

KALMANFILTER.
ADAPTIVA KALMANFILTER.
REALTIDSI DENTIFIERING.

Examensarbete vid institutionen för Reglerteknik utfört av
LAVE LINDBERG

Handledare:
JOHAN WIESLANDER

INNEHÅLLSFÖRTECKNING.

Kalmanfilter	1
Formulering av prediktions- och uppskattningsproblemet	2
Allmänna satser	3
Problem	4
Tillståndsuppskattning av diskreta system	5
Tillståndsuppskattning av kontinuerliga system	8
Adaptiva Kalman filter	9
Matematisk modell	9
Adaptiva uppskattningsalgoritmer	13
Suboptimala adaptiva uppskattningsalgoritmer	14
Sammanfattning	16
Fortran-Subroutine	18
Exempel	22
Realtidsidentifiering	24
Exempel	25
Alternativ metod	28
Referenser	32
Summary in English	33

KALMANFILTER.

Kalmanfiltrering rekonstruerar tillståndsvariabler utan besvärliga deriveringar.

Vektorn \hat{x} definieras av ekvationen

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) \quad (1)$$

Då vi har systemet

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (2)$$

$$y = Cx \quad (3)$$

finner vi att differensen

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad (4)$$

satisfierar följande ekvation

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = (A - KC)\tilde{x} \quad (5)$$

Om $\tilde{x}(t_0) = 0$ gäller då $\tilde{x}(t) = 0$ för alla $t \geq t_0$.

Om $\hat{x}(0) \neq x(0)$ och samtliga egenvärden till $(A - KC)$ har negativ realdel är (3) stabil och samtliga lösningar till ekvationen konvergerar mot noll. Man har

$$\|x(t)\| < ke^{-\alpha t} \quad \text{där} \quad -\alpha > \max \operatorname{Re} \lambda(A - KC)$$

Via vektorn K förfogar vi över parametern α . Om K väljes så att α är stort konvergerar $\hat{x}(t)$ mycket snabbt mot $x(t)$, men ett stort värde på α medför också att (1) blir känslig för fel i mätningen av y . Man får alltså kompromissa mellan konvergensthastighet och störningskänslighet.

Referenser:

K. J. Åström. Reglerteori. Almqvist & Wiksell. Uppsala 1968

FORMULERING AV PREDIKTIONS- OCH UPPSKATTNINGSPROBLEMET.

Vi har två reella stokastiska processer $\{s(t), t \in T\}$ och $\{n(t), t \in T\}$ som representerar signal och brus. Antag att summan

$$y(t) = s(t) + n(t)$$

kan observeras.

Vid tiden t har vi $y(s), t_0 \leq s \leq t$. Med hjälp av denna realisation skall vi bestämma den bästa uppskattningen av signalens värde vid tiden t_1 . Om $t_1 < t$ kallas problemet ett interpolationsproblem. Om $t_1 = t$ kallas det ett filtreringsproblem och om $t_1 > t$ ett prediktionsproblem.

För diskreta system betecknar vi de observationer, som är tillgängliga för att uppskatta $s(t_1)$

$$Y = (y^T(t_0), y^T(t_0+1), \dots, y^T(t))$$

Låt $Y \in Y$ och $s \in S$. En estimator är en funktion som avbildar Y på S . Värdet på denna funktion för ett värde på Y kallas en uppskattning och betecknas med \hat{s} .

För att lösa problemet är det nödvändigt att specificera.

1. Signal och brusprocesserna.
2. Kriteriet som definierar den bästa uppskattningen.
3. Begränsningen av tillåtna estimatorer.

Den bästa uppskattningen kan t.ex. vara definierad av en förlustfunktion L , som är en reell funktion med egenskaperna $L \geq 0, L(x) = L(-x)$ och L icke avtagande för $x > 0$. Förlusten är då den stokastiska variabeln $L(s - \hat{s})$ och den bästa uppskattningen s är den som minimerar medelvärdet $EL(s - \hat{s})$.

Ett diskret system betecknas på följande sätt;

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \Phi x(t) + v(t) \\ y(t) &= \Theta x(t) + e(t) \end{aligned} \quad (1)$$

där $v(t)$ och $e(t)$ är oberoende normalfördelade slumpvariabler. Vi har möjlighet att observera en realisation av $y(s)$, $t_0 \leq s \leq t$ och vill med hjälp av detta uppskatta tillståndsvektorn till ekvation (1)

ALLMÄNNA SATSER.

All statistisk information observationerna ger om den stokastiska variabeln $s(t_1)$ ges av

$$F(\sigma | \eta) = P\{s(t_1) \leq \sigma \mid y(s) = \eta(s), t_0 \leq s \leq t\}$$

Sannolikhetstätheten ges av $f(\sigma | \eta) = F'(\sigma | \eta)$.

Bästa estimatoren ges av att $EL(s - \hat{s})$ är minimum.

$$EL(s - \hat{s}) = EE\{L(s - \hat{s}) | \eta\} \quad (2)$$

Att minimera (2) med avseende på alla $\hat{s} = \hat{s}(\eta)$ är ekvivalent med att minimera

$$E\{L(s - \hat{s}) | \eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} L(\sigma - \hat{s}) dF(\sigma | \eta)$$

TEOREM I.

Antag sannolikhetsfunktionen för $s(t_1)$ då $y = \eta$ har en täthetsfunktion, som är symmetrisk kring medelvärdet $m = \int \sigma f(\sigma, \eta) d\sigma$ och icke växande för $\sigma > m$. Låt L vara symmetrisk och icke avtagande för positiva argument. Den bästa estimatoren ges då av

$$\hat{s} = \hat{s}(\eta) = E\{s | \eta\} = \int \sigma f(\sigma, \eta) d\sigma \quad (3)$$

Sannolikhetstäthetsfunktionen för normalfördelning har följande utseende

$$\phi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} (\det R)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-m)^T R^{-1}(x-m)\right\}$$

TEOREM II.

x är en $n \times 1$ -vektor och y är en $p \times 1$ -vektor. Antag att $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ är gaus-sisk med medelvärdet $\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix}$ och kovariansen $\begin{bmatrix} R_x & R_{xy} \\ R_{yx} & R_y \end{bmatrix}$.

Vektorn

$$z = x - m_x - R_{xy} R_y^{-1} (y - m_y)$$

är oberoende av y , har medelvärdet noll och kovariansen $R_z = R_x - R_{xy} R_y^{-1} R_{yx}$.

TEOREM III.

Vektorerna x och y är normalfördelade. Fördelningen av x då y är då normal med medelvärdet

$$E(x|y) = m_x + R_{xy}R_y^{-1}(y-m_y)$$

och kovariansen

$$E\{[x-E(x|y)][x-E(x|y)]^T | y\} = R_x - R_{xy}R_y^{-1}R_{yx} = R_z$$

vidare är y och $E(x|y)$ oberoende.

Det gäller
$$\Phi(x|y) = \frac{\Phi(x,y)}{\Phi(y)}$$

TEOREM IV.

Vi har normalfördelning och u och v är oberoende. Då gäller

$$E(x|u,v) = E(x|u) + E(x|v) - E_x$$

PROBLEM.

Vi har två stokastiska vektorer x och y , som är normalfördelade. Problemet är att uppskatta x med hjälp av observationer av y så att felet är så litet som möjligt. Detta uppnås genom att minimera kvadratiske medelvärdet av felet. Vi låter \hat{x} beteckna den bästa uppskattningen och \tilde{x} betyder uppskattningsfelet. Teorem I ger den bästa uppskattningen som

$$\hat{x} = E(x|y)$$

Teorem III ger

$$\hat{x} = E(x|y) = m_x + R_{xy}R_y^{-1}(y-m_y)$$

Uppskattningsfelet $\tilde{x} = x - \hat{x}$ har kovariansen

$$E(\tilde{x}\tilde{x}^T | y) = R_x - R_{xy}R_y^{-1}R_{yx}$$

Teorem II och III ger att

$$\tilde{x} = x - \hat{x} = x - E(x|y) = x - m_x - R_{xy}R_y^{-1}(y-m_y)$$

är oberoende av y .

TILLSTÅNDSUPPSKATTNING AV DISKRETA SYSTEM.

Det diskreta systemet betecknas

$$\begin{aligned}x(t+1) &= \Phi x(t) + v(t) \\ y(t) &= \Theta x(t) + e(t)\end{aligned}$$

där $v(t)$ och $e(t)$ är oberoende normalfördelade variabler med medelvärdet noll och kovarianser

$$\begin{aligned}E v(t) v^T(t) &= R_1 \\ E v(t) e^T(t) &= 0 \\ E e(t) e^T(t) &= R_2\end{aligned}$$

Begynnelsestillståndet $x(t_0)$ är normalfördelat med medelvärdet m och kovariansen R_0 . R_1 och R_2 är positivt definita. Vidare får Φ, Θ, R_1 och R_2 bero av tiden.

Problemet är nu att uppskatta $x(t+1)$ med hjälp av $y(t), y(t-1), \dots, y(t_0)$ så att kriteriet $E g(a^T(x(t+1) - \hat{x}))$ är minimalt. g är symmetrisk och icke avtagande för positiva argument.

Uppskattningen betecknas $\hat{x}(t+1|t)$ och felet $x - \hat{x}(t+1|t)$ med $\tilde{x}(t+1|t)$. Teorem I ger då lösningen

$$\hat{x}(t+1|t) = E(x(t+1) | y(t_0) = \eta(t_0), \dots, y(t) = \eta(t)) \quad (4)$$

Om vi sätter

$$y_t^T = (y^T(t_0), y^T(t_0+1), \dots, y^T(t))$$

kan (4) skrivas

$$\hat{x}(t+1|t) = E(x(t+1) | y_t)$$

Det gäller att $\hat{x}(t|t-1)$ är känt.

Vi har

$$\hat{x}(t+1|t) = E(x(t+1) | y_t) = E(x(t+1) | y_{t-1}, y(t))$$

Teorem III ger att y_{t-1} och $\tilde{y}(t) = y(t) - E(y(t) | y_{t-1})$ är oberoende.

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) &= y(t) - E(y(t)|\mathcal{Y}_{t-1}) = y(t) - E(\Theta x(t) + e(t)|\mathcal{Y}_{t-1}) = \\ &= y(t) - \Theta \hat{x}(t) = \Theta x(t) - \Theta \hat{x}(t) + e(t) = \Theta \tilde{x}(t) + e(t)\end{aligned}$$

$\tilde{y}(t)$ kallas innovationen och är ett mått på skillnaden mellan den verkliga utsignalen och den uppskattade utsignalen.

Teorem IV ger,

$$\begin{aligned}\hat{x}(t+1) &= E(x(t+1)|\mathcal{Y}_{t-1}, y(t)) = E(x(t+1)|\mathcal{Y}_{t-1}, \tilde{y}(t)) = \\ &= E(x(t+1)|\mathcal{Y}_{t-1}) + E(x(t+1)|\tilde{y}(t) - E x(t+1))\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}E(x(t+1)|\mathcal{Y}_{t-1}) &= E(\Phi x(t) + v(t)|\mathcal{Y}_{t-1}) = E(\Phi x(t)|\mathcal{Y}_{t-1}) = \\ &= \Phi E(x(t)|\mathcal{Y}_{t-1}) = \Phi \hat{x}(t|t-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{x\tilde{y}} &= \text{cov}(x(t+1), \tilde{y}(t)) = \text{cov}(\Phi x(t) + v(t), \Theta \tilde{x}(t) + e(t)) = \\ &= E(\Phi x(t) + v(t) - \Phi E x(t))(\Theta \tilde{x}(t) + e(t))^T = \\ &= E(\Phi(\hat{x}(t) + \tilde{x}(t))|\tilde{x}(t)\Theta^T) = \Phi(E\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t))\Theta^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{\tilde{y}\tilde{y}} &= \text{cov}(\tilde{y}(t), \tilde{y}(t)) = E(\Theta \tilde{x}(t) + e(t))(\Theta \tilde{x}(t) + e(t))^T = \\ &= \Theta(E\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t))\Theta^T + R_2\end{aligned}$$

Vi sätter $P(t) = E\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)$.

