. SLUTSATSER	38
Svagheter i modellen	38
Alternativa modeller	39
Metodens användbarhet	41
Uppföljning	43
7. REFERENSER	44
APPENDIX:	
1. Kort introduktion till ekologi	
2. Kort introduktion till reglerteknik	
3. Dokumentation över analogmaskinkörningar	
4. Mätdata	

F I G U R E R	Sid.
Fig. 1. a) Fiskarnas födorelationer i Salbosjön	7
Fig. 1. b) Bildmodell för markekosystem	8
Fig. 1.c) Detaljerad modell	9
Fig. 2. Förenklad modell för en sjö	10
Fig. 3. Ganska detaljerad modell för en sjö	11
Fig. 4. Energiflödesdiagram	12
Fig. 5. Typiska årstidsvariationer	12
Fig. 6. Bildmodell för den valda modellen.	14
Fig. 7 Isolerad arts tillväxt.	15
Fig. 8. Beroende av omgivningsfaktorer.	17
Fig. 9. Temperaturberoende faktor.	18
Fig. 10. Fasporträtt, två olika fall.	31
Fig. 11. Årstidsvariationer av insignaler och tillstånds- variabler.	34
Fig. 12. x_1 och de termer som påverkar x_1	35
Fig. 13. x_2 och de termer som påverkar x_2	36
Fig. 14. x_3 och de termer som påverkar x_3	37
Fig. 15. Resultat av fotosyntesen som funktion av solljuset, två olika ansatser.	39
Fig. A 2: 1. Reglertekniskt blockschema	
Fig. A 3: 1. Kopplingsschema för analogmaskinkörning.	
Fig. A 4: 1. Mätdata, biomassa för producenter.	
Fig. A 4: 2. " bruttoproduktion.	
Fig. A 4: 3. a) Mätdata, destruenten i vatten	
Fig. A 4: 3. b) " destruenten i sediment	
Fig. A 4: 3. c) " destruenten totalt.	

1. I N L E D N I N G

BAKGRUND

Detta examensarbete har jag själv tagit initiativ till. Man frågar sig kanske varför jag kommit på just denna idé. Det mesta vid civilingenjörsutbildningen är alltför ensidigt tekniskt inriktat. Konsekvenserna för människor och samhälle måste beaktas. Särskilt miljöförstörelsedebatten har fått många att tänka längre än snävt tekniskt.

De som bestämmer över den nuvarande industriella utvecklingen, vissa tekniker, ekonomer, myndigheter, politiker och kapitalägare ger mycket låg prioritet åt naturens krav, när dessa vägs mot ekonomiska intressen. Troligen har de också mycket bristfälliga kunskaper om de biologiska lagarna. Biologer förefaller i allmänhet ha mycket begränsad vana med matematik och därpå grundat tekniskt symbolspråk, medan den teknologi, som nu dominerar samhällsutvecklingen, i hög grad använder sådant matematiskt språkbruk. En kombination av bristande kunskaper och starka (kortsiktiga) ekonomiska intressen är en del av orsakerna till att biologerna har så lite inflytande på den utveckling, som berör oss alla. Ett flertal vetenskapsmän med anknytning till biologi (t.ex. Georg Borgström i "Gränser för vår tillvaro") varnar för att den nuvarande utvecklingen med tilltagande miljöförstörelse och rovdrift på naturens tillgångar är oförenlig med naturens lagar och håller på att rycka undan grundvalarna för mänsklig existens. Om de biologiska sambanden kunde förklaras också i matematiska termer liksom teknik och ekonomi, så skulle det vara svårare för företrädare för tekniska och ekonomiska intressen att avfärda de biologiska argumenten lika lättvindigt som nu, och biologernas argument därigenom väga tyngre.

Sambandet mellan olika organismer och organismernas förhållande till sin omgivning styrs av ett sinnrikt system av lagar. Den vetenskap, som sysslar med detta, kallas ekologi. I naturen råder i allmänhet stabilitet. Visserligen sker stora förändringar, speciellt de årliga variationerna, men dessa följer en lagbunden ordning. När störningar inträffar, finns det en lång rad mekanismer, som strävar efter att återställa jämvikten. Man kan därför betrakta naturen som ett stort reglertekniskt system med ett sinnrikt system av återkopplingar.

Då detta examensarbete har framkommit i samarbete mellan olika institutioner och då resultatet har intresse för både biologer och tekniker i samarbete - för all del även för andra intresserade - , kan en del begrepp och fakta vara okända för olika kategorier. Några huvuddrag i ekologi och i reglerteknik återfinns därför i appendix nr 1 resp. 2.

SYFTET

Syftet med detta examensarbete och med matematiska modeller för ekologiska samband kan delas upp på olika delsyften som naturligtvis hänger samman.

Examensarbetets syfte är

- I. dels att vara ett bidrag till forskningen på matematiska modeller för ekologiska system, speciellt vattensystem,
- II. dels att stimulera och underlätta för fler teknologer att göra examensarbete i detta ämnesområde (se vidare kapitel 6 "Slutsatser", avsnittet "Uppföljning").

Vad är syftet med matematiska modeller i allmänhet? - De kan ge ökad förståelse för hur det verkliga systemet fungerar. Visserligen måste man ha en hel del förståelse för att överhuvudtaget kunna sätta upp en matematisk modell för ett verkligt system, men genom analys av denna modell - undersökning av t.ex. stabilitet för olika lösningar, förmåga att eliminera störningar och känslighet för parametervariationer - tillsammans med kunskaperna om det verkliga systemet kan förståelsen för hur systemet fungerar öka. Därefter kan syntes göras, dvs. man vill beräkna insignaler sådana att man kan få systemet att bära sig åt på önskvärt sätt.

Om man tillämpar detta på ekologi kommer man fram till följande syfte med matematiska modeller för ekologiska system:

- 1) hjälpa till att skapa bättre förståelse för hur ekologiska system fungerar.

En del ekologer sysslar med systemanalys och tycker att det matematiska tänkandet och diskussioner med t.ex. reglertekniker kan ge dem nya synpunkter som för deras ekologiska systemarbete framåt. Systemanalys - särskilt matematiska modeller - i ekologi bidrar till att biologer lättare kan fastställa vilka saker som är viktigast att mäta

för att beskriva huvuddragen i systemet. Om man får fram matematiska modeller, som stämmer mycket bra med verkligheten, kan man förutsäga vad som kommer att hända om ett visst ingrepp i naturen göres. Biologer har visserligen en hel del erfarenhet, så att de med stor sannolikhet kan förutsäga vad som händer. Eftersom det är en så stor mängd faktorer som påverkar varandra, är dylika förutsägelser utom i vissa enkla fall (t.ex. övergödsling av sjöar) endast kvalificerade gissningar. Att man får fram så bra matematiska modeller att man kan förutsäga skeenden bättre än biologer är nog inte sannolikt. Det är bra om man kan komma fram till samma resultat som biologerna. Vid överensstämmelse kan resultaten från biologer och matematiker stärka andra. Därmed har jag kommit till det andra syftet med matematiska modeller för ekologiska system:

- 2) göra biologernas argument starkare, när de hävdar balansen i naturen mot industriella och andra intressen, som orsakar miljöförstöring.

Ovanstående gäller syftet med matematiska modeller i ekologi på kortare sikt. På längre sikt borde det vara möjligt att förutsäga konsekvenserna på längre och kortare sikt av olika ingrepp i naturen mycket bättre. Det borde också vara möjligt att klara syntesproblemet dvs.

- 3) hjälpa till att planera lämpliga ingrepp för att restaurera förstörd natur.

INLEDANDE KONTAKTER

När jag började fundera på detta visste jag inget om matematiska ekvationer för ekologiska samband. Jag måste därför ha kontakt med biologer, som visste något om det. Det är också nödvändigt att arbetet sker i samarbete med biologer, så den matematiska modellen och dess resultat håller sig till vad som är biologiskt rimligt.

En första impuls fick jag under en av TLTH (Teknologsammanslutningen vid Lunds Tekniska Högskola) anordnad miljövardskurs våren 1969, där Nils Malmer, ekologisk botanik, talade om "Ekologiska utgångspunkter för miljö- och naturvård" (se kompendium "7 Föredrag om Miljövard" utgivet av TLTH) och ritade upp bildmodeller över ekologiska samband. Dessa modeller fick mig att tänka på ekologi i reglertekniska termer.

Ett tag inbillade jag mig att det för ekologiska samband finns allmänt vedertagna differentialekvationer, som svarar mot själva mekanismen i fenomenen på liknande sätt som inom fysiken, och att jag endast behövde tillämpa reglerteknisk formalism på detta, vilket underlättar behandlingen av ett system av differentialekvationer. Det visade sig emellertid inte alls stämna. Det var mycket mer ogjort på detta område än jag trott.

För att sätta mig mer in i ekologi och få uppslag till matematiska samband läste jag bl.a. den statliga miljövärdsutredningen "SOU 1967: 43 Miljövärdsforskning I" på hösten 1969. I december kontaktade jag personer på olika institutioner. Jag fick låna litteratur av Folke Andersson, ekologisk botanik, Ulf Lettevall, limnologi, och Staffan Ulfstrand, zoologi. Jag har fortsatt kontakterna främst med de två förstnämnda.

I en bok jag lånade av Ulf Lettevall fanns några matematiska samband (se kapitel 4 "Matematisk modell"). Sedan jag studerat dessa kände jag mig mogen att lägga fram ett förslag till examensarbete för Karl Eklund, reglerteknik. Efter ett sammanträffande 4/2-70 mellan Folke Andersson, ekologisk botanik, Ulf Lettevall och Willy Ripl, limnologi, Karl Eklund, reglerteknik, och jag kunde examensarbetet starta.

Som ett klart avgränsat ekologiskt system valdes en sjö och för att ha tillgång till mätdata valdes sjön Trummen (se kapitel 2 "Trummenprojektet"). Därigenom kom jag främst att samarbeta med limnologerna.

2. TRUMMEN - PROJEKTET

Ett samarbetsprojekt mellan en rad institutioner och andra pågår för att restaurera den starkt förorenade sjön Trummen, som ligger i närheten av Växjö. I projektet ingår omfattande forskningsarbete. Först skall jag dock kort beröra sjöns historik.

HISTORIK

Under 1800-talet gjordes vissa utdikningar, så sjön Trummens vattennivå sänktes. Ännu under 1800-talets sista decennium torde sjön ha haft en god vattenkvalitet. Vid sekelskiftet började avloppsvatten släppas ut i sjön från bl.a. köksavdelningen vid ett sjukhus, en tvättstuga och ett bränneri. Siktdjupet i sjön minskade och igenväxningen tilltog.

Om man jämför fotografier från 1920-talet och från 1969 av sjön, slås man genast av den avsevärda skillnaden. Med början 1936 installerades vattenklosetter och behandlingsverk med slamavskiljning och biologisk bädd. Genom de tre mycket stränga vintrarna 1940-42 och genom tillkomsten av Växjö linberedningsverk 1943 förvärrades situationen på ett radikalt sätt. De omfattande avloppsutsläppen upphörde i stort sett från 1959. Sjöns tillstånd efter denna 20-åriga period av omfattande utsläpp har dock inte förbättrats.

(Uppgifterna är hämtade ur Ulf Lettevall: "Den kulturpåverkade sjön Trummen, Historik och utvecklingstendenser" ur Meddelanden från Forskningsgruppen för Sjörestaurering vid Lunds Universitet nr 24 okt. 1969.)

RESTAURERING

Man vill återställa den starkt förorenade och igenvuxna sjön Trummen till en mera ren och näringsfattig sjö. Motiven är främst att man vill undersöka möjligheterna att restaurera sjöar - om metoden som man tror blir framgångsrik, vill man naturligtvis att den skall användas på många sjöar - och man valde just Trummen dels för att den är starkt förorenad, dels för att Växjö stad är mycket intresserad av att återställa sjön med tanke på stadens utbyggnadsplaner.

Restaureringsingreppen består främst i att pumpa bort sediment och att ta bort makrofyttvegetation (vass och andra stora växter). Dessutom skall man tillföra rent, näringsfattigt vatten och eventuellt höja vattenståndet; genomföra smärre ändringar i den strandnära botten-topografin för att försvåra utveckling av vassbildande makrofyttvegetation samt eventuellt utnyttja de bortpumpade sedimenten som jordförbättringsmedel. Restaureringsingreppen sker under tiden 1970-71.

FORSKNING

I projektet ingår omfattande undersökningar. De är uppdelade på förundersökningen (1.3.68 - 31.3.70), huvudundersökningen (1.4.70 - 31.3.73) och efterundersökningen (1.4.73 - 31.3.80) (tiderna ungefärliga). Den treåriga huvudundersökningen gäller de omedelbara verkningarna av restaureringsingreppet och utföres med ett stort antal provtagningar per år. Den sjuåriga efterundersökningen gäller långtidsverkan och utföres med en eller ett par provtagningar per år.

Alla de olika undersökningsskedena omfattar bl.a. fysikaliska och kemiska vattenundersökningar, undersökningar av plankton, makrofyttvegetation, fiskbestånd, sediment, förekomst och omsättning av gifter såsom klorerade kolväten och kvicksilver, mikrobiologiska undersökningar samt undersökning av möjligheten att utnyttja sedimenten som jordförbättringsmedel.

Forskningen utföres i huvudsak av forskare från limnologiska, zoologiska, växtekologiska, mikrobiologiska och kvartärgeologiska institutionerna vid Lunds Universitet.

(Uppgifterna är hämtade ur stencilen "Trummen-projektet - en kort presentation".)

3. BILDMODELLER

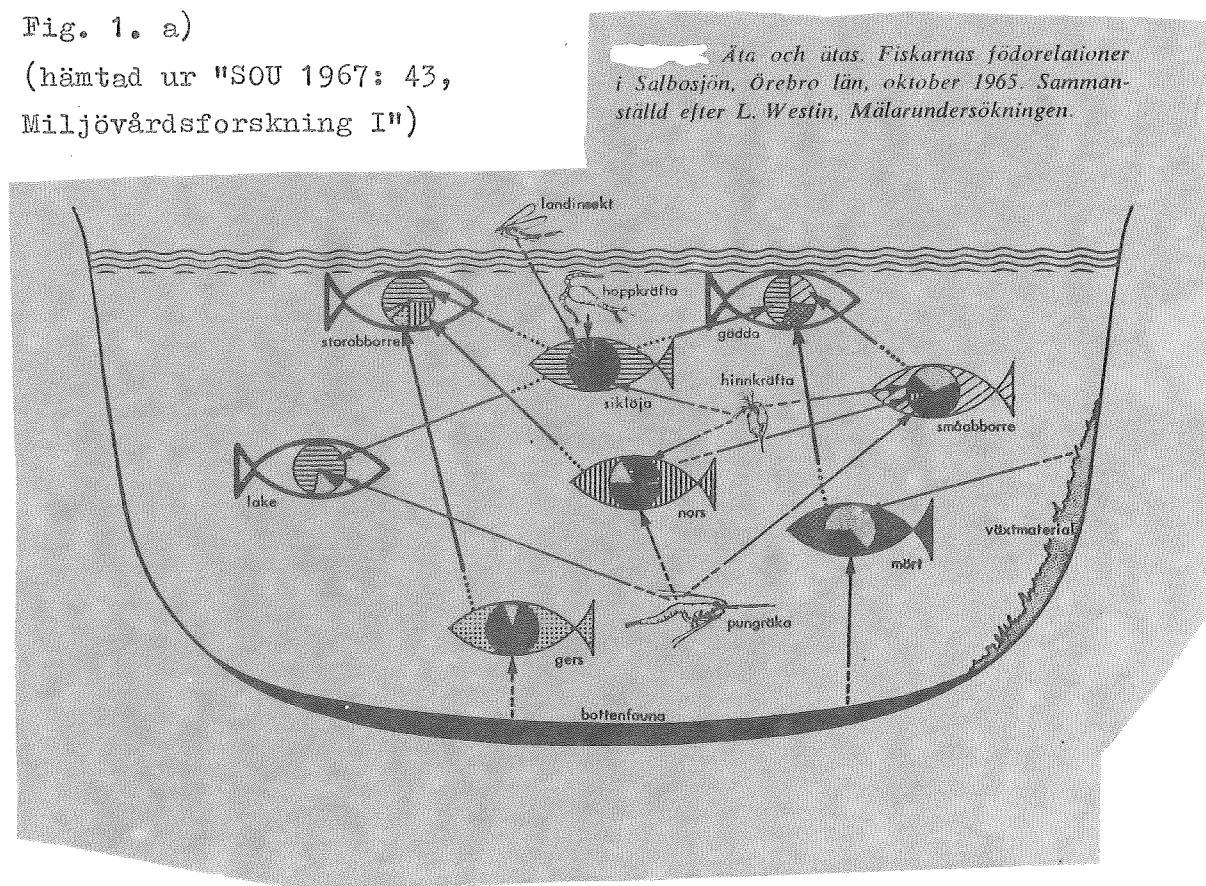
ALLMÄN BAKGRUND

Många biologer studerar mest släktskap mellan olika arter eller olika isolerade detaljer. Ekologer däremot studerar hur de olika delarna samverkar i ett ekosystem och studera de olika detaljernas funktion i denna helhet. Man måste analysera systemet och dess funktion. För att kunna överblicka detta komplicerade nät av samband sätter man upp bildmodeller med "burkar" för t.ex. producenter, konsumenter, destruenter, vatten i en sjö, grundvatten om det gäller marksystem, atmosfären, sediment resp. humus. Man kan också göra uppdelning t.ex. i rot och blad, i olika arter, på olika vattendjup i en sjö. Mellan "burkarna" brukar sedan streck med pilar ritas för olika processer. (Ibland sättes t.ex. olika slags trianglar på strecken för att markera de olika slags processerna.) Några typiska bildmodeller visas i fig. 1.

I reglerteknik brukar "burkarna" i stället beteckna processer, medan tillstånden markeras på strecken.

Fig. 1. a)

(hämtad ur "SOU 1967: 43,
Miljövårdsforskning I")



Med stöd av bildmodeller kan ekologer resonera sig fram till konsekvenserna av olika ingrepp, som åstadkommes av människor, eller konsekvenserna av naturliga förändringar. När ekologer sysslar med systemanalys är det huvudsakligen bildmodeller de använder. På senare år har man också i samarbete med matematiker o.dyl. satt upp matematiska modeller och i flera fall även simulerat dessa (studerat lösningar till den matematiska modellen med hjälp av analogmaskin eller datamaskin). Innan man kan sätta upp en matematisk modell måste man ha en bildmodell för att överblicka problemet.

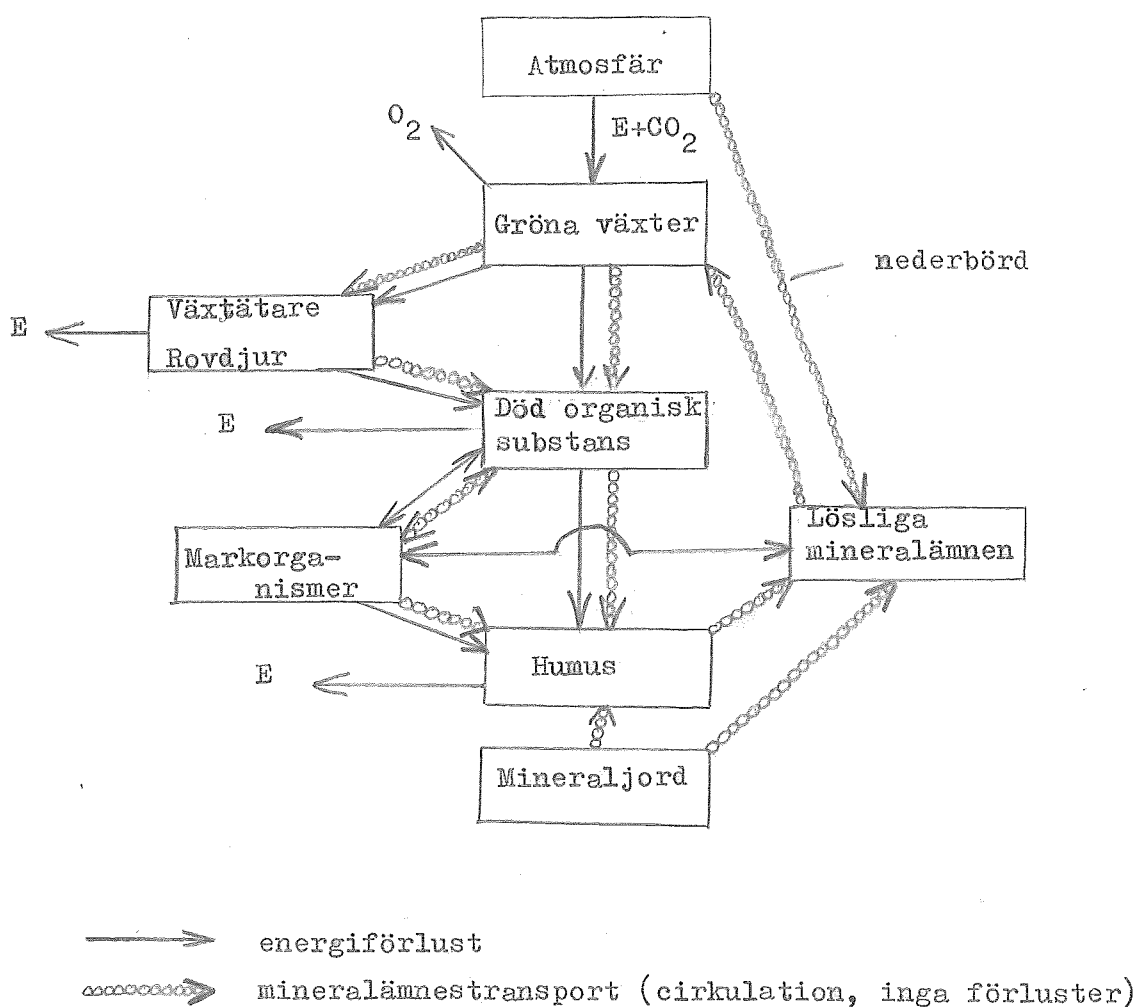
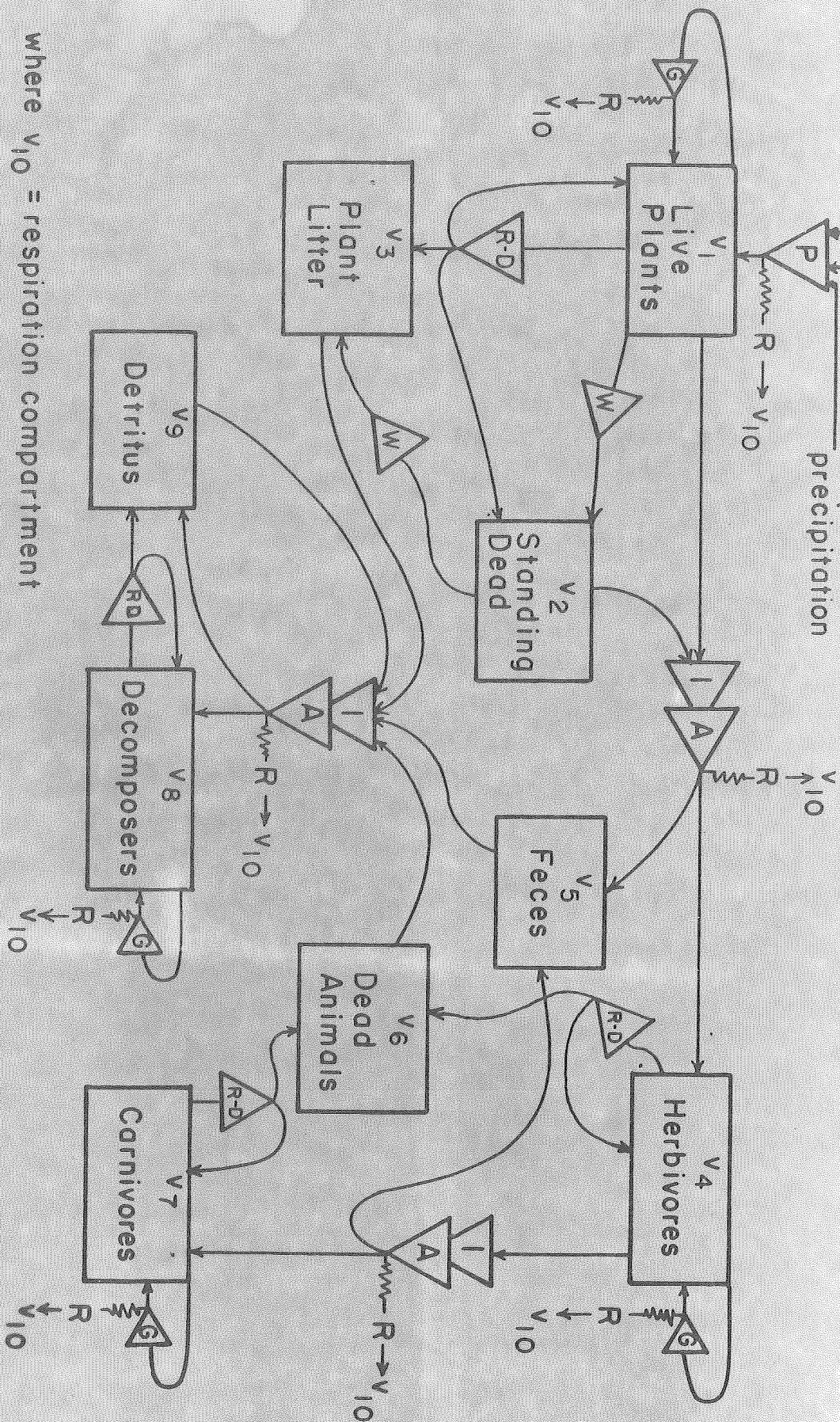


