

ANALYS AV EN ANDRA ORDNINGENS ALLMÄN
KVADRATISK DIFFERENTIALEKVATION.

Examensarbete utfört vid institutionen
för Reglerteknik vid LTH.
Författare: Martin Kristofersson.
Handledare: Gustaf Olsson.

Abstract.

In this thesis a second order differential equation with a general quadratic structure of the right hand side has been analyzed, viz.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 \\ c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 \end{pmatrix}$$

The equation appears as a description of several biological and nuclear reactor phenomena.

It is quite impossible to get any general solution, and stability analysis, e.g. Lyapunov functions, is very difficult to carry out in the general case. Therefore a number of special cases have been run.

The examined special cases are grouped un two main areas, viz. real and complex eigenvalues of the linear approximation.

First the character of the singular points is examined, and some general results can be presented. Then several phase planes are generated by an analog computer in order to achieve knowledge of the system.

It can be observed that solutions not depend critically on small coefficient variations, but change of the quadratic term structure will influence the solution strongly.

Sammanfattning.

I detta examensarbete studeras en andra ordningens differentialekvation med allmänt kvadratisk högerled, dvs ekvationen

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 \\ c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 \end{pmatrix}$$

Olika specialfall av ekvationen förekommer inom t.ex. biologi och kärnteknik.

Att erhålla en explicit lösning till den allmänna ekvationen visar sig ogörligt. Likaså är en allmän stabilitetsanalys mycket otymplig. Istället studeras ett antal relevanta specialfall.

De undersökta specialfallen indelas i två huvudgrupper, nämligen då den linjära approximationen har reella resp. komplexkonjugerade egenvärden.

Ekvationen undersöks först med singulariteter, där en del generella uttalanden kan göras. Därefter genereras ett antal numeriska specialfall på analogmaskin.

Någon allmängiltig utsaga om lösningens uppförande är svår att göra. Man kan dock konstatera att lösningen inte beror kritiskt av små parametervariationer, men att olika struktur på den olinjära termen kraftigt förändrar dess egenskaper.

INNEHÅLL,

	Sammanfattning. Abstract	
1.	<u>Introduktion.</u>	1
1.1.	Problemställning, grundekvation.	1
1.2.	Problem där ekvationen förekommer	2
2.	<u>Metoder för analys av ekvationen.</u>	4
2.1.	Transformation av grundekvationen på standardformer	4
2.2.	Fasplansanalys	5
2.3.	Singularitetsanalys	6
2.3.1.	Singulariteternas lägen	6
2.3.2.	Singulariteternas typ	9
2.4.	Trajektoriernas asymptotiska uppförande.	9
3.	<u>Analys av specialfall av grundekvationen m.a.p. singulariteter.</u>	10
3.1.	Specialfall med reella egenvärden i origo.	10
3.2.	Specialfall med komplexa egenvärden i origo.	20
4.	<u>Numeriska exempel och simuleringar.</u>	30
4.1.	Fasplan: Reella egenvärden.	30
4.2.	Fasplan: Komplexa egenvärden.	64
5.	<u>Referenser.</u>	93

Appendix 1. Förteckning över genomräknade specialfall.

Appendix 2. Kopplingsschema för analogimaskin.

Kommentar om ekvationsnumrering m.m.

Ekvationerna inom varje kapitel numreras i löpande följd. I kap 3. studeras två grupper av specialfall av grundekvationen. De kallas specialfall 1.1. , 1.2. osv och specialfall 2.1. ,2.2. osv. I kap 4. räknar vi numeriskt på vissa av specialfallen och simulerar dem på analogimaskin. Till specialfall 1.1. hör då num ex1.1.a , num ex 1.1.b och fig1.1.a , fig1.1.b osv.

Tecknet $()^+$ vid matriser betyder transponering och komplexkonjugering.

1. INTRODUKTION.1.1. Problemställning, grundekvation.

Inom många ämnesområden, t.ex. fysik, finns problem som matematiskt kan beskrivas med två variabler x_1 och x_2 genom differentialekvationerna

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)$$

När ekvationerna ställs upp får man ofta f_1 och f_2 som polynom. Dessa polynom kan betraktas som Taylorutvecklingar av okända funktioner. Ibland kan man nöja sig med att ta med den linjära termen, och ekvationen kan då lösas generellt. Nästa steg blir att ta med en kvadratisk term. Det är en sådan allmän andra ordningens kvadratisk differentialekvation vi ämnar analysera. För att närmare motivera just detta val av ekvation, ger vi i 1.2. exempel där en sådan ekvation kan användas som modellbeskrivning. Ekvationen har alltså formen

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 \\ c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 \end{pmatrix}$$

och kallas i fortsättningen grundekvationen. Vad vi skulle vilja är att liksom i linjära fallet finna en generell lösning. Detta visar sig emellertid svårt och vi får angripa med andra metoder, t.ex. simuleringar på analogmaskin. I stora drag ställer vi två problem:

- Om någon parameter varierar, ändras då lösningens egenskaper drastiskt?
- Om vi ändrar struktur på den olinjära termen, ändras då lösningens egenskaper kraftigt?

Det kan också vara intressant att söka Lyapunovfunktioner som ger ett stabilitetsområde för lösningarna. Detta blir ofta ganska invecklat och vi inskränker oss till att i några fall pröva en Lyapunovfunktion som behandlats i [4].

1.2. Problem där grundekvationen förekommer.

Minorski ([2], sid 65) har tagit upp Volterras ekvation. Ekvationen beskriver allmänt ett biologiskt system, där två arter lever tillsammans och konkurrerar om näring och utrymme eller förtär varandra. Ursprungligen studerade Volterra ett fall med två fiskarter i en sjö. Förutsättningen var där: Den ena arten lever endast av växter i sjön. Växterna finns i obegränsad mängd. Den andra arten äter uteslutande den första. Om arterna är isolerade från varandra kommer antalet av första arten x_1 att följa ekvationen

$$\frac{dx_1}{dt} = \epsilon_1 x_1 \quad \epsilon_1 > 0, \text{ konstant}$$

För andra arten gäller

$$\frac{dx_2}{dt} = -\epsilon_2 x_2 \quad \epsilon_2 > 0, \text{ konstant}$$

Om arterna lever tillsammans är ϵ_1 och ϵ_2 ej längre konstanta, utan man antar att

$$\epsilon_1 = a_{11} - b_{12} x_2$$

$$\epsilon_2 = a_{22} - b_{21} x_1$$

Då blir ekvationerna

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11} x_1 - b_{12} x_1 x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -a_{22} x_2 + b_{21} x_1 x_2$$

Detta är ett specialfall av grundekvationen.

Ett annat område där vi kan tillämpa grundekvationen rör kärnkraftproduktion.

Vid fission bildas xenon, som har mycket stor träffyta för neutroner. Den neutronuppfångning som orsakas härav, kan i stora kärnkraftreaktorer orsaka svängningar i energiproduktionen mellan olika områden i reaktorn. Det sker bl.a. följande förlopp:

Xenonkoncentrationen byggs till största delen upp vid radioaktivt sönderfall av jod och till en mindre del direkt vid fissionen. Xenon brytes ned vid neutronuppfångning och radioaktivt sönderfall. Jod uppstår vid fission och brytes ned vid radioaktivt sönderfall till xenon.

För sambanden mellan koncentrationerna av jod och xenon och neutronflödet gäller en uppsättning rumsberoende, olinjära kopplade differentialekvationer. I [3] har en starkt

förenklad modell härletts. Den bygger på antagandet att neutronflödet ändras proportionellt mot xenonkoncentrationen. Sambanden mellan jod- och xenonkoncentrationerna kan då i princip skrivas

$$\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} bx_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Här är $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, där x_1 =xenonkoncentrationen och x_2 =jodkoncentrationen. Ekvationen är ett specialfall av grund-ekvationen.

I samband med denna xenoninstabilitet i kärnreaktorer har stabiliteten för ekvationssystemet

$$\dot{x}_k = \sum_i a_{ki} x_i + x_k \sum_l b_{kl} x_l$$

studerats i [4]. I två variabler blir detta

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1 (b_{11} x_1 + b_{12} x_2) \\ x_2 (b_{21} x_1 + b_{22} x_2) \end{pmatrix}$$

Sätt $y=Tx$ så att TAT^{-1} är diagonal med egenvärdena λ_1 och λ_2 . Ansätt Lyapunovfunktionen

$$V = y^+ y = x^+ T^+ T x$$

För t.ex. A symmetrisk fås stabilitetsrådet

$$\|x\| \leq \frac{|\operatorname{Re} \lambda_2|}{\max_i \sqrt{\sum_j b_{ij}^2}}, \quad |\operatorname{Re} \lambda_2| < |\operatorname{Re} \lambda_1|$$

Vi ämnar i några exempel undersöka hur god denna uppskattning är.

2. METODER FÖR ANALYS AV EKVATIONEN.

I detta kapitel skall vi detaljerat gå igenom de metoder som användes för att förenkla och analysera grundekvationen.

2.1. Transformation av grundekvationen på standardformer.

Vi avsåg att analysera ekvationen

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 \\ c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 \end{pmatrix}$$

där $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. För att nedbringa arbetet försöker vi skriva denna ekvation på någon eller några standardformer. Speciellt enkel blir den om A är diagonal. Hur transformeras den kvadratiske termen om A transformeras på diagonalform? För att underlätta analysen inför vi tillfälligt matriserna

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{1}{2}b_{12} \\ \frac{1}{2}b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ och } C = \begin{pmatrix} c_{11} & \frac{1}{2}c_{12} \\ \frac{1}{2}c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Grundekvationen kan då skrivas

$$\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} x^+ Bx \\ x^+ Cx \end{pmatrix}$$

Genomför nu transformationen $z = Tx$, T ortogonal, så att $TAT^{-1} = \Lambda$ diagonal.

$$\frac{d}{dt} (T^{-1}z) = AT^{-1}z + \begin{pmatrix} (T^{-1}z)^+ B(T^{-1}z) \\ (T^{-1}z)^+ C(T^{-1}z) \end{pmatrix}$$

$$\frac{dz}{dt} = TAT^{-1}z + T \begin{pmatrix} z^+ (T^{-1})^+ B T^{-1}z \\ z^+ (T^{-1})^+ C T^{-1}z \end{pmatrix}$$

$$\dot{z} = \Lambda z + T \begin{pmatrix} z^+ B_1 z \\ z^+ C_1 z \end{pmatrix}$$

$$\dot{z} = \Lambda z + \begin{pmatrix} z^+ B_2 z \\ z^+ C_2 z \end{pmatrix}$$

Observera att den kvadratiske termen är av samma form som i grundekvationen. Vi skriver $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Här kan λ_1 och λ_2 vara antingen reella eller komplexa. I fallet reella egenvärden behåller vi vår transformation. Om λ komplexa skriver vi

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sigma + i\omega & 0 \\ 0 & \sigma - i\omega \end{pmatrix}$$

Vi vill arbeta med reella matriser, och skall visa att om A har komplexa egenvärden, kan A alltid transformeras

på formen $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$, Σ har uppenbarligen egenvärdena $\sigma + i\omega$ och $\sigma - i\omega$. A kan alltså alltid transformeras på formen Σ , vilket också innebär att A alltid kan transformeras på formen Σ . Vi vill också övertygga oss om att den kvadratiske termen förblir reell vid denna transformation. Om vi genomför koordinattransformationen $u = Sx$ så får vi enligt ovan ekvationen

$$\frac{du}{dt} = SAS^{-1}u + S \begin{pmatrix} u^+(S^{-1})^+BS^{-1}u \\ u^+(S^{-1})^+CS^{-1}u \end{pmatrix}$$

Vi önskar $SAS^{-1} = \Sigma$ eller $SA = \Sigma S$ eller utskrivet i komponentform

$$\begin{aligned} s_{11}(a_{11} - \sigma) + s_{12}(a_{12} - \omega) + 0 + 0 &= 0 \\ s_{11}a_{12} + s_{12}(a_{22} - \sigma) + 0 + s_{22}\omega &= 0 \\ s_{11}\omega + 0 + s_{21}(a_{11} - \sigma) + s_{22}a_{21} &= 0 \\ 0 + s_{12}\omega + s_{21}a_{12} + s_{22}(a_{22} - \sigma) &= 0 \end{aligned}$$

Detta system har enligt ovan en lösning (som ej är noll-lösningen). Koefficienterna är reella vilket medför att s_{ij} är reella. Vi vet alltså att S existerar. Eftersom vi förutsätter Σ given måste även S^{-1} existera och vara reell. Den kvadratiske termen förblir alltså reell vid transformationen.

Vi har nu visat att det räcker att behandla de fall, där A har formen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ eller } \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

2.2. Fasplansanalys.

Att analytiskt lösa grundekvationen låter sig icke göra mer än möjligen i något speciellt fall. Däremot kan man koppla upp ekvationen på analogmaskin och få fasplanen utskrivna direkt för godtyckliga numeriska värden på koefficienterna. Ur fasplanen får man en god uppfattning av hur lösningen till ekvationen uppför sig, även för andra koefficientvärden än de just valda. Vidare får man precis den speciella ekvationens stabilitetsområde. Detta kan vara värdefullt i ett praktiskt fall, där man har numeriska värden på koefficienterna.

2.3. Singularitetsanalys.

Av intresse är att undersöka ekvationens singulariteter d.v.s. där samtidigt $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$. Dessa punkter blir ofta i stora drag avgörande för stabilitetsområdets storlek. Vidare kan man lätt få fram trajektoriernas uppförande i en liten omgivning kring singulariteten. De bestäms av den lineära termen. Vad vi vill veta är alltså singulariteternas läge, antal och typ.

2.3.1. Singulariteternas lägen.

Singulariteterna kan givetvis alltid, åtminstone principiellt, fås direkt genom algebraiska räkningar. Detta blir ibland mycket invecklat. Man observerar emellertid att $\dot{x}_1 = 0$ och $\dot{x}_2 = 0$ var för sig betyder kägelsnitt, som ibland urartar till räta linjer. Kägelsnittens skärningpunkter är singulära punkterna till ekvationen. Denna metod att finna dessa punkter ger god överblick över hur singulariteternas lägen ändras vid parametervariationer. Den kan också rent grafiskt ge goda startvärden för numerisk beräkning av singulariteternas läge.

Vi skall nu ställa upp villkor på koefficienterna i ekvationen, som avgör vilket kägelsnitt vi har. Vi skall också visa de transformationer som måste göras för att få kägelsnittet på normalform. Vi räknar hela tiden på första ekvationen $\dot{x}_1 = 0$. Alla transformationer m.m. för $\dot{x}_2 = 0$ fås genom ett enkelt utbyte av koefficienter. Vi får alltså

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 = 0 \quad (2.1.)$$

som vi i första steget vill ha på formen

$$\beta_{11}(x_1 - \alpha_1)^2 + \beta_{12}(x_1 - \alpha_1)(x_2 - \alpha_2) + \beta_{22}(x_2 - \alpha_2)^2 = k$$

Utveckla detta och jämför koefficienterna. Man får efter några mellanled

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(2\alpha_1\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_2) \\ a_{12} &= -(2\alpha_2\beta_{12} + \beta_{22}\alpha_1) \\ b_{11} &= \beta_{11} \\ b_{12} &= \beta_{12} \\ b_{22} &= \beta_{22} \\ k &= b_{11}\alpha_1^2 + b_{12}\alpha_1\alpha_2 + b_{22}\alpha_2^2 \end{aligned} \quad (2.2.)$$

Lös ut α_1 och α_2 :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2b_{22}a_{11} - b_{12}a_{12}}{b_{12}^2 - 4b_{11}b_{22}} \\ \alpha_2 &= \frac{2b_{11}a_{12} - b_{12}a_{11}}{b_{12}^2 - 4b_{11}b_{22}} \end{aligned} \quad (2.3.)$$

Om vi alltså sätter $\begin{cases} u_1 = x_1 - \alpha_1 \\ u_2 = x_2 - \alpha_2 \end{cases}$ kan (2.1.) skrivas

$$b_{11}u_1^2 + b_{12}u_1u_2 + b_{22}u_2^2 = k$$

som skrives

$$(u_1, u_2) \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{1}{2}b_{12} \\ \frac{1}{2}b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = k$$

Sätt $y = Tu$, T ortogonal. Vi får då

$$k = u^+ Bu = y^+ TBT^{-1}y.$$

TBT^{-1} kan alltid väljas diagonal ty B symmetrisk. Vi diagonaliserar alltså B och beräknar T . $\det(B - SI) = 0$ ger

$$S = \frac{b_{11} + b_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(b_{11} - b_{22})^2}{4} + b_{12}^2}$$

Vi kallar $\begin{cases} S_1 = 1+r \\ S_2 = 1-r \end{cases}$. Kägelsnittet blir alltså på formen

$$y^+ \begin{pmatrix} 1+r & 0 \\ 0 & 1-r \end{pmatrix} y = k \quad (2.4.)$$

$TBT^{-1} = \Lambda$ ger $BT^{-1} = \Lambda T^{-1}$. Detta ger

$$B \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = (1+r) \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = (1-r) \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix}$$

Härav får vi efter en del räkningar

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -h \left(\frac{b_{22} - b_{11}}{b_{12}} + \sqrt{\left(\frac{b_{22} - b_{11}}{b_{12}} \right)^2 + 1} \right) \\ t \left(\frac{b_{22} - b_{11}}{b_{12}} + \sqrt{\left(\frac{b_{22} - b_{11}}{b_{12}} \right)^2 + 1} \right) & h \end{pmatrix}$$

där t och h väljes så att T^{-1} blir ortogonal. Observera att i dessa transformationer måste $b_{12}^2 \neq 4 b_{11} b_{22}$.

Vi övergår nu till att bestämma vilka krav vi ställer på koefficienterna i grundekvationen för att $\dot{x}_1 = 0$ skall vara parabel, ellips eller hyperbel. Vi betraktar alltså

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 = 0$$

Efter diverse transformationer såg denna ekvation

ut som (se (2.4.))

$$y^+ \begin{pmatrix} 1+r & 0 \\ 0 & 1-r \end{pmatrix} y = k$$

Efter lite räkningar får man enligt (2.2.)

$$k = \frac{a_{11}^2 b_{22} + a_{12}^2 b_{11} - a_{11} a_{12} b_{12}}{4b_{11} b_{22} - b_{12}^2} = \frac{M}{4b_{11} b_{22} - b_{12}^2}$$

Om (2.4.) skall beskriva en ellips måste

$$\text{antingen } 1+r > 0, 1-r > 0, k > 0$$

$$\text{eller } 1+r < 0, 1-r < 0, k < 0.$$

$$\begin{aligned}
\underline{1-r > 0} \quad (\Rightarrow 1+r > 0 \text{ ty } r \geq 0) &\Leftrightarrow \frac{b_{11}+b_{22}}{2} \geq \sqrt{\frac{(b_{11}-b_{22})^2+b_{12}^2}{4}} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 4b_{11}b_{22}-b_{12}^2 > 0 \\
&k > 0 \Rightarrow M > 0 \\
\underline{1+r < 0} \quad (\Rightarrow 1-r < 0 \text{ ty } r \geq 0) &\Leftrightarrow \frac{b_{11}+b_{22}}{2} \geq \sqrt{\frac{(b_{11}-b_{22})^2+b_{12}^2}{4}} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 4b_{11}b_{22}-b_{12}^2 > 0 \text{ som ovan.} \\
&k < 0 \Rightarrow M < 0
\end{aligned}$$

Tecknet på M saknar alltså betydelse. Vi har sålunda ellips om $4b_{11}b_{22}-b_{12}^2 > 0$.

Om (2.4.) skall beskriva en hyperbel fordras

antingen $1+r > 0$, $1-r < 0$, k godtyckligt tecken

eller $1+r < 0$, $1-r > 0$ k godtyckligt tecken

Det sista villkoret går över huvudtaget ej att uppfylla ty $r \geq 0$.

$$\left. \begin{aligned} 1+r > 0 &\Leftrightarrow 1 > -r \\ 1-r < 0 &\Leftrightarrow 1 < r \end{aligned} \right\} \text{ ty } r \geq 0$$

$$\text{Antag } 1 > 0. \text{ Då är } 1 < r \Leftrightarrow \frac{b_{11}+b_{22}}{2} < \sqrt{\frac{(b_{11}-b_{22})^2+b_{12}^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4b_{11}b_{22} < b_{12}^2.$$

Antag $1 < 0$. Då är $-r < 1 \Leftrightarrow r > 1$ d.v.s. samma villkor som ovan $4b_{11}b_{22} < b_{12}^2$. Vi har alltså hyperbel om $4b_{11}b_{22} < b_{12}^2$.

Återstår bara fallet $4b_{11}b_{22} = b_{12}^2$ som då måste vara parabel.

Sammanfattningsvis har vi

$$4b_{11}b_{22}-b_{12}^2 \begin{cases} > 0 & \text{ger ellips} \\ = 0 & \text{ger parabel} \\ < 0 & \text{ger hyperbel} \end{cases} \quad (2.5.)$$

I fallet parabel gäller emellertid inte de transformationer av kägelsnittet som vi gjorde tidigare. Vi tar nu fram koordinattransformationerna även för parabeln.

$$y_2 = dy_1^2 \quad (2.6.)$$

betyder en parabel. Utför en vridning ψ :

$$u = Ty \quad \text{där } T = \begin{pmatrix} \sin\psi & \cos\psi \\ -\cos\psi & \sin\psi \end{pmatrix} \text{ ortogonal.}$$

$$y_1 = u_1 \sin\psi - u_2 \cos\psi$$

$$y_2 = u_1 \cos\psi + u_2 \sin\psi$$

Sätt in detta i (2.6.)

$$u_1 \cos\psi + u_2 \sin\psi = d(u_1 \sin\psi - u_2 \cos\psi)^2$$

Sätt nu $u_1 = x_1 - \alpha_1$. Man får då

$$u_2 = x_2 - \alpha_2$$

$$(x_1 - \alpha_1) \cos\psi + (x_2 - \alpha_2) \sin\psi = d((x_1 - \alpha_1) \sin\psi - (x_2 - \alpha_2) \cos\psi)^2$$

Detta uttryck utvecklas och jämföres med den ursprungliga

ekvationen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 = 0$$

Vi får då villkor som bestämmer α_1 , α_2 , φ och d .

Kommentar. Som synes kan även denna metod att finna singulariteterna bli arbetsam. Vi kommer att använda den med urskiljning i kap 3.

Det är intressant även ur en annan synpunkt att känna orten för de punkter där $\dot{x}_1 = 0$ och $\dot{x}_2 = 0$. Om $\dot{x}_2 = 0$ och $\dot{x}_1 \neq 0$ gäller ju $\frac{dx_2}{dx_1} = 0$. Alltså utefter det kägelsnitt där $\dot{x}_2 = 0$ har trajektorierna tangenter parallella med x_1 -axeln. På samma sätt är trajektoriernas tangenter parallella med x_2 -axeln där $\dot{x}_1 = 0$.

2.3.2. Singulariteternas typ.

Antag att vi funnit en singularitet $(x_1, x_2) = (a, b)$

Vi vill först veta singularitetens typ. Sätt därför

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - a \\ z_2 = x_2 - b \end{cases}$$

och sätt in i den ursprungliga ekvationen, som skrives

$$\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} x^+ Bx \\ x^+ Cx \end{pmatrix}$$

Det visar sig vid närmare undersökning att den kvadratiske termen blir oförändrad vid denna transformation. Man får alltså

$$\dot{z} = A' z + \begin{pmatrix} z^+ Bz \\ z^+ Cz \end{pmatrix}$$

Sök egenvärdena till A' genom $\det(A' - sI) = 0$. Egenvärdena s_1 och s_2 avgör singularitetens typ. Om vi har tvåtangent nod eller sadelpunkt, beräknar vi även egenvektorerna e_1 och e_2 genom $A'e_1 = s_1e_1$ och $A'e_2 = s_2e_2$.

2.4. Trajektoriernas asymptotiska uppförande.

De fasplan man får utskrivna från analogmaskin låter man oftast bara täcka ett område kring origo och singulariteterna. Om man använder mindre skala och tar med större område går många detaljer förlorade. Man kan emellertid enkelt få en uppfattning av trajektoriernas uppförande på stort avstånd från origo genom att bilda $\frac{dx_2}{dx_1}$, alltså i allmänna fallet

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2}$$

Man vill t.ex. undersöka uppförandet för stora x_1 -värden nära x_2 -axeln. Man sätter då $x_2 \ll 0$ och x_1 stort, samt försummar små termer.

3. ANALYS AV SPECIALFALL AV GRUNDEKVATIONEN M.A.P. SINGULARITETER.

Lägena hos grundekvationens singulära punkter kan teoretiskt alltid erhållas uttryckt i ekvationens parametrar. Villkoren blir emellertid mycket invecklade. Vi föredrar att studera ett antal specialfall. Som tidigare visats, kan vi dela in specialfallen i två grupper, dels med reella, dels med komplexa egenvärden i origo.

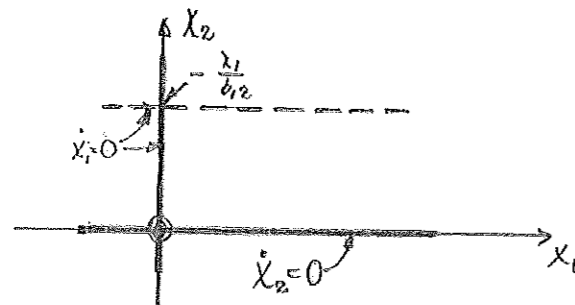
3.1. Specialfall med reella egenvärden i origo.

3.1.1. Specialfall 1.1.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{12} x_1 & x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dot{x}_1 = 0$ ger $(\lambda_1 + b_{12} x_2) x_1 = 0$ som betyder två rätta linjer.
 $\dot{x}_2 = 0$ ger $\lambda_2 x_2 = 0$.

Dessa linjer är inritade i figuren för vissa koefficientvärden.



Vi har uppenbarligen singularitet bara i origo. Se också numeriskt ex 1.1.a och 1.1.b.

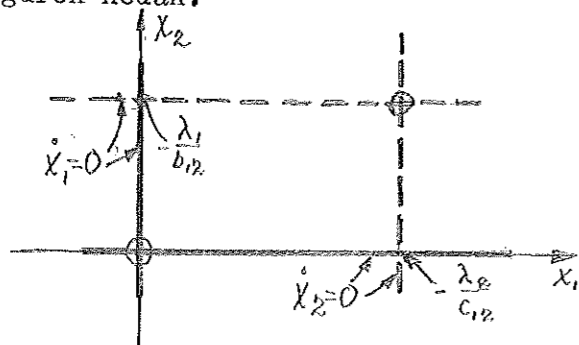
3.1.2 Specialfall 1.2. (Volterras ekvation).

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{12} x_1 & x_2 \\ c_{12} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

$\dot{x}_1 = 0$ ger $(\lambda_1 + b_{12} x_2) x_1 = 0$

$\dot{x}_2 = 0$ ger $(\lambda_2 + c_{12} x_1) x_2 = 0$

Dessa ekvationer betyder fyra rätta linjer som kan ligga som i figuren nedan.



Förutom origo har vi den singulära punkten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_2}{c_{12}} \\ -\frac{\lambda_1}{b_{12}} \end{pmatrix}. \text{ Sätt } \begin{cases} z_1 = x_1 + \frac{\lambda_2}{c_{12}} \\ z_2 = x_2 + \frac{\lambda_1}{b_{12}} \end{cases} \text{ och utveckla. Man får då}$$

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\lambda_2 \frac{b_{22}}{c_{12}} \\ -\lambda_1 \frac{c_{12}}{b_{22}} & 0 \end{pmatrix}}_{A'} z + \begin{pmatrix} b_{22} z_1 z_2 \\ c_{12} z_1 z_2 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena till A' blir $s_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$. Detta uttryck avgör singularitetens typ.

a) Om λ_1 och λ_2 har samma tecken blir s_1 och s_2 reella med olika tecken, dvs sing pkt är sadelpkt. Se num ex 1.2.a.

b) Om λ_1 och λ_2 har olika tecken blir s_1 och s_2 rent imaginära och sing pkt är ett center. Se num ex 1.2.b.

I fall a) beräknar vi egenvektorerna. Antag först

λ_1 och λ_2 båda större än 0. Ur $A'e_1 = s_1 e_1$ och $A'e_2 = s_2 e_2$ får vi egenvektorerna

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{c_{12}}{b_{12}} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \end{pmatrix} \text{ (instabila hörande till } s_1 = +\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \text{)}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{c_{12}}{b_{12}} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \end{pmatrix} \text{ (stabila hörande till } s_2 = -\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \text{)}$$

Om λ_1 och λ_2 båda mindre än 0 får vi motsvarande

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c_{12}}{b_{12}} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \end{pmatrix} \text{ (instabila)}$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{c_{12}}{b_{12}} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \end{pmatrix} \text{ (stabila).}$$

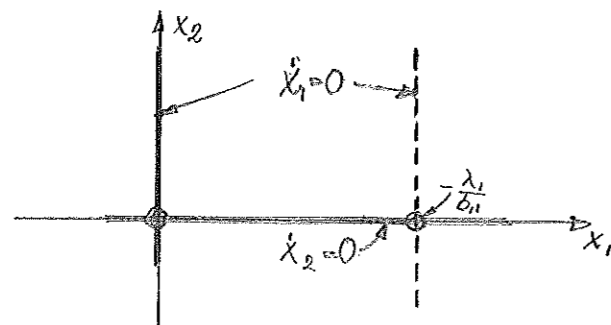
3.1.3. Specialfall 1.3.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = 0 \text{ ger } (\lambda_1 + b_{11} x_1) x_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0 \text{ ger } \lambda_2 x_2 = 0$$

som betyder räta linjer. Dessa kan ligga som i fig



Förutom origo har vi singulariteten

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1}{b_{11}} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ Sätt } \begin{cases} z_1 = x_1 + \frac{\lambda_1}{b_{11}} \\ z_2 = x_2 \end{cases} \text{ och utveckla. Man får} \\ \dot{z} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_{11} z_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A' blev direkt diagonal. Vi kunde naturligtvis lika gärna utgå från z -systemet och transformera till x -systemet.

Av A' framgår att vi har tvåtg nod i origo i det ena systemet så har vi sadelpkt i det andra. Se num ex 1.3.a och 1.3.b.

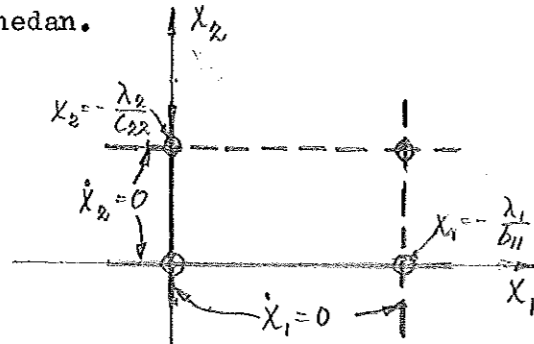
3.1.4. Specialfall 1.4.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11} x_1^2 \\ c_{22} x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = 0 \text{ ger } (\lambda_1 + b_{11} x_1) x_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0 \text{ ger } (\lambda_2 + c_{22} x_2) x_2 = 0$$

Dessa ekvnr betyder rätta linjer som kan ligga t.ex. som i fig nedan.