Teorem III ger,

$$E(x(t+1)|\tilde{y}(t)) = E x(t+1) + K(t)\tilde{y}(t)$$

där

$$K(t) = R_{x\tilde{y}} R_{\tilde{y}\tilde{y}}^{-1} = \Phi P(t)\Theta^T [\Theta P(t)\Theta^T + R_2]^{-1}$$

Ekvation (5) ger nu,

$$\begin{aligned}\hat{x}(t+1|t) &= \Phi \hat{x}(t|t-1) + K(t)\tilde{y}(t) \\ \tilde{y}(t) &= y(t) - \Theta \hat{x}(t|t-1)\end{aligned}$$

För begynnelsevärden erhålles,

$$\hat{x}(t_0+1|t_0) = E(x(t_0+1)|y(t_0))$$

$$\begin{aligned}\hat{x}(t_0+1|t_0) &= E(x(t_0+1)|y(t_0)) = E(\Phi x(t_0) + v(t)|\Theta x(t_0) + e(t)) = \\ &= \Phi m + \Phi R_0 \Theta^T (\Theta R_0 \Theta^T + R_2)^{-1} (y(t_0) - \Theta m)\end{aligned}$$

$$P(t_0+1) = \Phi R_0 \Phi^T + R_1 - \Phi R_0 \Theta^T (\Theta R_0 \Theta^T + R_2)^{-1} \Theta R_0 \Phi^T$$

Begynnelsestillståndet kan ges som

$$\hat{x}(t_0 | t_0 - 1) = m$$

För uppskattningsfelet gäller

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t+1|t) &= x(t+1) - \hat{x}(t+1|t) = \Phi \tilde{x}(t|t-1) + v(t) - K(t)\tilde{y}(t) = \\ &= (\Phi - K(t)\Theta) \tilde{x}(t|t-1) + v(t) - K(t)e(t) \end{aligned}$$

$$E\tilde{x}(t+1|t) = 0$$

Detta ger

$$\begin{aligned} P(t+1) &= [\Phi - K(t)\Theta]P(t)[\Phi - K(t)\Theta]^T + R_1 + K(t)R_2K^T(t) = \\ &= \Phi P(t)\Phi^T + R_1 - \Phi P(t)\Theta^T (\Theta P(t)\Theta^T + R_2)^{-1} \Theta P(t)\Phi^T = \\ &= (\Phi - K(t)\Theta)P(t)\Phi^T + R_1 \end{aligned}$$

(Jämför med $P(t_0+1)$.)

$$P(t_0) = R_0.$$

Sammanfattningsvis får vi alltså,

TEOREM V. KALMAN.

Uppskattningen som minimerar kriteriefunktionen är

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1|t) &= \Phi \hat{x}(t|t-1) + K(t)[y(t) - \Theta \hat{x}(t|t-1)] \\ \hat{x}(t_0 | t_0 - 1) &= m \\ K(t) &= \Phi P(t)\Theta^T [\Theta P(t)\Theta^T + R_2]^{-1} \\ P(t+1) &= \Phi P(t)\Phi^T + R_1 - \Phi P(t)\Theta^T [\Theta P(t)\Theta^T + R_2]^{-1} \Theta P(t)\Phi^T = \\ &= [\Phi - K(t)\Theta]P(t)\Phi^T + R_1 = \\ &= [\Phi - K(t)\Theta]P(t)[\Phi - K(t)\Theta]^T + R_1 + K(t)R_2K^T(t) \\ P(t_0) &= R_0 \end{aligned}$$

Innovationen $\tilde{y}(t) = y(t) - E(y(t) | \mathcal{Y}_{t-1})$

TEOREM VI.

$\tilde{y}(t)$ och $\tilde{y}(s)$ är oberoende om $t \neq s$.

TILLSTÅNDSUPPSKATTNING AV KONTINUERLIGA SYSTEM.

Det kontinuerliga systemet har följande utseende

$$dx = Axdt + dv$$

$$dy = Cxdt + de$$

TEOREM VII.

Uppskattningen som minimerar kriteriefunktionen ges av

$$d\hat{x} = A\hat{x}dt + K(dy - C\hat{x}dt)$$

$$\hat{x}(t_0) = m$$

där

$$K = PC^T R_2^{-1}$$

P är kovariansen av uppskattningsfelet och

$$\frac{dP}{dt} = AP + PA^T + R_1 - PC^T R_2^{-1} CP$$

$$P(t_0) = R_0$$

$$d\tilde{x} = (A-KC)\tilde{x}dt + dv - Kde$$

Jämför sid 1.

REFERENSER:

K.J. Åström. Stochastic Control Theory. Chapter 7.

ADAPTIVA KALMAN FILTER.

Det på sidan 7 angivna Kalman-filteret förutsätter att man känner till varianserna R_1 och R_2 . Gör man inte det måste man gissa vilka värden de eventuellt kan ha. Man skulle istället kunna tänka sig att man rådde bot på detta genom att

- a. Genom off-line beräkningar bestämma R_1 och R_2 .
- b. Genom att använda on-line beräkningar enligt nedanstående metod (adaptivt Kalman-filter).

Den nedan angivna metoden är föreslagen av Andrew P. Sage och Gary W. Husa vid Southern Methodist University, Dallas, Texas.

MATEMATISK MODEL.

Det diskreta systemet har följande utseende

$$\begin{aligned}x(t+1) &= \Phi(t+1, t)x(t) + \Gamma(t)v(t) \\y(t) &= \Theta(t)x(t) + e(t)\end{aligned}\tag{1}$$

Där alltså koefficienterna får vara tidsberoende och där $v(t)$ och $e(t)$ är normalfördelat brus med medelvärdet noll. Vidare gäller det att

$$\begin{aligned}\text{cov}(v(j), v(k)) &= R_1 \delta_{jk} \\ \text{cov}(e(j), e(k)) &= R_2 \delta_{jk}\end{aligned}$$

δ_{jk} betecknar Kroneckers delta och vi får då

$$\begin{aligned}E(v(t)v^T(t)) &= R_1 \\ E(e(t)e^T(t)) &= R_2\end{aligned}$$

Det i teorem V givna Kalman-filteret kan för system (1) skrivas om på följande sätt,

$$\hat{x}(t|t) = [I - K(t)\Theta(t)] \hat{x}(t|t-1) + K(t)y(t)\tag{2}$$

$$\hat{x}(t|t-1) = \Phi(t, t-1)\hat{x}(t-1|t-1)\tag{3}$$

$$K(t) = P(t|t-1)\Theta^T(t)\left[\Theta(t)P(t|t-1)\Theta^T(t) + R_2(t)\right]^{-1} \quad (4)$$

$$P(t|t-1) = \Phi(t, t-1)P(t-1|t-1)\Phi^T(t, t-1) + \Gamma(t-1)R_1(t-1)\Gamma^T(t-1) \quad (5)$$

$$P(t|t) = \left[I - K(t)\Theta(t) \right] P(t|t-1) \quad (6)$$

$$x(0|-1) = m$$

$$P(0|-1) = R_0$$

I betecknar enhetsmatrisen.

Ovanstående Kalman-filter kan modifieras för att passa ett system där bruset inte har medelvärdet noll.

I ekvation (2) är $\hat{x}(t|t)$ den optimala uppskattningen av $x(t)$, som man kan göra med hjälp av $y(0), y(1), \dots, y(t)$ och i ekvation (3) är $\hat{x}(t|t-1)$ den optimala uppskattningen av $x(t)$ då $y(0), y(1), \dots, y(t-1)$ är givna. Matriserna $P(t|t)$ och $P(t|t-1)$ är kovariansmatriserna för differensen mellan tillståndsvektorn och den optimala uppskattningen då man har tillgång till utsignalen upp till t respektive $t-1$. $K(t)$ kallas förstärkningsmatrisen.

Om mätbrusvariansen R_2 och systembrusvariansen R_1 är konstanta men okända kan man använda uppskattningsalgoritmer för dessa och sedan använda dessa i Kalman-filteret. Detta kan då medföra en stor reduktion av uppskattningsfelet jämfört med det fel som skulle uppstå om man gissade ett felaktigt värde. Det är inte möjligt att utveckla en sekvensiell estimator ur ekvationerna (2)-(6) eftersom uppskattningen av x vid tiden t med hjälp av observationer vid t innehåller $R_2(t)$. Det är därför nödvändigt att förutsäga $R_2(t)$ med hjälp av mätningar vid tidigare tidpunkt. Då R_2 förutsättes vara oberoende av tiden gäller

$$R_2(t|t-1) = R_2(t-1|t-1)$$

Bayes uppskattningar $\hat{x}(t|t)$, $\hat{R}_1(t)$ och $\hat{R}_2(t|t-1)$ fås genom att maximera täthetsfunktionen

$$p \left[X_t, R_1, R_2 \mid Y_t \right]$$

Detta kan med hjälp av Bayes formel skrivas

$$p[\chi_t, R_1, R_2 | y_t] = \frac{p[y_t | \chi_t, R_1, R_2] p[\chi_t, R_1, R_2]}{p[y_t]} \quad (7)$$

I formel (7) betyder χ_t sekvensen $x(t), t=0, 1, 2, \dots, t$ och y_t betecknar $y(0), y(1), \dots, y(t)$.

$p[y_t]$ påverkar inte optimeringen då den inte explicit beror på χ_t, R_1 eller R_2 , som är de variabler som optimeringen skall utföras för. Vi antar vidare att tillståndsvektorn och de två första momenten av system- och mätbrusen är oberoende. Då gäller att den optimala adaptiva Bayes estimatorn kan fås genom att maximera den icke betingade sannolikheten

$$J = p[\chi_t, R_1, R_2, y_t] = p[y_t | \chi_t, R_1, R_2] p[\chi_t] p[R_1] p[R_2] \quad (8)$$

Vi antar att vi har likformig fördelning för R_1 och R_2 .

$$p[R_1] = \begin{cases} \frac{1}{R_{1\max} - R_{1\min}} & R_{1\min} < R_1 < R_{1\max} \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases} \quad (9)$$

$$p[R_2] = \begin{cases} \frac{1}{R_{2\max} - R_{2\min}} & R_{2\min} < R_2 < R_{2\max} \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

Vidare fås för de normalfördelade $p[\chi_t]$ och $p[y_t | \chi_t, R_1, R_2]$

$$p[\chi_t] = p[x(0)] \prod_{j=1}^t p[x(j) | x(j-1)] \quad (10)$$

$$p[y_t | \chi_t, R_1, R_2] = \prod_{j=1}^t p[y(j) | x(j), R_1, R_2] \quad (11)$$

För medelvärden och varianser gäller

$$E(y(t) | x(t)) = \Theta(t)x(t), \quad E(x(0)) = m, \quad E(x(t) | x(t-1)) = \Phi(t, t-1)x(t-1)$$

$$\text{var}(y(t) | x(t)) = R_2, \quad \text{var}(x(0)) = R_0, \quad \text{var}(x(t) | x(t-1)) = \Gamma R_1 \Gamma^T$$

Ekvation (8) blir med hjälp av (1), (9), (10) och (11),

$$J = \frac{1}{(2\pi)^{-\frac{1}{2}(m't+n(t+1))} |P(0)|^{\frac{1}{2}} \left| \Gamma_{R_1} \Gamma^T \right|^{\frac{1}{2}t} \left| R_2 \right|^{\frac{1}{2}t}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x(0)-m)^T R_0^{-1} (x(0)-m) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^t (y(j)-\Theta(j)x(j))^T R_2^{-1} (y(j)-\Theta(j)x(j)) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{t-1} (v(j))^T R_1^{-1} (v(j)) \right\} \quad (12)$$

m' och n är dimensionen av vektorerna $y(t)$ respektive $x(t)$. Detta samband skall maximeras med avseende på χ_t, R_1 och R_2 .

Man får följande estimatorer,

$$\hat{\Gamma}_{R_1}^A \hat{\Gamma}^T(t|t) = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t \left[\hat{x}(j|t) - \Phi(j, j-1)x(j-1|t) \right] \cdot \left[x(j|t) - \Phi(j, j-1)x(j-1|t) \right]^T \quad (13)$$

$$\hat{R}_2(t-1|t-1) = \frac{1}{t-1} \sum_{j=1}^{t-1} \left[y(j) - \Theta(j)\hat{x}(j|t-1) \right] \cdot \left[y(j) - \Theta(j)x(j|t-1) \right]^T \quad (14)$$

Om uppskattningarna man får ur (13) och (14) inte är inom de gränser (9) föreskriver använder man extremvärdena för R_1 och R_2 . Ekvationerna (13) och (14) är inte sekvensiella.

ADAPTIVA UPPSKATTNINGSGRITMER.