Fig. 1.b) Bildmodell för markekosystem. Hämtad ur anteckningar från föredrag av Nils Malmer om "Ekologiska utgångspunkter för miljö och naturvård".

COMPARTMENT MODEL

Solar Energy

Input temperature precipitation



where v_{10} = respiration compartment

P = photosynthesis
 G = growth
 R-D = reproduction - death
 I = ingestion
 A = assimilation
 W = weathering

Fig. 1. c) (hämtad ur George M. Van Dyne: "Grasslands Management, Research, and Training Viewed in Systems Context")

BILDMODELL FÖR EN SJÖ

Huvuddragen i en sjö kan beskrivas med bildmodellen i fig. 2. Från vänster kommer oorganiska ämnen in, byggs upp till komplicerade organiska ämnen med hjälp av solenergi, bryts ner igen till enkla, oorganiska ämnen av destruenters och genom andning.

En mer detaljerad modell återfinns i fig. 3. Ytterligare uppdelning skulle kunna göras på t.ex. olika arter av alger, av fiskar, på flera olika djup osv. Återkopplingar av olika slag kan också förekomma på fler ställen än som markerats i figuren.

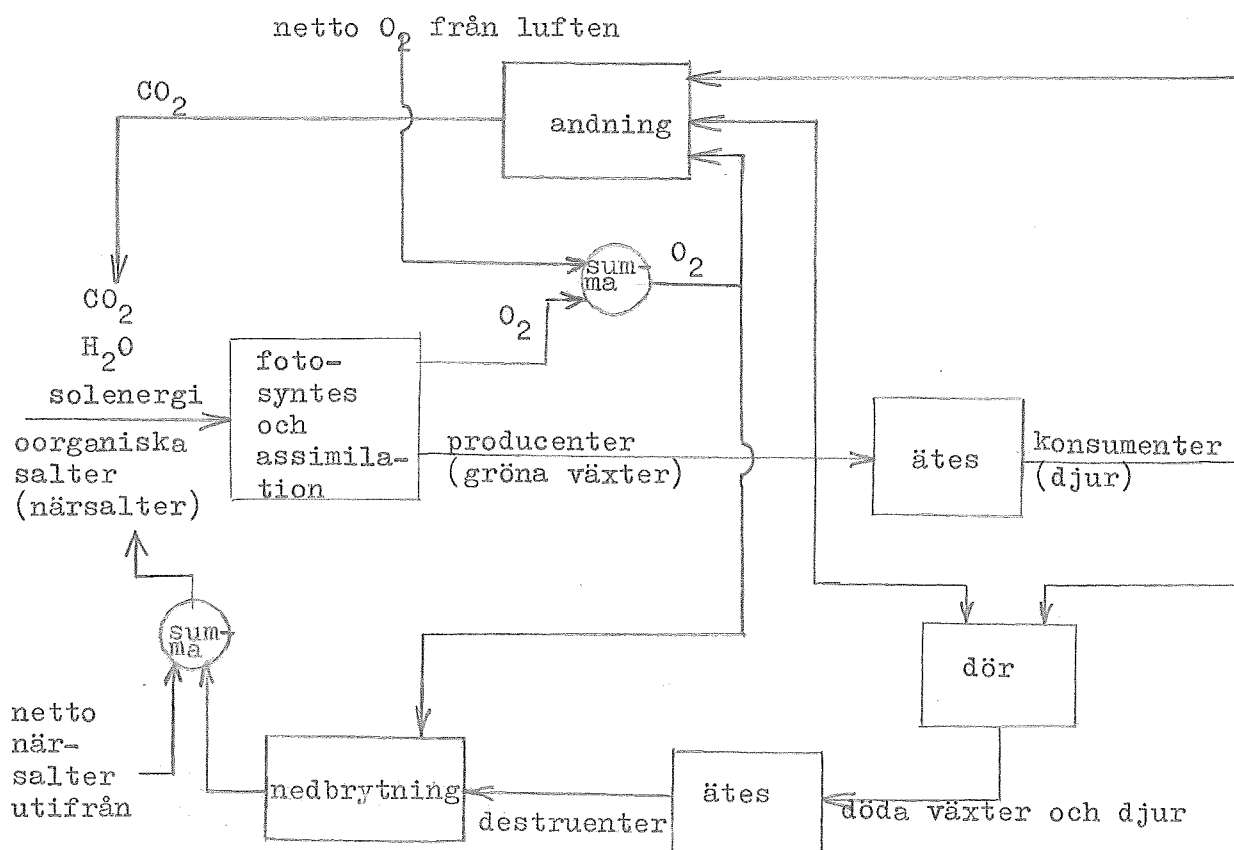


Fig. 2. Förenklad modell för en sjö

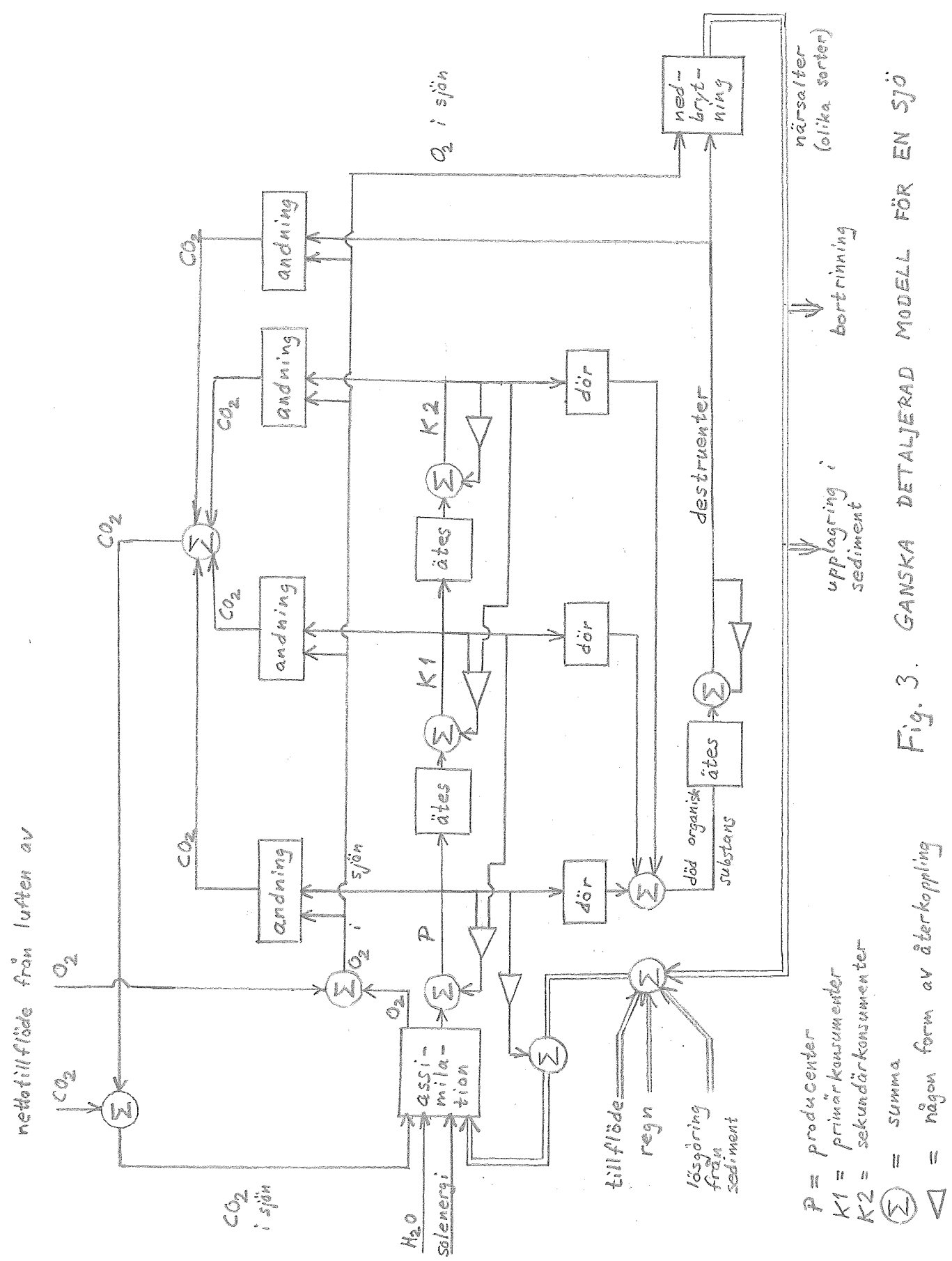


Fig. 3. GANSKA DETALJERAD MODELL FÖR EN SJÖ

ENERGIFLÖDES DIAGRAM

Man betraktar ofta energiflödet i ett ekosystem, se fig. 4. Energi går ju inte i kretslopp som materiella ämnen, men är nödvändig för att hålla det materiella kretsloppet igång. I ett typiskt energiflödesdiagram, fig. 4, finner man att djuren tar en mycket mindre del av totalt inkommande energi än växterna.

ÅRSTIDS VARIATIONER

Typiska årstidsvariationer i en amerikansk sjö visas i fig. 5. De små fluktuationerna under sommaren beror troligen på att flera olika arter har toppar vid olika tider

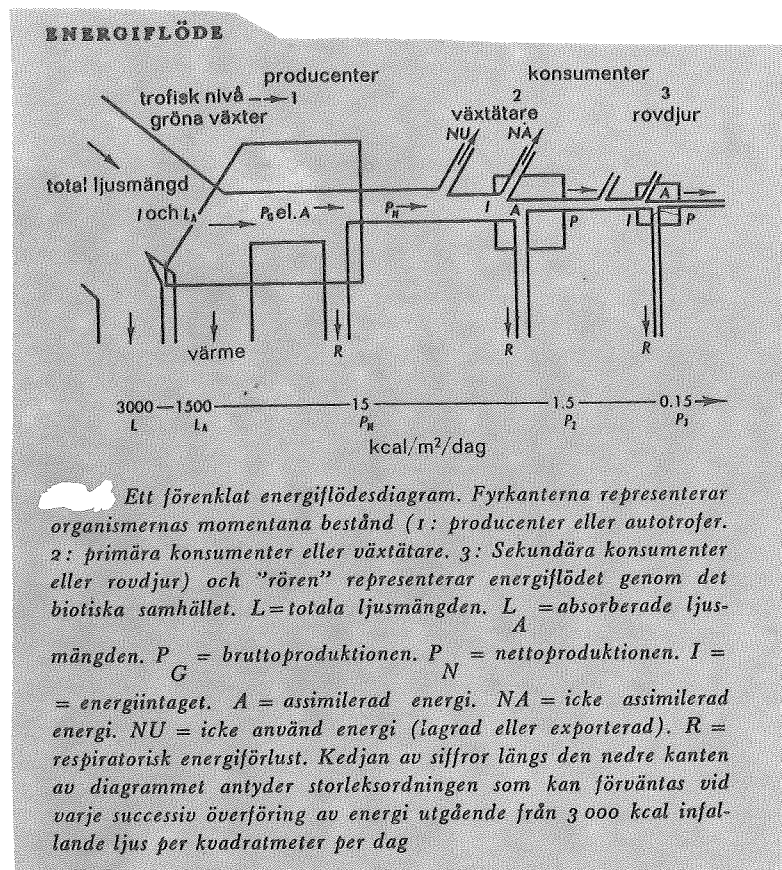


Fig. 4.

(hämtad ur Eugene P. Odum: "Samspelet i naturen")

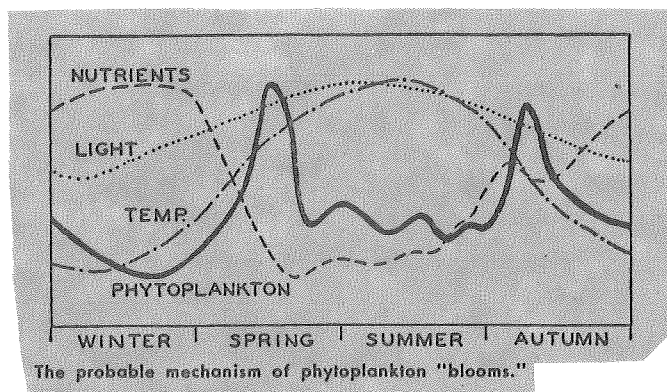


Fig. 5. Årstidsvariationer. (nutrients = närsalter)
(hämtad ur Eugene P. Odum: "Fundamentals of Ecology")

BLOCKSHEMA FÖR DEN VALDA MODELLEN, VALDA INSNALER OCH TILLSTÄNDS-
VARIABLER

Med tanke på att djuren i allmänhet tar så liten del av inkommande energi och att de speciellt i Trummen spelade mycket liten roll enligt Ulf Lettevall bortsågs från konsumenterna (djuren) i denna modell. (I år, 1970, har Trummen dock uppfört sig annorlunda; det är bl.a. gott om djur, men det visste man inte förrän efter det att denna modell satts upp.)

I allmänhet är inte koldioxid begränsande för produktionen. Därför bortsågs även från andningen. Syrehalten skulle kunna vara av stor betydelse för nedbrytningen i Trummen, men i det första försöket bortsåg jag ändå från den och erhöll en bildmodell enligt fig. 6.

Vissa ändringshastigheter är beroende av vissa omgivningsfaktorer t.ex. temperatur, salthalt, syrehalt, pH-värde, strömförhållanden, giftutsläpp. Jag valde att endast beakta temperaturen som omgivningsfaktor.

Som insignaler valdes:

- u_1 = temperaturen i vattnet
- u_2 = absorberad solenergi per tidsenhet
- u_3 = nettoinflöde av närsalter utifrån per tidsenhet

Som tillståndsvariabler valdes:

- x_1 = vikten gröna växter (producenter)
- x_2 = vikten döda växten
- x_3 = vikten destruerter (bakterier o.dyl.)
- x_4 = vikten närsalter, närmare bestämt fosfor

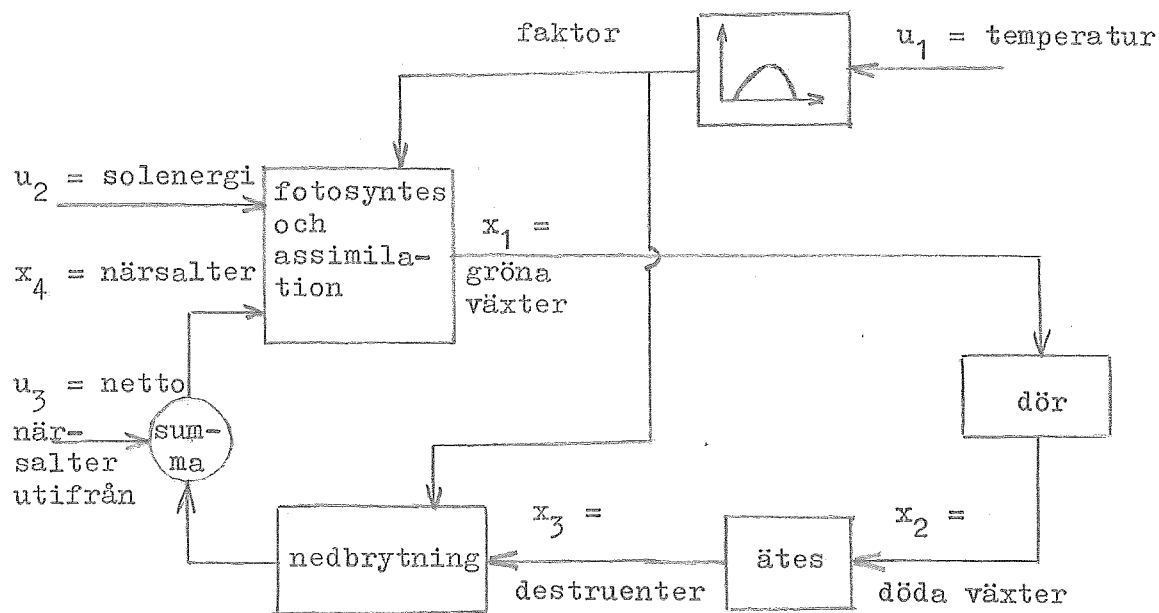


Fig. 6. Bildmodell för den valda matematiska modellen.

4. M A T E M A T I S K M O D E L L

Jag skall här redogöra för några ekvationer och andra samband ur litteraturen och hur de använts för att sätta upp modellen. Senare har jag funnit andra ansatser till matematiska samband och andra fakta som kunde bidra till en korrigerigering av modellen. Mer därom finns i avsnitten "Svagheter i modellen" och "Alternativa modeller" i kapitel 6 "Slutsatser".

MATEMATISKA SAMBAND UR LITTERATUREN

I Eugene P. Odum: "Fundamentals of Ecology" fanns följande:

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N \quad (4.1)$$

där

N = antalet av en viss art

r = födelsehastighet minus dödshastighet

Ökningen per tidsenhet av antalet är lika med en konstant gånger antalet. Denna ekvation för "befolkningsexplosion" måste dock modifieras. Om man lämnade en art isolerad med god (men begränsad) tillgång på näring, fann man att antalet inte växte över ett visst värde. Tillväxten var först låg, sedan allt större för att slutligen avta och upphöra. Antalet följde i ett fall en kurva enligt fig. 7. Kurvan kan beskrivas av differentialekvationen:

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N - \frac{r}{K} \cdot N^2 \quad (4.2)$$

där

K är en konstant som anger maximivärdet på N .

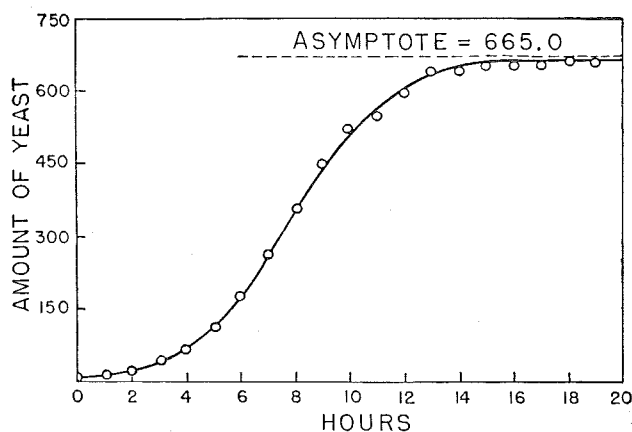


Fig. 7. Isolerad arts tillväxt. (hämtad ur Eugene P. Odum: "Fundamentals of Ecology")

Differentialekvationen (4.2) löses av funktionssambandet:

$$N(t) = \frac{\frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{K}} \cdot e^{r(t-t_0)}}{1 + \frac{\frac{N_0}{K} \cdot e^{r(t-t_0)}}{K \left(1 - \frac{N_0}{K}\right)}} = \frac{a \cdot e^{r(t-t_0)}}{1 + \frac{a}{K} \cdot e^{r(t-t_0)}} \quad (4.3)$$

där

$N_0 = N(t_0)$ dvs. antalet vid tidpunkten t_0 dvs. begynnelsevärdet

a är konstant

Antagandet att parametrarna r och K är konstanta är dock inte sant för alla tillfällen utan beror förutom av arten också av omgivningsfaktorer. Är det t.ex. lagom temperatur förökar arten sig snabbare, och r är större än om det är mycket kallt eller mycket varmt. Är det för lite av något spårämne är tillväxten mycket låg och är det för mycket kan det få giftverkan och också hämma tillväxten. Är det god tillgång på näring kan $K =$ det maximala antalet bli större än om tillgången är mycket knapp.