Vi har här fyra sing pktr, som vi utvecklar ekvationen kring. Singulariteter med tillhörande variabeltransformation blir:

<u>Singularitet</u>	<u>Transformation</u>
1) $(0,0)$	$\begin{cases} z_1 = x_1 + \frac{\lambda_1}{b_{11}} \\ z_2 = x_2 + \frac{\lambda_2}{c_{22}} \end{cases} \quad (3.1.)$
2) $(-\frac{\lambda_1}{b_{11}}, -\frac{\lambda_2}{c_{22}})$	
3) $(0, -\frac{\lambda_2}{c_{22}})$	
4) $(-\frac{\lambda_1}{b_{11}}, 0)$	

Utvecklingarna kring singulariteterna blir :

<u>Singularitet nr</u>	<u>Ekvation</u>	
1)	$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11} x_1^2 \\ c_{22} x_2^2 \end{pmatrix}$	(3.2.)
2)	$\dot{z} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_{11} z_1^2 \\ c_{22} z_2^2 \end{pmatrix}$	
3)	$\dot{z} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_{11} z_1^2 \\ c_{22} z_2^2 \end{pmatrix}$	
4)	$\dot{z} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_{11} z_1^2 \\ c_{22} z_2^2 \end{pmatrix}$	

I samtliga fall blev ekvn på diagonalform. Vi ser att vi kan nöja oss med att behandla ett fall t.ex. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Se num ex 1.4.a . Sedan kan vi betrakta vilken som helst av de singulära punkterna som origo, och får automatiskt tre fall : origo stabil tvåtg nod , origo instabil tvåtg nod, origo sadelpkt.

3.1.5. Specialfall 1.5.

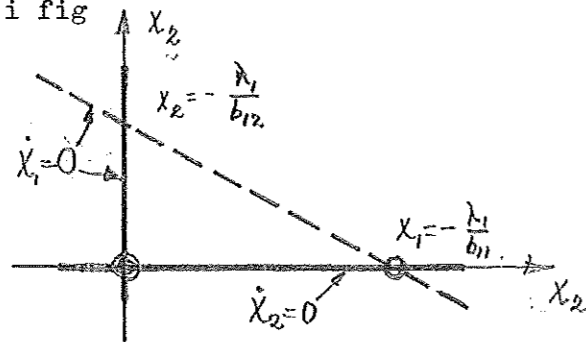
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11} x_1^2 + b_{12} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = 0 \text{ ger } (\lambda_1 + b_{11} x_1 + b_{12} x_2) x_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0 \text{ ger } \lambda_2 x_2 = 0$$

som betyder tre rätta linjer. De kan ligga exempelvis

som i fig



Förutom origo har vi singulära punkten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1}{b_{11}} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ Sätt } \begin{cases} z_1 = x_1 + \frac{\lambda_1}{b_{11}} \\ z_2 = x_2 \end{cases} \text{ och utveckla. Man får ekvn}$$

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & -\lambda_1 \frac{b_{12}}{b_{11}} \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_{11} z_1^2 + b_{12} z_1 z_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.)$$

A'

Egenvärdena till A' blir $s_1 = -\lambda_1$ och $s_2 = \lambda_2$. Vi ser att om origo är tvåtg nod, så är singulariteten sadelpkt och omvänt. Se num ex 1.5.a och 1.5.b . Om b_{12} är litet skiljer sig, som vi väntat, inte fasplanet nämnvärt från specialfall 1.3 . Uttrycket för egenvektorerna får man lätt ur

$A'e_1 = s_1 e_1$ och $A'e_2 = s_2 e_2$. Dom blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.)$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{b_{11}}{b_{12}} \cdot \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1} \end{pmatrix}$$

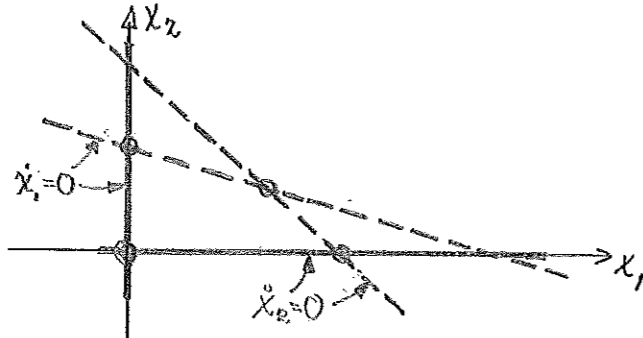
3.1.6. Specialfall 1.6.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11} x_1^2 + b_{12} x_1 x_2 \\ c_{12} x_1 x_2 + c_{22} x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = 0 \text{ ger } (\lambda_1 + b_{11} x_1 + b_{12} x_2) x_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0 \text{ ger } (\lambda_2 + c_{12} x_1 + c_{22} x_2) x_2 = 0$$

som betyder fyra r\u00e4ta linjer. De kan ligga t.ex. som i figuren nedan.



Efter lite r\u00e4kning f\u00e5r vi f\u00f6ljande uttryck f\u00f6r singulariteterna:

- 1) $(x_1, x_2) = (0, 0)$
- 2) $(x_1, x_2) = \left(\frac{\lambda_2 b_{12} - \lambda_1 c_{22}}{b_{11} c_{22} - b_{12} c_{12}}, \frac{\lambda_1 c_{12} - \lambda_2 b_{11}}{b_{11} c_{22} - b_{12} c_{12}} \right) = (r_1, r_2)$
- 3) $(x_1, x_2) = \left(-\frac{\lambda_1}{b_{11}}, 0 \right)$
- 4) $(x_1, x_2) = \left(0, -\frac{\lambda_2}{c_{22}} \right)$

(3.5.)

Att $b_{11} c_{22} = b_{12} c_{12}$ betyder att de lutande linjerna \u00e4r parallella. Utveckla kring singulariteterna. Vid 2)

s\u00e4tter vi $\begin{cases} z_1 = x_1 - r_1 \\ z_2 = x_2 - r_2 \end{cases}$ och f\u00e5r

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + b_{12} r_2 + 2b_{11} r_1 & b_{12} r_1 \\ c_{12} r_2 & \lambda_2 + c_{12} r_1 + 2c_{22} r_2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_{11} z_1^2 + b_{12} z_1 z_2 \\ c_{12} z_1 z_2 + c_{22} z_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.6.)$$

Kring singulariteten 3) s\u00e4tter vi

$\begin{cases} z_1 = x_1 + \frac{\lambda_1}{b_{11}} \\ z_2 = x_2 \end{cases}$ och f\u00e5r utvecklingen

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & -\frac{b_{12}}{b_{11}} \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 - \frac{c_{12}}{b_{11}} \lambda_1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_{11} z_1^2 + b_{12} z_1 z_2 \\ c_{12} z_1 z_2 + c_{22} z_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.7.)$$

Egenv\u00e4rdena till A' blir $s_1 = -\lambda_1$ och $s_2 = \lambda_2 - \frac{c_{12}}{b_{11}} \lambda_1$.

Slutligen utvecklar vi kring 4). Sätt $\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = x_2 + \frac{\lambda_2}{c_{22}} x_1 \end{cases}$ så får man

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 - \frac{b_{12}}{c_{22}} \lambda_2 & 0 \\ -\lambda_2 & c_{22} \end{pmatrix}}_{A''} z + \begin{pmatrix} b_{11} z_1^2 + b_{12} z_1 z_2 \\ c_{12} z_1 z_2 + c_{22} z_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.8.)$$

Eigenvärdena till A'' blir $s_1 = \lambda_1 - \frac{b_{12}}{c_{22}} \lambda_2$ och $s_2 = -\lambda_2$.

Att beräkna allmänna uttryck för egenvektorer och att vid singulariteten 2) beräkna eigenvärden blir ganska invecklat.

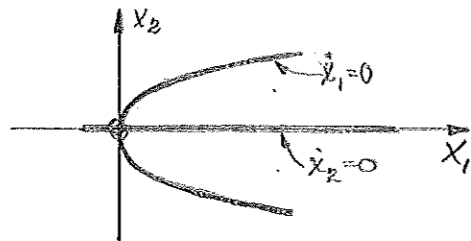
Vi avstår. Likaså blir det invecklat att allmänt bestämma singulariteternas typ. Man får behandla varje fall för sig.

Se num ex 1.6.a, 1.6.b och 1.6.c.

3.1.7. Specialfall 1.7.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{22} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\dot{x}_1 = 0$ ger $\lambda_1 x_1 + b_{22} x_2^2 = 0$ som beskriver en parabel. $\dot{x}_2 = 0$ ger $\lambda_2 x_2 = 0$. Parabeln kan ligga som i fig.



Det finns uppenbarligen bara en singularitet.

3.1.8. Specialfall 1.8.

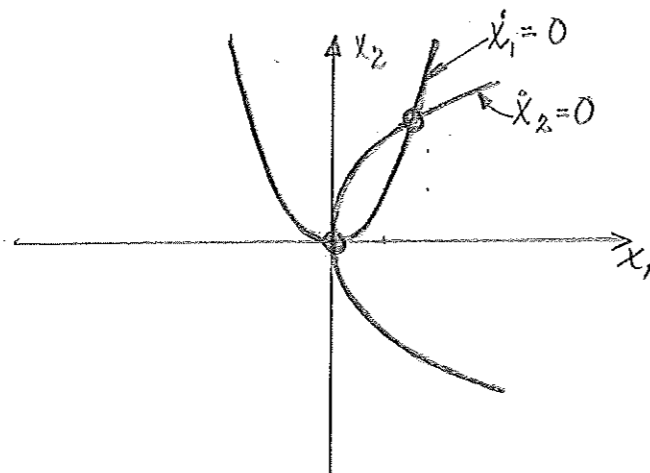
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{22} x_2^2 \\ c_{11} x_1^2 \end{pmatrix}$$

$\dot{x}_1 = 0$ ger $\lambda_1 x_1 + b_{22} x_2^2 = 0$

$\dot{x}_2 = 0$ ger $\lambda_2 x_2 + c_{11} x_1^2 = 0$

ligga som i fig

som betyder två parabler, som kan



Förutom origo får vi en singularitet med koordinaterna

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{\lambda_1}{b_{22}} \left(\frac{\lambda_2}{c_{11}}\right)^2} = r_1 \quad \text{och} \quad x_2 = \sqrt[3]{-\frac{\lambda_2}{c_{11}} \left(\frac{\lambda_1}{b_{22}}\right)^2} = r_2 \quad (3.9.)$$

Genomför transformationen $\begin{cases} z_1 = x_1 - r_1 \\ z_2 = x_2 - r_2 \end{cases}$ som ger

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 2b_{22}r_2 \\ 2c_{11}r_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_{22}z_2^2 \\ c_{11}z_1^2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till A' blir $s_{1,2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2 + 3\lambda_1\lambda_2}$.

Detta uttryck avgör singularitetens typ. Vi kan dela upp i två fall:

a). λ_1 och λ_2 har samma tecken. Då är

$$\sqrt{\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^2 + 3\lambda_1\lambda_2} > \left|\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right| \quad (3.10.)$$

dvs s_1 och s_2 har olika tecken. Singulariteten är en sadelpkt. Se num ex 1.8.a .

b). λ_1 och λ_2 har olika tecken. Det gäller

$$\sqrt{\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^2 + 3\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 14\lambda_1\lambda_2}{4}}$$

Om $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 < 14|\lambda_1\lambda_2|$ (3.11.)

så är s_1 och s_2 komplexa, dvs singulariteten är ett fokus. Om $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 14|\lambda_1\lambda_2|$ så är singulariteten

en tvåtg nod ty $\left|\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right| > \sqrt{\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2 + 3\lambda_1\lambda_2}$.

Vi beräknar inte något allmänt uttryck på egenvektorerna.

Se också num ex 1.8.b .

3.1.9. Specialfall 1.9.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\dot{x}_1 = 0$ ger en hyperbel $\lambda_1x_1 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 = 0$.

$\dot{x}_2 = 0$ ger $\lambda_2x_2 = 0$.

Vi utför inte transformationer enligt avd 2.3.1, utan

ser direkt att endast origo är singular punkt. Se num ex 1.9.a .

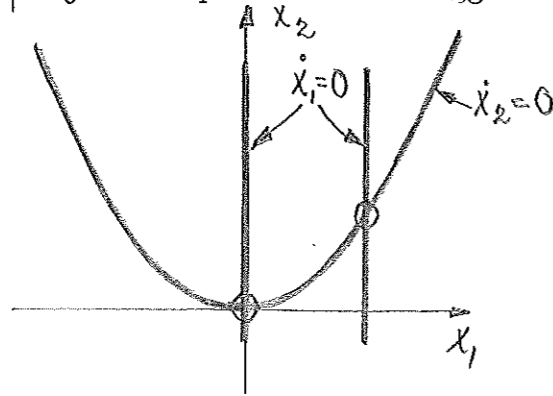
3.1.10. Specialfall 1.10.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11}x_1^2 \\ c_{11}x_1^2 \end{pmatrix}$$

$\dot{x}_1 = 0$ ger $(\lambda_1 + b_{11}x_1)x_1 = 0$ som betyder två räta linjer.

$\dot{x}_2 = 0$ ger $x_2 = -\frac{c_{11}}{\lambda_2}x_1^2$ som är en parabel.

Dessa linjer och parabeln kan ligga som i fig



Förutom origo finns en singularitet med koordinaterna

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1}{b_{11}} \\ -\frac{c_{11}\lambda_1}{b_{11}^2\lambda_2} \end{pmatrix} \text{ Sätt } \begin{cases} z_1 = x_1 + \frac{\lambda_1}{b_{11}} \\ z_2 = x_2 + \frac{c_{11}\lambda_1}{b_{11}^2\lambda_2} \end{cases} \text{ och utveckla kring} \\ \text{denna singularitet. Då fås}$$

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ -2\lambda_1 \frac{c_{11}}{b_{11}} & \lambda_2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_{11} z_1^2 \\ c_{11} z_1 z_2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till A blir $s_1 = -\lambda_1$ och $s_2 = \lambda_2$. Egenvektorena fås ur $Ae_1 = s_1 e_1$ och $Ae_2 = s_2 e_2$ och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

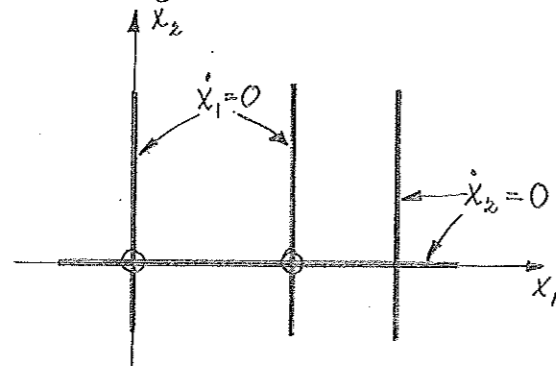
3.1.11. Specialfall 1.11.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11}x_1^2 \\ c_{12}x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = 0 \text{ ger } (\lambda_1 + b_{11}x_1) x_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0 \text{ ger } (\lambda_2 + c_{12}x_1) x_2 = 0$$

Dessa ekvationer beskriver fyra rätta linjer, som kan ligga som i fig



Förutom origo finns en singularitet med koordinaterna

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1}{b_{11}} \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Sätt } \begin{cases} z_1 = x_1 + \frac{\lambda_1}{b_{11}} \\ z_2 = x_2 \end{cases} \text{ och utveckla. Man får}$$

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 \frac{c_{12}}{b} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_{11} z_1^2 \\ c_{12} z_1 z_2 \end{pmatrix}$$

Vi fick direkt diagonalform.

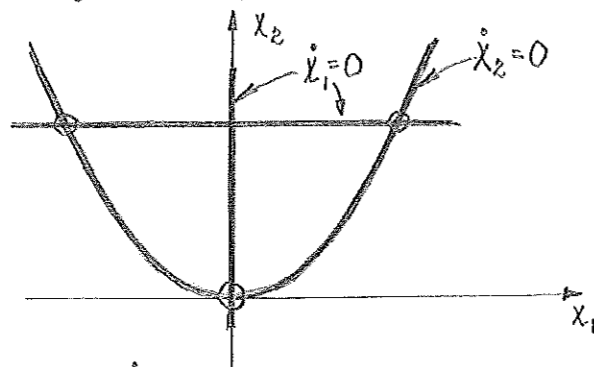
3.1.12. Specialfall 1.12.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{12} x_1 x_2 \\ c_{11} x_1^2 \end{pmatrix}$$

$\dot{x}_1 = 0$ ger $(\lambda_1 + b_{12} x_2) x_1 = 0$ som betyder två räta linjer.

$\dot{x}_2 = 0$ ger $x_2 = -\frac{c_{11}}{\lambda_2} x_1^2$ som är en parabel.

De två linjerna och parabeln kan ligga som i fig



Ur $\dot{x}_1 = 0$ och $\dot{x}_2 = 0$ får vi tre singulariteter. Dom blir med tillhörande koordinattransformation

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 2) \quad & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2}{b_{12} c_{11}}} \\ -\frac{\lambda_1}{b_{12}} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} z_1 = x_1 - \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2}{b_{12} c_{11}}} \\ z_2 = x_2 + \frac{\lambda_1}{b_{12}} \end{cases} \\ 3) \quad & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2}{b_{12} c_{11}}} \\ -\frac{\lambda_1}{b_{12}} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} z_1 = x_1 + \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2}{b_{12} c_{11}}} \\ z_2 = x_2 + \frac{\lambda_1}{b_{12}} \end{cases} \end{aligned}$$

Utveckla kring 2). Man får

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2}{b_{12} c_{11}}} \\ 2c_{11} \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2}{b_{12} c_{11}}} & \lambda_2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_{12} z_1 z_2 \\ c_{11} z_1^2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till A' blir

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{\lambda_2}{2} + \sqrt{\frac{\lambda_2^2 + 8\lambda_1 \lambda_2}{4}} \\ s_2 &= \frac{\lambda_2}{2} - \sqrt{\frac{\lambda_2^2 + 8\lambda_1 \lambda_2}{4}} \end{aligned}$$

Om λ_1 och λ_2 har samma tecken är singulariteten tydligen en sadelpunkt. Om λ_1 och λ_2 har olika tecken och $\lambda_2^2 + 8\lambda_1 \lambda_2 > 0$ är singulariteten en tvåtg nod. Om slutligen $\lambda_2^2 + 8\lambda_1 \lambda_2 < 0$ är singulariteten ett fokus.

Utveckla kring 3). Man får

$$z = \begin{pmatrix} 0 & -b_{12} \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2}{b_{12} c_{11}}} \\ -2c_{11} \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2}{b_{12} c_{11}}} & \lambda_2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_{12} z_1 z_2 \\ c_{11} z_1^2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till A'' blir

$$s_1 = \frac{\lambda_2}{2} + \sqrt{\frac{\lambda_2^2 + 8\lambda_1\lambda_2}{4}}$$

$$s_2 = \frac{\lambda_2}{2} - \sqrt{\frac{\lambda_2^2 + 8\lambda_1\lambda_2}{4}}$$

liksom vid singulariteten 2). 2) och 3) har tydligen alltid samma karaktär. Vi beräknar inte eventuella egenvektorer.

Till specialfallen 1.10. , 1.11. och 1.12. har vi inte beräknat några numeriska exempel.

3.2. Specialfall med komplexa egenvärden i origo.

3.2.1 Specialfall 2.1.

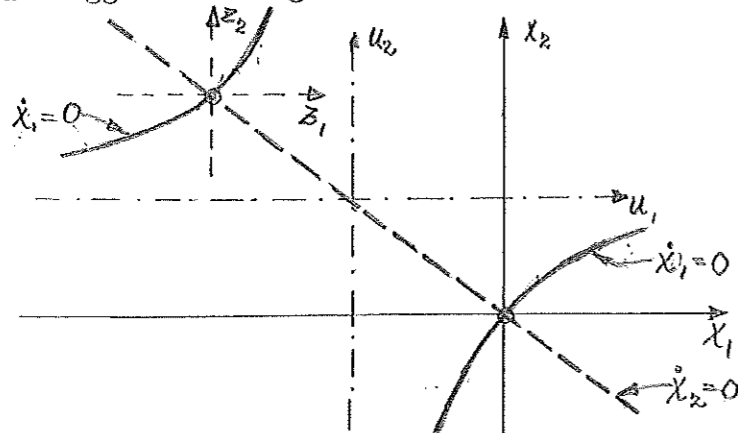
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{12} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\dot{x}_1 = 0$ ger $\sigma x_1 + \omega x_2 + b_{12} x_1 x_2 = 0$ som beskriver en hyperbel.

Gör transformationen $\begin{cases} u_1 = x_1 - \alpha_1 \\ u_2 = x_2 - \alpha_2 \end{cases}$ med α_1 och α_2 enligt

ekvn (2.3.) $\alpha_1 = -\frac{\omega}{b_{12}}$ och $\alpha_2 = -\frac{\sigma}{b_{12}}$. Hyperbeln skrivs då $b_{12} u_1 u_2 = k$, där $k = \frac{\omega \sigma}{b_{12}}$ enl ekv (2.2.)

$\dot{x}_2 = 0$ ger $-\omega x_1 + \sigma x_2 = 0$ som är en rät linje. Dessa kurvor kan ligga som i fig



Förutom origo får vi den singulära punkten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma^2 + \omega^2}{b_{12} \omega} \\ -\frac{\sigma^2 + \omega^2}{b_{12} \sigma} \end{pmatrix}. \text{ Sätt } \begin{cases} z_1 = x_1 + \frac{\sigma^2 + \omega^2}{b_{12} \omega} \\ z_2 = x_2 + \frac{\sigma^2 + \omega^2}{b_{12} \sigma} \end{cases} \text{ och utveckla. Man får}$$

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -\frac{\omega^2}{\sigma} & -\frac{\sigma^2}{\omega} \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_{12} z_1 z_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till A' blir $s_{1,2} = -\frac{\omega^2 - \sigma^2}{\sigma} \pm \sqrt{\frac{(\omega^2 - \sigma^2)^2 + (\omega^2 + \sigma^2)4\sigma^2}{4\sigma^2}}$.

Man ser att om $\sigma \neq 0$ är s_1 och s_2 reella med olika tecken, dvs singulariteten är en sadelpkt. Om $\sigma = 0$ får vi ur den ursprungliga ekvn att endast origo är singular punkt.

3.2.2. Specialfall 2.2.

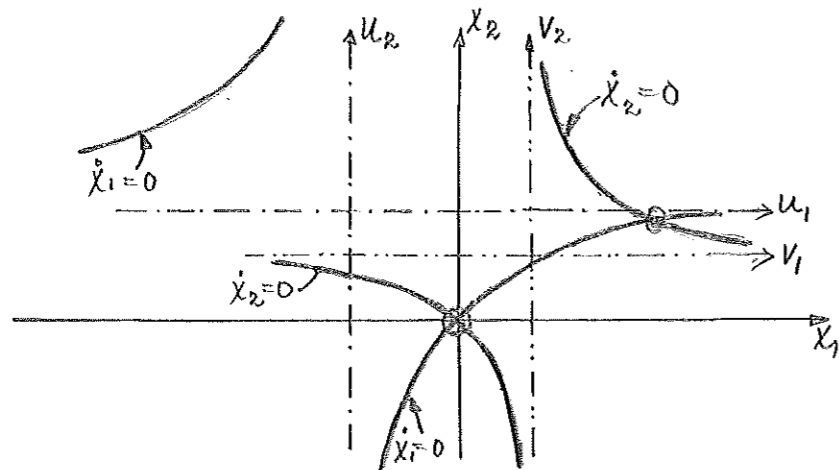
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{12} x_1 x_2 \\ c_{12} x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

$\dot{x}_1 = 0$ är enl specialfall 2.1 en hyperbel $b_{12} u_1 u_2 = \frac{\omega \sigma}{b_{12}}$

där $\begin{cases} u_1 = x_1 + \frac{\omega}{b_{12}} \\ u_2 = x_2 + \frac{\sigma}{b_{12}} \end{cases}$. På samma sätt betyder $\dot{x}_2 = 0$ en hyperbel

$c_{12} v_1 v_2 = -\frac{\sigma \omega}{c_{12}}$ med $\begin{cases} v_1 = x_1 + \frac{\sigma}{c_{12}} \\ v_2 = x_2 - \frac{\omega}{c_{12}} \end{cases}$. Hyperblerna kan ligga som

i fig på nästa sida.



Vi får aldrig mer än en singular punkt förutom origo.

$$\text{Den blir } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma^2 + \omega^2}{b_{12}\omega + c_{12}\sigma} \\ \frac{\omega^2 + \sigma^2}{c_{12}\omega - b_{12}\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad (3.12.)$$

Sätt $\begin{cases} z_1 = x_1 + r_1 \\ z_2 = x_2 - r_2 \end{cases}$ och utveckla kring singulariteten:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \omega \frac{c_{12}\sigma + b_{12}\omega}{c_{12}\omega - b_{12}\sigma} & \frac{c_{12}\omega - b_{12}\sigma}{b_{12}\omega + c_{12}\sigma} \\ \sigma \frac{c_{12}\sigma + b_{12}\omega}{c_{12}\omega - b_{12}\sigma} & -\frac{c_{12}\omega - b_{12}\sigma}{b_{12}\omega + c_{12}\sigma} \omega \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_{12}z_1 z_2 \\ c_{12}z_1 z_2 \end{pmatrix} \quad (3.13.)$$

Egenvärdena till A' fås ur $s^2 + sY - (\omega^2 + \sigma^2) = 0$

där Y är icke mindre än

$$Y = \omega \frac{(c_{12}\omega - b_{12}\sigma)^2 - (c_{12}\sigma + b_{12}\omega)^2}{(c_{12}\omega - b_{12}\sigma) \cdot (b_{12}\omega + c_{12}\sigma)}$$

Om $Y \neq 0$ och $Y \rightarrow \infty$ så fås

$$s_{1,2} = -\frac{Y}{2} \pm \sqrt{\frac{Y^2 + 4(\omega^2 + \sigma^2)}{4}} \quad (3.14.)$$

Av detta uttryck ser vi att s_1 och s_2 alltid är reella

och med olika tecken, dvs singulariteten är en sadelpkt.

Detta gäller även när $Y = 0$.

Om $b_{12}\omega + c_{12}\sigma \rightarrow 0$ eller $c_{12}\omega - b_{12}\sigma \rightarrow 0$ så gäller att

singularitetens avstånd till origo $\rightarrow \infty$. Se num ex 2.2.b

och 2.2.c .

Antag nu att $\sigma = 0$ dvs $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{12}x_1 x_2 \\ c_{12}x_1 x_1 \end{pmatrix}$

Denna ekvation jämför vi med den transformerade ekvationen

i specialfall 1.2 . Om vi där hade λ_1 och λ_2 av olika tecken

så var origo sadelpkt och singulara pkt ett center. Här har

vi ett center i origo och singulara punkten sadelpkt. Se

num ex 2.2.a .

3.2.3. Specialfall 2.3.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\dot{x}_1 = 0$ ger $\sigma x_1 + \omega x_2 + b_{11} x_1^2 = 0$ som beskriver en parabel.

Vi utnyttjar inte transformationerna i avd 2.3.1 utan räknar direkt i detta fall. Parabeln skall ha formen

$u_2 = du_1^2$. Sätt $\begin{cases} x_1 = u_1 + \alpha_1 \\ x_2 = u_2 + \alpha_2 \end{cases}$ och sätt in. Man får

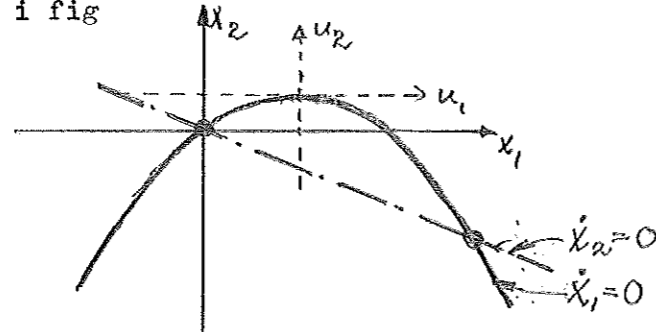
$2d\alpha_1 x_1 + x_2 - dx_1^2 = \alpha_2 + d\alpha_1^2 = 0$, sista nollan av att parabeln skall gå genom origo. Jfr med $\frac{\sigma}{\omega} x_1 + x_2 + \frac{b_{11}}{\omega} x_1^2 = 0$.

Man får härav $\alpha_1 = -\frac{\sigma}{2b_{11}}$

$$\alpha_2 = \frac{\sigma^2}{4b_{11}\omega}$$

$$d = -\frac{b_{11}}{\omega}$$

$\dot{x}_2 = 0$ ger $-\omega x_1 + \sigma x_2 = 0$. Denna linje och parabeln kan ligga som i fig



Vi får en singularitet förutom origo. Den har koordinaterna

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma^2 + \omega^2}{b_{11}\sigma} \\ -\frac{(\sigma^2 + \omega^2)\omega}{b_{11}\sigma^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad (3.15.)$$

Sätt $\begin{cases} z_1 = x_1 - r_1 \\ z_2 = x_2 - r_2 \end{cases}$ och utveckla. Man får då

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{\sigma^2 + 2\omega^2}{\sigma} & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}}_A z + \begin{pmatrix} b_{11} z_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.16.)$$

Egenvärdena till A blir $s_{1,2} = -\frac{\omega^2}{\sigma} \pm \frac{\sqrt{\omega^2 + \sigma^2(\omega^2 + \sigma^2)}}{\sigma}$

s_1 och s_2 är reella och har olika tecken, dvs singulariteten är en sadelpkt. Den kvadratiske termen $\begin{pmatrix} 0 \\ b_{11} z_1^2 \end{pmatrix}$ ger endast en vridning $\frac{\pi}{2}$ av fasplanet i förhållande till ovan. Se också num ex 2.3.a och 2.3.b.

3.2.4. Specialfall 2.4 .

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11} x_1^2 \\ c_{22} x_2^2 \end{pmatrix}$$

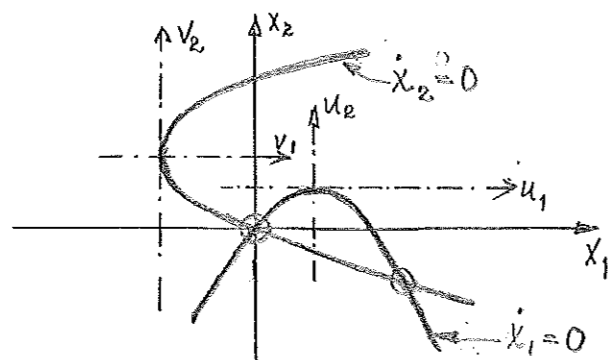
$\dot{x}_1=0$ betyder enl specialfall 2.3. en parabel $u_2=d_1 u_1^2$

med $d_1 = -\frac{b_{11}}{\omega}$. Den har vertex i punkten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{2b_{11}} \\ \frac{\sigma^2}{4b_{11}\omega} \end{pmatrix} . \quad \dot{x}_2=0 \text{ betyder p\u00e5 samma s\u00e4tt en parabel}$$

$$v_1 = d_2 v_2^2 \quad \text{med } d_2 = \frac{c_{22}}{\omega} \quad \text{och vertex i } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma^2}{4c_{22}\omega} \\ \frac{\sigma}{2c_{22}} \end{pmatrix}$$

Dessa parabler kan ligga som i fig



Om man g\u00f6r sig m\u00f6dan att f\u00f6rs\u00f6ka f\u00e5 ett algebraiskt uttryck f\u00f6r singulariteternas l\u00e4gen f\u00e5r man

$$x_1^3 + \frac{2\sigma}{b_{11}} x_1^2 + \frac{1}{b_{11}^2} \left(\sigma^2 - \frac{b_{11}\sigma\omega}{c_{22}} \right) x_1 - \frac{\omega}{b_{11}^2 c_{22}} (\sigma^2 + \omega^2) = 0 \quad (3.17)$$

som l\u00f6ses numeriskt. Startv\u00e4rderna kan f\u00e5s ur en figur liknande den ovanst\u00e5ende. Se num ex 2.4.b , 2.4.c , 2.4.d och 2.4.e .