Resultatet av det föregående är att vi för tillståndsvektorn får uppskattningarna (4)-(6) där R_2 ersättes med $\hat{R}_2(t|t-1)$ och R_1 ersättes med $\hat{R}_1(t-1|t-1)$. Det är inte möjligt att direkt få \hat{R}_1 utan man får $\Gamma \hat{R}_1 \Gamma^T$.

För att bestämma sekvensiella parameteruppskattningar är det bekvämt att använda algoritmer för "optimum discrete fixed point smoothing". Vi vill uppskatta en tillståndsvektor vid tiden j med hjälp av observationer t.o.m. tiden $t-1$, som är större än eller lika med j . Estimatoren, som betecknas med $\hat{x}(j|t-1)$ ges av

$$\hat{x}(j|t-1) = \hat{x}(j|t-2) + B(t-1) [\hat{x}(t-1|t-1) - \hat{x}(t-1|t-2)] \quad (15)$$

där

$$B(t) = \prod_{i=j}^{t-1} P(i|i) \Phi^T(i+1, i) P^{-1}(i+1|i) \quad (16)$$

(enligt: Sage, A.P. and Melsa, J.L., Estimation Theory: with applications to communications and control, McGraw-Hill, Inc., New York.)

Vi substituerar ekvation (15) i ekvation (14). Detta ger

$$\begin{aligned} \hat{R}_1(t|t-1) = \frac{1}{t-1} \sum_{j=1}^{t-1} & \left[y(j) - \Theta \hat{x}(j|t-2) - \Theta C(t-1) \right] \left[y(j) - \right. \\ & \left. - \Theta \hat{x}(j|t-2) - \Theta C(t-1) \right]^T \end{aligned} \quad (17)$$

Ur (14) fås definitionsmsigt,

$$\hat{R}_1(t-1|t-2) = \frac{1}{t-2} \sum_{j=1}^{t-2} \left[y(j) - \Theta \hat{x}(j|t-2) \right] \left[y(j) - \Theta \hat{x}(j|t-2) \right]^T \quad (18)$$

Kombineras ekvationerna (17) och (18) fås m.h.a. ekvation (2),

$$\hat{R}(t|t-1) = \frac{1}{t-1} \left[(t-2)\hat{R}(t-1|t-2) + \tilde{y}(t-1)\tilde{y}^T(t-1) + D(t-1) + \Omega(t-1) \right]$$

där

$$\tilde{y}(t-1) = \tilde{y}(t-1) - \Theta(t-1)\hat{x}(t-1|t-2)$$

$$D(t-1) = (t-1)\Theta C(t-1)C^T(t-1)\Theta^T$$

$$\Omega(t-1) = \Xi(t-1)C^T(t-1)\Theta^T + \Theta C(t-1)\Xi^T(t-1)$$

$$\Xi(t-1) = \Xi(t-2) + \tilde{y}(t-1) - \Theta C(t-2)$$

På liknande sätt är det möjligt att få fram sekvensiella uttryck för $\hat{R}_1(t|t)R^T$. Dessa är emellertid mycket komplicerade och ganska opraktiska på grund av att man behöver beräkna rekursiva matrisekvationer, som inte direkt ingår i Kalman-filtret. Därför är det lättare att i stället för de optimala algoritmerna använda suboptimala algoritmer.

SUBOPTIMALA ADAPTIVA UPPSKATTNINGSGRITMER.

För att bestämma den suboptimala uppskattningen av mätbrusvariansen tas förväntningsvärdet av

$$\Lambda(t|t-1) = \frac{1}{t-1} \sum_{j=1}^{t-1} \left[y(j) - \Theta(j)\hat{x}(j|j-1) \right] \left[y(j) - \Theta(j)\hat{x}(j|j-1) \right]^T$$

Detta ger eftersom $y(j) = \Theta(j)x(j) + e(j)$ och om $E[\Lambda(t|t-1)]$ ersättes med $\Lambda(t|t-1)$

$$\begin{aligned} \Lambda(t|t-1) &= \frac{1}{t-1} \sum_{j=1}^{t-1} \left[\Theta(j)x(j) + e(j) - \Theta(j)\hat{x}(j|j-1) \right] \left[\Theta(j)x(j) + \right. \\ &\quad \left. + e(j) - \Theta(j)\hat{x}(j|j-1) \right]^T = \frac{1}{t-1} \sum_{j=1}^{t-1} \left[\Theta(j)\tilde{x}(j|j-1) + e(j) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[\tilde{x}^T(j|j-1)\Theta^T(j) + e^T(j) \right] = \\ &= \frac{1}{t-1} \sum_{j=1}^{t-1} \left[\Theta(j)P(j|j-1)\Theta^T(j) + R_2 \right] \end{aligned}$$

Estimatoren fås genom att sätta de båda uttrycken för $\Lambda(t|t-1)$ lika och lösa ekvationen för R_2 , som nu ersättes med $\hat{R}_2(t|t-1)$.

Man får,

$$\hat{R}_2(t|t-1) = \frac{1}{t-1} \sum_{j=1}^{t-1} \left[\tilde{y}(j) \tilde{y}^T(j) - \Theta(j)P(j|j-1)\Theta^T(j) \right] \quad (19)$$

ovanstående ekvation ger

$$\hat{R}_2(t-1|t-2) = \frac{1}{t-1} \sum_{j=1}^{t-2} \left[\tilde{y}(j) \tilde{y}^T(j) - \Theta(j)P(j|j-1)\Theta^T(j) \right] \quad (20)$$

Substitueras ekvation (20) i ekvation (19) fås som resultat för uppskattningen av systembrusvariansen

$$\begin{aligned} \hat{R}_2(t|t-1) &= \frac{1}{t-1} \left[(t-2)R_2(t-1|t-2) + \tilde{y}(t-1)\tilde{y}^T(t-1) - \right. \\ &\quad \left. - \Theta(t-1)P(t-1|t-2)\Theta^T(t-1) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

där
$$\tilde{y}(t) = y(t) - \Theta(t)\hat{x}(t|t-1) \quad (22)$$

är innovationen.

På liknande sätt fås den suboptimala uppskattningen av systembrusvariansen,

$$\begin{aligned} \hat{R}_1(t|t) &= \frac{1}{t} \left[(t-1)R_1(t-1|t-1) + K(t)\tilde{y}(t)\tilde{y}^T(t)K^T(t) + \right. \\ &\quad \left. + P(t|t) - \Phi(t, t-1)P(t-1|t-1)\Phi^T(t, t-1) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

Om uppskattningarna överskrider gränserna givna i (9) användes gränsvärdena.

REFERENSER.

A.P.Sage and G.W.Husa: Adaptive filtering with unknown prior statistics.

A.P.Sage and J.L.Melsa., Estimation Theory: with applications to communications and control. McGraw-Hill Inc.

SAMMANFATTNING.

Vi har ett diskret system,

$$\begin{aligned}x(t+1) &= \Phi(t+1, t)x(t) + \Gamma(t)v(t) \\ y(t) &= \Theta(t)x(t) + e(t)\end{aligned}$$

där vi känner utsignalens värde vid tidpunkterna $0, 1, 2, \dots, t-1$ och vill uppskatta tillståndsvektorn vid tiden t . Vi använder då ett Kalman-filter,

$$\begin{aligned}\hat{x}(t|t) &= [I - K(t)\Theta(t)] \hat{x}(t|t-1) + K(t)y(t) \\ \hat{x}(t|t-1) &= \Phi(t, t-1)\hat{x}(t-1|t-1) \\ K(t) &= P(t|t-1)\Theta^T(t) [\Theta(t)P(t|t-1)\Theta^T(t) + R_2(t)]^{-1} \\ P(t|t-1) &= \Phi(t, t-1)P(t-1|t-1)\Phi^T(t, t-1) + \Gamma(t-1)R_1(t-1)\Gamma^T(t-1) \\ P(t|t) &= [I - K(t)\Theta(t)] P(t|t-1) \\ x(0|-1) &= m = E\{x(0)\} \\ P(0|-1) &= R_0 = \text{var}(x(0))\end{aligned}$$

där $E(v(t)v^T(t)) = R_1$ och $E(e(t)e^T(t)) = R_2$.

Om man inte känner R_1 och R_2 kan man konstruera uppskattningsalgoritmer för dessa. Enligt det föregående har de suboptimala uppskattningsalgoritmerna av mätbrus- och systembrusvarianserna följande utseende

$$\begin{aligned}\hat{R}_2(t|t-1) &= \frac{1}{t-1} \left[(t-2)R_2(t-1|t-2) + \frac{\tilde{y}(t-1)\tilde{y}^T(t-1)}{t-1} - \right. \\ &\quad \left. - \Theta(t-1)P(t-1|t-2)\Theta^T(t-1) \right] \\ \Gamma\hat{R}_1(t|t)\Gamma^T &= \frac{1}{t} \left[(t-1)\Gamma R_1(t-1|t-1)\Gamma^T + K(t)\frac{\tilde{y}(t)\tilde{y}^T(t)}{t}K^T(t) + \right. \\ &\quad \left. + P(t|t) - \Phi(t, t-1)P(t-1|t-1)\Phi^T(t, t-1) \right]\end{aligned}$$

där $\frac{\tilde{y}(t)}{t} = y(t) - \Theta(t)\hat{x}(t|t-1)$

Vi får alltså följande ADAPTIVA KALMAN FILTER.

$$\begin{aligned} \hat{x}(t|t) &= \hat{x}(t|t-1) + K(t) \left[y(t) - \Theta(t) \hat{x}(t|t-1) \right] \\ \hat{x}(t|t-1) &= \Phi(t, t-1) \hat{x}(t-1|t-1) \\ K(t) &= P(t|t-1) \Theta^T(t) \left[\Theta(t) P(t|t-1) \Theta^T(t) + \hat{R}_2(t|t-1) \right]^{-1} \\ P(t|t-1) &= \Phi(t, t-1) P(t-1|t-1) \Phi^T(t, t-1) + \Gamma \hat{R}_1(t-1|t-1) \Gamma^T \\ P(t|t) &= \left[I - K(t) \Theta(t) \right] P(t|t-1) \\ \hat{R}_2(t|t-1) &= \frac{1}{t-1} \left[(t-2) \hat{R}_2(t-1|t-2) + \tilde{y}(t-1) \tilde{y}^T(t-1) - \right. \\ &\quad \left. - \Theta(t-1) P(t-1|t-2) \Theta^T(t-1) \right] \\ \Gamma \hat{R}_1(t|t) \Gamma^T &= \frac{1}{t} \left[(t-1) \Gamma \hat{R}_1(t-1|t-1) \Gamma^T + K(t) \tilde{y}(t) \tilde{y}^T(t) K^T(t) + \right. \\ &\quad \left. + P(t|t) - \Phi(t, t-1) P(t-1|t-1) \Phi^T(t, t-1) \right] \\ \tilde{y}(t) &= y(t) - \Theta(t) \hat{x}(t|t-1) \end{aligned}$$