Påverkan från andra arter är oftast inte försumbar. Därför utvidgade Odum ekvation (4.2.) till:

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N - \frac{r}{K} \cdot N^2 \pm C \cdot N_2 \cdot N \quad (4.4)$$

där

N_2 är antalet av en annan art som inverkar positivt eller negativt på N

C är en konstant som betecknar styrkan av denna inverkan

Motsvarande ekvationer skulle kunna ställas upp för N_2 . I samma bok (som ovanstående ekvationer är hämtade ur) fanns en lista över olika kombinationer av beroendeförhållanden. Man skulle kunna ta med flera olika sådana kopplade termer för att beskriva beroendet till flera olika arter. Ett nät av beroendeförhållanden kan ställas upp (se fig.1) Beroendet av omgivningsfaktorer kan visas med kurvor (fig. 8), hur någon parameter antar maximum för något visst optimalt värde på omgiv-

ningsfaktorn. En del arter tål en stor variation, medan andra endast tål små förändringar. T.ex. tål lax och andra s.k. ädelfiskar endast en liten ändring av syrehalten, medan mört och andra s.k. ogräsfiskar tål mycket större förändringar. (Sänkt, ej ökad, syrehalt är det enda aktuella vid ökade utsläpp.) Det optimala värdet kan vara olika för olika arter.

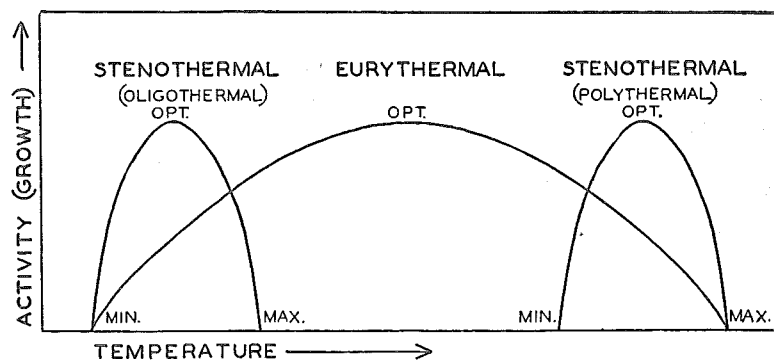


Fig. 8. Beroende av omgivningsfaktorer.

(hämtad ur Eugene P. Odum: "Fundamentals of Ecology")

GISSAD MODELL. RESONEMANG

Differentialekvationen (4.4) gäller visserligen främst djur, men antages gälla växter också. N byts således ut mot x_1 = mängden gröna växter (= producenter).

Parameterarna r och K antages vara beroende av omgivningsfaktorer - endast temperaturen beaktas - på samma sätt, dvs. så att parametrarna är lika med en viss konstant r_0 resp. K_0 multiplicerad med samma temperaturberoende faktor. Kurvorna i fig. 8 ser ut ungefär som parablar. Antag därför att de kan approximeras med parablar. En faktor som har maximum lika med 1 (ett) för optimal temperatur T_m och som avtar som en parabel till 0 (noll) för temperaturerna

$$u_1 = \frac{T_m \pm \Delta T/2}{T_m}$$

avbildas i fig. 9. Faktorn kan naturligtvis inte vara mindre än 0.

Den kan därför skrivas:

$$\max \left\{ 0 ; \left[1 - \frac{(u_1 - T_m)^2}{(\Delta T/2)^2} \right] \right\} \quad (4.5)$$

Om r och K beror på samma sätt av denna faktor kan faktorn (4.5) förkortas bort i uttrycket r/K som blir det konstanta r_0/K_0

Alla gröna växter antages kunna approximeras som en art. Inverkan från andra, termer av typen $\pm C \cdot N_2 \cdot N$ blir då en negativ term från växtätande djur. Eftersom djuren försummas enligt ovan (sid. 13) försummas även denna term.

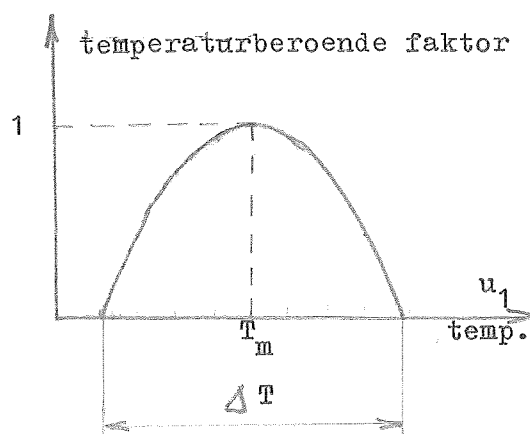
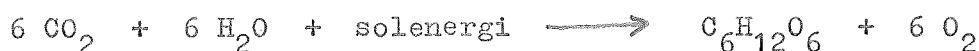


Fig. 9

För rovdjur kommer bytesdjur in som en dylik positiv beroendeterm. På samma sätt antar jag att "födan" för växterna inverkar med en $+ C \cdot N_2 \cdot N$ term. (Man kunde ha försökt med andra ansatser se avsnitt "Alternativa modeller" i kapitel 6 "Slutsatser", men detta föreföll naturligtast, när jag inte sett dessa alternativ.) Det som utgör "födan" N_2 för växterna måste vara slutprodukten av assimilationen. (Assimilation innebär de processer som av oorganiska ämnen och solenergi bildar organiska ämnen, som är lika de ämnen växterna är uppbyggda av.) I assimilationen ingår fotosyntesen, där de oorganiska ämnena koldioxid och vatten tillsammans med solenergi övergår till enkla organiska ämnen (enkla sockerarter). Förenklad summaformel:



Samtidigt bildas syre, som används för växternas och djurens andning, som är samma process som fotosyntesen men i omvänd riktning (till vänster i reaktionsformeln ovan). Av dessa enkla organiska ämnen tillsammans med oorganiska salter av olika slag bygger växterna successivt upp alltmer komplicerade organiska ämnen, huvudsakligen kolhydrater (stärkelse, socker och cellulosa), fetter och äggviteämnen men också (i små mängder) t.ex. vitaminer.

I vissa kemiska reaktioner (dock inte alla) är det så att de mängder av de ingående ingredienserna som utnyttjas står i ett visst förhållande till varandra. Om det blir överskott av en ingrediens kan det

inte utnyttjas, utan mängden av slutprodukten bestäms av den ingrediens, som det är minst av i den av den kemiska reaktionen givna proportionen.

Ersätt således N_2 med

$$N_0 \cdot \min \left(\frac{u_2}{L_0}; \frac{x_4}{S_0} \right) \quad (4.6)$$

där

N_0 , L_0 och S_0 är konstanter som uttrycker de givna proportionerna. u_2 och x_4 är (enl. sid. 13) solenergi resp. närsalter. Egentligen skulle också vatten och koldioxid tagits med i det uttryck som minimeras, men vatten kan ju inte vara begränsande i en sjö och koldioxiden är det i allmänhet inte heller (utom i undantagsfall). Egentligen skulle x_4 delas upp på olika närsalter, men vi valde att endast betrakta det som oftast är begränsande, nämligen fosfor. (jfr fosfatens betydelse vid debatt om tvättmedel och toaletttutsläpp.) Ibland kan i stället kvävesalter vara den begränsande faktorn för produktionen men det bortser vi från nu.

Sammanfattningsvis blir differentialekvationen för x_1 (= gröna växter)

$$\frac{dx_1}{dt} = r_0 \cdot \max \left\{ 0; \left[1 - \frac{(u_1 - T_m)^2}{(\Delta T/2)^2} \right] \right\} \cdot x_1 - \frac{r_0}{K_0} \cdot x_1^2 + C_0 \cdot x_1 \cdot N_0 \cdot \min \left(\frac{u_2}{L_0}; \frac{x_4}{S_0} \right) \quad (4.7)$$

Differentialekvationen för x_2 (= döda växter)

Bildandet av döda växter kan approximeras på olika sätt. Om man antar att växterna har en viss medellivslängd och att alla växter dör efter den tiden får man:

$$x_2(t) = x_1(t - t_d) \quad (4.8)$$

där

t_d = medellivslängden

Detta är nog en alltför stor förenkling. En något bättre approximation kunde vara att i stället för $x_2(t)$ sätta ökningen av $x_2(t)$ per tidsenhet, derivatan:

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = d \cdot x_1(t-t_d) \quad (4.9)$$

där

d = en konstant (dödlighetsprocent)

Möjligen kunde konstanten d antagas vara beroende av omgivningen så att den är lägst vid optimal temperatur och ökar för avvikelser, men det bortsåg vi från, eftersom levande varelser kan uthärda svåra förhållanden ganska länge, medan de inte förmår föröka sig vid dessa ogynnsamma förhållanden.

Eftersom en tidsfördröjning alltid ligger i en integration i sig själv, slopades den speciella tidsfördröjningen t_d , ty en del växter kan dö mycket snart efter "födelsen". Med tidsfördröjningen ovan (t_d) skulle ingen dö förrän efter tiden t_d .

Dessutom måste man ta med att de döda växterna ätes upp av destruent-ter. Antag att varje destruent äter en viss procent av sin egen vikt per tidsenhet. Då erhålles:

$$\frac{dx_2}{dt} = d \cdot x_1 - C_2 \cdot x_3 \quad (4.10)$$

där

d och C_2 är konstanter

Att denna ekvation är lineär och inte har samma struktur som differentialekvationen för x_1 (4.7) beror på att det inte som där är fråga om något levande utan en annan mekanism än tillväxt.

Differentialekvationen för x_3 (= destruenterna)

Differentialekvationen för x_3 får samma struktur som den för x_1 (= producenterna), eftersom destruenterna är levande varelser, främst bakterier. Möjligen skulle man kunna tro att de inte är lika känsliga för temperatur och andra omgivningsfaktorer som producenterna, eftersom destruenterna i stor utsträckning lever i sediment på botten av sjön, där förhållandena möjligen är mer konstanta, men de är sannolikt lika beroende av omgivningen. Destruenter ätes inte av några andra varelser och äter endast dött organiskt material (döda växter och djur). I stället för N_2 i ekvation(4.4) får de döda växterna x_2 komma in och ekvationen blir:

$$\frac{dx_3}{dt} = r_D \cdot \max \left\{ 0; \left[1 - \frac{(u_1 - T_m)^2}{(\Delta T/2)^2} \right] \right\} \cdot x_3 - \frac{r_D}{K_D} \cdot x_3^2 + C_3 \cdot x_2 \cdot x_3 \quad (4.11)$$

Differentialekvationen för x_4 (= närsalterna)

Nettoökningen per tidsenhet av närsalterna får ett positivt bidrag proportionellt mot mängden destruerter (destruenterna antages åstadkomma lika mycket närsalter genom nedbrytning varje tidsenhet och för varje enhet av sin egen vikt) och ett negativt bidrag proportionellt mot mängden producenter (producenterna antages konsumera lika mycket närsalter genom assimilation varje tidsenhet och för varje enhet av sin egen vikt). Ett positivt bidrag erhålles också av nettotillflödet av närsalter utifrån till sjön (u_3). Då erhålles:

$$\frac{dx_4}{dt} = C_4 \cdot x_3 - C_1 \cdot x_1 + u_3 \quad (4.12)$$

där

C_4 och C_1 är konstanter

Det återstår att finna tidsfunktionerna för insignalerna. Enligt fig. 5 tycks ljus och temperatur variera med årstiderna ungefär som sinuskurvor med periodtiden ett år. Temperaturen ligger i fig. 5 en tid efter ljuset, vilket är naturligt med tanke på att det tar tid för solljuset att värma upp vattnet i en sjö. Sålunda erhålles:

Insigaler:

$$u_1 = T_1 + \frac{T_1}{2} \cdot \sin (wt - wt_0) \quad (4.13)$$

$$u_2 = L_1 + \frac{L_1}{2} \cdot \sin (wt) \quad (4.14)$$

u_3 är olika för olika fall.

Sammanfattning av systemet av differentialekvationer som beskriver tillståndsvariablerna:

$$\frac{dx_1}{dt} = r_0 \cdot \max \left\{ 0; \left[1 - \frac{(u_1 - T_m)^2}{(\Delta T/2)^2} \right] \right\} \cdot x_1 - \frac{r_0}{K_0} \cdot x_1^2 + C_0 \cdot x_1 \cdot N_0 \cdot \min \left(\frac{u_2}{L_0}; \frac{x_4}{S_0} \right)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = d \cdot x_1 - C_2 \cdot x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = r_D \cdot \max \left\{ 0; \left[1 - \frac{(u_1 - T_m)^2}{(\Delta T/2)^2} \right] \right\} \cdot x_3 - \frac{r_D}{K_D} \cdot x_3^2 + C_3 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$\frac{dx_4}{dt} = C_4 \cdot x_3 - C_1 \cdot x_1 + u_3$$

Låt oss se hur de olika tillståndsvariablerna i ekvationssystemet påverkar varandra.

x_1 , producenterna, påverkar (förutom sig själv) x_2 , de döda växterna, och x_4 , närsalterna, men inte x_3 , destruenterna.

x_2 påverkar endast x_3 .

x_3 påverkar x_2 och x_4 liksom x_1 men i motsatt riktning.

x_4 påverkar endast x_1 och endast då x_4 och inte u_2 , solljuset, är begränsande.

VÄRDEN PÅ PARAMETRAR OCH DIMENSIONER PÅ TILLSTÅNDSVARIABLER OCH IN-SIGNALER

Siffervärden att stoppa in i denna matematiska modell erhöles med hjälp av Ulf Lettevall och Willy Rippl, limnologiska institutionen, Lund. Jag försökte så gott som möjligt tolka parametrarna till den biologiska verkligheten. De försökte sedan räkna fram siffervärden utifrån mätdata av olika slag. En del parametrar kunde bestämmas relativt säkert, medan andra var mycket osäkra och en del helt lösa gissningar. Det sistnämnda gällde främst de parametrar, som inte hade någon klar tolkning till den biologiska verkligheten speciellt C_0 och C_3 .

Först måste dimensioner på tillståndsvariabler och insignaler bestämmas. Vi räknar inte per volyms- eller ytenhet utan på hela sjön, vars yta är av storleksordningen $10^6 \text{ m}^2 = 1 \text{ km}^2$ och volym 10^6 m^3 .

u_1 = temperaturen i vattnet mätes i $^{\circ}\text{C}$ (grader Celsius)

u_2 = absorberad solenergi för hela sjön per tidsenhet mätes i $10^6 \cdot \text{kcal/dygn}$.

u_3 = närsalter utifrån mätes i ton P (ton fosfor).

(Biomassan betyder massan, vikten av något levande.)

x_1 = biomassan av producenter i hela sjön mätes i ton C (ton kol).

(Allt levande är ju organiska ämnen och innehåller kol.)

x_2 = vikten döda växter i hela sjön mätes också i ton C.

x_3 = biomassan av destruenter i hela sjön mätes också i ton C.

x_4 = vikten närsalter i hela sjön mätes i ton P (ton fosfor).

t = tid mätes i dygn. Intressanta tidsförlopp är år, huvuddelar av år (årstider) och en följd av några år.

Om man skulle räknat per volyms- eller ytenhet i stället för hela sjön, skulle det varit naturligt att räkna solljus per ytenhet, men t.ex. närsalter per volymsenhet. Det föreföll då enklare att räkna med hela sjöns innehåll.

Insignaler:

u_1 se ekvation (4.13)

Först erhållna värden:

Medeltemperaturen under ett år $T_1 = 8^{\circ}\text{C}$

Skillnaden mellan högsta och lägsta temperatur $\Delta T_1 = 25^{\circ}\text{C}$.

Den tid temperaturmaximum ligger efter ljusmaximum $t_0 = 30$ dygn.

Detta leder dock till att temperaturen går ner till $-4,5^{\circ}\text{C}$. Det stämmer inte, den sjunker inte under 0°C . Värdena ändrades därför till

$T_1 = 10^{\circ}\text{C}$ och $\Delta T_1 = 20^{\circ}\text{C}$

u_2 se ekvation (4.14)

Först erhållna värden:

Medelvärde under året av absorberat solljus per tidsenhet

$L_1 = 10 \cdot 10^6 \text{ kcal/dygn}$.

Skillnad mellan högsta och lägsta värden på absorberat solljus per tidsenhet: $\Delta L_1 = 23 \cdot 10^6 \text{ kcal/dygn}$.

Också här leder det till en orimlighet att u_2 sjunker under noll ner till $-1,5 \cdot 10^6$ kcal/dygn. Värdet på ΔL_1 ändrades därför till $20 \cdot 10^6$ kcal/dygn.

Anledningen till dessa fel är att värdena beräknats ur en mätserie på 12 mättillfällen under ett år. Tillfälliga variationer i väderleken kan här ha så stor inverkan på enskilda mätvärden att slutresultatet förrycks, eftersom antalet mättillfällen var så litet.

w erhålles genom att en period för sinusfunktionen motsvarar $t = 365$ dygn, dvs. $w \cdot 365 = 2\pi$ eller $w = 0,0172 \text{ dygn}^{-1}$

Temperatur som begränsande faktor: (se sid. 17, uttryck (4.5))

Den optimala temperaturen då tillväxtförmågan är maximum antogs vara $T_m = 25^\circ\text{C}$. Den temperatur då det är för kallt för producenterna att föröka sig är c:a 5°C . Det leder till $\Delta T/2 = 20^\circ\text{C}$ där ΔT är den temperaturdifferens som producenterna tål utan att förökningsförmågan upphör. $\Delta T = 40^\circ\text{C}$ är dock helt teoretisk, eftersom temperaturer uppåt 45°C aldrig är aktuella i svenska vatten och i modellen inte ens över 20°C . Här hade man inte så klara mätdata, men en stor biologisk erfarenhet leder till att siffervärdena är ganska tillförlitliga.

Fotosyntes + assimilation av oorganiska salter: (sid. 19, uttryck 4.6)

Det antogs utifrån dels kemiska reaktionsformler dels kemiska analyser att c:a 935 kcal solenergi och c:a 3 g P (fosfor) ger c:a 100 g C (kol) i organiska ämnen. I modellen är uttrycket för den mängd organiska ämnen som per tidsenhet erhålles som slutprodukt av assimilationen:

$$N_o \cdot \min \left(\frac{u_2}{L_o}; \frac{x_4}{S_o} \right)$$

$$\text{Sätt då } \frac{N_o}{L_o} = \frac{100 \text{ g C}}{935 \text{ kcal}} = \frac{100 \text{ ton C}}{935 \cdot 10^6 \text{ kcal}} = 0,107 \text{ (ton C)/(} 10^6 \text{ kcal)}$$

$$\text{och } \frac{N_o}{S_o} = \frac{100 \text{ g C}}{3 \text{ g P}} = 33,33 \text{ (g C)/(g P)}$$

Producenternas tillväxt och förökning:

r_o är biomassan hos antalet "födda" minus antalet "avlidna" producenter per tidsenhet och per enhet producentbiomassa vid optimala temperaturförhållanden.

För att få fram maximal nettoförökningsförmåga användes värden på våren då nettotillväxten var maximal: 1,5 ton C/dygn. Då var producenternas totala biomassa 6,5 ton C. Det ger

$$r_0 = \frac{1,5}{6,5} = 0,23 \text{ dygn}^{-1}$$

(För sent uppmärksammades att detta värde inte motsvarar det teoretiska värdet r_0 , eftersom temperaturen inte är optimal för förökning utan endast c:a 15°C. Korrektionen av detta ger:

$$r_0 = \frac{r(u_1=15)}{1 - \frac{(15-25)^2}{(20)^2}} = \frac{0,23}{0,75} = 0,307 = 0,31 \text{ dygn}^{-1}$$

Vid simuleringen har dock $r_0 = 0,23 \text{ dygn}^{-1}$ använts. Några mer drastiska skillnader kan det knappast leda till.)

Maximalt möjliga populationsstorlek för producenterna uttryckt i producentbiomassa: $K_0 = 45 \text{ ton C}$. Vid simulering visade det sig i stället att $K_0 = 24 \text{ ton C}$ gav maximivärdet 45 ton C för x_1 (ungefär) varför värdet ändrades.

Konstanten C_0 kan beskrivas som "födans" (slutprodukten från assimilationen) tillväxande inverkan på producenternas biomassa per massenhet "föda" och per enhet producentbiomassa. Denna parameter hade ingen påtaglig verklighetsförankring så vi visste inte alls, men gissade $C_0 = 1 \text{ (ton C} \cdot \text{dygn)}^{-1}$. Vid simulering visade sig $C_0 = 0,1 \text{ (ton C} \cdot \text{dygn)}^{-1}$ vara ett lämpligare värde, varför det ändrades.

Uppkomst av döda växter: (se ekvation 4.10)

d = massan hos avdött material härrörande från producenter per tidsenhet och per enhet producentbiomassa. Värdet togs från samma mättilfälle som r_0 då producentbiomassan var 6,5 ton C och mängden avdött material var 0,7 ton C/dygn. Det ger

$$d = \frac{0,7}{6,5} = 0,11 \text{ dygn}^{-1}$$

C_2 = den mängd döda växter som konsumeras av destruenterna per tidsenhet och per enhet destruentbiomassa. Tillväxten i sedimentet (det lager på botten av sjön, dit de döda växterna sjunker ner så småning-

om) beräknade man till c:a 0,2 ton C/dygn. Mängden avdött material var 0,7 ton C/dygn enligt ovan. Kvar blir $0,7 - 0,2 = 0,5$ ton C/dygn som konsumeras av destruenterna. Destruentbiomassan vid detta tillfälle uppskattades till 0,5 ton C, varför erhöles:

$$C_2 = \frac{0,5 \text{ ton C/dygn}}{0,5 \text{ ton C}} = 1 \text{ dygn}^{-1}$$

Detta värde var mycket osäkert, eftersom det är mycket svårt att mäta destruenterna. Man måste nämligen först odla bakterierna på något substrat och olika bakterier växer olika fort på olika substrat. Olika värden på C_2 har använts.