Om vi har $\sigma = 0$ dvs ekvn $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11} x_1^2 \\ c_{22} x_2^2 \end{pmatrix}$ blir

det enklare. $\dot{x}_1=0$ och $\dot{x}_2=0$ beskriver tv\u00e5 parabler med vertex i origo. F\u00f6rutom origo f\u00e5r vi en singularitet

$$\text{med koordinaterna } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \left(\frac{1}{b_{11}^2 c_{22}} \right)^{\frac{1}{3}} \\ -\omega \left(\frac{1}{b_{11}^2 c_{22}} \right)^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad (3.18.)$$

S\u00e4tt $\begin{cases} z_1 = x_1 - r_1 \\ z_2 = x_2 - r_2 \end{cases}$ och utveckla. Man f\u00e5r ekvationen

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2\omega \left(\frac{b_{11}}{c_{22}} \right)^{\frac{1}{3}} & \omega \\ -\omega & -2\omega \left(\frac{c_{22}}{b_{11}} \right)^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}}_{A'} z + \begin{pmatrix} b_{11} z_1^2 \\ c_{22} z_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.19.)$$

Egenv\u00e4rderna till A' blir

$$s_{1,2} = \omega \left[\left(\frac{b_{11}}{c_{22}} \right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{c_{22}}{b_{11}} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \pm \omega \sqrt{\left[\left(\frac{b_{11}}{c_{22}} \right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{c_{22}}{b_{11}} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2 + 3} \quad (3.20.)$$

Det g\u00e4ller tydligen att s_1 och s_2 alltid \u00e4r reella med olika tecken, dvs singulariteten \u00e4r en sadelpkt. J\u00e4mf\u00f6r med num ex 2.4.a .

3.2.5. Specialfall 2.5.

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\dot{x}_1 = 0$ ger $\sigma x_1 + \omega x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 = 0$ som betyder en hyperbel enl ekv(2.5.).

$\dot{x}_2 = 0$ ger $x_1 = \frac{\sigma}{\omega} x_2$, dvs en rät linje.

Vi transformerar hyperbeln enl kap 2.3.1.

$$\alpha_1 = -\frac{\omega}{b_{12}}$$

$$\alpha_2 = \frac{2b_{11}\omega - b_{12}\sigma}{b_{12}^2}$$

$$k = \frac{\omega(b_{12}\sigma - b_{11}\omega)}{b_{12}^2}$$

Sätt $\begin{cases} u_1 = x_1 - \alpha_1 \\ u_2 = x_2 - \alpha_2 \end{cases}$. I detta koordinatsystem får hyperbeln

ekvationen $b_{11}u_1^2 + b_{12}u_1u_2 = k$. Vi utför en vridning av koordinatsystemet och får hyperbeln på formen

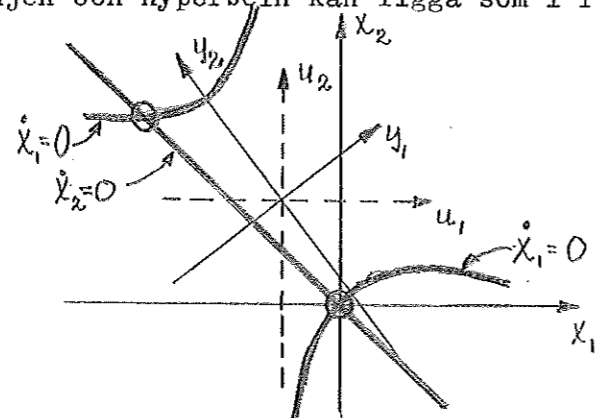
$$y^+ \begin{pmatrix} 1+r & 0 \\ 0 & 1-r \end{pmatrix} y = k$$

där $1 = \frac{b_{11}}{2}$ och $r = \sqrt{\frac{b_{11}^2 + b_{12}^2}{4}}$

Egenvektorerna blir

$$\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{b_{11}}{b_{12}} + \sqrt{\left(\frac{b_{11}}{b_{12}}\right)^2 + 1} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_{11}}{b_{12}} - \sqrt{\left(\frac{b_{11}}{b_{12}}\right)^2 + 1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Den rätta linjen och hyperbeln kan ligga som i fig



Förutom origo har vi ytterligare en singularitet med

koordinaterna $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(\sigma^2 + \omega^2)}{(b_{11}\sigma + b_{12}\omega)} \\ -\frac{(\sigma^2 + \omega^2) \cdot \omega}{(b_{11}\sigma + b_{12}\omega)\sigma} \end{pmatrix}$. Att utveckla

kring denna singularitet blir ganska invecklat och vi avstår. Till detta specialfall har vi inte beräknat något numeriskt exempel.

3.2.6. Specialfall 2.6.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 \\ c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 \end{pmatrix}$$

Att i detta fall direkt lösa ut singulariteterna blir alltför invecklat. Lösningen får ske numeriskt. $\dot{x}_1 = 0$ och $\dot{x}_2 = 0$ betyder enl ekv(2.5.) två hyperbler. Transformationerna för att få dem på formen

$$y^+ \begin{pmatrix} 1+r & 0 \\ 0 & 1-r \end{pmatrix} y = k$$

blir desamma som i specialfall 2.5. Vi utför dem därför inte här. Något numeriskt exempel har vi inte beräknat i detta fall.

3.2.7. Specialfall 2.7.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{22}x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

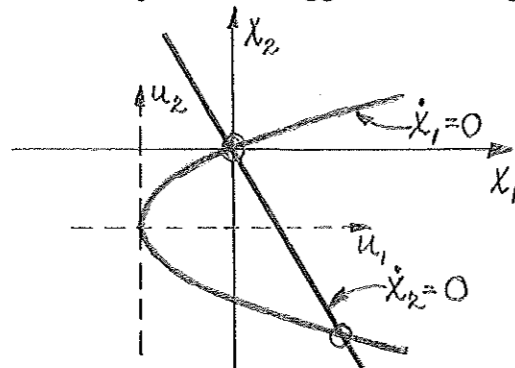
$\dot{x}_1 = 0$ ger $\sigma x_1 + \omega x_2 + b_{22}x_2^2 = 0$ som är en parabel.

$\dot{x}_2 = 0$ ger $x_1 = \frac{\omega}{\sigma} x_2$, alltså en rät linje.

Parabeln får vi på formen $u_1 = du_2^2$ genom transformationen

$$\begin{cases} u_1 = x_1 - \frac{\omega^2}{4b_{22}\sigma} \\ u_2 = x_2 + \frac{\omega}{2b_{22}} \end{cases} \quad \text{där } d = -\frac{b_{22}}{\sigma} \quad (\text{se t.ex. specialfall 2.3.})$$

Parabeln och linjen kan ligga som i fig



Förutom origo får vi en singularitet med koordinaterna

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{\omega} \frac{\sigma^2 + \omega^2}{b_{22}\omega} \\ -\frac{\sigma^2 + \omega^2}{b_{22}\omega} \end{pmatrix}. \quad \text{Sätt } \begin{cases} z_1 = x_1 + \frac{\sigma}{\omega} \frac{\sigma^2 + \omega^2}{b_{22}\omega} \\ z_2 = x_2 + \frac{\sigma^2 + \omega^2}{b_{22}\omega} \end{cases} \quad \text{och utveckla.}$$

Man får då

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \sigma & -\frac{2(\sigma^2 + \omega^2)}{\omega} \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_{22}z_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till A blir

$$s_1 = \sigma + \sqrt{2\sigma^2 + \omega^2}$$

$$s_2 = \sigma - \sqrt{2\sigma^2 + \omega^2}$$

Singulariteten är tydligen en sadelpunkt. Vi beräknar inte något uttryck för egenvektorerna.

3.2.8. Specialfall 2.8.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{22} x_2^2 \\ c_{11} x_1^2 \end{pmatrix}.$$

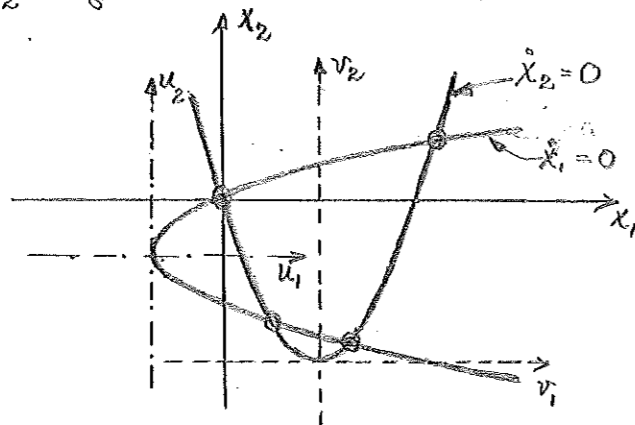
$\dot{x}_1 = 0$ betyder en parabel. Vi får den på formen $u_1 = d_1 u_2^2$

$$\text{genom transformationen } \begin{cases} u_1 = x_1 - \frac{\omega^2}{4b_{22}\sigma} \\ u_2 = x_2 + \frac{\omega}{2b_{22}} \end{cases} \quad (3.21.)$$

där $d_1 = -\frac{b_{22}}{\sigma}$. På samma sätt skrives $\dot{x}_2 = 0$ på formen

$$v_2 = d_2 v_1^2 \text{ där } \begin{cases} v_1 = x_1 - \frac{\omega}{2c_{11}} \\ v_2 = x_2 - \frac{\omega^2}{4c_{11}\sigma} \end{cases} \quad (3.22.)$$

och $d_2 = -\frac{c_{11}}{\sigma}$. Parablerna kan ligga som i fig



Singulariteternas lägen löses numeriskt ur ekvationen.

Startvärden kan fås ur en figur liknande den ovanstående.

Se num ex 2.5.a och 2.5.b .

3.2.9. Specialfall 2.9.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{12} x_1 x_2 + b_{22} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\dot{x}_1 = 0$ ger $\sigma x_1 + \omega x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{22} x_2^2 = 0$ som enligt ekvn(2.5.)

betyder en hyperbel.

$\dot{x}_2 = 0$ ger $x_2 = \frac{\omega}{\sigma} x_1$, dvs en rät linje.

Vi transformerar hyperbeln enl kap2.3.1. och får

$$\alpha_1 = \frac{2b_{22}\sigma - b_{12}\omega}{b_{12}^2}$$

$$\alpha_2 = -\frac{\sigma}{b_{12}}$$

$$k = \frac{(b_{12}\omega - b_{22}\sigma)\sigma}{b_{12}^2}$$

Sätt $u_1 = x_1 - \alpha_1$, I detta koordinatsystem har hyperbeln

$$u_2 = x_2 - \alpha_2$$

ekvationen $b_{12} u_1 u_2 + b_{22} u_2^2 = k$. Vi utför en vridning av koordinatsystemet så att hyperbeln i systemet (y_1, y_2)

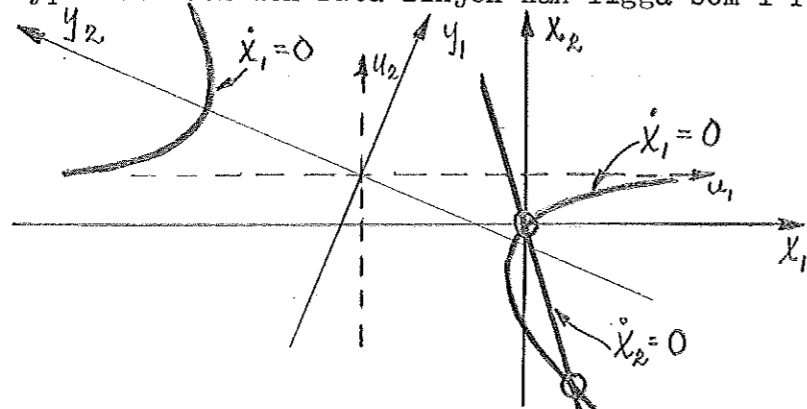
får ekvationen $y^+ \begin{pmatrix} 1+r & 0 \\ 0 & 1-r \end{pmatrix} y = k$

där $1 = \frac{b_{22}}{2}$ och $r = \sqrt{\frac{b_{12}^2 + b_{22}^2}{4}}$.

Egenvektorerna blir

$$\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_{22}}{b_{12}} + \sqrt{\left(\frac{b_{22}}{b_{12}}\right)^2 + 1} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b_{22}}{b_{12}} - \sqrt{\left(\frac{b_{22}}{b_{12}}\right)^2 + 1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hyperbeln och den rätta linjen kan ligga som i fig



Förutom origo har vi en singularitet. Uttrycket för denna blir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma^2 + \omega^2}{(b_{12}\sigma + b_{22}\omega)\omega} \\ -\frac{\sigma^2 + \omega^2}{(b_{12}\sigma + b_{22}\omega)\sigma} \end{pmatrix}$$

Det blir invecklat att utveckla kring denna punkt och vi gör det inte här. Något numeriskt exempel till detta specialfall har vi inte.

3.2.10. Specialfall 2.10.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11}x_1^2 \\ c_{11}x_1^2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = 0 \text{ ger } \sigma x_1 + \omega x_2 + b_{11}x_1^2 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0 \text{ ger } -\omega x_1 + \sigma x_2 + c_{11}x_1^2 = 0$$

Dessa två ekvationer betyder parabler (enl ekvn(2.5.)).

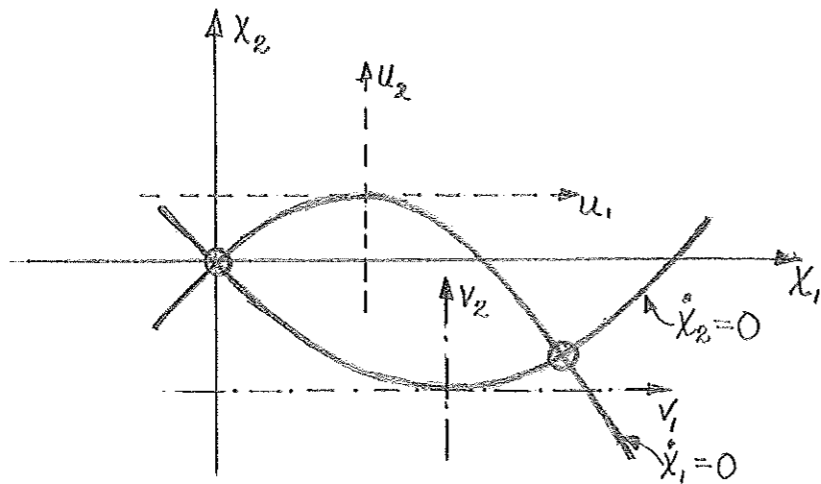
Den första kan skrivas på formen $u_2 = d_1 u_1^2$ om vi gör

$$\text{transformationen } \begin{cases} u_1 = x_1 + \frac{\sigma}{2b_{11}} \\ u_2 = x_2 - \frac{\sigma^2}{4b_{11}\omega} \end{cases} \text{ med } d_1 = -\frac{b_{11}}{\omega} \text{ (se t.ex.}$$

specialfall 2.3.). På samma sätt kan den andra skrivas

$$v_2 = d_2 v_1^2 \text{ om vi sätter } \begin{cases} v_1 = x_1 - \frac{\omega}{2c_{11}} \\ v_2 = x_2 - \frac{\omega^2}{4c_{11}\sigma} \end{cases} \text{ och } d_2 = -\frac{c_{11}}{\sigma}.$$

De två parablerna kan ligga som i fig



Vi får förutom origo en singularitet med koordinaterna

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\omega^2 + \sigma^2}{b_{11}\sigma - c_{11}\omega} \\ \frac{\omega(b_{11}\omega + c_{11}\sigma)(\sigma^2 + \omega^2)}{(b_{11}\sigma - c_{11}\omega)^2} \end{pmatrix},$$

Att utveckla kring denna punkt blir arbetsamt och vi avstår.

Något numeriskt exempel har vi inte beräknat i detta fall.

3.2.11. Specialfall 2.11.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11}x_1^2 \\ c_{12}x_1x_2 \end{pmatrix}$$

$\dot{x}_1 = 0$ ger $\sigma x_1 + \omega x_2 + b_{11}x_1^2 = 0$ som är en parabel enl ekv(2.5.)

$\dot{x}_2 = 0$ ger $-\omega x_1 + \sigma x_2 + c_{12}x_1x_2 = 0$. Detta är enl ekv(2.5.)

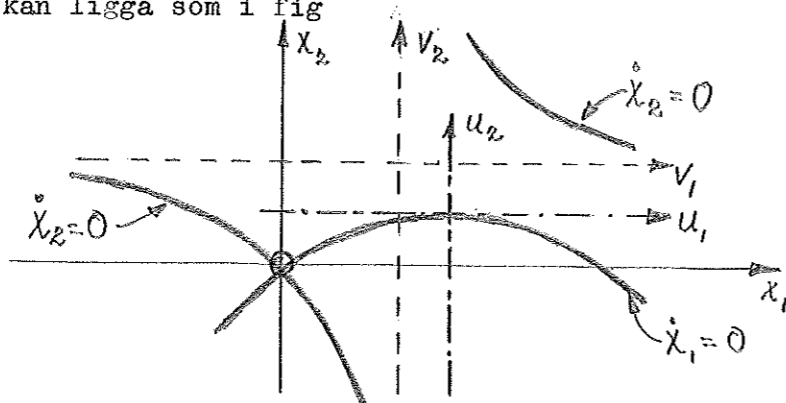
hyperbel. Parabeln kan skrivas på formen $u_2 = du_1^2$ (se spe-

cialfall 2.3.) med $\begin{cases} u_1 = x_1 + \frac{\sigma}{2b_{11}} \\ u_2 = x_2 - \frac{\sigma^2}{4b_{11}\omega} \end{cases}$ och $d = -\frac{b_{11}}{\omega}$.

Hyperbeln kan (enl specialfall 2.1.) skrivas $c_{11}v_1v_2 = k$

med transformationen $\begin{cases} v_1 = x_1 + \frac{\sigma}{c_{12}} \\ v_2 = x_2 - \frac{\omega}{c_{12}} \end{cases}$ och $k = -\frac{\sigma\omega}{c}$.

Kägelsnitten kan ligga som i fig



Uttrycket för singularitetens läge blir invecklat och vi beräknar det inte här.

3.2.12. Specialfall 2.12.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{12}x_1x_2 \\ c_{11}x_1^2 \end{pmatrix}$$

$\dot{x}_1 = 0$ ger $\sigma x_1 + \omega x_2 + b_{12}x_1x_2 = 0$ som är en hyperbel enl ekv 2.5.

$\dot{x}_2 = 0$ ger $-\omega x_1 + \sigma x_2 + c_{11}x_1^2 = 0$ som är en parabel.

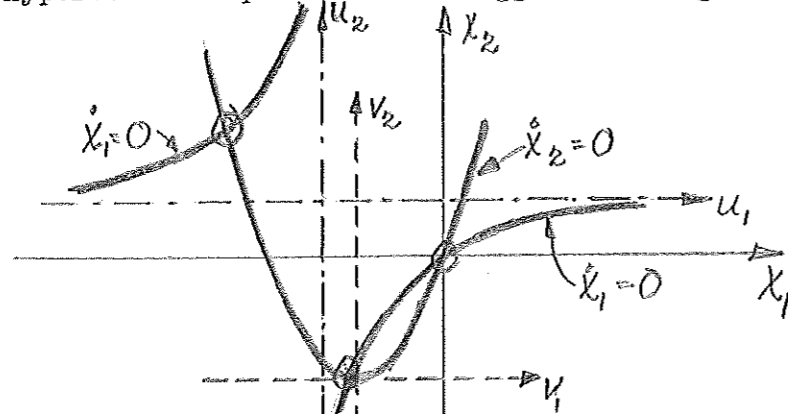
Hyperbeln kan skrivas $b_{12}u_1u_2 = k$ (se specialfall 2.1.)

om vi sätter $\begin{cases} u_1 = x_1 + \frac{\omega}{b_{12}} \\ u_2 = x_2 - \frac{\sigma}{b_{12}} \end{cases}$ och där $k = \frac{\omega\sigma}{b_{12}}$.

Parabeln kan (enl specialfall 2.3.) skrivas som $v_2 = dv_1^2$

där $\begin{cases} v_1 = x_1 - \frac{\omega}{2c_{11}} \\ v_2 = x_2 - \frac{\omega^2}{4c_{11}\sigma} \end{cases}$ och $d = -\frac{c_{11}}{\sigma}$.

Hyperbeln och parabeln kan ligga som i fig



Uttrycket för singulariteternas lägen beräknas inte här.

4. NUMERISKA EXEMPEL OCH SIMULERINGAR.

I följande kapitel har vi valt ut vissa av de analyserade specialfallen och simulerat dem på analogmaskin. Till simuleringarna har utförts detaljerade numeriska beräkningar. I några fall har flera simuleringar utförts till varje specialfall. Vi vill därmed belysa t.ex. hur parametervariationer i den kvadratiske termen påverkar fasplanet, eller hur olika karaktär på singulariteten i origo förändrar ekvationens lösning. Vi beräknar asymptotiskt uppförande hos trajektorierna och jämför med fasplanen. I förekommande fall har vi beräknat stabilitetsområde enl [4] och ritat in i fasplanen. Inte i något fall har vi träffat på någon limit cycle.

4.1. Fasplan: Reella egenvärden.

Gemensamt för dessa fasplan är att matrisen A i grund-ekvationen har utseendet $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ dvs origo är tvåtg nod eller sadelpunkt.

Då A i detta fall är symmetrisk blir stabilitetsområdet enligt [4]

$$\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2} \leq \frac{|\lambda_2|}{\max_i \sqrt{\sum_j b_{ij}^2}}, \quad |\lambda_2| < |\lambda_1|$$

med Lyapunovfunktionen $V = x^+x$.

Numeriskt exempel 1.1.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Visar direkt att endast origo är singular punkt.

Stabilitetsområde enl [4] blir

$$x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{1} = 1$$

I själva verket har vi global stabilitet.

Asymptotiskt uppförande.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2}{-2x_1 + x_1 x_2}$$

$$1. \quad x_1 \rightarrow 0$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \infty \text{ då } x_2 \rightarrow \infty$$

$$2. \quad x_2 \neq 0$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} \neq 0 \quad \forall x_1 \neq 0$$

$$3. \quad x_1 = x_2, x_1 \rightarrow \pm\infty$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \pm \mathcal{E}$$

$$4. \quad x_1 = -x_2, x_1 \rightarrow \pm\infty$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \pm \mathcal{E}$$

För num ex 1.1.b och 1.1.c gör vi inte dessa räkningar.

Stabilitetsområdet enl [4] blir för 1.1.c:

$$x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{1}$$

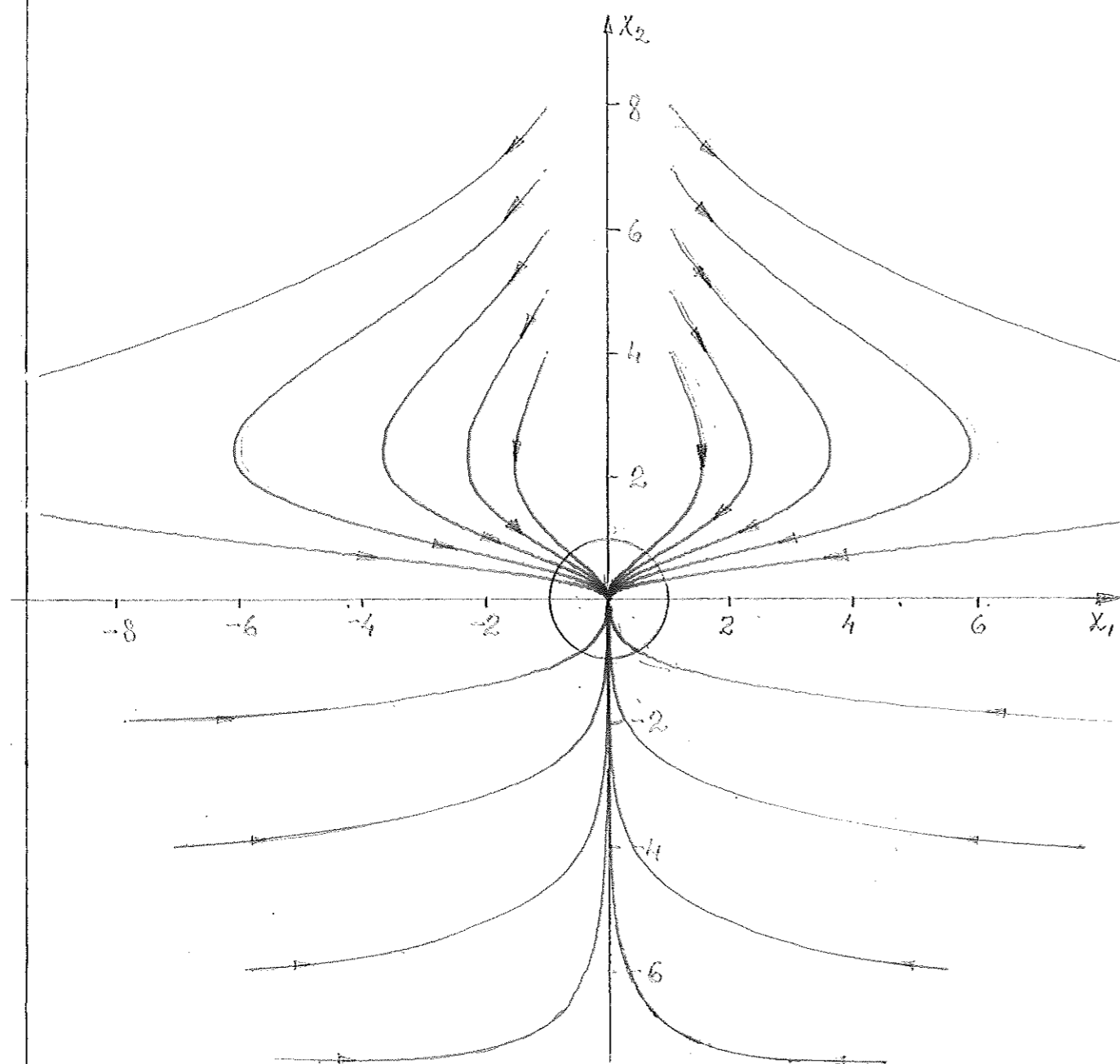


Fig 1.1.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Enda singularitet (i origo) stabil tvåtg nod.

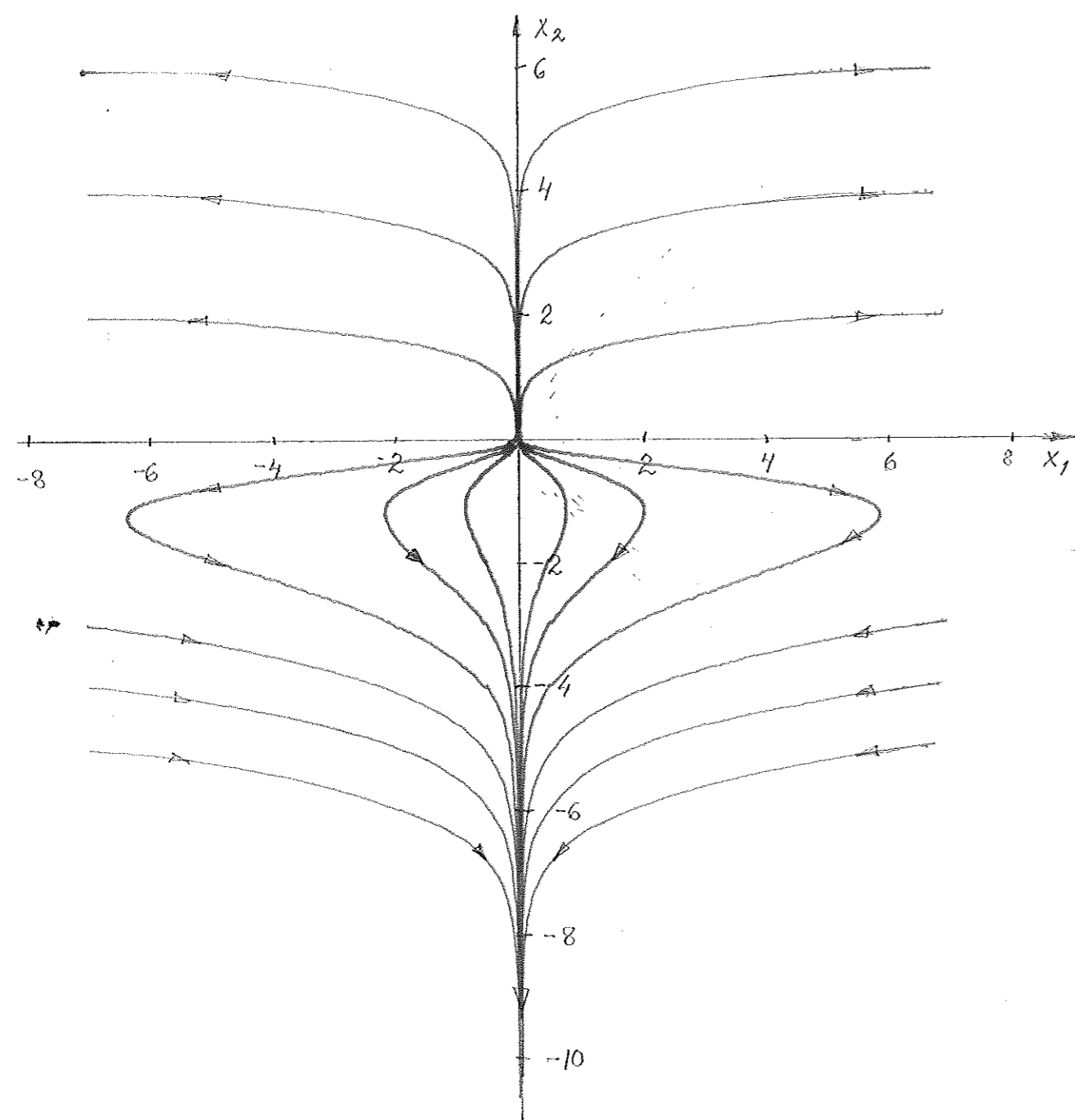


Fig 1.1.b

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Enda singularitet (i origo) instabil tvåtg nod.

