

IDENTIFIERING AV PARAMETRAR I TILLSTÅNDSMODELLER
MED REKURSIV TEKNIK, S.K. EXTENDED KALMAN FILTER

Examensarbete utfört vid Institutionen för regleringsteknik,
Lunds Tekniska Högskola

Författare: Jan Brännström och Allan Johansson

Handledare: Gustaf Olsson

RE-78

April 1970

IDENTIFIERING AV PARAMETRAR I TILLSTÅNDSMODELLER
MED REKURSIV TEKNIK, S.K. EXTENDED KALMAN FILTER

Examensarbete utfört vid Institutionen för regleringsteknik,
Lunds Tekniska Högskola

Författare: Jan Brännström och Allan Johansson

Handledare: Gustaf Olsson

RE-78

April 1970

A B S T R A C T

This report describes a method of parameter identification when the general structure of a system is known. The method is based on Kalman theory applied to a stochastic system. By enlarging such a system the state vector will include the unknown parameters. The paper emphasizes the initial choice of the covariance matrices. Further on limitations of the method are discussed. As a non-linear filtering problem is achieved the linearization causes certain convergence problems.

S A M M A N F A T T N I N G

I denna rapport beskrivs en metod för identifiering av parametrar i system, vars allmänna struktur är känd. Metoden bygger på en utvidgning av teorin för Kalmanfiltrering. De okända parametrarna får härvid ingå i en utökad tillståndsvektor. Huvudsakligen behandlas känsligheten för olika val av kovariansmatriserna. Vidare diskuteras begränsningar hos metoden. Då ett olinjärt filtreringsproblem erhålles, orsakar linjäriseringen vissa konvergensproblem.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

	Sida
<u>ABSTRACT</u>	I
<u>1. INLEDNING</u>	1
<u>2. TEORI</u>	2
<u>2.1. Kalmanestimering</u>	2
2.1.1. Modellrekonstruktion i deterministiska system	
2.1.2. Om stokastiska system	
2.1.3. Val av matrisen K	
<u>2.2. Modifierad Kalmanteknik</u>	5
2.2.1. Inledning	
2.2.2. Kalmanteknikens tillämpning på det utökade systemet	
<u>2.3. Om kovariansmatriserna</u>	7
2.3.1. Inledning	
2.3.2. R1-matrisen	
2.3.3. P(0)-matrisen	
2.3.4. R2-matrisen	
<u>3. METOD OCH PROBLEMSTÄLLNING</u>	9
<u>3.1. Inledning</u>	9
<u>3.2. Problemställning</u>	9
<u>3.3. Metod</u>	10
3.3.1. IDOL-programmet	
<u>3.4. Presentation av testexempel</u>	11
<u>4. KÄNSLIGHETEN FÖR VALET AV R1; EXEMPEL</u>	12
<u>4.1. Inledning</u>	12
<u>4.2. Undersökning på första ordningens system; en obekant parameter</u>	12
4.2.1. Presentation av referensvärde på R1 enligt teori	
4.2.2. R1 ₁₁ konstant; R1 ₂₂ varierar	
4.2.3. R1 ₂₂ konstant; R1 ₁₁ varierar	
4.2.4. Inverkan av kopplingselement	
4.2.5. Elementens absoluta storlek	

	Sida
<u>4.3. Undersökning på första ordningens system;</u>	
<u>två obekanta parametrar</u>	17
4.3.1. Presentation av referensvärde på R1 enligt teori	
4.3.2. Olika val av R1-diagonal	
4.3.3. Inverkan av kopplingselement	
4.3.4. Inverkan av koppling mellan parametrar	
<u>4.4. Sammanfattning och slutsatser</u>	22
<u>5. KÄNSLIGHETEN FÖR VALET AV P(0); EXEMPEL</u>	25
<u>5.1. Inledning</u>	25
<u>5.2. Undersökning på första ordningens system;</u>	
<u>en obekant parameter</u>	25
5.2.1. Presentation av referensvärde på P(0) enligt teori	
5.2.2. $P(0)_{11}$ konstant; $P(0)_{22}$ varierar	
5.2.3. $P(0)_{22}$ konstant; $P(0)_{11}$ varierar	
5.2.4. Inverkan av kopplingselement	
5.2.5. Elementens absoluta storlek	
<u>5.3. Undersökning på första ordningens system;</u>	
<u>två obekanta parametrar</u>	30
5.3.1. Presentation av referensvärde på P(0) enligt teori	
5.3.2. Olika val av P(0)-diagonal	
5.3.3. Inverkan av kopplingselement	
5.3.4. Koppling mellan parametrar	
5.3.4.1. Absoluta storleken av parameterfelet i P(0)	
5.3.4.2. Olämpligt val av parametrarnas begynnelsevärden	
<u>5.4. Sammanfattning och slutsatser</u>	38
<u>6. INVERKAN AV PARAMETRARNAS BEGYNNELSEVÄRDEN PÅ LÖSNINGARNAS</u>	
<u>KONVERGENS</u>	41
<u>6.1. Inledning</u>	41
<u>6.2. Presentation av konvergensgränser för första ordningens</u>	
<u>system</u>	42
6.2.1. Konvergensområde då $R1_{22} = 1$	
6.2.2. Konvergensområde då $R1_{22} = 0.01$	
6.2.3. Inverkan av kopplingselement i R1	
6.2.4. Konvergens vid två obekanta parametrar	

	Sida
<u>6.3. Presentation av konvergensgränser för tredje ordningens system</u>	50
6.3.1. Systemet skrivet på diagonal form	
6.3.1.1. En parameter okänd	
6.3.1.2. Tre parametrar okända	
6.3.2. Systemet skrivet på observerbar form	
6.3.2.1. En parameter okänd	
6.3.2.2. Tre parametrar okända	
6.3.3. Jämförelse	
<u>6.4. Presentation av konvergensgränser för Rosenbrocks system</u>	53
6.4.1. En parameter okänd	
6.4.2. Tre parametrar okända	
<u>6.5. Egenvärdenas förflyttning</u>	54
<u>6.6. Sammanfattning</u>	59
<u>7. SAMMANFATTNING AV RESULTAT</u>	61
<u>REFERENSER</u>	62

1. INLEDNING

Vid många industriella processer är det förenat med stora svårigheter att fastställa det system av differentialekvationer, som beskriver processen. Särskilt framträdande blir dessa svårigheter vid system med flera in- och utsignaler. Ofta känner man emellertid den generella strukturen hos det system man vill identifiera. Problemet är då att exakt kunna bestämma vissa parametrars numeriska värden.

Vi vill med denna rapport anvisa en metod att, med hjälp av en modifierad form av Kalmantekniken, identifiera dessa okända parametrar. Härvid förutsättes, att den process man vill identifiera är styrbar och observerbar.

Vi kommer i den följande framställningen att begränsa oss till deterministiska system, dvs. vi bortser från de störningar, som dels uppträder vid mätning av utsignalerna dels påverkar själva den dynamiska processen. Detta är i och för sig ej någon oväsentlig inskränkning, då dessa störningar i verkligheten alltid uppträder, men man kan på detta sätt få en uppfattning om användbarheten hos vår metod, och framför allt kan man bestämma, var dess begränsningar ligger.

Som en ytterligare begränsning kommer vi endast att betrakta system med tidsinvarianta parametrar. Detta är emellertid en oväsentlig inskränkning, då metoden i allmänhet direkt kan utvidgas till att omfatta även tidsvariabla parametrar.

För att visa hur olika faktorer påverkar metodens användbarhet, har vi gjort ett antal undersökningar på olika testsystem. De frågeställningar vi med dessa försök vill besvara, kommer vi, för att göra framställningen klarare, att presentera först sedan vi har redogjort för den teori, på vilken vår metod bygger.

2. TEORI

2.1. Kalmanestimering

2.1.1. Modellrekonstruktion i deterministiska system

Modellrekonstruktion^{x)} (ref. 1) är en metod att bestämma tillståndsvektorn, då man känner in- och utsignalvektorerna. Vi förutsätter att systemet är observerbart och skriver upp systemet i samplad form.^{xx)}

$$\begin{cases} x(t+1) = \Phi \cdot x(t) + \Gamma \cdot u(t) & (2.1) \\ y(t) = \Theta \cdot x(t) & (2.2) \end{cases}$$

Här är x en n -dimensionell tillståndsvektor, u en v -dimensionell insignalvektor och y en p -dimensionell utsignalvektor.

Systemmatrisen Φ är av ordningen $n \times n$, matrisen Γ har ordningen $n \times v$ och Θ $p \times n$.

Vi gör nu en matematisk modell av vårt verkliga system, där vi gör en uppskattning av tillståndsvektorn $x(t)$. Denna uppskattning ger vi beteckningen $\hat{x}(t)$.

$$\hat{x}(t+1) = \Phi \hat{x}(t) + \Gamma u(t) + K [y(t) - \Theta \hat{x}(t)] \quad (2.3)$$

Här är K en förstärkningsmatris och uttrycket $[y(t) - \Theta \hat{x}(t)]$ ger ett mått på felet i vår uppskattning.

Genom att införa rekonstruktionsfelet $\tilde{x} = x - \hat{x}$ och subtrahera ekv. (2.3) från ekv. (2.1) får vi

$$\tilde{x}(t+1) = \Phi \tilde{x}(t) - K [y(t) - \Theta \hat{x}(t)] = [\Phi - K\Theta] \tilde{x}(t) \quad (2.4)$$

Vi ser här, att om K väljes så att systemet (2.4) är asymptotiskt stabilt, kommer rekonstruktionsfelet \tilde{x} alltid att konvergera mot noll.

2.1.2. Om stokastiska system

För att kunna göra ett optimalt val av K -matrisen, gör vi en utvidgning av vårt linjära deterministiska system till ett linjärt stokastiskt system.

$$\begin{cases} x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma u(t) + e(t) & (2.5) \\ y(t) = \Theta x(t) + v(t) & (2.6) \end{cases}$$

x) Även beteckningen Kalmanfiltrering (eng. Kalman filter) förekommer.

xx) $\Phi, \Gamma, \Theta, u(t)$ och $y(t)$ förutsättes kända.

Här är $e(t)$ en n -dimensionell brusvektor med medelvärdet noll och kovariansen R_1 samt $v(t)$ en p -dimensionell brusvektor med medelvärdet noll och kovariansen R_2 . Vi antar vidare att $x(t_0)$ är normalfördelad $N(m_0, R_0)$ samt att $e(t)$ och $v(t)$ är oberoende av varandra.

Vår ekvation för rekonstruktionsfelet får nu följande form:

$$\tilde{x}(t+1) = [\Phi - K\Theta]\tilde{x}(t) + e(t) - Kv(t) \quad (2.7)$$

Medelvärdet för rekonstruktionsfelet ges av:

$$E\tilde{x}(t+1) = [\Phi - K\Theta]E\tilde{x}(t) \quad (2.8)$$

Om vi nu antar, att m_0 är känt, kan vi välja $\hat{x}(t_0) = m_0$. Då blir $E\tilde{x}(t_0) = 0$, och $E\tilde{x}(t)$ blir noll för alla tider större än t_0 . Rekonstruktionsfelets varians får då följande form:

$$P(t) = E[\tilde{x}(t) - E\tilde{x}(t)][\tilde{x}(t) - E\tilde{x}(t)]^T = E[\tilde{x}(t)][\tilde{x}(t)]^T \quad (2.9)$$

och

$$\begin{cases} P(t+1) = [\Phi - K\Theta]P(t)[\Phi - K\Theta]^T + R_1 + K \cdot R_2 \cdot K^T \\ P(t_0) = R_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Känner vi däremot inte medelvärdet m_0 , får vi göra en uppskattning. Antag vi gissar, att medelvärdet är $\hat{x}(t_0)$. Då får vi:

$$E\tilde{x}(t_0) = m_0 - \hat{x}(t_0) = M_0 \quad (2.11)$$

Detta medför att uttrycket för variansen nu får en något annorlunda form. Betrakta nämligen

$$\begin{aligned} P^{**}(t_0) &= E[\tilde{x}(t_0) - E\tilde{x}(t_0)][\tilde{x}(t_0) - E\tilde{x}(t_0)]^T = \\ &= E\tilde{x}(t_0)\tilde{x}(t_0)^T - M_0M_0^T = \\ &= P(t_0) - M_0M_0^T \end{aligned} \quad (2.12)$$

En omskrivning ger:

$$P(t_0) = P^{**}(t_0) + M_0M_0^T \quad (2.13)$$

Här är $P(t_0)$ andra momentet av $\tilde{x}(t_0)$, $P^{**}(t_0)$ variansen av $[\tilde{x}(t_0) - m_0]$ och M_0 en vektor, som anger felet i vår uppskattning av medelvärdet m_0 . Vi tolkar nu ekv. (2.13) så, att rekonstruktionsfelets varians blir större, då vi inte känner m_0 . I ett senare avsnitt skall vi återkomma till detta.

2.1.3. Val av matrisen K

Vi kan nu göra ett optimalt val av K-matrisen; K skall väljas så att variansen av den skalära produkten $a^T \tilde{x}$ är så liten som möjligt, där a är en godtycklig konstant vektor. Vi får då:

$$E(a^T x)(a^T x)^T = a^T P(t) a \quad (2.14)$$

Genom insättning av ekv. (2.10) och komplettering av kvadraterna får vi:

$$\begin{aligned} a^T P(t+1) a = & a^T \left[\phi P(t) \phi^T + R_1 - \phi P(t) \theta^T (R_2 + \theta P(t) \theta^T)^{-1} \theta P(t) \theta^T \right] a + \\ & + a^T \left[K - \phi P(t) \theta^T (R_2 + \theta P(t) \theta^T)^{-1} \right] (R_2 + \theta P(t) \theta^T) \left[K - \phi P(t) \theta^T (R_2 + \theta P(t) \theta^T)^{-1} \right]^T a \end{aligned} \quad (2.15)$$

Här ser vi nu, att högra ledet består av två termer, där den första inte beror av K. Den andra termen är positivt semidefinit, ty $(R_2 + \theta P(t) \theta^T)$ är positivt definit, då kovariansmatriserna enligt definitionen måste vara positivt definita. Hela uttrycket (2.15) minimeras alltså, om K väljs så att den andra termen blir noll. Vi får då:

$$K = K(t) = \phi P(t) \theta^T \left[R_2 + \theta P(t) \theta^T \right]^{-1} \quad (2.16)$$

$$P(t+1) = \phi P(t) \phi^T + R_1 - \phi P(t) \theta^T \left[R_2 + \theta P(t) \theta^T \right]^{-1} \theta P(t) \phi^T \quad (2.17)$$

I ekv. (2.17) anger den första termen hur rekonstruktionsfelets varians förändras p.g.a. systemets dynamik, termen R_1 representerar ökningen i varians p.g.a. störningar på systemet och den tredje termen anger hur variansen minskas genom den information om systemet, som mät-signalerna ger.

Vi noterar, att resultatet är oberoende av a, vilket medför att om vi minimerar variansen för en linjär kombination av \tilde{x} , har vi samtidigt minimerat variansen för alla tänkbara linjära kombinationer av \tilde{x} .

Vi observerar också, enl. ekv. (2.10), att om $P(t)$ är positivt definit, så är även $P(t+1)$ positivt definit.

Uttrycket för $P(t+1)$ (ekv. 2.17) kan förenklas. Vi får då följande rekursiva metod för att beräkna K-matrisen i ekv. (2.3):

$$\begin{cases} K(t) = \phi P(t) \theta^T \left[R_2 + \theta P(t) \theta^T \right]^{-1} \\ P(t+1) = \left[\phi - K(t) \theta \right] P(t) \phi^T + R_1 \\ P(t_0) = R_0 \end{cases} \quad (2.18)$$

2.2. Modifierad Kalmanteknik

2.2.1. Inledning

I föregående avsnitt såg vi, hur vi kunde bestämma tillståndsvektorn, då systemet var känt. Vi skall nu göra en utvidgning till en metod att även bestämma systemparametrarna. Vi kallar denna metod modifierad Kalman-teknik^{x)} (ref. 2). Det enda vi här behöver förutsätta känt är den allmänna strukturen hos systemet samt in- och utsignalvektorerna.

Vi antar, att vi har ett kontinuerligt system av följande allmänna utseende:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\alpha) \cdot x + B(\alpha) \cdot u + e & (2.19) \\ y(t_k) = \Theta \cdot x(t_k) + v(t_k) & (2.20) \end{cases}$$

Systemets ordningstal (n_1) och matrisen Θ förutsättes här kända.

Det vi skall bestämma är vektorn α . För att lösa detta problem, låter vi α ingå i tillståndsvektorn, dvs. vi utökar tillståndsvektorn med n_2 okända parametrarna i systemet.

$$x = \left. \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\} \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} \quad (2.21)$$

x_1 betecknar här den ursprungliga tillståndsvektorn. Den utökade tillståndsvektorn (x) får alltså ordningstalet $n = n_1 + n_2$.

Det utökade systemet kommer nu att beskrivas av en olinjär funktion:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) + e & (2.22) \\ y(t_k) = g(x(t_k)) + v(t_k) & (2.23) \end{cases}$$

De n_1 första raderna i vektorn $f(x, u)$ är de samma som i det ursprungliga systemet, men med den skillnaden att $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{n_2}$ ersatts av $x_{n_1+1}, x_{n_1+2} \dots x_{n_1+n_2}$. De n_2 sista raderna i ekv. (2.22) kommer att bestå av nollor, eftersom tidsderivatan av de okända parametrarna är noll.

Vektorfunktionen $g(x)$ får, då vi har förutsatt att matrisen Θ är känd, följande utseende:

$$g(x) = \Theta \cdot x \quad (2.24)$$

Här är matrisen Θ den med n_2 st. nollor utökade Θ -matrisen.

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ \underbrace{\quad}_{n_1} & \underbrace{\quad}_{n_2} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

x) Eng. Extended Kalman filter.

2.2.2. Kalmanteknikens tillämpning på det utökade systemet

För att kunna tillämpa den metod för bestämning av tillståndsvektorn, som vi härledde i avsnitt 2.1, måste vi göra vissa modifieringar av våra ekvationer. Detta beror på att vi nu har ett olinjärt och kontinuerligt system.

Att överföra ekvationen för utsignalen till samplad form erbjuder oss inga problem, då vi alltid kan mäta utsignalen i diskreta tidpunkter. Vi får då:

$$y(t) = \Theta \cdot x(t) \quad (2.26)$$

Vår modell av det verkliga systemet ges nu av följande ekvation:

$$\hat{x}(t+1) = h(\hat{x}(t)) + K(t)[y(t) - \Theta \hat{x}(t)] \quad (2.27)$$

där $h(\hat{x}(t))$ är lösningen till differentialekvationen

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (2.28)$$

vid tidpunkten $(t+1)$ med initialvillkoret $x = \hat{x}(t)$.

För att kunna beräkna $K(t)$ enligt ekv. (2.18) måste vi även kunna bestämma den utökade Φ -matrisen. Denna ges av lösningen till differentialekvationen

$$\frac{d\phi}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=\hat{x}(t)} \cdot \phi(t) \quad (2.29)$$

vid tidpunkten (t_0) med initialvärdet $\phi(t_0)$, där $\phi(t_0) = I^x$.

Det är viktigt att här observera, att om vi gissar initialvektorn $\hat{\alpha}(t_0)$ för långt från det riktiga värdet av parametervektorn α , kan vi inte längre garantera konvergens. Detta beror på att vårt val av K -matrisen (ekv. (2.18)) inte längre är optimalt, ty vid härledningen av denna förutsatte vi, att Φ -matrisen var konstant. Vi har här en begränsning hos vår metod, som vi senare kommer att återkomma till.

x) I är enhetsmatrisen.

2.3. Om kovariansmatriserna

2.3.1. Inledning

De kovariansmatriser, som vi definierade i avsnitt 2.1, får i vårt utökade system en vidare betydelse än vid den rena Kalmanestimeringen. Matriserna kommer nu även att innehålla element, åt vilka vi inte kan ge en fysikalisk tolkning. Vi skall här belysa dessa elements betydelse. För att göra framställningen tydligare partitionerar vi $P(t)$ - och R_1 -matriserna på följande sätt:

$$r = \left[\begin{array}{c|c} r_{11} & R_{12} \\ \hline r_{12}^T & r_{22} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} n_1 \\ \} n_2 \end{array} \right\} \quad (2.30)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n_1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n_2}$

2.3.2. R_1 -matrisen

Enligt avsnitt 2.1.2 representerar R_1 -matrisen störningar på systemet. I det utökade systemet anger submatrisen R_{11} de verkliga störningar, som påverkar det ursprungliga systemet. Submatrisen R_{22} kan uppfattas såsom representerande störningar, vilka uppträder på grund av fel i vår modell av systemet. Submatrisen R_{12} anger en koppling mellan dessa båda störningar.

Vi observerar här, då matrisen $P(t)$ konvergerar mot R_1 (ekv. (2.18)), att submatrisen $K_2^{(x)}$ kommer att gå mot noll, om R_{22} är noll. Vi kommer då inte längre att få någon korrektion av våra okända parametrar och kan inte vara säkra på att de har konvergerat mot sina rätta värden. Om, å andra sidan, R_{22} är stor, blir korrektionerna stora, och vi kommer att få ett onödigt svängande konvergensförlopp.

2.3.3. $P(0)$ -matrisen

$P(0)$ -matrisen är enligt avsnitt 2.1.2 andra momentet av rekonstruktionsfelet vid tiden $t = 0$. Enligt ekv. (2.13) kan vi dela upp detta moment i två termer:

$$P(0) = P^{**}(0) + M_0 M_0^T \quad (2.31)$$

Termen $P^{**}(0)$ betecknar kovariansen för tillståndsvektorn och har alltså

$$x) \quad K = \left(\begin{array}{c} K_1 \\ \hline K_2 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \} n_1 \\ \} n_2 \end{array} \right\}$$

endast en mening för vårt ursprungliga system. Vi får då, om vi betecknar den ursprungliga tillståndsvektorn x_1 :

$$P(0)_{11} = R_0 + (Ex_1(0) - \hat{x}_1(0))(Ex_1(0) - \hat{x}_1(0))^T \quad (2.32)$$

Matrisen R_0 är noll för ett deterministiskt system och vektorn $(Ex_1(0) - \hat{x}_1(0))$ är noll, om vi känner $Ex_1(0)$.

Submatrisen $P(0)_{22}$ anger hur långt från de riktiga värdena vår uppskattning av de okända parametrarna ligger.

$$P(0)_{22} = (d - \hat{a}(0))(\alpha - \hat{\alpha}(0))^T \quad (2.33)$$

Vi ser här, att ju osäkrare uppskattningen av $Ex_1(0)$ resp. α är, desto större bör diagonalelementen i $P(0)_{11}$ resp. $P(0)_{22}$ vara.

Submatrisen $P(0)_{12}$ anger en koppling mellan felen i uppskattningarna av den ursprungliga tillståndsvektorn och de okända parametrarna. Se vidare ref. [2].