Destruenternas tillväxt och förökning:

På grund av att kunskaperna om destruenterna är så ringa antog man att man kan sätta parametrarna till samma värde som för producenterna, dvs.: $r_D = r_o$ $K_D = K_o$ och $C_3 = C_o$

Det visade sig genom simulering inte ge rimliga resultat för K_D och C_3 . Eftersom biomassan av destruenterna är mycket mindre än biomassan av producenter borde K_D vara mindre än K_o . Vilka värden som använts framgår av kapitel 5 "Simulering".

Bildandet av närsalter:

Den mängd närsalter som producenterna konsumerar per tidsenhet och per enhet producentbiomassa: $C_1 = 0,03$ (ton P)/(dygn · ton C) erhöles genom att betrakta kemiska analyser, jfr. S_o/N_o (sid. 24)

Den mängd närsalter som bildas vid destruenternas nedbrytning av organiskt material per tidsenhet och per destruentbiomassa:

$$C_4 = 0,015 \text{ (ton P)/(dygn · ton C)}$$

Sammanfattning av parametervärden:

$$T_1 = 10^\circ\text{C}$$

$$\Delta T_1 = 20^\circ\text{C}$$

$$L_1 = 10 \cdot 10^6 \text{ kcal/dygn}$$

$$\Delta L_1 = 20 \cdot 10^6 \text{ kcal/dygn}$$

$$w = 0,0172 \text{ dygn}^{-1}$$

$$T_m = 25^\circ\text{C}$$

$$\Delta T/2 = 20^\circ\text{C}$$

$$N_o/L_o = 0,107 \text{ (ton C)/(10}^6 \text{ kcal)}$$

$$N_o/S_o = 33,33 \text{ g C/g P}$$

$$r_o = 0,23 \text{ dygn}^{-1}$$

$$K_o = 24 \text{ ton C}$$

$$C_o = 0,1 \text{ (ton C} \cdot \text{ dygn)}^{-1}$$

$$d = 0,11 \text{ dygn}^{-1}$$

$$C_2 \quad K_D \quad C_3 \quad \text{varieras}$$

$$C_1 = 0,03 \text{ (ton P)/(dygn} \cdot \text{ ton C)}$$

$$C_4 = 0,015 \text{ (ton C)/(dygn} \cdot \text{ ton C)}$$

Insättning i ekvationssystemet:

$$\frac{dx_1}{dt} = 0,23 \cdot \max \left\{ 0; \left[1 - \frac{(u_1 - 25)^2}{(20)^2} \right] \right\} \cdot x_1 - \frac{0,23}{24} x_1^2 + 0,1 \cdot 0,107 \cdot \dots$$

• $\min (0,107 u_2 ; 33,33 x_4)$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0,11 \cdot x_1 - C_2 \cdot x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 0,23 \cdot \max \left\{ 0; \left[1 - \frac{(u_1 - 25)^2}{(20)^2} \right] \right\} \cdot x_3 - \frac{0,23}{K_D} x_3^2 + C_3 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$\frac{dx_4}{dt} = 0,015 \cdot x_3 - 0,03 \cdot x_1 + u_3$$

5. SIMULERING

FÖRENKLING I MODELLEN

De siffervärden som först erhöjllits på parametrarna gav inte något rimligt resultat. Det är inte så konstigt med tanke på att siffervärdena på flera parametrar endast var ungefärliga uppskattningar eller gissningar. Genom att ändra olika parametrar borde man kunna få rimliga resultat. Eftersom antalet parametrar som kan ändras är ganska stort och man inte vet på förhand om lösningens stabilitet, periodicitet är speciellt känslig för vissa parametervärden. Det skulle kunna vara svårt att hitta en rimlig parameteruppsättning.

Dels av denna anledning, dels för att få bättre insyn i ekvationsystemet, ville vi tillfälligt förenkla den matematiska modellen något.

$$\text{Om } N_0 \cdot \min \left(\frac{u_2}{L_0}; \frac{x_4}{S_0} \right) = \frac{N_0 \cdot u_2}{L_0}$$

blir systemet mycket enklare. Då inverkar inte längre x_4 på någon av de andra variablerna och x_1 påverkas av insignalerna, men inte av någon annan tillståndsvariabel. x_2 och x_3 växelverkar med varandra under inverkan av x_1 .

Vad innebär den förenklingen i verkligheten? Det innebär att solljuset och inte närsalterna är det begränsande för primärproduktionen (växternas assimilation av enkla oorganiska ämnen till komplicerade organiska ämnen). Detta är inte sant för de flesta sjöar, ty där är närsalter (fosfor och kväve) begränsande. Trummen däremot är så förorenad, dvs. har gott om närsalter, att det i stället oftast blir solljuset som blir det begränsande.

 x_1 -SIMULERING

x_1 beror efter förenklingen endast av insignaler och parameterval. Olika parametrar och insignaler provades för att få bättre insyn i ekvationen.

Först studerades stegfunktioner som insignaler. (Stegfunktion har värdet 0 (noll) före en viss tidpunkt (vanligen tiden $t = 0$) och är konstant ($\neq 0$) därefter.)

Vilket begynnelsevärde $x_1(0)$ som x_1 antar spelar inte så stor roll, under förutsättning att $x_1(0) > 0$, eftersom x_1 ganska snabbt hamnar på ett stationärt slutvärde, som är oberoende av $x_1(0)$. (För $x_1(0) < 0$, vilket dock är biologiskt överkligt, går x_1 mot $-\infty$ i stället.) Storleken av detta slutvärde ökar om den konstanta insignalen ökas. Detta slutvärde beror också av parametrarna på följande sätt:

Beroende av C_0 : För $C_0 = 0$ antar x_1 sitt minsta slutvärde (och det är $\neq 0$) (vilket bestäms av övriga parametrar). Ökande C_0 -värden ger således ökande slutvärden på x_1 .

Beroende av K_0 : Ju större K_0 desto större slutvärde på x_1 .

r_0 är mera säker än värdet på K_0 och C_0 varför r_0 inte varierades. (Jämför dock kommentar på sid. 25.)

Därefter kopplades sinussignaler in som insignaler, varvid det var samma huvudtendenser i beroendet av C_0 och K_0 hos maximivärdet för x_1 . Insvängningen efter ett steg är mycket snabbare än en sinusperiod i detta fall. x_1 varierade nu med samma frekvens som sinusfunktionerna, dvs. en period per år och liksom dessa med maximum på sommaren och minimum på vintern.

FASPORTRÄTT

För att få inblick i det nerbantade ekvationssystemet med x_2 och x_3 antogs x_1 och u_1 tillfälligt vara konstanta.

Fasplananalys på

$$\frac{dx_2}{dt} = d \cdot x_1 - C_2 \cdot x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = r_D \cdot \max\left\{0; \left[1 - \frac{(u_1 - T_m)^2}{(\Delta T/2)^2}\right]\right\} \cdot x_3 - \frac{r_D}{K_D} \cdot x_3^2 + C_3 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Singulära punkten bestäms av att derivatorna är noll. Detta ger en singular punkt. (Om $x_1 \neq 0$ blir den:)

$$x_{20} = \frac{r_D}{C_3} \cdot \left(\frac{d \cdot x_1}{K_D \cdot C_2} - \max\left\{0; \left[1 - \frac{(u_1 - T_m)^2}{(\Delta T/2)^2}\right]\right\} \right)$$

$$x_{30} = \frac{d \cdot x_1}{C_2}$$

Genom fasplananalysen ser man att x_2 och x_3 svänger in sig mot vissa värden (den singulära punkten), som beror på parametrar och värdena på x_1 och u_1 , men däremot inte på begynnelsevärdena på x_2 och x_3 , under förutsättning att de håller sig inom visst ganska stort område (ungefär $x_2(0)$ och $x_3(0) > 0$, vilket är det enda biologiskt möjliga). Om x_3 blir negativ går lösningen inte mot den singulära punkten utan mot oändligheten. För vissa fall kan den singulära punkten hamna på negativt x_2 -värde, vilket är överkligt, ty i den ekologiska verkligheten kan ingen av tillståndsvariablerna bli negativ. Eftersom x_1 och u_1 inte är konstanta utan varierar periodiskt, kan det vara svårt att välja parametrar så att den singulära punkten har positivt x_2 -värde i varje tidpunkt.

(Fasporträtten utgör x_2 - x_3 -diagram med ett antal banor som visar hur x_2 och x_3 varierar på olika sätt för olika begynnelsevärden. Om x_2 och x_3 någon gång antar ett visst värde fortsätter de alltid utefter samma bana.) Fasporträtten kan ha olika utseenden, i detta fall fokus eller två- (eller en-) tangentnod kring den singulära punkten. I fig. 10 visas två olika fasporträtt för två olika parameteruppsättningar enligt tabell 1. Icke angivna parametervärden framgår av sid. 26-27.

	fall a)	fall b)
x_1	45	45
u_1	20	20
C_2	9,9	9,9
K_D	0,3	0,3
C_3	0,005	0,01

Tabell 1. Parametervärden för två olika fasporträtt

Insvängningsförloppen i fasporträtten går här mycket snabbare än årstidsförändringarna. Därför är den singulära punktens läge för olika x_1 och u_1 av stor betydelse för värdet på x_2 . x_2 kan i verkligheten aldrig bli negativ och bör helst inte bli alltför liten heller. Jag försökte därför välja parametrarna C_2 , K_D och C_3 så att den singulära punkten för olika värden på x_1 och u_1 skulle undvika att bli negativ.

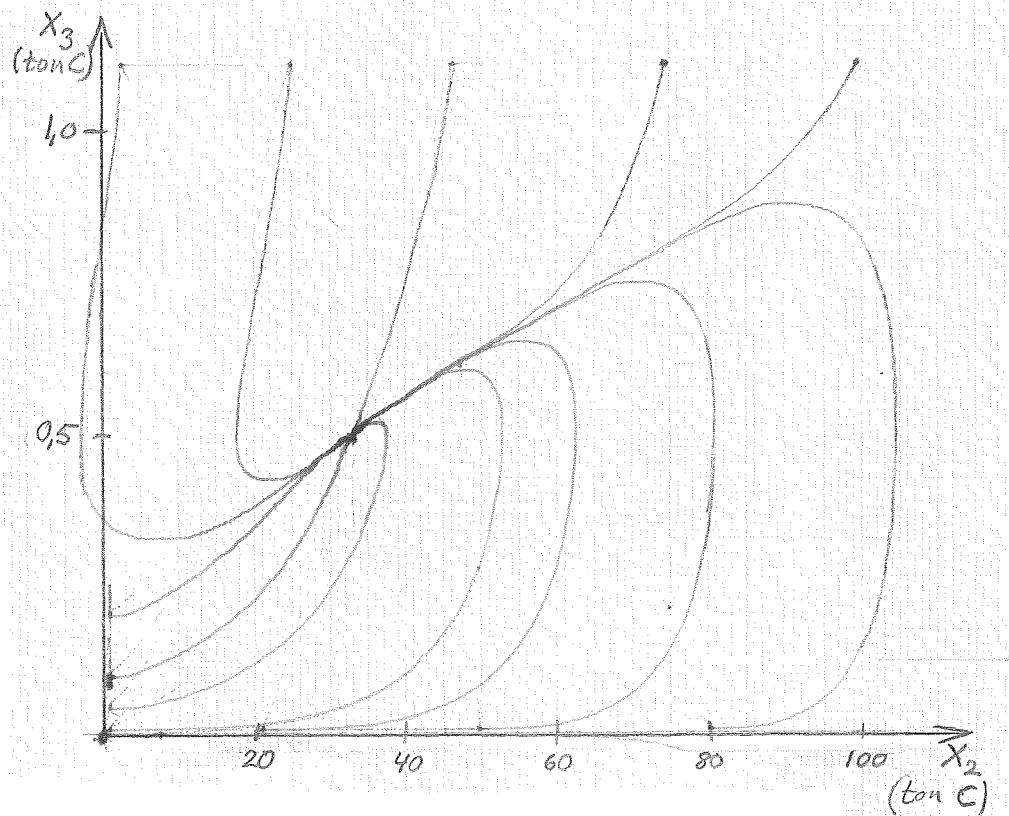


Fig. 10. Fasporträtt, fall a)

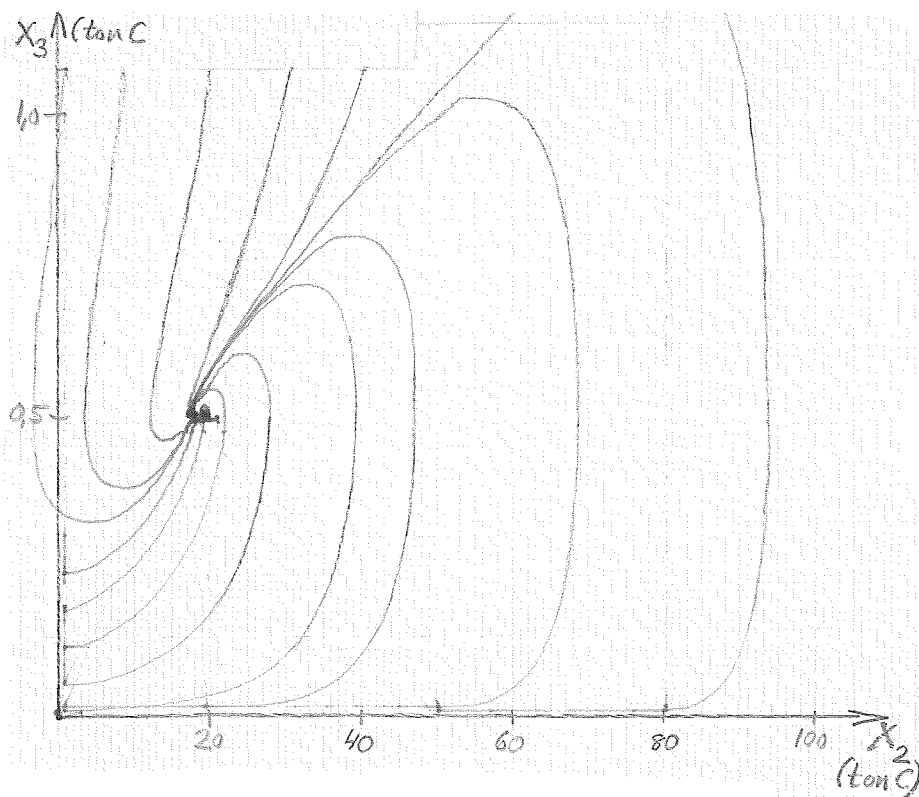


Fig. 10. Fasporträtt, fall b)

x_1, x_2, x_3 SAMMANKOPPLADE

Differentialekvationerna för x_1, x_2 och x_3 kopplades samman och systemet simulerades. Årsvariationer av u_1, u_2, x_1, x_2 och x_3 visas i fig. 11. Följande parametrar valdes:

$$C_2 = 9,9 \text{ dygn}^{-1}$$

$$K_D = 0,3 \text{ ton C}$$

$$C_3 = 0,005 \text{ (dygn} \cdot \text{ton C)}^{-1}$$

Som initialvärden har valts de värden resp. kurva antar efter ett år. Om annat begynnelsevärde hade valts, hade kurvans förlopp endast ändrats under en kort del av det första året.

De olika termerna i de olika differentialekvationerna har också simulerats för att man skall se vilken inverkan de har, se fig. 12, 13, och 14. Man ser t.ex. i fig. 12 resp. 14 hur x_1 resp. x_3 ökar hastigare, när den term som innehåller den temperaturberoende faktorn börjar bli större än noll.

Tidpunkten noll har valts då ljusstyrkan är mitt emellan maximum och minimum, dvs. simuleringen startar i vårdagjämningen (c:a 21 mars). När årstider har angetts på tidsskalan avses våren omfatta mars - maj, sommaren juni - augusti osv.

Modellens förhållande till den biologiska verkligheten. Anpassning till mätdata

x_1 : Huvuddragen är rimliga med snabb uppgång på våren och något långsammare nedgång på hösten. Maximivärdet erhöles till 45 ton C (ungefär) genom att ställa in K_0 på lämpligt värde. För produktcenterna skiljer sig maximi- och minimivärden med en faktor 100 enligt mätdata, vilket skulle innebära att minimivärdet för x_1 borde vara c:a 0,5 ton C. Nu blev det något för högt: 2 ton C.

x_2 : Här stämmer inte huvuddragen fullt så bra. Det borde vara en ackumulation som leder till svagt ökande x_2 -värden från ett år till nästa. Därvid skulle x_2 inte alls bli så liten på vintern som i denna modell. Det lyckades inte att åstadkomma detta genom att öka parametern d .

Maximivärdet borde antas lite senare för x_2 än x_1 , vilket ej blev fallet i modellen. Däremot stämmer det att maximivärdet på x_2 är lite mindre än maximivärdet på x_1 .

x_3 : Huvuddragen stämmer liksom för x_1 . Maximivärdet anpassades till 0,5 ton C genom inställning av parametern K_D och också C_2 och C_3 . För destruenterna skiljer sig maximi- och minimivärden med en faktor 10 enligt mätdata, vilket skulle innebära att minimivärdet för x_3 borde vara c:a 0,05 ton C. Nu blev det något för lågt 0,015 ton C.

Tendensen att öka snabbare på våren än det avtar på hösten är mycket klarare markerad hos x_2 och x_3 än hos x_1 .

De små svängar som finns i x_2 -kurvan och knyckar i x_3 -kurvan förklaras genom att titta på summan av de ingående termerna i resp. differentialekvation. Därvid ser man att denna summa skiftar tecken samtidigt som derivatan (lutningen i kurvan) hos x_2 resp. x_3 gör det.

Ur ekologisk synpunkt skall man troligen inte fästa något avseende vid dessa detaljer i kurvornas utseende.

Känslighet

Om x_3 är negativ är risken mycket stor att x_2 och x_3 snabbt går mot $+\infty$ resp. $-\infty$. Om fasporträtten hade upptagits också för negativa x_3 hade detta framgått tydligt i fig. 10. För vissa parametervariationer är risken att detta inträffar större än för andra.

Sammanfattning

Det har gått att få kurvor som varierar periodiskt med ungefär rätt maximi- och minimivärden. För x_2 blev dock minimivärdet alldeles för lågt och x_2 borde haft en svagt ökande tendens. Att uppgången på våren är snabbare än nedgången på hösten framgår av modellen.

