

**STYRNING AV ROBOT MED  
MODIFIERAD MINIMALVARIANS  
STYRLAG**

**INGEMAR MÅRTENSSON  
ANDERS WEIBULL**

**TILLHÖR REFERENSBILOTEKET  
UTLÄNNAES EJ**

**RAPPORT RE-88, november 1970**

STYRNING AV ROBOT MED MODIFIERAD MINIMALVARIANSSTYRLAG

Ingemar Mårtensson

Anders Weibull

Examensarbete vid institutionen för reglerteknik vid LTH  
nov. 1970

Ansvarig handledare: Björn Wittenmark

## INNEHÅLLSFÖRTECKNING

Summary	1
Sammanfattning	2
1. Inledning	3
2. Robotmodell	
Fysikalisk beskrivning	5
Flygfall	6
Stabilitetsegenskaper	7
Parametervariation	8
3. Parameteruppskattning	
Kalmanfilter	13
Uppskattning av parametrar med Kalmanfilter	14
Exempel på parameteruppskattningar	15
4. Styrlagar	
Inledning	21
Härledning av minimalvariansstyrlagarna	22
PI-regulator	28
Exempel på användning av styrlagarna	30
Sammanfattning	38
5. Modell	39
6. Referenser	42
Appendix	
Programbeskrivning	43

## SUMMARY:

The purpose of this work is, that for a process with varying parameters, which in this case is a robot, examine an adaptive regulator by means of a computer.

The system equation of the robot can be written as  
 $y(t) + a_1(t)y(t-1) + a_2(t)y(t-2) = b_1(t)u(t-1) +$   
 $+ b_2(t)u(t-2) + \lambda e(t)$

where  $e(t)$  is white noise.

The varying parameters  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $b_1(t)$  and  $b_2(t)$  are estimated by a Kalmanfilter.

The estimated values of the parameters are then used to create a strategy, that gives the output a minimal variance.

The regulator, that we use, is a modified minimalvariance-strategy, in which we have considered that the parameters are estimated.

The steering of the robot with a Kalmanfilter and a modified minimalvariance-strategy proved to be good, for the simulated cases.

## SAMMANFATTNING:

Avsikten med detta examensarbete är att för en process med varierande parametrar, som i detta fall är en robot, undersöka en adaptiv regulator med hjälp av dator.

Robotens systemekvation kan skrivas

$$y(t) + a_1(t)y(t-1) + a_2(t)y(t-2) = b_1(t)u(t-1) + \\ + b_2(t)u(t-2) + \lambda e(t)$$

där  $e(t)$  är vitt brus.

De varierande parametrarna  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $b_1(t)$  och  $b_2(t)$  uppskattas med ett Kalmanfilter.

De uppskattade värdena på parametrarna används sedan för att konstruera en styrlag, som ger minimal varians hos utsignalen.

Regulatorn, som vi använder, är en modifierad minimalvariansstyrlag, i vilken hänsyn tagits till att parametrarna uppskattas.

Styrningen av roboten med Kalmanfilter och modifierad minimalvariansstyrlag visade sig fungera bra, för de fall som simulerades.

## 1. INLEDNING.

Avsikten är att för en process med varierande parametrar, som i detta fall är en robot, undersöka en adaptiv regulator.

Motivet till att man vill införa en "läraktig" regulator, är att man för ett bestämt roderutslag vill ha samma reaktion vid olika flygfall, dvs. man vill eliminera inverkan av hastighet och statiskt lufttryck.

En matematisk modell görs av roboten i kapitel 2. Robotens systemekvation är

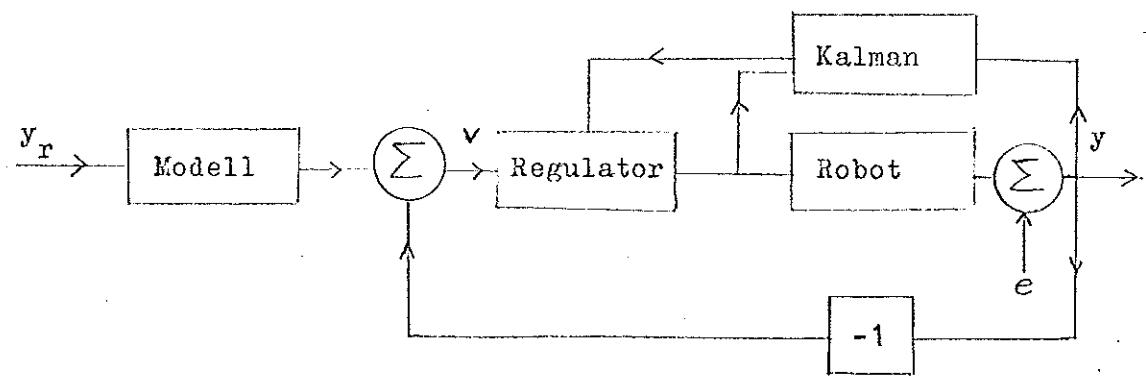
$$y(t) + a_1(t)y(t-1) + a_2(t)y(t-2) = b_1(t)u(t-1) + \\ + b_2(t)u(t-2) + \lambda e(t)$$

där  $e(t)$  är vitt brus.

Parametrarna  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $b_1(t)$  och  $b_2(t)$  identifieras, med hjälp av ett Kalmanfilter, vilket närmare beskrivs i kapitel 3.

De uppskattade värdena på parametrarna används sedan för att konstruera en styrlag, som ger minimal varians hos utsignalen. Då parametrarna estimerats kan hänsyn till detta tagas, varför en modifierad minimalvarians-styrlag härleds. Denna styrlag beskrivs närmare i kapitel 4.

Som jämförelse kommer även att undersökas hur en PI-regulator uppför sig på systemet, då ju denna är mycket enklare att realisera.



I Kalman-blocket bestämmes de parametrar, som sedan skall ingå i styrlagen.

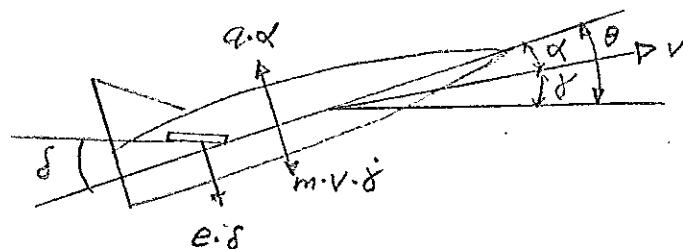
Regulatorn minimerar variansen hos  $\nu$ .

Den modell, som är applicerad på systemet, är avsedd att mjuka upp stegsvaret från mod.min.var.styrlagen. Denna modell beskrivs i kapitel 5.

## 2. ROBOTMODELL.

### Fysikalisk beskrivning.

De krafter som verkar på roboten kan tänkas angripa enligt figur.



$\alpha$  - anfallsvinkel

$\theta$  - attitydvinkel

$v$  - hastighetsvektor

$\delta$  - roderutslag

Följande ekvationer kan uppställas

$$m \cdot v \cdot \dot{\delta} = a \cdot \alpha \quad (\text{tvärkraft})$$

där tvärkraften från roderutslaget och inverkan av vertikal turbulens har försummats.

$$J \cdot \ddot{\theta} + b \cdot \dot{\theta} + c \cdot \alpha = e \cdot \dot{\delta} \quad (\text{moment})$$

$$\alpha + \gamma = \theta \quad (\text{geometri})$$

De i ekvationerna ingående "konstanterna" a, b, c och e varierar under flygningens gång. Nedanstående samband gäller

$$a, c, e \sim g \cdot v^2$$

$$b \sim g \cdot v$$

Mätsignal: tippvinkelhastighet  $\dot{\theta}$

Insignal: roderutslag  $\delta$

Inför följande tillståndsvariabler

$$x_1 = \dot{\theta}$$

$$x_2 = N_z = v \cdot \dot{\delta}$$

Tillståndsekvationen blir då

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -b/J & -c \cdot m / (J \cdot a) \\ a/m & -a / (m \cdot v) \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} e/J \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = (1, 0) \cdot x(t)$$

Roboten representeras alltså av ett andra ordningens system.

### Flygfall.

Tre olika flygfall har simulerats:

1. Start från markhöjd till sluthöjden 3 km. Acceleration från hastigheten 0 m/s till 600 m/s, därefter konstant hastighet till  $t = 13$  s (brinnslut), varefter retardation vidtager.
2. Flygning till markmål. Starthöjd 3 km, utgångshastighet 300 m/s, acceleration under 2 s till hastigheten 700 m/s.
3. Flygning till höjdmål från starthöjden 12 km. Sluthöjd 16 km, utgångshastighet 300 m/s. Acceleration under 2 s till hastigheten 700 m/s.

Det kontinuerliga systemet har samplats med  $T = 0.05$  s.  
 Då flygtiden är 30 s fås 600 samplingspunkter.  
 För närmare beskrivning refereras till Pauli [1].

### Stabilitetsegenskaper.

Systemet kan alltså skrivas på följande sätt

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = (1, 0) \cdot x(t)$$

Överföringsfunktionen för ovanstående blir

$$H(q) = \frac{b'_1(q-a_{22}) + b'_2 \cdot a_{12}}{q^2 - (a_{11}+a_{22}) \cdot q + a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Nollstället till ovanstående ekvation varierar enligt

$$0.86 < z < 0.98 \quad \text{för flygfall 1}$$

$$0.87 < z < 0.93 \quad \text{för flygfall 2}$$

$$0.97 < z < 0.98 \quad \text{för flygfall 3}$$

$H(q)$ :s poler hamnade inom enhetscirkeln, se bifogade diagram, där även nollstället visas.

Detta medför att det öppna systemet är stabilt och av minimumfastyp.

Vi kan skriva insignal-utsignal relationen på följande sätt

$$A^+(q^{-1}) y(t) = q^{-k} B^+(q^{-1}) u(t) + \lambda C^+(q^{-1}) e(t) \quad \text{där}$$

$$A^+ = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2}$$

$$B^+ = b_1 + b_2 q^{-1}$$

$$C^+ = 1$$

$$k = 1$$

$\lambda$  variansen hos bruset

$a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  och  $b_2$  tidsvarianta

då häsyn tagits till mätbrus.

Då vi använder vanlig min.var.styrslag fordras för att det återkopplade systemet skall vara stabilt, att  $B(q)$ :s nollställen ligger innanför enhetscirkeln. Som vi tidigare sett är  $B(q)$ :s nollställen belägna innanför enhetscirkeln.

#### Parametervariation.

De parametrar,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  och  $b_2$ , som senare skall identifieras, kommer att studeras för de olika robotfallen.

För parameter  $a_1$  är variationen moderat, för t.ex. robot 2 håller sig parametern inom gränserna -1.5 - -1.0.

Parameter  $a_2$ :s variation är mycket moderat, varför  $a_2$  närmast påminner om en konstant.

Parameter  $b_1$  varierar mest och här kommer det att visa sig att identifikationen blir svår. Extremvärden för t.ex. robot 1 är 0 och 22.