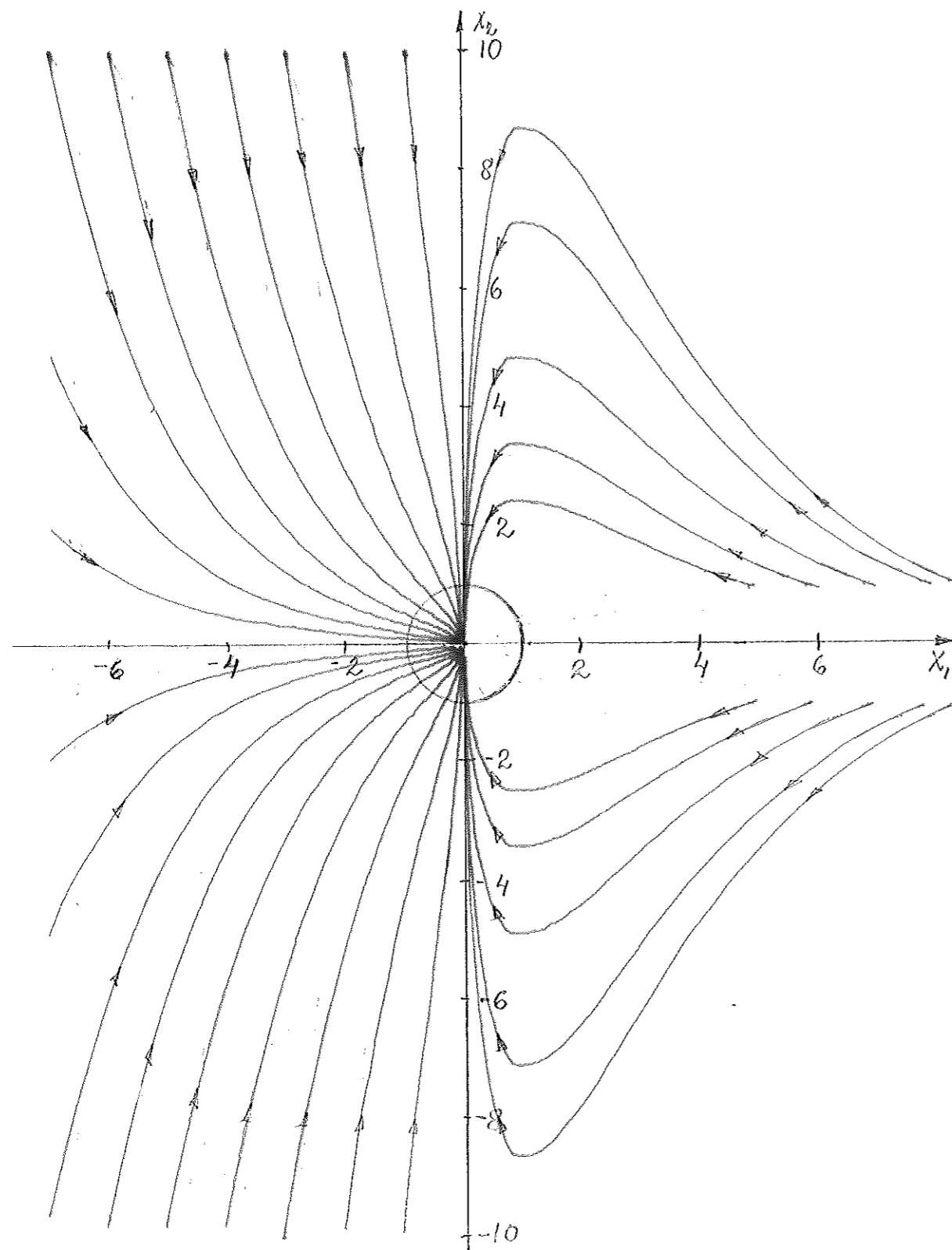


Fig 1.1.c

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

Enda singularitet (i origo) stabil tvåtg nod.

Numeriskt exempel 1.2.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ \frac{1}{2} x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix} \quad (\text{origo stabil tvåtåg nod})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \text{ ger singulära pktr } \begin{cases} (x_1, x_2) = (0, 0) \\ (x_1, x_2) = (2, 2) \end{cases}$$

Sätt $\begin{cases} z_1 = x_1 - 2 \\ z_2 = x_2 - 2 \end{cases}$ och utveckla kring $(2, 2)$. Då fås

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_B z + \begin{pmatrix} z_1 \cdot z_2 \\ \frac{1}{2} z_1 \cdot z_2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till B blir $s_1 = 2$ och $s_2 = -2$

dvs vi har en sadelpkt.

Tillhörande egenvektorer fås ur $B e_1 = s_1 e_1$ och $B e_2 = s_2 e_2$ och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ +1 \end{pmatrix} \quad (\text{instabila})$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{stabila}).$$

Stab. omr. enl [4] blir

$$x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{\max(1, \frac{1}{2})} = 1$$

Asymptotiskt uppförande

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2 + \frac{1}{2} x_1 x_2}{-2x_1 + x_1 x_2}$$

- | | | | |
|----|--|---|------------------|
| 1. | $x_1 \rightarrow 0$ | $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \infty$ | för $x_2 \neq 0$ |
| 2. | $x_2 \rightarrow 0$ | $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 0$ | för $x_1 \neq 0$ |
| 3. | $x_1 = x_2, x_1 \rightarrow \pm \infty$ | $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \frac{1}{2}$ | |
| 4. | $x_1 = -x_2, x_1 \rightarrow \pm \infty$ | $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \frac{1}{2}$ | |

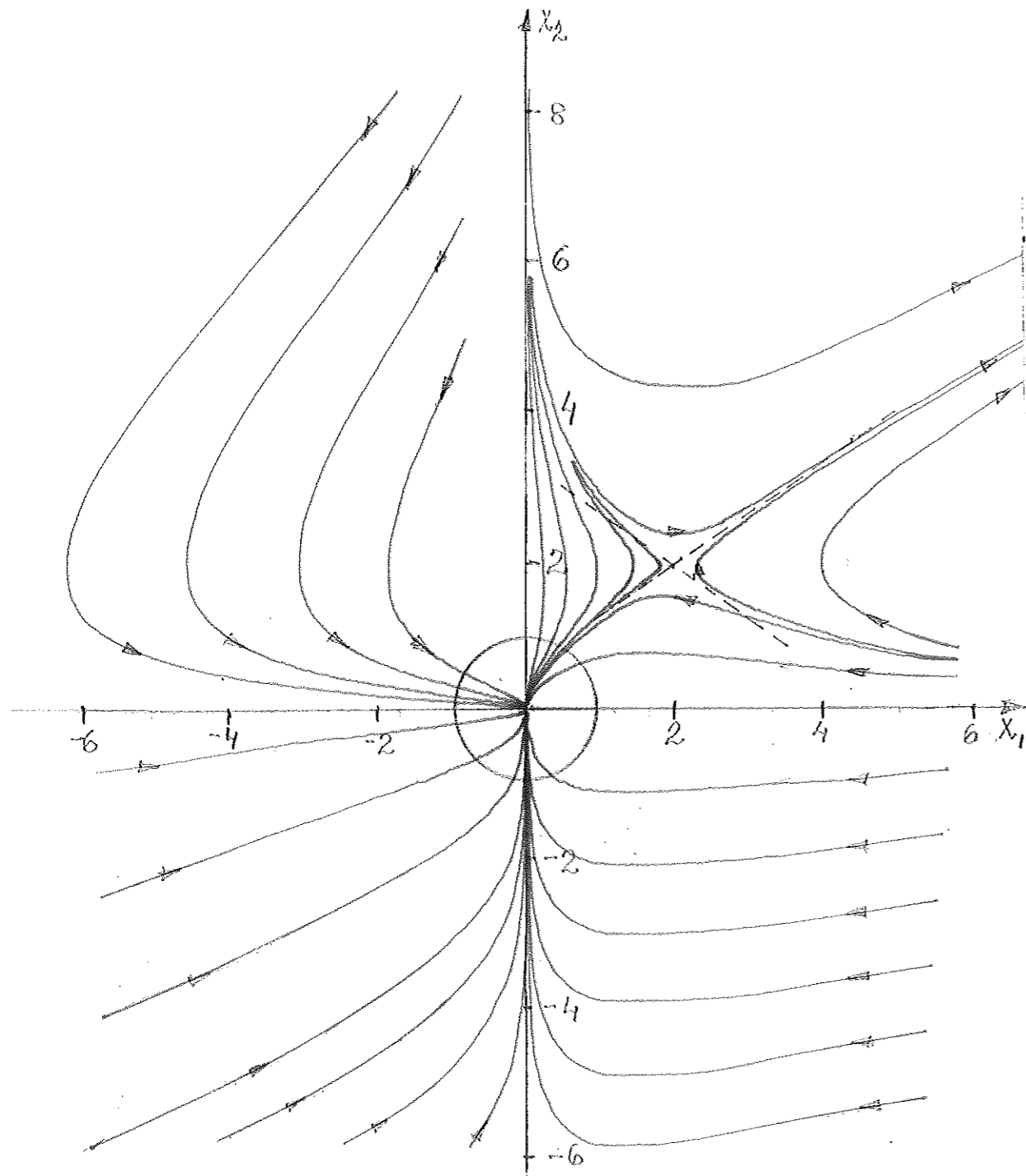


Fig 1.2.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ \frac{1}{2} x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

Singularitet	Typ	Egenvektorer
(0,0)	stabil tvåtg nod	(1,0) , (0,1)
(2,2)	sadelpkt	($\sqrt{2}$, 1) , ($\sqrt{2}$, -1)

Numeriskt exempel 1.2.b

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} \quad (\text{origo sadelpunkt}).$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \text{ ger } \text{singulära pktr} \begin{cases} (x_1, x_2) = (0, 0) \\ (x_1, x_2) = (-1, 2) \end{cases}$$

Sätt $\begin{cases} z_1 = x_1 + 1 \\ z_2 = x_2 - 2 \end{cases}$ och utveckla kring $(-1, 2)$. Man får

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_B z + \begin{pmatrix} z_1 z_2 \\ z_1 z_2 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena till B blir $+j\sqrt{2}$ och $-j\sqrt{2}$ dvs rent imaginära. Singulariteten $(-1, 2)$ är alltså ett center. Jämför med numeriskt exempel 2.2.a och 2.4.a. Vi har där center i origo medan singulariteten är en sadelpunkt.

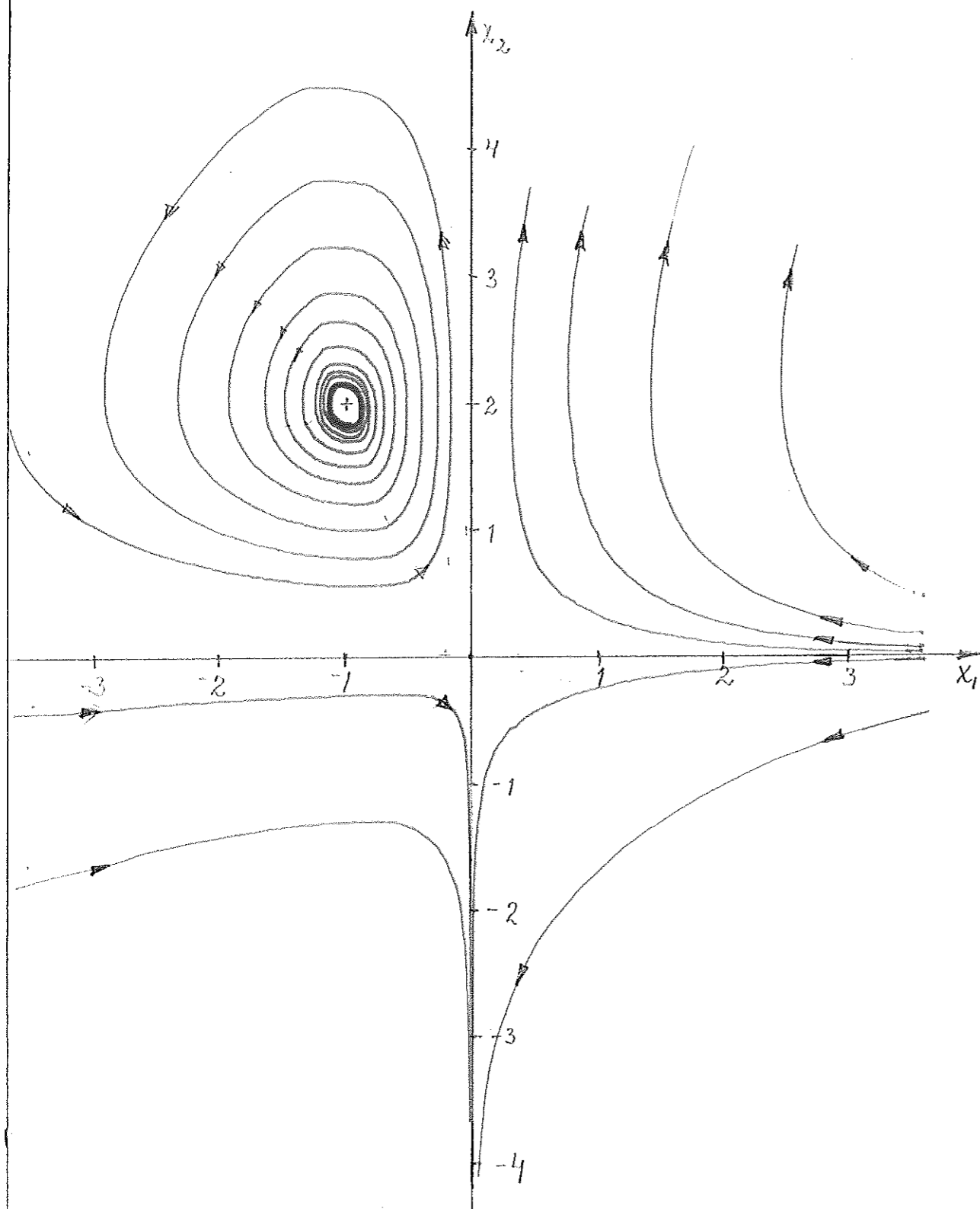


Fig 1.2.b

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Singulariteter

(0,0)

(-1,2)

Typ

sadelpkt

center

Egenvektorer

(1,0) , (0,1)

Numeriskt exempel 1.3.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{origo stabil tvåtg nod}).$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \text{ ger } \text{singulära pktr } \begin{cases} (x_1, x_2) = (0, 0) \\ (x_1, x_2) = (2, 0) \end{cases}$$

Utveckla kring singulariteten:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} z_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi får direkt diagonalform. Singulariteten är en sadelpkt.

Stab. omr. enl [4] blir

$$x_1^2 + x_2^2 < 1$$

Vi har asymptotisk stabilitet för halvplanet $x_1 < 2$.

Asymptotiskt uppförande

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2}{-2x_1 + x_1^2}$$

1. $x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow \pm\infty \quad \frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \pm\infty$
2. $x_2 \rightarrow 0, x_1 \rightarrow \pm\infty \quad \frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \pm\infty$
3. $x_1 = x_2, x_1 \rightarrow \pm\infty \quad \frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \pm 1$
4. $x_1 = -x_2, x_1 \rightarrow \pm\infty \quad \frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \pm 1$

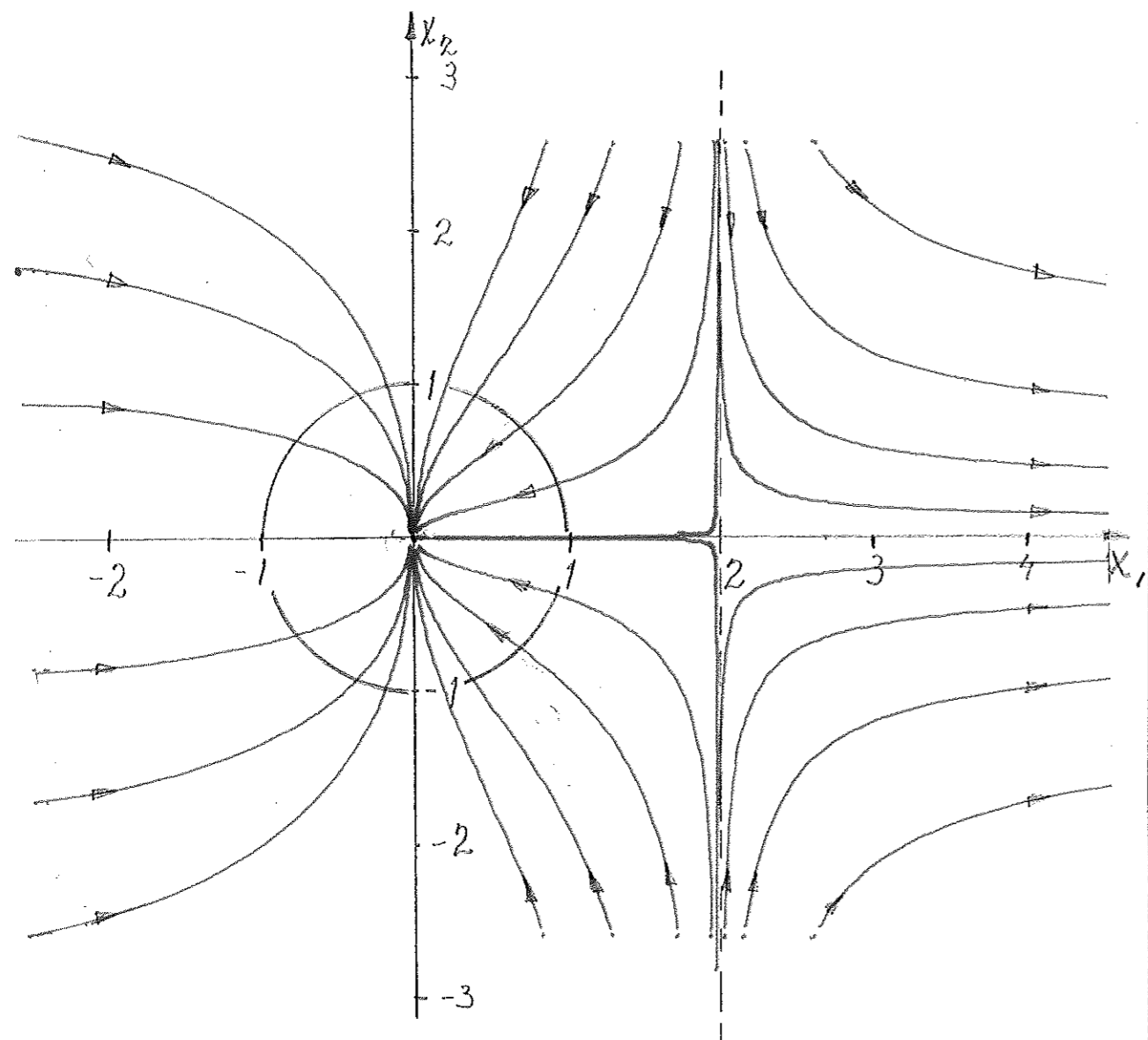


Fig 1.3.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Singulariteter

(0, 0)

(2, 0)

Typ

stabil tvåtg nod

sadelpkt

Egenvektorer

(1, 0), (0, 1)

(1, 0), (0, 1)

Numeriskt exempel 1.3.b

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (\text{origo stabil tvåtåg nod}).$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \text{ ger } \text{singulära pktr } \begin{cases} (x_1, x_2) = (0, 0) \\ (x_1, x_2) = (0, 1) \end{cases}$$

Utveckla kring singulariteten:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Vi får direkt diagonalform. Singulariteten är en sadelpunkt.

Stab. omr. enligt [4] blir

$$x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{4}$$

I själva verket råder stabilitet för $x_2 < 1$.

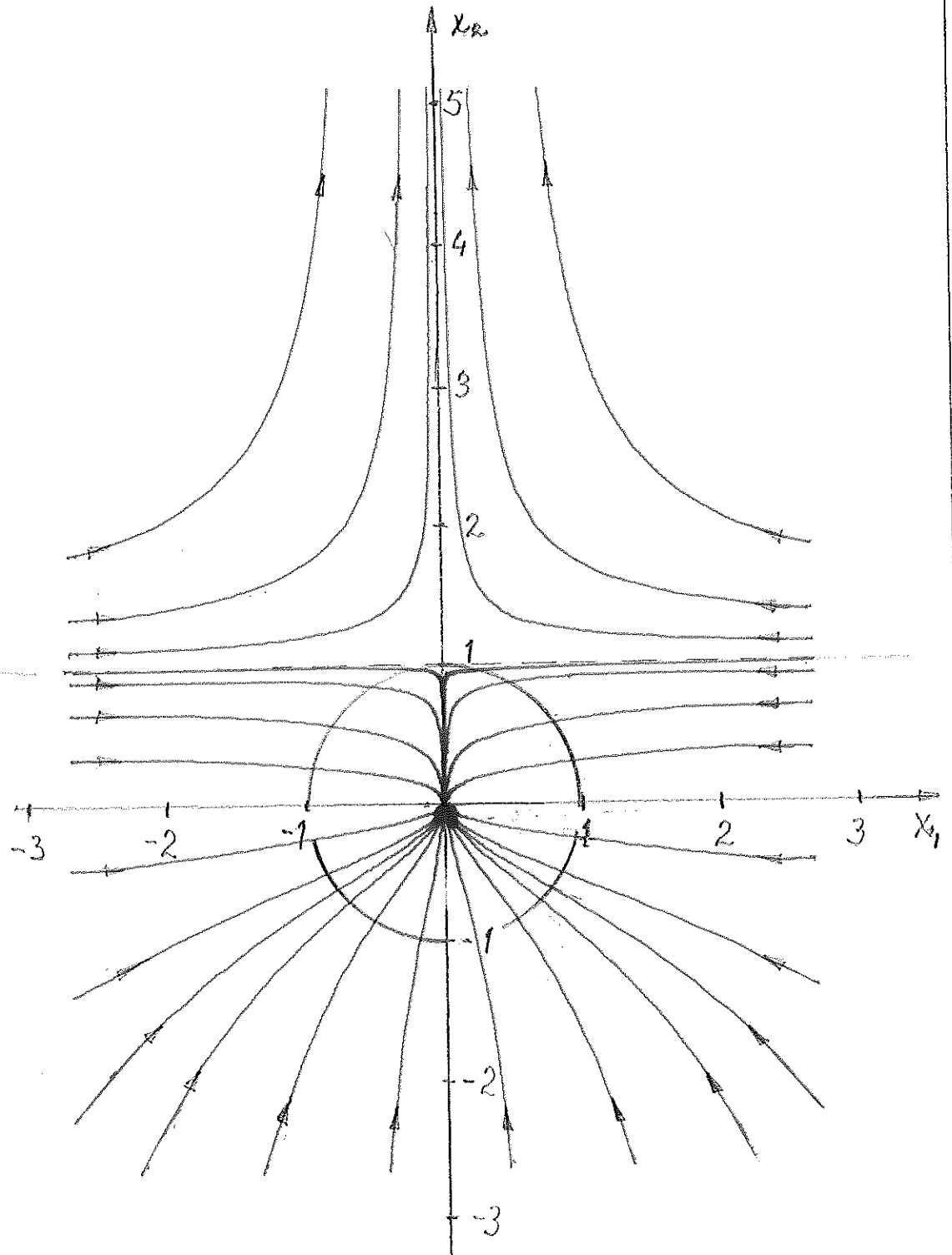


Fig 1.3.b

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Singulariteter

(0, 0)

(0, 1)

Typ

stabil tvåtg nod

sadelpkt

Egenvektorer

(1, 0), (0, 1)

(1, 0), (0, 1)

Numeriskt exempel 1.4.a

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \quad (\text{origo stabil tvåtg nod}).$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{singulära pktr} \quad \begin{array}{l} 1. \quad (x_1, x_2) = (0, 0) \\ 2. \quad (x_1, x_2) = (1, 1) \\ 3. \quad (x_1, x_2) = (0, 1) \\ 4. \quad (x_1, x_2) = (1, 0) \end{array} \quad \text{enl. ekvn (3.1.)}$$

Utveckl. ^{lingarna} kring singulariteterna blir enl. ekvn (3.2.)

$$\begin{array}{l} 2. \quad \dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} 2z_1^2 \\ z_2^2 \end{pmatrix} \quad (\text{instabil tvåtg nod}) \\ 3. \quad \dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} 2z_1^2 \\ z_2^2 \end{pmatrix} \quad (\text{sadelpkt}) \\ 4. \quad \dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} 2z_1^2 \\ z_2^2 \end{pmatrix} \quad (\text{sadelpkt}) \end{array}$$

Vi får direkt diagonalform.

Stab. omr. enligt [4] blir

$$\left(x_1^2 + x_2^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\max(1, 2)} = \frac{1}{2}$$

Asymptotiskt uppförande

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2 + x_2^2}{-2x_1 + 2x_1^2}$$

$$\begin{array}{l} 1. \quad x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow \pm \infty \quad \frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \pm \infty \\ 2. \quad x_2 \rightarrow 0, x_1 \rightarrow \pm \infty \quad \frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 0 \\ 3. \quad x_1 = x_2, x_1 \rightarrow \pm \infty \quad \frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \frac{1}{2} \\ 4. \quad x_1 = -x_2, x_1 \rightarrow \pm \infty \quad \frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \frac{1}{2} \end{array}$$

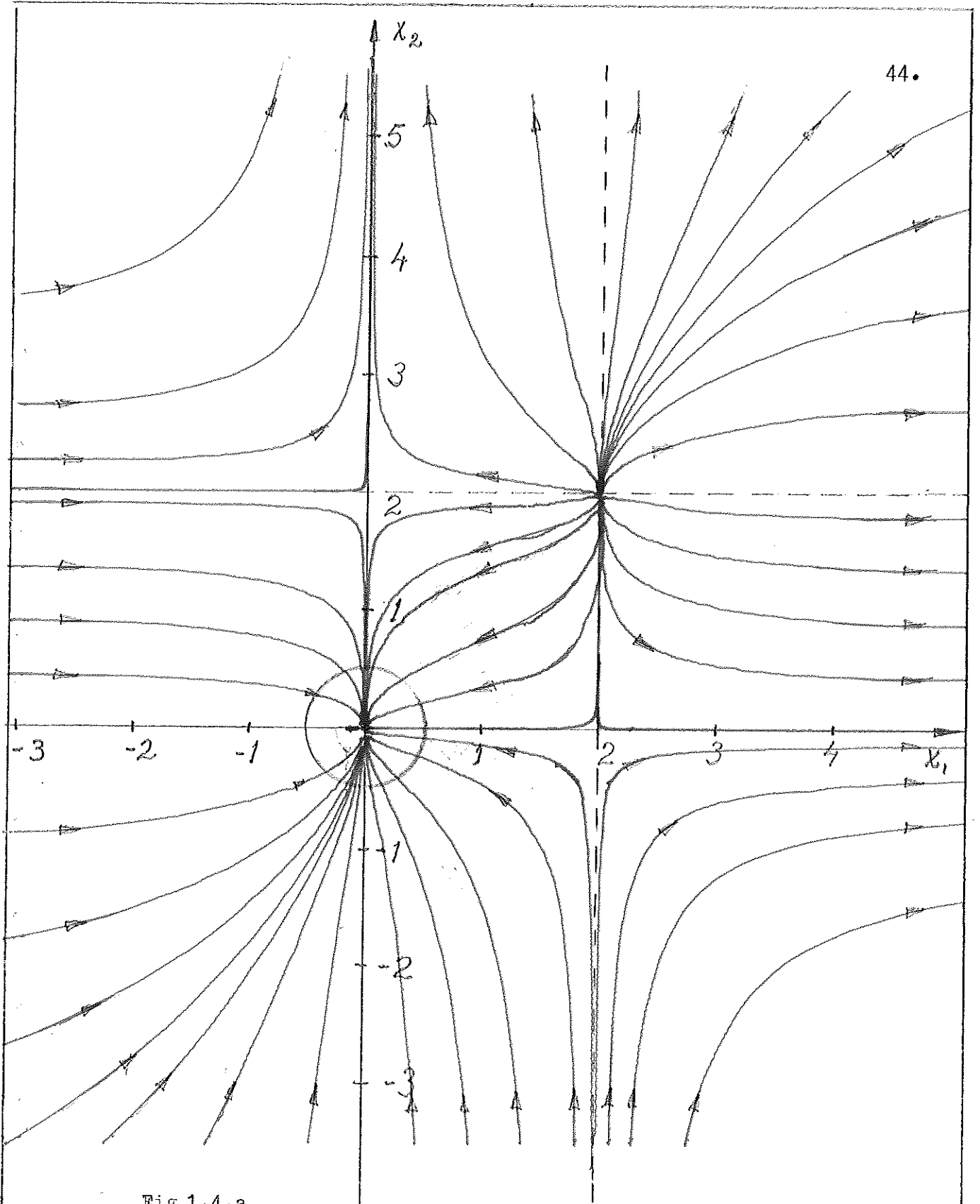


Fig 1.4.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Singulariteter

$(0, 0)$
 $(1, 1)$
 $(0, 1)$
 $(1, 0)$

Typ

stabil tvåtg nod
 instabil tvåtg nod
 sadlpkt
 sadälpkt

Egenvektorer

$(1, 0), (0, 1)$
 $(1, 0), (0, 1)$
 $(1, 0), (0, 1)$
 $(1, 0), (0, 1)$

Numeriskt exempel 1.5.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1^2 + 0.1x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (origo stabil tvätg nod)}$$

Enligt ekvn (3.3.) är singulariteten en sadelpkt.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \text{ ger singulära pktr } \begin{cases} (x_1, x_2) = (0, 0) \\ (x_1, x_2) = (2, 0) \end{cases}$$

Sätt $\begin{cases} z_1 = x_1 - 2 \\ z_2 = x_2 \end{cases}$ och utveckla. Man får

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0.2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_B z + \begin{pmatrix} z_1^2 + 0.1z_1 z_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till B blir $s_1 = 2$ och $s_2 = -1$.