2.3.4. R2-matrisen

Då R2-matrisen representerar störningar på utsignalen, sker ingen förändring av dess utseende, när systemet utökas med vektorn α .

För att i ett deterministiskt system undvika division med en singular matris (ekv. (2.18)) bör diagonalelementen i R2 alltid ges värden skilda från noll.

3. METOD OCH PROBLEMSTÄLLNING

3.1. Inledning

Den teori, som vi har redogjort för i föregående kapitel, vill vi nu använda som grundval för en praktisk metod att identifiera okända systemparametrar. För att undersöka användbarheten hos metoden har vi simulerat ett antal system på dator. Vi skall i detta kapitel specificera de frågeställningar vi vill besvara med denna rapport, redogöra för hur man kan gå tillväga vid identifieringen samt presentera de system vi simulerat.

3.2. Problemställning

Som vi antydde i avsnitt 2.2.2 kan vi inte med vår metod garantera, att vektorn $\hat{\alpha}(t)$ kommer att konvergera mot sitt rätta värde. Det är därför angeläget att undersöka hur fel man får gissa sitt initialvärde $\hat{\alpha}(0)$. Vidare är vi inte bara intresserade av, att $\hat{\alpha}(t)$ skall anta rätt värde, utan vi vill även, att konvergensen skall vara snabb. Med detta menar vi, att $\hat{\alpha}(t)$ snabbt skall närma sig det riktiga värdet, dock utan att svänga alltför mycket kring detta. Ett hastigt konvergensförlopp är särskilt viktigt vid system med tidsvariabla parametrar.

Nu påverkas såväl stabilitet som konvergensthastighet av hur vi väljer våra kovariansmatriser; vi är därför intresserade av hur vi skall välja dessa på ett optimalt sätt.

Ytterligare frågeställningar av intresse är hur konvergensförloppet påverkas av antalet okända parametrar i ett system och om deras plats i systemmatrisen är av betydelse.

Då frågor vi skall söka besvara blir således:

1. Huvudfrågor

- a) Hur skall R1-matrisen väljas?
- b) Hur skall P(0)-matrisen väljas?
- c) Hur fel får man gissa vektorn $\hat{\alpha}(0)$?

2. Följdfrågor

Hur påverkas konvergensförloppet av

- a) felaktigt val av R1-matrisen?
- b) felaktigt val av P(0)-matrisen?
- c) felet i initialgissningen av vektorn α ?
- d) antalet okända parametrar i ett system?
- e) de okända parametrarnas plats i systemmatrisen?

3.3. Metod

Det första steget, när vi vill identifiera okända systemparametrar, är att generera ett antal par av in- och utsignaler. Detta tillgår så, att en för varje samplingsintervall sträckvis konstant insignalfunktion får styra den process vi önskar identifiera, varvid vi mäter utsignalen i en mot varje insignal svarande samplingstidpunkt. Dessa data får sedan styra ett datorprogram, som löser våra estimeringsekvationer. Om vi härvid har valt våra värden på $P(0)$, R_1 , R_2 , $x_1(0)$ och $\hat{\alpha}(0)$ lämpligt, kommer $\hat{\alpha}(t)$ att konvergera mot det rätta värdet α .

Vi har här vid genereringen av data för våra simuleringar valt insignalen som en följd av 500 slumpvis utvalda värden: +1 eller -1. Vid beräkningen av utsignalen har samplingstiden varit $\Delta t = 0.1$ sek.

Vid estimeringen har vi valt $x_1(0) = x_2(0) = 0$ och $R_2 = 10^{-5} \cdot I$, där I är av ordningen $p \times p$ (se ekv. (2.6)).

3.3.1. IDOL-programmet

IDOL-programmet (ref. 3) är ett datorprogram, med vars hjälp vi kan lösa våra estimeringsekvationer:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= h(\hat{x}(t)) + K(t) [y(t) - e\hat{x}(t)] \\ K(t) &= \phi(t)P(t)e^T [R_2 + eP(t)e^T]^{-1} \\ P(t+1) &= [\phi(t) - K(t)e] P(t)e^T(t) + R_1 \\ d\phi/dt &= (\partial f / \partial x) \cdot \phi(t) \\ dx/dt &= f(x, u) \end{aligned}$$

Programmet fungerar så, att man läser in ordningstal och ingående parametrar, för de matriser, som ingår i det aktuella systemet. Okända parametrar kan därvid ersättas med exempelvis nollor. Vidare markeras vilka element i matriserna, som är okända. Genom att dessutom läsa in initialgissningarna $x_1(0)$ och $\hat{\alpha}(0)$, kovariansmatriserna för det utökade systemet och de uppmätta eller simulerade in- och utsignalerna får vi en rekursiv beräkning av vektorn $\hat{\alpha}(t)$.

3.4. Presentation av testexempel

De system, på vilka vi har utfört våra undersökningar, är följande:

Ex. 1. Första ordningens system, en insignal och en utsignal.

$$\begin{cases} \dot{x} = -0.5 \cdot x + 1 \cdot u \\ y = 1 \cdot x \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Ex. 2 a. Tredje ordningens system, en insignal och en utsignal.

(Skrivet på diagonal form).

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \\ y = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot x \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Ex. 2 b. Tredje ordningens system, en insignal och en utsignal. (Samma system som i Ex. 2 a, men skrivet på observerbar form).

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -11 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Ex. 3. Tredje ordningens system, två insignaler och två utsignaler.

Diagonal form. (Rosenbrocks system).

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \bar{x} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

4. KÄNSLIGHETEN FÖR VALET AV R1; EXEMPEL

4.1. Inledning

För att visa hur valet av R1-matrisen påverkar estimeringsförloppet, har vi gjort ett antal simuleringar, där vi har varierat de olika elementen i R1. Vi har därvid begränsat oss till Ex. 1 (första ordningens system). Härvid har vi antagit, dels att enbart A-matrisen är okänd, dels att både A-matrisen och B-matrisen är okända. Det okända elementet i A- resp. B-matrisen betecknar vi α_1 resp. α_2 . I samtliga fall har vi valt $\hat{\alpha}(0) = 0$.

Som referensvärde på R1 har vi, utgående från teoriavsnittet 2.3.2, valt en diagonal matris^{x)}.

$$R1_{\text{ref}} = \begin{bmatrix} 10^{-5} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Med denna referensmatris som utgångspunkt, skall vi undersöka hur estimeringsförloppet förändras, då R1 väljs på andra sätt.

P(0)-matrisen har vi, enligt teoriavsnitt 2.3.3, i samtliga fall satt till^{x)}

$$P(0) = \begin{bmatrix} 10^{-5} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_O M_O^T \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Vid en parameter okänd blir för Ex. 1

$$M_O M_O^T = 0.25$$

och vid två parametrar okända blir

$$M_O M_O^T = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2. Undersökning på första ordningens system; en obekant parameter

4.2.1. Presentation av referensvärde på R1 enligt teori

Väljer vi R1-matrisen enligt teorin, ekv. (4.1), får vi ett konvergensförlopp enligt figur 4.1. Detta resultat kan betecknas som relativt

x) Av beräkningstekniska skäl är $R1_{11}$ och $P(0)_{11}$ ej noll, vilket de enligt teorin skulle vara, när systemet är deterministiskt och $x_1(0)$ är känt.

gott; $\hat{\alpha}_1$ avviker efter sex samplingsintervall mindre än en promille från det rätta värdet.



Fig. 4.1. Konvergensförlopp för ett första ordningens system, då kovariansmatriserna valts enligt teorin (referenskurva). Kurvan visar hur värdet av den okända parametern ($\hat{\alpha}$) varierar från det gissade initialvärdet till det rätta värdet under ett antal samplingsintervall (T).

$$P(0) = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}; \quad R1 = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad R2 = 10^{-5}$$

4.2.2. $R1_{11}$ konstant; $R1_{22}$ varieras

För att undersöka hur valet av $R1_{22}$ påverkar konvergensförloppet, har vi varierat detta element, medan $R1_{11}$ har hållits konstant. Av figur 4.2 framgår, att då $R1_{22}$ är stor, blir konvergensen snabb, men förloppet är då också en aning slängigt. Om, å andra sidan, $R1_{22}$ är liten, får vi en långsam konvergens. Vid t.ex. $R1_{22} = 10^{-5}$ ligger $\hat{\alpha}_1$ först efter 114 samplingsintervall inom en promille av det rätta värdet.

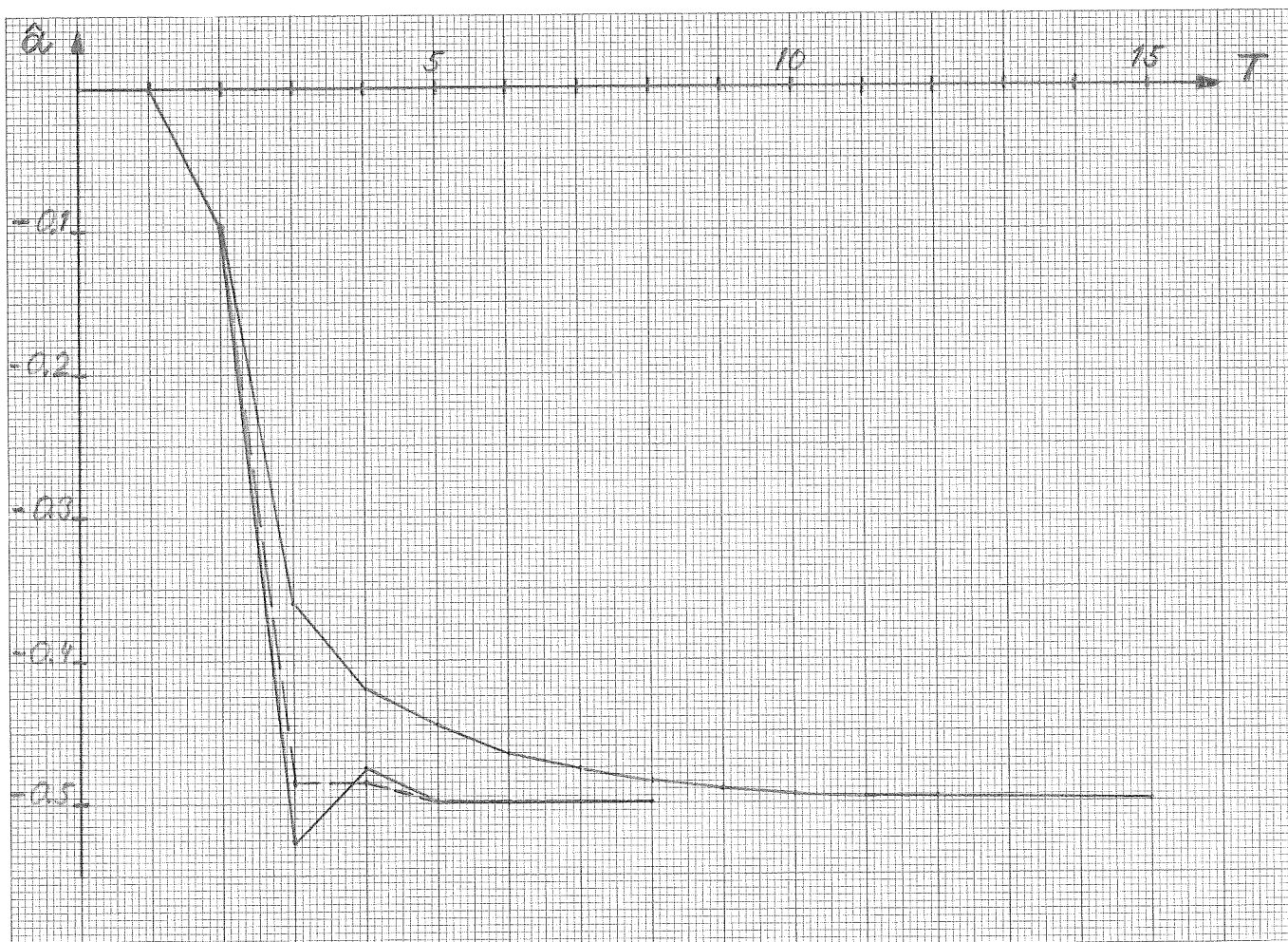


Fig. 4.2. Konvergensförlopp då Rl_{22} varierar. Den streckade kurvan är referenskurvan ($Rl_{22} = 1$). Den undre kurvan visar förloppet då $Rl_{22} = 10$ och den övre då $Rl_{22} = 10^{-3}$. (I övrigt $Rl = Rl_{ref}$)

4.2.3. Rl_{22} konstant; Rl_{11} varierar

Figur 4.3 visar, att konvergensthastigheten är mycket känslig för storleken av Rl_{11} ; ju större detta element är, desto långsammare blir konvergensen. Detta stämmer också väl överens med teorin, då ett stort värde på Rl_{11} betyder, att störningarna på det ursprungliga systemet är stora; vi vill då inte vid estimeringen ta alltför stor hänsyn till våra mätresultat, vilket medför att korrigeringarna blir försiktiga och konvergensen långsam.

Om vi väljer $Rl_{11} = 0.1$ konvergerar $\hat{\alpha}_1$ inom en promille först efter 141 samplingsintervall.

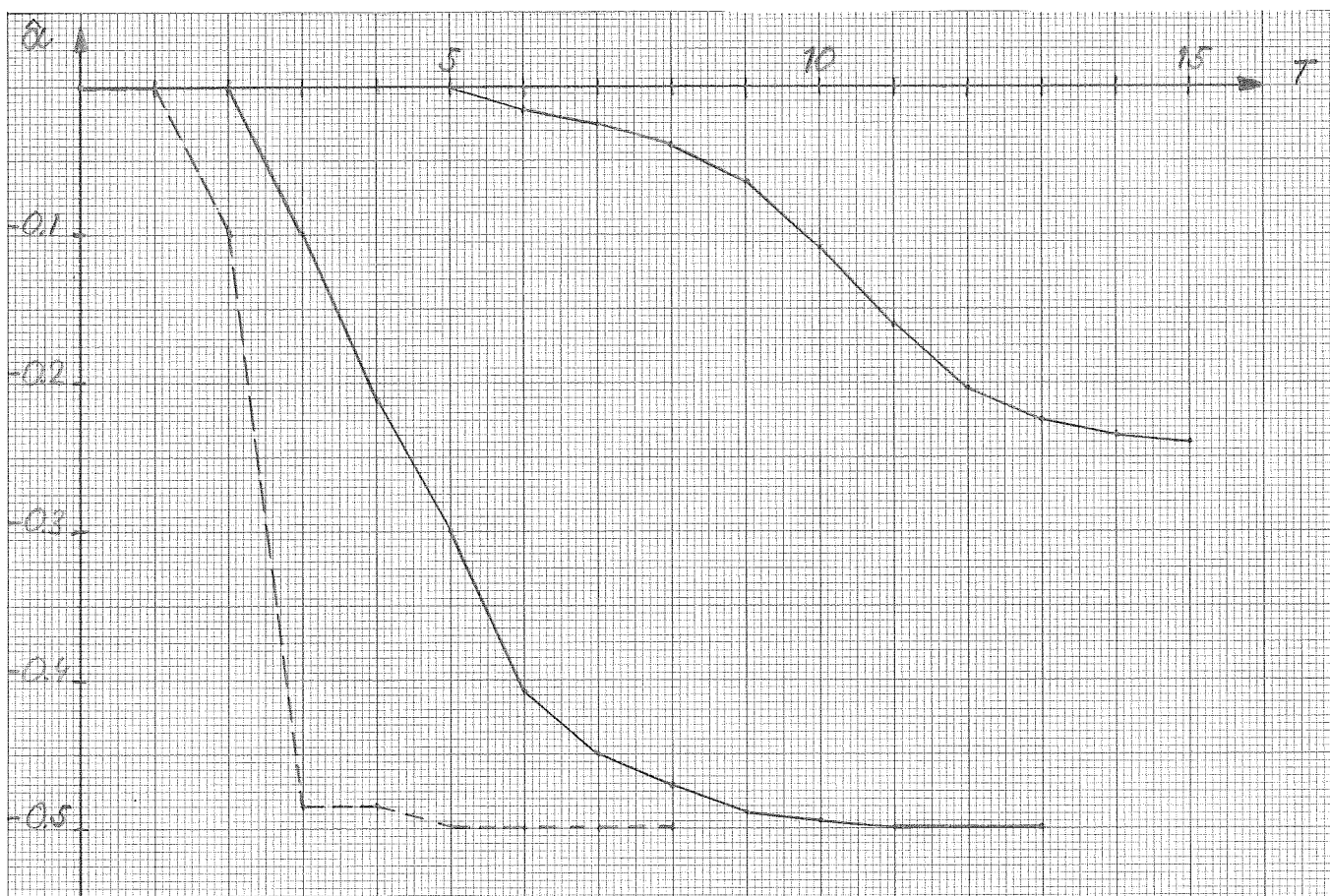


Fig. 4.3. Konvergensförlopp då Rl_{11} varierar. Den streckade kurvan är referenskurvan ($Rl_{11} = 10^{-5}$). Den undre heldragna kurvan visar förloppet då $Rl_{11} = 10^{-2}$ och den övre då $Rl_{11} = 10^{-1}$. (I övrigt $Rl = Rl_{ref}$).

4.2.4. Inverkan av kopplingselement

Som framgår av figur 4.4 är inverkan av kopplingselement relativt obetydlig. Ett positivt värde på kopplingen ger en aning förbättrad snabbhet, medan ett negativt värde ger en motsvarande försämring.

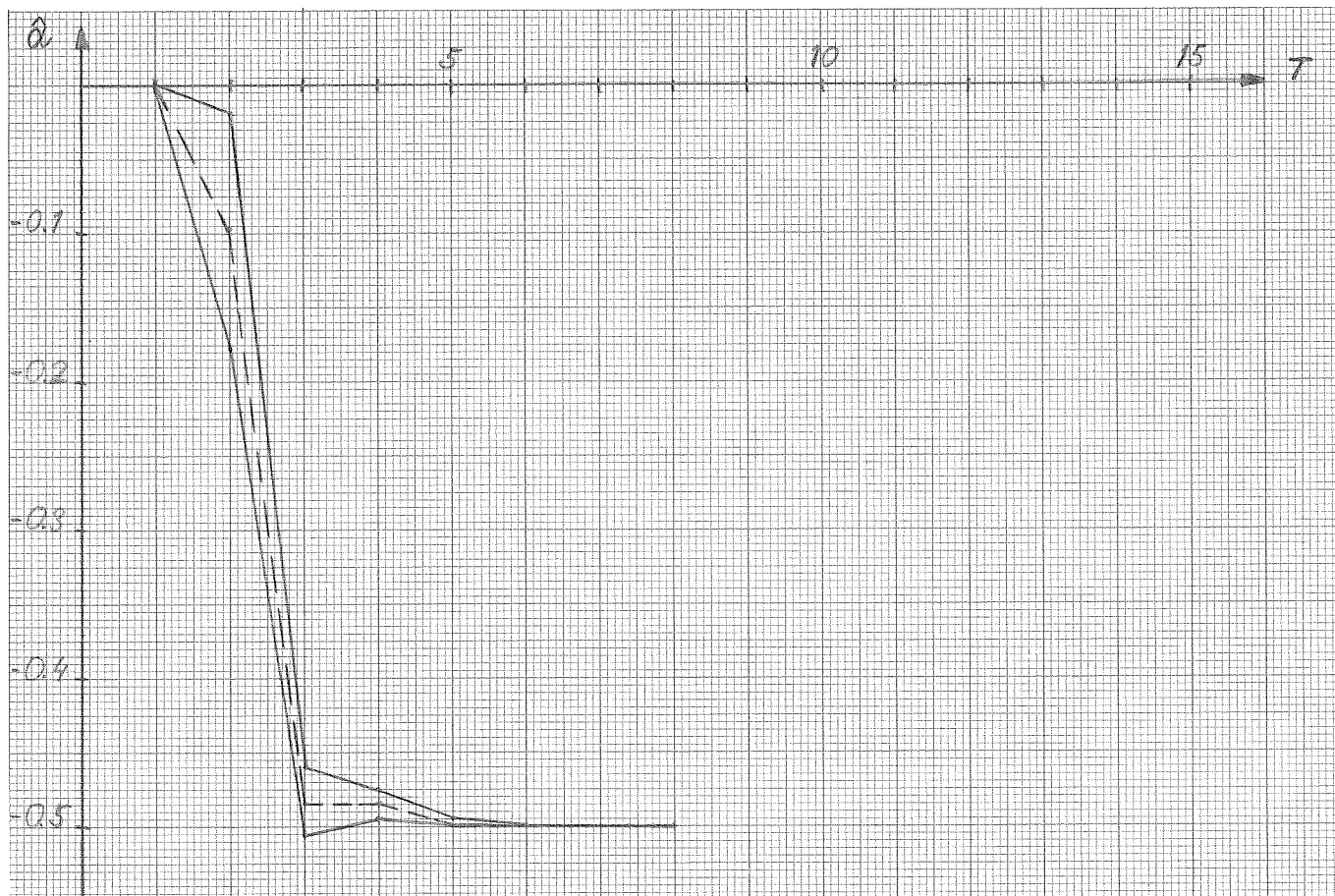


Fig. 4.4. Konvergensförlopp då R_l innehåller kopplingselement. Den streckade kurvan är referenskurvan ($R_{l12} = 0$). Den undre kurvan visar förloppet då $R_{l12} = 10^{-3}$ och den övre då $R_{l12} = -10^{-3}$. (I övrigt $R_l = R_{l_{ref}}$).

4.2.5. Elementens absoluta storlek

Vi skall till sist undersöka om elementens absoluta storlek har någon väsentlig betydelse för konvergensförloppet. För att göra detta har vi skalat upp referensmatrisen 100 ggr resp. 100 000 ggr. I figur 4.5 ser vi, att uppskalningen ger en liten försämring. Denna kan dock betecknas som oväsentlig. Härav drar vi slutsatsen, att det är förhållandet mellan de olika elementen i R_l -matrisen, som är av betydelse för konvergens och inte den absoluta storleken av dessa element.