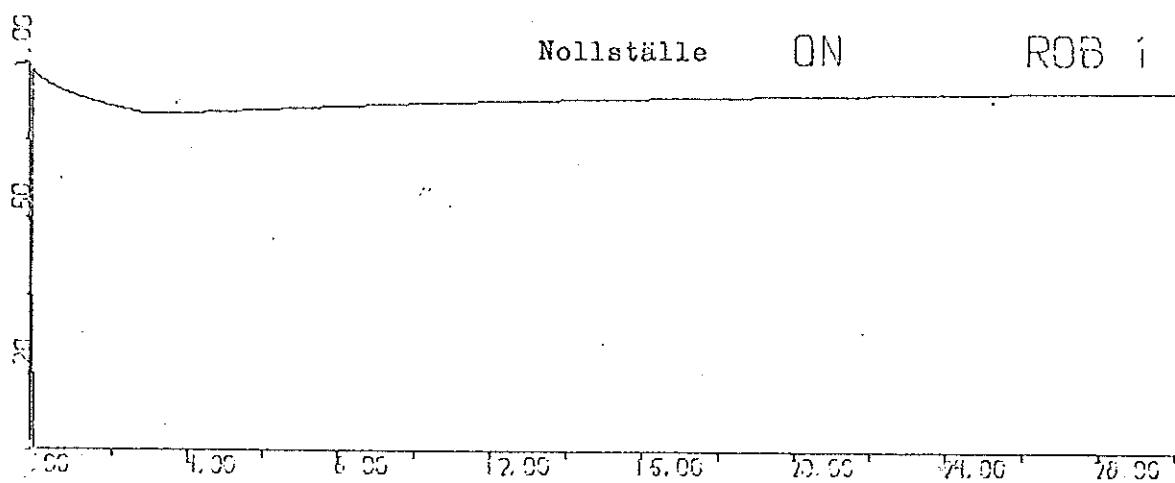
Variationen hos parameter  $b_2$  påminner om den hos  $b_1$ , varför samma kommentar kan göras som ovan.

Diagram bifogas som visar parametrarna.

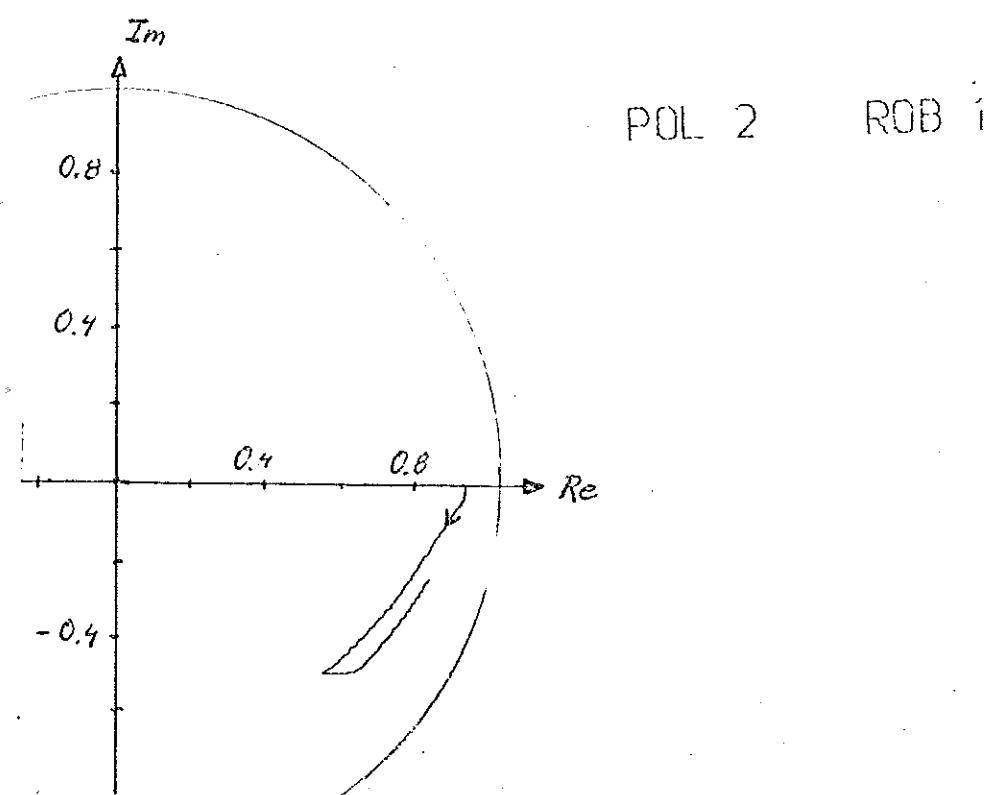
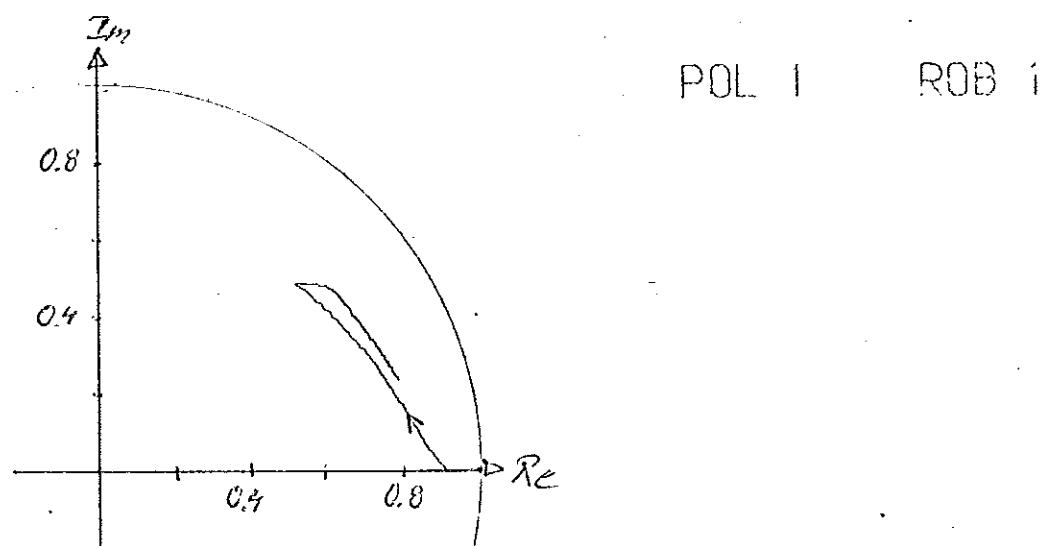
Nollställe

ON

ROB 1



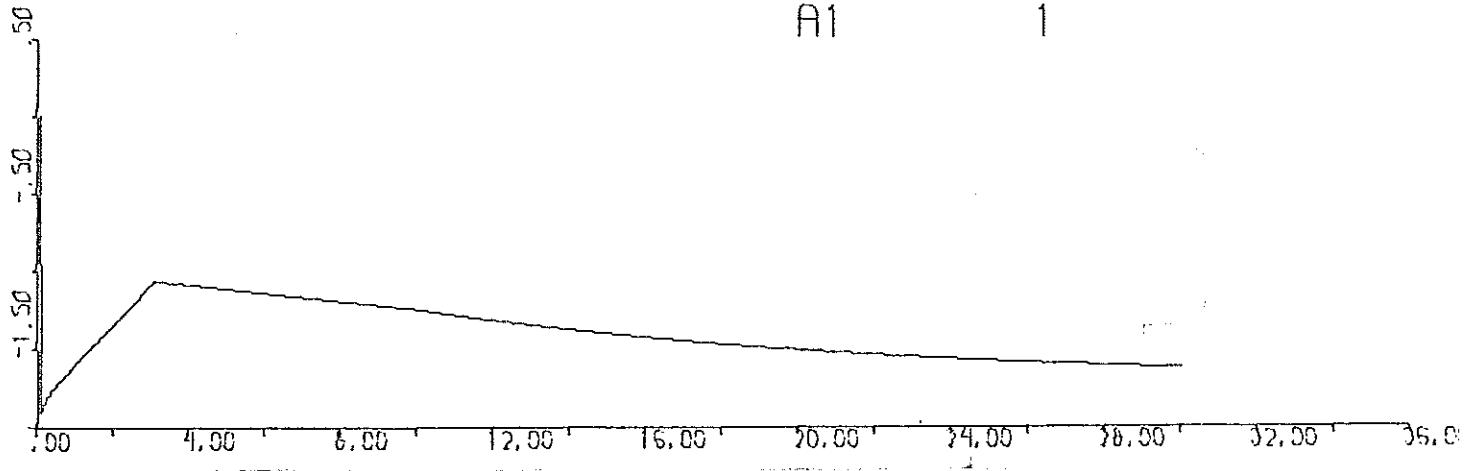
Nollställe och poler för robotfall 1.



Koefficienter i insignal- utsignal relationen, flygfall 1.