med begynnelsevärdena

$$\hat{x}(0|-1) = m \quad \text{och} \quad P(0|-1) = R_0$$

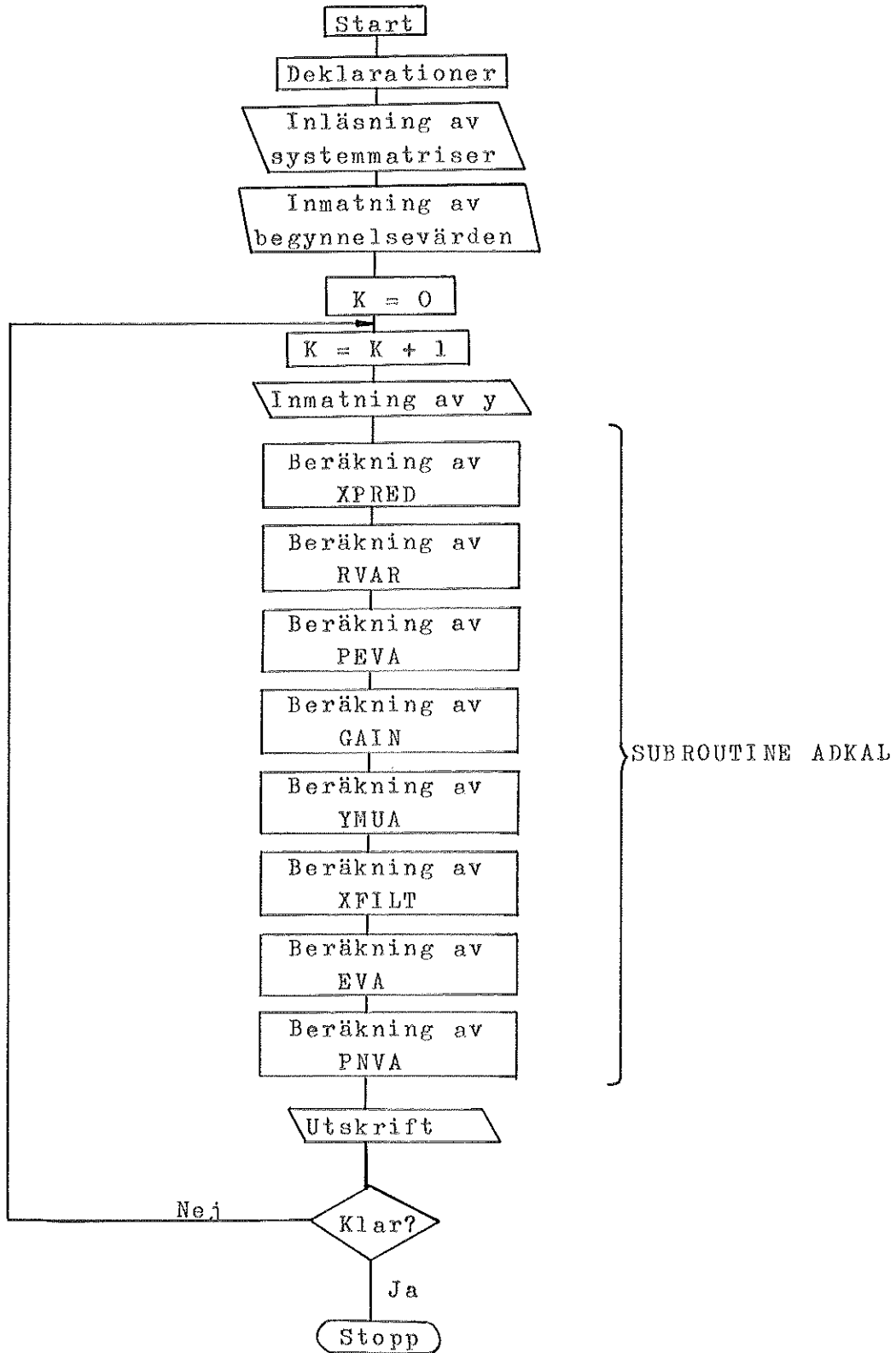
FORTTRAN-SUBROUTINE.

Vi använder följande beteckningar i programmet,

$y(t)$	YB
t	K (heltal) T (reell)
$\Phi(t, t-1)_{n, n}$	FI(N, N)
$\Theta(t)_n$	THETA(N)
$\hat{x}(t t)_n$	XFILT(N)
$\hat{x}(t t-1)_n$	XPRED(N)
$K(t)_n$	GAIN(N)
$P(t t-1)_{n, n}$	PEVA(N, N)
$P(t t)_{n, n}$	EVA(N, N)
$\hat{R}(t t-1)$	RVAR
$\Gamma \hat{Q}(t t) \Gamma^T_{n, n}$	PNVA(N, N)
$\tilde{y}(t)$	YMUA

Flödesschemat för programmet visas på sidan 19. Programmet för det ADAPTIVA KALMAN-FILTRET framgår av sidorna 20 och 21. Det är utfört som en Fortran-Subroutine kallad SUBROUTINE ADKAL.

PROGRAM ADAPTIVT KALMAN-FILTER.



Man bör också lägga in en test enligt sidan 11 ekv.(9)

```
      SUBROUTINE ADK4L (FI, THETA, N, YR, K, T, PEVA, EVA, PNVA, XFILT,  
*XPRED, GAIN, DELR1, DELR2, DELR3, DELR4, DELR5, DELR6, DELR7, YMUA,  
*RVAR)  
      DIMENSION FI (N, N), THETA (N), PEVA (N, N), EVA (N, N), PNVA (N, N),  
*XFILT (N), XPRED (N), GAIN (N), DELR2 (N, N), DELR3 (N, N), DELR4 (N),  
*DELR6 (N, N), DELR7 (N, N)  
C      NEW XPRED  
      DO100 I=1, N  
      XPRED (I)=0.  
      DO100 L=1, N  
100  XPRED (I)=XPRED (I)+FI (I, L)*XFILT (L)  
C      NEW RVAR  
      IF (K-2) 102, 102, 101  
101  RVAR=( (T-2.) *RVAR+YMUA*YMUA-DELR1) / (T-1.)  
102  CONTINUE  
C      NEW PEVA  
      DO103 I=1, N  
      DO 103 J=1, N  
      DELR2 (I, J)=0.  
      DO103 L=1, N  
103  DELR2 (I, J)=DELR2 (I, J)+FI (I, L)*EVA (L, J)  
      DO104 I=1, N  
      DO104 J=1, N  
      DELR3 (I, J)=0.  
      DO104 L=1, N  
104  DELR3 (I, J)=DELR3 (I, J)+DELR2 (I, L)*FI (J, L)  
      DO105 I=1, N  
      DO105 J=1, N  
105  PEVA (I, J)=DELR3 (I, J)+PNVA (I, J)  
C      NEW GAIN  
      DO106 I=1, N  
      DELR4 (I)=0.  
      DO106 L=1, N  
106  DELR4 (I)=DELR4 (I)+PEVA (I, L)*THETA (L)  
      DELR1=0.  
      DO107 L=1, N  
107  DELR1=DELR1+THETA (L)*DELR4 (L)  
      DO108 I=1, N  
108  GAIN (I)=DELR4 (I) / (DELR1+RVAR)  
C      NEW YMUA  
      DELR5=0.  
      DO109 L=1, N  
109  DELR5=DELR5+THETA (L)*XPRED (L)  
      YMUA=YR-DELR5  
C      NEW XFILT  
      DO110 I=1, N  
110  XFILT (I)=XPRED (I)+GAIN (I)*YMUA  
C      NEW EVA  
      DO 111 I=1, N  
      DO111 J=1, N  
111  DELR6 (I, J)=GAIN (I)*THETA (J)  
      DO113 I=1, N  
      DO113 J=1, N  
      IF (I, EQ, J) GO TO 112  
      DELR6 (I, J)=-DELR6 (I, J)  
      GO TO 113
```

```
112 DELR6(I,J)=1.-DELR6(I,J)
113 CONTINUE
    DO114 I=1,N
    DO114 J=1,N
    EVA(I,J)=0.
    DO114 L=1,N
114 EVA(I,J)=EVA(I,J)+DELR6(I,L)*PEVA(L,J)
C   NEW PNVA
    DO115 I=1,N
    DO115 J=1,N
115 DELR7(I,J)=GAIN(I)*GAIN(J)
    DO116 I=1,N
    DO116 J=1,N
116 PNVA(I,J)=((T-1.)*PNVA(I,J)+YMUA*YMUA*DELR7(I,J)+EVA(I,J)-
    *DELR3(I,J))/T
    RETURN
    END
```

EXEMPEL.

Vi undersöker följande system,

$$x_1(t+1) = x_1(t) + 0,05x_2(t)$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + 0,05v(t)$$

$$y(t) = x_1(t) + e(t)$$

$$\hat{x}_1(0) = x_1(0) = 0$$

$$\hat{x}_2(0) = x_2(0) = 0$$

$$P(0|0) = 0$$

Brusvariablerna $v(t)$ och $e(t)$ är normalfördelade med medelvärdet noll.

Här gäller alltså att,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0,05 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,05 \end{bmatrix} \quad \Theta = [1 \ 0]$$

Vi låter först $v(t)$ ha variansen 20 och $e(t)$ variansen 1, medan vi kopplar bort estimatorn för systembrusvariansen och använder det riktiga värdet i algoritmerna. Av diagram I framgår att mätbrusvariansen konvergerar mot det riktiga värdet för olika begynnelsevärden. Dessa är 5, 0, 1, 0 och 0, 2. Efter 500 samplingsintervall skiljer sig uppskattningen från det riktiga värdet med cirka 10%.

I det andra fallet har systembrusvariansen värdet 90 och mätbrusvariansen värdet 0,001. Diagram II visar uppskattningen av $\Gamma R_1 \Gamma^T$ för olika begynnelsevärden. Det riktiga värdet är 0,225. För de övriga komponenterna av $\Gamma R_1 \Gamma^T$ gäller att uppskattningen ligger nära noll. I detta fall är estimatorn för mätbruset bortkopplad och vi använder det riktiga värdet.

I det tredje fallet låter vi både $e(t)$ och $v(t)$ vara $N(0,1)$. Begynnelsevärdena för estimatorerna låter vi vara lika med de riktiga värdena.

Diagram III visar uppskattningen av mätbrusvariansen. Vi ser att den skiljer sig från det riktiga värdet endast med några få procent. I diagram IV ges uppskattningen av $(2,2)$ -komponenten av $\Gamma R_1 \Gamma^T$. Vi ser att den avviker ganska mycket från det riktiga värdet 0,0025. Efter 5000 samplingsintervall är avvikelserna cirka 40%. Slutligen visar diagram V variansen av uppskattningsfelet för det sista exemplet.

Om man istället för $P(0|0)=0$ använder $P(0|0)=I$ där I är enhetsmatrisen får man inga större avvikelser från de här givna kurvorna.

Man ser att uppskattningsalgoritmen för mätbruset ger ett värde som ligger mycket nära det riktiga, medan man för systembrusvariansen får en uppskattning som kan skilja sig avsevärt från det riktiga värdet. Uppskattningen av $\Gamma R_1 \Gamma^T$ är emellertid starkt beroende av begynnelsevärdet och storleken på bruset och med ett tursamt val av dessa kan man få hyfsad överensstämmelse. Se t.ex. diagram II där den mellersta kurvan, svarande mot att begynnelsevärdet sättes lika med det riktiga värdet, ger ett fel på något över 10% efter 5000 intervall.

REALTIDSI DENTIFIERING.

Vi har ett system med följande insignal-utsignalrelation,

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_1 u(t-1) + \dots + b_n u(t-n) + e(t) \quad (1)$$

där $e(t)$ är normalfördelat brus. Vi inför följande beteckningar,

$$\begin{aligned} \varphi(t-1) &= [-y(t-1), -y(t-2), \dots, -y(t-n), u(t-1), \dots, u(t-n)] \\ \Theta(t) &= [a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t), b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)] \end{aligned}$$

Vidare antas koefficienterna a_i och b_i vara brusdrivna. Ekvation (1) ovan kan då skrivas,

$$\begin{aligned} \Theta(t+1) &= \Theta(t) + \Gamma(t)v(t) \\ y(t) &= \varphi(t-1)\Theta(t) + e(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Vi kan observera en realisation av utsignalen $y(t)$. Problemet är nu att med hjälp av denna utsignal uppskatta koefficienterna a_i och b_i vid tiden $t+1$. Man kan försöka göra denna uppskattning med hjälp av det Adaptiva Kalman Filteret enligt sidan 17. En jämförelse mellan systemet på sidan 16 och ekvation (2) ovan ger att $\Phi(t+1, t)$ motsvaras av enhetsmatrisen, $x(t)$ av $\Theta(t)$ och $\Theta(t)$ av $\varphi(t-1)$. Filteret får då nedanstående utseende,

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}(t+1) &= \hat{\Theta}(t) + K(t) [y(t) - \varphi(t-1)\hat{\Theta}(t)] \\ K(t) &= P(t|t-1)\varphi^T(t-1) [\varphi(t-1)P(t|t-1)\varphi^T(t-1) + \hat{R}_2(t|t-1)]^{-1} \\ P(t|t-1) &= P(t-1|t-1) + \Gamma \hat{R}_1 \Gamma^T \\ P(t|t) &= [I - K(t)\varphi(t-1)] P(t|t-1) \\ \hat{R}_2(t|t-1) &= \frac{1}{t-1} \left[(t-2)\hat{R}_2(t-1|t-2) + \frac{2}{\bar{y}(t-1)} \bar{y}^T(t-1) - \right. \\ &\quad \left. - \varphi(t-2)P(t-1|t-2)\varphi^T(t-2) \right] \end{aligned}$$

$$\hat{\Gamma}_{R_1}(t|t)\Gamma^T = \frac{1}{t} \left[(t-1) \hat{\Gamma}_{R_1}(t-1|t-1)\Gamma^T + K(t)\tilde{y}(t)\tilde{y}^T(t)K^T(t) + P(t|t) - P(t-1|t-1) \right]$$

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \varphi(t-1)\hat{\Theta}(t)$$

Om någon av varianserna R_1 respektive R_2 är kända användes det riktiga värdet och estimatorn strykes.