Egenvektorerna fås ur $Be_1 = s_1 e_1$ och $Be_2 = s_2 e_2$

och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (instabila)}$$

enligt ekvn (3.4.)

$$e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -15 \end{pmatrix} \text{ (stabila)}$$

Stab.omr.enligt [4] blir

$$x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{\sqrt{1 + 0.1^2}} = 1$$

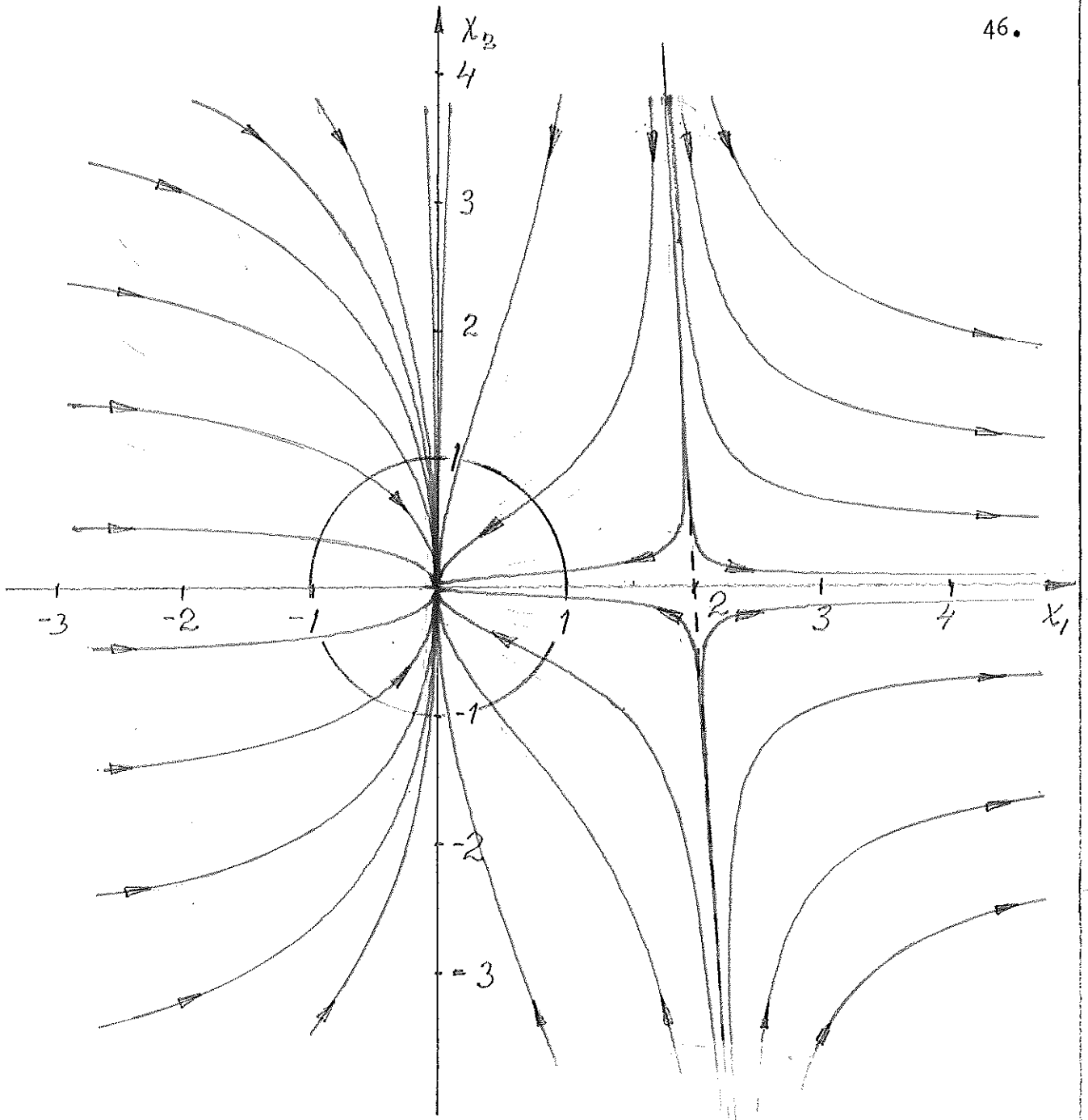


Fig 1.5.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1^2 + 0.1x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Singularitet $(0,0)$ $(2,0)$ Typ

stabil tvåtg nod

sadelpkt

Egenvektorer $(1,0)$, $(0,1)$ $(1,0)$, $(1,-15)$

Numeriskt exempel 1.5.b

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1^2 + x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{origo stabil tvåtåg nod})$$

Enligt ekvn (3.3.) är singulariteten en sadelpkt.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \text{ ger singulära pktr } \begin{cases} (x_1, x_2) = (0, 0) \\ (x_1, x_2) = (2, 0) \end{cases}$$

Sätt $\begin{cases} z_1 = x_1 - 2 \\ z_2 = x_2 \end{cases}$ och utveckla. Man får

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_B z + \begin{pmatrix} z_1^2 + z_1 z_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till B blir $s_1 = 2$ och $s_2 = -1$.

Egenvektorererna fås ur $Be_1 = s_1 e_1$ och $Be_2 = s_2 e_2$

och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{instabila})$$

enligt ekvn (3.3.)

$$e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.5 \end{pmatrix} \quad (\text{stabila})$$

Stab. omr. enligt [4] blir

$$(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Asymptotiskt uppförande

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2}{-2x_1 + x_1^2 + x_1 x_2}$$

1.	$x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow \pm \infty$	$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \pm \infty$
2.	$x_2 \rightarrow 0, x_1 \rightarrow \pm \infty$	$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 0$
3.	$x_1 = x_2, x_1 \rightarrow \pm \infty$	$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \pm \frac{1}{2}$
4.	$x_1 = -x_2, x_1 \rightarrow \pm \infty$	$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{2}$

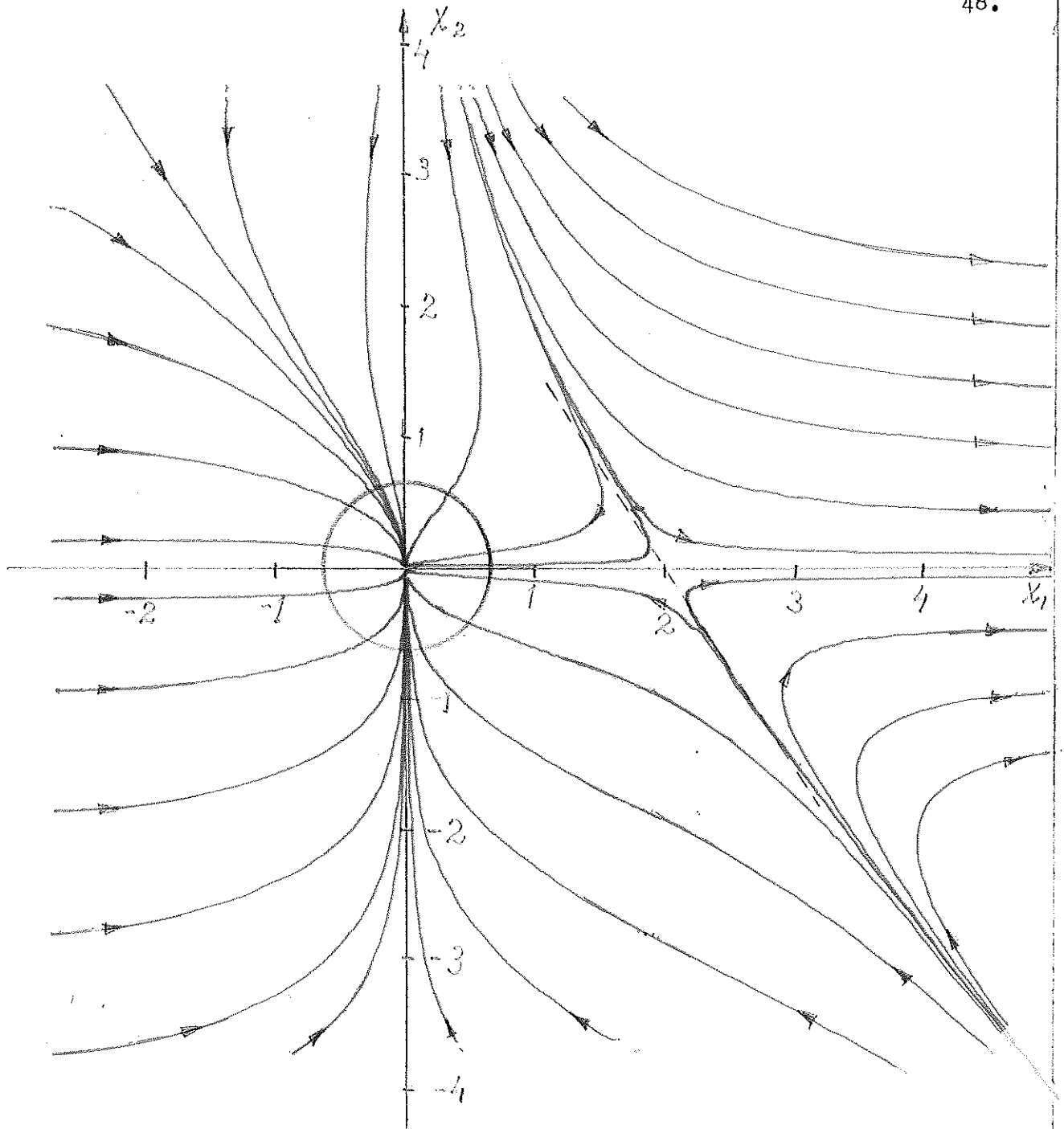


Fig 1.5.b

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1^2 + x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SingularitetTypEgenvektorer

(0, 0)

stabil tvåtg nod

(1,0) ; (0,1)

(2,0)

saddlpkt

(1,0) , (1,-1.5)

Numeriskt exempel 1.6.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2x_1^2 + x_1 x_2 \\ \frac{1}{3}x_1 x_2 + x_2^2 \end{pmatrix} \quad (\text{origo stabil tvätg nod})$$

$\dot{x}_1 = 0$ ger

$$(-2 + 2x_1 + x_2)x_1 = 0$$

Alltså är $\dot{x}_1 = 0$ på linjerna

$$x_1 = 0 \quad \text{och} \quad x_2 = 2 - 2x_1$$

På samma sätt är $\dot{x}_2 = 0$ på linjerna

$$x_2 = 0 \quad \text{och} \quad x_2 = 1 - \frac{1}{3}x_1$$

De singulara punkterna $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$ fås ur dessa linjers skärning:

$$(x_1, x_2) = (0, 0)$$

$$(x_1, x_2) = (0.667, 0.667)$$

$$(x_1, x_2) = (1, 0)$$

$$(x_1, x_2) = (0, 1)$$

se ekvn (3.5.)

Utveckla kring (0.667, 0.667). Enligt ekvn (3.6.) fås

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1.333 & 0.667 \\ 0.333 & 0.667 \end{pmatrix}}_B z + \begin{pmatrix} 2z_1^2 + z_1 z_2 \\ \frac{1}{3}z_1 z_2 + z_2^2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till B blir $s_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ och $s_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

dvs singulariteten är en instabil tvätg nod.

Egenvektorerna blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.366 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.365 \end{pmatrix}$$

Utveckla kring (1, 0). Enligt ekvn (3.7.) fås

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 2z_1^2 + z_1 z_2 \\ \frac{1}{3}z_1 z_2 + z_2^2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena blir $s_1 = 2$ och $s_2 = -\frac{1}{2}$ dvs vi har en sadelpkt.

Egenvektorerna blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{instabila}) \quad \text{och} \quad e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2.5 \end{pmatrix} \quad (\text{stabila}).$$

Utveckla kring (0, 1). Enligt ekvn (3.8.) fås

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 2z_1^2 + z_1 z_2 \\ \frac{1}{3}z_1 z_2 + z_2^2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena blir $s_1 = -1$ och $s_2 = -1$ dvs vi har även här en sadelpkt. Egenvektorerna blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{instabila}) \quad \text{och} \quad e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{stabila}).$$

Stabilitetsområde enligt [4]:

$$\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\max(\sqrt{2^2+1}, \sqrt{1 + \frac{1}{2}^2})} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Asymptotiskt uppförande

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2 + \frac{1}{2}x_1 x_2 + x_2^2}{-2x_1 + 2x_1^2 + x_1 x_2}$$

1. $x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow \pm\infty$

$$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \pm\infty$$

2. $x_2 \rightarrow 0, x_1 \rightarrow \pm\infty$

$$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \pm\infty$$

3. $x_1 = x_2, x_1 \rightarrow \pm\infty$

$$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

4. $x_1 = -x_2, x_1 \rightarrow \pm\infty$

$$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

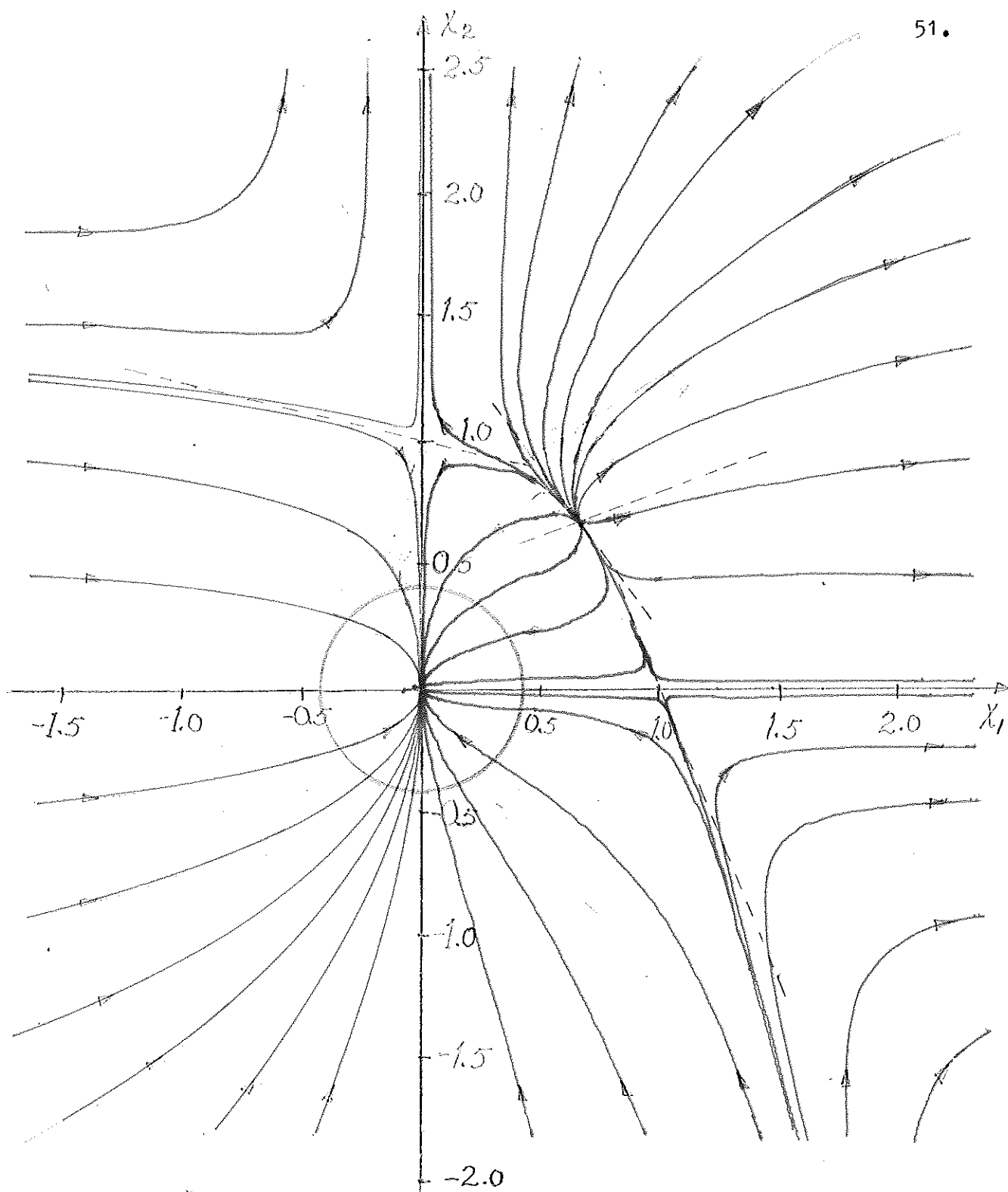


Fig 1.6.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2x_1^2 + x_1 x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 x_2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

Singulariteter

Typ

Egenvektorer

$(0,0)$	stabil tvått nod	$(1; 0)$, $(0, 1)$
$(0.667, 0.667)$	instabil tvått nod	$(1, 0.366)$, $(1, -1.365)$
$(1, 0)$	sadelpkt	$(1, 0)$, $(1, -2.5)$
$(0, 1)$	sadelpkt	$(0, 1)$, $(4, -1)$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2x_1^2 + 0.1x_1 x_2 \\ 0.1x_1 x_2 + x_2^2 \end{pmatrix} \text{ (origo stabil tvätg nod)}$$

$\dot{x}_1 = 0$ ger sambandet $(-2 + 2x_1 + 0.1x_2)x_1 = 0$ dvs $\dot{x}_1 = 0$ på linjerna $x_1 = 0$ och $x_2 = 20 - 20x_1$.

På samma sätt är $\dot{x}_2 = 0$ på linjerna $\dot{x}_2 = 0$ och $x_2 = 1 - 0.1x_1$. De singulära punkterna $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$ fås ur dessa linjers skärning och blir (se även ekvn(3.5.))

$$(x_1, x_2) = (0, 0)$$

$$(x_1, x_2) = (0.954, 0.904)$$

$$(x_1, x_2) = (1, 0)$$

$$(x_1, x_2) = (0, 1)$$

Utveckla kring $(0.954, 0.904)$. Man får enl ekvn(3.6.)

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1.9084 & 0.0954 \\ 0.0904 & 0.9044 \end{pmatrix}}_B z + \begin{pmatrix} 2z_1^2 + 0.1z_1 z_2 \\ 0.1z_1 z_2 + z_2^2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till B blir $s_1 = 1.918$ och $s_2 = 0.894$ dvs vi har en instabil tvätg nod. Egenvektorerna fås ur $Be_1 = s_1 e_1$ och $Be_2 = s_2 e_2$ och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.6 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10.6 \end{pmatrix}$$

Utveckla kring $(1, 0)$. Man får enl ekvn(3.7.)

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0.050 \\ 0 & -0.900 \end{pmatrix}}_C z + \begin{pmatrix} 2z_1^2 + 0.1z_1 z_2 \\ 0.1z_1 z_2 + z_2^2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till C blir $s_1 = 2$ och $s_2 = -0.900$ dvs denna singularitet är en sadelpunkt. Egenvektorerna fås ur

$Ce_1 = s_1 e_1$ och $Ce_2 = s_2 e_2$ och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (instabila)} \text{ och } e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -58 \end{pmatrix} \text{ (stabila).}$$

Utveckla kring $(0, 1)$. Man får enl ekvn(3.8.)

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1.900 & 0 \\ 0.100 & 1 \end{pmatrix}}_D z + \begin{pmatrix} 2z_1^2 + 0.1z_1 z_2 \\ 0.1z_1 z_2 + z_2^2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till D blir $s_1 = 1$ och $s_2 = -1.900$ alltså även här är singulariteten en sadelpunkt. Egenvektorerna fås ur $De_1 = s_1 e_1$ och $De_2 = s_2 e_2$ och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (instabila)} \text{ och } e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29.0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (stabila).}$$

Stab. omr. enligt [4] blir

$$\left(x_1^2 + x_2^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\max(\sqrt{2^2 + 0.1^2}, \sqrt{1^2 + 0.1^2})} \approx \frac{1}{2}$$

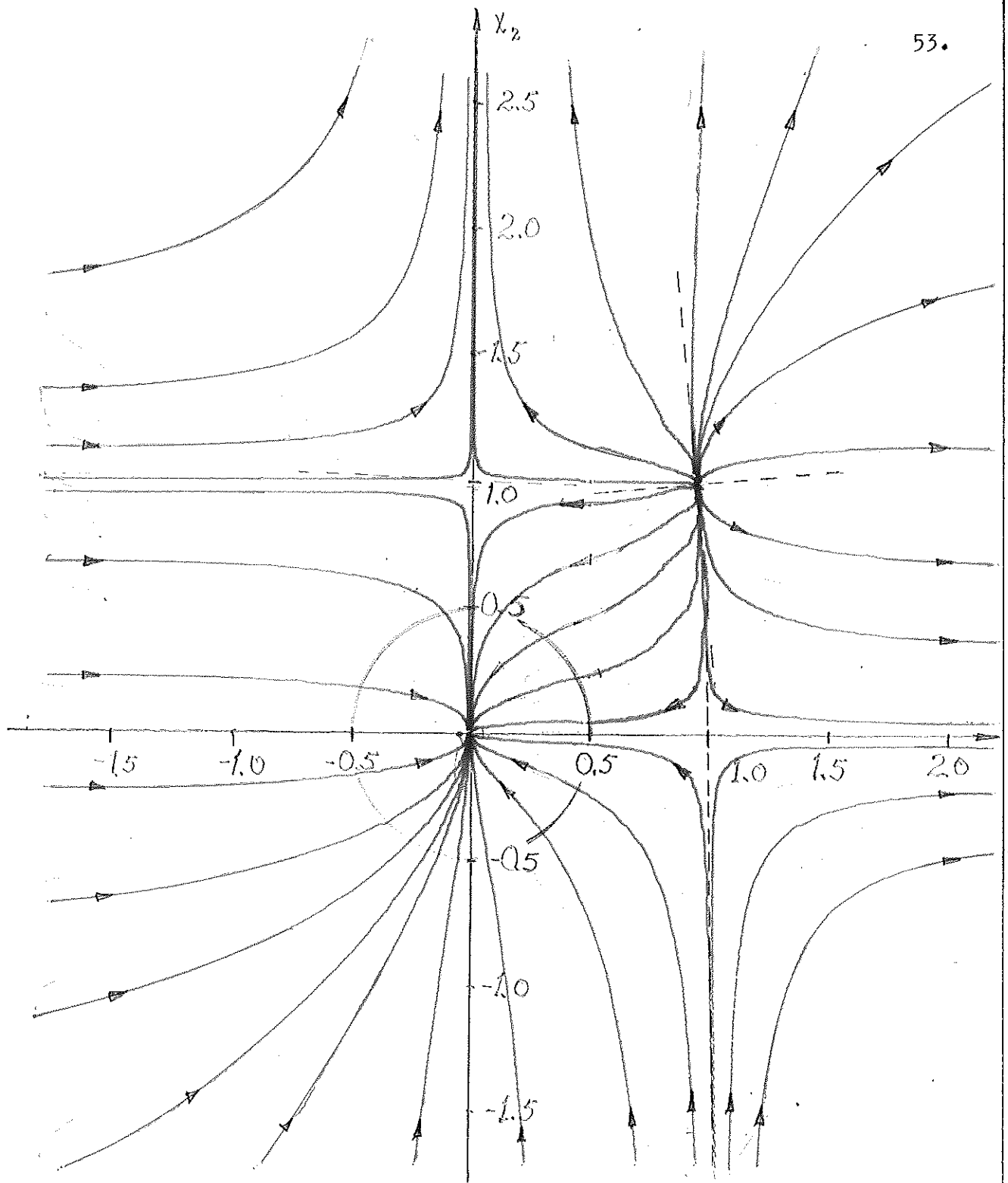


Fig 1.6.b

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2x_1^2 + 0.1x_1x_2 \\ 0.1x_1x_2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

<u>Singularitet</u>	<u>Typ</u>	<u>Egenvektorer</u>
(0,0)	stabil tvåtg nod	(1,0) , (0,1)
(0.954 ,0.904)	instabil tvåtg nod	(10.6,1) , (1,-10.6)
(1,0)	sadelpkt	(1,0) , (1 , -58.0)
(0,1)	sadelpkt	(-29.0 ,1) , (0,1)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2x_1^2 + 2x_1 x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 x_2 + x_2^2 \end{pmatrix} \text{ (origo stabil tvåtåg nod)}$$

$\dot{x}_1 = 0$ ger sambandet $(-10 + 2x_1 + 2x_2)x_1 = 0$ dvs $\dot{x}_1 = 0$ på linjerna $x_1 = 0$ och $x_2 = 5 - x_1$,

På samma sätt är $\dot{x}_2 = 0$ på linjerna $x_2 = 0$ och

$$x_2 = 1 - \frac{1}{2}x_1,$$

De singulära punkterna $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$ fås ur dessa linjers skärning

och blir

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &= (0, 0) \\ (x_1, x_2) &= (8, -3) \\ (x_1, x_2) &= (5, 0) \\ (x_1, x_2) &= (0, 1) \end{aligned} \text{ enligt ekvn (3.5.)}$$

Utveckla kring $(8, -3)$. Enligt ekvn (3.6.) fås

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 16 & 16 \\ -1.5 & -3 \end{pmatrix}}_B z + \begin{pmatrix} 2z_1^2 + 2z_1 z_2 \\ \frac{1}{2}z_1 z_2 + z_2^2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till B blir $s_1 = 14.64$ och $s_2 = -1.64$, dvs singulariteten är en sadelpkt. Egenvektorerna fås ur

$Be_1 = s_1 e_1$ och $Be_2 = s_2 e_2$ och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.085 \end{pmatrix} \text{ (instabila)} \text{ och } e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.102 \end{pmatrix} \text{ (stabila)}.$$

Utveckla kring $(5, 0)$. Enligt ekvn (3.7.) fås

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}}_C z + \begin{pmatrix} 2z_1^2 + 2z_1 z_2 \\ \frac{1}{2}z_1 z_2 + z_2^2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till C blir $s_1 = 10$ och $s_2 = 1.5$, dvs singulariteten

är en instabil tvåtåg nod. Egenvektorerna fås ur $Ce_1 = s_1 e_1$

och $Ce_2 = s_2 e_2$ och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.85 \end{pmatrix}.$$

Utveckla kring $(0, 1)$. Man får enligt ekvn (3.8.)

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_D z + \begin{pmatrix} 2z_1^2 + 2z_1 z_2 \\ \frac{1}{2}z_1 z_2 + z_2^2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till D blir $s_1 = 1$ och $s_2 = -8$, dvs singulariteten

är en sadelpkt. Egenvektorerna fås ur $De_1 = s_1 e_1$ och $De_2 = s_2 e_2$

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (instabila)} \text{ och } e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ (stabila)}.$$

Stab. omr. enligt [4] blir

$$\left(x_1^2 + x_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\max \left(\sqrt{2^2 + 2^2}, \sqrt{1 + \frac{1}{2}} \right)} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

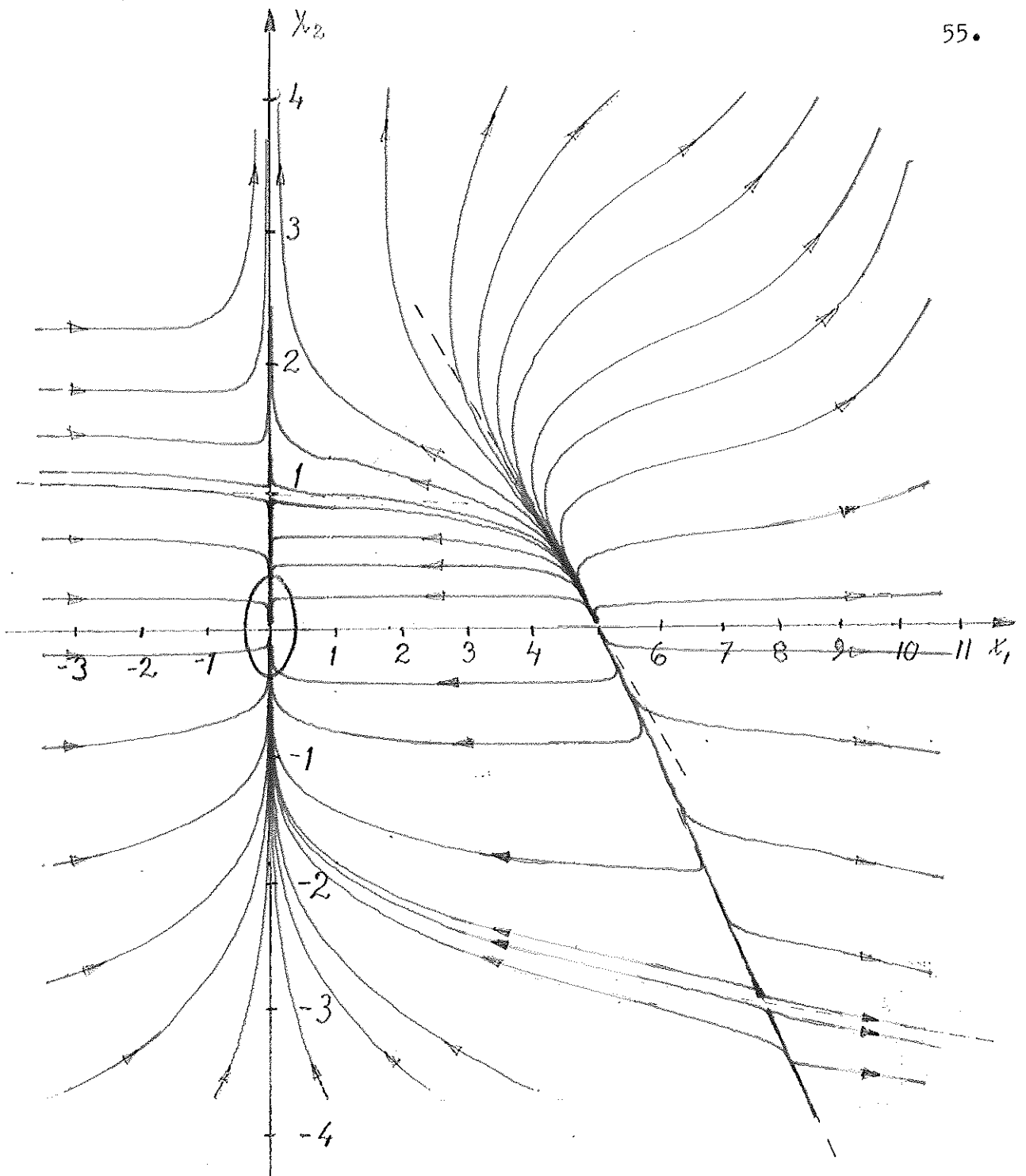


Fig 1.6.c

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2x_1^2 + 2x_1 x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 x_2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

Singularitet	Typ	Egenvektorer
(0, 0)	stabil tvåtg nod	(1, 0), (0, 1)
(8, -3)	sadelpkt	(1, -0.035), (1, -1.102)
(5, 0)	instabil tvåtg nod	(1, 0), (1, -0.850)
(0, 1)	sadelpkt	(0, 1), (18, -1)

Numeriskt exempel 1.7.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Endast origo är singular punkt.