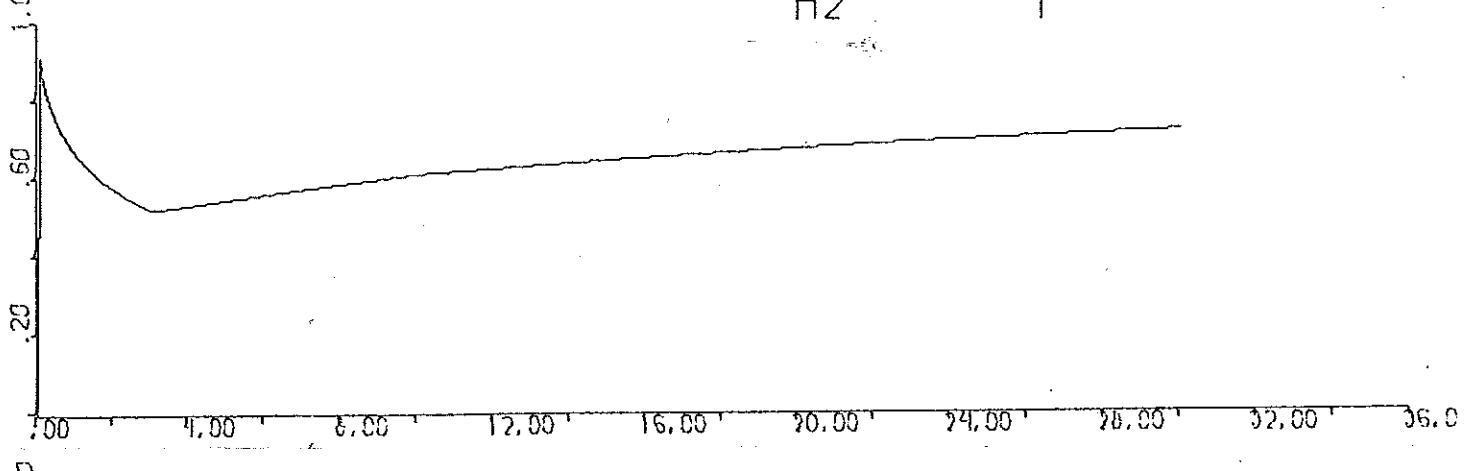
A1

1



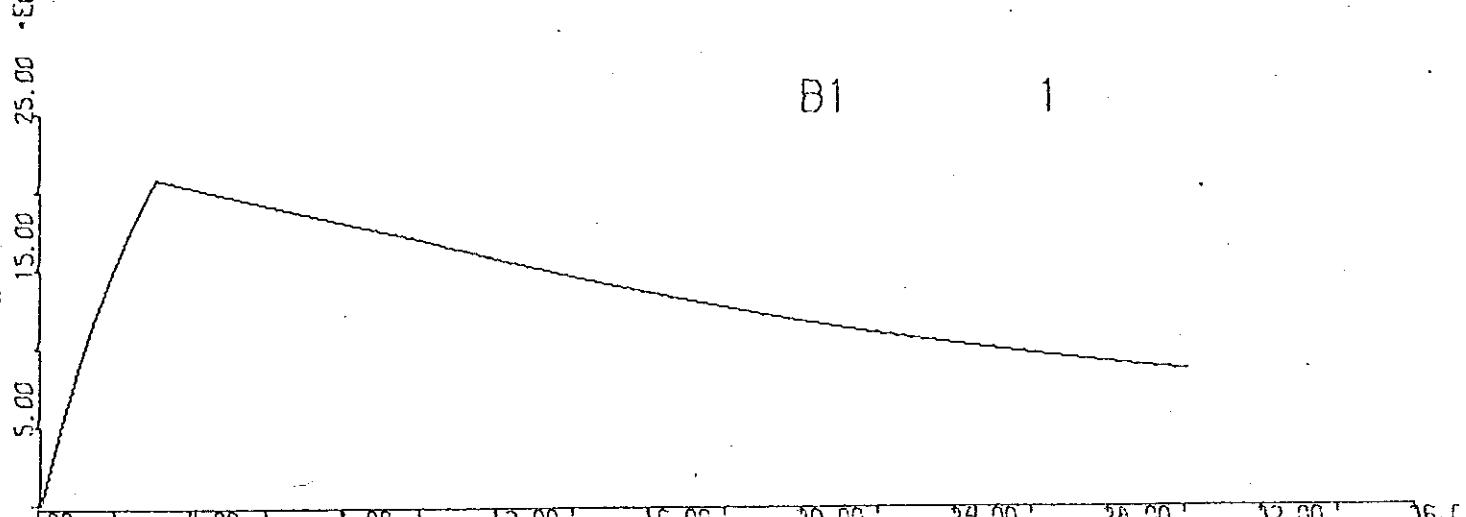
A2

1



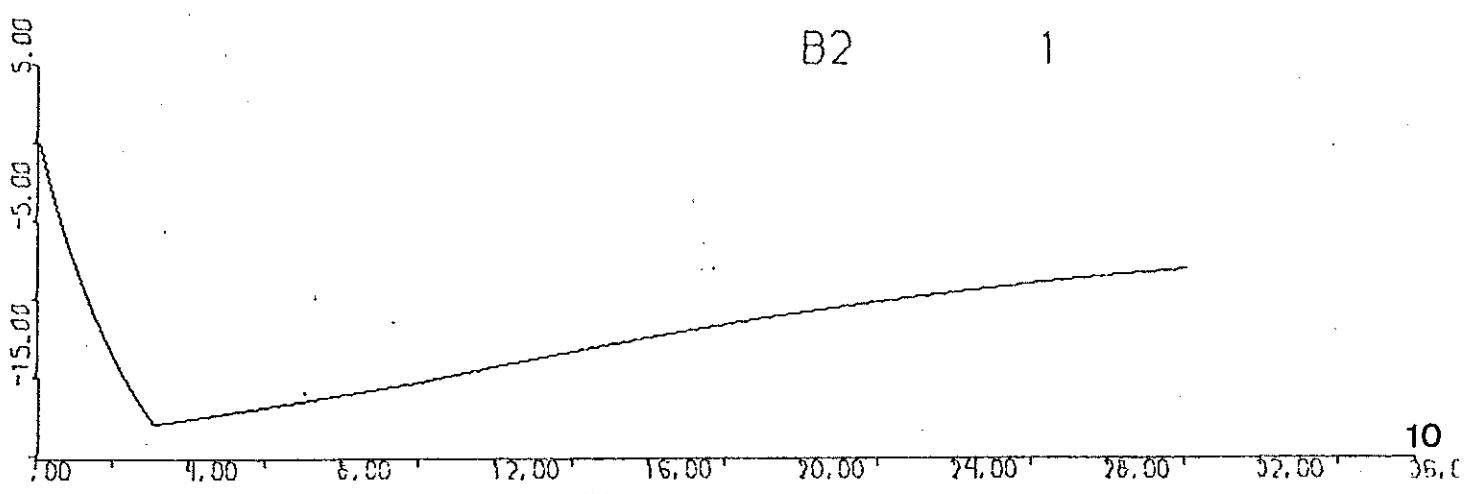
B1

1



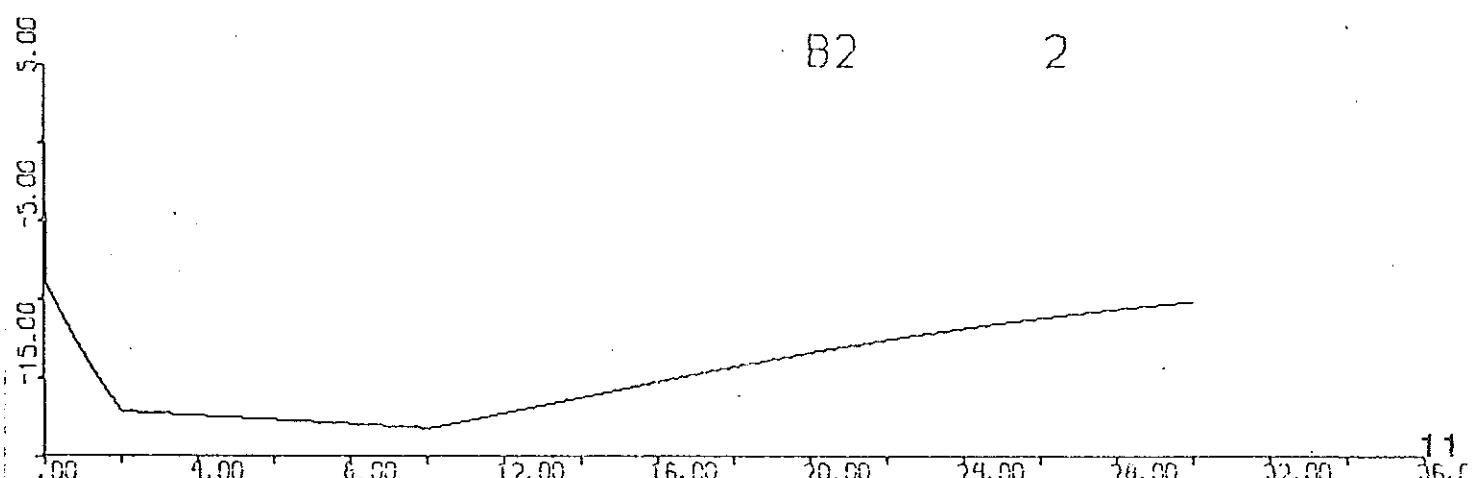
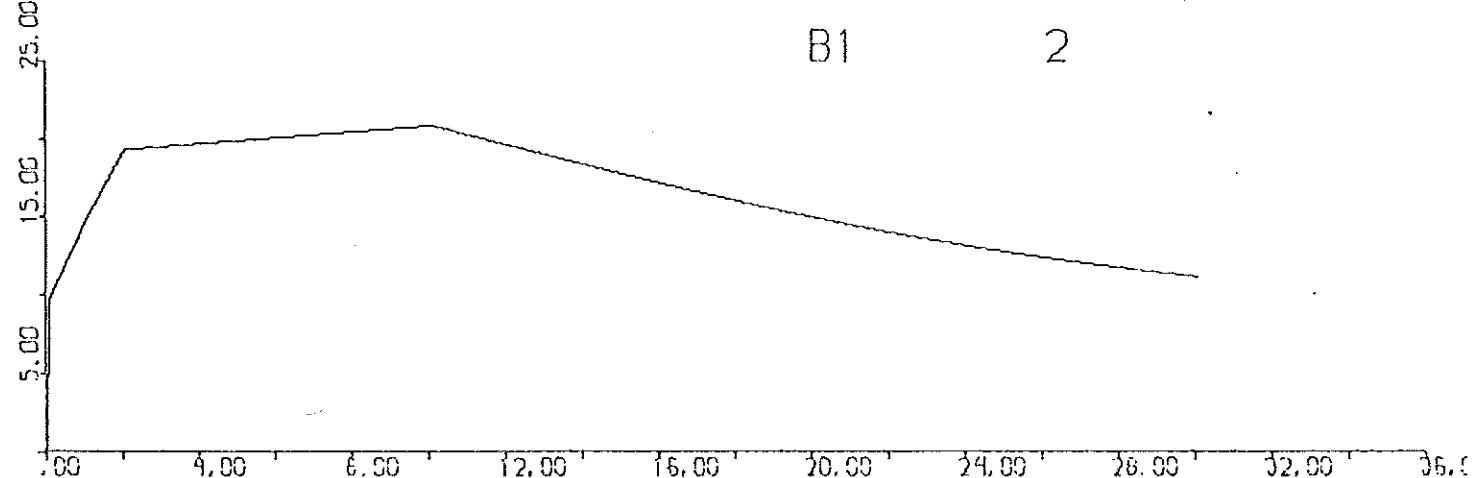
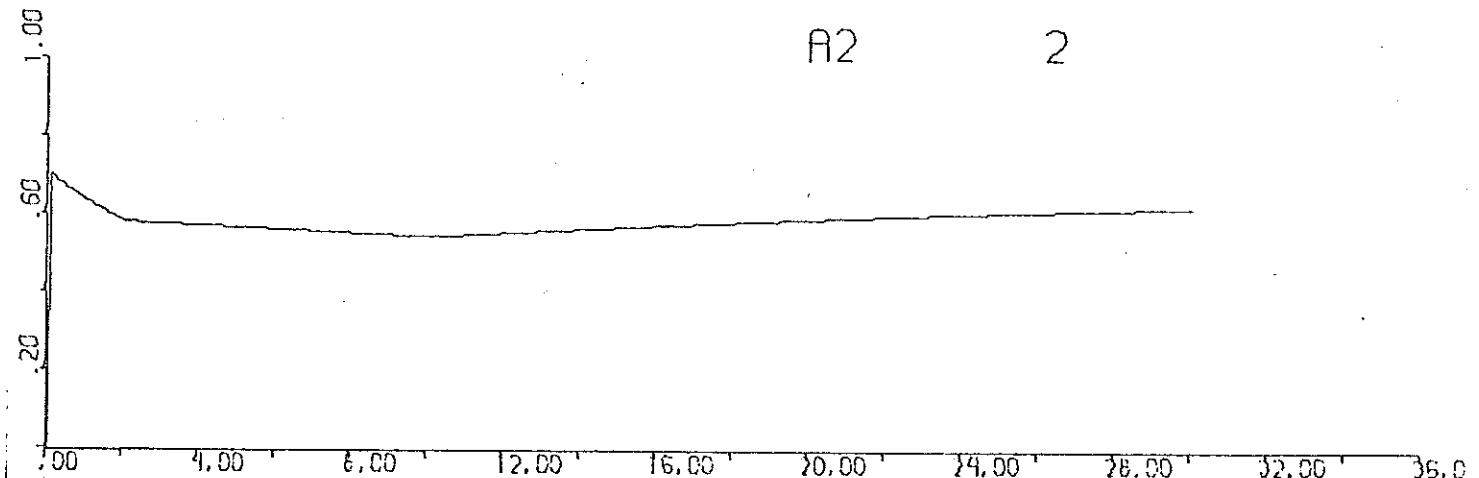
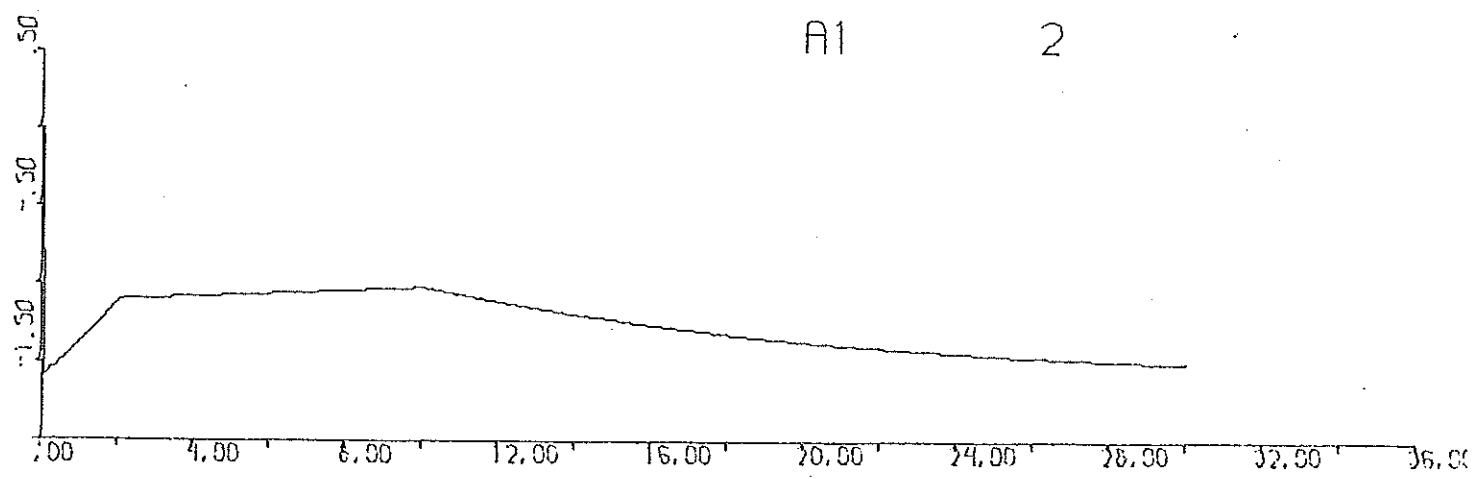
B2