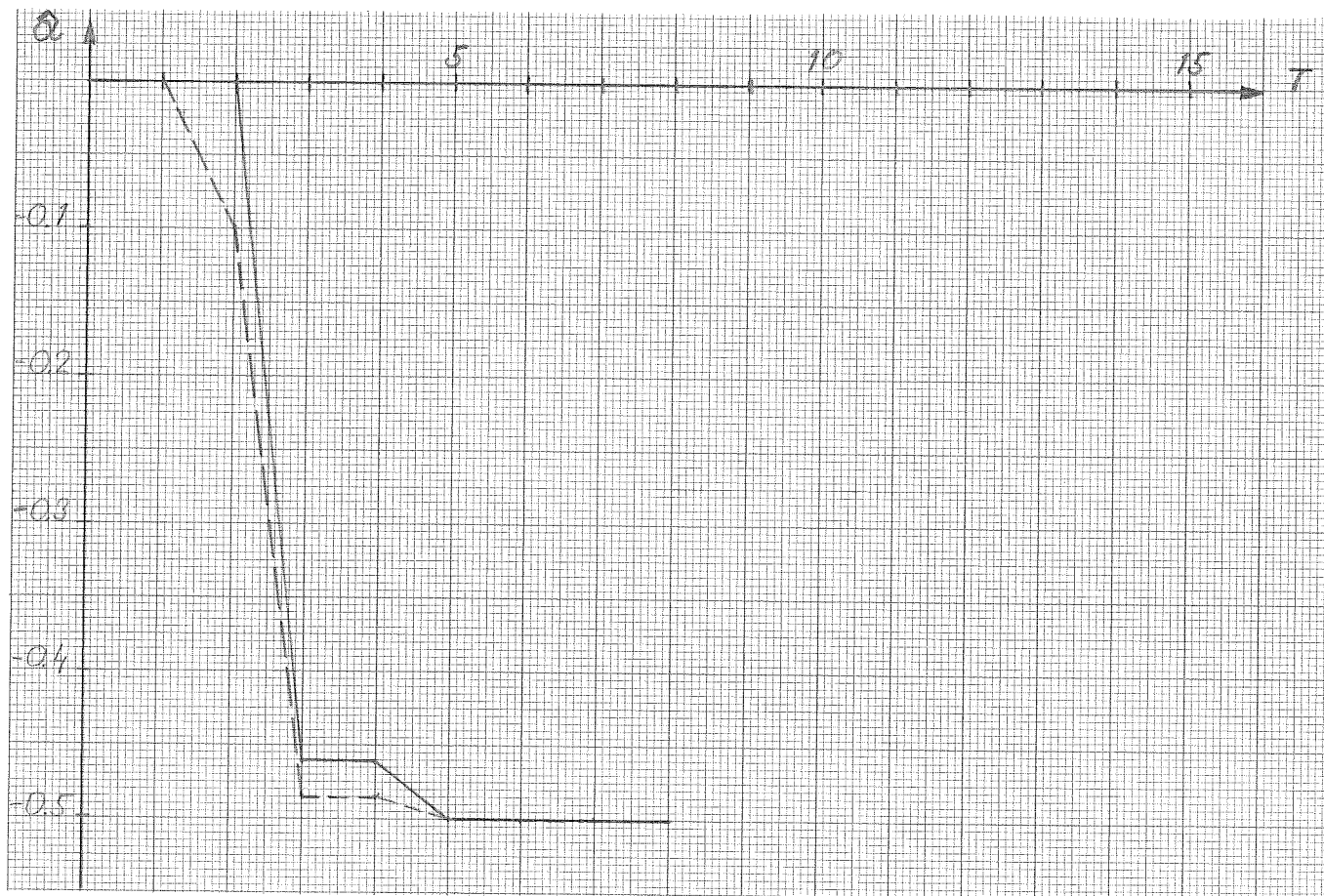


Fig. 4.5. Inverkan på konvergensförloppet av elementens absoluta storlek i R_l . Den streckade kurvan är referenskurvan. Den heldragna kurvan fås då $R_l = 100 \times R_{l_{ref}}$. Samma resultat erhålles om $R_l = 100\,000 \times R_{l_{ref}}$.

4.3. Undersökning på första ordningens system; två obekanta parametrar

4.3.1. Presentation av referensvärde på R_l enligt teori

Väljer vi R_l -matrisen enligt teorin, ekv. (4.1), får vi det konvergensförlopp, som visas i figur 4.6. I detta fall konvergerar $\hat{\alpha}_1$ inom en promille efter tolv samplingsintervall och $\hat{\alpha}_2$ efter sju. Konvergensthastigheten för $\hat{\alpha}_2$ är alltså högre än för $\hat{\alpha}_1$. I jämförelse med avsnitt 4.2.1, där endast α_1 är okänd, blir konvergensten långsammare.

Resultatet kan dock även i detta fall betecknas som gott. Konvergensten är för både $\hat{\alpha}_1$ och $\hat{\alpha}_2$ mycket snabb i början av estimeringen, och redan efter sex samplingsintervall avviker såväl $\hat{\alpha}_1$ som $\hat{\alpha}_2$ mindre än en procent från sina rätta värden.

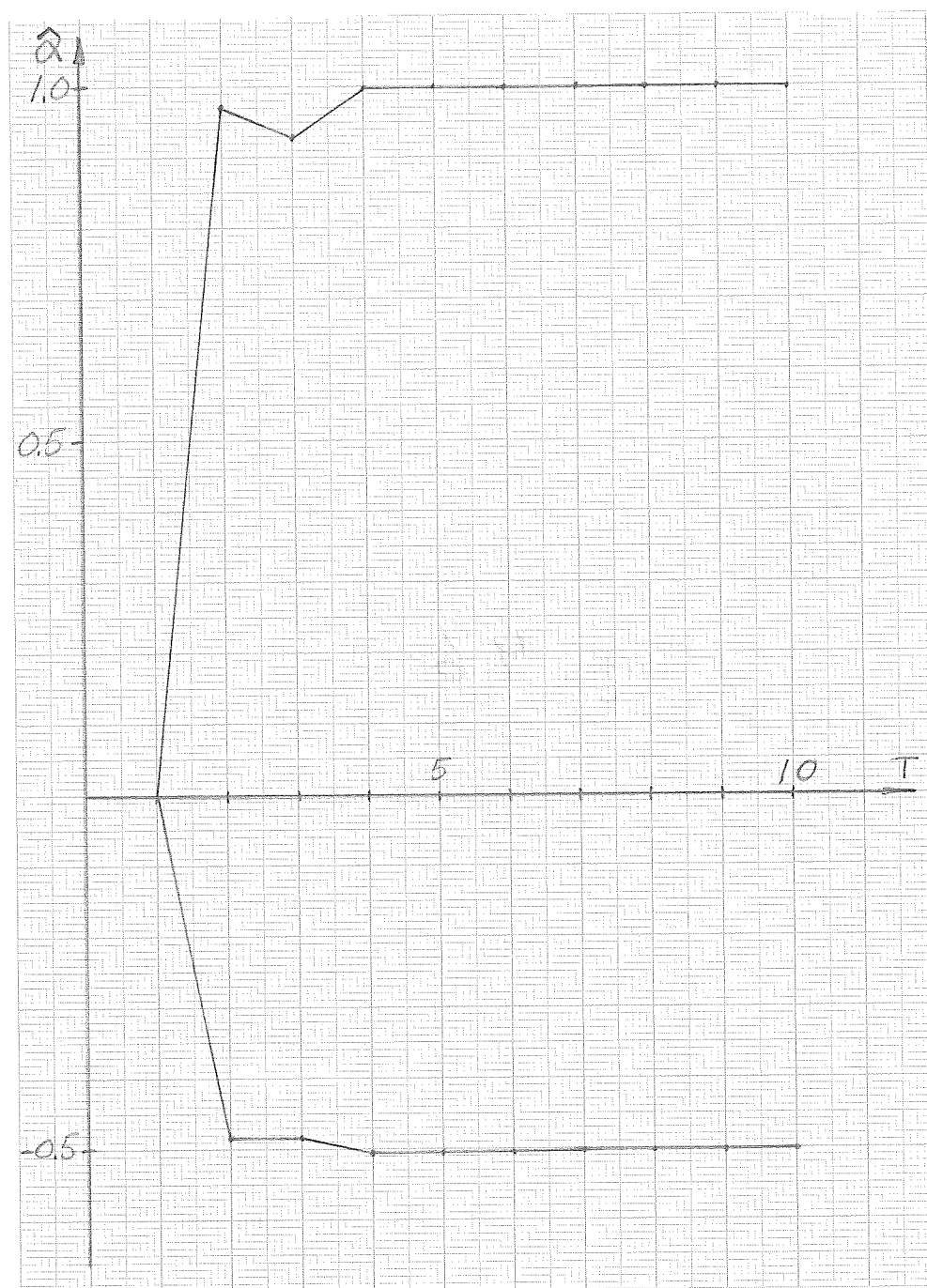


Fig. 4.6. Konvergensförlopp för ett första ordningens system, då kovariansmatriserna valts enligt teorin (referenskurva). Den undre kurvan visar förloppet för systemparametern ($\hat{\alpha}_1$), den övre förloppet för insignalparametern ($\hat{\alpha}_2$).

T anger antal samplingsintervall.

$$P(0) = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}; \quad R1 = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad R2 = 10^{-5}$$

4.3.2. Olika val av R_1 -diagonal

Vi skall i detta avsnitt undersöka, hur olika val av diagonalelementen i R_1 -matrisen påverkar konvergensförloppet. Av figur 4.7 och tabell 4.2 kan vi utläsa, att om R_{11} -elementet är för stort i förhållande till diagonalelementen i R_{22} blir konvergenshastigheten låg. Resultatet bekräftar alltså de iakttagelser vi gjorde, då endast en parameter var okänd. Vi observerar också, att det ej är någon fördel att välja R_{11} mindre än referensvärdet.

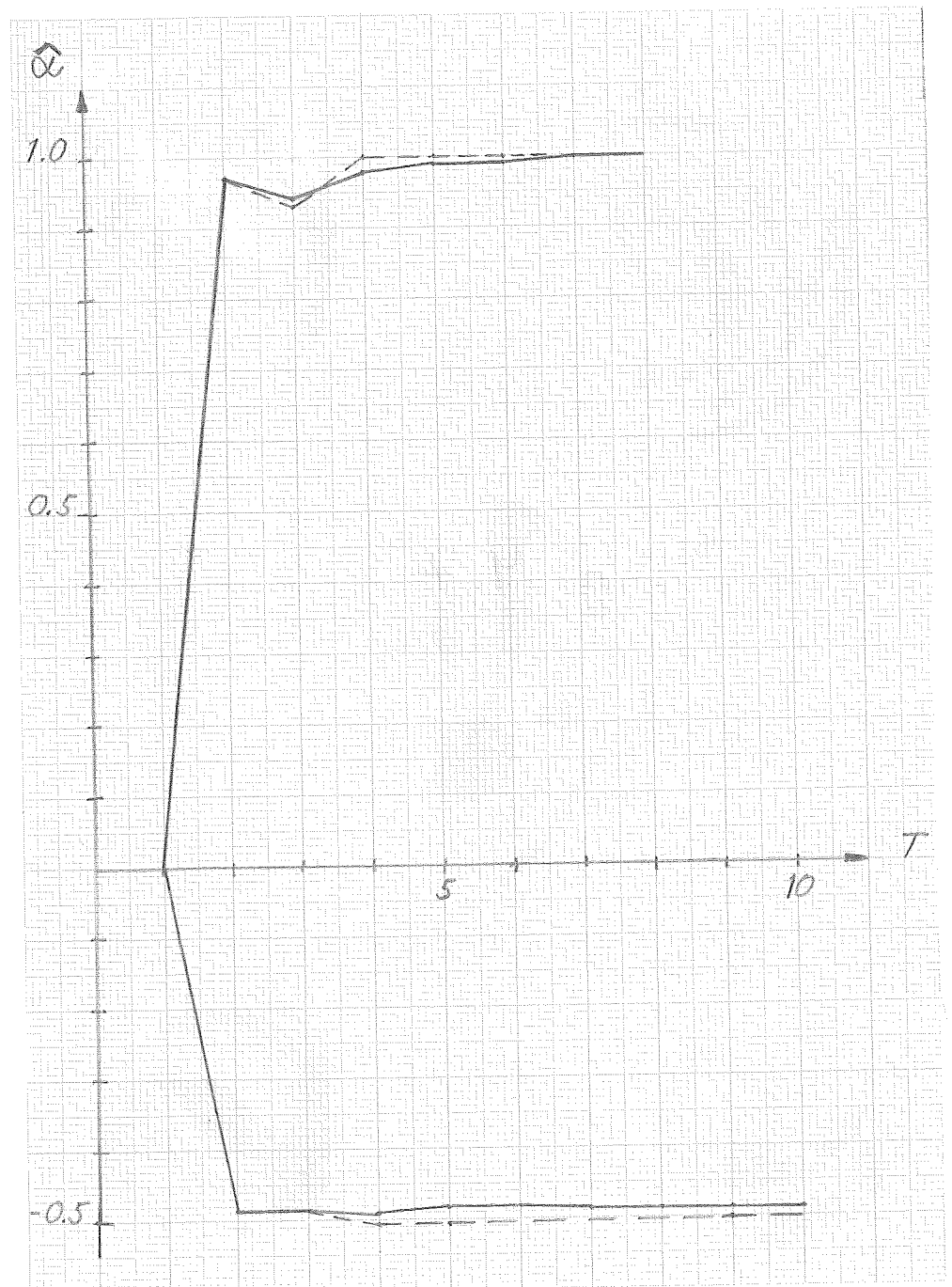


Fig. 4.7. Konvergensförlopp vid olika val av diagonal R_1 -matris. Den streckade kurvan är referenskurvan ($R_{11} = 10^{-5}$ och $R_{22} = I$). Den heldragna kurvan visar förloppet då $R_{11} = 10^{-4}$ och $R_{22} = 10^{-2} \cdot I$. Undre kurvor : $\hat{\alpha}_1$; övre kurvor : $\hat{\alpha}_2$.

4.3.3. Inverkan av kopplingselement

Av figur 4.8 och tabell 4.2 framgår att införande av kopplingselement ej medför någon förbättring av konvergensten. Visserligen förbättnas konvergenstörloppet för $\hat{\alpha}_2$ i begynnelseskedet, men för såväl $\hat{\alpha}_1$ som $\hat{\alpha}_2$ ökar antalet samplingsintervall, för konvergensten inom en promille, jämfört med referensvärdet på R1.

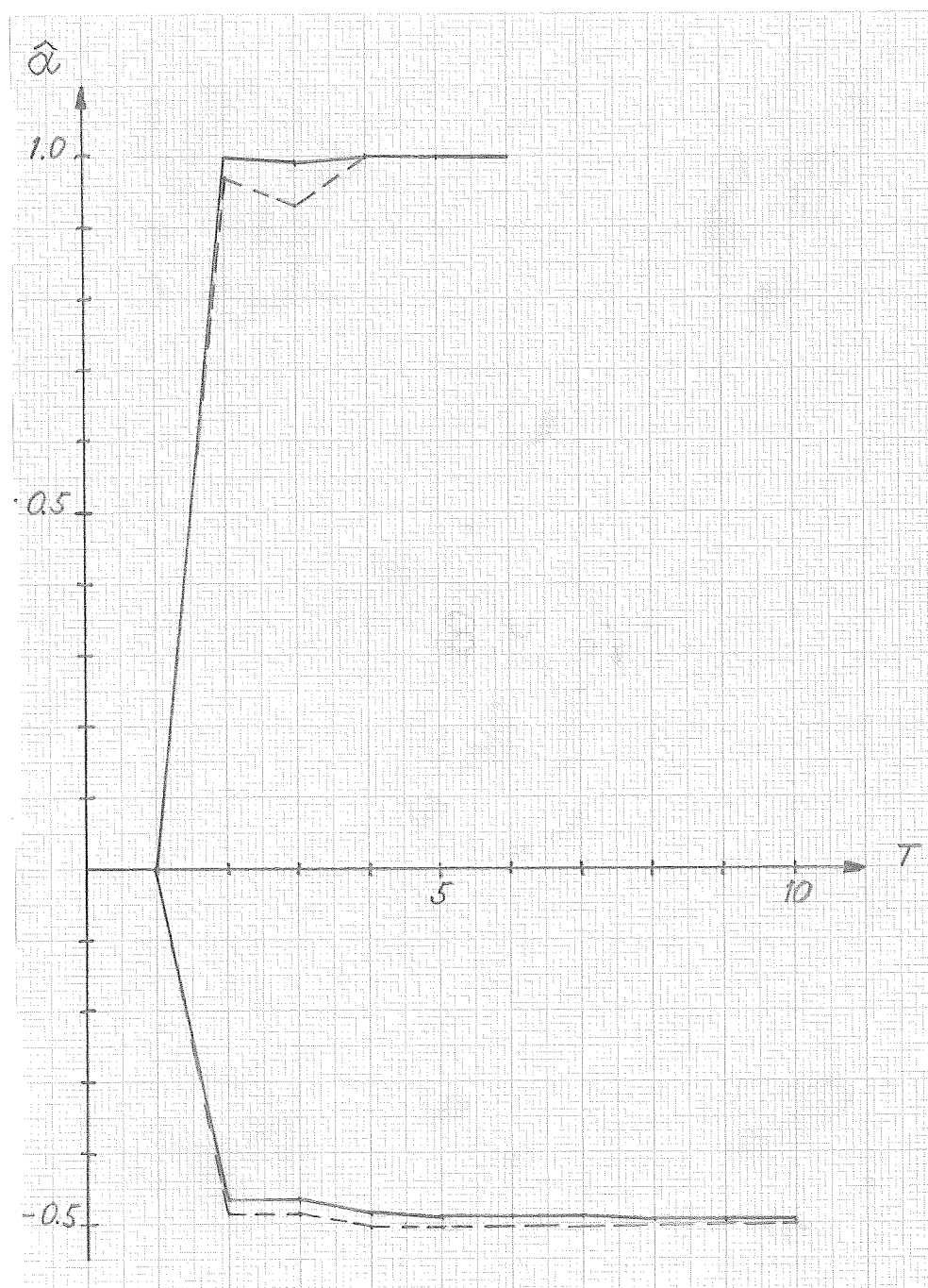


Fig. 4.8. Konvergenstörlopp då R1 innehåller kopplingselement. Den streckade kurvan är referenskurvan ($R_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$). Den heldragna kurvan visar förloppet då $R_{12} = \begin{bmatrix} 0.002 & 0.002 \end{bmatrix}$. (I övrigt $R_1 = R_{1\text{ref}}$). Undre kurvor: $\hat{\alpha}_1$; övre kurvor: $\hat{\alpha}_2$.

4.3.4. Inverkan av koppling mellan parametrar

Vi skall slutligen undersöka om koppling mellan de okända parametrarna har någon betydelse för konvergensen. I figur 4.9 kan vi se, att en sådan koppling ej har någon gynnsam inverkan.

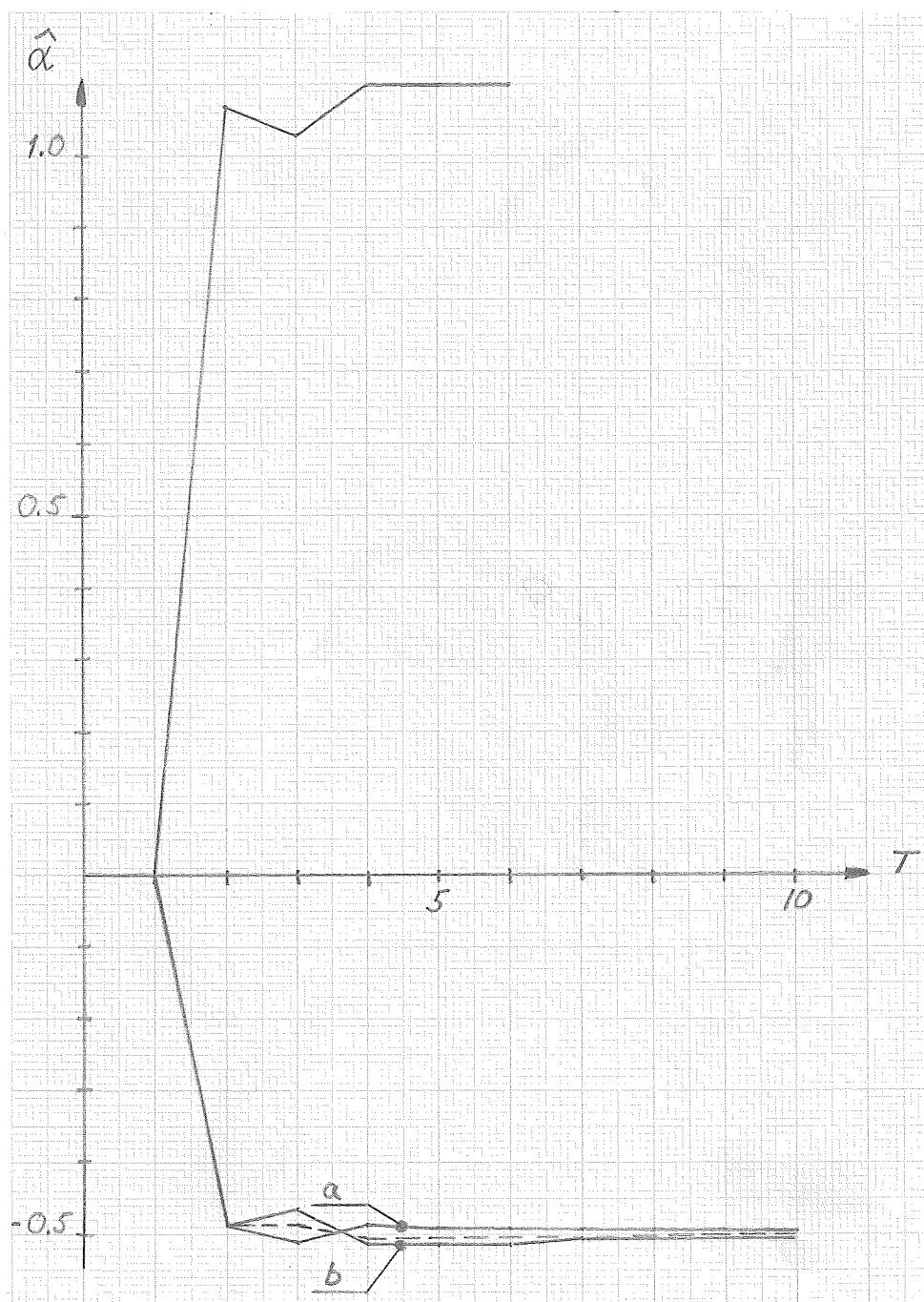


Fig. 4.9. Konvergensförlopp vid koppling mellan parametrar i R_1 . Den streckade kurvan är referenskurvan (ingen koppling mellan $\hat{\alpha}_1$ och $\hat{\alpha}_2$ i R_1). Kurva a visar förloppet då

$$R_{122} = \begin{bmatrix} 1 & +0.5 \\ +0.5 & 1 \end{bmatrix} \text{ och kurva b då } R_{122} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

(I övrigt $R_1 = R_{1\text{ref}}$). Undre kurvor: $\hat{\alpha}_1$; övre kurvor: $\hat{\alpha}_2$. Kurvorna a och b ligger för $\hat{\alpha}_2$ mycket nära referenskurvan.

4.4. Sammanfattning och slutsatser

Resultaten av våra undersökningar på R_1 -matrisen är sammanfattade i tabellerna 4.1 och 4.2, där vi, för olika val av elementen i R_1 , har angivit det antal samplingsintervall, som krävs för att $\hat{\alpha}$ skall avvika mindre än en procent resp. en promille från det rätta värdet.