Asymptotiskt uppförande

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2}{-2x_1 + x_2^2}$$

- | | | |
|----|--|-----------------------------------|
| 1. | $x_1 \rightarrow 0$, $x_2 \rightarrow \pm \infty$ | $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 0$ |
| 2. | $x_2 \rightarrow 0$, $x_1 \rightarrow \pm \infty$ | $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 0$ |
| 3. | $x_1 = x_2$, $x_1 \rightarrow \pm \infty$ | $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 0$ |
| 4. | $x_1 = -x_2$, $x_1 \rightarrow \pm \infty$ | $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 0$ |

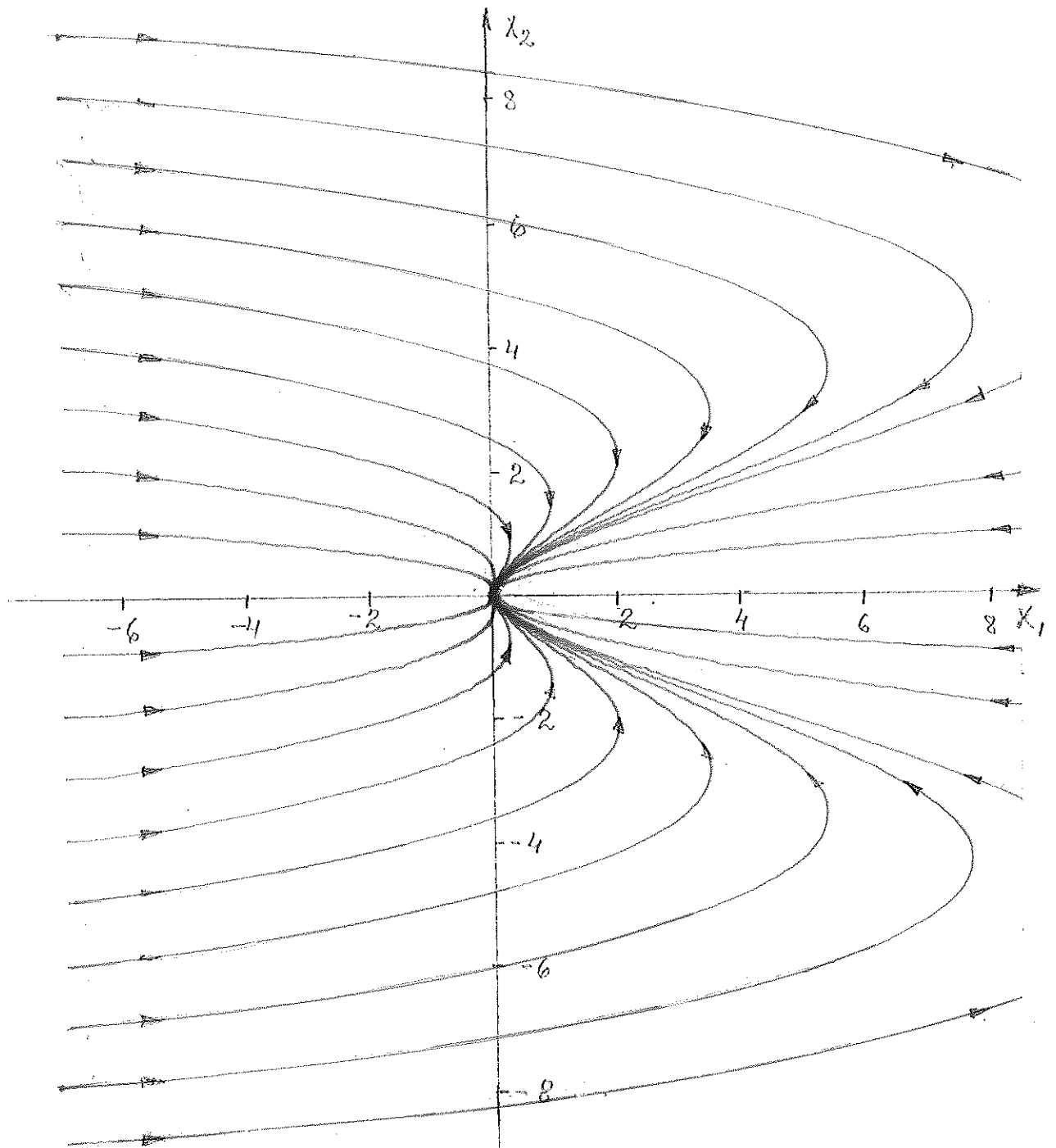


Fig 1.7.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ena singularitet (i origo) stabil tváts nod.

Numeriskt exempel 1.8.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (\text{origo stabil tvåtg nod})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \text{ ger singulära pkt. Den blir enlekvn (3.9.)}$$

$(x_1, x_2) = (1, 1)$ och är enlekvn (3.10.) en sadelpkt.

Sätt $\begin{cases} z_1 = x_1 - 1 \\ z_2 = x_2 - 1 \end{cases}$ och utveckla. Man får

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_B z + \begin{pmatrix} 2z_2^2 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till B blir $s_1 = 1.37$ och $s_2 = -4.37$.

Egenvektorerna fås ur $Be_1 = s_1 e_1$ och $Be_2 = s_2 e_2$ och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.842 \end{pmatrix} \quad (\text{instabila})$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.593 \end{pmatrix} \quad (\text{stabila}) .$$

Asymptotiskt uppförande

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2 + x_1^2}{-2x_1 + 2x_2^2}$$

- | | | |
|----|---|---|
| 1. | $x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow \pm \infty$ | $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 0$ |
| 2. | $x_2 \rightarrow 0, x_1 \rightarrow \pm \infty$ | $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \pm \infty$ |
| 3. | $x_1 = x_2, x_1 \rightarrow \pm \infty$ | $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \frac{1}{2}$ |
| 4. | $x_1 = -x_2, x_1 \rightarrow \pm \infty$ | $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \frac{1}{2}$ |

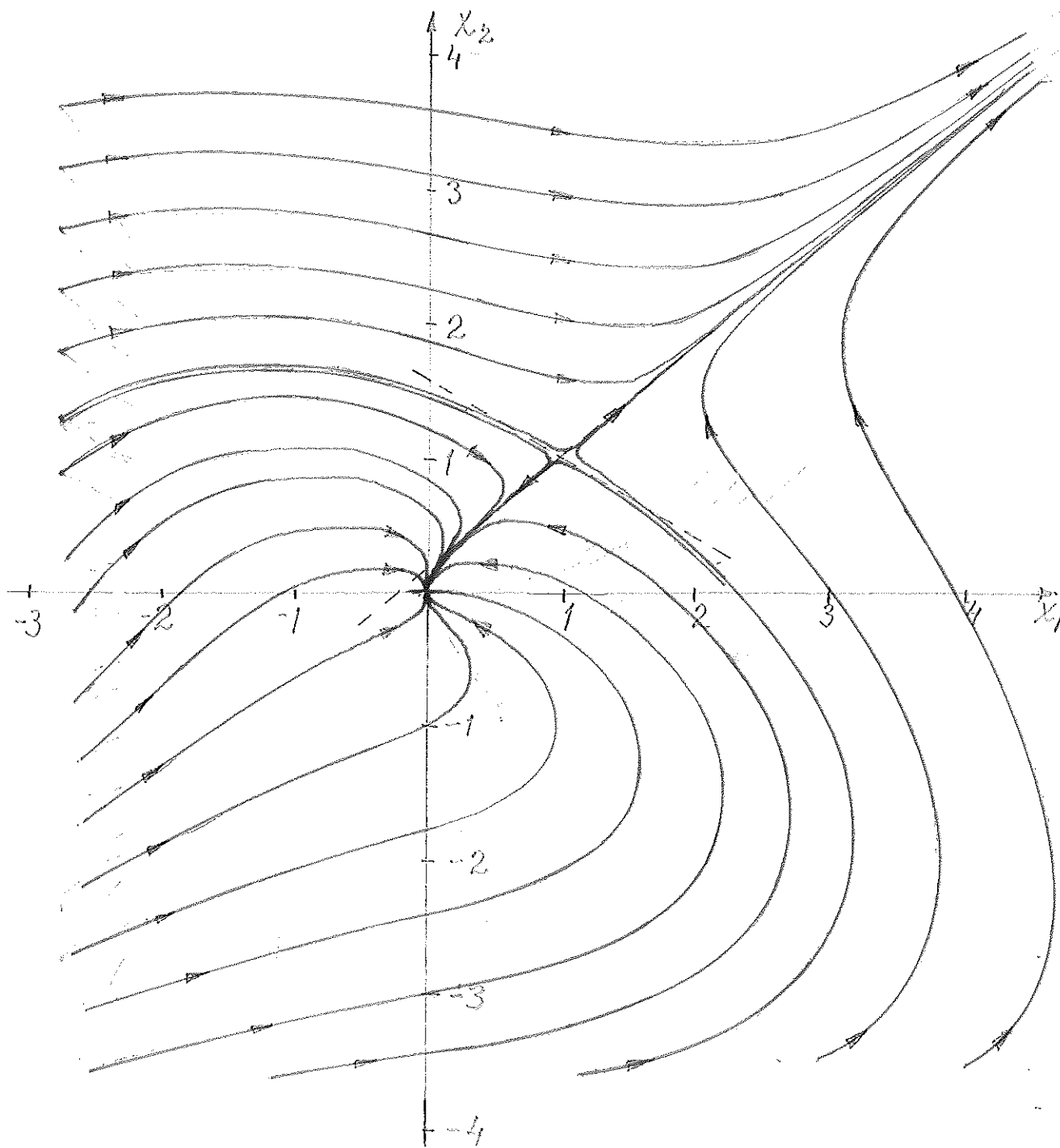


Fig 1.8.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2x_2^2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$$

Singularitet

(0,0)

(1,1)

Typ

stabil tvåtg nod

sadelpkt

Egenvektorer

(1,0) , (0,1)

(1,0.842), (1,-0.593)

Numeriskt exempel 1.8.b

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (\text{origo sadelpkt})$$

$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$ ger singulära pkt. Den blir enl ekvn (3.9.)

$(x_1, x_2) = (1, -1)$ och är enl ekvn (3.11.) ett fokus.

Sätt $\begin{matrix} z_1 = x_1 - 1 \\ z_2 = x_2 + 1 \end{matrix}$ och utveckla. Man får

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ \underbrace{2 \quad 1}_B \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 2z_2^2 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till B blir $s_1 = -0.5 + j2.40$ och $s_2 = -0.5 - j 2.40$
dvs singulariteten är ett stabilt fokus.

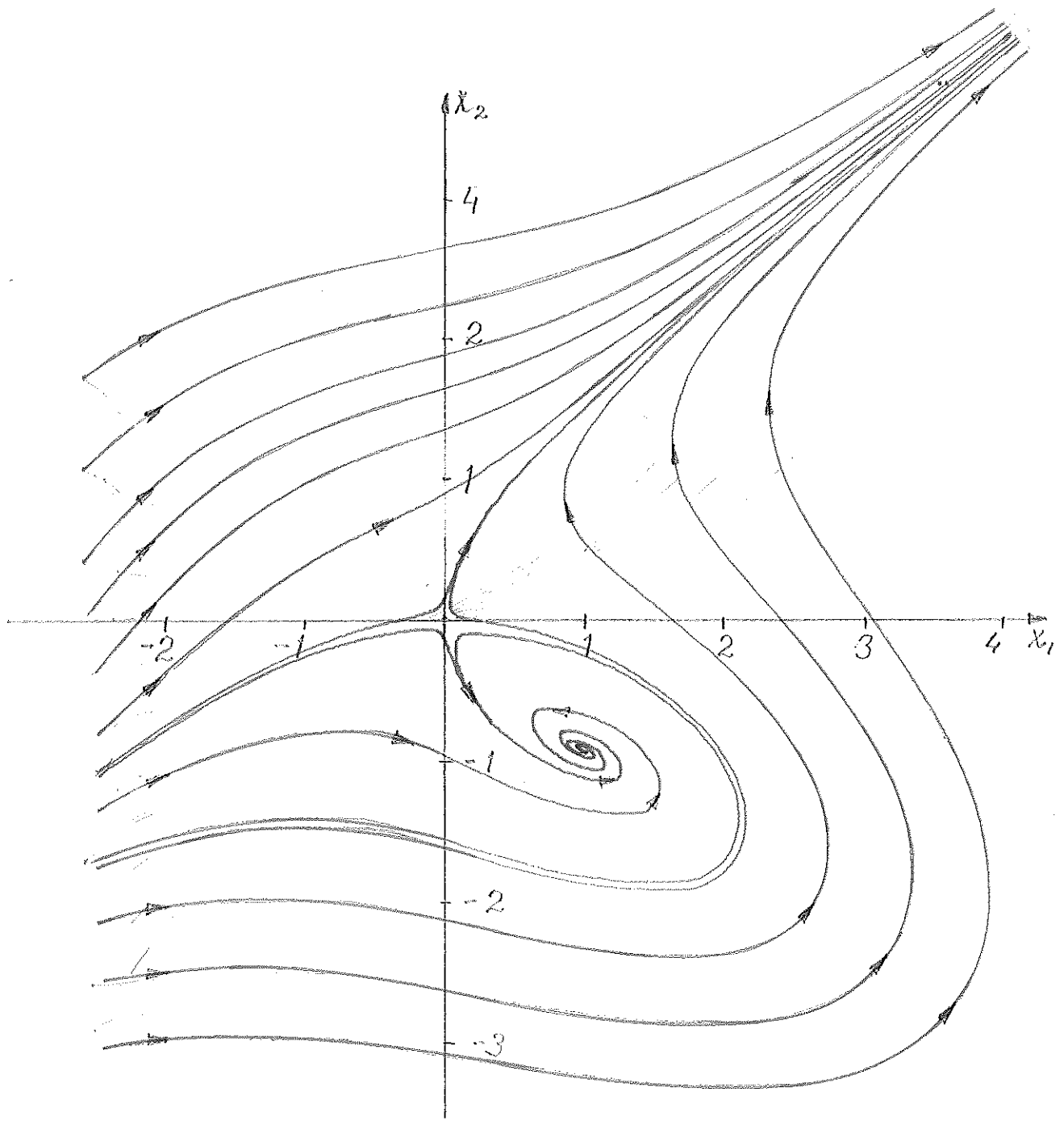


Fig 1.8.b

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2x_2^2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$$

Singularitet

(0,0)
(1,-1)

Typ

sadelpkt
stabilt fokus

Egenvektorer

(1,0) , (0,1)

Numeriskt exempel 1.9.a

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} x_1 x_2 + x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser att endast origo är singular punkt.

Asymptotiskt uppförande

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2}{-2x_1 + x_1 x_2 + x_2^2}$$

$$1. \quad x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow \pm\infty$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 0$$

$$2. \quad x_2 \rightarrow 0, x_1 \rightarrow \pm\infty$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 0$$

$$3. \quad x_1 = x_2, x_1 \rightarrow \pm\infty$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 0$$

$$4. \quad x_1 = -x_2, x_1 \rightarrow \pm\infty$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{2}$$

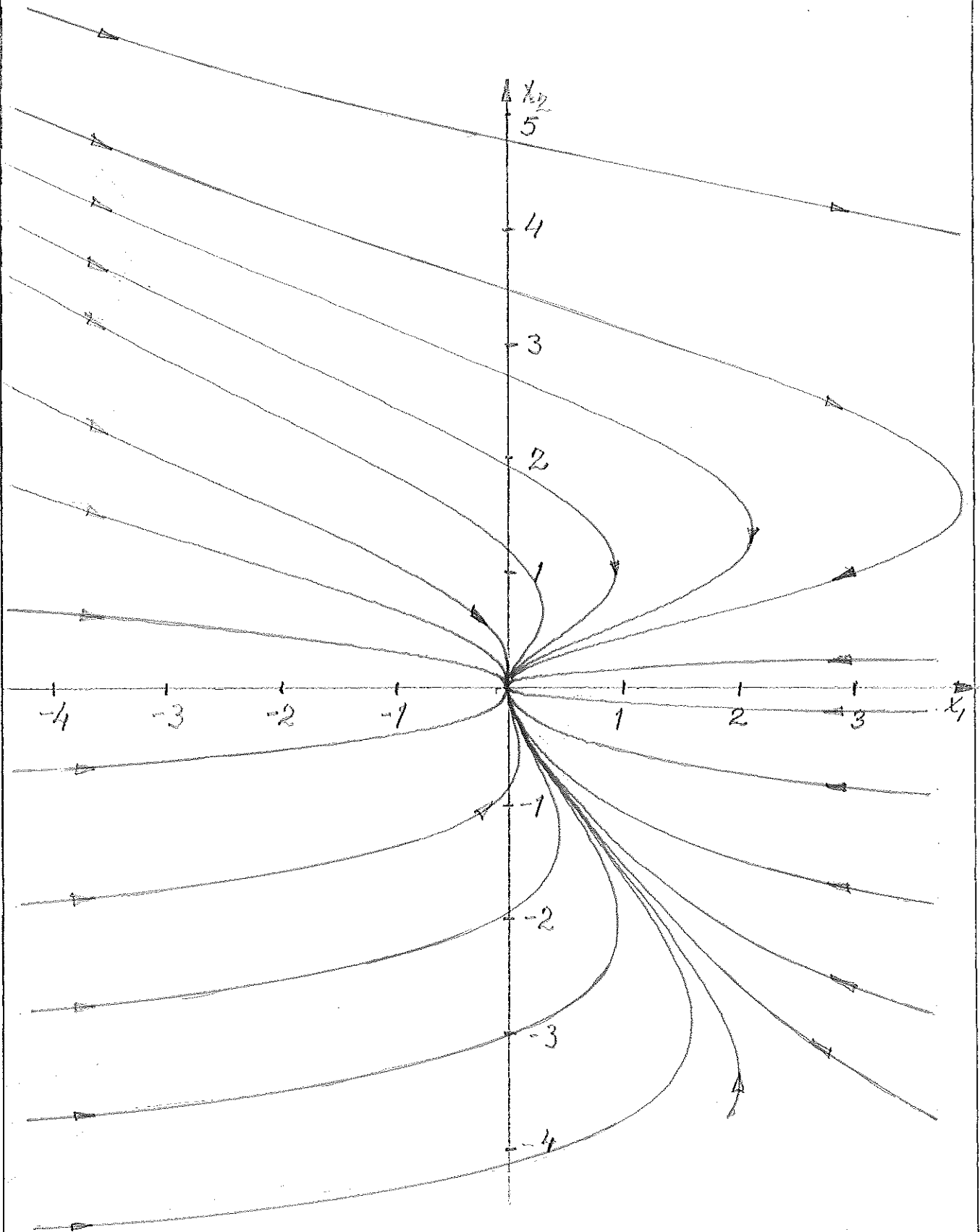


Fig 1.9.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1 x_2 + x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Enda singularitet (i origo) stabil två tg nod.

4.2. Fasplan: Komplexa egenvärden.

Gemensamt för dessa fasplan är att matrisen A i grund-
ekvationen har utseendet $\begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$, dvs egenvärdena i origo
är komplexa. Origo är då center eller fokus.

För att få en uppskattning av stabilitetsområdet sättes
i [4] $y = Tx$ så att $\Lambda = TAT^{-1}$ diagonal. Som Lyapunov-
funktion ansättes

$$V = y^+ y = x^+ T^+ T x$$

och stabilitetsområdet blir då

$$\|x\| \leq \frac{|\operatorname{Re} \lambda_2| \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}}{\max_i \sqrt{\sum_j b_{ij}^2}}$$

λ_1 och λ_2 är egenvärden till A i grundekvationen med $|\operatorname{Re} \lambda_2| \leq$
 $\leq |\operatorname{Re} \lambda_1|$ och $\mu_2 \leq \mu_1$ egenvärden till symmetriska delen av
 $T^+ T$.

Vi söker nu T . A har egenvärdena $\sigma \pm i\omega$, dvs $\Lambda = \begin{pmatrix} \sigma + i\omega & 0 \\ 0 & \sigma - i\omega \end{pmatrix}$.
Detta ger med $TAT^{-1} = \Lambda$ att $T = \begin{pmatrix} a & -ia \\ b & ib \end{pmatrix}$. Vi kan t.ex. välja
 $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ och får $T^+ T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\mu_1 = \mu_2 = 1$, dvs stabilitets-
området blir $(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{|\sigma|}{\max_i \sqrt{\sum_j b_{ij}^2}}$.

Numeriskt exempel 2.1.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \text{ ger singulariteterna } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sätt $\begin{cases} z_1 = x_1 + 2 \\ z_2 = x_2 - 2 \end{cases}$ och utveckla. Man får

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_B z + \begin{pmatrix} z_1 z_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till B blir $s_1 = +2$ och $s_2 = -2$.

Egenvektorerna fås ur $Be_1 = s_1 e_1$ och $Be_2 = s_2 e_2$ och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \text{ och } e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}.$$

Asymptotiskt uppförande.

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{-x_1 - x_2}{-x_1 + x_2 + x_1 x_2}$$

$$1. \quad x_1 = 0, \quad x_2 \neq 0 \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -1$$

$$2. \quad x_2 = 0, \quad x_1 \neq 0 \quad \frac{dx_2}{dx_1} = +1$$

$$3. \quad x_1 = x_2, \quad x_1 \rightarrow \pm \infty \quad \frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 0$$

$$4. \quad x_1 = -x_2 \quad \frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

Stabilitetsområde enligt [4] blir

$$x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{4}$$

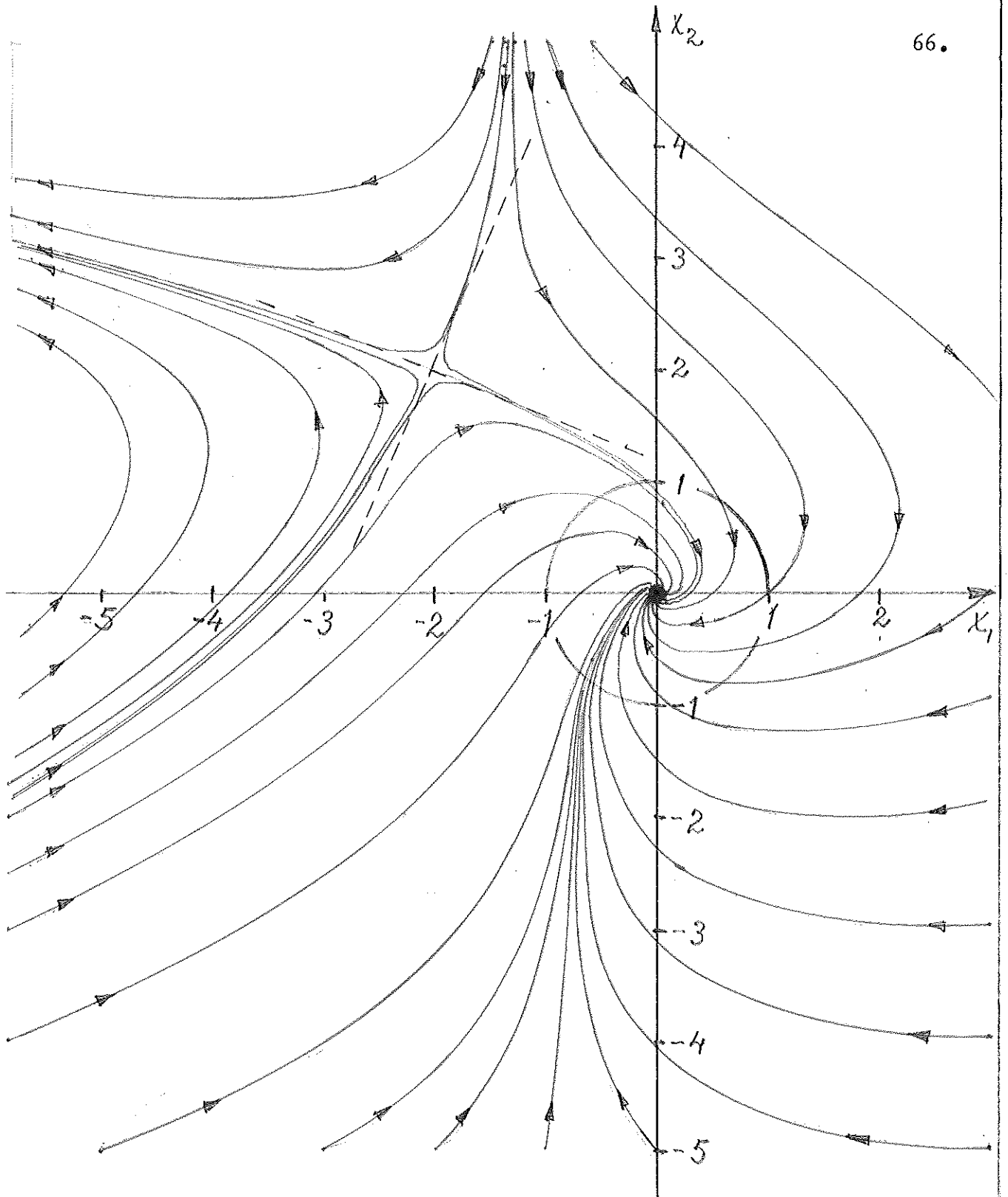


Fig 2.1.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Singularitet

(0 , 0)

(-2 , 2)

Typ

fokus

sadelpkt

Egenvektorer $(1, -\sqrt{2}+1), (1, \sqrt{2}+1)$

Numeriskt exempel 2.2.a

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} \quad (\text{origo center})$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \text{ ger enligt ekvn (3.12.) singulariteten } (x_1, x_2) = (-1, 1)$$

som enl ekvn (3.14.) är en sadelpkt.

Sätt $\begin{cases} z_1 = x_1 + 1 \\ z_2 = x_2 - 1 \end{cases}$ och utveckla. Man får

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} z_1 z_2 \\ z_1 z_2 \end{pmatrix}$$

Vi fick direkt diagonalform. Jämför med numeriskt ex 1.2.b.

Där var origo sadelpunkt och singulariteten $(-1, 2)$

ett center.

Asymptotiskt uppförande

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1 + x_1 x_2}{x_2 + x_1 x_2}$$

- | | | |
|----|---|--|
| 1. | $x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow \pm \infty$ | $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 0$ |
| 2. | $x_2 \rightarrow 0, x_1 \rightarrow \pm \infty$ | $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \infty$ |
| 3. | $x_1 = x_2, x_1 \rightarrow \pm \infty$ | $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 1$ |
| 4. | $x_1 = -x_2$ | $\frac{dx_2}{dx_1} = 1$ |

Stabilitetsområde enl [4] blir

$$x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{0}{1}$$

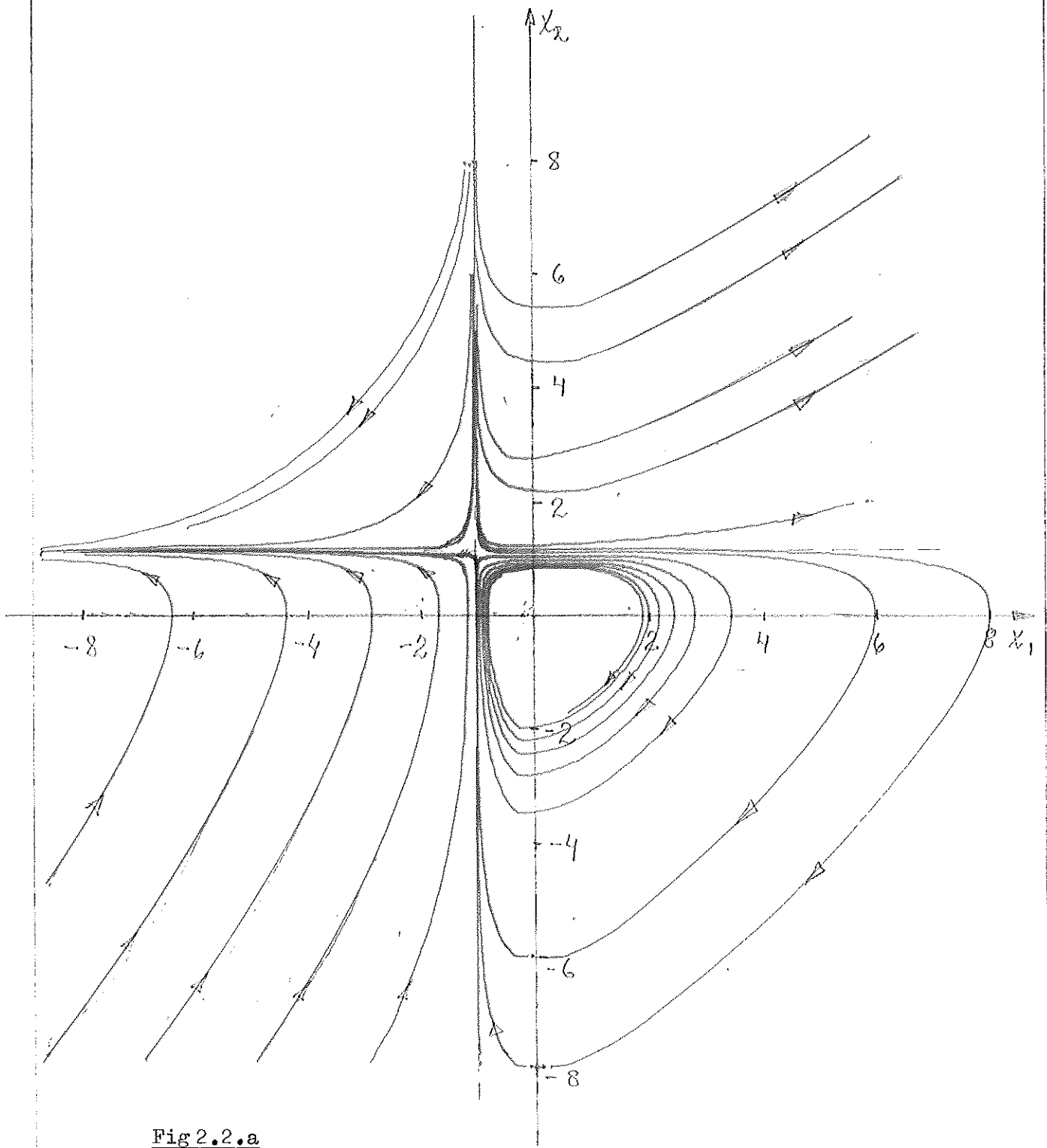


Fig2.2.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Singularitet

(0,0)

(-1,1)

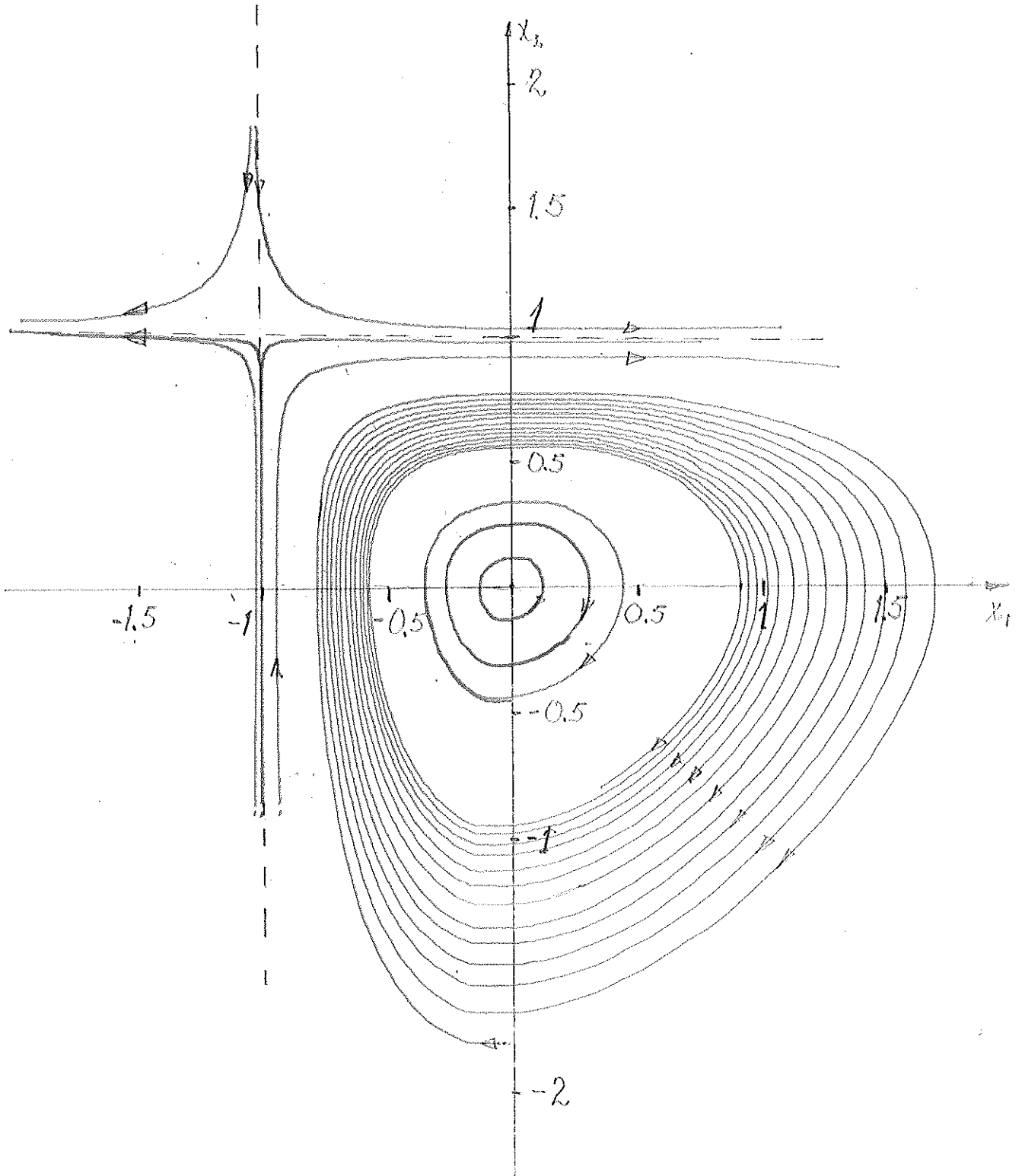
Typ

center

sadelpkt

Egenvektorer

(1,0) , (0,1)



Förstoring av fig 2.2.a.