1



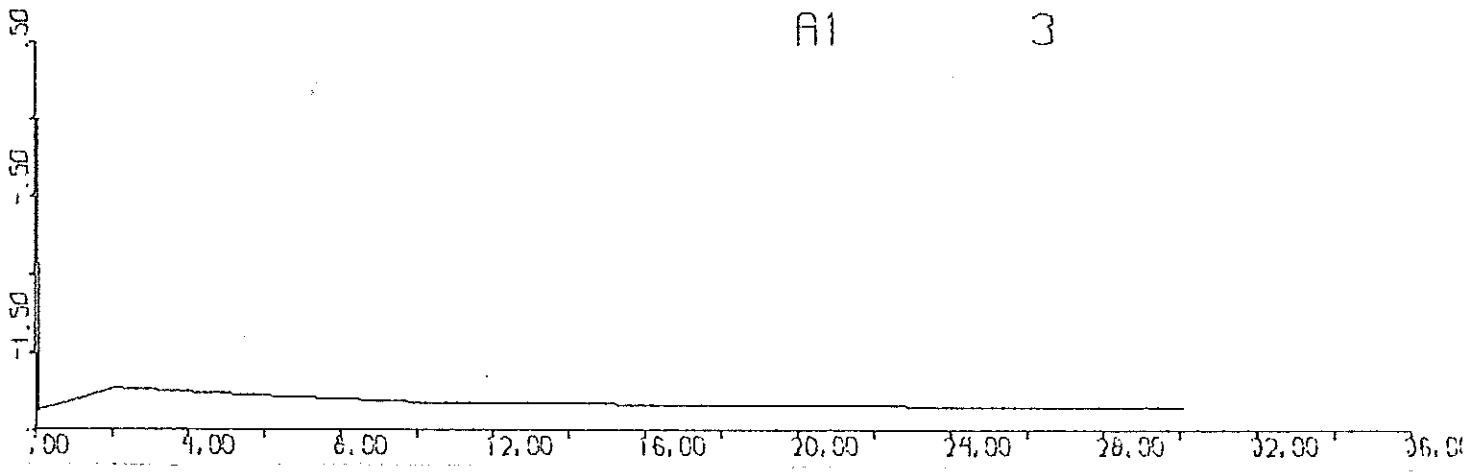
10

Koefficienter i insignal- utsignal relationen,, flygfall 2.