Fig. 11. Årsvariationer av insignaler och tillståndsvariabler

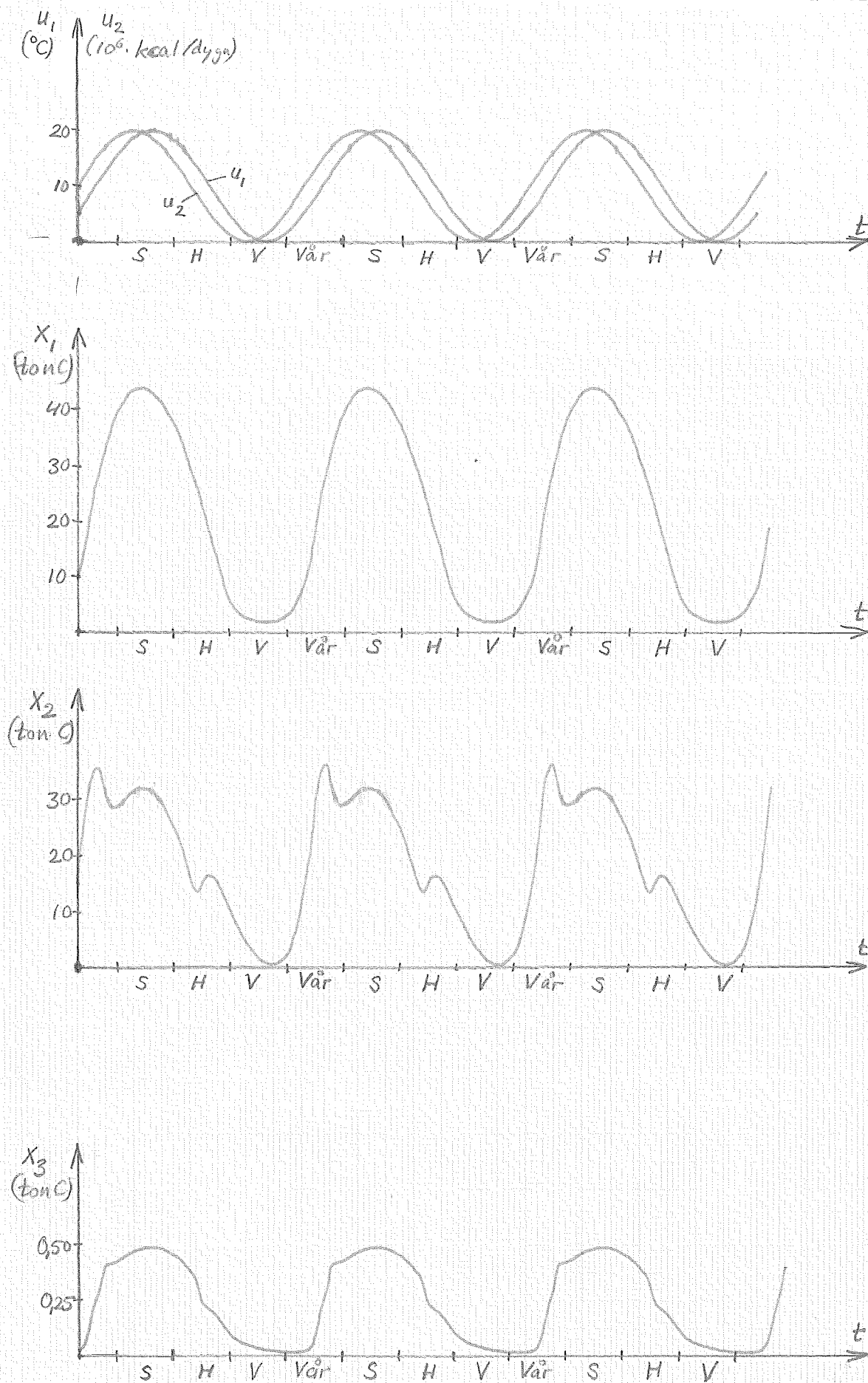
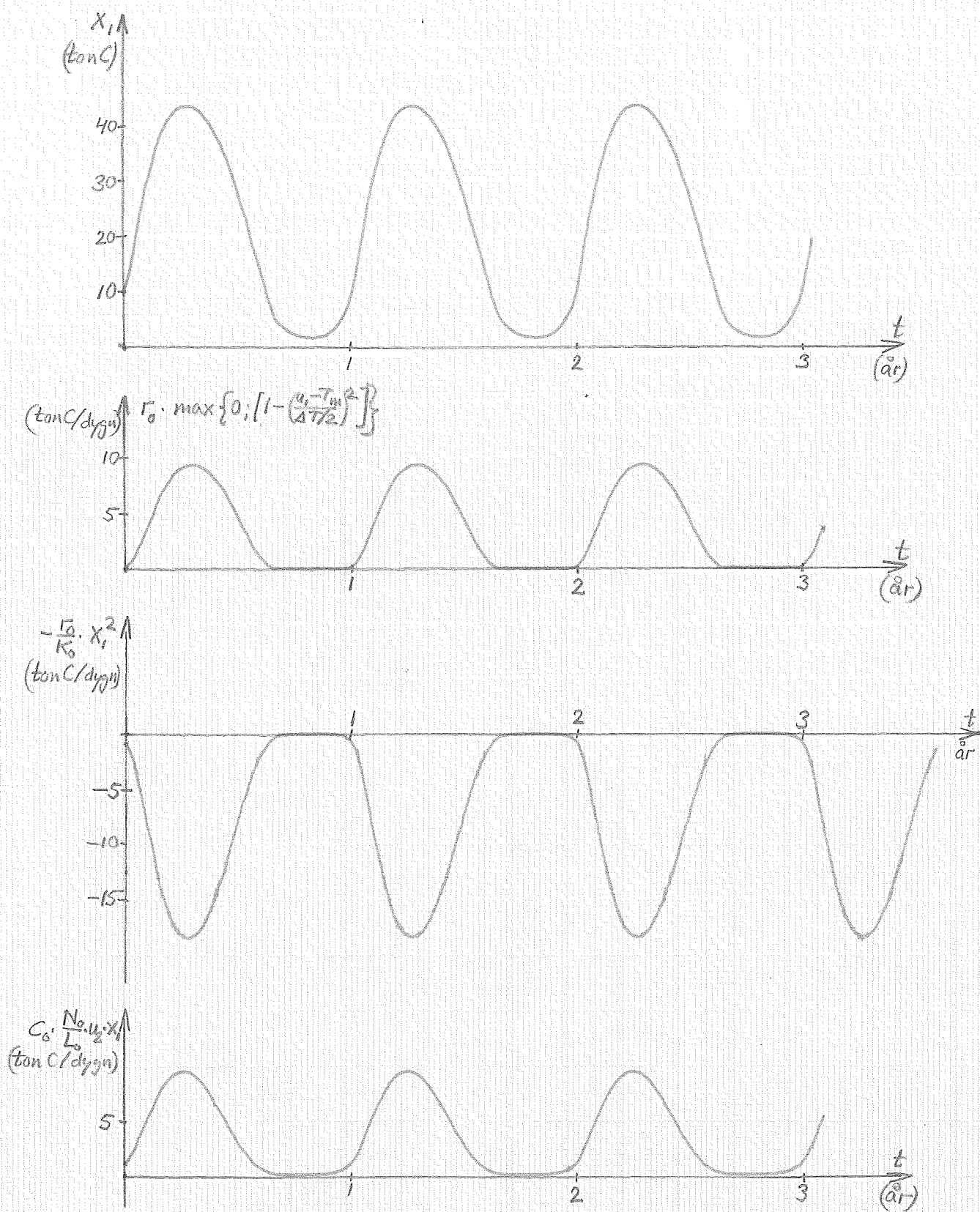


Fig. 12. x_1 och de termer som påverkar x_1 

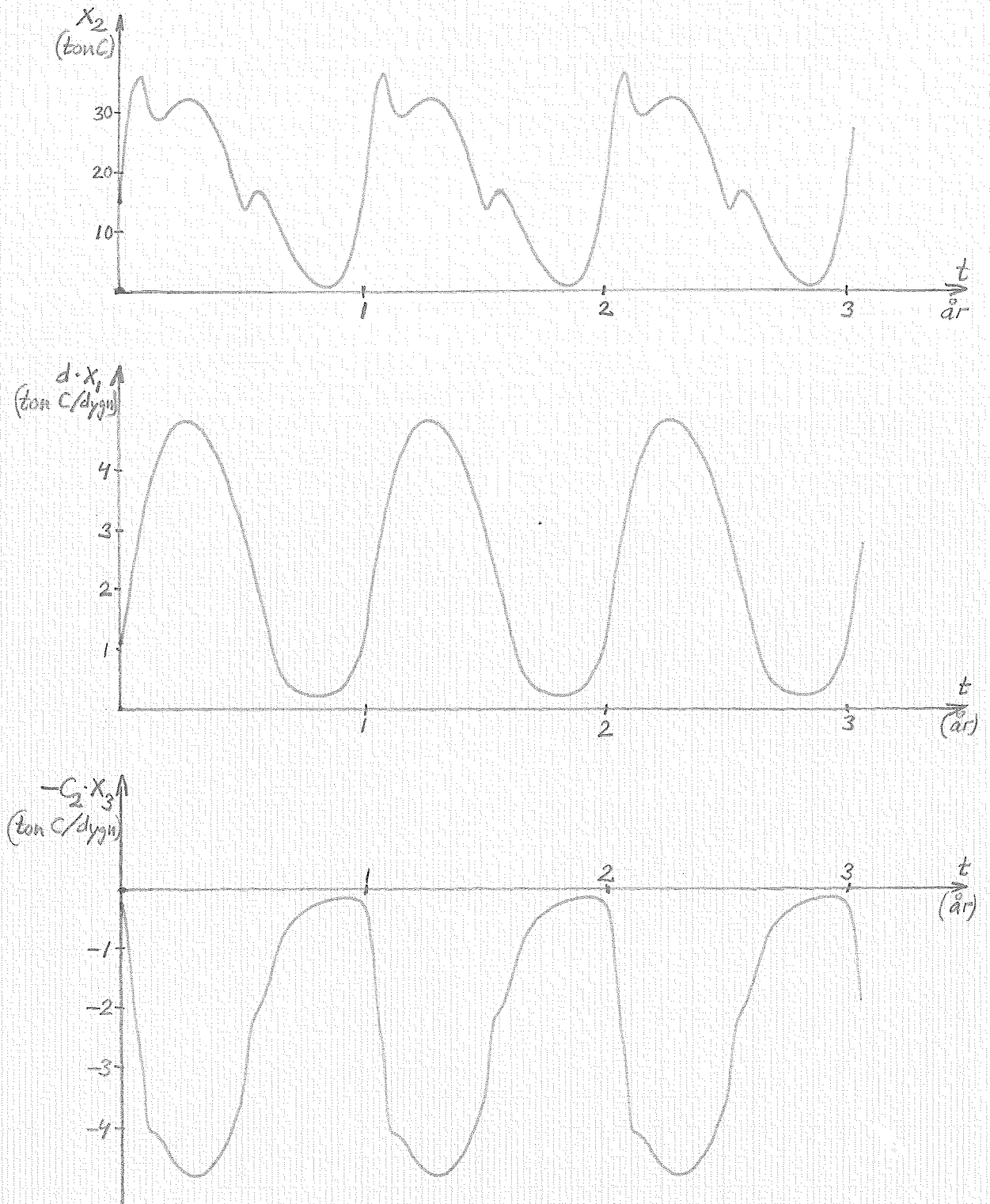
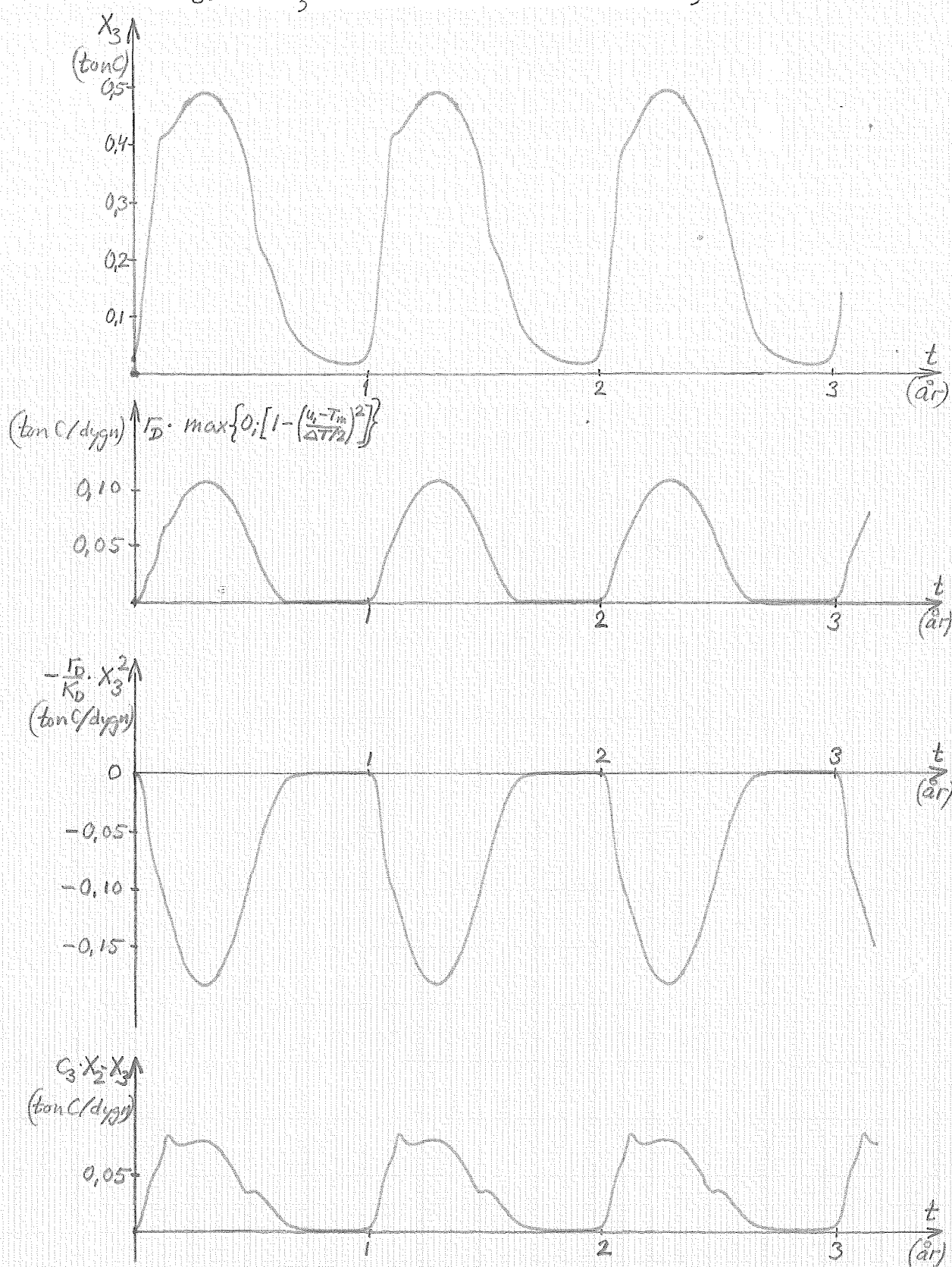


Fig. 13. x_2 och de termer som påverkar x_2

Fig. 14. x_3 och de termer som påverkar x_3 

6. S L U T S A T S E R

SVAGHETER I MODELLEN

Visserligen erhöjls en del ganska rimliga resultat, men ännu återstår mycket att förbättra. Jag skall peka på några svagheter.

- 1) De här uppställda ekvationerna är inte härledda ur en viss biologisk mekanism på liknande sätt som inom fysik, där ekvationerna i allmänhet grundar sig på fysikaliska mekanismer. Här är det snarare så att man finner ekvationer, som stämmer med erhållna värden. Detta för bl.a. med sig att man skulle kunna finna olika ekvationer, som båda stämmer ganska bra, med olika principiellt utseende. Några andra ansatser finns i avsnitt "Alternativa modeller".
- 2) Sedan jag satt upp den matematiska modellen och börjat simulera, fick jag höra att det finns en viss dynamik i växternas saltupptagning. De lagrar upp närsalter innan de använder dem för produktion av organiska ämnen. Detta skulle innebära en femte tillståndsvariabel (x_5) och tillståndsekvation för i växterna lagrade närsalter. Då skulle x_5 i stället för x_4 påverka x_1 , och x_4 -ekvationen skulle ändras.
- 3) Syrehalten i vattnet saknas i modellen. Det går åt syre vid destruenternas nedbrytning av organiskt material. I starkt förorenade sjöar kan syret därför ta slut på botten, varvid destruenternas nedbrytningsarbete övergår från aerob form till anaerob (utan luft). Därvid bildas gaser t.ex. sumpgas (metan) eller svavelväte, vilka ibland bubblar upp till ytan och luktar illa. Idéer till hur man skall föra in syreberoendet kan man få av fig. 3, sid. 11.
- 4) Konsumenterna (djuren) saknas. Detta år (1970) var det mycket mer djur än tidigare år i Trummen, varför de nu inte längre är försumbara.
- 5) Inverkan på tillväxtparametrarna (r och K) från andra omgivningsfaktorer än temperatur saknas. Syrehalten t.ex. kan ha stor betydelse åtminstone för vissa djurarter.
- 6) Det saknas uppdelning på olika djup, på olika arter och på olika närsalter.

Trummen är visserligen en grund sjö, men genom den kraftiga algblomningen kan ljuset inte tränga ner till djupare lager på sommaren.

I sjöar uppstår ofta olika skiktning så att inget utbyte mellan övre och lägre lager sker annat än vissa tider på året. Detta utreds närmare beträffande Östersjön i "SOU 1967: 43, Miljövardeforskning I".

De småtoppar på kurvan för producenter, som finns i fig. 5, beror troligen på att olika växtarter har maximum vid olika tidpunkter. Skall man beskriva näringskedjor enligt fig. 1. a) är det naturligtvis helt nödvändigt att göra uppdelning på olika arter.

Även om det oftast är fosfor som har störst betydelse av närsalterna kan t.ex. kväve ibland vara avgörande.

ALTERNATIVA MODELLER

I "The Grassland Ecosystem" fanns följande formel och motsvarande kurva för fotosyntesen.

$$P_n = \frac{a \cdot Q}{1 + b \cdot Q} \quad (6.1)$$

där

P_n är resultatet av fotosyntesen.

Q är infallande solljus (dvs. = u_2)

P_n är avgörande för tillväxten, ja så att man kan säga att bruttoproduktionen per enhet biomassa direkt utgöres av P_n .

Storleken på a/b bestäms bl.a. av närsalthalten.

I modellen i kapitel 4 är

$$P_n = N_o \cdot \min \left(\frac{u_2}{L_o}; \frac{x_4}{S_o} \right) \quad (6.2)$$

dvs.

$$P_n = \begin{cases} \text{konst.} \cdot u_2 = \frac{N_o}{L_o} \cdot u_2 \\ \text{konst.} = N_o \cdot x_4 / S_o \end{cases}$$

om

$$u_2 < \frac{L_o \cdot x_4}{S_o} \quad \text{resp. större än, för givet konstant } x_4 \text{ (närsalter)}$$

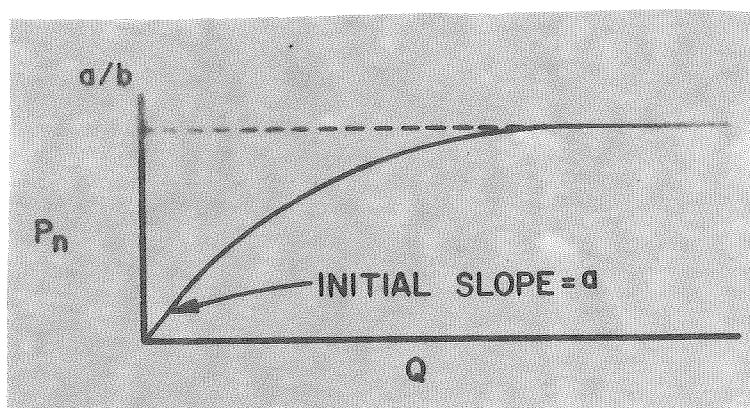


Fig. 15. a)

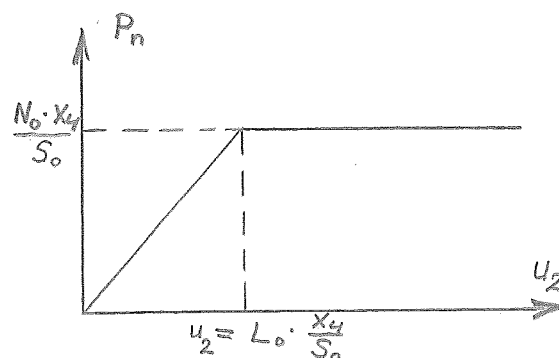


Fig. 15. b)

Howard T. Odum nämnde vid besök i Lund att den tredje termen i differentialekvationen för x_1 (4.6 och 4.7 på sid. 19) snarare borde ingå som faktor i stället för term.

Detta leder till följande idéer om hur ekvationerna kan förändras. Den första termen i differentialekvationen för x_1 (4.5 och 4.7 på sid. 19) kan uppdelas i en bruttotillväxtterm och en dödsterm, där den förra är proportionell mot P_n :

$$\frac{dx_1}{dt} = P_n \cdot x_1 - d \cdot x_1 - \frac{r_0}{K_0} \cdot x_1^2 \quad (6.3)$$

eller

$$\frac{dx_1}{dt} = P_n \cdot \max \left\{ 0; \left[1 - \frac{(u_1 - T_m)^2}{(\Delta T/2)^2} \right] \right\} \cdot x_1 - d \cdot x_1 - \frac{r_0}{K_0} \cdot x_1^2 \quad (6.4)$$

där

r_0 kan vara antingen konstant som nu eller

$$r_0 = P_n \quad \text{eller} \quad r_0 = P_n - d$$

$$P_n = \frac{a \cdot Q}{1 + b \cdot Q}$$

där

$$a = a_0 \cdot x_4 = \text{konst.} \cdot x_4$$

$$Q = u_2$$

eller

$$P_n = N_0 \cdot \min \left(\frac{u_2}{L_0}; \frac{x_4}{S_0} \right)$$

Detta är alltså sammanlagt 12 olika ansatser, som skulle vara intressanta att studera närmare.

Differentialekvationen för x_3 kan dock knappast genomgå motsvarande förändringar, eftersom det där inte är fråga om fotosyntes.

I "The Grassland Ecosystem" fanns följande tillväxtekvationer: för en art:

$$\frac{dn}{dt} = a \cdot n - b \cdot n \cdot f(n)$$

där

n = antalet av arten

$f(n)$ = någon funktion av n

a och b är konstanter

för två arter som påverkar varandra:

$$\begin{aligned}\frac{dn_1}{dt} &= a_1 \cdot n_1 - b_1 \cdot n_1 \cdot f(n_1, n_2) \\ \frac{dn_2}{dt} &= a_2 \cdot n_2 - b_2 \cdot n_2 \cdot f(n_1, n_2)\end{aligned}\tag{6.6}$$

där

n_1 resp. n_2 är antalet av de resp. arterna

$f(n_1, n_2)$ är en funktion av n_1 och n_2

a_1 , b_1 , a_2 och b_2 är konstanter

Om man sätter in i ekvation (6.5) resp. ekvationssystem (6.6)

$$f(n) = n$$

resp.

$$f(n_1, n_2) = n_1 \pm \frac{c_1}{b_1} \cdot n_2$$

där

c_1 är en konstant

får man samma struktur som i ekvation (4.4 sid. 16) (hämtad ur Odum: "Fundamentals of Ecology") Kanske kan ett annat val av dessa funktioner ge bättre anpassning till mätdata.

De svagheter som nämnts (sid. 38-39) leder också till nya matematiska ansatser t.ex. beträffande dynamik i växternas upptagning av när-salter och beträffande syret. Jag går dock inte närmare in på detta.

METODENS ANVÄNDBARHET

Är metoden med matematiska modeller för ekologiska system användbar, dvs. kan syftet (punkt 1, 2 och 3 nedan, jfr. sid. 2-3) uppfyllas?

- 1) hjälpa till att skapa bättre förståelse för hur ekologiska system fungerar.

- 2) göra biologernas argument starkare, när de hävdar balansen i naturen mot industriella och andra intressen som orsakar miljöförstöring.
- 3) hjälpa till att planera lämpliga ingrepp för att restaurera förstörd natur.

Det är för tidigt att ge ett klart svar på den frågan.

Det som skulle kunna tala mot användbarheten är

- I) dels svårigheterna att beskriva de komplicerade ekologiska sambanden med matematiska modeller, så att man kan förutsäga ekologiska förlopp, som blir följderna av komplicerade kombinationer av ett stort antal orsaker, och inte bara de mest elementära naturfenomenen.
- II) dels svårigheterna med själva modellbyggandet, att få till parametrarna o.dyl. så att det ger vettiga resultat (detta tar mycket längre tid än att sätta upp ett system av differentialekvationer.)
- III) dels (beträffande delsyfte 2 ovan) risken att de som bestämmer struntar i naturens krav, trots bra matematiska modeller och simuleringar, som visar konsekvenserna. Detta gäller politiska aspekter, som jag inte skall spekulera i här. Det ligger utanför ramen av examensarbetet. Däremot anser jag det vara väsentligt för oss alla som människor att inte försumma dylika problem.