Ref. till fig.	Matriselement	Värde	T	
			1 %	1 ‰
4.1	R_{1ref}		5	6
4.2	R_{122}	10	5	6
"		10^2	5	5
"		10^3	5	5
"		10^{-1}	6	8
"		10^{-3}	11	21
"		10^{-5}	12	114
4.3	R_{111}	10	>200	>200
"		10^{-1}	102	141
"		10^{-3}	10	12
4.4	R_{112}	10^{-3}	4	6
"		-10^{-3}	5	6
4.5	Uppskalning	10^2 ggr	5	6
"	av R_{1ref}	10^5 ggr	5	6

$$R_{1ref} = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tabl 4.1. Antal samplingsintervall (T), som krävs för att $\hat{\alpha}$ skall avvika mindre än 1 % resp. 1‰ från sitt rätta värde, för några olika val av R_1 -matrisen; en parameter okänd. De ej redovisade matriselementen är samma som i referensmatrisen.

Efter dessa undersökningar kan vi nu, för ett första ordningens system, besvara frågorna 1a. och 2a., som vi ställde i kapitel 3. Den första frågan, hur vi skall välja R_1 -matrisen, ger vi svaret, att referensmatrisen är det bästa val vi kan göra; de redovisade resultaten i tabellerna 4.1 och 4.2 visar, att varje annat val av R_1 -matrisen ger ett sämre eller likvärdigt konvergensförlopp.

Den andra frågan, hur konvergensförloppet påverkas av ett felaktigt val av R_1 , besvarar vi genom att sammanfatta de resultat, som vunnits i detta kapitel.

Ref. till fig.	Matris-element	Värde	T			
			1 %		1 ‰	
			$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$
4.6	Rl _{ref}		6	4	12	7
4.7	Diagonal-element i Rl	$\begin{bmatrix} 10^{-6} & 1 & 1 \\ 10^{-6} & 10^{-2} & 10^{-2} \\ 10^{-4} & 1 & 1 \\ 10^{-4} & 10^{-2} & 10^{-2} \end{bmatrix}$	7	4	16	7
"			5	4	14	5
"			4	4	12	5
"			19	5	38	23
4.8	Rl ₁₂	$\begin{bmatrix} 0.002 & 0.002 \end{bmatrix}$	8	4	15	12
4.9	Rl ₂₂	$\begin{bmatrix} 1 & +0.5 \\ +0.5 & 1 \end{bmatrix}$	8	4	15	12
"		$\begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$	12	4	23	12

$$Rl_{ref} = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tab. 4.2. Antal samplingsintervall (T), som krävs för att $\hat{\alpha}$ skall avvika mindre än 1 % resp. 1 ‰ från sitt rätta värde, för några olika val av Rl-matrisen; två parametrar okända. De ej redovisade matriselementen är samma som i referensmatrisen.

Till att börja med har vi funnit, att det är förhållandet mellan elementen i Rl, som är av betydelse, och att man inte erhåller någon höjning av konvergenshastigheten genom att öka elementens absoluta storlek; det medför emellertid ej någon väsentlig försämring.

Vi har vidare funnit, att införande av kopplingselement ej har någon gynnsam effekt på estimeringen; antingen påverkar de konvergenshastigheten obetydligt eller försämrar de denna, jämfört med en diagonal Rl-matris.

Även koppling mellan okända parametrar har vi funnit ha en ogynnsam inverkan; konvergenshastigheten blir märkbart försämrad.

Den bästa strukturen på Rl måste alltså vara en diagonalmatris, då införande av icke-diagonala element i matrisen i allmänhet endast leder till en försämring av konvergensförloppet. Detta förhållande beror på att Rl-matrisen är tidsinvariant. De icke-diagonala elementen i Rl kommer, då de adderas till motsvarande element i P(0)-matrisen, ibland att samverka med dessa, ibland att motverka dem, vilket medför att korrigeringarna ej blir optimala. Det är emellertid viktigt att observera, att vi, genom att välja rätt tecken på de icke-diagonala elementen, kan öka konvergenshastigheten i begynnelseskedet (se figur 4.8 : $\hat{\alpha}_2$).

Den faktor, som till största delen är bestämmande för konvergensförloppets utseende, är förhållandet mellan de diagonala elementen. Vi har här funnit, att om R_{11} -elementet är stort i förhållande till diagonalelementen i R_{22} blir konvergensens försiktig och långsam. Om det motsatta förhållandet råder blir konvergensens snabb, men samtidigt också slängig.

I den följande framställningen har vi antagit, att ovanstående resultat är tillämpligt även på system av högre ordning, och utnyttjar därvid följande val av R -matrisen:

$$R = \left[\begin{array}{c|c} 10^{-5} \cdot I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \quad (4.3)$$

5. KÄNSLIGHETEN FÖR VALET AV $P(0)$; EXEMPEL

5.1. Inledning

I detta kapitel skall vi visa hur valet av $P(0)$ -matrisen påverkar estimeringsförloppet. Vi begränsar oss även här till Ex. 1 och sätter $\hat{a}(0) = 0$. R1-matrisen väljer vi enligt slutsatserna i föregående kapitel, dvs.

$$R1 = \left[\begin{array}{c|c} 10^{-5} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]$$

Som referensvärde på $P(0)$ använder vi ekv. (4.2), dvs.

$$P(0)_{\text{ref}} = \left[\begin{array}{c|c} 10^{-5} & 0 \\ \hline 0 & M_0 M_0^T \end{array} \right] \quad (5.1)$$

5.2. Undersökning på första ordningens system; en obekant parameter

5.2.1. Presentation av referensvärde på $P(0)$ enligt teori

Då vi väljer $P(0)$ enligt teorin (ekv. (5.1)) får vi samma konvergensförlopp som i figur 4.1.

5.2.2. $P(0)_{11}$ konstant; $P(0)_{22}$ varierar

Konvergensthastigheten är relativt okänslig för storleksändringar av $P(0)_{22}$. Det framgår av figur 5.1 och tabell 5.1 att en minskning av $P(0)_{22}$, i förhållande till referensvärdet, ger en obetydlig försämring; en ökning av $P(0)_{22}$ ger däremot en liten förbättring. Vi observerar emellertid, att förbättringen inte är proportionell mot ökningen av $P(0)_{22}$; genom att öka $P(0)_{22}$ från 10 till 1000 vinner vi inte någonting.

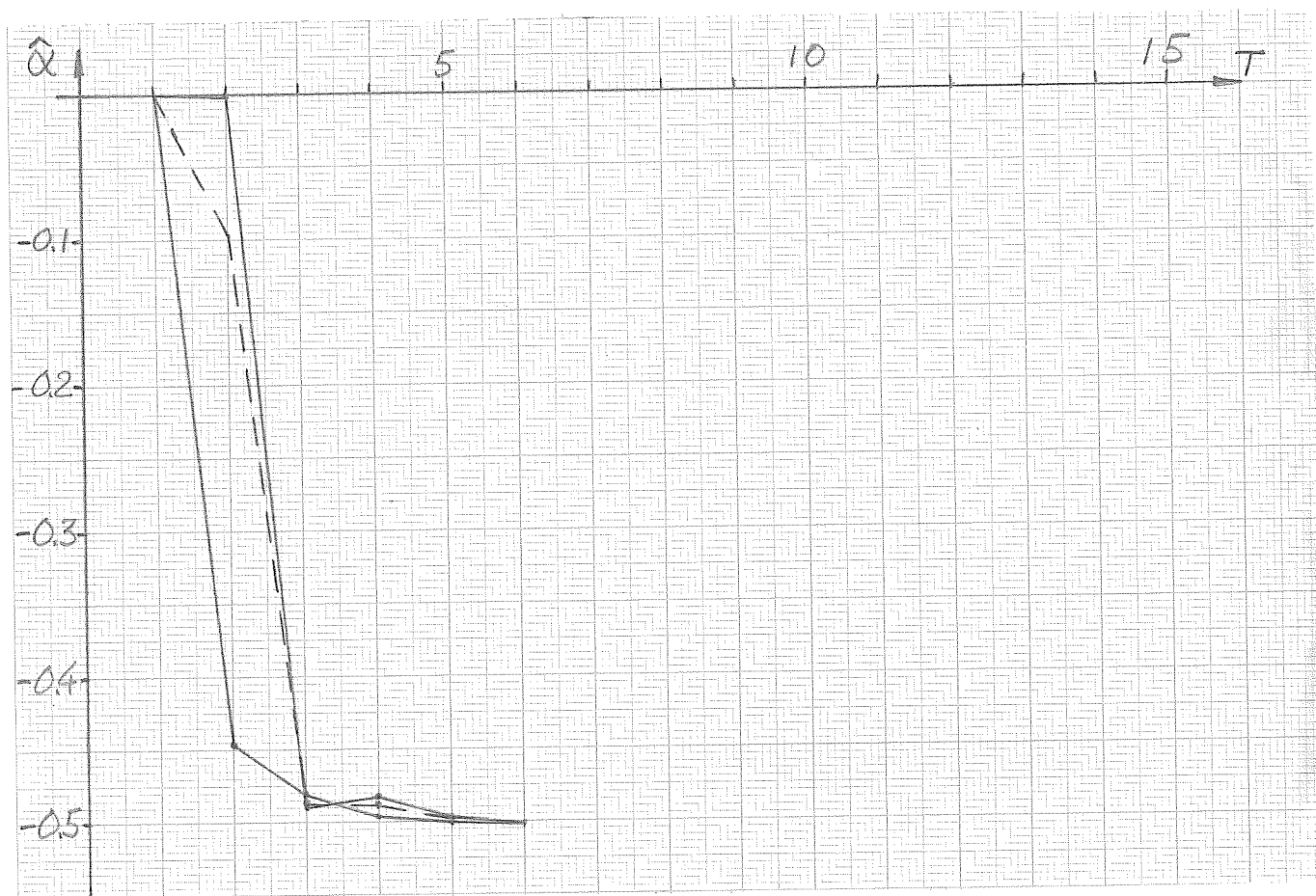


Fig. 5.1. Konvergenzförlopp då $P(0)_{22}$ varierar. Den streckade kurvan är referenskurvan ($P(0)_{22} = 0.25$). Den undre kurvan visar förloppet då $P(0)_{22} = 10$ och den övre då $P(0)_{22} = 10^{-5}$. (I övrigt $P(0) = P(0)_{\text{ref}}$).

5.2.3. $P(0)_{22}$ konstant; $P(0)_{11}$ varierar

Figur 5.2 och tabell 5.1 visar, att konvergensförloppet knappast förändrar sig alls, då $P(0)_{11}$ varierar från referensvärdet upp till 100. Konvergensten är alltså nästan helt oberoende av hur $P(0)_{11}$ väljes.



Fig. 5.2. Konvergensförlopp då $P(0)_{11}$ varierar. Den streckade kurvan är referenskurvan ($P(0)_{11} = 10^{-5}$). Den heldragna kurvan visar förloppet då $P(0)_{11} = 10^{-3}$. Samma resultat erhålles om $P(0)_{11} = 100$. (I övrigt $P(0) = P(0)_{ref}$).

5.2.4. Inverkan av kopplingselement

Som framgår av figur 5.3 ger kopplingselement ej någon förbättring av konvergensen. Inverkan är rätt obetydlig.

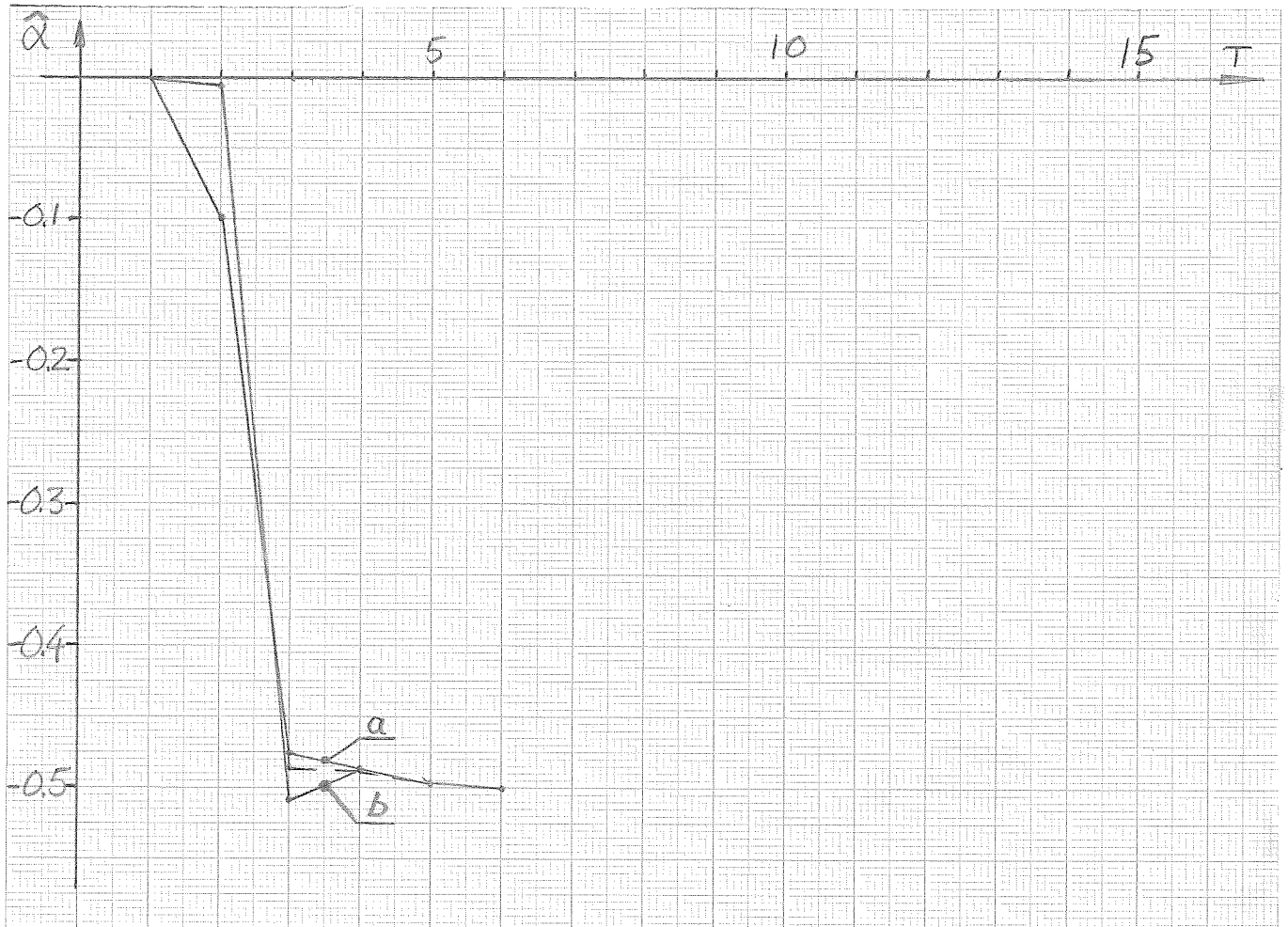


Fig. 5.3. Konvergensförlopp då $P(0)$ innehåller kopplingselement. Den streckade kurvan är referenskurvan ($P(0)_{12} = 0$). Kurva a visar förloppet då $P(0)_{12} = +0.0015$ och kurva b då $P(0)_{12} = -0.0015$. (I övrigt $P(0) = P(0)_{\text{ref}}$).

5.2.5. Elementens absoluta storlek

Vi undersöker även för $P(0)$ -matrisen, om elementens absoluta storlek har någon väsentlig betydelse för konvergensförloppet. En uppskalning av referensmatrisen ger det resultat, som visas i figur 5.4, där vi kan utläsa, att uppskalningen medför en viss förbättring i begynnelseskedet. Vi betecknar dock denna som relativt oväsentlig.

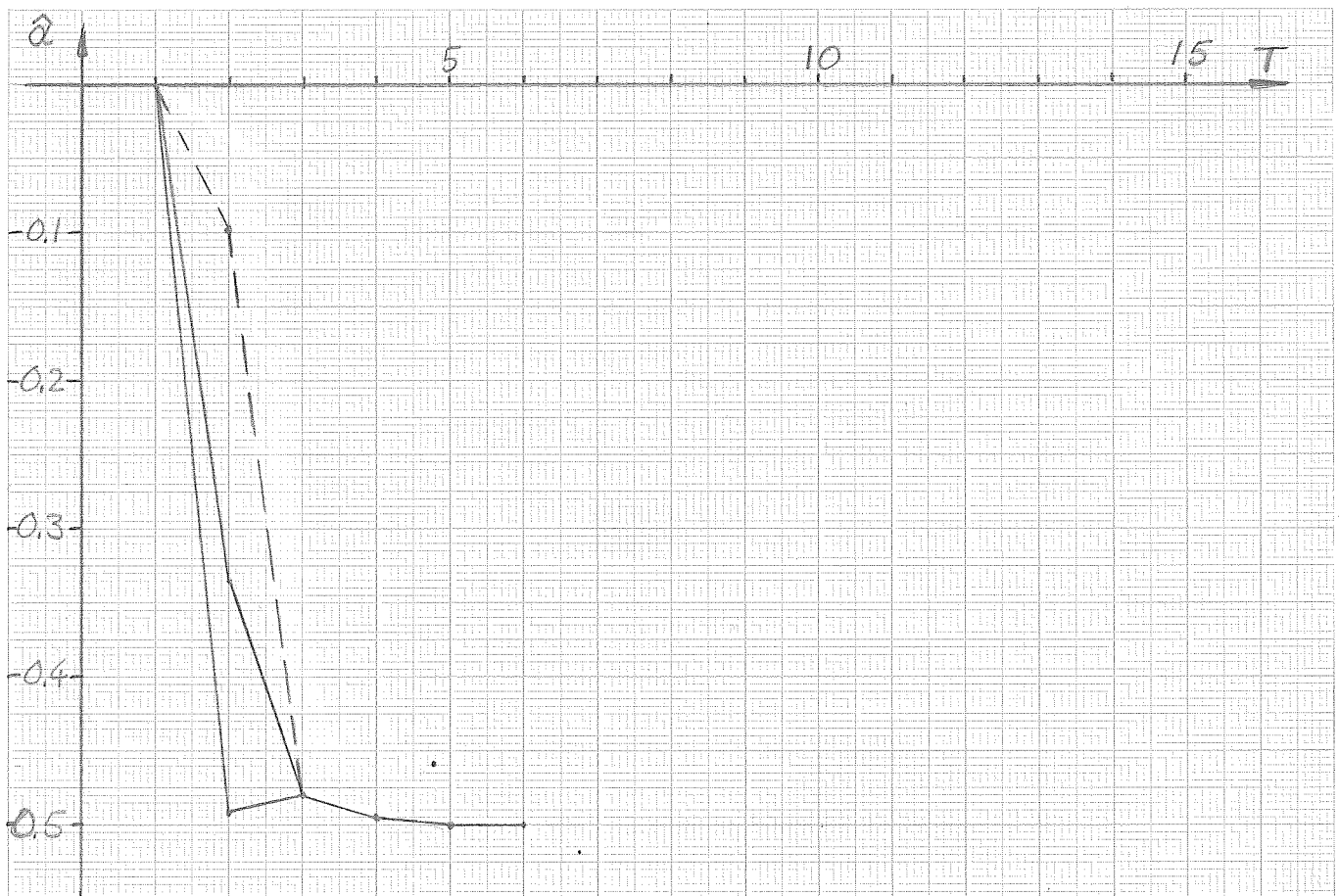


Fig. 5.4. Inverkan på konvergensförloppet av elementens absoluta storlek i $P(0)$. Den streckade kurvan är referenskurvan. Den övre heldragna kurvan fås då $P(0) = 10 \times P(0)_{ref}$ och den undre då $P(0) = 10^5 \times P(0)_{ref}$.

5.3. Undersökning på första ordningens system; två obekanta parametrar

5.3.1. Presentation av referensvärde på $P(0)$ enligt teori

Då vi väljer $P(0)$ enligt teorin (ekv. (5.1)) får vi samma konvergensförlopp som i figur 4.6.

5.3.2. Olika val av $P(0)$ -diagonal

Vi skall nu undersöka hur konvergensen förändras, om vi slopar den koppling mellan de okända parametrarna vi har i referensmatrisen. ($P(0)$ blir då en diagonalmatris).

Figur 5.5 visar, att denna diagonala $P(0)$ -matris ger ett dåligt konvergensförlopp; konvergenshastigheten för $\hat{\alpha}_1$ är låg och $\hat{\alpha}_2$ svänger kraftigt kring sitt rätta värde. Vi undersöker därför om konvergensen kan förbättras genom att välja diagonalelementen i $P(0)_{22}$ på ett annat sätt.

Av figur 5.6 framgår, att konvergensförloppet blir bättre för stora värden på $P(0)_{22}$ -diagonal än för små. Jämfört med figur 5.5 medför en minskning av $P(0)_{22}$ -diagonal en mycket liten försämring; en ökning medför däremot en påtaglig förbättring. Konvergenshastigheten för såväl $\hat{\alpha}_1$ som $\hat{\alpha}_2$ ökar och konvergensförloppet för $\hat{\alpha}_2$ blir mindre slängigt. I jämförelse med referensmatrisen ger dock varje val av $P(0)$ -diagonal ett sämre konvergensförlopp. (Se också tabell 5.2).