EXEMPEL.

Vi undersöker följande första gradens exempel med konstanta koefficienter,

$$y(t) = 0,5y(t-1) + 1,0u(t-1) + e(t)$$

där $e(t)$ är $N(0,0,01)$. I detta fall gäller alltså,

$$\begin{aligned} \varphi(t-1) &= [-y(t-1), u(t-1)] \\ \Theta(t) &= [-0,5, 1, 0] \end{aligned}$$

Vi låter först b_1 drivas av brus medan a_1 hålles konstant. D.v.s.

$$\begin{aligned} a_1(t+1) &= a_1(t) \\ b_1(t+1) &= b_1(t) + 0,015v(t) \end{aligned}$$

där $v(t)$ är $N(0,1)$.

Programmet som användes vid testkörning på GD8090 framgår av nästa sida. Resultatet av testkörningen framgår av diagrammen VI, VII, och VIII. Diagram VI visar hur uppskattningen av b_1 följer det riktiga värdet under 2500 samplingsintervall. a_1 håller sig konstant lika med $-0,5$. Diagram VII visar uppskattningen av mätbrusvariansen R_2 . Efter 2500 intervall skiljer sig uppskattningen från det riktiga värdet, $0,01$, med cirka 5%. Diagram VIII visar uppskattningen av $\Gamma_{R_1}\Gamma^T$. Det riktiga värdet är $2,25 \cdot 10^{-4}$ och uppskatt-

```

PROGRAM RTID
DIMENSION AFI(2,2),BLIFI(2),APEVA(2,2),AEVA(2,2),APNVA(2,2),
*ATHEFI(2),ATHETA(2),AGAIN(2),ADELR2(2,2),ADELR3(2,2),ADELR4(2),
*ADELR6(2,2),ADELR7(2,2),IP(1000),BTHETA(2)
AFI(1,1)=1.0
AFI(1,2)=0.0
AFI(2,1)=0.0
AFI(2,2)=1.0
K1=0
ATHEFI(1)=-0.5
ATHEFI(2)=1.0
BTHETA(1)=-0.5
BTHETA(2)=1.0
AEVA(1,1)=0.0
AEVA(1,2)=0.0
AEVA(2,1)=0.0
AEVA(2,2)=0.0
ARVAR=1.0
APNVA(1,1)=0.0
APNVA(1,2)=0.0
APNVA(2,1)=0.0
APNVA(2,2)=0.01
KK=3479
KKK=99
NP=311
CALL PRBN(NP,IP,1000)
K2=0
AMPL=1.0
YSY=0.0
J1=1
U=PRB(J1,IP,NP,AMPL,1000)
1 CONTINUE
K1=K1+1
AK1=K1
BLIFI(1)=-YSY
BLIFI(2)=0
CALL RANSS(KKK,F)
CALL RANSS(KK,E)
BTHETA(2)=BTHETA(2)+0.015*E
YSY=BLIFI(1)*BTHETA(1)+BLIFI(2)*BTHETA(2)+0.1*F
CALL ADKAL(AFI,BLIFI,2,YSY,K1,AK1,APEVA,AEVA,APNVA,ATHEFI,ATHETA,
*AGAIN,ADELR1,ADELR2,ADELR3,ADELR4,ADELR5,ADELR6,ADELR7,AYMUA,
*ARVAR)
DET=APEVA(1,1)*APEVA(2,2)-APEVA(2,1)*APEVA(1,2)
U=PRB(J1,IP,NP,AMPL,1000)
IF(K1-K2)4,5,5
4 GO TO 6
5 WRITE(61,99)K1,((APEVA(1,J),J=1,2),I=1,2),((APNVA(I,J),J=1,2),
*I=1,2),(ATHETA(I),I=1,2),DET,ARVAR
7 WRITE(61,98)(BTHETA(I),I=1,2),AYMUA,ADELR1
K2=K2+25
6 CONTINUE
IF(K1-2500)2,3,3
2 GO TO 1
3 CALL EXIT
99 FORMAT(I4,12E10.3)

98 FORMAT(4X,2E10.3)
END

```

ningen skiljer sig efter 2500 intervall från detta värde med cirka 27%. Övriga komponenter av $\Gamma R_1 \Gamma^T$ är ungefär lika med noll.

Om vi istället låter a_1 drivas av brus medan b_1 hålles konstant fås,

$$a_1(t+1) = a_1(t) + 0,015v(t)$$

$$b_1(t+1) = b_1(t)$$

där $v(t)$ är $N(0,1)$.

Resultatet av testen framgår av diagram IX, X och XI, där diagram IX visar hur uppskattningen av a_1 följer det riktiga värdet. b_1 hålles konstant lika med 1,0. Av diagram X framgår att uppskattningen av R_2 efter 2500 samplingsintervall skiljer sig från det riktiga värdet med cirka 3%. I diagram XI slutligen visas uppskattningen av $(\Gamma R_1 \Gamma^T)_{22}$. Efter 2500 intervall är felet cirka 20%.

Med systembrusvariansen 0,000225 fås alltså hyfsade uppskattningar, med dessa är känsliga för storleken på bruset. Vid en körning med systembrusvariansen 0,0025 divergerade t.ex. uppskattningen av mätbruset.

I det ovanstående har begynnelsevärdena för a_1 och b_1 varit lika med de riktiga värdena. Vi använder nu andra begynnelsevärden och undersöker om estimatorn konvergerar mot det riktiga värdet. Resultatet framgår av diagram XII och XIII. Vi ser att estimatorn för a_1 närmar sig det riktiga värdet $a_1 = -0,5$ om vi använder begynnelsevärdet $-0,75$. Även estimatorn för b_1 närmar sig det riktiga värdet mycket snabbt, om man istället för det riktiga 1,0 använder begynnelsevärdet 0,5.

För att få estimatorn för a_1 att konvergera måste man använda ett annat begynnelsevärde än $P(0|0) = 0$. Om man har $P(0|0) = 0,01$ divergerar algoritmerna medan $P(0|0) = 0,0001$ ger det redovisade resultatet. Man måste alltså vara försiktig vid val av begynnelsevärde för $P(0|0)$ då man har liten mätbrusvarians.

ALTERNATIV METOD.

För mätbrusvariansen hade vi enligt sidan 17 följande uppskattningsalgoritm,

$$\hat{R}_2(t|t-1) = \frac{1}{t-1} \left[(t-2)\hat{R}_2(t-1|t-2) + \hat{y}(t-1)\hat{y}^T(t-1) - \Theta(t-1)P(t-1|t-1)\Theta^T(t-1) \right]$$

Mätbrusvariansen vid steg t beräknas alltså som ett viktat värde av mätbrusvariansen vid tiden $t-1$ plus (innovationen)² vid steg $t-1$; innovationen kan sägas vara verklig utsignal minus uppskattad utsignal; minus en konstant gånger den uppskattade felbrusvariansen.

För systembrusvariansen har vi enligt sidan 17 följande,

$$\Gamma \hat{R}_1(t|t)\Gamma^T = \frac{1}{t} \left[(t-1)\Gamma \hat{R}_1(t-1|t-1)\Gamma^T + K(t)\hat{y}(t)\hat{y}^T(t)K^T(t) + P(t|t) - \Phi(t,t-1)P(t-1|t-1)\Phi^T(t,t-1) \right]$$

Systembrusvariansen vid steg t beräknas alltså som ett viktat värde av systembrusvariansen vid tiden $t-1$ plus kvadraten på förstärkningen gånger innovationen plus felbrusvariansen vid tiden t minus en konstant gånger felbrusvariansen vid $t-1$.

En alternativ metod att beräkna dessa varianser ges av A. Jazwinski. Vi definierar följande,

$$\hat{y}(t+l) = y(t+l) - E(y(t+l) | \mathcal{Y}_t)$$

Låter vi nu l vara 1 har vi innovationen enligt det föregående. $y(t+l)$ är normalfördelad med medelvärdet noll. Det gäller nu,

$$y(t+l) = \Theta(t+l)\Phi(t+l,t)(x(t) - \hat{x}(t|t)) + \Theta(t+l) \sum_{i=1}^l \Phi(t+l,t+i) \cdot \Gamma(t+i-1)v(t+i-1) + e(t+l)$$

och

$$\begin{aligned}
 E(\tilde{y}(t+l)\tilde{y}(t+m)) &= \Theta(t+l)\Phi(t+l,t)P(t|t)\Phi^T(t+m,t)\Theta^T(t+m) + \\
 &+ \Theta(t+l)\sum_{i=1}^l \Phi(t+l,t+i)\Gamma(t+i-1)R_1\Gamma^T(t+i-1)\Phi^T(t+m,t+i)\Theta^T(t+m) + \\
 &+ R_2(t+l)\delta_{lm} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Vi kräver nu att,

$$\tilde{y}^2(t+l) = E(\tilde{y}^2(t+l)) \quad (2)$$

Vi antar att vi kan skriva $R_1 = qI$, där I är enhetsmatrisen.

Då fås med hjälp av (1) ur (2) om vi låter $l=1$.

$$q\Theta(t+1)\Gamma(t)\Gamma^T(t)\Theta^T(t+1) = \tilde{y}^2(t+1) - E(\tilde{y}^2(t+1)|q=0)$$

där

$$E(\tilde{y}^2(t+1)|q=0) = \Theta(t+1)\Phi(t+1,t)P(t|t)\Phi^T(t+1,t)\Theta^T(t+1) + R_2(t+1)$$

Om $\tilde{y}^2(t+1) < E(\tilde{y}^2(t+1)|q=0)$ har vi inget brus.

Vi får alltså,

$$\hat{q}(t) = \begin{cases} \frac{\tilde{y}^2(t+1) - E(\tilde{y}^2(t+1)|q=0)}{\Theta(t+1)\Gamma(t)\Gamma^T(t)\Theta^T(t+1)} & \text{om positivt} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Vi ser att med undantag av en skalfaktor är $\hat{q}(t)$ skillnaden mellan $\tilde{y}^2(t+1)$ och förväntningsvärdet av detsamma då vi inte har något brus. Man ser att till skillnad från den tidigare metoden ger denna algoritm inte någon konvergens mot ett riktigt värde på systembruset utan kommer att hoppa mellan noll och olika positiva värden. Dess huvudsakliga uppgift är att ge ett bra värde på uppskattningen av tillståndsvektorn.

Nackdelen med denna metod är bl.a. att den påverkas av mätbruset om,

$$R_2(t+1) > \Theta(t+1) \Gamma(t) R_1 \Gamma^T(t) \Theta^T(t+1)$$

Den sista svårigheten kan man komma tillrätta med genom att göra på följande sätt.

I stället för en residual, $l=1$, tar vi medelvärdet av de föregående N residualerna. D.v.s. vi beräknar,

$$m_r = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \tilde{y}(t+l) / R_2^{\frac{1}{2}}(t+l)$$

Då gäller det,

$$E(m_r) = 0$$

$$E(m_r^2) = S_N \Phi(t+1, t) P(t|t) \Phi^T(t+1, t) S_N^T + qS + 1/N$$

där

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N (1/R_2^{\frac{1}{2}}(t+l)) \Theta(t+l) \Phi(t+l, t+1)$$

$$S_{N-1} = \frac{1}{N} \sum_{l=2}^N (1/R_2^{\frac{1}{2}}(t+l)) \Theta(t+l) \Phi(t+l, t+2)$$

.

.

$$S_1 = \frac{1}{N} (1/R_2^{\frac{1}{2}}(t+N)) \Theta(t+N)$$

$$S = S_N \Gamma(t) \Gamma^T(t) S_N^T + S_{N-1} \Gamma(t+1) \Gamma^T(t+1) S_{N-1}^T + \dots$$

$$\dots + S_1 \Gamma(t+N-1) \Gamma^T(t+N-1) S_1^T$$

På detta sätt går variansen av mätbrusnivån mot noll då $N \rightarrow \infty$.

Vi får då estimatorn,

$$\hat{q}(t) = \begin{cases} \frac{m_r^2 - E(m_r^2 | q=0)}{S} & \text{om positivt} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

där $E(m_r^2 | q=0) = S_N \Phi(t+1, t) P(t|t) \Phi^T(t+1, t) S_N^T + 1/N$

Vi ser att $\hat{q}(t)$ inte behöver beräknas vid varje steg utan endast vid vart k :te steg där $k \leq N$.

REFERENSER: A. Jazwinski. IFAC SYMPOSIUM. 7/8 Oktober 1968-Düsseldorf.