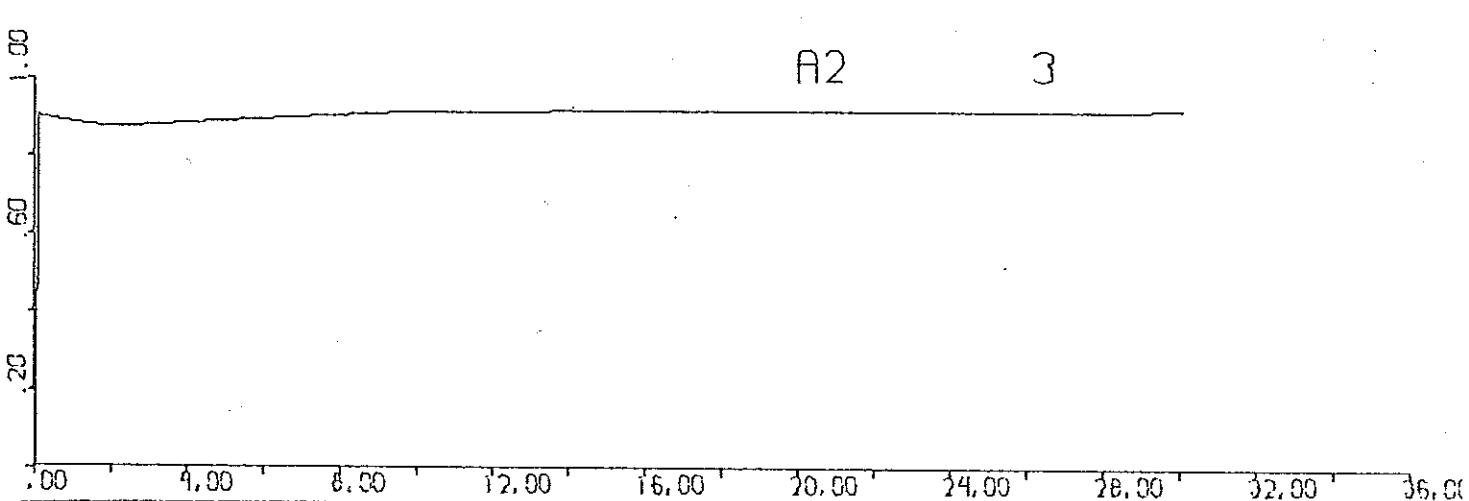
A1

3



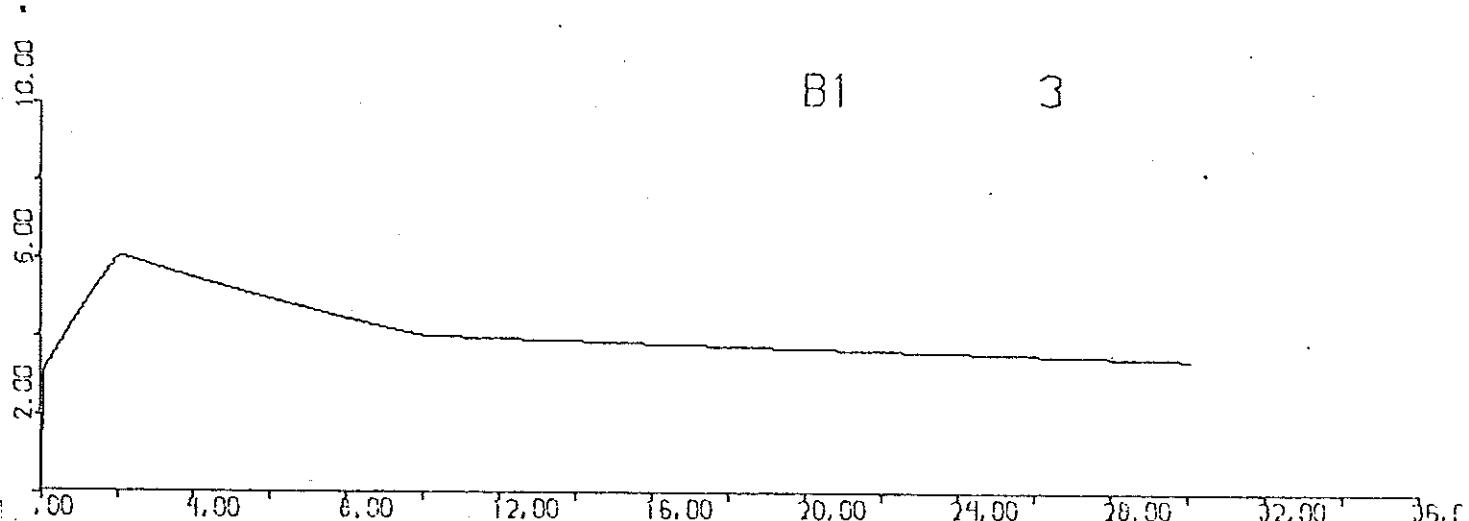
A2

3



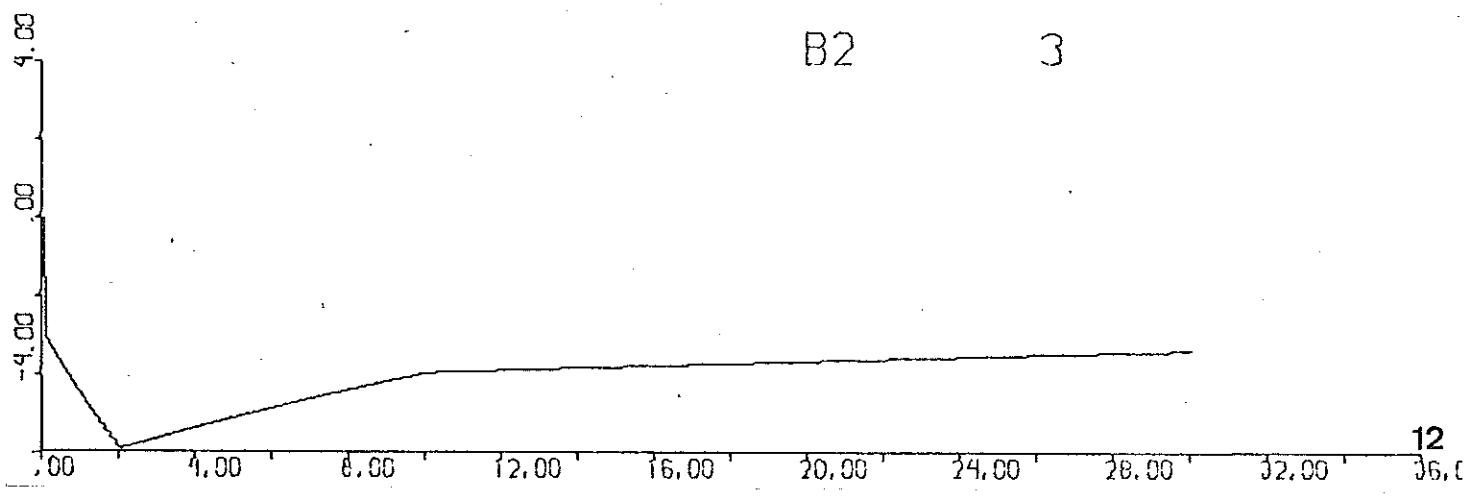
B1

3



B2

3



### 3. PARAMETERUPPSKATTNING.

För att kunna styra roboten på det bästa sättet måste vi kunna uppskatta parametrarna i robotens systemekvation:

$$y(t) + a_1(t)y(t-1) + a_2(t)y(t-2) = b_1(t)u(t-1) + b_2(t)u(t-2) + + \lambda e(t)$$

Vi skall visa att man kan göra dessa uppskattningsar med ett Kalmanfilter, om vi först gör en lämplig approximation för parametervariationen.

#### Kalmanfilter.

Vi betraktar problemet att uppskatta tillståndsvariablerna för ett tidsdiskret system som beskrivs av ekvationerna:

$$x(t+1) = \phi x(t) + \beta v(t) \quad (1a)$$

$$y(t) = \theta x(t) + \lambda e(t) \quad (1b)$$

där  $e(t)$  och  $v(t)$  är vitt brus och

$$\beta\beta^T = R_1$$

$$\lambda^2 = R_2$$

Matriserna  $\phi$  och  $\theta$  får bero av tiden. Ur de observerade värdena på utsignalen  $y(t)$ ,  $y(t-1)$ ,  $y(t-2)$ , ... kan vi göra en uppskattning  $\hat{x}(t+1|t)$  av  $x(t+1)$ .

Enligt Kalman får vi den bästa uppskattningen på följande sätt:

$$\hat{x}(t+1|t) = \phi \hat{x}(t|t-1) + K(t)(y(t) - \theta \hat{x}(t|t-1)) \quad (2a)$$

$$K(t) = \phi P(t) \theta^T (\theta P(t) \theta^T + R_2)^{-1}$$

$P(t)$  är kovariansen av uppskattningen

$$P(t) = E\{(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T\}$$

$$P(t+1) = \phi P(t) \phi^T + R_1 - \phi P(t) \theta^T (\theta P(t) \theta^T + R_2)^{-1} \theta P(t) \phi^T$$

$\hat{x}(t|t-1)$  och  $P(t)$  tilldelas lämpliga begynnelsevärden.

### Uppskattning av parametrar med Kalmanfilter.

I kapitel 2 studerade vi hur parametrarna  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $b_1(t)$  och  $b_2(t)$  varierade.

Om  $x(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix}$  skall vi nu antaga att parametrarna

varierar enligt

$$x(t+1) = x(t) + \beta v(t) \quad (1)$$

där  $v(t)$  är vitt brus och  $\beta\beta^T = R$

Formel (1) verkar vara högst approximativ om man jämför med diagrammen i kapitel 2, men det skall visa sig att den ger ett tillfredsställande resultat.

Robotens systemekvation är

$$y(t) + a_1(t)y(t-1) + a_2(t)y(t-2) = b_1(t)u(t-1) + b_2(t)u(t-2) + \lambda e(t) \quad (2)$$

Om vi inför  $C(t) = (-y(t-1), -y(t-2), u(t-1), u(t-2))$  kan vi skriva om (2) som

$$y(t) = C(t)x(t) + \lambda e(t) \quad (3)$$

Sammanfattningsvis har vi

$$x(t+1) = x(t) + \beta v(t) \quad (4a)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + \lambda e(t) \quad (4b)$$

Jämför med ekvationerna (1a) och (1b) i föregående avsnitt om Kalmanfiltret. Matriserna  $\phi$  och  $\theta$  i dessa är lika med enhetsmatrisen I resp.  $C(t)$  i ekvationerna (4a) och (4b).

Med ett Kalmanfilter kan vi alltså uppskatta robotens parametrar  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $b_1(t)$  och  $b_2(t)$ .

För närmare beskrivning hänvisas till Wieslander [2].

Exempel på parameteruppskattnings med Kalmanfilter.

Av ekvation (2a) med  $\theta = C(t) = (-y(t-1), -y(t-2), u(t-1), u(t-2))$  framgår att parameteruppskattningsarna är beroende av hur vi styr roboten. Det bästa resultatet bör vi få om  $y(t)$  och  $u(t)$  varierar mycket, eftersom systemet då ständigt exiteras.

I våra exempel kommer vi att styra roboten med en modifierad minimalvariansstyrslag (kapitel 4), som gör medelkvadratfelet  $E(y(t)-y_r)^2$  så liten som möjligt.  $y_r$  låter vi variera i de olika exemplen.

Ex. 1

Vi börjar med det konstanta systemet

$$y(t) = 1.5y(t-1) + 0.7y(t-2) = 8u(t-1) - 8u(t-2) + e(t)$$

där koefficienterna är medelvärden av robotens parametrar, dvs.  $Ea_1 \approx -1.5$ ,  $Ea_2 \approx 0.7$ ,  $Eb_1 \approx 8$  och  $Eb_2 \approx -8$ .

Vi styr systemet med en referenssignal  $y_r = \pm 5$  med periodtiden 5 sekunder och där  $e(t)$  är normalfördelat brus  $N(0,1)$ .

R1:s diagonalelement blir i detta fall 0.0001, 0.0001, 0.0001 och 0.0001; övriga element 0. Borde egentligen vara nollmatrisen, ty parametrarna är konstanta. För att insvängningsförloppet skall bli tydligare ligger begynnelsevärdena i detta exempel längre ifrån exakta värdet än i övriga exempel.

Ex. 2

Roboten styrs med en referenssignal  $y_r = \pm 5$  med periodtiden 5 sekunder.

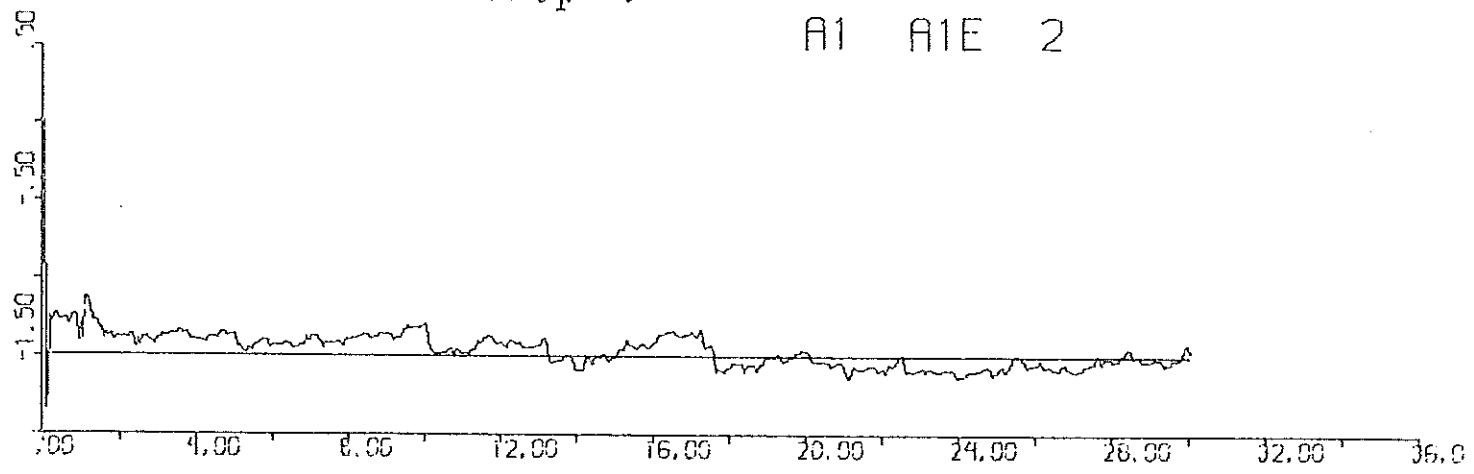
Vi sätter  $\lambda = 1$  och därigenom  $R2 = 1$ . R1 bestäms genom simulering så att medelkvadratfelet blir minimalt.

$$\text{Vi får } R1 = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

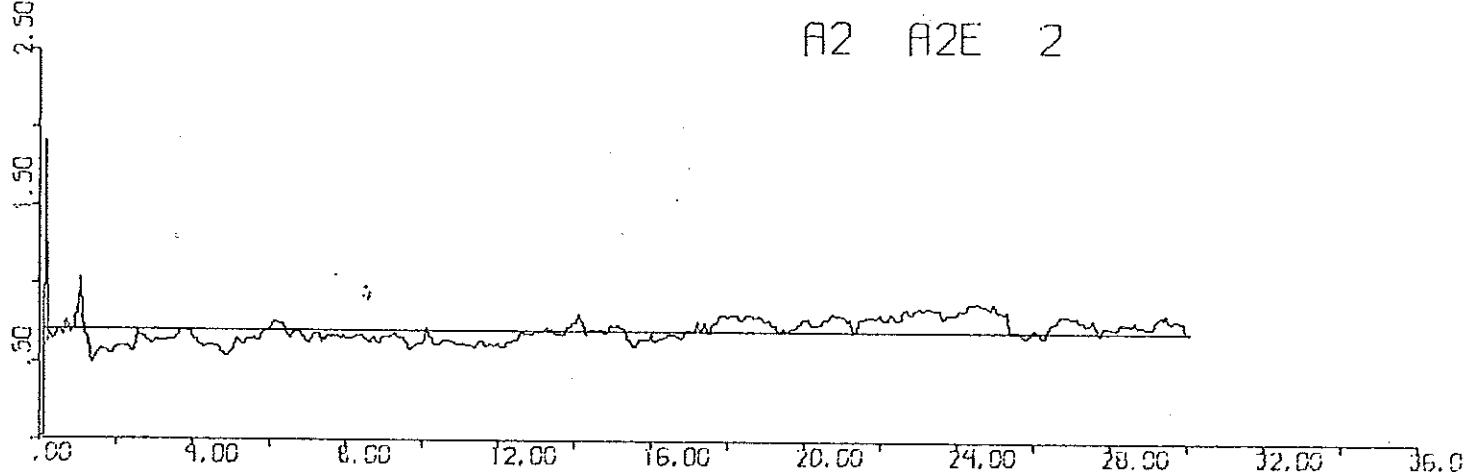
Diagram bifogas för robotfall 1.