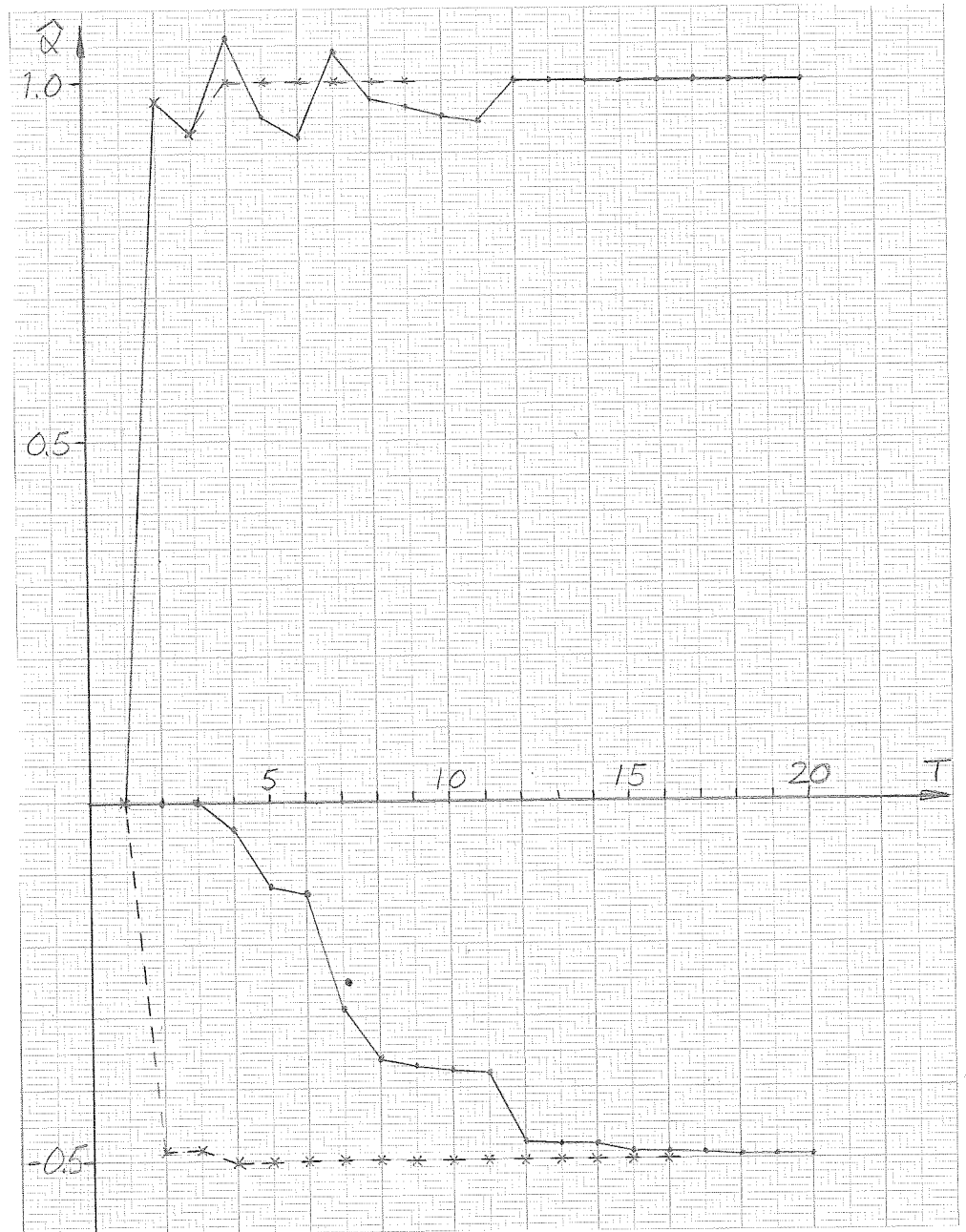


Fig. 5.5. Jämförelse mellan konvergensförloppen för referensmatrisen (streckad kurva) och diagonal $P(0)$ -matris (heldragen kurva). Undre kurvor: $\hat{\alpha}_1$; övre kurvor: $\hat{\alpha}_2$. (Diagonalelement: 10^{-5} , 0.25, 1).

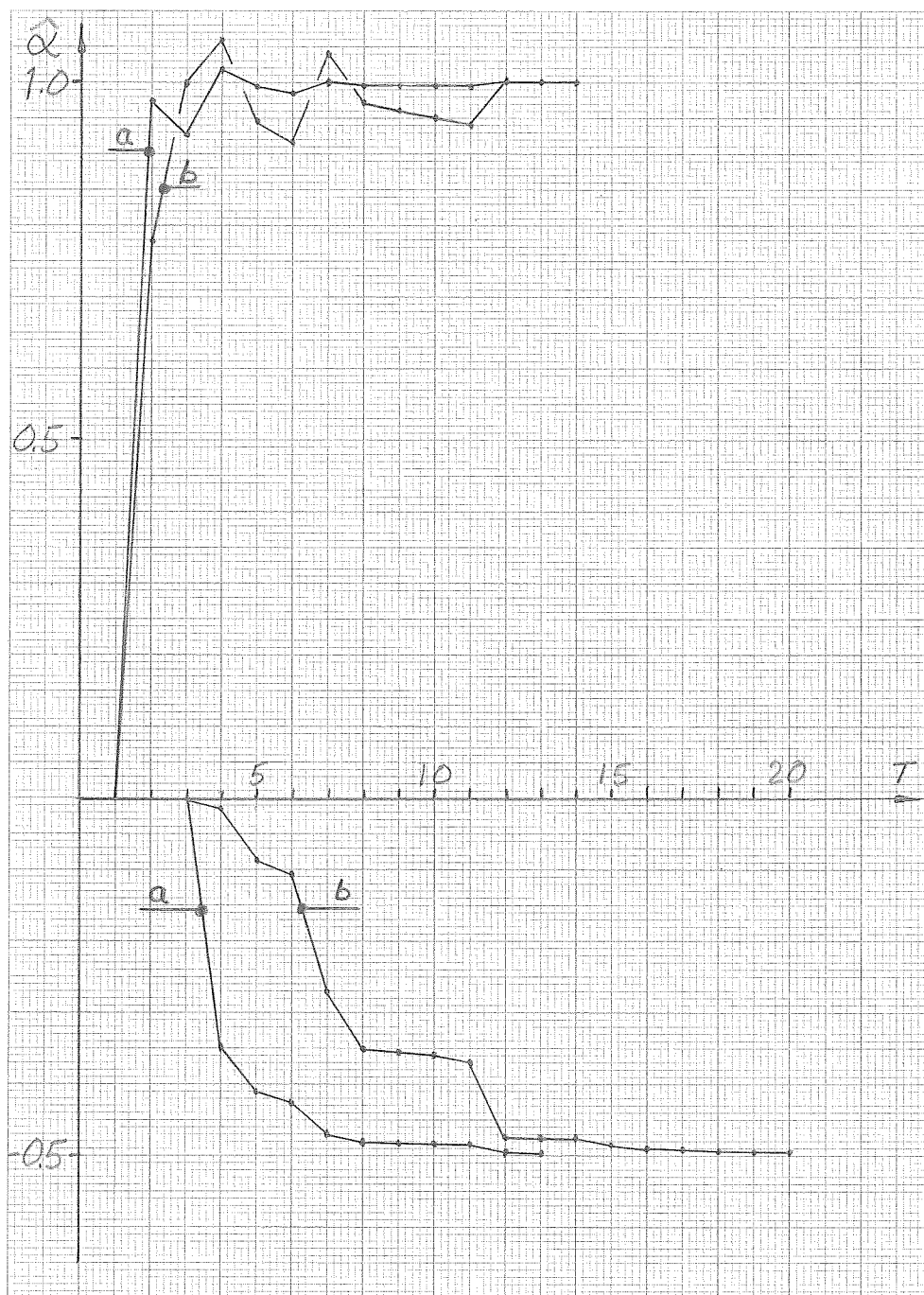


Fig. 5.6. Konvergensförlopp vid olika val av diagonal $P(0)$ -matris. Kurva a visar förloppet för diagonalelementen: 10^{-5} ; 25, 100 och kurva b för diagonalelementen: 10^{-5} , 0.0025, 0.01. Undre kurvor: α_1 ; övre kurvor: α_2 .

5.3.3. Inverkan av kopplingselement

Vi undersöker här inverkan av kopplingselement på en diagonal matris. Figur 5.7 visar, att två kopplingselement ger ett bättre resultat än endast ett. Jämför vi med figur 5.5 ser vi, att inverkan av kopplingselement är obetydlig. (Se också tabell 5.2)

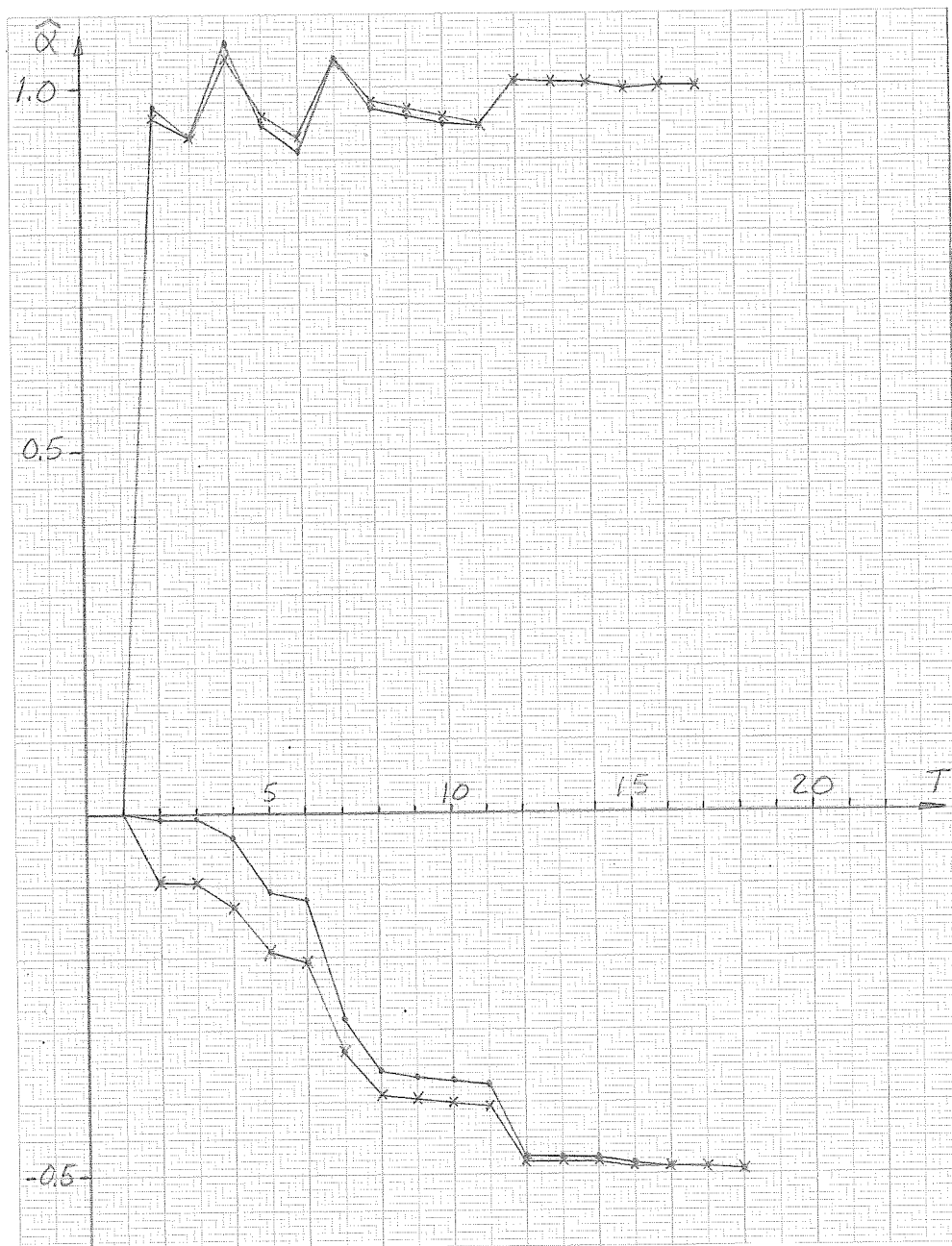


Fig. 5.7. Konvergensförlopp då $P(0)$ innehåller kopplingselement. Den punktmarkerade kurvan visar förloppet då $P(0)_{12} = \begin{bmatrix} 0.0015 & 0 \end{bmatrix}$ och den kryssmarkerade då $P(0)_{12} = \begin{bmatrix} 0.0015 & 0.0015 \end{bmatrix}$. Diagonalelement: 10^{-5} , 0.25 , 1 . Undre kurvor: $\hat{\alpha}_1$; övre kurvor: $\hat{\alpha}_2$.

5.3.4. Koppling mellan parametrar

5.3.4.1. Absoluta storleken av parameterfelet i $P(0)$

Submatrisen $P(0)_{22}$ i referensmatrisen är i figur 5.8 upp- resp. nedskalad 100 ggr. En uppskalning visar sig ge samma resultat som referensmatrisen, medan en nedskalning medför en försämring av konvergensthastigheten.

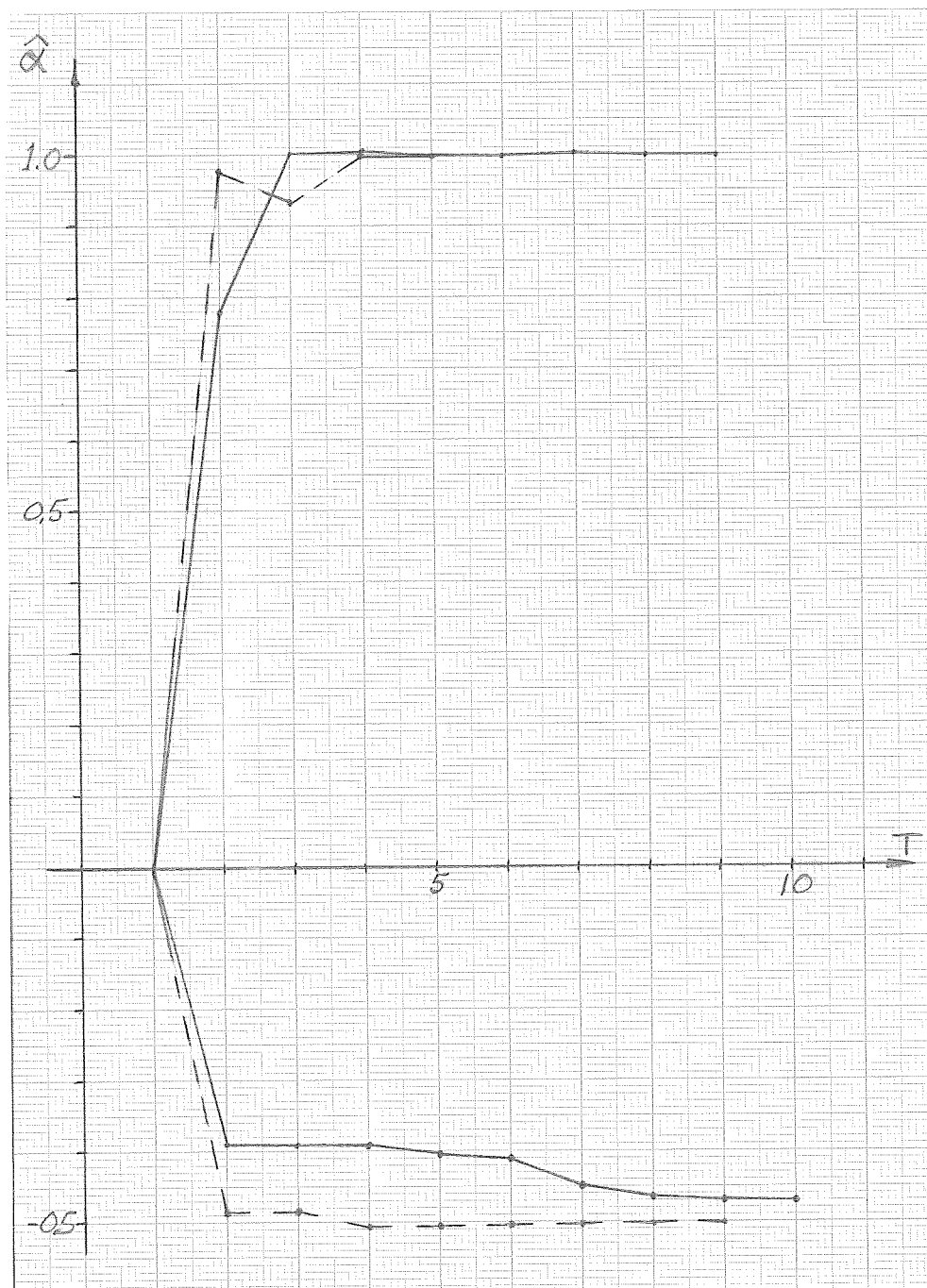


Fig. 5.8. Konvergenzförlopp då $M_0 M_0^T$ skalas. Den streckade kurvan är referenskurvan. Den heldragna kurvan fås då $P(0)_{22} = 0.01 \times P(0)_{22 \text{ ref}}$. $P(0)_{22} = 100 \times P(0)_{22 \text{ ref}}$ ger samma resultat som $P(0)_{22 \text{ ref}}$. (I övrigt $P(0) = P(0)_{\text{ref}}$). Undre kurvor: $\hat{\alpha}_1$; övre kurvor: $\hat{\alpha}_2$.

5.3.4.2. Olämpligt val av parametrarnas begynnelsevarians

Vi skall i detta avsnitt visa, hur man genom ett olämpligt val av de element i submatrisen $P(0)_{22}$, som utgör en koppling mellan de okända parametrarna, kan få ett mycket ogynnsamt estimeringsförlopp.

Ett positivt värde på ett sådant kopplingselement betyder, att initialgissningarna av de två kopplade parametrarna båda är mindre än (eller båda större än) sina respektive rätta värden^{x)}. Estimeringsförloppet förlöper med andra ord åt samma håll för de båda parametrarna. I annat fall skall värdet vara negativt. Estimeringsförloppet förlöper då åt olika håll för de båda parametrarna.

I referensmatrisen har vi, i enlighet med ovanstående, ett negativt värde på kopplingen mellan $\hat{\alpha}_1(0)$ och $\hat{\alpha}_2(0)$. Vi undersöker därför, vilket utseende estimeringsförloppet får, om vi väljer ett positivt värde på kopplingen.

Av figur 5.9 kan vi utläsa, att detta val av $P(0)_{22}$ ger ett mycket dåligt resultat. Konvergensförloppet löper för $\hat{\alpha}_1$ i början åt fel håll och konvergensthastigheten blir för både $\hat{\alpha}_1$ och $\hat{\alpha}_2$ låg. Vi observerar också, att resultatet blir sämre, ju kraftigare kopplingen är.

Om alla elementen i $P(0)_{22}$ -matrisen är lika, betyder detta, att vi har en fullständig koppling, dvs. alla parametrar skall vara lika. Vi ser i figur 5.9, att även om vi väljer $P(0)_{22}$ på detta sätt, kommer parametrarna att separera från varandra och konvergera mot sina rätta värden. Väljer vi emellertid även R1-matrisen med fullständig koppling mellan parametrarna, kommer dessa under estimeringen alla att anta samma värde och vi kan inte identifiera någon av dem^{xx)}. (Se figur 5.10).

x) Dvs. $\hat{\alpha}_1(0) < \alpha_1$ och $\hat{\alpha}_2(0) < \alpha_2$ eller $\hat{\alpha}_1(0) > \alpha_1$ och $\hat{\alpha}_2(0) > \alpha_2$.

xx) Såvida de inte skall vara lika.

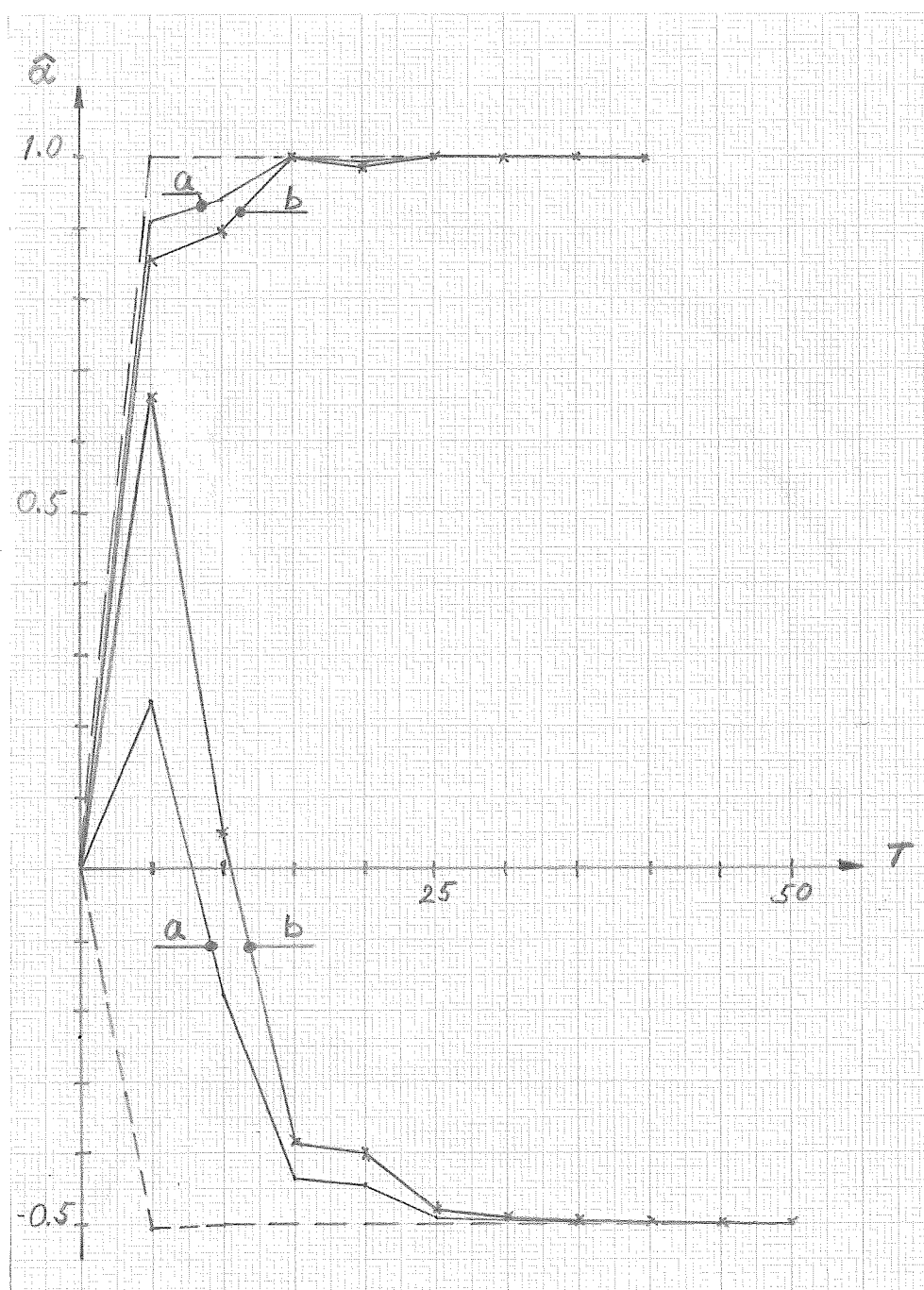


Fig. 5.9. Konvergensförlopp vid olämpligt val av $P(0)_{22}$.
Den streckade kurvan är referenskurvan;

$$P(0)_{\text{ref}} = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Kurva a fås då } P(0) = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & +0.5 \\ 0 & +0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Kurva b fås då } P(0) = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Undre kurvor: } \hat{\alpha}_1;$$

Övre kurvor: $\hat{\alpha}_2$. (Obs! $\hat{\alpha}$ uppmätt endast vid vart femte samplingsintervall).