REFERENSER.

1. K. J. Åström: Reglerteori. Almqvist & Wiksell. Uppsala 1968.
2. K. J. Åström: Stochastic Control Theory. Chapter 7.
3. A. P. Sage and G. W. Husa: Adaptive filtering with unknown prior statistics.
4. A. P. Sage and J. L. Melsa: Estimation Theory; with applications to communications and control. Mc-Graw-Hill Inc.
5. A. Jazwinski. IFAC SYMPOSIUM. 7/8 Oktober 1968-Düsseldorf.

SUMMARY IN ENGLISH.

This paper gives the development of the Kalman filter given on p.7 and it's adaptive variant given on p.17. The adaptive Kalman filter is programmed in a Fortran subroutine called SUBROUTINE ADKAL on p.20. The two algorithms given to calculate the unknown measurement noise variance and plant noise variance, R_2 and R_1 , are specially examined. The result is shown in diagrams I-IV. We see that the measurement noise variance is fairely easy to get with the algorithms given here while the plant noise variance is somewhat more difficult to achieve.

The adaptive Kalman filter is then applied on real time identification and there result diagrams VI-XIII. We see that the estimates are following the true values very well. The estimation of the measurement noise variance is after approximately 1500 samples less than 5% apart from the true value. The difference between the true and estimated values of the plant noise variance stays within 30%. Finnaly an alternative method to get the plant noise variance is given on p.28.

DIAGRAM I

Uppskattning av mätbrusvariansen
för olika begynnelsevärden då
 $\hat{R}_1 = 20 = \text{konstant}$

Lave Lindberg

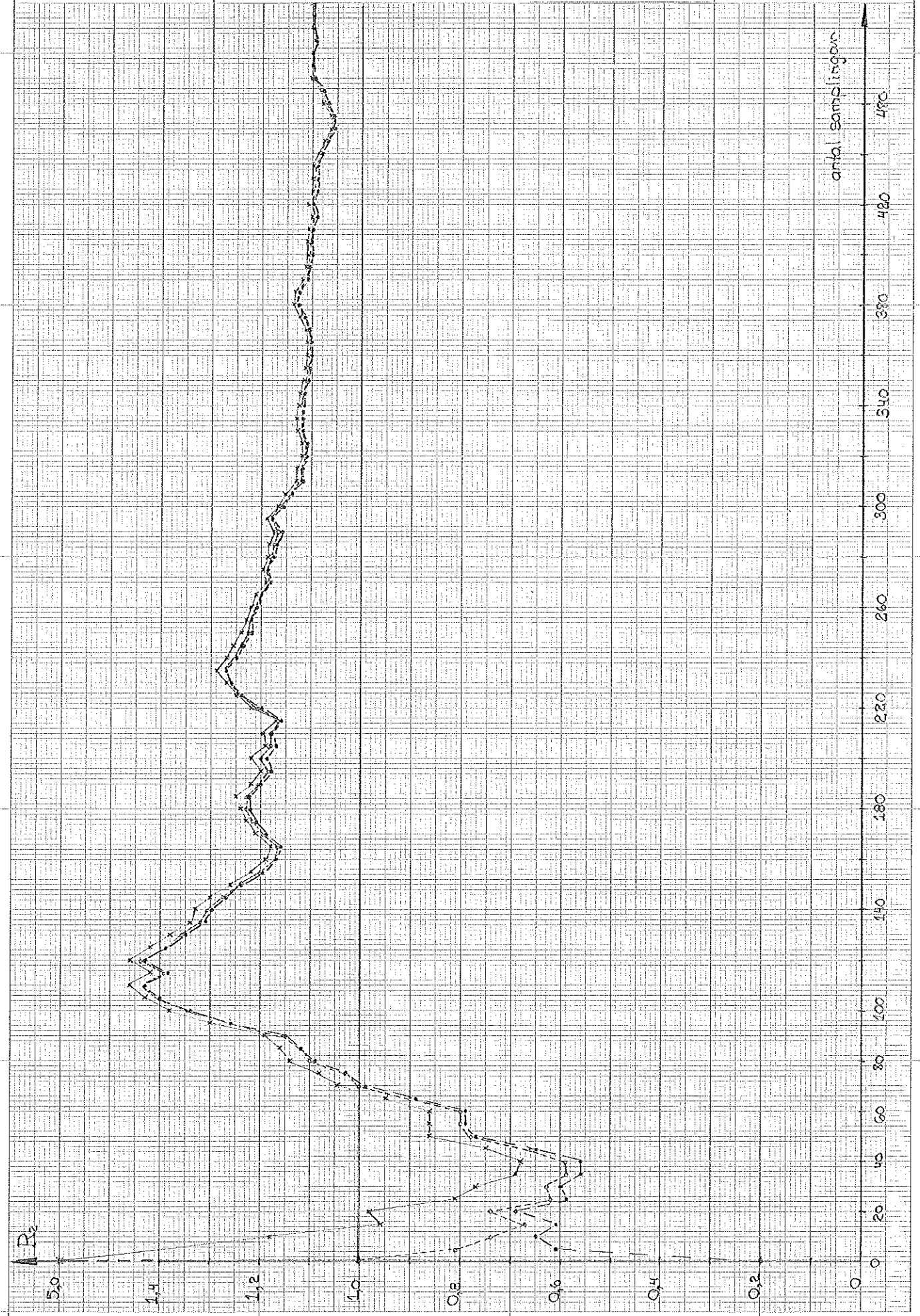
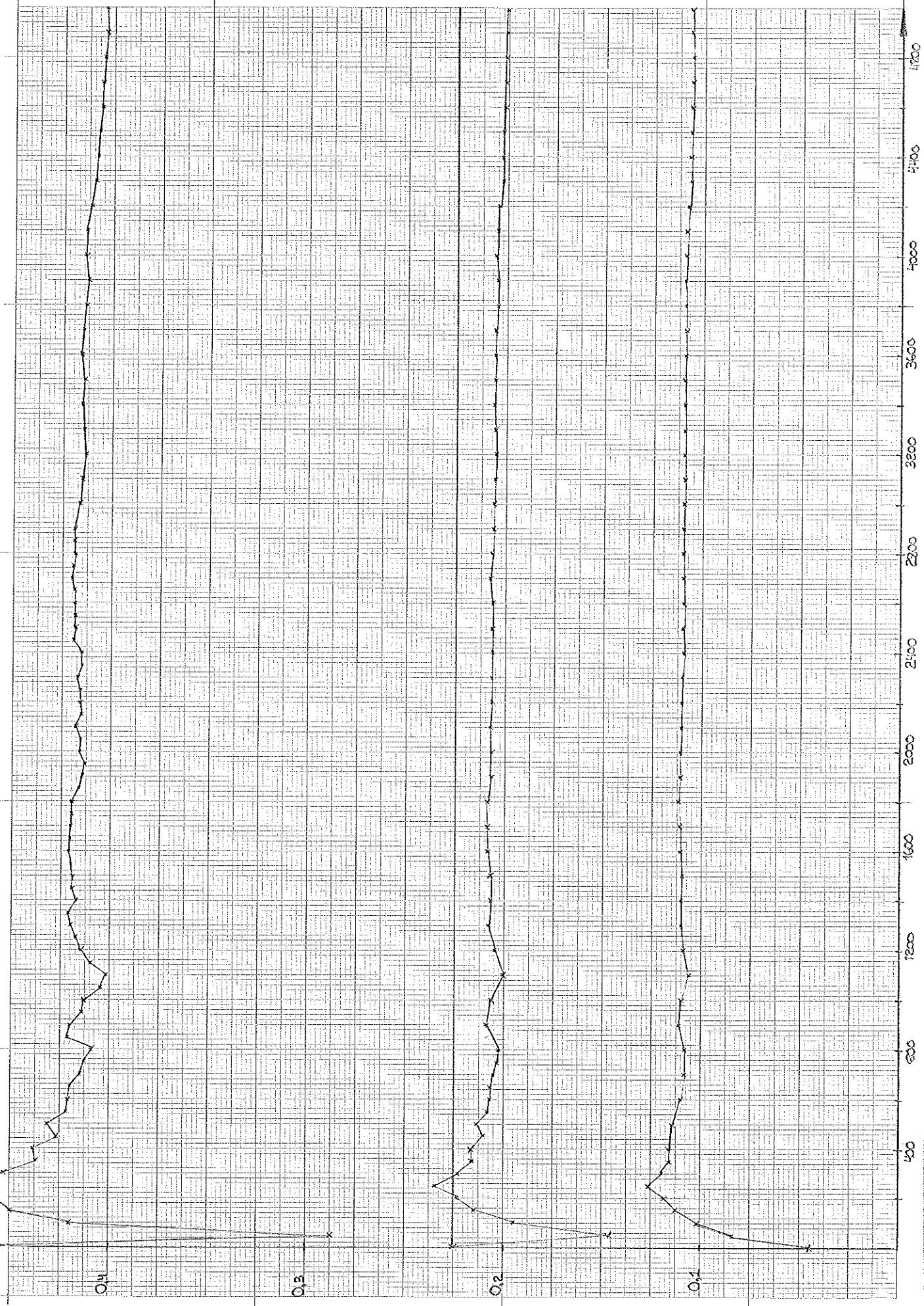


DIAGRAM II

Uppskattning av systembrusvariansen
för olika begynnelsevärden då
 $R_2 = 0,001 = \text{konstant}$