Numeriskt exempel 2.2.b.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 2x_1 x_2 \end{pmatrix} \quad (\text{origo stabilt fokus})$$

$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$ ger singulära punkten. Den blir (jfr ekvn (3.12.))

$(x_1, x_2) = (2, 0.667)$ och är enl ekvn (3.14.) en sadelpunkt.

Sätt $\begin{cases} z_1 = x_1 - 2 \\ z_2 = x_2 - 0.667 \end{cases}$ och utveckla. Man får enl ekvn (3.13.)

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.333 & 3 \\ 0.333 & 3 \end{pmatrix}}_B z + \begin{pmatrix} z_1 z_2 \\ 2z_1 z_2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till B blir $s_1 = -3.277$ och $s_2 = -0.610$.

Egenvektorerna fås ur $Be_1 = s_1 e_1$ och $Be_2 = s_2 e_2$ och

blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.203 \end{pmatrix} \quad (\text{instabila})$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.83 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{stabila}).$$

Stabilitetsområde enligt [4] blir

$$\left(x_1^2 + x_2^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{2}$$

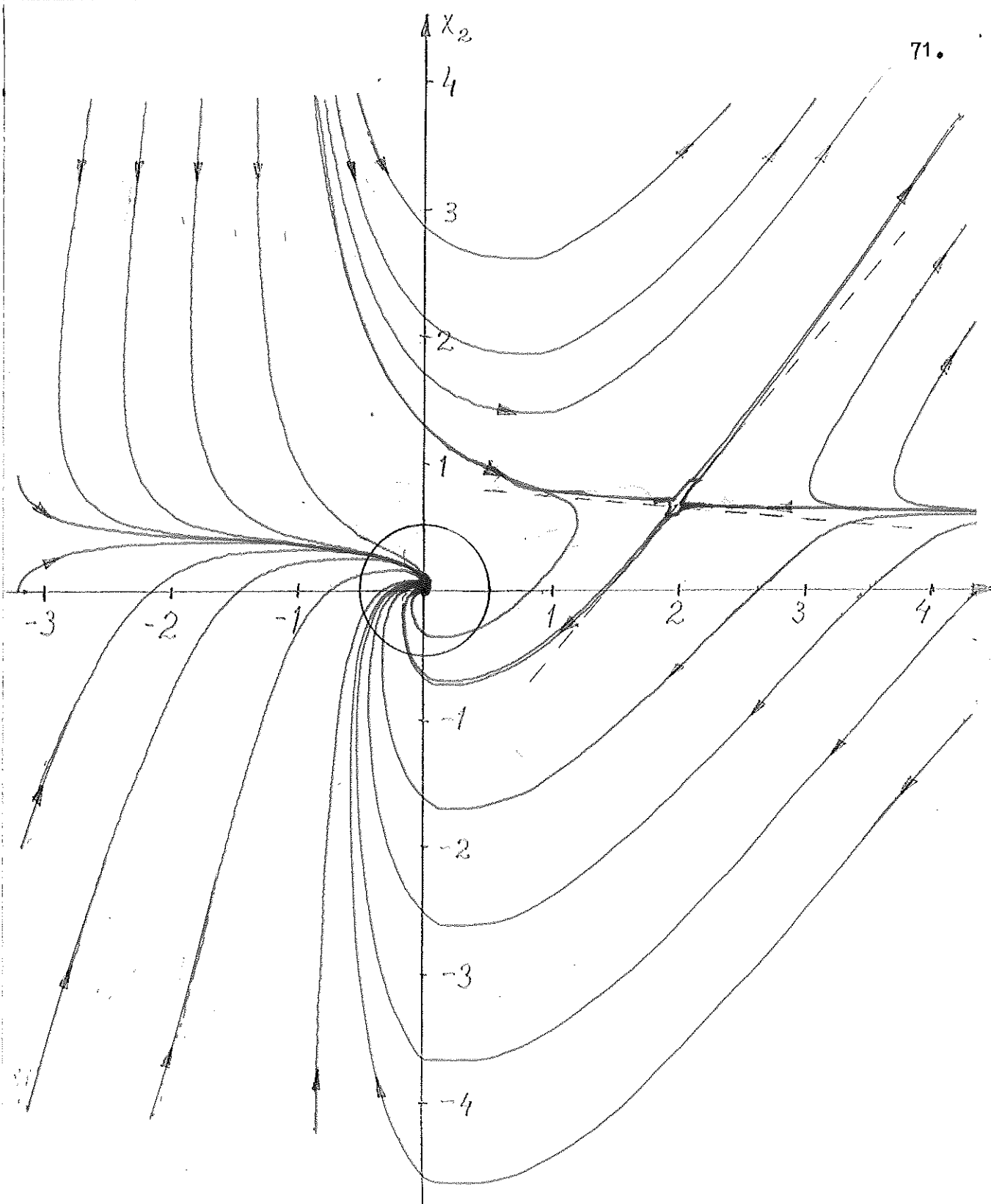


Fig2.2.b

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 2x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

<u>Singularitet</u>	<u>Typ</u>	<u>Egenvektorer</u>
$(0,0)$	stabilt fokus	
$(2, 0.667)$	sadelpunkt	$(1, 1.203), (10.83, -1)$

Numeriskt exempel 2.2.c

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} \quad (\text{origo stabilt fokus})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \text{ ger som enda singularitet origo.}$$

I det allmänna uttrycket för singularitetens läge, ekvn (3.12.) ser man att x_2 -koordinaten där är begränsad med vårt val av parametrar, medan x_1 -koordinaten $\rightarrow \infty$ när $b_{1,2}\omega + c_{1,2}\sigma \rightarrow 0$;

Stabilitetsområde enligt [4] blir

$$x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{4}$$

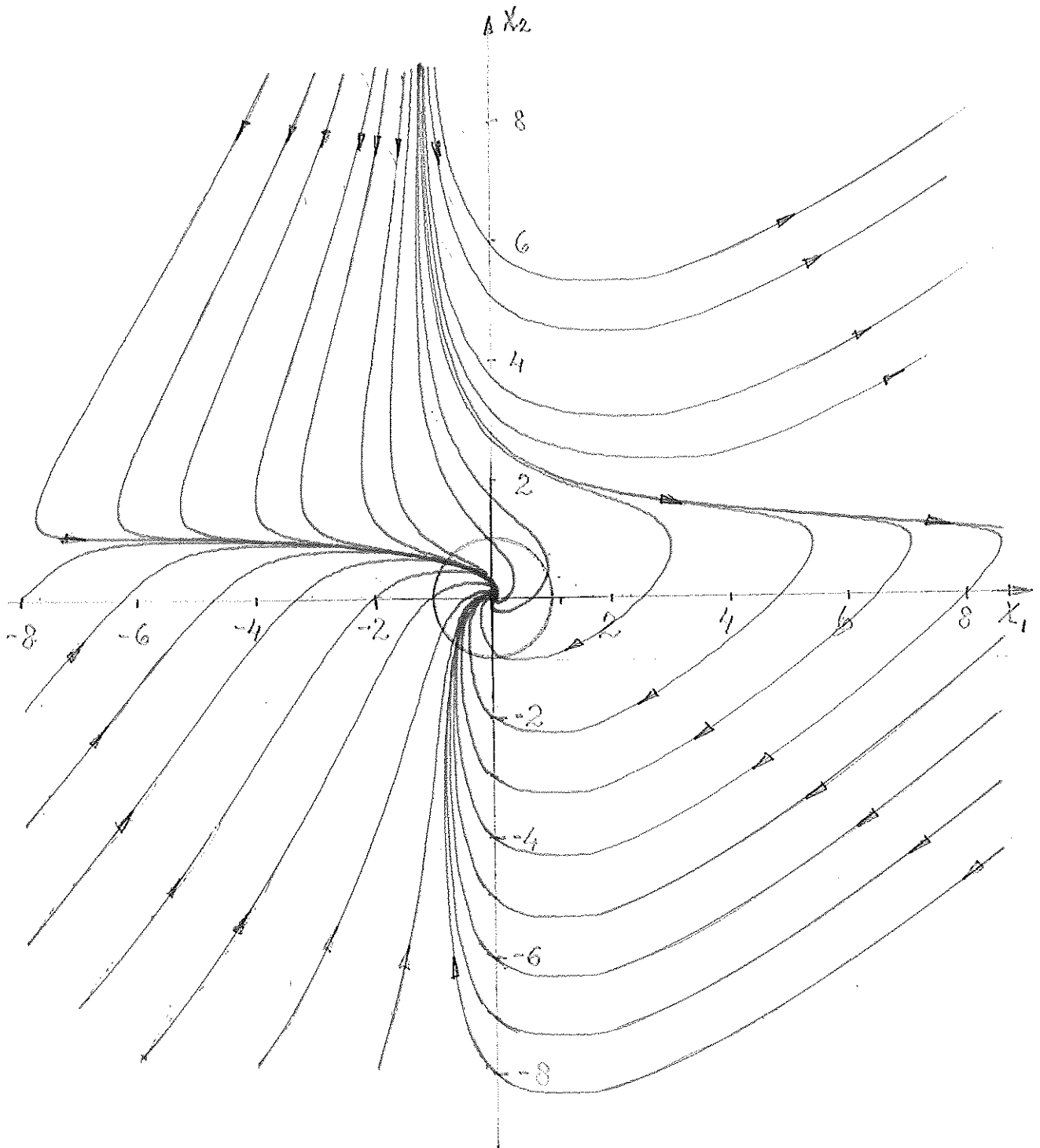


Fig 2.2.c

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 x_1 \end{pmatrix}$$

Enda singulariteten (i origo) stabilt fokus.

Numeriskt exempel 2.3.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{origo stabilt fokus})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \text{ ger singulära pktr } \begin{cases} (x_1, x_2) = (0, 0) \\ (x_1, x_2) = (2, -2) \end{cases} \text{ enl ekvn (3.15.)}$$

Sätt $\begin{cases} z_1 = x_1 - 2 \\ z_2 = x_2 + 2 \end{cases}$ och utveckla kring $(2, -2)$. Då får man enl ekvn (3.16.)

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_B z + \begin{pmatrix} z_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till B blir $l_1 = 1 + \sqrt{3}$ och $l_2 = 1 - \sqrt{3}$.
 l_1 och l_2 har olika tecken dvs $(2, -2)$ är en sadelpkt.

Till l_1 och l_2 hörande egenvektorer fås ur $Be_1 = l_1 e_1$
och $Be_2 = l_2 e_2$ och blir

$$e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 - \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (\text{stabila})$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{instabila}).$$

Asymptotiskt uppförande.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1 - x_2}{-x_1 + x_2 + x_1^2}$$

$$1. \quad x_1 \rightarrow 0, \quad x_2 \rightarrow \pm \infty$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow -1$$

$$2. \quad x_2 \rightarrow 0, \quad x_1 \rightarrow \pm \infty$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \pm \infty$$

$$3. \quad x_2 = x_1, \quad x_1 \rightarrow \pm \infty$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 0$$

$$4. \quad x_1 = -x_2, \quad x_1 \rightarrow \pm \infty$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 0$$

Stabilitetsområde enligt [4]:

$$x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{4}$$

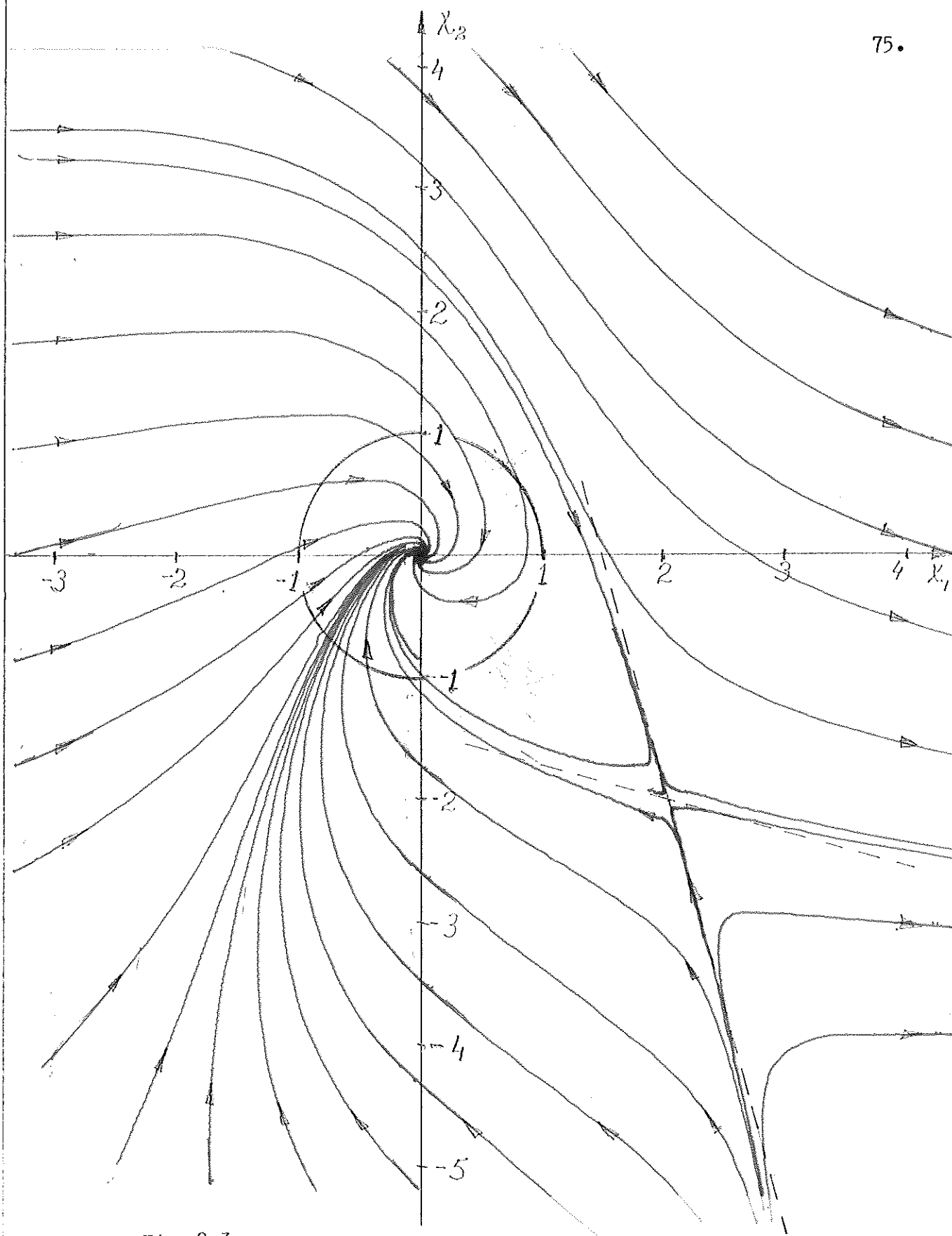


Fig 2.3.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Singularitet

(0 , 0)

(2 , -2)

Type

stabilt fokus

sadelpkt

Egenvektorer

 $(1, -2-\sqrt{3})$, $(-2+\sqrt{3}, 1)$

Numeriskt exempel 2.3.b

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 5x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{origo stabilt fokus})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \text{ ger singulära pktr } \begin{cases} (x_1, x_2) \in (0, 0) \\ (x_1, x_2) = (\frac{1}{2}, -1) \end{cases} \text{ enl ekvn (3.15.)}$$

Sätt $\begin{cases} z_1 = x_1 - \frac{1}{2} \\ z_2 = x_2 + 1 \end{cases}$ och utveckla kring $(\frac{1}{2}, -1)$. Man får enl ekvn (3.16.)

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4.5 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{pmatrix}}_B z + \begin{pmatrix} 5z_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till B blir $l_1 = 4.291$ och $l_2 = -0.291$.

De har olika tecken och $(\frac{1}{2}, -1)$ är alltså en sadelpkt.

Tillhörande egenvektorer fås ur $B e_1 = l_1 e_1$ och $B e_2 = l_2 e_2$

och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.209 \end{pmatrix} \quad (\text{instabila})$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4.791 \end{pmatrix} \quad (\text{stabila}).$$

Stabilitetsområde enligt [4] blir

$$\left(x_1^2 + x_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{5^2}} = 0.1$$

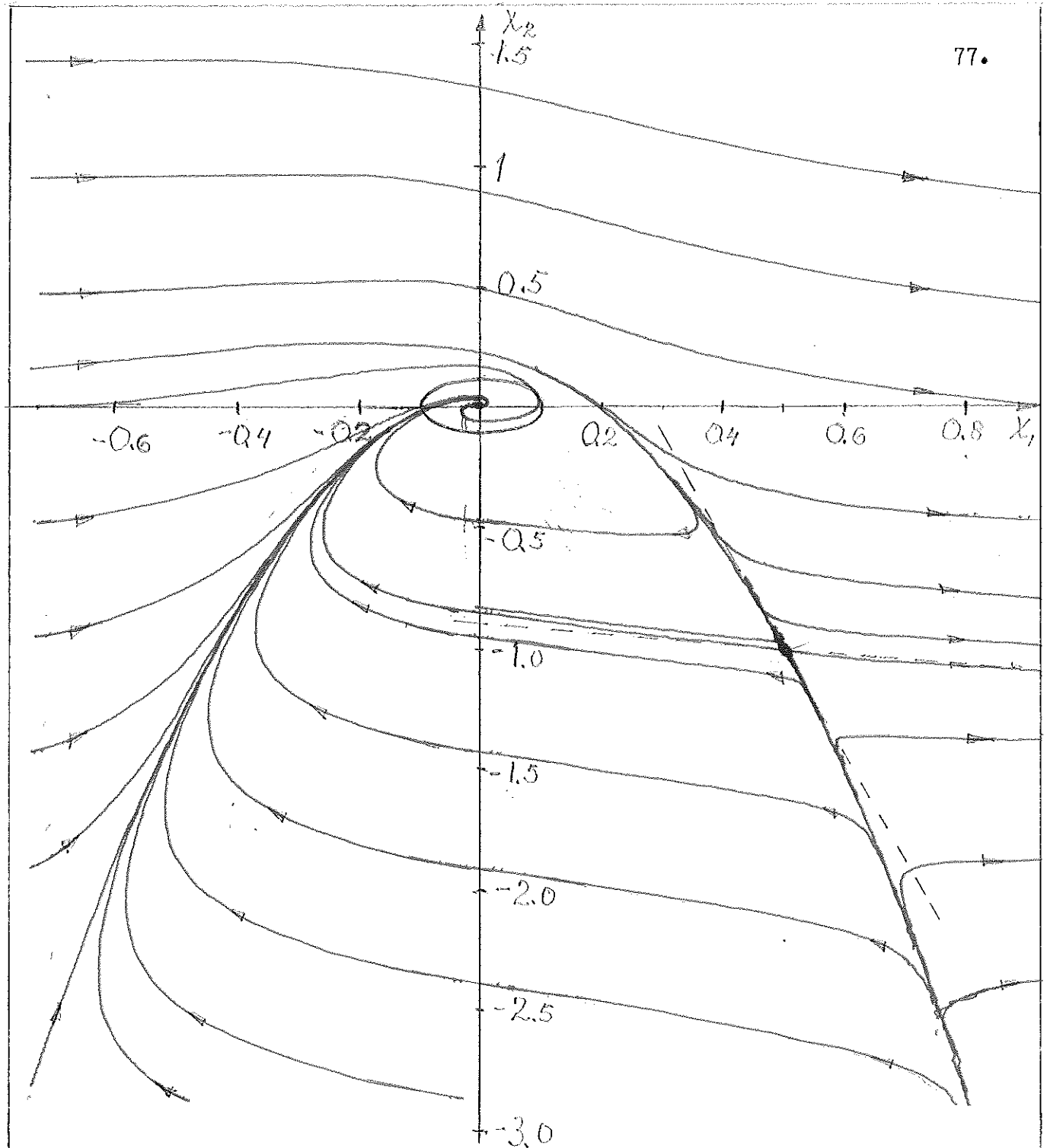


Fig 2.3.b

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 5x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Singularitet

(0, 0)

 $(\frac{1}{2}, -1)$ Typ

stabilt fokus

saddelpkt

Egenvektorer $(1, -0.209), (1, -4.791)$

Numeriskt exempel 2.4.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \quad (\text{origo center})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \text{ ger singularära punkterna, som enl ekvn (3.18.)}$$

blir $(x_1, x_2) = (0, 0)$ och $(x_1, x_2) = (1, -1)$.

Sätt $\begin{cases} z_1 = x_1 - 1 \\ z_2 = x_2 + 1 \end{cases}$ och utveckla. Man får enl ekvn (3.19.)

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \end{pmatrix}$$

B

Egenvärdena till B blir $s_1 = \sqrt{3}$ och $s_2 = -\sqrt{3}$.

Singulariteten blev som vi väntat av ekvn (3.20.)

en sadelpunkt. Eigenvektorerna fås ur $Be_1 = s_1 e_1$ och

$Be_2 = s_2 e_2$ och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (\text{instabila}) \quad \text{och} \quad e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 - \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (\text{stabila}).$$

Jämför detta med num ex 1.2.b. Där hade vi sadelpunkt i

origo och singulariteten $(1, -1)$ var ett center.

Asymptotiskt uppförande.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1 + x_2^2}{x_2 + x_1^2}$$

- | | |
|--|--|
| 1. $x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow \pm \infty$ | $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \pm \infty$ |
| 2. $x_2 \rightarrow 0, x_1 \rightarrow \pm \infty$ | $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 0$ |
| 3. $x_1 = x_2, x_1 \rightarrow \pm \infty$ | $\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 1$ |
| 4. $x_1 = -x_2$ | $\frac{dx_2}{dx_1} = 1$ |

Stabilitetsområde enligt [4] blir

$$x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{0}{1}$$

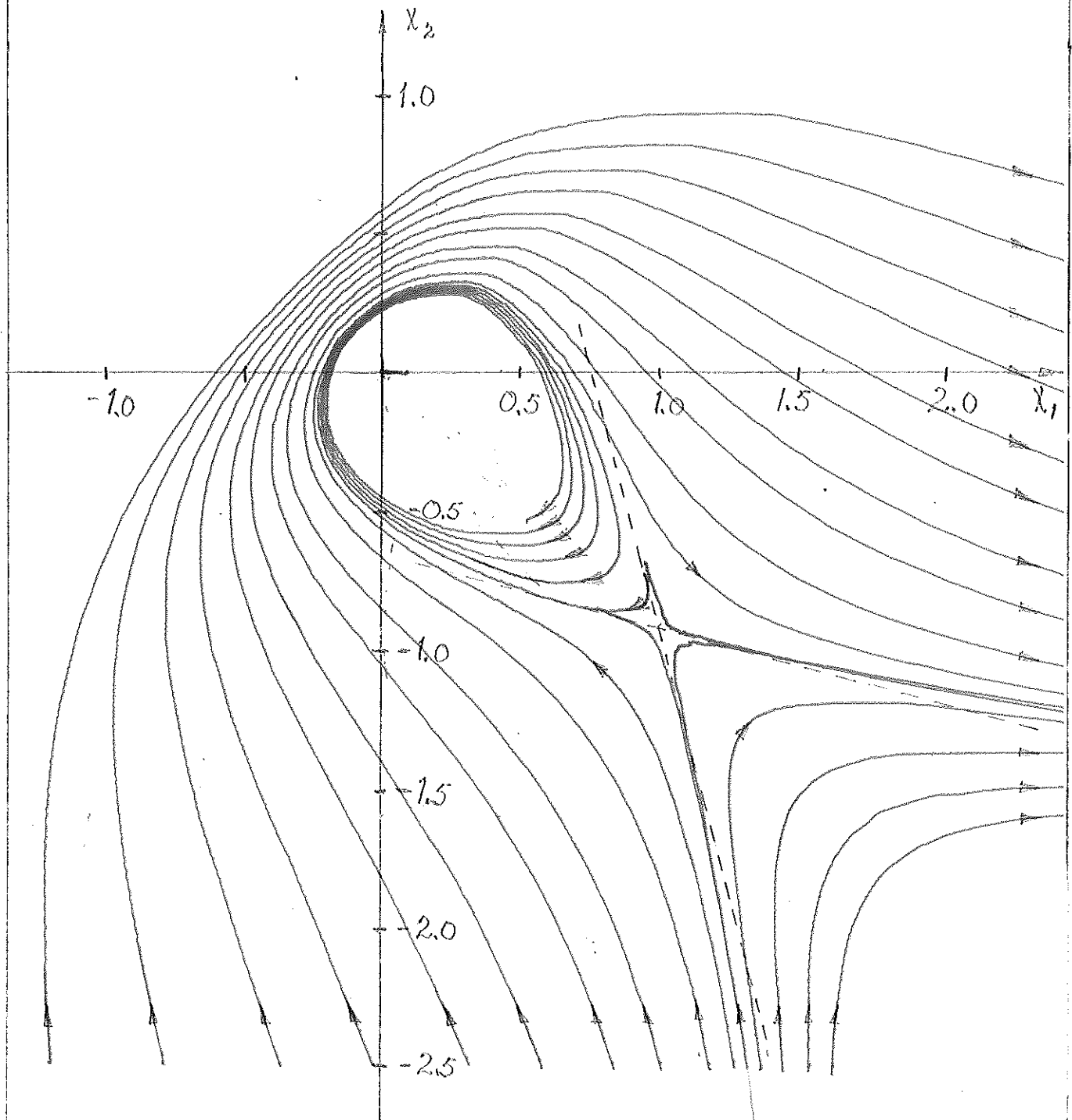


Fig 2.4.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Singularitet

(0,0)

(1,-1)

Typ

center

sadelpunkt

Egenvektorer $(1, -2 + \sqrt{3}), (1, -2 - \sqrt{3})$

Numeriskt exempel 2.4.b

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \quad (\text{origo stabilt fokus})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \text{ ger, singulara pktr } \begin{cases} (x_1, x_2) = (0, 0) \\ (x_1, x_2) = (1.541, -0.839) \end{cases}$$

Sista singulariteten fås numeriskt ur ekvn (3.17.)

$$\text{Sätt } \begin{cases} z_1 = x_1 - 1.541 \\ z_2 = x_2 + 0.839 \end{cases} \text{ och utveckla kring } (1.541, -0.839).$$

Man får då efter något räknande

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 2.082 & 1 \\ -1 & -2.078 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \end{pmatrix}$$

B

Egenvärdena till B blir $\lambda_1 = 1.861$ och

$\lambda_2 = -2.459$. λ_1 och λ_2 har olika tecken dvs singulariteten

är en sadelpkt. Eigenvektorerna hörande till λ_1 och λ_2

fås ur $Be_1 = \lambda_1 e_1$ och $Be_2 = \lambda_2 e_2$ och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.53 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{instabila})$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4.55 \end{pmatrix} \quad (\text{stabila}).$$

Stabilitetsområde enligt [4] blir

$$x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{4}$$

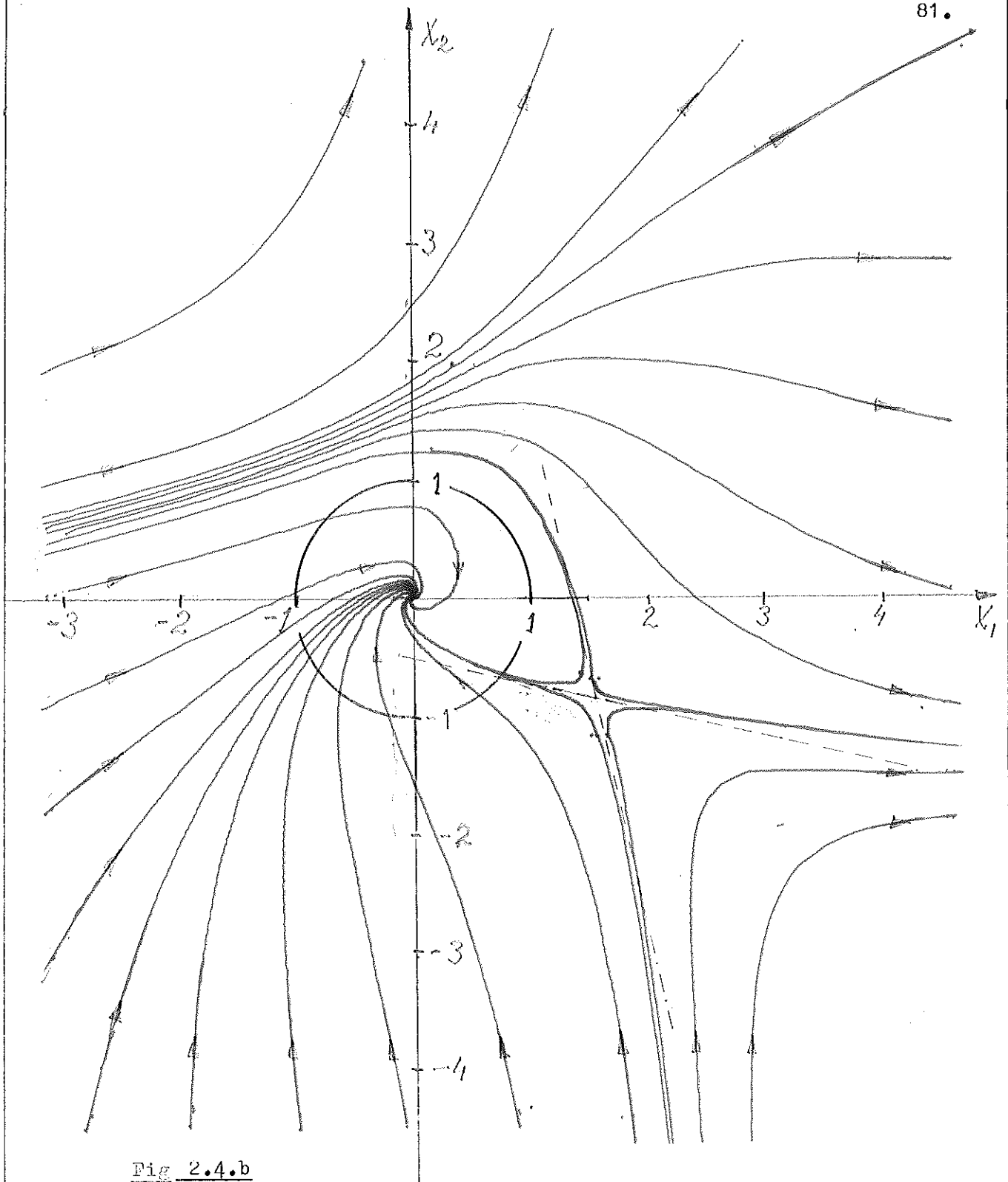


Fig 2.4.b

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$$

Singularitet

(0 , 0)