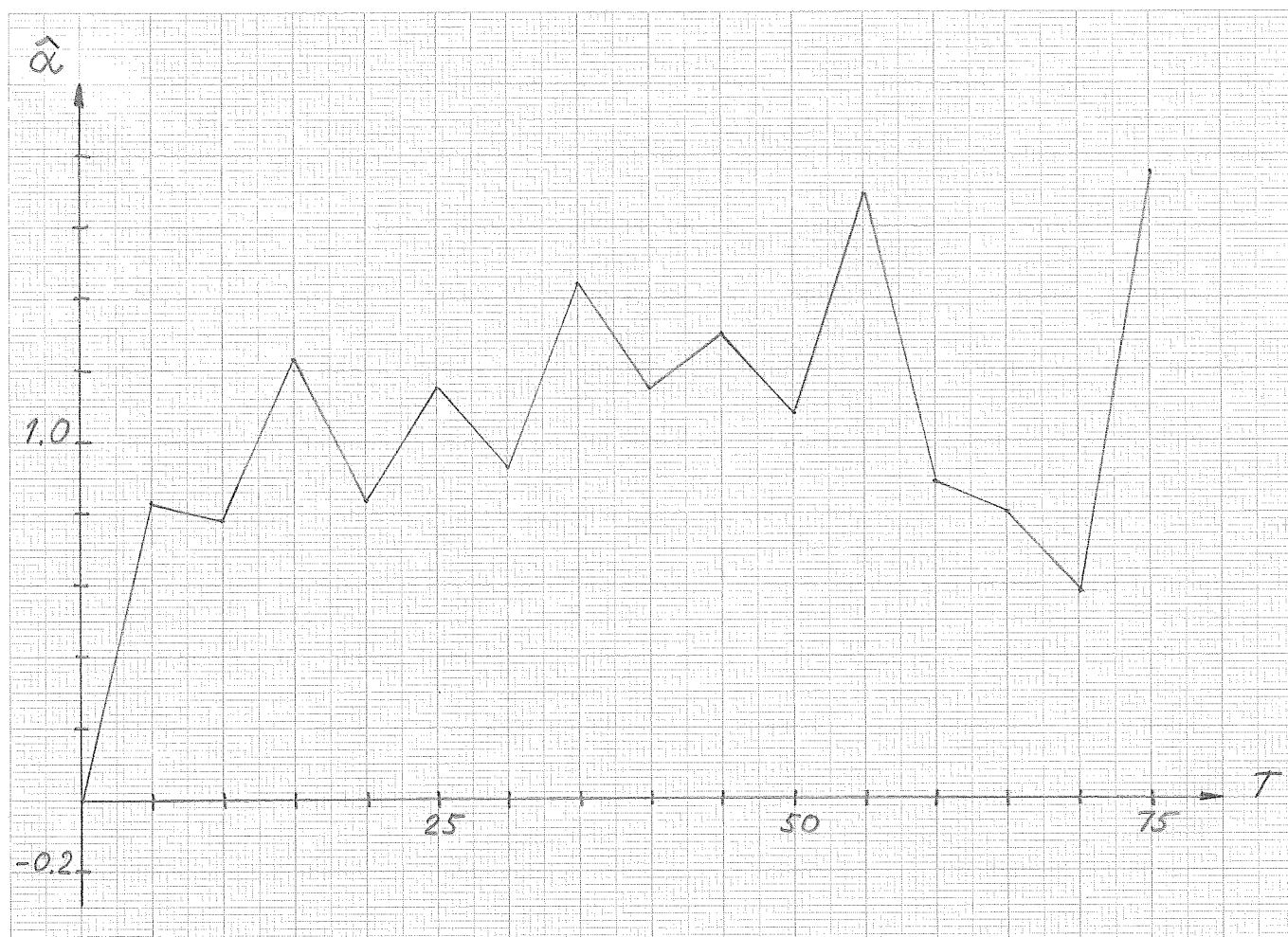


Fig. 5.10. Estimeringsförlopp vid fullständig koppling mellan parametrar. \hat{a}_1 och \hat{a}_2 antar samma värde, vilket medför att ingen av dem kan identifieras.

$$P(0) = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad R1 = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5.4. Sammanfattning och slutsatser

Resultaten av våra undersökningar på $P(0)$ -matrisen är sammanfattade i tabellerna 5.1 och 5.2, där vi, för olika val av elementen i $P(0)$, har angivit det antal samplingsintervall, som krävs för att $\hat{\alpha}$ skall avvika mindre än en procent resp. en promille från det rätta värdet.

Ref. till fig.	Matris-element	Värde	T	
			1 %	1 ‰
4.1	$P(0)_{ref}$		5	6
5.1	$P(0)_{22}$	10^{-5}	5	5
"	"	10^{-3}	5	6
"	"	10	4	5
"	"	10^2	4	5
"	"	10^3	4	5
5.2	$P(0)_{11}$	10^{-3}	5	6
"	"	10^{-1}	5	6
"	"	10^2	5	6
"	"	10^3	5	6
5.3	$P(0)_{12}$	+0.0015	5	6
"	"	-0.0015	5	6
5.4	Uppskalning av $P(0)$	10 ggr	4	5
"	"	10^3 ggr	4	5
"	"	10^5 ggr	4	5

$$P(0)_{ref} = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Tab. 5.1. Antal samplingsintervall, som krävs för att $\hat{\alpha}$ skall avvika mindre än 1 % resp. 1 ‰ från sitt rätta värde, för några olika val av $P(0)$ -matrisen; en parameter okänd. De ej redovisade matriselementen är samma som i referensmatrisen.

Vi skall nu för ett första ordningens system besvara frågorna 1b., och 2b., som vi ställde i kapitel 3. Vi gör detta genom att diskutera de resultat, som vunnits i detta kapitel.

Till att börja med observerar vi, att $P(t)$ -matrisen p.g.a. sin tidsvariabla karaktär, är mindre känslig för en felaktig initialgissning än felaktig R_1 -matris. Genom att välja $P(0)$ -matrisen på ett lämpligt sätt, kan vi emellertid erhålla en redan i begynnelseskedet hög konvergensthastighet.

Ref. till fig.	Matris-element	Värde	T			
			1 %		1 ‰	
			$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$
4.6	$P(0)_{ref}$		6	4	12	7
5.8	$P(0)_{22}$ (Skala)	$\begin{bmatrix} 0.0025 & -0.005 \\ 0.005 & 0.01 \end{bmatrix}$	14	12	22	14
"		$\begin{bmatrix} 25 & -50 \\ -50 & 100 \end{bmatrix}$	7	4	12	7
5.6	$P(0)_{22}$ (Diagonal)	$\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$	12	7	19	13
5.5		$\begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	18	12	31	22
5.6		$\begin{bmatrix} 0.0025 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$	19	12	32	22
5.9	$P(0)_{22}$	$\begin{bmatrix} 1. & +0.5 \\ +0.5 & 1. \end{bmatrix}$	30	23	42	28
"		$\begin{bmatrix} 1. & 1. \\ 1. & 1. \end{bmatrix}$	35	25	45	30
5.7	$P(0)_{12}$	$\begin{bmatrix} 0.0015 & 0. \\ 0.0015 & 0.0015 \end{bmatrix}$	18	12	32	22
			18	12	30	17

$$P(0)_{ref} = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0.5-0.5 & \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Tab. 5.2. Antal samplingsintervall, som krävs för att $\hat{\alpha}$ skall avvika mindre än 1 % resp. 1 ‰ från sitt rätta värde, för några olika val av $P(0)$ -matrisen; två parametrar okända. De ej redovisade matriselementen är samma som i referensmatrisen.

Vi observerar vidare, liksom vid R_1 -matrisen, att förhållandet mellan de olika elementen i $P(0)$ -matrisen är av större betydelse för konvergensförloppets utseende än elementens absoluta storlek.

Till skillnad från förhållandet vid R_1 -matrisen har vi funnit, att $P(0)_{11}$ -elementet kan väljas inom vida gränser utan att påverka konvergensens nämnvärt. Införande av kopplingselement utövar ej heller någon väsentlig påverkan på estimeringen.

Den faktor, vid valet av $P(0)$, som till största delen är bestämmande för konvergensförloppets utseende, är valet av submatrisen $P(0)_{22}$. Väljer vi $P(0)_{22} = M_0 M_0^T$, dvs. enligt teorin, får vi det bästa resultatet. Med denna struktur på $P(0)_{22}$ minskar konvergenshastigheten, om vi väljer elementen mindre än i referensmatrisen. Väljer vi däremot elementen större,

medför detta ingen väsentlig förbättring. Vi drar härav slutsatsen, att om man ungefär vet, vilka värden de okända parametrarna har, så att tecknen för kopplingselementen i matrisen $M_0 M_0^T$ kan bestämmas, bör man välja en $P(0)_{22}$ -matris med samma struktur som $M_0 M_0^T$ -matrisen och med relativt stora element (storleksordning:10). Skulle vi råka välja elementen för små, kommer konvergenshastigheten att bli långsam.

Om vi nu är osäkra på vilka värden våra okända parametrar har, är det lämpligare att välja en diagonal $P(0)_{22}$ -matris. Detta medför visserligen en lägre konvergenshastighet än i föregående fall, men ger ett bättre resultat, än det vi skulle ha fått, om vi råkade välja fel tecken på kopplingen mellan parametrarna. I den diagonala formen kan elementen väljas större, än då man har koppling, innan ytterligare ökning ej medför någon förbättring av konvergenshastigheten. Element av storleksordningen 100 bör då vara lämpliga i detta fall.

Vi antar i den följande framställningen, att ovanstående resonemang är giltigt även för system av högre ordning, och ger följande förslag till val av $P(0)$ -matrisen:

$$P(0) = \left[\begin{array}{c|c} 10^{-5} \cdot I & 0 \\ \hline 0 & 100 \cdot I \end{array} \right] \quad (5.2)$$

6. INVERKAN AV PARAMETRARNAS BEGYNNELSEVÄRDEN PÅ LÖSNINGARNAS KONVERGENS

6.1. Inledning

Som nämndes i avsnitt 2.2 beskrives det utökade systemet av en olinjär funktion som genom IDOL-programmet linjäriseras. Intressant är nu att undersöka om vår metod kan användas för alla gissningar på initialvärdet hos parametrarna. I detta kapitel visas, att man är hänvisad till större eller mindre områden kring det rätta parametervärdet, för att lösningarna skall konvergera mot rätt värde. Vi kallar dessa områden för konvergensområden och gränsvärdena för konvergensgränser. En utförlig analys av konvergensområdenas storlek visar sig svår att göra, men i slutet av kapitlet pekar vi på några faktorer, som otvivelaktigt påverkar dem.

För att få god jämförelse mellan de olika försöken (initialgissningarna) har i hela detta kapitel $P(0)$ -matrisen anpassats till parametrarnas begynnelsefel enligt teorin. R_1 -matrisen har valts enligt slutsatserna i kapitel 4, ekv. 4.3, utom i avsnitt 6.2.2 och 6.2.3.

Antal samplingsintervall som behövs för konvergens har redovisats i tabeller. Viktigt är emellertid att inte jämföra de exakta tiderna utan bara storleksordningen av dem. Exekveringen har slutat då $|\alpha - \hat{\alpha}| < 0.001$ och svängiga förlopp kan, under olyckliga omständigheter, ge ett missvisande resultat.

Undersökningarna har främst inriktats på parametrarna i A -matrisen^{x)}, eftersom man kan visa, att B -matrisen är lättare att identifiera i det allmänna fallet.

För att skilja på de två testexemplen av tredje ordningen (Ex. 2 och Ex. 3), kallas här endast systemet med en in- och utsignal för tredje ordningens system, medan systemet med två in- och utsignaler betecknas Rosenbrocks system.

x) Ett system kan skrivas som

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

6.2. Presentation av konvergensgränser för första ordningens system

6.2.1. Konvergensområde då $Rl_{22} = 1$

Vid undersökning av initialgissningar på systemparametern har vi inte funnit något begynnelsevärde mellan -11 och +13.5 där estimeringarna inte konvergerar mot rätt värde. Gissningar mindre respektive större än dessa värden medför för stora korrektioner; estimeringsvärdet svänger mellan två värden och ger sig så småningom av mot mycket stora tal (se figur 6.1). I tabell 6.1 (vänstra kolumnen) redovisas antal samplingsintervall, som behövs för konvergens med fel mindre än en procent (0.5 ± 0.005) respektive en promille (0.5 ± 0.0005) för några initialvärden $\hat{\alpha}_1(0)$. Konvergensförloppen för dessa visas i figur 6.2 och figur 6.3. Värdena av $\hat{\alpha}$ svänger relativt mycket. Dessutom kan man iaktta en viss likformighet i förloppen; olika initialgissningar ger "översläng" åt samma håll och amplituden på denna ökar, ju närmare konvergensgränsen man startar.

För alla $\hat{\alpha}_2(0)$ -värden (B-matrisen) mellan -1000 och +1000 som undersökts, har lösningarna alltid konvergerat inom fem samplingsintervall.

6.2.2. Konvergensområde då $Rl_{22} = 0.01$

Den slängiga karaktären på kurvorna i figur 6.2 och figur 6.3 tyder på, att man kan utöka konvergensområdet genom att minska Rl_{22} -elementet. Tabell 6.1 (mitt-kolumnen), figur 6.4 och figur 6.5 bekräftar detta. Man får dels några enheter större område, dels blir förloppen mycket jämnare. Å andra sidan konvergerar lösningarna betydligt långsammare.

6.2.3. Inverkan av kopplingselement i Rl

Försök visar, att kopplingselement i Rl inte påverkar konvergensområdets storlek. Däremot kan i vissa fall (gränsområdena) en koppling ha positiv inverkan på konvergensthastigheten. Se tabell 6.1 ($Rl_{12} = 0.001$). Denna inverkan är dock obetydlig, när initialvärdet ligger nära det riktiga värdet.

$\hat{\alpha}_1(0)$	$R1 = \begin{bmatrix} 0.00001 & 0. \\ 0. & 1. \end{bmatrix}$		$R1 = \begin{bmatrix} 0.00001 & 0 \\ 0. & 0.01 \end{bmatrix}$		$R1 = \begin{bmatrix} 0.00001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.01 \end{bmatrix}$	
	1 %	1 ‰	1 %	1 ‰	1 %	1 ‰
-14	-	-	-	-	-	-
-13	-	-	28	33	22	23
-11	12	13	19	21	17	19
- 9	11	12	13	15	13	19
- 7	9	9	12	16	11	17
10	14	15	17	20	15	20
12	12	13	20	22	18	21
13.5	12	14	21	23	21	22
16	-	-	40	42	46	51
17	-	-	-	-	-	-

Tab. 6.1. Antal samplingsintervall för estimeringskonvergens till $|\alpha - \hat{\alpha}| < 0.001$ vid olika val av $R1$.

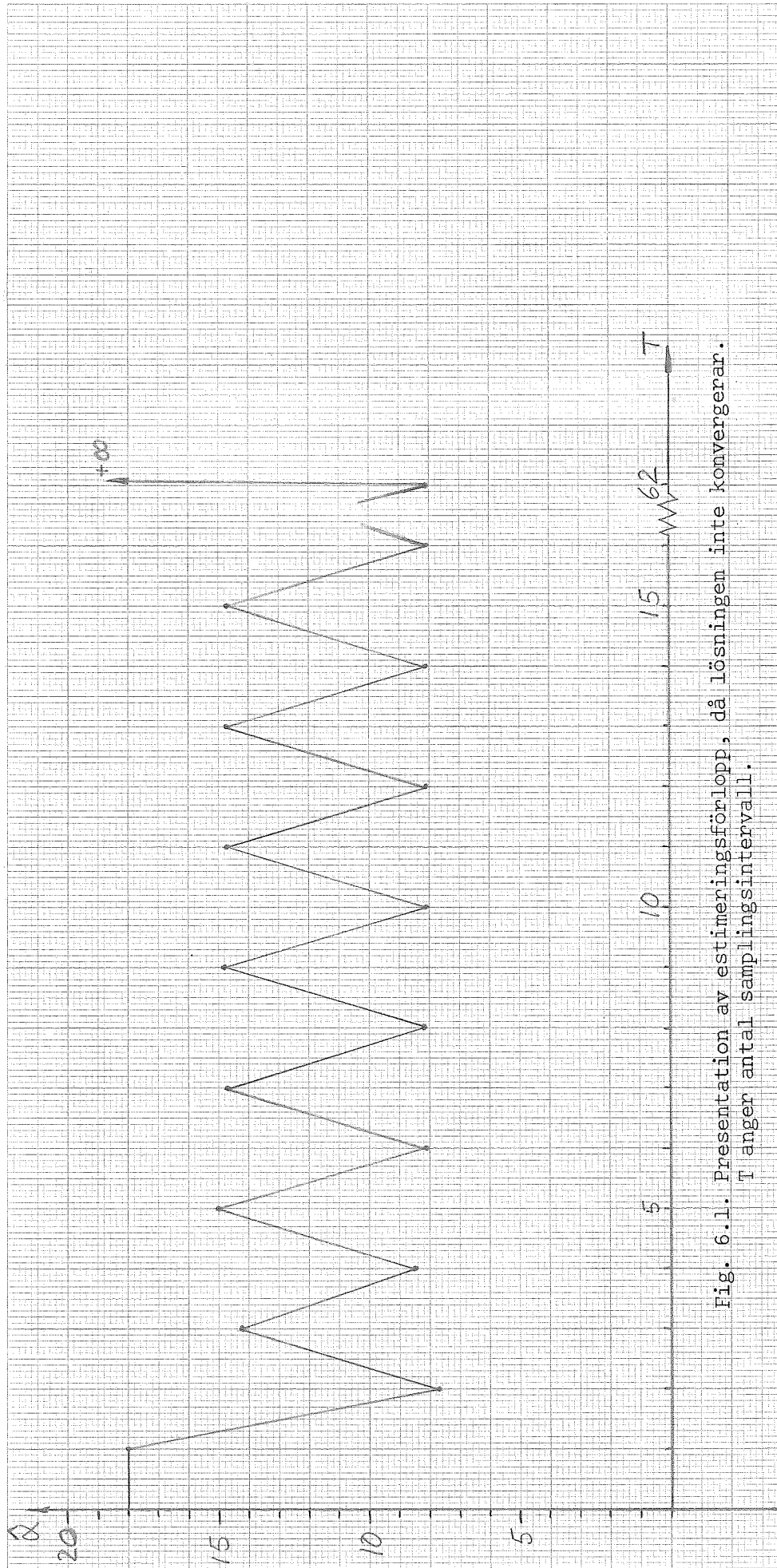


Fig. 6.1. Presentation av estimeringsförlopp, då lösningen inte konvergerar.
 T anger antal samplingsintervall.

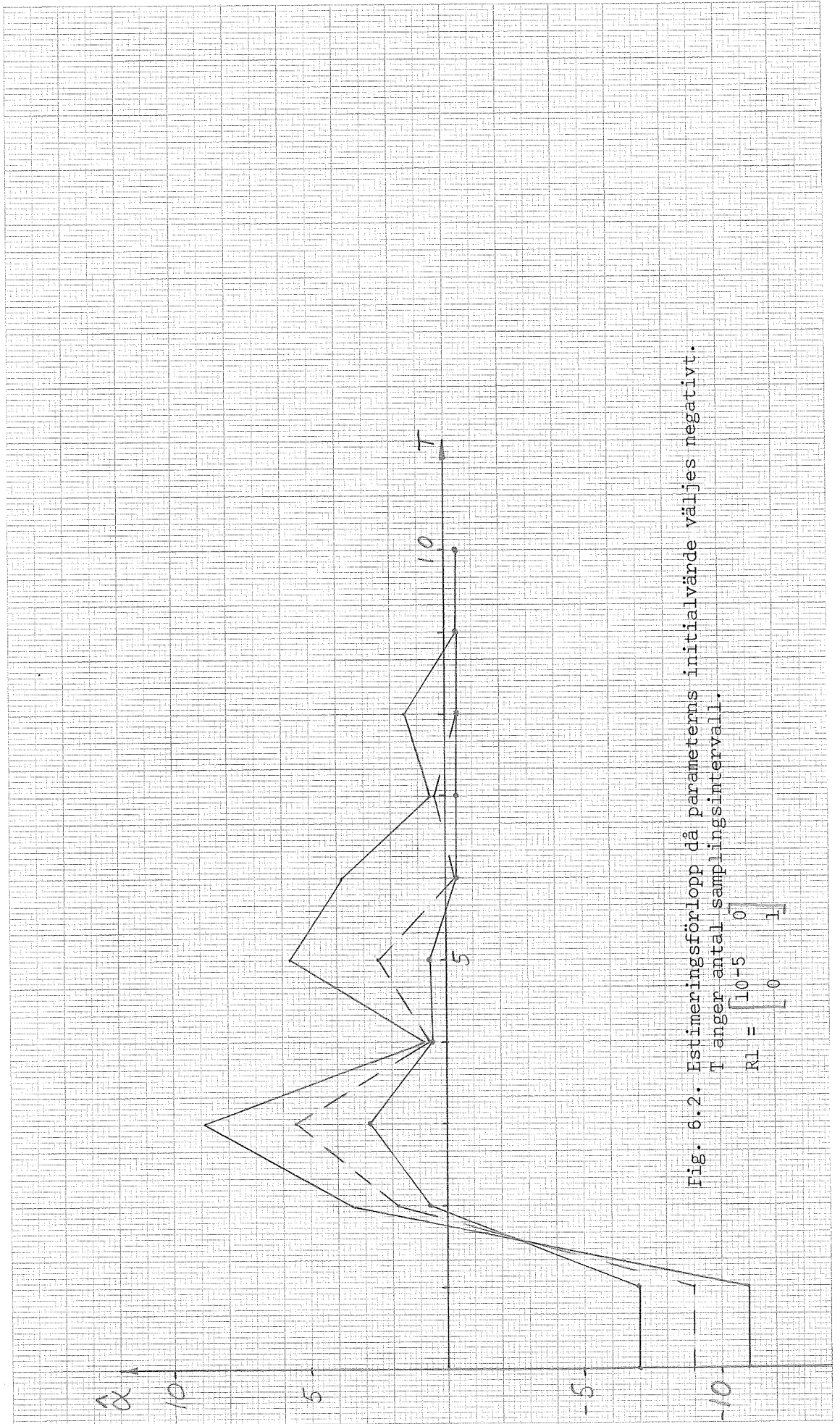


Fig. 6.2. Estimeringsförlopp då parameterns initialvärde väljes negativt. T anger antal samplingsintervall.