Lave Lindberg

$(R_2 \Gamma)^2$
1,565



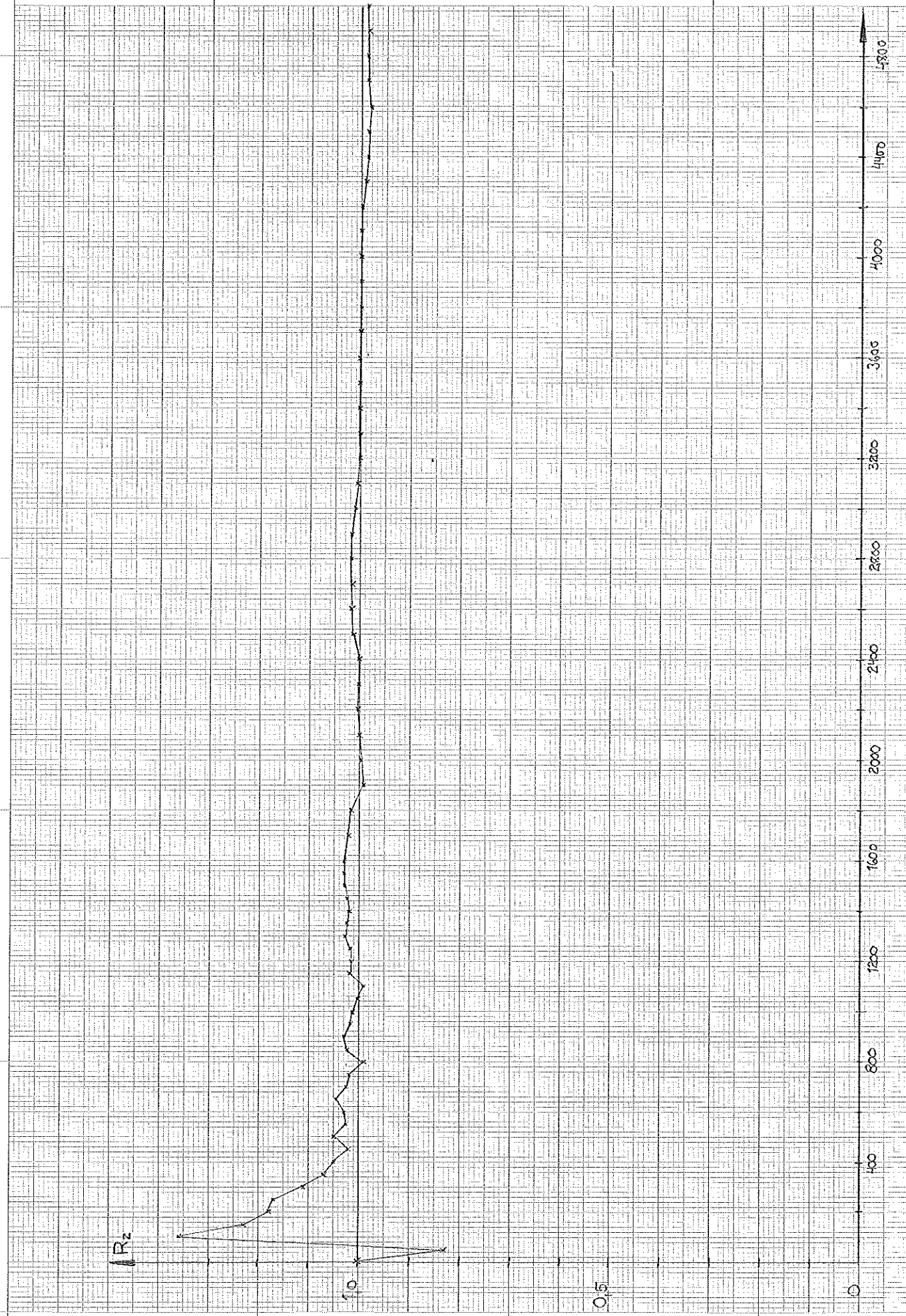




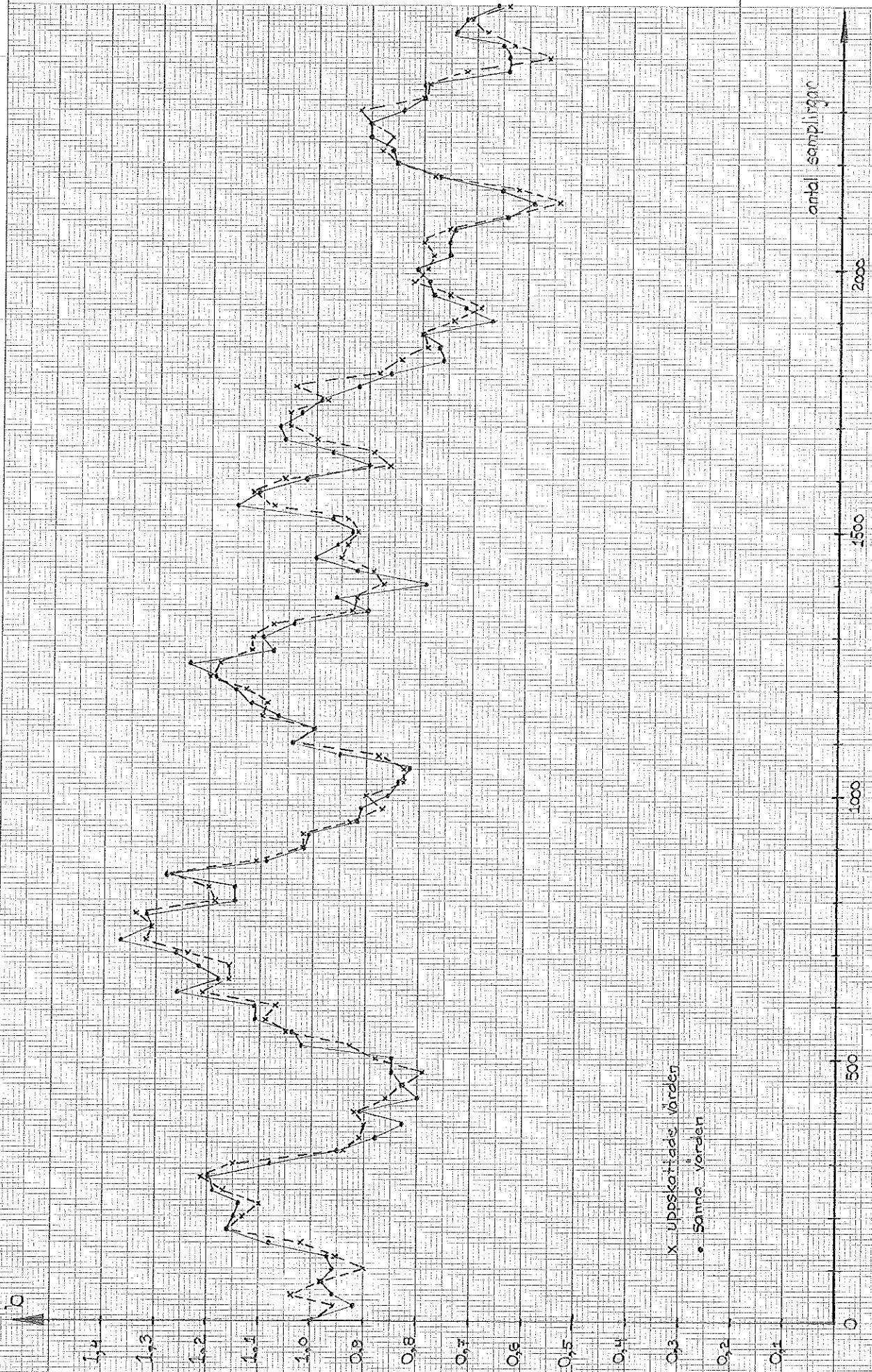


Diagram VI

$a = \text{konstant}$

$b = b + 0.015 * e$

LAVE LINDBERG



X Uppskattade värden

o Sanna värden

DIAGRAM VII

Mätbrusvariansen då

$a = \text{konstant}$

$b = b + 0.015 * e$

LAVE LINDBERG

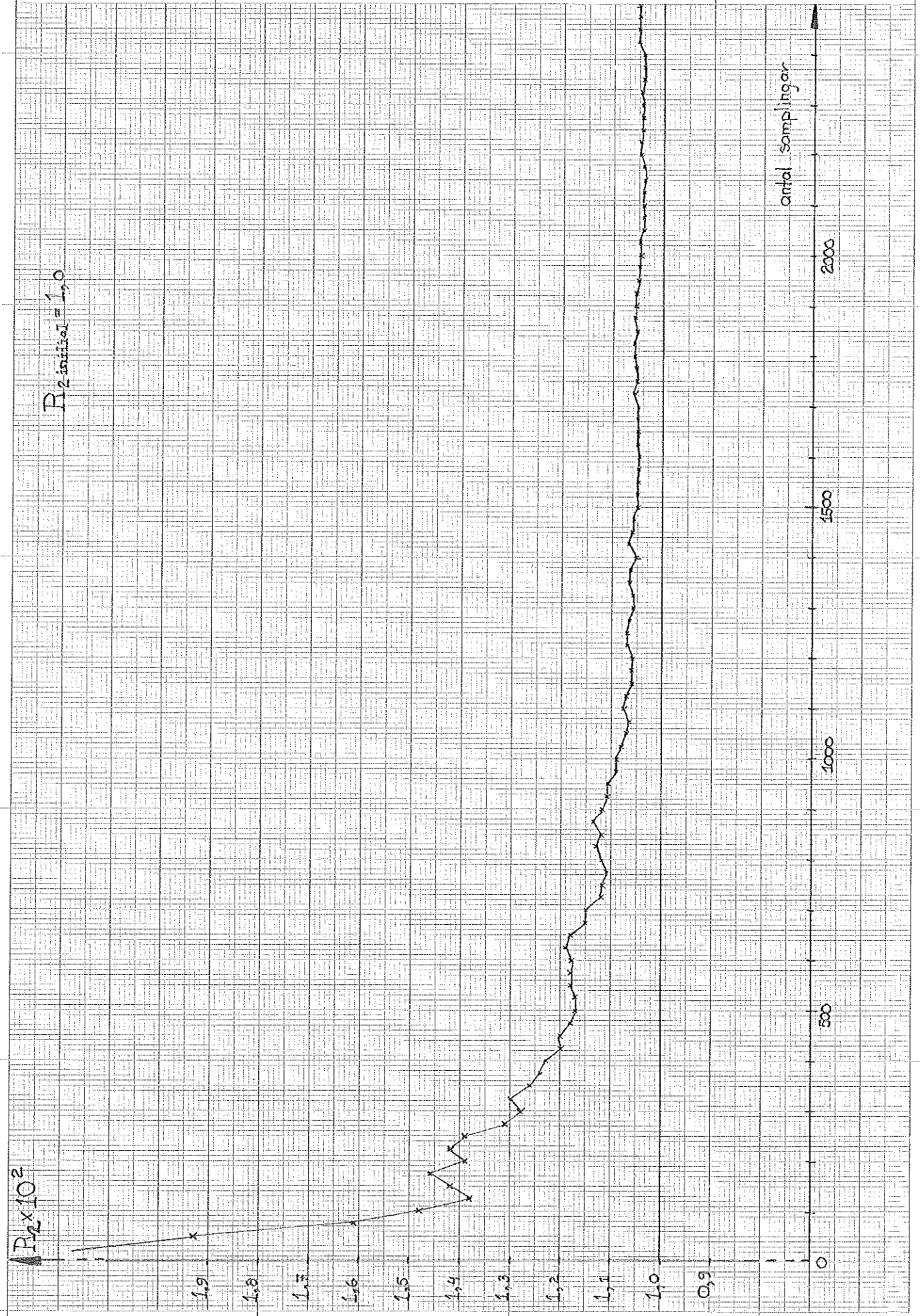


DIAGRAM VIII

Systembrusvariansen då

a = konstant

b = b + 0,015 * e

Lave Lindberg



DIAGRAM IX

$$a = a + 0,015 * e$$

$$b = \text{konstant}$$

Lave Lindberg

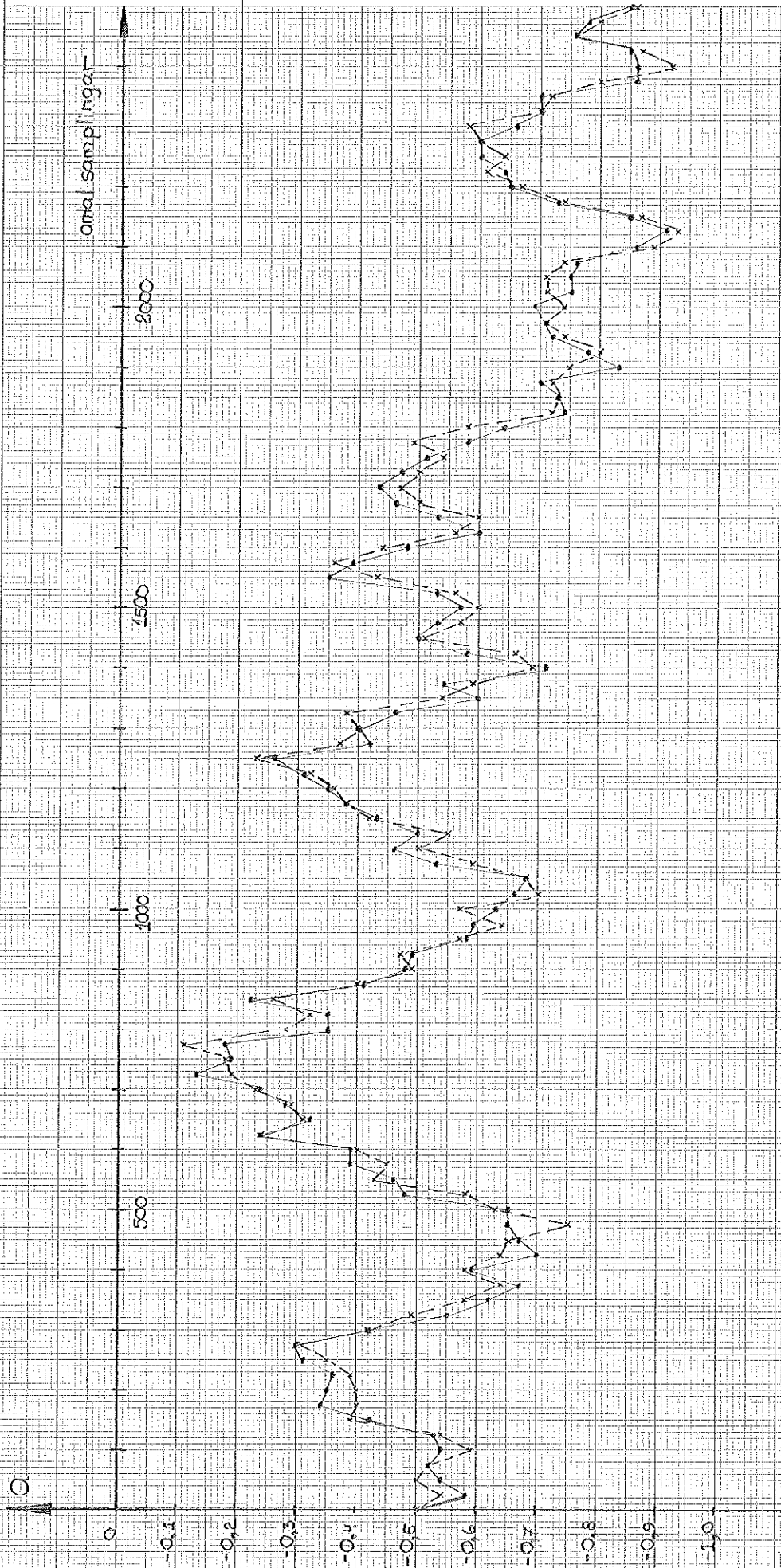