(1.541 , -0.839)

Typ

stabilt fokus

sadelpkt

Egenvektorer

(4.53 , -1) , (1 , -4.55)

Numeriskt exempel 2.4.c

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 5x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \quad (\text{origo stabilt fokus})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{singulära pktr. } (x_1, x_2) = (0, 0) \text{ fås direkt.}$$

Ur ekvn (3.17.) får man

$$x_1^3 - 0.4x_1^2 + 0.24x_1 - 0.08 = 0$$

Härur beräknas numeriskt andra singulariteten till

$$(x_1, x_2) = (0.354, -0.278),$$

Utveckla kring denna singularitet med

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - 0.354 \\ z_2 = x_2 + 0.278 \end{cases}$$

Man får då

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 2.54 & 1 \\ -1 & -1.556 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 5z_1^2 \\ z_2^2 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena till B blir $\lambda_1 = 2.279$ och

$\lambda_2 = -1.295$. De har olika tecken dvs singulariteten

är en sadelpkt. Tillhörande egenvektorer fås ur

$Be_1 = \lambda_1 e_1$ och $Be_2 = \lambda_2 e_2$ och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.261 \end{pmatrix} \quad (\text{instabila})$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3.835 \end{pmatrix} \quad (\text{stabila}).$$

Stabilitetsområde enligt [4] blir

$$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \leq \frac{1}{5}$$

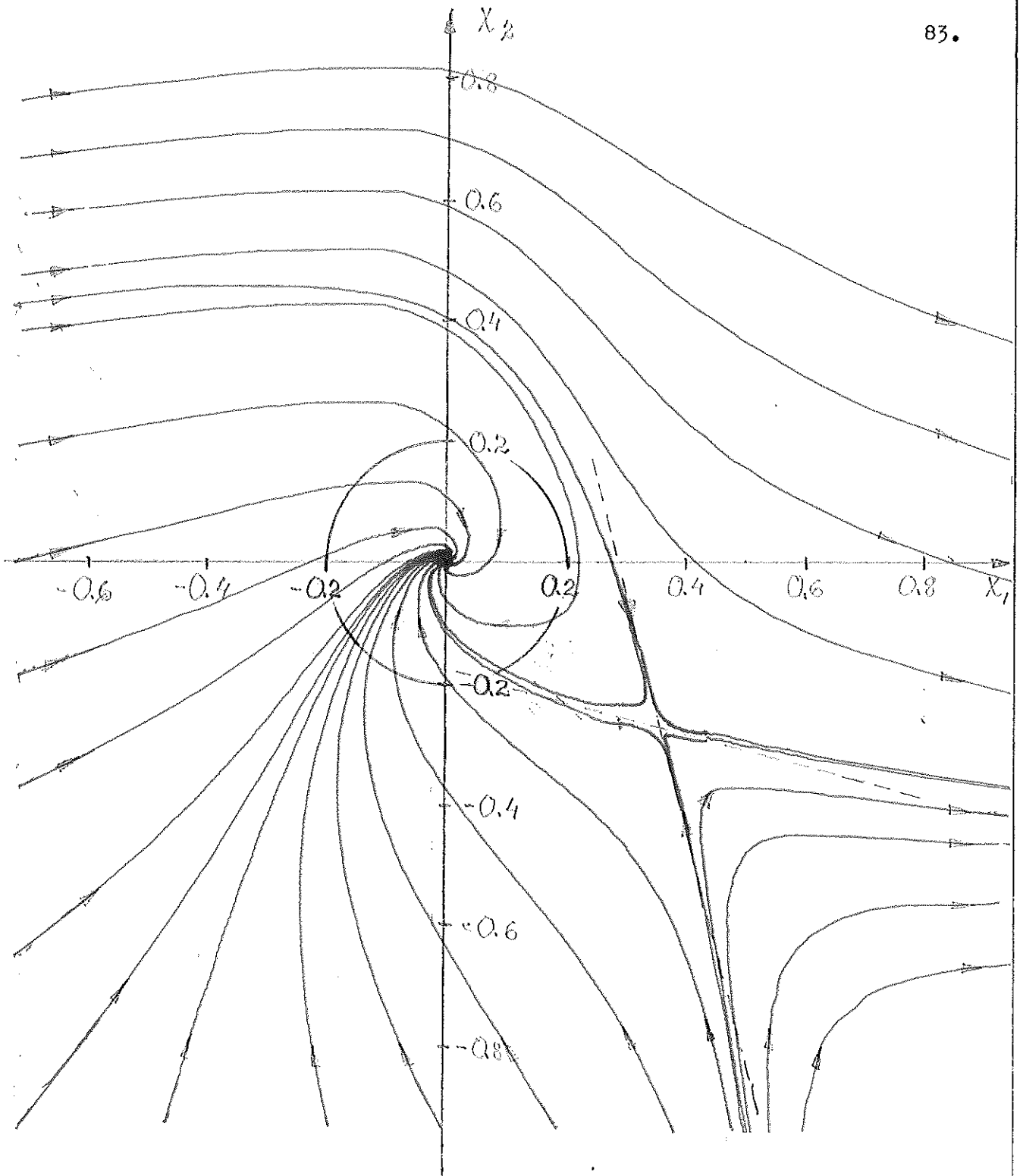


Fig 2.4.c

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 5x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$$

Singulariteter

 $(0, 0)$ $(0.354, -0.278)$

Typ

stabilt fokus

sadelpkt

Egenvektorer

 $(1, -0.61), (1, -3.835)$

Numeriskt exempel 2.4.d

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \quad (\text{origo stabilt fokus})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \text{ ger singulära pktr.}$$

$(x_1, x_2) = (0, 0)$ fås direkt.

Ur ekvn(3.17.) får man

$$x_1^3 - x_1^2 + 0.75x_1 - 1.25 = 0$$

Härur får man numeriskt (endast en reell rot)

$$(x_1, x_2) = (1.223, -0.883)$$

Utveckla kring denna singularitet med

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - 1.223 \\ z_2 = x_2 + 0.883 \end{cases}$$

Då får man

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 1.946 & 1 \\ -1 & -2.266 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \end{pmatrix}.$$

B

Egenvärdena till B blir $l_1 = 1.693$

och $l_2 = -2.013$. Singulariteten är en sadelpkt

eftersom l_1 och l_2 har olika tecken. Egenvektorerna

fås ur $Be_1 = l_1 e_1$ och $Be_2 = l_2 e_2$ och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.253 \end{pmatrix} \quad (\text{instabila})$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3.959 \end{pmatrix} \quad (\text{stabila}).$$

Stabilitetsområde enligt [4] blir

$$\left(x_1^2 + x_2^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{4}$$

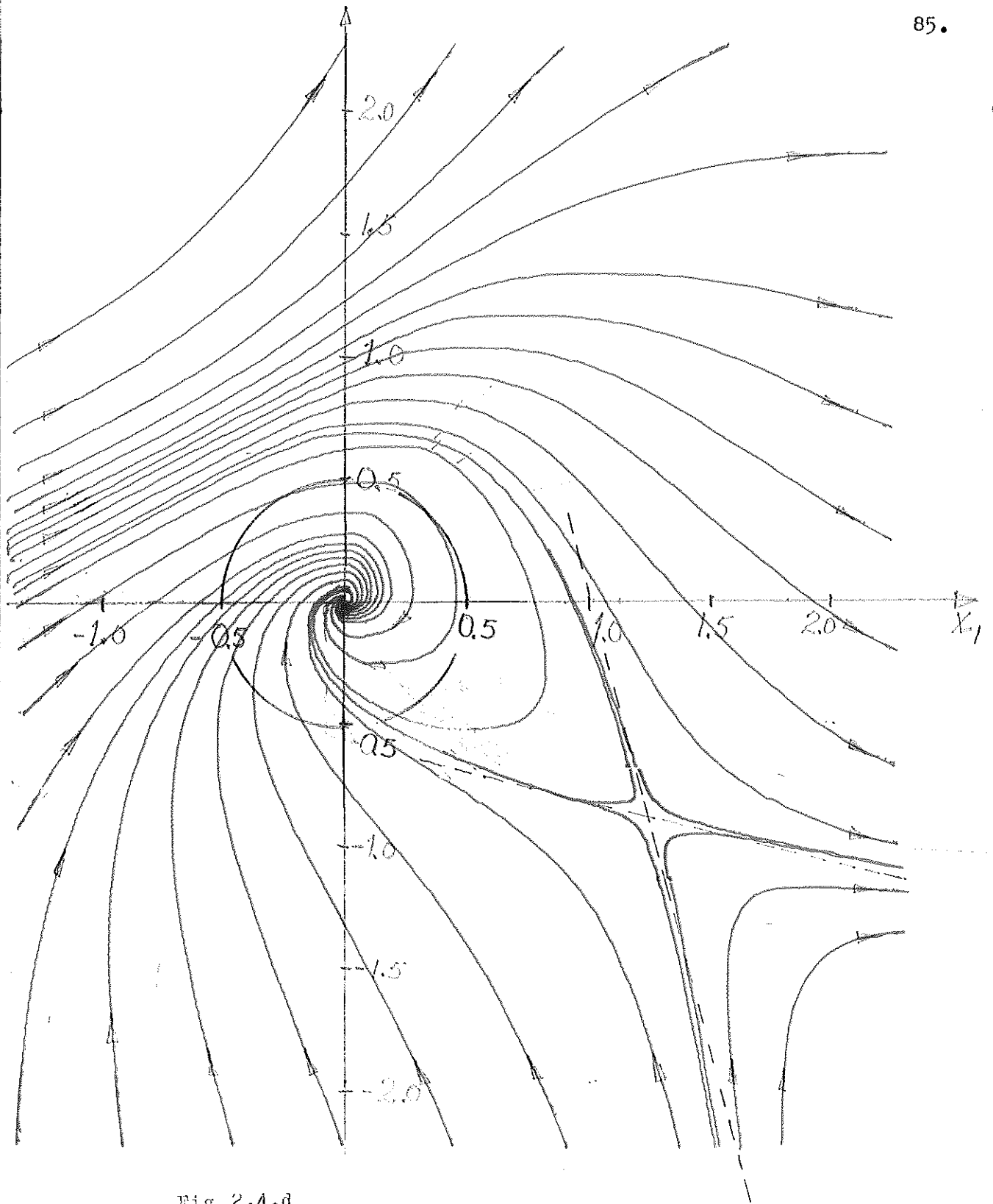


Fig 2.4.d

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$$

Singulariteter

 $(0, 0)$ $(1.223, -0.253)$

Typ

stabilt fokus

sadelpkt

Egenvektorer

 $(1, -0.253), (1, -3.959)$

Numeriskt exempel 2.4.e

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 5x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \quad (\text{origo stabilt fokus})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ger singularära pktr.}$$

$$(x_1, x_2) = (0, 0) \text{ ges direkt. Ur ekvn (3.17.)}$$

får man

$$x_1^3 - 0.200x_1^2 + 0.110x_1 - 0.050 = 0$$

Numeriskt får man (endast en reell rot)

$$(x_1, x_2) = (0.328, -0.375)$$

Utveckla kring denna singularitet med

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - 0.328 \\ z_2 = x_2 + 0.375 \end{cases}$$

Då får man

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2.780 & 1 \\ -1 & -1.250 \end{pmatrix}}_B z + \begin{pmatrix} 5z_1^2 \\ z_2^2 \end{pmatrix},$$

Egenvärdena till B blir $\lambda_1 = 2.515$

och $\lambda_2 = -0.985$. λ_1 och λ_2 har olika tecken dvs singulariteten är en sadelpkt. Tillhörande

egenvektorer fås ur $Be_1 = \lambda_1 e_1$ och $Be_2 = \lambda_2 e_2$ och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.265 \end{pmatrix} \quad (\text{instabila})$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3.780 \end{pmatrix} \quad (\text{stabila}).$$

Stabilitetsområde enligt [4] blir

$$\sqrt[1/2]{x_1^2 + x_2^2} \leq \frac{1}{5}$$

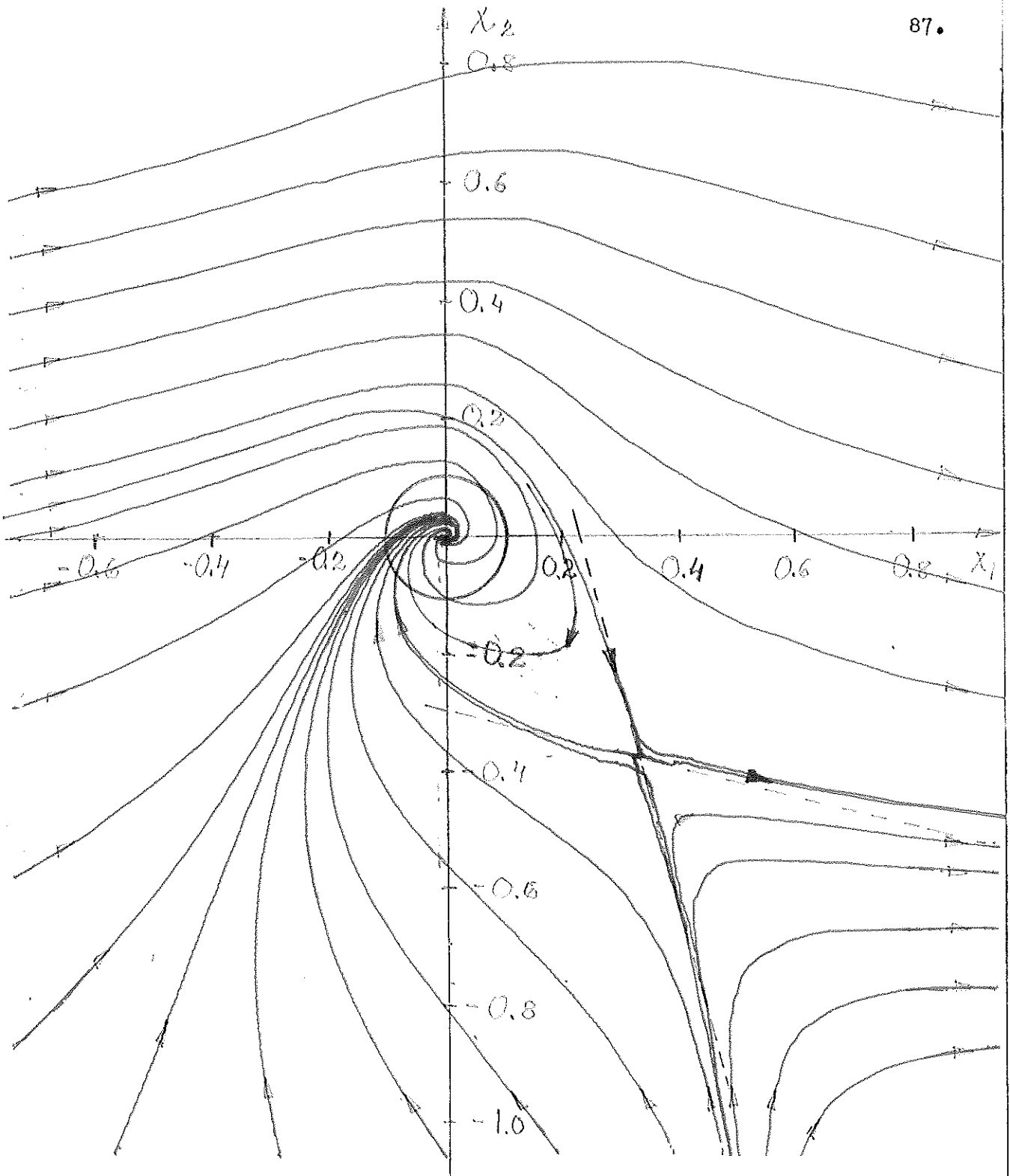


Fig 2.4.e

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 5x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$$

Singulariteter

$(0,0)$
 $(0.328, -0.375)$

Typ

stabilit fokus
 sadelpkt

Egenvektorer

$(1, -0.265), (1, -3.780)$

Numeriskt exempel 2.8.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_2^2 \\ \frac{1}{2}x_1^2 \end{pmatrix} \quad (\text{origo stabilt fokus})$$

$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$ betyder två parabler med axlarna parallella med koordinataxlarna. Deras skärningspunkter ger singulariteternas lägen. Ekvationerna blir (se även ekvn(3.21.), (3.22.))

$$-0.5x_1 + x_2 + 0.5x_2^2 = 0$$

$$-x_1 - 0.5x_2 + 0.5x_1^2 = 0$$

Lös ut x_2 ur första ekvn. Då fås

$$x_2 = -1 \pm \sqrt{1+x_1}$$

Sätt in $x_2 = -1 + \sqrt{1+x_1}$ i andra ekvn. Då fås

$$-x_1 + 0.5(-1 + \sqrt{1+x_1}) - 0.5x_1^2 = 0$$

Ekvationen löses numeriskt mha Newton-Raphsons metod.

Startvärden fås grafiskt ur de ursprungliga parablerna.

Man ser ur grafen också att endast två singulariteter

existerar, nämligen

$$\begin{cases} (x_1, x_2) = (0, 0) \\ (x_1, x_2) = (2.353, 0.830) \end{cases}$$

Sätt $\begin{cases} z_1 = x_1 - 2.353 \\ z_2 = x_2 - 0.830 \end{cases}$ och utveckla. Man får

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.5 & 1.830 \\ 1.353 & -0.5 \end{pmatrix}}_B z + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z_1^2 \\ \frac{1}{2}z_2^2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till B blir $s_1 = 1.072$ och $s_2 = -2.072$ dvs

singulariteten är en sadelpunkt. Eigenvektorerna fås

ur $Be_1 = s_1 e_1$ och $Be_2 = s_2 e_2$ och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.859 \end{pmatrix} \quad (\text{instabila}) \quad \text{och} \quad e_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.859 \end{pmatrix} \quad (\text{stabila}).$$

Asymptotiskt uppförande.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_1^2}{-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_2^2}$$

$$1. \quad x_1 \rightarrow 0, \quad x_2 \rightarrow \pm \infty$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 0$$

$$2. \quad x_2 \rightarrow 0, \quad x_1 \rightarrow \pm \infty$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow \pm \infty$$

$$3. \quad x_1 = x_2, \quad x_1 \rightarrow \pm \infty$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 1$$

$$4. \quad x_1 = -x_2, \quad x_1 \rightarrow \pm \infty$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} \rightarrow 1$$

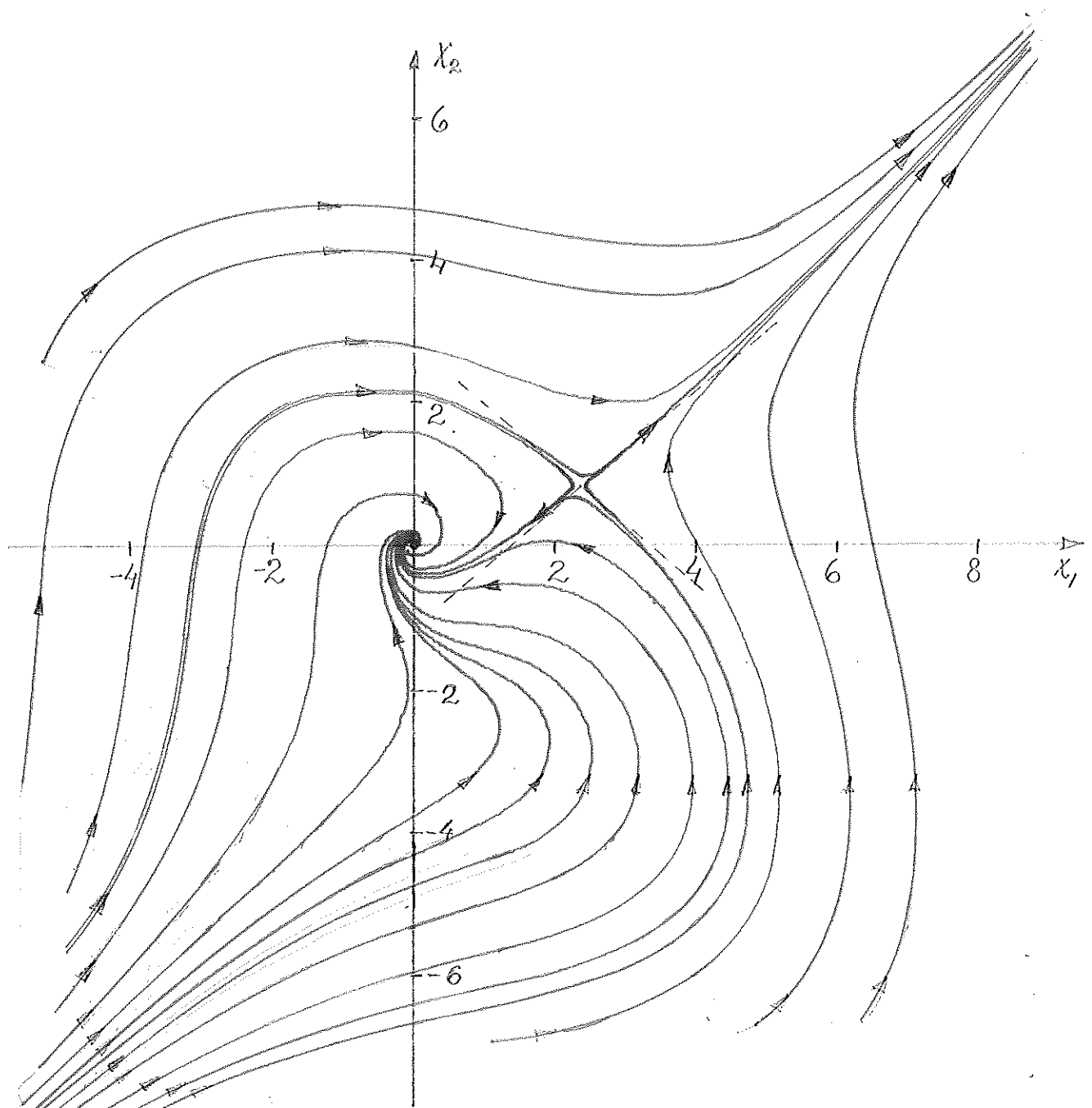


Fig 2.8.a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_2^2 \\ \frac{1}{2}x_1^2 \end{pmatrix}$$

Singularitet

(0, 0)

(2.353, 0.830)

Typ

stabilt fokus

sadelpkt

Egenvektorer

(1, 0.859), (1, -0.859)

Numeriskt exempel 2.8.b

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0.25x_1^2 \end{pmatrix} \quad (\text{origo stabilt fokus})$$

$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$ betyder två parabler med axlarna parallella med koordinataxlarna. Ekvationerna blir (se även ekvn (3.21.), (3.22.))

$$\begin{cases} -0.5x_1 + x_2 + x_2^2 = 0 \\ -x_1 - 0.5x_2 + 0.25x_1^2 = 0 \end{cases}$$

Lös ut x_2 ur första ekvn. Då fås

$$x_2 = -0.5 \pm \sqrt{0.25 + 0.5x_1}$$

Sätt in dessa två värden på x_2 i andra ekvn. Man får då de två ekvn

$$\begin{cases} -x_1 + 0.25 - 0.25\sqrt{1+2x_1} + 0.25x_1^2 = 0 \\ -x_1 + 0.25 + 0.25\sqrt{1+2x_1} + 0.25x_1^2 = 0 \end{cases}$$

De båda ekvn löses numeriskt mha Newton-Raphsons metod. Startvärden fås grafiskt ur de ursprungliga parablerna. Följande värden på singulariteternas lägen erhålles

- (1). $(x_1, x_2) = (0, 0)$
- (2). $(x_1, x_2) = (4.484, 1.078)$
- (3). $(x_1, x_2) = (2.688, -1.762)$
- (4). $(x_1, x_2) = (0.832, -1.316)$

Sätt $\begin{cases} z_1 = x_1 - 4.484 \\ z_2 = x_2 - 1.078 \end{cases}$ och utveckla kring (2). Man får

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.5 & 3.156 \\ 1.242 & -0.5 \end{pmatrix}}_B z + \begin{pmatrix} z_2^2 \\ 0.25z_1^2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till B blir $s_1 = -2.480$ och $s_2 = 1.480$.

Singulariteten är således en sadelpunkt. Eigenvektorerna fås ur $Be_1 = s_1 e_1$ och $Be_2 = s_2 e_2$ och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.627 \end{pmatrix} \quad (\text{instabila}) \quad \text{och} \quad e_2 = \begin{pmatrix} e_{22} \\ e_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.627 \end{pmatrix} \quad (\text{stabila}).$$

Sätt $\begin{cases} z_1 = x_1 - 2.688 \\ z_2 = x_2 + 1.762 \end{cases}$ och utveckla kring (3). Man får

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.5 & -2.524 \\ 0.344 & -0.5 \end{pmatrix}}_C z + \begin{pmatrix} z_2^2 \\ 0.25z_1^2 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till C blir $s_{1,2} = -0.5 \pm j0.932$ dvs singulariteten är ett stabilt fokus.

Sätt $\begin{cases} z_1 = x_1 - 0.832 \\ z_2 = x_2 + 1.316 \end{cases}$ och utveckla kring (4). Man får

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.5 & -1.632 \\ -0.584 & -0.5 \end{pmatrix}}_D z + \begin{pmatrix} z_2 \\ 0.25z_1 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till D blir $s_1 = 0.476$ och $s_2 = -1.476$ dvs singulariteten är en sadelpunkt. Eigenvektorerna fås ur $De_1 = s_1 e_1$ och $De_2 = s_2 e_2$ och blir

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.598 \end{pmatrix} \text{ (instabila) och } e_2 = \begin{pmatrix} e_{21} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.598 \end{pmatrix} \text{ (stabila).}$$

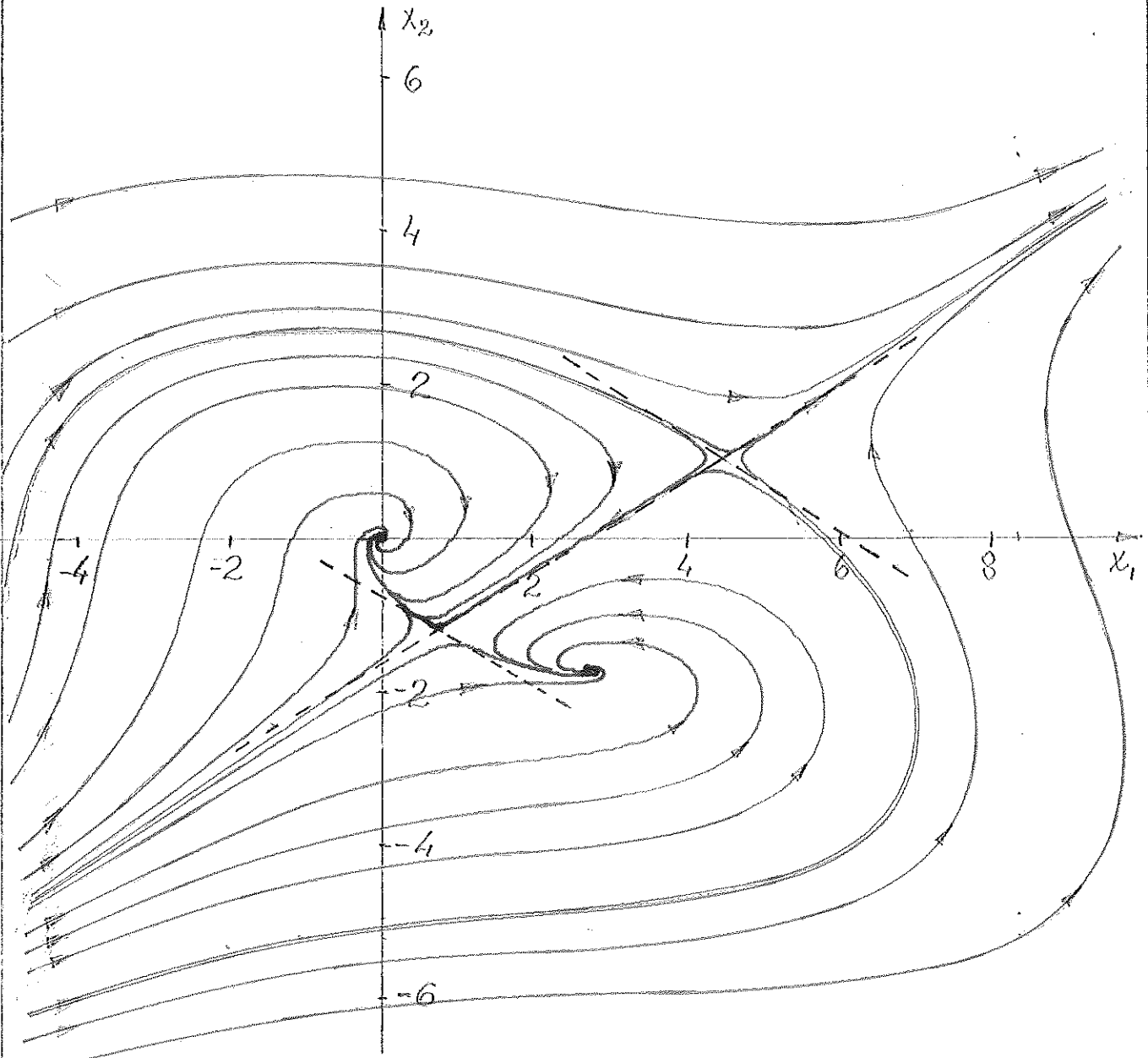


Fig 2.8.b

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0.25x_1^2 \end{pmatrix}$$

<u>Singularitet</u>	<u>Typ</u>	<u>Egenvektorer</u>
(0, 0)	stabilt fokus	
(4.484, 1.078)	sadelpkt	(1, 0.627), (1, -0.627)
(2.688, -1.762)	stabilt fokus	
(0.832, -1.316)	sadelpkt	(1, -0.598), (1, 0.598)

5. Referenser.

- [1] Cunningham, W. J.: Nonlinear Analysis, Mc Graw-Hill Book Company (1958).
- [2] Minorski, N.: Nonlinear Oscillations, D van Nostrand Company.
- [3] Olsson, G.: Digital Simulation of Spatial Xenon Oscillations. Report 6911, Div. of Aut. Contr. , Inst. of Techn. , Lund 1969.
- [4] Weissglas, P.: Stabilitet vid ändliga amplituder, Statens vattenfallsverk, Reg nr 535.406 ,1963.

Appendix 1.

Förteckning över genomräknade specialfall.

I kap 3. räknade vi igenom ett antal specialfall av grund-
ekvationen. Fallen indelades i två grupper:

1. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ reella egenvärden i origo.

2. $A = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$ komplexa egenvärden i origo.

Till dessa två lineära termer behandlade vi följande kvadra-
tiska termer:

1. $\begin{pmatrix} b_{12}x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} b_{12}x_1x_2 \\ c_{12}x_1x_2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} b_{11}x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} b_{11}x_1^2 \\ c_{22}x_2^2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 \\ c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} b_{22}x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} b_{22}x_2^2 \\ c_{11}x_1^2 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} b_{11}x_1^2 \\ c_{11}x_1^2 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} b_{11}x_1^2 \\ c_{12}x_1x_2 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} b_{12}x_1x_2 \\ c_{11}x_1^2 \end{pmatrix}$