Det finns emellertid också saker som talar för metodens användbarhet:

- I) Det har ändå lyckats att få fram kurvor, som beskriver vissa huvuddrag i några ekologiska variabler (inte bara i detta examensarbete utan av flera forskare i USA).
- II) Intresset och förhoppningarna från många ekologers sida är stort. Visserligen kan förhoppningarna vara överdrivna; en del ekologer tror mindre på matematik; men det finns många ekologer som verkligen vill pröva möjligheten.
- III) Intresset för biologiska problem bl.a. matematiska modeller i ekologi från den tekniska, systemanalytiska sidan tycks också vara stort både bland teknologer och bland lärare och forskare vid institutioner som t.ex. reglerteknik (LTH) och matematik (KTH). Om därigenom ett flertal personer kommer att syssla med matematiska modeller i ekologi kan man kanske uppväga de svårigheter som det tidskrävande arbetet enligt nackdel II medför.

Eftersom jag ännu inte kan svara på om metoden kan uppfylla syftet

blir min slutsats därför att en regäl och intensiv satsning på detta område är önskvärd.

Skulle metoden inte visa sig användbar, är det bra att snabbt komma till klarhet i det, så man kan finna nya vägar. Ju fler som går in för problemet nu desto snabbare kan man bedöma saken.

Däremot tror jag att chansen är mycket stor, att metoden (åtminstone delvis) skall kunna uppfylla sitt syfte. Också i detta fall är det bättre ju fler som går in för detta problem, så att metodens möjligheter verkligen utnyttjas för att uppnå ovannämnda syfte.

UPPFÖLJNING

För min egen del kommer jag att arbeta på ett forskningsarbete på "Matematiska modeller för analys och planering av vattensystem" vid Forskningsgruppen för planeringsteori, Matematiska institutionen, KTH Stockholm under c:a ett år. Detta examensarbete går helt inom ramen för detta arbete.

Institutionen för reglerteknik, LTH, Lund, kommer att följa upp tillämpbarheten av systemanalytiska metoder inom ekologi dels via fortsatt samarbete med ekologer och dels via examensarbeten.

Examensarbeten kan t.ex. gå ut på att undersöka några av de andra ansatser som antytts här (i avsnittet "Alternativa modeller"), att mer systematiskt anpassa parametrar till mätvärden från Trummen eller någon annan sjö (fler mätvärden från Trummen kommer ju efterhand, se kapitel 2), att pröva modeller för andra ekosystem än sjöar t.ex. (naturliga ekosystem som) gräsmark, skog eller (kulturmarksekosystem som) åker, att formulera och pröva modeller för de saker jag bortsett från här (se avsnittet "Svagheter i modellen").

Samarbetet med ekologer är hela tiden viktigt så att resultaten inte blir biologiskt orimliga. Man kan bl.a. sikta på att gemensamt finna ut vad biologerna bör mäta.

Seminarier av olika slag vore värdefulla för att diskutera sådana problem som behandlats här. (Jag hoppas kunna medverka även sedan jag 4/10-70 flyttar till Stockholm för ett år. Min adress kommer att finnas på institutionen för reglerteknik, LTH, Lund.)

7. REFERENSER

En god introduktion till ekologi finns i SOU 1967: 43 Miljövarldsforskning I. (statlig utredning) (239 sid.) (7)
Den lägger tonvikten på luft- och vattenföroreningar, biocider och andra gifter, men ger också som bakgrund en beskrivning av hur luft, vatten och mark fungerar normalt, både de fysikaliska (t.ex. luftströmmar) och de biologiska förhållandena. Den innehåller ett flertal tabeller t.ex. över förekomst av biocidrester i mat. Man finner många skrämmande uppgifter i boken.

Föregående bok innehåller således en del som ligger lite vid sidan om den egentliga ekologin. En mer direkt och mycket bra introduktion till ekologi är

Eugene P. Odum: "Samspelet i naturen", W & W, 1969 (184 sid.) (7)
Den innehåller bl.a. energiflöde och metabolism, biogeokemiska kretslopp, begränsande faktorer, ekologisk reglering.

En mer kortfattad introduktion till ekologi återfinns i "7 Föredrag om miljövard" arrangerad av Teknologsammanslutningen vid Lunds Tekniska Högskola, 1969, (98 sid.) (6)
Också andra aspekter på miljöförstöring och världsförsörjning återfinns där. Tyvärr baseras kompendiet på anteckningar från föreläsningarna, varför de inte är så fullständiga, t.ex. på ekologi saknas en figur, som dock återfinns här: fig. 1.b)

Beträffande världsförsörjningen, de globala ekologiska aspekterna, vill jag fästa uppmärksamheten på:

Georg Borgström: "Gränser för vår tillvaro", 1964, reviderade upplagor 1967 och 1969. (315 sid.) (7)

Den har visserligen kritiserats främst för sin svartmålning. Jag finner den inte i huvudsak pessimistisk utan att den anvisar en väg tillbaka till verkligheten.

Listan över populärvetenskaplig litteratur, som behandlar miljöförstöring o.dyl. kunde göras lång, men sådan litteratur är inte alls svår att finna för den intresserade. Här skall i fortsättningen i stället redovisas vetenskapliga uppsatser och böcker främst på engelska.

En mycket bra beskrivning av de grundläggande ekologiska förhållandena finns i

Eugene P. Odum: "Fundamentals of Ecology",

Den innehåller utredningar om vissa matematiska samband, som använts i den matematiska modellen i detta examensarbete (se kapitel 4).

I USA har tendensen till samarbete mellan ekologer och systemanalytiker gått längre än här i Sverige. Utvecklingen går dock mycket snabbt på detta område. Hur långt man hunnit i USA för tre år sedan framgår av

Kenneth E.F. Watt (Edt): "System Analysis in Ecology", Academic Press 1967, London & New York (1)

Flera vetenskapsmän har bidragit i denna bok. Direkta matematiska modeller finns endast antydda.

En ny bok av samme författare i samma ämne har utkommit två år senare och den är således mer aktuell. (3)

Tillämpning av systemanalys inom ekologi (huvudsakligen på bildmodellstadiet) på olika delproblem redovisas i diverse uppsatser:

Gore, Olson: "Preliminary models for accumulation of organic matter" (3)

J.S. Russel: "Estimation of the Time Factor in Soil Organic Matter Equilibration under Pastures", ur Trans. Intern. soc. of Soil Science Joint Meeting om Comm. IV & V, International Soil Conf. Soil Bureau P.B. New Zealand. (3)

John M. Teal: "Community Metabolism in a Temperate Cold Spring" (nr 397)(4)

Cummins: "Predicting Variations in Energy Flow Through a Semi-Controlled Lotic Ecosystem", (nr 1134) (4)

Neuman: "Preliminary estimation of energy flow in Uganda kob" 1967 (4)

Kenneth W. Cummins, William P. Coffman, Peter A Roff: "Trophic relationship in a small woodland stream", V. Running Waters. (nr 867) (4)

Folke Andersson: "An Ecosystem Approach to Vegetation, Environment and Organic Matter of a Mixed Woodland and Meadow Area", Lund 1970 (3)

-- "Ecological Studies in a Scanian Woodland and Meadow Area, Southern Sweden." II. "Plant Biomass, Primary Production and Turnover of Organic Matter". Botaniska notiser, vol. 123: 8-51 (3)

Hubert Caspers: "Stoffwechseldynamische Gesichtspunkte zur Definition der Saprobitätsstufen". Verh. Internat. Verein. Limnol., Stuttgart 1966 (2)

Den sistnämnda beskriver en sjös utveckling från näringsfattig och ren till näringsrik och starkt förorenad.

Man har dock gjort en del med matematiska modeller. En mycket intressant uppsats som visar detta är

Patrick Lee Brezonik: "Application of Mathematical Models to the Eutrophication Process", Gainesville Florida, 1968 (5)

Den beskriver huvudsakligen en lineär matematisk modell med sju tillståndsvariabler för en sjö och visar några resultat som erhållits med den.

Värdefull teori om växternas produktion (fotosyntes m.m.), hur den varierar under olika förhållanden. finns i

D.F. Westlake: "Theoretical aspects of the Comparability of Productive Data". Mem. Ist. Ital. Idrobiol. 18 Suppl. 313-322. 1965 (2)

och i

D.F. Westlake: "Some Basic Data för Investigations of the Productivity of Aquatic Macrophytes" (2)

"Nordisk Hydrologisk Konferens". Stockholm 27-29 aug. 1970. Lund 1970.

3 Volymer

innehåller uppsatser, föredrag och diskussionsinlägg från denna konferens om urbaniseringens inverkan på vattenbalansen, hydrologiska problem i samband med regional vattenförsörjning, vattendrags hydrologi ur förorenings synpunkt, nya metoder för mätning och analys inom hydrologi.

Vid konferensen bildades "Nordisk Hydrologisk Förening" vars ordförande blev Gunnar Lindh, Inst för Vattenbyggnad, LTH, Lund

En bred översikt över allt vetande om gräsmarksekosystem är

Ralph L. Dix, Richard G. Biedleman: "The Grassland Ecosystem" Colorado 1969 (3)

Av speciellt intresse för sökandet efter matematiska modeller är den första och sista uppsatsen:

Den förra utreder allmänt system av lineära differentialekvationer för att beskriva ekosystem. Modellen kan dock utvidgas till olineära.

Också matematiska samband för fotosyntesen diskuteras.

Den senare tillämpar detta på ett något mer konkret sätt, bl.a. sätts allmänna ekvationer upp, varav Odums ekvation (se sid. 13) kan ses som ett specialfall.

Matematiska modeller behandlas bra också i
George M. Van Dyne: "Grasslands Management, Research, and Training
 Wiewed in Systems Context" (3)

Sambandet mellan en utförlig bildmodell (fig. 1.c, sid.9) och ekvationssystem är här mycket påtagligt och lätt att följa.

Slutligen skall nämnas en del material om Trummenprojektet. ~~Ruz~~ Rubrikerna talar för sig själva:

"Trummen-projektet - en kort presentation" (stencil) (2)

Ulf Lettevall: "Den kulturpåverkade sjön Trummen, Historik och utvecklingstendenser". Meddelanden från Forskningsgruppen för sjörestaurering vid Lunds Universitet, nr 24 (2)

Andra resultat finns eller kommer att publiceras som stenciler i ovan nämnda serie "Meddelanden ..." och kan erhållas genom Limnologiska institutionen eller någon annan av de institutioner som deltar i Trummen-projektet.

"Teknik & Miljö" nr 6/1970 (2)

innehåller en presentation av Trummen-projektet. En del restaureringsingrepp visas på fotografier. Tidskriften innehåller också i övrigt mycket intressant material om miljövårdsfrågor.

Ytterligare litteraturreferenser finns i ovannämnda böcker.

 Noterna anger var man kan få tag på resp. bok, särtryck eller stencil. Ofta finns det flera möjligheter, men jag anger den utväg jag använt mig av. Dessa uppgifter är med för att underlätta för kommande examensarbetare.

- (1) Universitetsbiblioteket, Lund, beställt från Göteborg
- (2) Ulf Lettevall, Limnologiska inst., Lund
- (3) Folke Andersson, Inst, för ekologisk botanik, Lund
- (4) Staffan Ulfstrand, Zoologiska inst., Lund
- (5) Torsten Ahl, Limnologiska inst., Uppsala
- (6) TLTH:s kompendieförsäljning. (7) Vanlig bokhandel

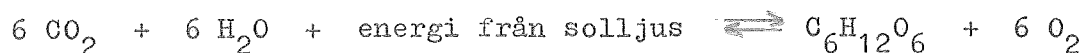
APPENDIX 1:

K O R T I N T R O D U K T I O N T I L L E K O L O G I

Organismerna i naturen lever i ^{en} sinnrikt uppbyggd växelverkan med varandra och sin omgivning. Läran om detta kallas ekologi. Ett centralt begrepp är ekosystem. Det kan definieras som hela det komplex av organismer och omvärldsfaktorer, som ingår i en ekologisk enhet av vilket slag som helst. Ekosystemet består både av en levande (biotisk) del och en icke-levande (abiotisk) del.

De olika ämnena ingår i ett sinnrikt konstruerat kretslopp, där komplicerade ämnen byggs upp av enkla, bryts ner till enkla igen, byggs upp igen osv. Detta kretslopp hålls vid liv med hjälp av den solenergi som ständigt når jorden. När störningar inträffar sätter naturen in en rad försvarsåtgärder som strävar efter att återställa balansen.

De gröna växterna producerar enkla organiska ämnen (enkla sockerarter) av de båda oorganiska ämnena vatten och koldioxid samt energi från solljus genom fotosyntesen (förenklad formel):



Denna reaktion kräver som katalysator (ett ämne som inte förbrukas men är nödvändigt för reaktionen) klorofyll, ett ämne (med grön färg), som finns i just gröna växter (särskilt i bladen).

Reaktionen går också åt andra hållet nämligen vid andningen (utom temporärt nattetid). Det är genom fotosyntesen som vi människor (och andra djur) får syre för andningen.

Av de så bildade enkla organiska ämnena tillsammans med oorganiska salter bygger växterna upp alltmer komplicerade organiska ämnen främst kolhydrater (stärkelse, socker, cellulosa), fetter och äggviteämnen (protein), men även t.ex. vitaminer.

De gröna växterna kallas producenter. De ätes av djur, som kallas konsumenter. I allmänhet ätes dessa djur i sin tur av andra djur (sekundärkonsumenter till skillnad från växtätare som kallas primärkonsumenter) ofta i flera led. Människan befinner sig nästan alltid i slutet av sådana näringskedjor vare sig vi äter växter eller djur. När växter och djur dör förmultnar de, dvs, de ätes upp av destruenter t.ex. bakterier och svampar. Därvid bryts de organiska ämnena ner till oorganiska ämnen igen.

Producenter, (primär- och sekundär-)konsumenter och destruenter utgör ett ekosystems biotiska del.

Den abiotiska delen av ett ekosystem består av energiinstrålning, nederbörd och vattenomsättning i övrigt, vind- och strömförhållanden, temperatur, närsalttransport och -koncentration, jordens karaktär, berggrund m.m. Många sådana omgivningsfaktorer varierar med årstiderna, men brukar återkomma med ungefär samma värden varje år. Naturliga ekosystem är nästan alltid stabila. Det är endast under tidsrymder av årtusenden som irreversibla förändringar i naturliga ekosystem sker. Många ingrepp av människor medför dock förändringar i dylika omgivningsfaktorer, vilket ofta får mycket allvarliga följder för ekosystemet.

Fotosyntesens storlek beror i hög grad av omgivningsfaktorer. En del organismer tål stora variationer och en del endast mycket små variationer i omgivningsfaktorerna. Däri ligger en del av orsaken till att till synes små ingrepp kan få förödande konsekvenser.

Huvudmomenten i vattnets naturliga kretslopp är: faller ner som regn, varav en del avdunstar antingen direkt eller från växternas blad sedan det passerat växternas näringssystem; resten rinner ut i sjöar och floder och så småningom till havet; också från hav och sjöar avdunstar vatten; avdunstningen gör att regnmoln bildas, varav en del drivar in över land från haven och sedan faller regn både över land och vatten. Den mängd vatten som kretsar runt är begränsad, men återkommer ungefär konstant år efter år.

Detta om begränsning och regelbunden återkomst gäller allt i naturen. Visserligen sker naturliga förändringar, t.ex. växer sjöar igen, men det går oerhört långsamt jämfört med de förändringar som åstadkoms av olika ingrepp av människor.

APPENDIX 2:

K O R T I N T R O D U K T I O N T I L L R E G L E R T E K N I K

Reglerteknik är ett ämne som kan tillämpas på de mest skilda områden även om det mest tillämpats i tekniska sammanhang.

I reglerteknik betraktar man något slag av system (S) (innehållande olika tillståndsvariabler) och någon form av (en eller flera) insignaler (u) till systemet och (en eller flera) utsignaler (y) från detta system. Det är mycket

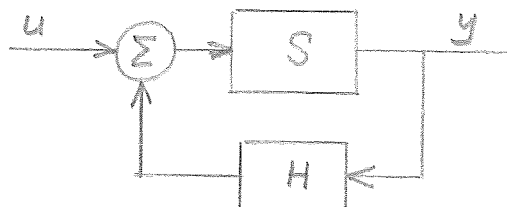


fig. A 2: 1

vanligt att en utsignal genom ett annat system (H) återkopplas på en insignal (se fig. A 2: 1). Man kan även betrakta det ursprungliga systemet och återkopplingssystemet tillsammans som ett nytt system.

Exempel på teknisk tillämpning: I en ångmaskin (system) minskar varvtalet (utsignal) om belastningen (insignal eller störning) ökar. Genom vissa typer av återkoppling på ångflödet (insignal) kan man få varvtalet att automatiskt återgå till det ursprungliga värdet oberoende av belastningen. Man har då ett stabilt system.

I ett ekologiskt system kan t.ex. omgivningsfaktorer såsom temperatur betraktas som insignal och t.ex. biomassan som utsignal.

Om systemet kan beskrivas av ett system av matematiska samband t.ex. differentialekvationer, kan reglertekniskt samspråk användas. Med vissa metoder kan t.ex. frågor om stabilitet behandlas.

Ett viktigt hjälpmedel är analogmaskin. Med hjälp av elektronisk apparatur kan lösningar till komplicerade matematiska samband erhållas på några sekunder eller möjligen minuter i form av kurvor i diagram.

Den tiden gäller endast själva simuleringen. Förberedelserna och arbete med själva analogmaskinen innan man får vettiga resultat tar åtskilligt längre tid än så.

Man kan också använda datamaskin. Analogmaskinen har dock den fördelen att man kan ändra parametrarnas värden bara genom att vrida på rattar och snabbt få fram nya kurvor.

Att lösa system av differentialekvationer för hand utan varken analogmaskin eller datamaskin är i allmänhet inte möjligt. Med stor vana är det däremot ofta möjligt att bedöma ungefär hur lösningen ser ut.

APPENDIX 3

DOKUMENTATION ÖVER ANALOGIMASKIN -
KÖRNINGAR

Nedanstående system simulerades

$$\frac{dx_1}{dt} = r_0 \cdot \max\left\{0; \left[1 - \frac{(u_1 - T_m)^2}{(\Delta T/2)^2}\right]\right\} \cdot x_1 - \frac{r_0}{K_0} \cdot x_1^2 + C_0 \cdot x_1 \cdot N_0 \cdot \frac{u_2}{L_0}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = d \cdot x_1 - C_2 \cdot x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = r_0 \cdot \max\left\{0; \left[1 - \frac{(u_1 - T_m)^2}{(\Delta T/2)^2}\right]\right\} \cdot x_3 - \frac{r_D}{K_D} \cdot x_3^2 + C_3 \cdot x_2 \cdot x_3$$

med insignalerna

$$u_1 = T_1 + \frac{\Delta T_1}{2} \cdot \sin(wt - wt_0)$$

$$u_2 = L_1 + \frac{\Delta L_1}{2} \cdot \sin(wt)$$

där

x_1	=	gröna växter i hela sjön,	dimension:	ton C
x_2	=	döda växter " " "	"	ton C
x_3	=	destruenter " " "	"	ton C
u_1	=	temperatur i vattnet	"	°C
u_2	=	solenergi, absorberad solenergi per tidsenhet för hela sjön	dimension:	$10^6 \cdot \text{kcal/dygn}$
t	=	tid	"	dygn

Insättning av parametervärden ger

$$\frac{dx_1}{dt} = 0,23 \cdot \max\left\{0; \left[1 - \frac{(u_1 - 25)^2}{(20)^2}\right]\right\} \cdot x_1 - \frac{0,23}{24} \cdot x_1^2 + 0,1 \cdot 0,107 \cdot x_1 \cdot u_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0,11 \cdot x_1 - 9,9 \cdot x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 0,23 \cdot \max\left\{0; \left[1 - \frac{(u_1 - 25)^2}{(20)^2}\right]\right\} \cdot x_3 - \frac{0,23}{0,3} \cdot x_3^2 + 0,005 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$u_1 = 10 + 10 \cdot \sin(0,0172 \cdot (t-30))$$

$$u_2 = 10 + 10 \cdot \sin(0,0172 \cdot t)$$

Skalning: maskinvariabel $(\alpha \cdot x) =$ skalfaktor $(\alpha) \cdot$ problemvariabel (x)

Skalning ger

$$\frac{d(\alpha_1 x_1)}{d(\beta t)} = \frac{\alpha_1}{\beta} \cdot r_0 \cdot \max\left\{0; \left[1 - \left(\frac{u_1 - T_m}{\Delta T/2}\right)^2\right]\right\} \cdot \frac{(\alpha_1 x_1)}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{\beta} \cdot \frac{r_0}{K_0} \cdot \frac{(\alpha_1 x_1)^2}{\alpha_1^2} + c_0 \cdot \frac{N_0}{L_0} \cdot \frac{(\alpha_1 x_1)}{\alpha_1} \cdot \frac{(\alpha_6 u_2)}{\alpha_6}$$

$$\frac{d(\alpha_2 x_2)}{d(\beta t)} = \frac{\alpha_2}{\beta} \cdot d \cdot \frac{(\alpha_1 x_1)}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{\beta} \cdot c_2 \cdot \frac{(\alpha_3 x_3)}{\alpha_3}$$

$$\frac{d(\alpha_3 x_3)}{d(\beta t)} = \frac{\alpha_3}{\beta} \cdot r_D \cdot \max\left\{0; \left[1 - \left(\frac{u_1 - T_m}{T/2}\right)^2\right]\right\} \cdot \frac{(\alpha_3 x_3)}{\alpha_3} - \frac{\alpha_3}{\beta} \cdot \frac{r_D}{K_D} \cdot \frac{(\alpha_3 x_3)^2}{\alpha_3^2} + \frac{\alpha_3}{\beta} \cdot c_3 \cdot \frac{(\alpha_2 x_2)}{\alpha_2} \cdot \frac{(\alpha_3 x_3)}{\alpha_3}$$

$$(\alpha_5 u_1) = \alpha_5 \cdot T_1 + \alpha_5 \cdot \frac{\Delta T_1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\omega}{\beta} (\beta t - \beta t_0)\right)$$

$$(\alpha_6 u_2) = \alpha_6 \cdot L_1 + \alpha_6 \cdot \frac{L_1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\omega}{\beta} (\beta t)\right)$$

Den temperaturberoende faktorn skalas till:

$$\alpha_4 \cdot \max \left\{ 0; \frac{\left[\alpha_7 \cdot 1 - \alpha_7 \cdot \frac{\left(\frac{1}{\alpha_5}\right)^2 \cdot (\alpha_5 u_1 - \alpha_5 T_m)^2}{(\Delta T/2)^2} \right]}{\alpha_7} \right\}$$

α_4

Att denna skalning kan göras för sig beror på att α_4 satts till 1.