Ex. 1,  $y_r = \pm 5$ , R2= 1

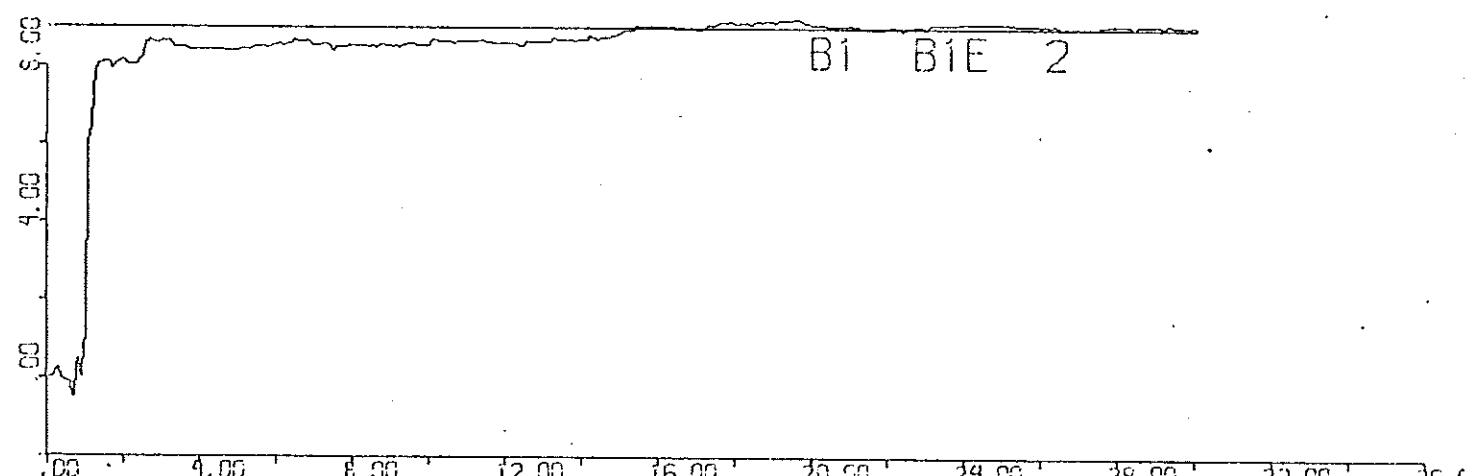
A1 A1E 2



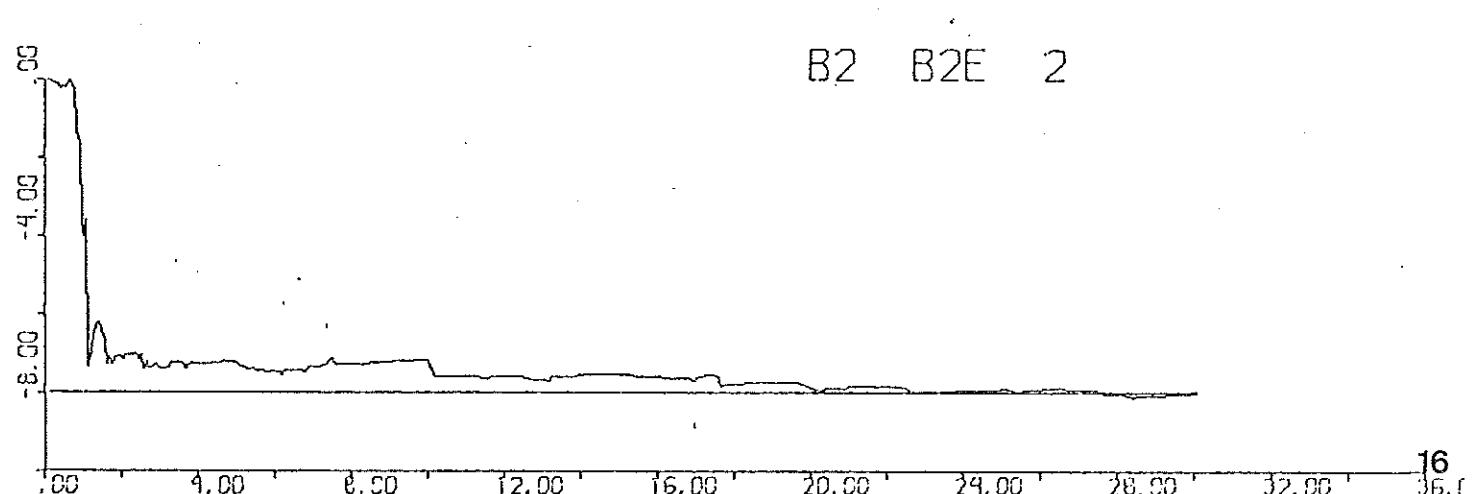
A2 A2E 2



B1 B1E 2

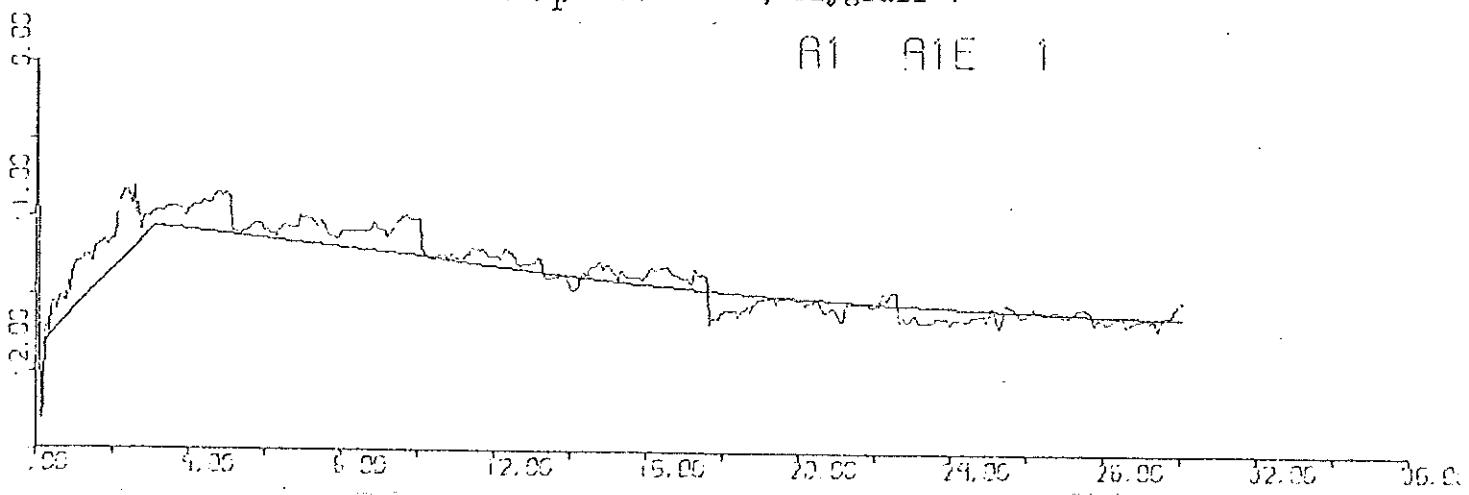


B2 B2E 2

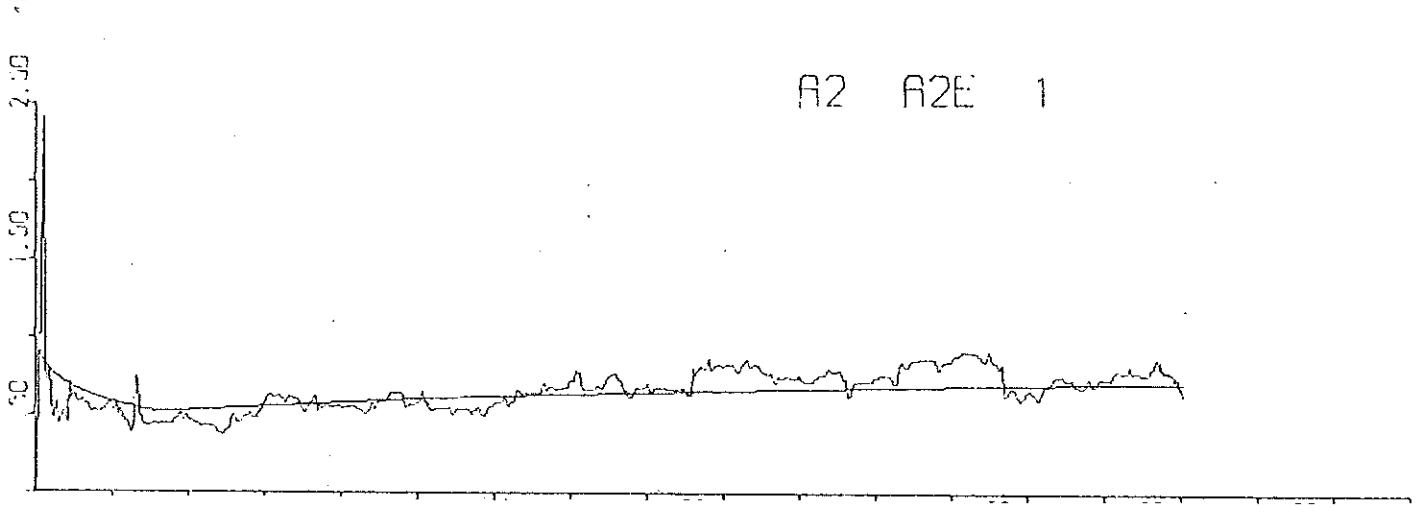


Ex. 2,  $y_r = \pm 5$ , R2= 1, flygfall 1

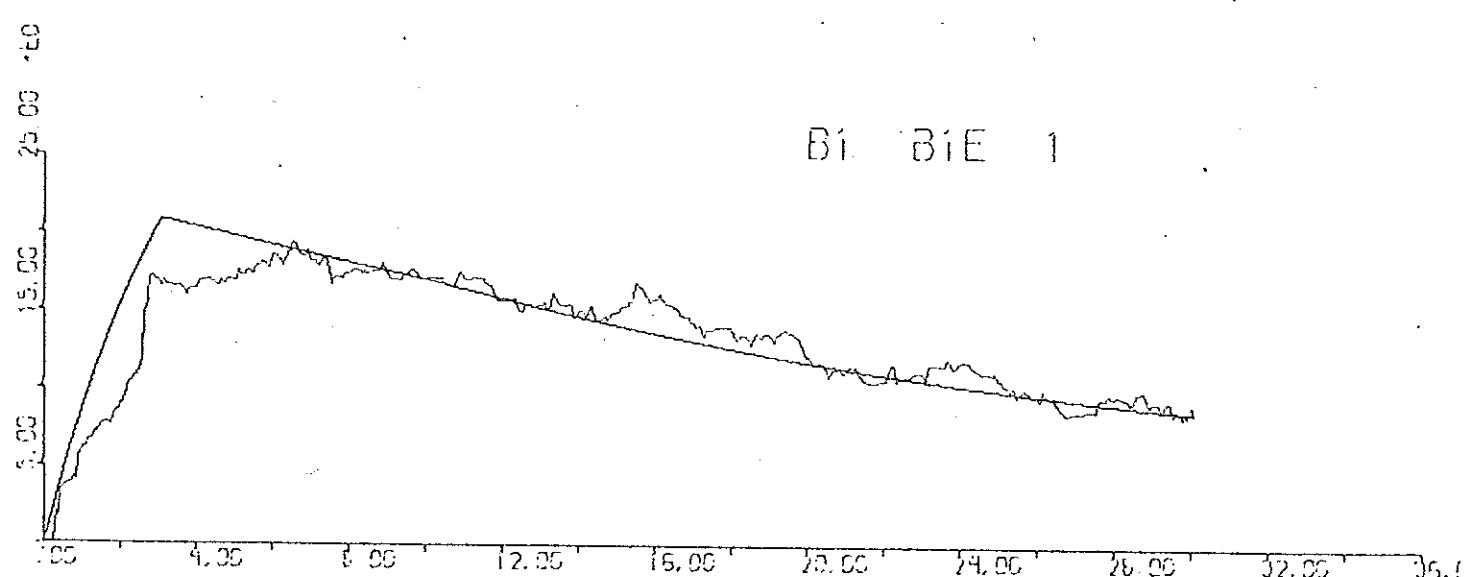
A1 A1E 1



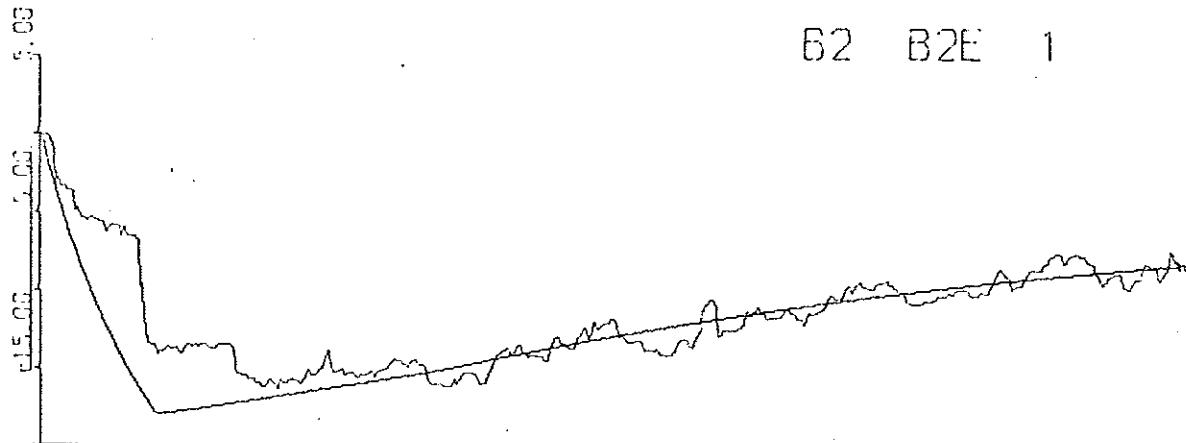
A2 A2E 1



B1 B1E 1



B2 B2E 1



Ex. 3

I detta exempel styrs roboten med konstant  $y_r = 5$ , men i övrigt samma premisser som i exempel 2.

För robotfall 1 bifogas diagram.