DIAGRAM X

Mätbrusvariansen då

$a = a + 0,015 * e$ och $b = \text{konstant}$

Lave Lindberg

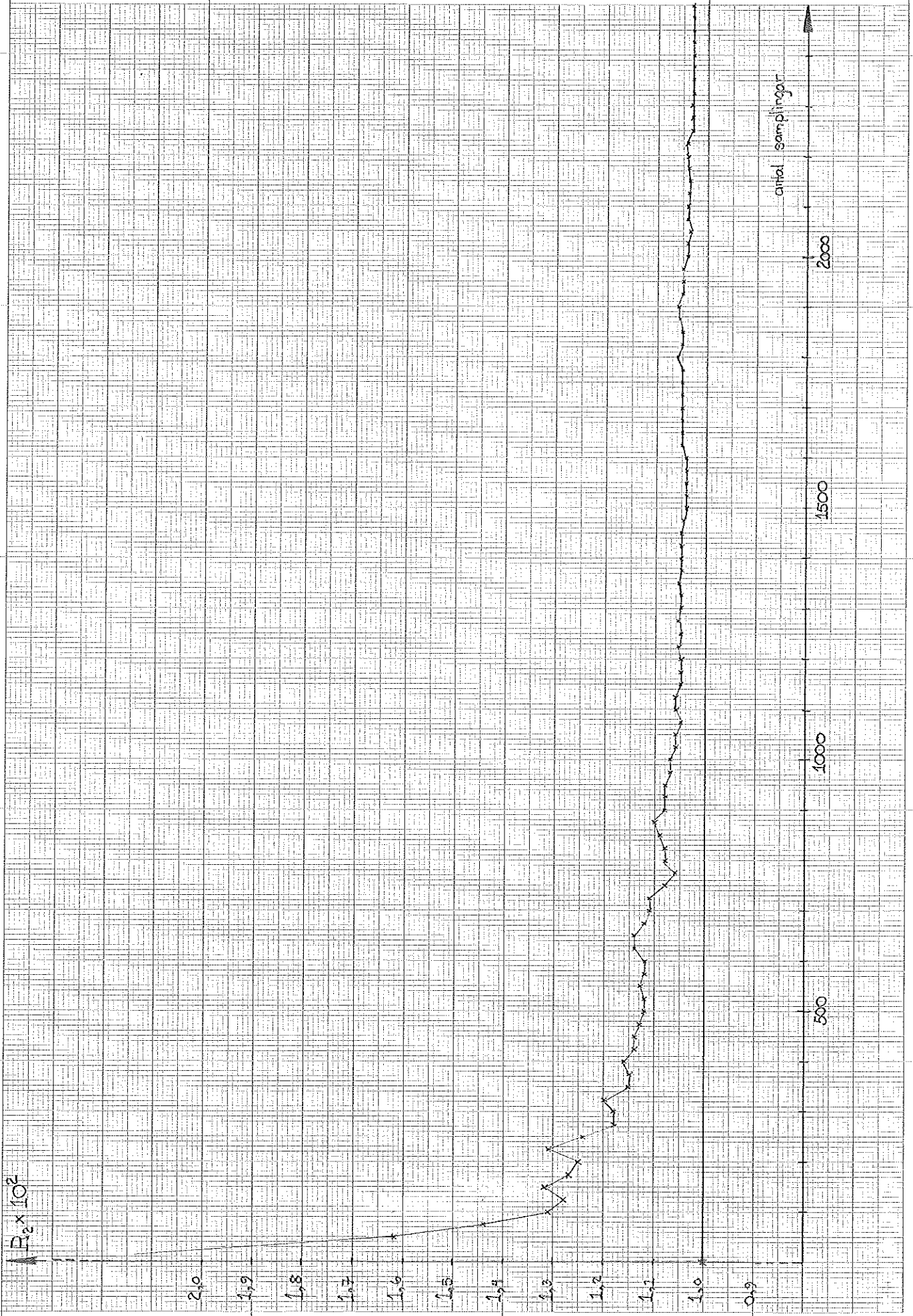


DIAGRAM XT

Systembrusvariansen då

$$a = a + 0,015 e$$

$$b = \text{konst.}$$

Lave Lindberg

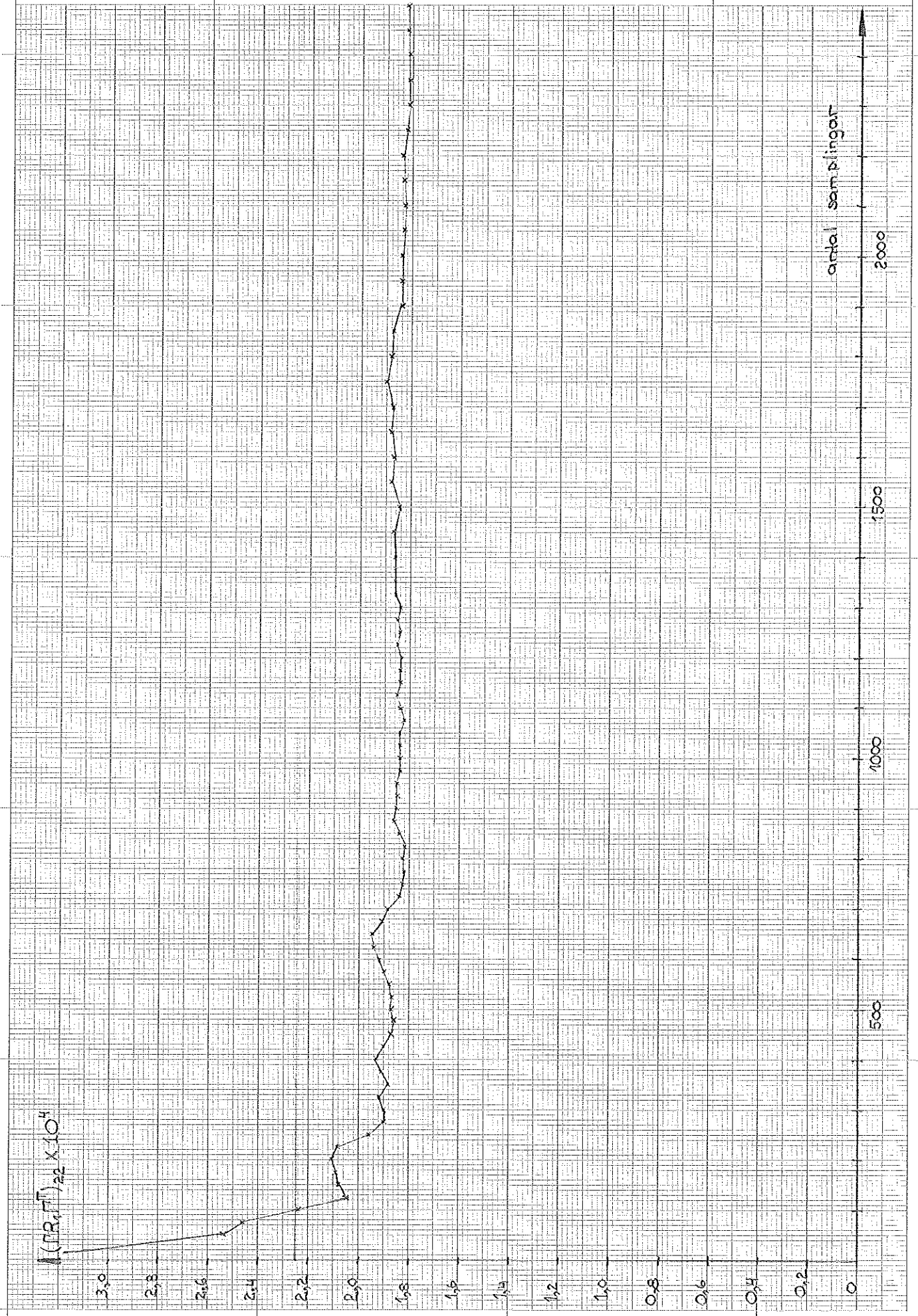


DIAGRAM XII

Uppskattning av a då

$$a = \text{konst.}$$

$$b = b + 0,015 \cdot e$$

Lave Lindberg



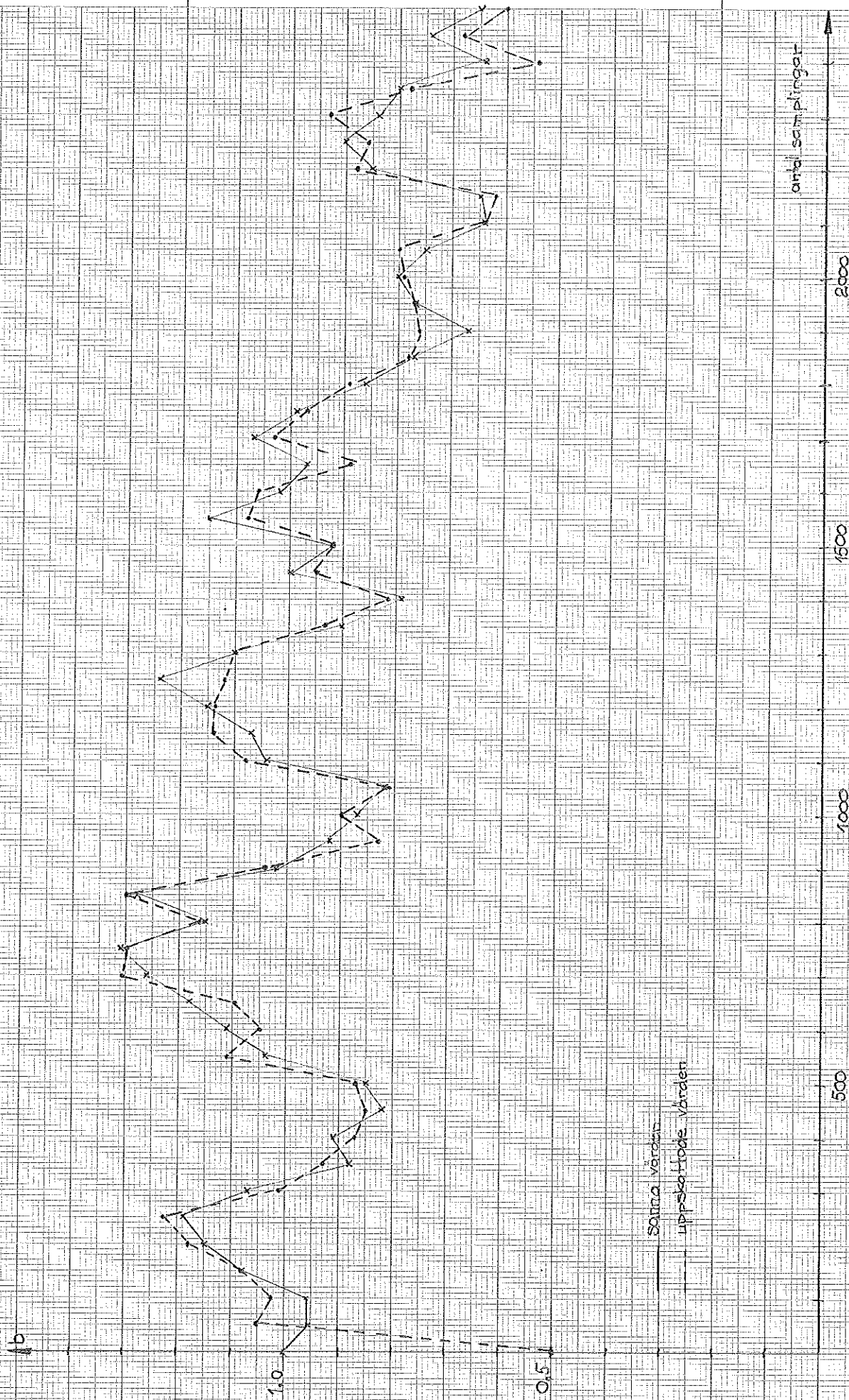
DIAGRAM XIII

Uppskattning av b då

$$a = \text{konst.}$$

$$b = b + 0,015 \cdot e$$

Lave Lindberg



Sanna värden
uppskattade värden