Variablerna har maximivärden enligt nedan. Skalfaktorerna erhålles ur sambandet:

skalnfaktor \cdot maximivärde $\leq 1,0000$ maskinenhet (= 100 volt)
 (Noggrannheten blir större med största möjliga skalfaktorer, dvs. om man utnyttjar så stor del av maskinenheten som det är möjligt utan att någon förstärkare blir överstyrd, dvs. hamnar på mer än 100 volt.)

Variabel	Ungefärligt maximivärde	Skalfaktor
x_1	45	$\alpha_1 = 0,02$
x_2	33	$\alpha_2 = 0,025$
x_3	0,5	$\alpha_3 = 2$
u_1	20	$\alpha_5 = 0,04$
T_m	25	$\alpha_5 = 0,04$
u_2	20	$\alpha_6 = 0,05$
$\max \left\{ 0; \left[1 - \frac{(u_1 - T_m)^2}{(\Delta T/2)^2} \right] \right\}$	1	$\alpha_4 = 1$
1 (se temperaturberoende faktorn ovan)	1	$\alpha_7 = 1$

Tidsskalning

365 tidsenheter i problemet bör ta ca 20 sekunder i maskiner.

Välj $\beta = 0,05$

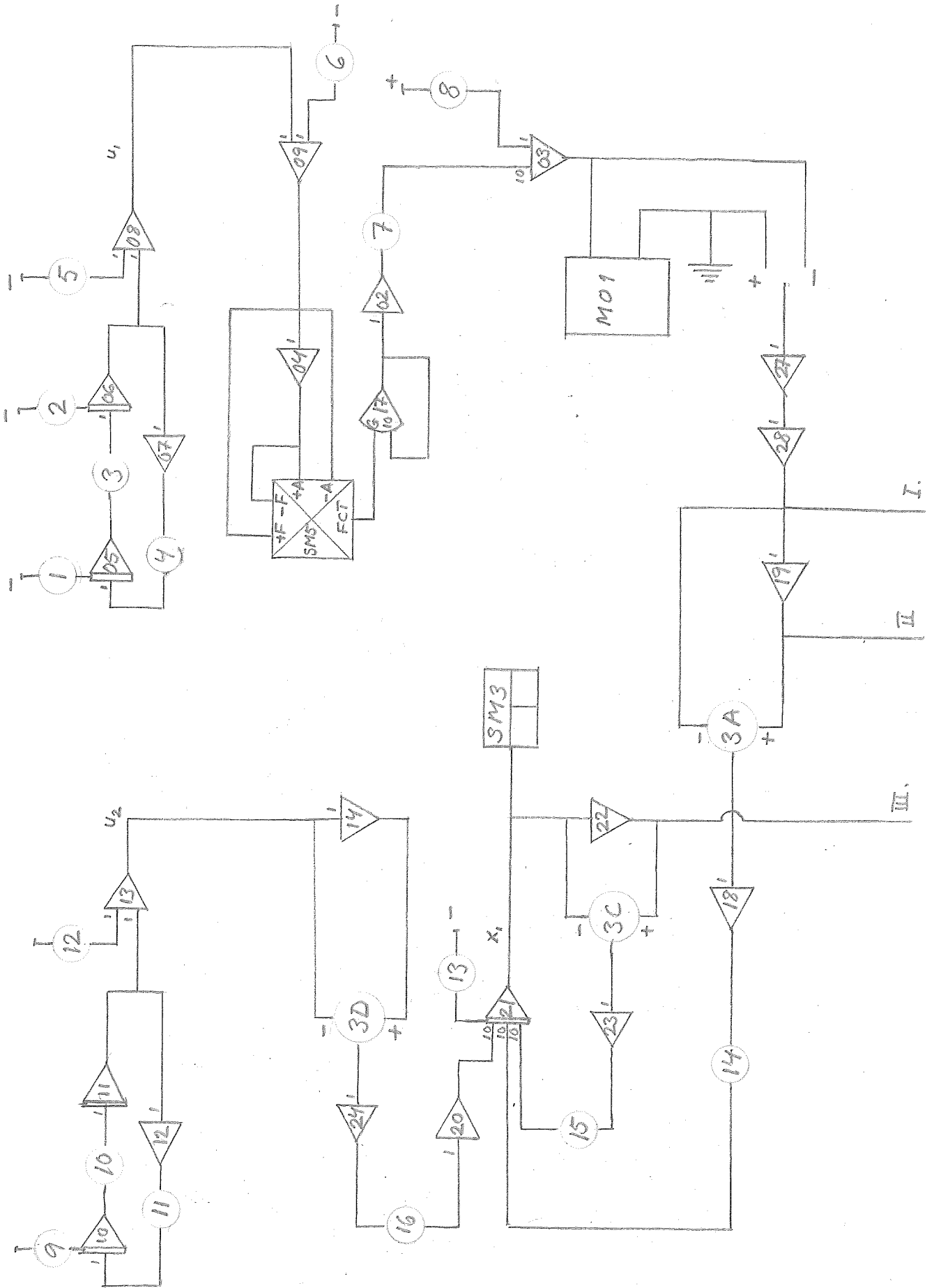
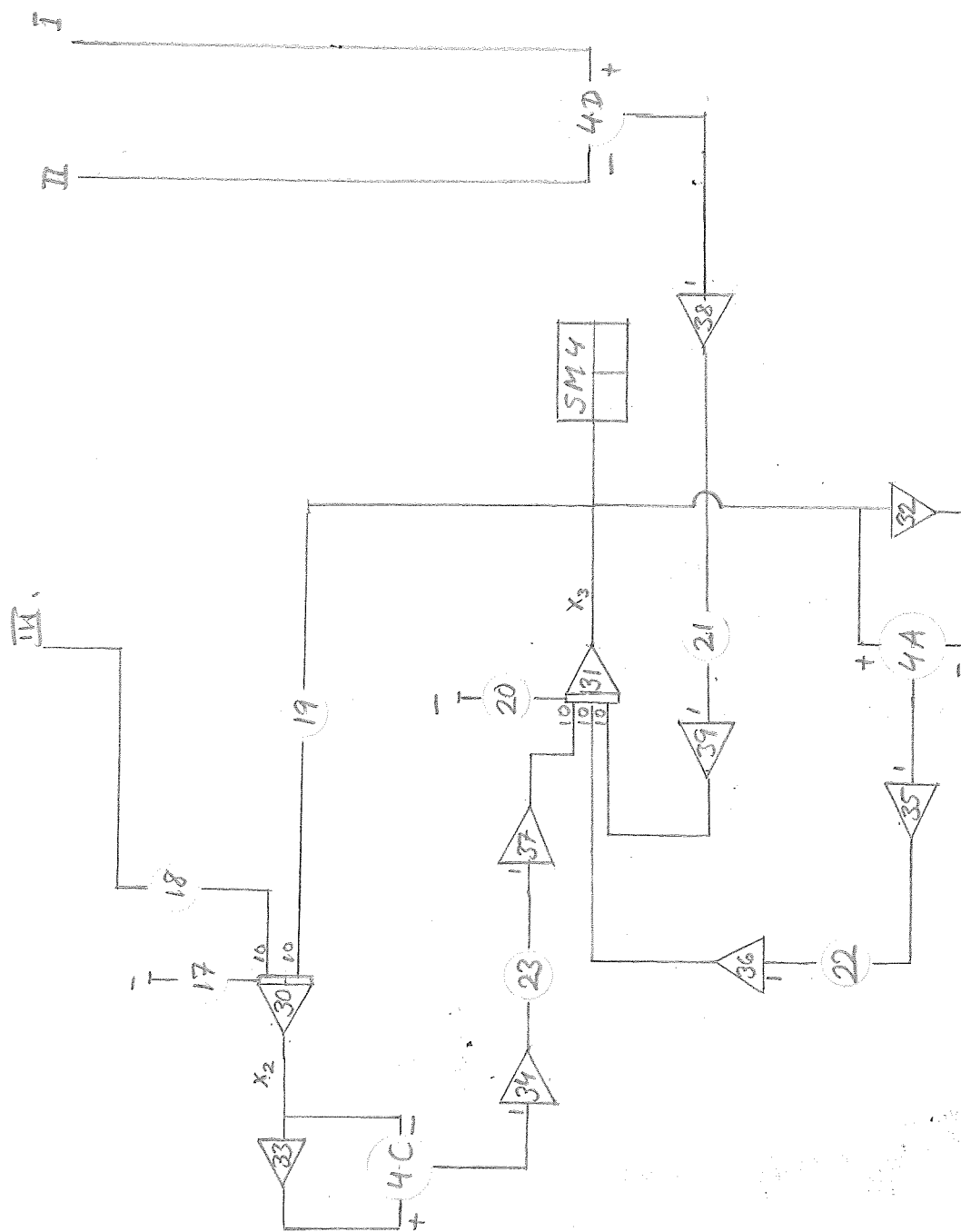


Fig. A 3: 1. Kopplingschema för körning på analogmaskin
av x_1 , x_2 och x_3 sammankopplade.

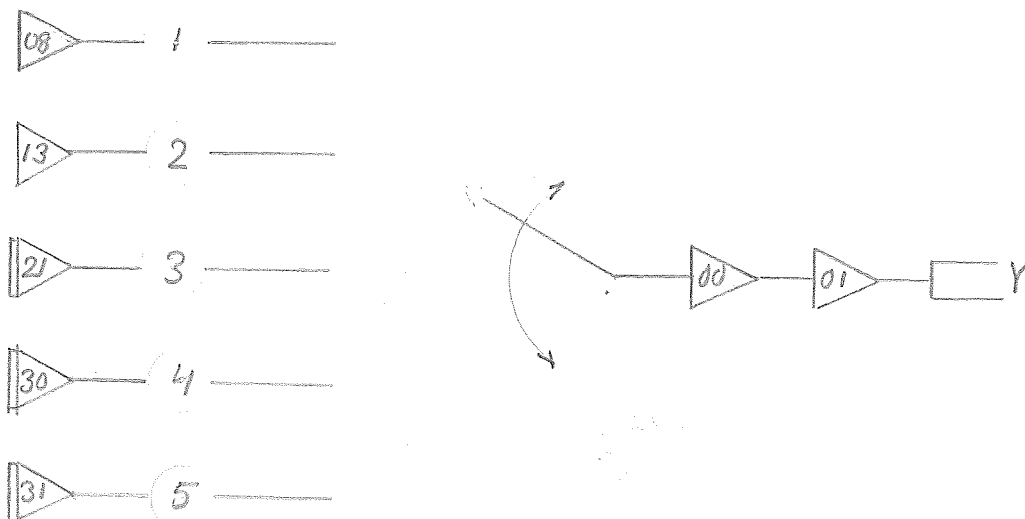
Föregående sida hör till denna figur så att de ställen
som markerats med I, II resp. III kopplas ihop med mot-
svarande på detta sida.



Skalfaktorer tillsammans med parametervärdena ger följande potentio-
meterlista

Pot beteckning	Pot. nr.	Fysikalisk betydelse	Inställning
P 05	1	$\alpha_5 \cdot (\Delta T_1/2) \cdot \cos(-\omega t_0)$	0.3480
P 06	2	$-\alpha_5 \cdot (\Delta T_1/2) \cdot \sin(-\omega t_0)$	0.1980
Q 05	3	w/β	0.3440
Q 07	4	w/β	0.3440
Q 08	5	$\alpha_5^T T_1$	0.4000
Q 09	6	$\alpha_5^T T_m$	1.0000
P 02	7	$\alpha_7 / ((\Delta T/2)^2 \cdot \alpha_5^2 \cdot 10)^{-1}$	0.1563
P 03	8	$\alpha_7 \cdot 1$	1.0000
P 10	9	$\alpha_6 \cdot (L_1/2)$	0.5000
Q 10	10	w/β	0.3440
Q 12	11	w/β	0.3440
Q 14	12	$\alpha_6 \cdot L_1$	0.5000
P 21	13	$\alpha_1 x_1(0)$ med $x_1(0)=12,5$	0,2500
Q 20	14	$(\alpha_1/\beta) \cdot r_0 \cdot (1/\alpha_1)$	0.4600
Q 21	15	$(\alpha_1/\beta) \cdot (r_0/K_0) \cdot (1/\alpha_1^2)$	0.9590
P 24	16	$(\alpha_1/\beta) \cdot (C_0 \cdot N_0/L_0) \cdot (1/\alpha_1 \alpha_6)$	0.4280
Q 32	17	$\alpha_2 x_2(0)$ med $x_2(0)=18,8$	0.4700
Q 30	18	$(\alpha_2/\beta) \cdot d \cdot (1/\alpha_1)$	0.2750
P 30	19	$(\alpha_2/\beta) \cdot C_2 \cdot (1/\alpha_3)$	0.2475
Q 31	20	$\alpha_3 x_3(0)$ med $x_3(0)=0,125$	0.2500
Q 38	21	$(\alpha_3/\beta) \cdot r_D \cdot (1/\alpha_3)$	0.4600
Q 36	22	$(\alpha_3/\beta) \cdot (r_D/K_D) \cdot (1/\alpha_3^2)$	0.7670
Q 34	23	$(\alpha_3/\beta) \cdot C_3 \cdot (1/\alpha_3 \alpha_2)$	0.4000

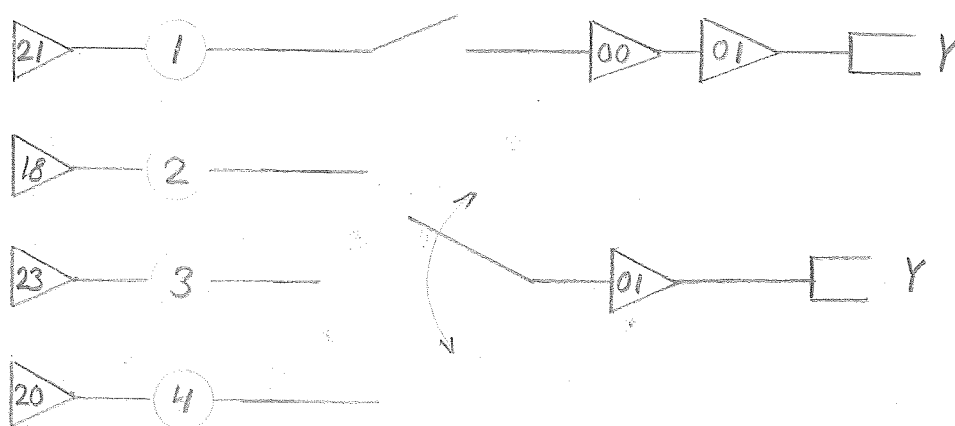
Variablerna varierade ofta uppåt 100 volt. Då skrivaren inte kunde ta mer än 10 volt/cm, skulle man inte kunna få lagom små figurer (se fig. 11 - 14) om man inte minskar signalen via en potentiometer innan den går in på skrivaren. För att inte belasta potentiometern för mycket måste man gå via förstärkare innan man går in på skrivaren. Körningarna till fig. 11.



Potentiometerlista:

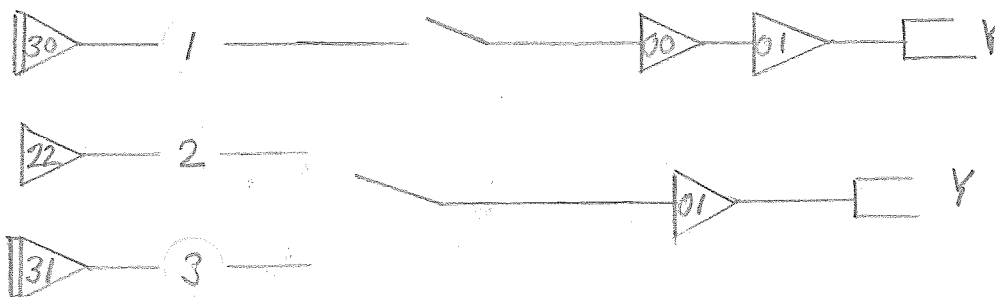
Pot. beteckn.	Pot. nr.	Variabel som förminskas	Inställning
P 08	1	u_1	0.2500
P 13	2	u_2	0.2000
P 11	3	x_1	0.5000
P 12	4	x_2	0.4000
P 14	5	x_3	0.2000

Körningar för fig. 12



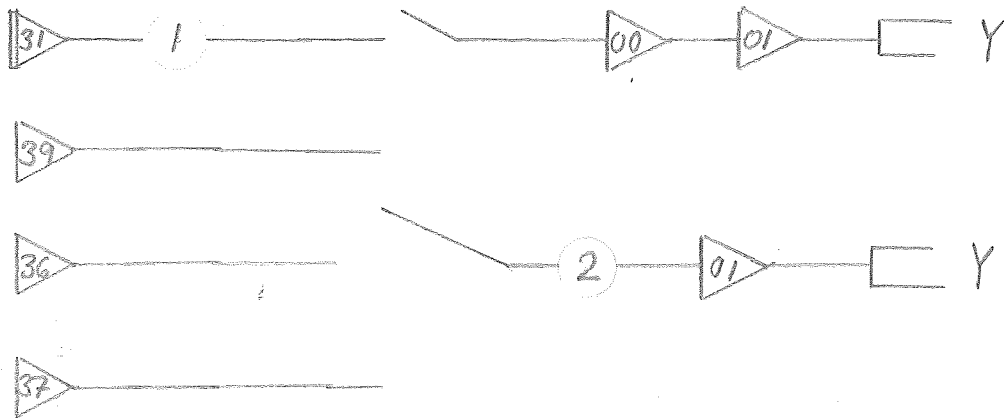
Pot. beteckn.	Pot. nr.	Variabel som förminskas	Inställning
P 11	1	x_1	0.5000
P 18	2	$r_o \cdot \max 0; 1 - \frac{(u_1 - T_m)^2}{(T/2)^2} \cdot x_1$	0.2300
P 23	3	$- (r_o / K_o) \cdot x_1^2$	0.4795
P 20	4	$C_o \cdot (N_o / L_o) \cdot x_1 \cdot u_2$	0.5000

Körningar för fig. 13:



Pot. beteckn.	Pot. nr.	variabel som minskas	Inställning
P 12	1	x_2	0.4000
P 22	2	$d \cdot x_1$	0.5500
P 14	3	$- C_2 \cdot x_3$	0.4950

Körningar för fig. 14:



Pot. beteckn.	Pot. nr.	Variabel som minskas	Inställning
P 14	1	x_3	0.5000
Q 00	2	termer i diff.ekv. för x_3	0.5000

Tidsramp:



Ställ in Q 15 på 0.0100

Dokumentation över analogmaskinkörningar av fasporträtt

Nedanstående system simulerades. De erhållna fasporträtten visas i fig.
10. Variabler och parametrar har samma betydelse som tidigare.

$$\frac{dx_2}{dt} = d \cdot x_1 - C_2 \cdot x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = r_D \cdot \max \left\{ 0; \left[1 - \frac{(u_1 - T_m)^2}{(\Delta T/2)^2} \right] \right\} \cdot x_3 - \frac{r_D}{K_D} \cdot x_3^2 + C_3 \cdot x_2 \cdot x_3$$

där

x_1 och u_1 nu är konstanta

Insättning av parametervärden; och $x_1 = 45$ ton C och $u_1 = 20^\circ\text{C}$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0,11 \cdot 45 - 9,9 \cdot x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 0,23 \cdot 0,9375 \cdot x_3 - \frac{0,23}{0,3} \cdot x_3^2 + C_3 \cdot x_2 \cdot x_3$$

där

$C_3 = 0,005$ i fall a) och $C_3 = 0,01$ i fall b)

Skalning enligt samma principer som tidigare ger

$$\frac{d(\alpha_2 x_2)}{d(\beta t)} = \frac{\alpha_2}{\beta} \cdot d \cdot \frac{\alpha_1 x_1}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{\beta} \cdot C_2 \cdot \frac{\alpha_3 x_3}{\alpha_3}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\alpha_3 x_3)}{d(\beta t)} &= \frac{\alpha_3}{\beta} \cdot r_D \cdot \max \left\{ 0; \left[1 - \frac{(u_1 - T_m)^2}{(\Delta T/2)^2} \right] \right\} \cdot \frac{(\alpha_3 x_3)}{\alpha_3} - \frac{\alpha_3}{\beta} \cdot \frac{r_D}{K_D} \cdot \frac{(\alpha_3 x_3)^2}{\alpha_3^2} + \\ &+ \frac{\alpha_3}{\beta} \cdot C_3 \cdot \frac{(\alpha_2 x_2)}{\alpha_2} \cdot \frac{(\alpha_3 x_3)}{\alpha_3} \end{aligned}$$

Skalfaktorerna erhöles enligt samma principer som tidigare.