Uppskattningarna blir sämre, eftersom  $u(t)$  och  $y(t)$  inte varierar så mycket som i föregående fall.

Ex. 4

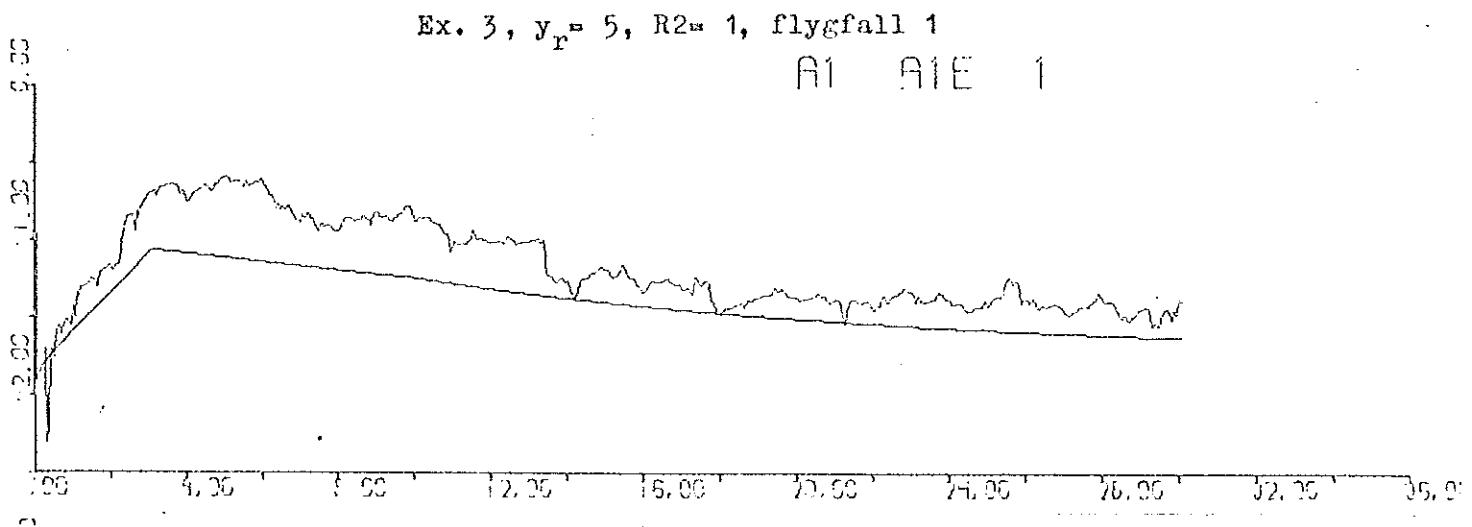
Vi tar bruset från systemet i exempel 1. I diagrammet, som visar robotfall 1, märks tydligt hopp i estimatet.

Ingen information till systemet ges när utsignalen ställt in sig på det nya referensvärdet om parametrarna, ty korrigeringstermen i Kalmanfiltret blir nära lika noll.

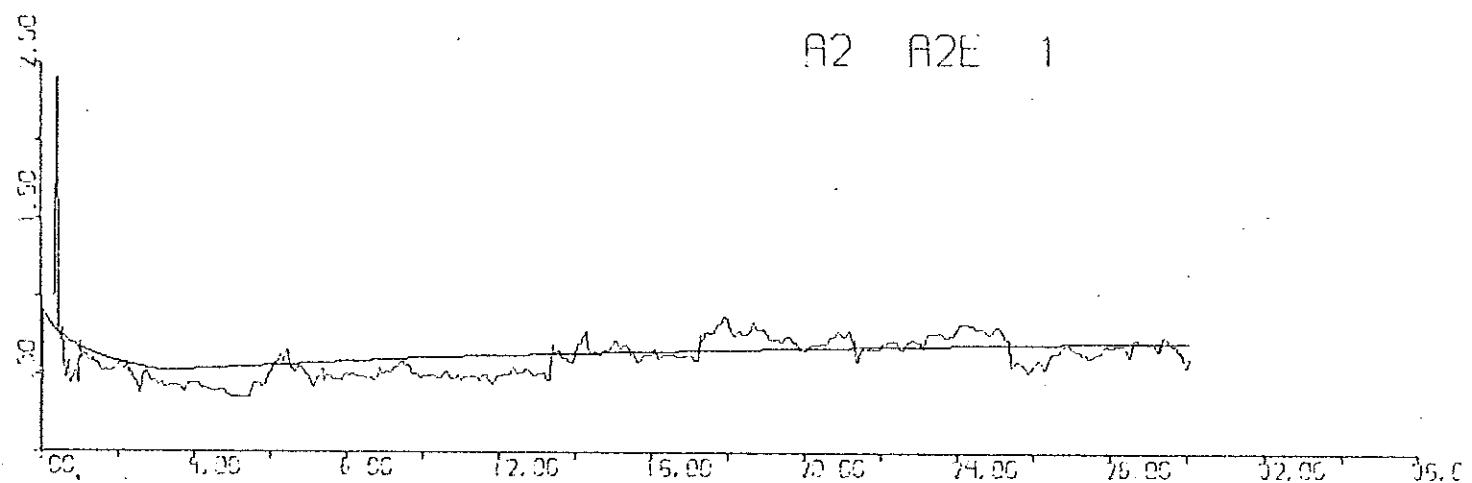
Först när systemet blir exiterat börjar parametrarna ändra sig, dvs. var gång som referensvärdet ändras.