$$R1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

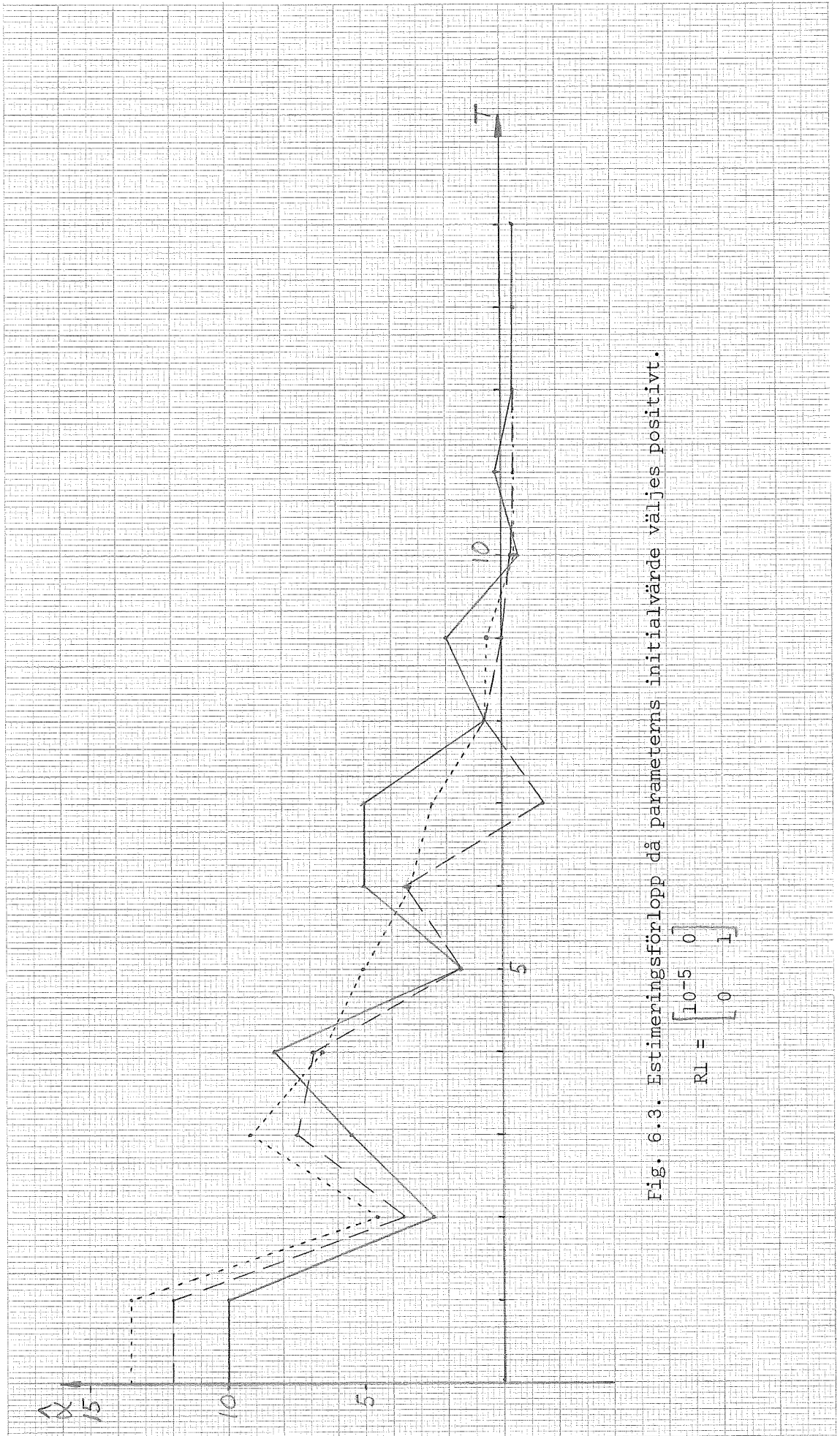


Fig. 6.3. Estimeringsförlopp då parametrarnas initialvärde väljes positivt.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

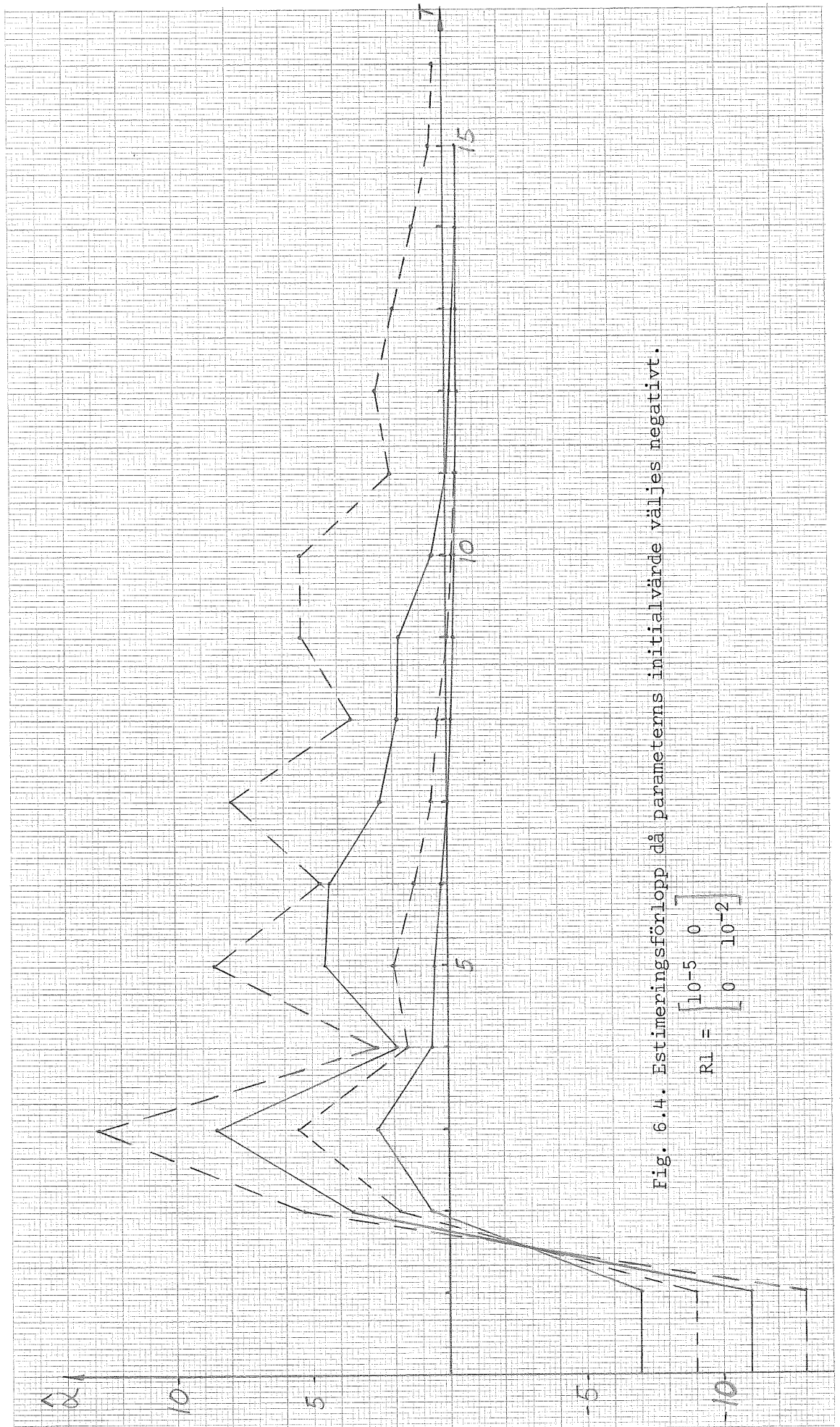


Fig. 6.4. Estimeringsförlöpp då parametrarnas initialvärde väljes negativt.

$$R1 = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{bmatrix}$$

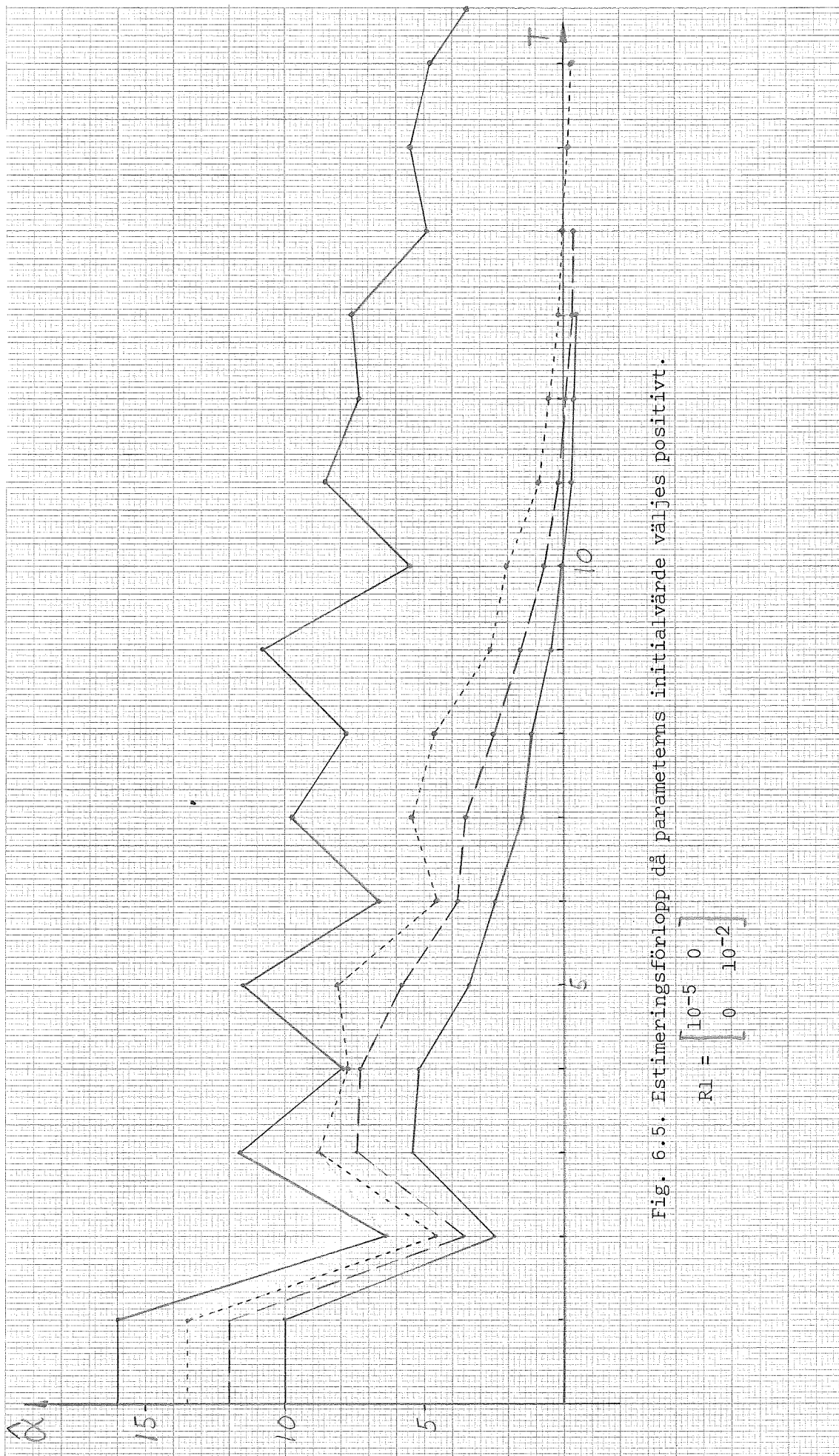


Fig. 6.5. Estimeringsförlopp då parameterns initialvärde väljes positivt.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{bmatrix}$$

6.2.4. Konvergens vid två obekanta parametrar

Eftersom ett konvergensområde är svårt att bestämma, då $\hat{\alpha}_1(0)$ och $\hat{\alpha}_2(0)$ varieras samtidigt, redovisas här bara en intressant iakttagelse: antingen konvergerar båda parametrarna eller också divergerar båda. Sålunda kan man starta med $\hat{\alpha}_2$ mycket nära det rätta värdet utan att få konvergens, om man med $\hat{\alpha}_1$ startar utanför dess konvergensområde. Se figur 6.6, där förloppen uppritats, då $\hat{\alpha}_2$ borde konvergera mot rätt värde.

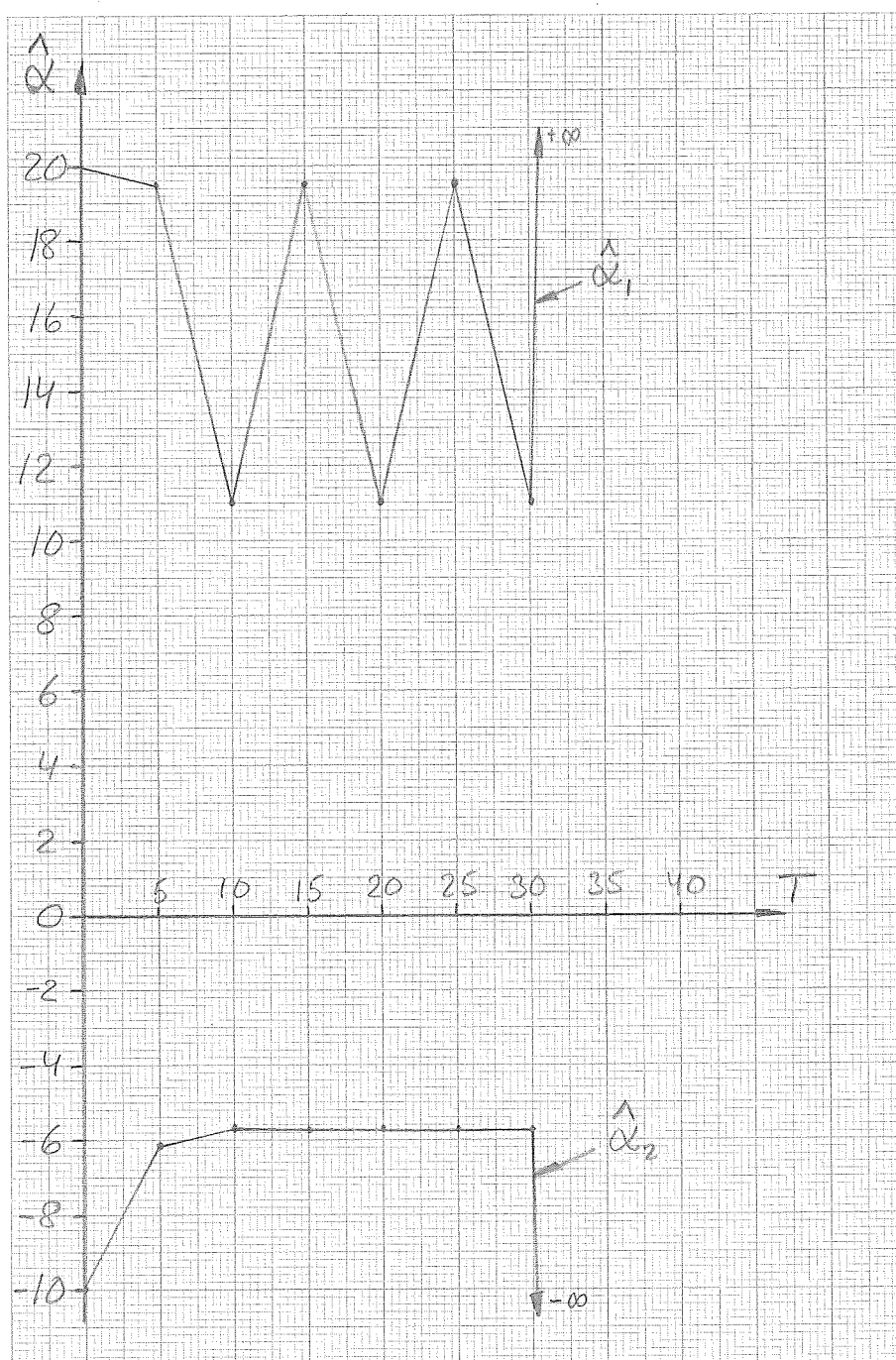


Fig. 6.6. Förlopp då $\hat{\alpha}_2$ borde konvergera men i stället divergerar på grund av valet av $\hat{\alpha}_1(0)$. (Obs! värdena har angivits för vart femte samplingsintervall).

6.3. Presentation av konvergensgränser för tredje ordningens system

6.3.1. Systemet skrivet på diagonal form

I detta avsnitt har undersökningen inskränkts till att omfatta endast diagonalelementen.

6.3.1.1. En parameter okänd

$\alpha_{11}(=-1)$		$\alpha_{22}(=-2)$		$\alpha_{33}(=-3)$	
Initialvärde	T	Initialvärde	T	Initialvärde	T
-14	-	-15	-	-18	-
-13	25	-14	45	-17	40
-11	25	-11	15	-16	35
9	25	10	15	9	20
13	30	12	15	13	45
14	-	13	-	14	-

Tab. 6.2. Konvergensområden och exempel på antal samplingsintervall (T) för konvergens till $|\alpha - \hat{\alpha}| < 0.001$ då systemet är skrivet på diagonal form och endast en parameter varierats.

Av tabell 6.2 framgår konvergensgränserna för respektive diagonalelement, då ett element åt gången har tilldelats ett begynnelsevärde. Detta värde har alltså betraktats som okänt, medan de två andra förutsatts kända och ingått i systemekvationen med sina rätta värden. Vid t.ex. α_{11} 's positiva konvergensgräns har systemet antagits haft följande utseende:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Värdena på konvergensgränserna är av samma storleksordning för de tre parametrarna. Konvergensområdena tycks vara ungefär symmetriska kring de riktiga värdena och man kan också ana tendenser till en viss förskjutning av områdena åt de håll de rätta värdena ligger. (Se också figur 6.11).

6.3.1.2. Tre parametrar okända

Här har alla tre diagonalelementens initialvärden förskjutits lika mycket från sina rätta värden i samma undersökning. Resultatet visas i figur 6.7, där begynnelsekonfigurationerna sammanbundits och där endast

konvergenta resultat markerats. Jämfört med då endast en parameter är okänd, kan konvergensområdet utökas betydligt åt negativa hållet. Orsaken till känsligheten för positiva ändringar i initialvärdena kan troligtvis förklaras av symmetrin i systemet. Betraktas nämligen matriserna som bestämmer in- och utsignalerna, fås ingen information som skiljer på tillstånden x_1 och x_3 (Se avsnitt 3.4).

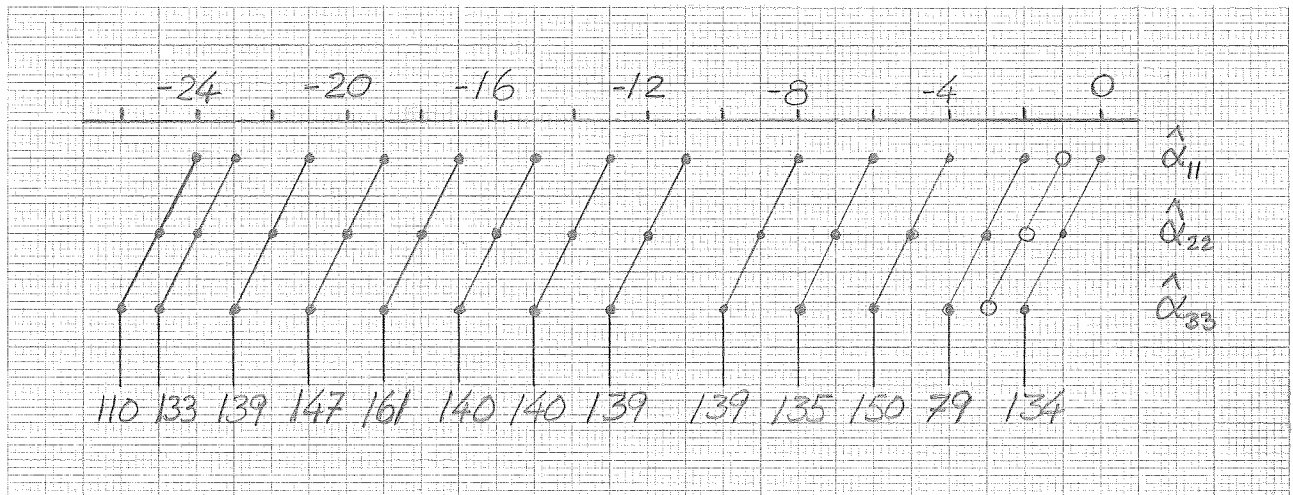


Fig. 6.7. Undersökta initialkonfigurationer för vilka lösningarna konvergerar. Nedersta raden anger antal samplingsintervall för konvergens till $|\alpha - \hat{\alpha}| < 0.001$. Tredje ordningens system på diagonal form.

6.3.2. Systemet skrivet på observerbar form

Vid undersökningen av tredje ordningens system på observerbar form har endast de parametrar undersökts, som ingår i karakteristiska ekvationen, dvs. de med \ast ersatta parametrarna i

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \ast & 1 & 0 \\ \ast & 0 & 1 \\ \ast & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

6.3.2.1. En parameter okänd

Tabell 6.3 visar konvergensområdet för respektive parametrar. Överraskande är de stora tillåtna startvärdena för α_{21} och α_{31} . Detta förhållande kommer att diskuteras i avsnitt 6.3.3.

$\alpha_{11}(=-6)$		$\alpha_{12}(=-11)$		$\alpha_{13}(=-6)$	
$\hat{\alpha}_{11}(0)$	T	$\hat{\alpha}_{21}(0)$	T	$\hat{\alpha}_{31}(0)$	T
-49	-	-201	-	-1106	-
-48	80	-196	135	-1070	130
-44	75	-136	70	-1000	105
-16	40	-111	85	-200	120
0	35	89	105	200	95
14	105	189	135	500	125
18	110	214	135	790	150
19	-	234	-	794	-

Tab. 6.3. Konvergensområden för systemparametrarna vid variation av ett element åt gången. T anger antalet samplingsintervall för konvergens till $|\alpha - \hat{\alpha}| < 0.001$. Tredje ordningens system på observerbar form.

6.3.2.2. Tre parametrar okända

Konvergensgränserna presenteras i tabell 6.4, där de tre parametrarna har givits lika initialvärden.

$\hat{\alpha}_{11}(0) = \hat{\alpha}_{21}(0) = \hat{\alpha}_{31}(0)$	T
-45	-
-44	133
-30	103
10	130
15	133
16	-

Tab. 6.4. Konvergensområde för tredje ordningens system skrivet på observerbar form då tre parametrar givits samma initialvärde. Antal samplingsintervall (T) anger konvergens till $|\alpha - \hat{\alpha}| < 0.001$.

6.3.3. Jämförelse

Vid transformering av systemrepresentationen från en form till en annan, kan man inte direkt jämföra element på en och samma plats, eftersom kopplingar finns mellan alla ingående parametrar. Det tycks emellertid som om elementets plats i systemmatrisen (A-matrisen) är av stor betydelse för

konvergens. Vid studium av tabell 6.3 ser man, att element nära diagonalen är relativt känsliga för initialvärdet, medan man för α_{31} kan välja mycket stora värden. Att inte endast elementets plats är avgörande framgår av tabell 6.2, där visserligen konvergensområdena för alla tre diagonalelementen är ungefär lika stora, men inte alls jämförbara med området för α_{11} skrivet på observerbar form.