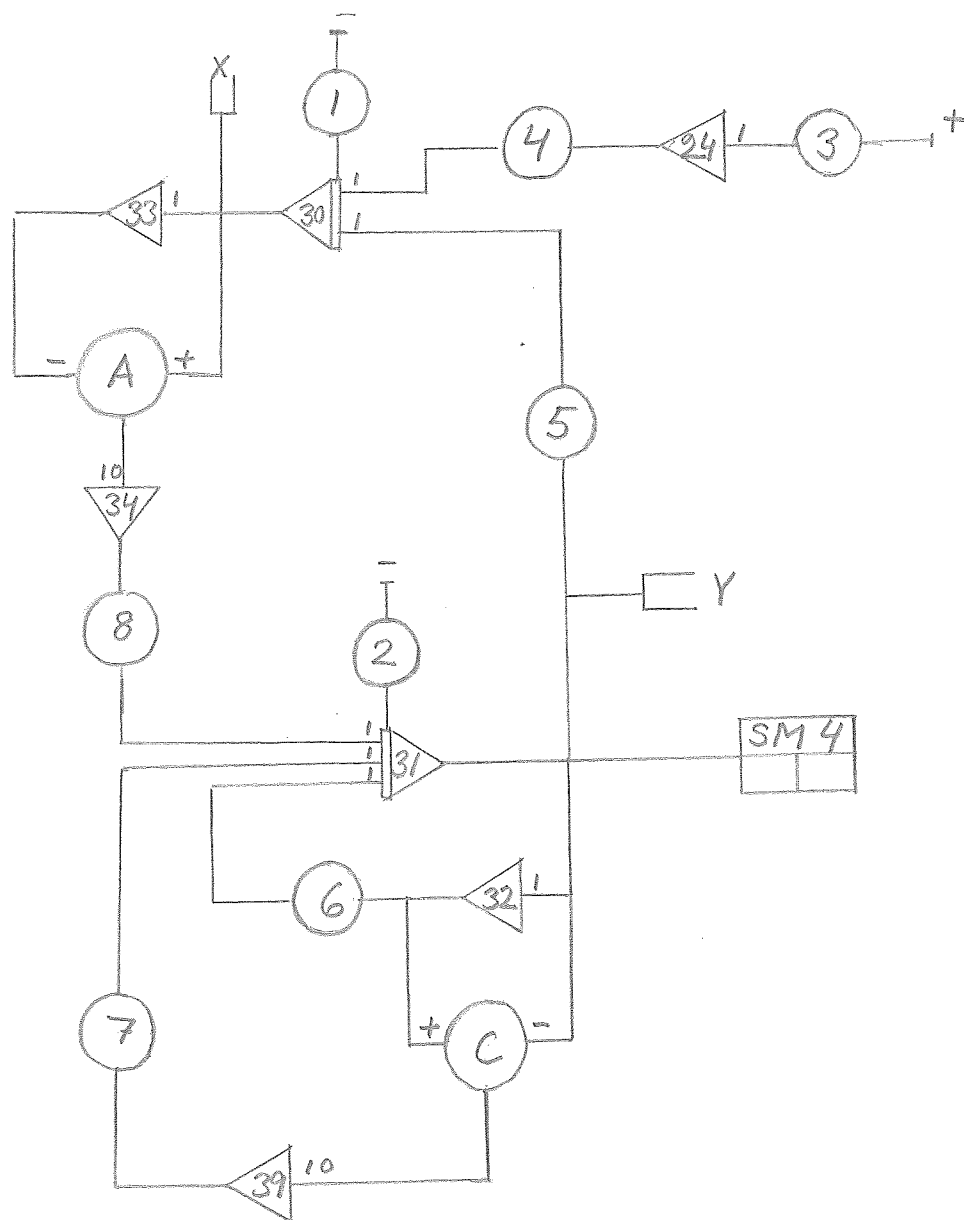
Variabel	Ungefärligt maximivärde	Skalfaktor
x_1	45	0,02
x_2	100	0,005
x_3	2	0,2

Tidsskalfaktorn valdes till $\beta = 0,5$ ty det intressanta tidsförloppet i fasplananalysen tar mycket kortare tid (problemtid) än årstidsvariationerna.

Skalfaktorerna tillsammans med tidigare angivna parametervärden och värden på x_1 och u_1 ger följande potetiometerlista

Pot. nr.	Pot. beteckning	Fysikalisk betydelse	Inställning
1	Q 30	$\alpha_2 x_2(0)$	$x_2(0) = 1$ 0,0050
			$x_2(0) = 10$ 0,0500
			$x_2(0) = 20$ 0,1000
			$x_2(0) = 50$ 0,2500
2	Q 31	$\alpha_3 x_3(0)$	$x_3(0) = 0,01$ 0,0020
			$x_3(0) = 0,1$ 0,0200
			$x_3(0) = 0,2$ 0,0400
			$x_3(0) = 1,0$ 0,2000
3	Q 24	$\alpha_1 x_1$	0,9000
4	P 24	$d \cdot (\alpha_2/\beta) \cdot (1/\alpha_1)$	0,0550
5	P 30	$C_2 \cdot (\alpha_2/\beta) \cdot (1/\alpha_3)$	0,4950
6	P 31	$r_D \cdot \max\left\{0; \left[1 - \frac{(u_1 - T_m)^2}{(\Delta T/2)^2}\right]\right\} \cdot (\alpha_3/\beta) \cdot (1/\alpha_3)$	0,4310
7	P 39	$(r_D/K_D) \cdot (\alpha_3/\beta) \cdot (1/\alpha_3^2) \cdot (1/10)$	0,7670
8	P 37	$C_3 \cdot (\alpha_3/\beta) \cdot (1/\alpha_2 \alpha_3) \cdot (1/10)$	0,2000 (fall a)
			0,4000 (fall b)

Kopplingschema över analogmaskinkörningar för fasporträtt

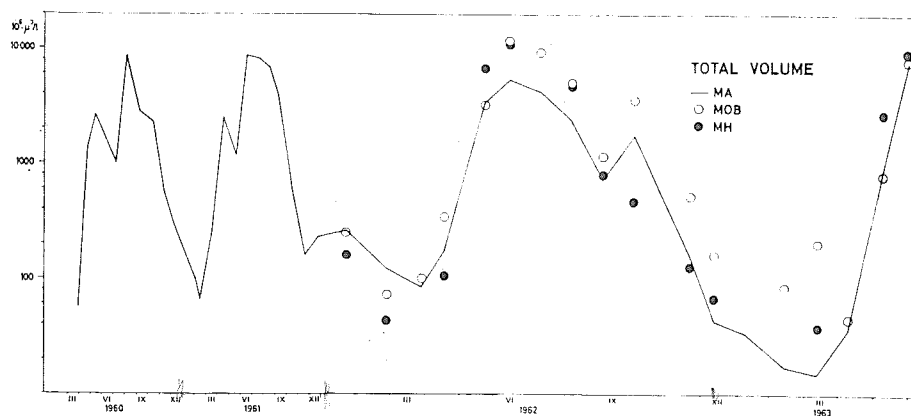


APPENDIX 4:

M Ä T D A T A

Det finns i och för sig en stor mängd mätdata, men som inte är adekvata för modeller. Adekvata mätdata fanns det inte alls så mycket som hade varit önskvärt. Det som fanns var värden för producenternas biomassa för en annan sjö, bruttoproduktionen i Trummen, biomassvärden för destruerter (aeroba heterotrofa bakterier i vattnet, och i sediment, anaeroba bakterier i sediment) i Trummen. Bakterievärdena är dock osäkra, eftersom man inte kan mäta dem direkt utan måste odla dem på något substrat och olika bakterier växer olika fort på olika substrat. Uppmätningarna var gjorda en gång i månaden ungefär. Tätare tidsintervall skulle i och för sig vara önskvärt, men mätningarna är dyra och tidsödande. En utväg vore att mäta mycket oftare endast vid lämpliga tillfällen, nämligen då stora förändringar inträffar, t.ex. vid den hastiga uppgången på våren.

Värdena motsvarande x_1 finns i fig. A 4: 1. (Observera hur tidsskalan ändrar enhetens storlek mitt i diagrammet.) De två olika slags punkterna avser mätresultat vid två olika mätstationer och den hel-dragna linjen är mätresultat från en annan mätstation.



Total volume of phytoplankton 1960-1963; average values 0.2-5.0 m.

Fig. A 4: 1. Biomassa för producenterna (för en annan sjö)

Ur kurvan erhålles ett typiskt maximivärde $10\ 000 \cdot 10^6 \mu^3/l$ vatten =
 $= 10^4 \cdot 10^6 \cdot (10^{-6})^3 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{m}^3$ vatten

Sjöns volym 10^6 m^3 vatten. Det ger

gröna växternas volym i hela sjön $10^4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

Organiskt material (t.ex. $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$) innehåller 40 vikt-% kol

Tätheten = $1 \text{ g/cm}^3 = 1 \text{ ton/m}^3 = 0,4 \text{ ton C/m}^3$

Vikt i hela sjön $10^4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,4 \text{ ton C} = 4 \text{ ton C}$

Detta värde är ungefär 10 gånger lägre än i Trummen, vilket beror på att Trummen är mycket näringsrikare än denna sjö.

Bruttoproduktionen visas i fig. A 4: 2. I juni är värdet
 $2200 \text{ mg C/m}^2 \cdot \text{dag} = 2200 \cdot (10^{-3})^3 \text{ ton C/m}^2 \cdot \text{dag} =$
 $2200 \cdot 10^{-9} \cdot 10^6 \text{ ton C/dygn i hela sjön (som har ytan } 10^6 \text{ m}^2) =$
 $2,2 \text{ ton C/dygn i hela sjön}$

Enligt beräkningarna på sid. 25 var en gång på våren

$$\frac{dx_1}{dt} + d \cdot x_1 = 1,5 + 0,7 = 2,2 \text{ ton C/dygn}$$

Destruenterna är uppdelade på aeroba bakterier i vattnet, aeroba bakterier i sedimentet och anaeroba bakterier i sedimentet. I sedimentet är det också uppdelat på djupen 0-5 cm och 15-20 cm. Av dessa dominerar aeroba bakterier i övre sedimentlager och de anaeroba bakterier-na kan helt försummas.

Bakterier i vattnet: maximivärde $100 \cdot 10^3 \text{ st/ml vatten} =$
 $= 100 \cdot 10^3 / 10^{-6} \text{ st/m}^3 \text{ vatten} = 100 \cdot 10^3 \cdot 10^6 / 10^{-6} \text{ st i hela sjön} =$
 $= 100 \cdot 10^3 \cdot (10^6)^2 \text{ st i hela sjön}$
 Varje bakterie: volym $0,5 \cdot (10^{-6})^3 \text{ m}^3$, täthet $1 \text{ g/cm}^3 = 1 \text{ ton/m}^3 =$
 $= 0,4 \text{ ton C/m}^3$, väger $0,2 \cdot (10^{-6})^3 \text{ ton C}$
 Vikt bakterier i vattnet: $100 \cdot 10^3 \cdot (10^6)^2 \cdot 0,2 \cdot (10^{-6})^3 \text{ ton C} =$
 $= 0,02 \text{ ton C}$

Bakterier i sediment: Om lagret mellan 5-15 cm djup vet vi inget, men antag att 5-10 cm är lika som 0-5 cm och 10-15 cm lika som 15-20 cm. Maximivärde i medeltal för de olika djupen $\frac{28 + 2}{2} \cdot 10^6 \text{ st/g sediment} =$
 $= 15 \cdot 10^6 \text{ st/g sediment}$
 Sedimentet: volym $10^3 \cdot 10^3 \cdot 0,2 \text{ m}^3 = 0,2 \cdot 10^6 \text{ m}^3$
 täthet $1 \text{ g/cm}^3 = 1 \text{ ton/m}^3$ vikt $0,2 \cdot 10^6 \text{ ton} = 0,2 \cdot (10^6)^2 \text{ g}$

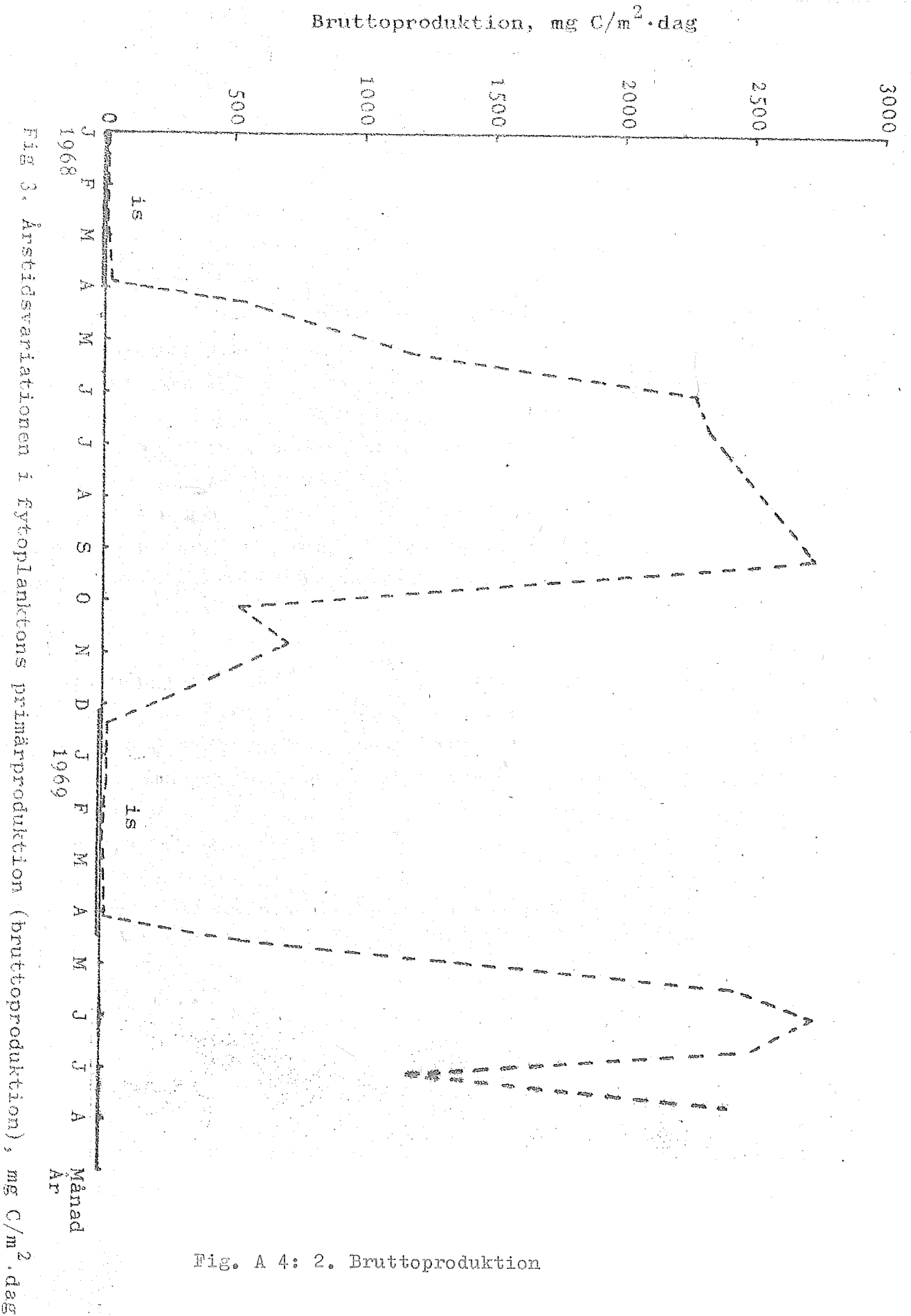
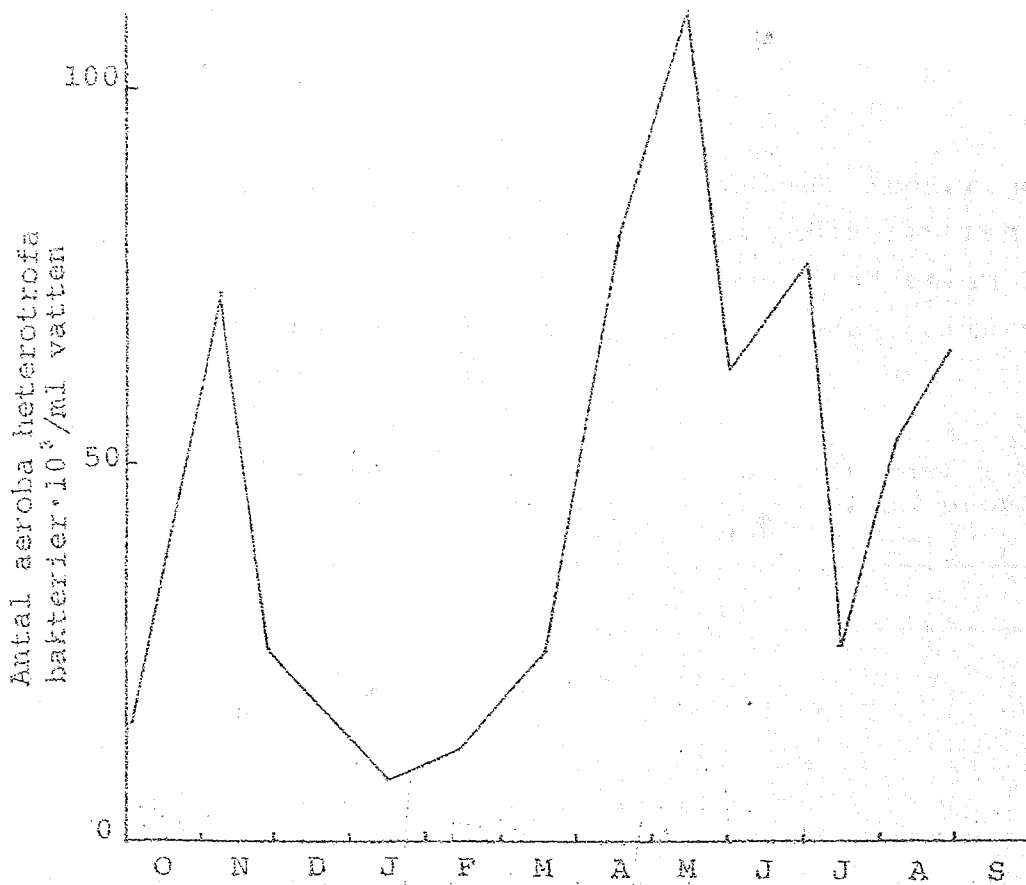


Fig. A 4: 2. Bruttoproduktion



Årstidsvariationer i antalet aeroba heterotrofa bakterier
0,2 m under vattenytan på station A.

Fig. A 4: 3. a)

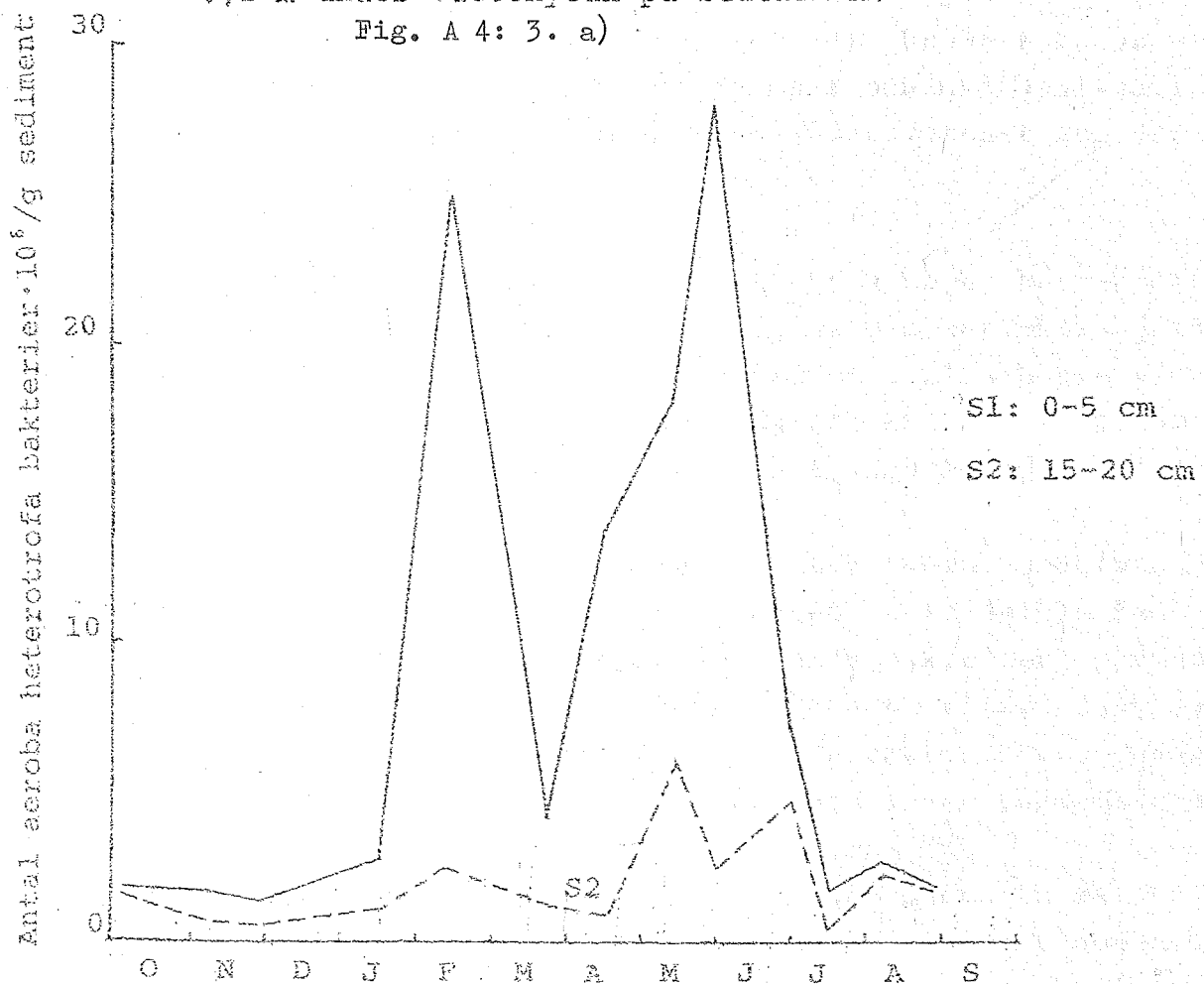


Fig. A 4: 3. b)

Årstidsvariationer i antalet aeroba heterotrofa bakterier
i sedimentet på station A.

Maximivärde i medeltal = $15 \cdot 10^6$ st/g sediment =
 = $15 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot (10^6)^2$ st i hela sjön = $3 \cdot (10^6)^3$ st i hela sjön
 Varje bakterie väger (enligt ovan) $0,2 \cdot (10^{-6})^3$ ton C
 Vikt bakterier i sediment = $0,2 \cdot (10^{-6})^3 \cdot 3 \cdot (10^6)^3$ ton C = 0,6 ton C
Total vikt bakterier av storleksordningen (maximum):
 0,6 + 0,02 = 0,62 ton C

De olika slagen av bakteriers variation under året framgår av
 fig. A 4: 3 a, b, . En sammanräkning, där det antagits att det
 finns lika mycket i lagret 5-10 cm som i 0-5 cm och lika mycket i
 10-15 cm som i 15-20 cm-lagret, finns i fig. A 4: 3 c