När tre parametrar samtidigt är okända i den observerbara formen, måste man starta betydligt närmare det rätta värdet, när det gäller α_{21} och α_{31} , jämfört med då endast en parameter är okänd. Däremot ligger konvergensgränsen ganska nära α_{11} -ensam. Det ligger alltså nära till hands att här påstå att α_{11} :s startvärde, dvs. parametern i diagonalen, är bestämmande för konvergens.

Som en konsekvens av detta skulle, då tre parametrar är okända på diagonalform, konvergensgränserna vara av samma storleksordning som då en parameter åt gången undersöktes. Vid jämförelse mellan tabell 6.2 och figur 6.7 inses, att man inte direkt kan överföra de förhållanden, som råder vid observerbar form, till att gälla även vid diagonal form.

6.4. Presentation av konvergensgränser för Rosenbrocks system

I likhet med i avsnitt 6.3.1 har vi begränsat undersökningarna i detta avsnitt till diagonalelementen.

6.4.1. En parameter okänd

$\alpha_{11}(=-1)$		$\alpha_{22}(=-3)$		$\alpha_{33}(=-1)$	
$\hat{\alpha}_{11}(0)$	T	$\hat{\alpha}_{22}(0)$	T	$\hat{\alpha}_{33}(0)$	T
-14	-	-15	-	-12	-
-13	40	-14	70	-11	24
-12	30	-13	40	-10	15
12	12	8	40	9	12
14	51	9	13	10	15
15	-	10	-	11	-

Tab. 6.5. Konvergensområden och exempel på antal samplingsintervall (T) för konvergens till $|\alpha - \hat{\alpha}| < 0.001$ då endast en parameter varierats. Rosenbrocks system.

Tabell 6.5 visar konvergensområden för Rosenbrocks system, då ett diagonalelement åt gången undersöktes. Värdena på gränserna visar likheter

med tredje ordningens system på så sätt, att de är av samma storleksordning. Man skulle kunna vänta sig, att konvergensområdena för α_{11} och α_{33} skulle sammanfalla ($\alpha_{11} = \alpha_{33} = -1$), men så är alltså inte fallet.

6.4.2. Tre parametrar okända

De tre diagonalelementen har här flyttats lika mycket i varje undersökning. Figur 6.8 visar hur långt från de rätta värdena man kan starta. I figuren har initialvärdena för ett och samma försök sammanbundits, och nedersta raden anger hur många samplingsintervall, som behövs för konvergens till $|\alpha - \hat{\alpha}| < 0.001$. Som i tredje ordningens system är metoden känsligare för felaktiga värden på den positiva sidan om de riktiga värdena än på den negativa.

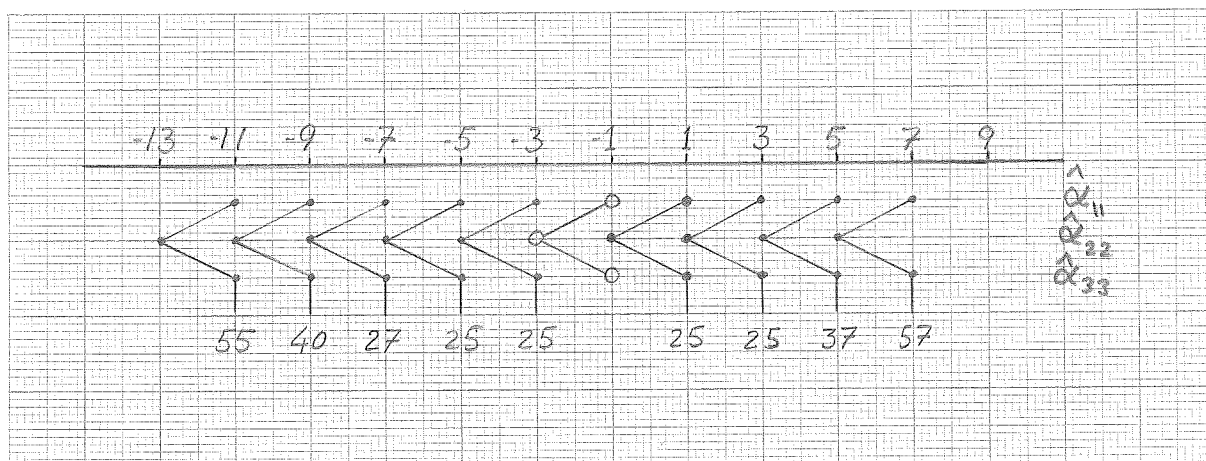


Fig. 6.8. Undersökta initialkonfigurationer för vilka lösningarna konvergerar. Nedersta raden anger antal samplingsintervall för konvergens till $|\alpha - \hat{\alpha}| < 0.001$. Rosenbrocks system.

6.5. Egenvärdenas förflyttning

Ett nödvändigt villkor för att estimeringsfelet skall konvergera mot noll är att

$$|z_i| < 1$$

där z_i är egenvärdena till matrisen $[\phi - K\theta]$. För att uppskatta z_i har antagits att korrelation finns mellan z_i och initialförflyttningen av egenvärdena i den systemmatris som undersöks. I detta kapitel undersöks om dessa förflyttningar kan ge ett kriterium på konvergens av estimeringsförloppet.

Figur 6.9 visar tillåtna egenvärdesförflyttningar för system 1, 2a och 3. Undersökningarna är här lätta att åskådliggöra i diagramform, eftersom parameterändringen direkt ger egenvärdesförflyttningen $\hat{s} - s$ i initial-

stadiet. Som synes är överensstämmelsen god mellan alla parametrar och system.

För att testa system 2b på liknande sätt skriver vi ett (allmänt) system på diagonal form.

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} \cdot x + B \cdot u = Ax + Bu$$

Via karakteristiska ekvationen $\det[sI - A] = 0$ fås samma system på observerbar form.

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} s_1 + s_2 + s_3 & 1 & 0 \\ -(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) & 0 & 1 \\ s_1 s_2 s_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} + B^* u =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 1 & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & 1 \\ \alpha_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} + B^* u$$

Genom att nu ange initialförflyttningen av egenvärdena i diagonalformen fås en motsvarande ändring av parametrarna i den observerbara formen. Observera emellertid att ändring av ett element (egenvärde) i diagonalformen påverkar alla element ($\alpha_{11}(0)$, $\alpha_{21}(0)$ och $\alpha_{31}(0)$) i observerbara formen. I figur 6.10 är inritat jämförande konvergensområden för de två representationerna, då ett av egenvärdena s_1 , s_2 och s_3 har varierats. Som synes stämmer gränserna på positiva sidan överens, men för negativa förflyttningar kan området utökas ganska väsentligt, när man övergår till observerbar form. En orsak till denna utökning framgår av tabell 6.6. Konvergens sker betydligt långsammare och försiktigare då systemet är skrivet på observerbar form. För ytterligare jämförelse är också egenvärdesförflyttningen för system 2b inritad i figur 6.9.

Gissat egenvärde	s_1		s_2			s_3		
	T		Gissat egenvärde	T		Gissat egenvärde	T	
	Diag. form	Obs. form		Diag. form	Obs. form		Diag. form	Obs. form
-19	-	160	-24	-	149	-29	-	132
-13	25	130	-14	45	105	-17	40	105
+12	25	135	+12	15	135	+13	45	135
+13	30	-	+13	-	150	+14	-	150

Tab. 6.6. Tabellen visar antal samplingsintervall (T) för konvergens av ingående parametrar i diagonal respektive observerbar form för olika initialvärden på egenvärdena s_i .

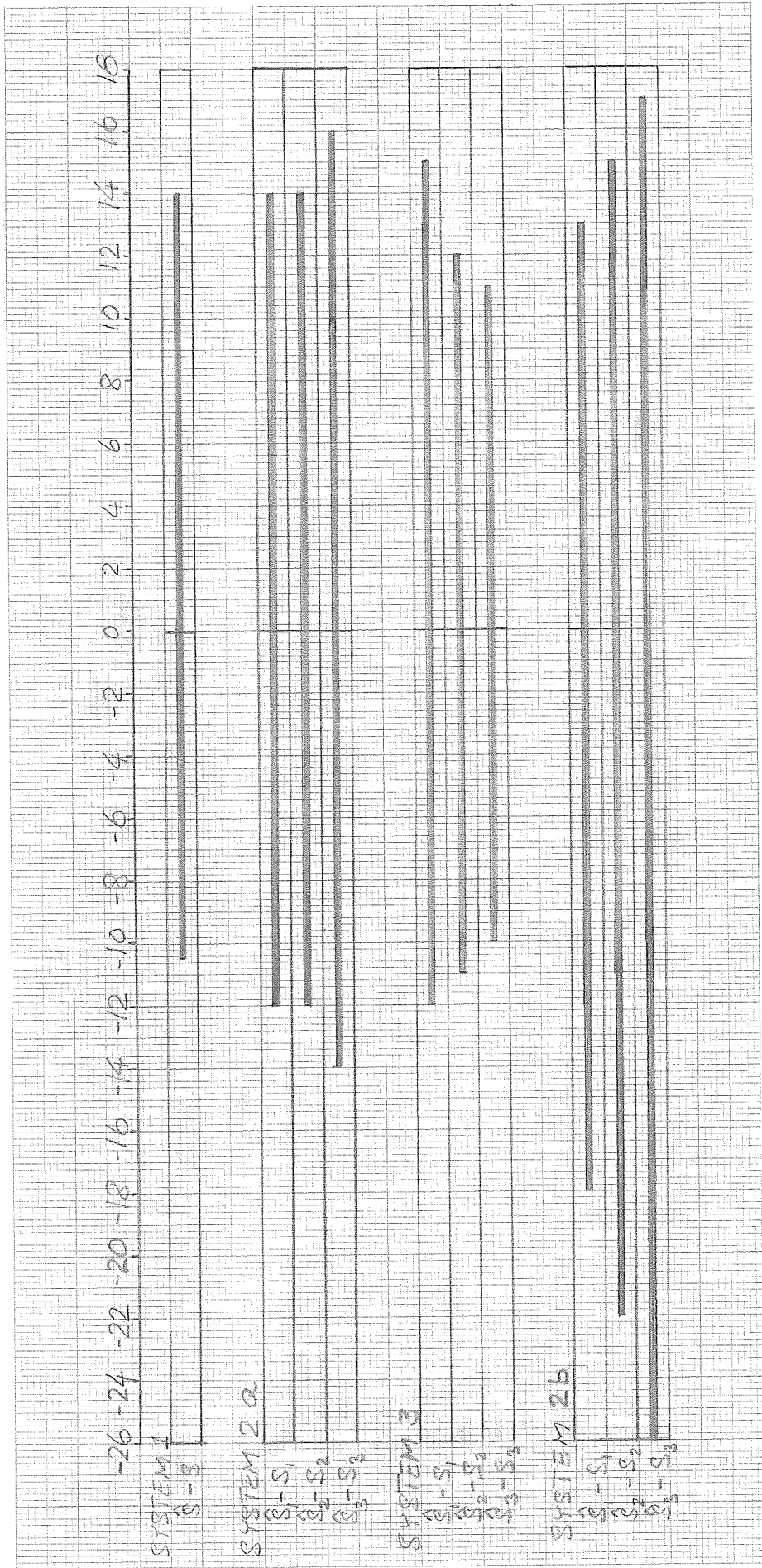


Fig. 6.9. Egenvärdesförflyttningen, dvs. initialvärdets förflyttning av egenvärdena från de verkliga, för alla systemen då en parameter ändrats åt gången.

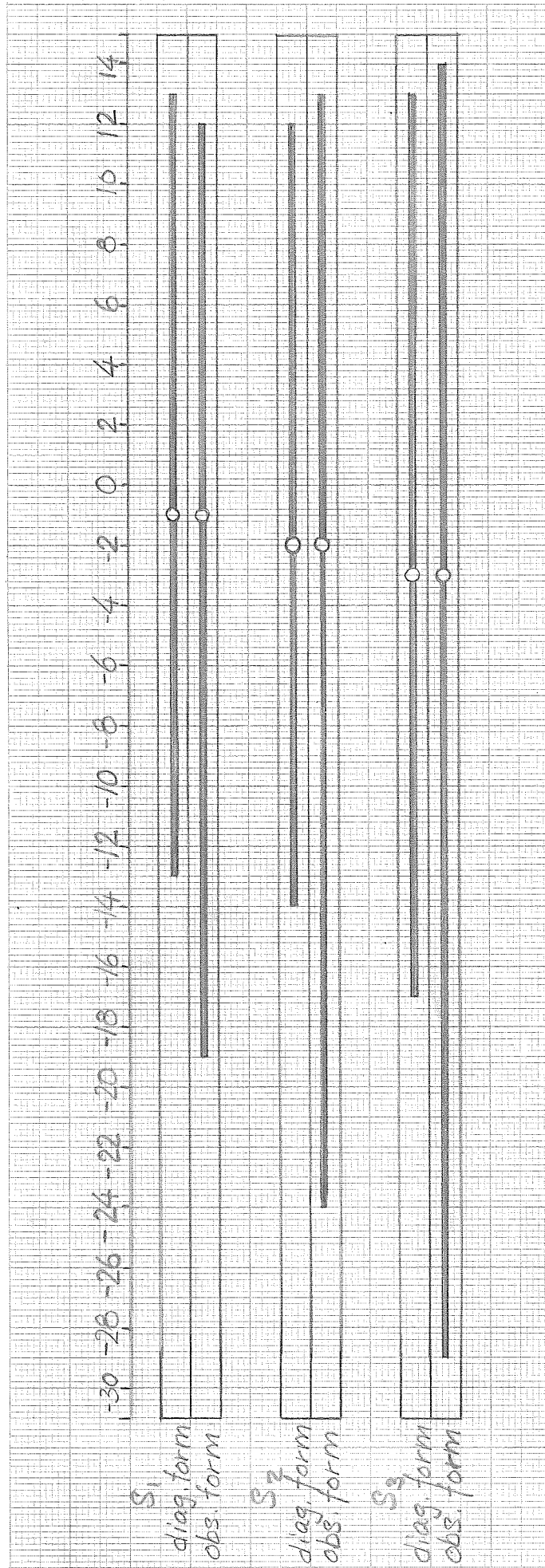


Fig. 6.10. Jämförelse mellan konvergensområden då ett initiallegenvärde ändras i diagonal respektive observerbar form.

För att närmare undersöka om något samband finns mellan konvergens och egenvärdesförflyttning i systemekvationen, presenteras också förflyttning av tre parametrar samtidigt i system 2a och system 3. Här får jämförelse ske mellan det egenvärde som tillåts flytta kortast sträcka i figur 6.9, dvs. s_1 (eller s_2) för system 2a respektive s_3 för system 3, och $\hat{s} - s$. Här betyder $\hat{s} - s$ den maximalt tillåtna förflyttningen, då alla tre egenvärdena samtidigt flyttas lika mycket. Tabell 6.7 anger $\hat{s} - s$ för de två systemen och i kolumnen längst till höger finns angivet förflyttningen som hänför sig till figur 6.9.

System	$\hat{s} - s$	\bar{s}
2a	-23	-12
	+ 1	+14
3	-10	-10
	+ 8	+11

Tab. 6.7. Tillåten förflyttning $\hat{s} - s$ av egenvärdena då alla varieras samtidigt. \bar{s} betyder maximala tillåtna förflyttningen för det egenvärde som har minst konvergensområde då endast ett egenvärde varieras. $\hat{s} - s$ betyder den maximalt tillåtna förflyttningen, då alla egenvärdena samtidigt varieras lika mycket.

Som synes finns bara överensstämmelse för system 3 vid negativa förflyttningar.

Tydligt kan inget entydigt kriterium för konvergens fås med hjälp av studium av egenvärdesförflyttningarna. För att belysa detta ytterligare, redovisas i tabell 6.8 de egenvärdens lägen, som fås vid konvergensgränserna för α_{11} och α_{31} i system 2b.

Parameter	Parameter- värde	$\hat{s}_1(0)$	$\hat{s}_2(0)$	$\hat{s}_3(0)$
$\alpha_{11}(0)$	- 48	-0.11+0.34j	-0.11-0.34j	-47.8
	+ 18	-0.35	1.0	17.3
$\alpha_{31}(0)$	-1070	3.12+8.81j	3.12-8.81j	-12.2
	+ 790	-6.65+7.99j	-6.65-7.99j	+ 7.3

Tab. 6.8. Begynnelseegenvärdena $\hat{s}(0)$ då parametrarna α_{11} och α_{31} gissas vid konvergensgränserna. Tredje ordningens system skrivet på observerbar form.

Det är här svårt att få fram någon initialförflyttning av egenvärdena; det fordras en komplcerad undersökning för att bestämma vilka initial-egenvärden, som hör samman med de verkliga.

6.6. Sammanfattning

En sammanfattning av konvergensområdenas storlek för system 1, 2a och 3 har gjorts i figur 6.11.

Något generellt svar på frågan om hur fel man får gissa vektorn α går inte att ge. Faktorer som det undersökta elementets plats i systemmatrisen och i viss mån de egenvärden man får för begynnelsevärdena i förhållande till de verkliga har betydelse för konvergensen av lösningarna. Vidare har R_1 :s inverkan undersökts för första ordningens system och det finns anledning förmoda, att mindre R_{22} allmänt medför större konvergensområden. Dock måste, enligt slutsatserna i kapitel 4, påpekas, att R_{22} bör vara större än R_{11} .

Varieras tre parametrar samtidigt kan en utvidgning av konvergensområdet erhållas i förhållande till en parameter ensam (system 2a, negativa initialvärden) eller också kan konvergensområdet inskränkas väsentligt. Detta gäller inte Rosenbrocks system, där nästan ingen inverkan av antalet undersökta parametrar finns. Det ligger nära till hands att påstå att faktorer som B- och C-matriserna har betydelse för konvergensområdets storlek.

Då metoden används för identifiering av ett system med tidsinvarianta parametrar, finns ofta inget starkt krav på konvergenshastigheten. För reglering av system med tidsvariabla systemparametrar kan emellertid behovet av snabb lösningskonvergens vara mycket stort. Vid dessa olika användningsområden kan den form på vilken systemet skrives ha stor betydelse. I kapitel 6.5 framgick skillnaderna i konvergensområde och konvergenshastighet för de två undersökta representationsformerna av tredje ordnings systemet (Se tabell 6.6).

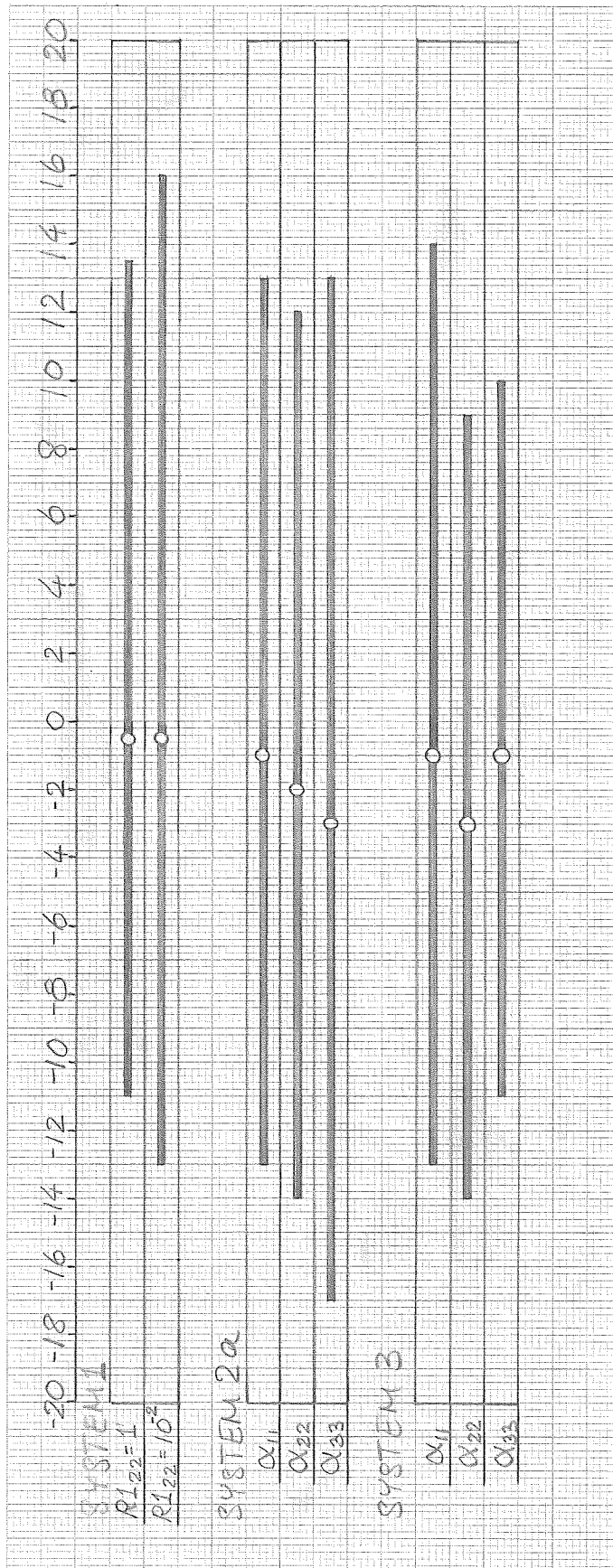


Fig. 6.11. Konvergensområden för parametrarna i de system, som är skrivna på diagonal form.

7. SAMMANFATTNING AV RESULTAT

De försök, som redovisats i denna rapport, visar på vissa begränsningar i den modifierade Kalmantekniken. Metoden är i viss mån känslig för valet av kovariansmatriserna. Den tidsinvarianta R_1 -matrisen påverkar i relativt stor utsträckning utseendet av lösningarnas konvergensförlopp, medan $P(0)$ -matrisen är av mindre betydelse. Denna matris påverkar huvudsakligen estimeringsförloppets begynnelsekedje. Linjäriseringen av den utökade systemmatrisen ger upphov till konvergensproblem. Detta medför, att initialgissningen av parametrarna måste ligga inom ett begränsat område kring de rätta värdena. Områdets storlek är beroende av antalet okända parametrar och deras plats i systemmatrisen. Även systemrepresentationen är av betydelse för områdets storlek.

Intressant att vidare undersöka är, om de val av lämpliga kovariansmatriser, som har presenterats för ett första ordningens system, kan generaliseras till att gälla även för högre ordningens system. Hur formen på kovariansmatriserna skall modifieras vid ett stokastiskt system är en ytterligare frågeställning av stort intresse. En djupare analys av de faktorer, som påverkar konvergensområdenas storlek är angelägen för en bättre förståelse av konvergensproblemen.

REFERENSER

1. K.J. Åström: Introduction to Stochastic Control Theory, Chapter 5. Academic Press, 1970.
2. Gustaf Olsson: Några idéer kring parameteridentifiering med modifierad Kalmanteknik. Personal communication, Lunds Tekniska Högskola, 1969.
3. Gustaf Olsson: Datorprogrammet IDOL. Preliminary report, Lunds Tekniska Högskola, 1969.