Ex. 3,  $y_r = 5$ , R2= 1, flyfall 1

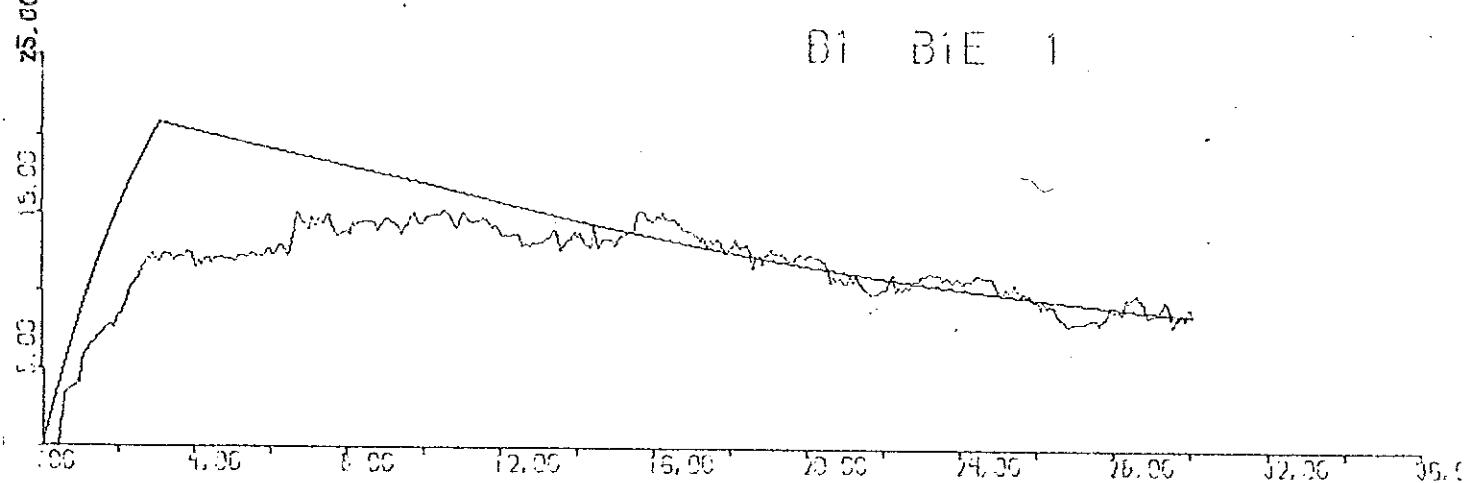
A1 A1E 1



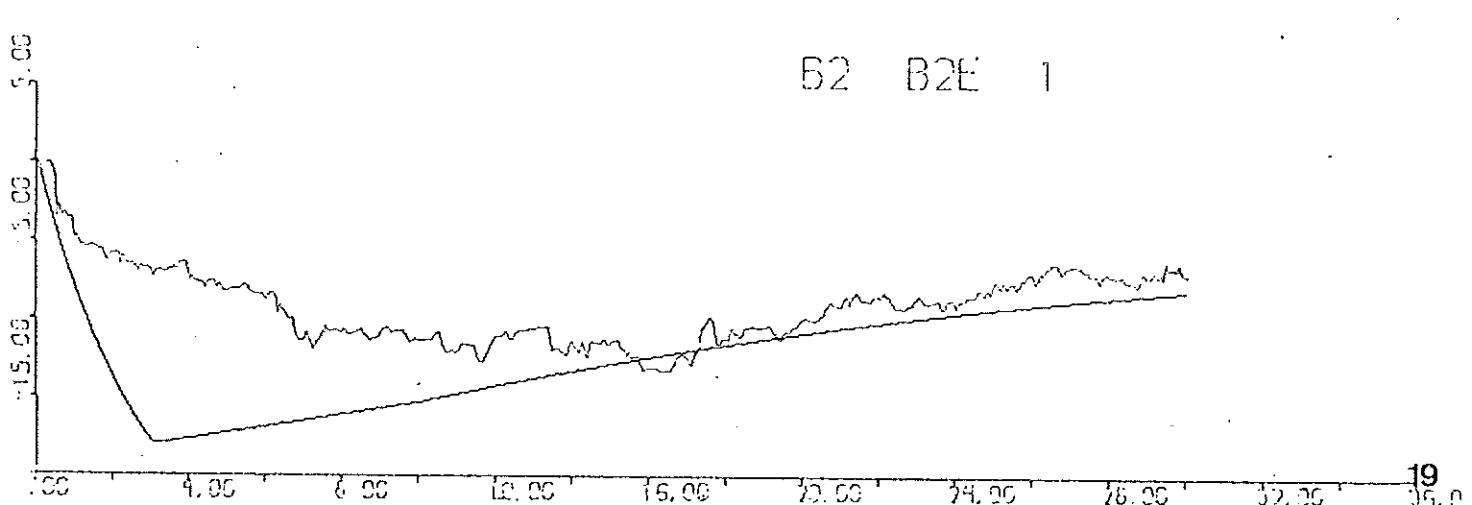
A2 A2E 1



B1 B1E 1

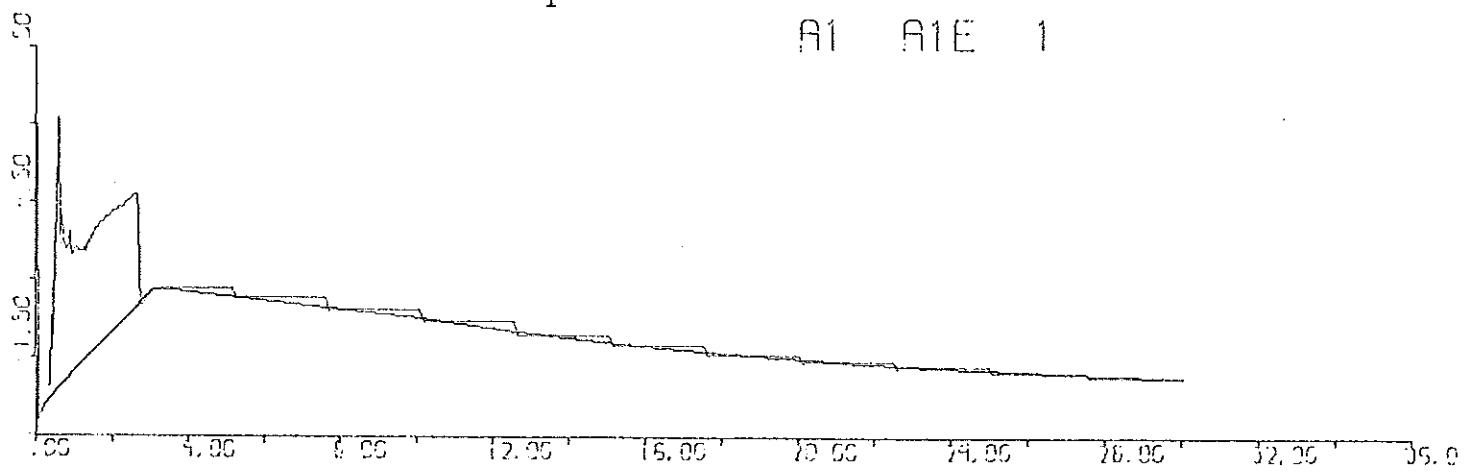


B2 B2E 1

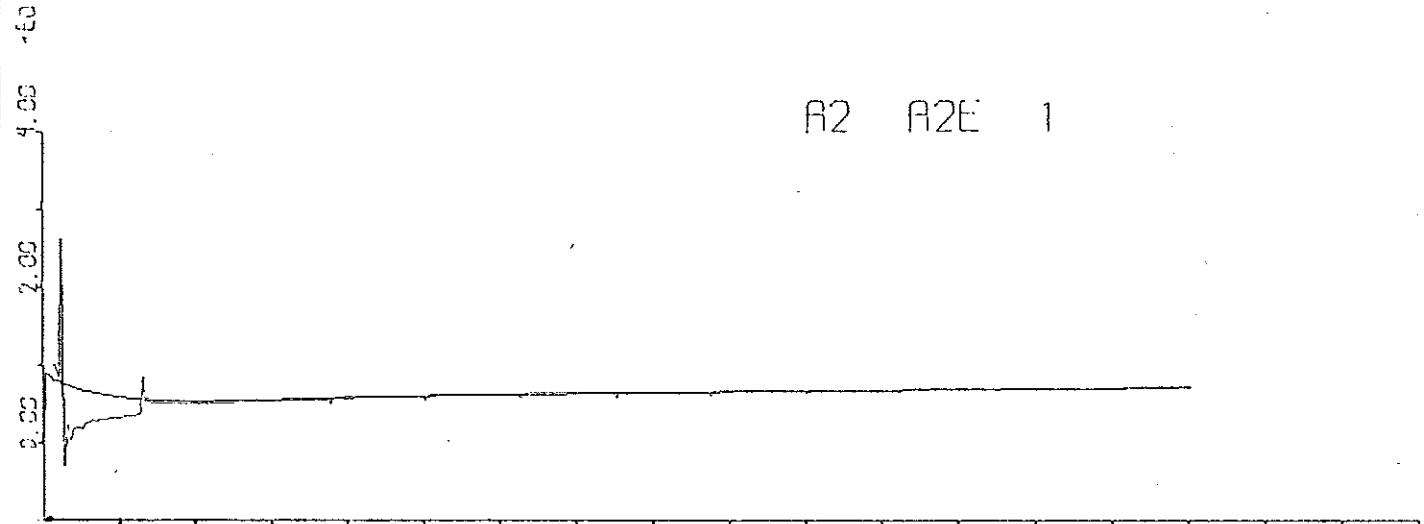


Ex. 4,  $y_r = \pm 5$ , R2 = 0, flygfall 1

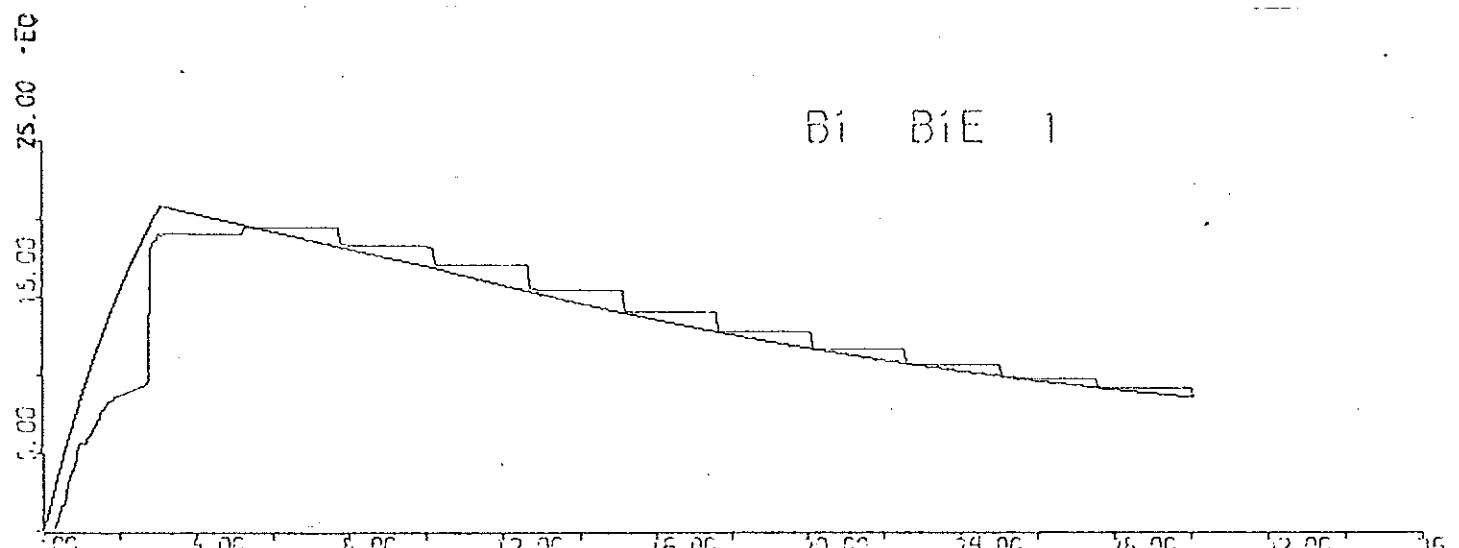
A1 A1E 1



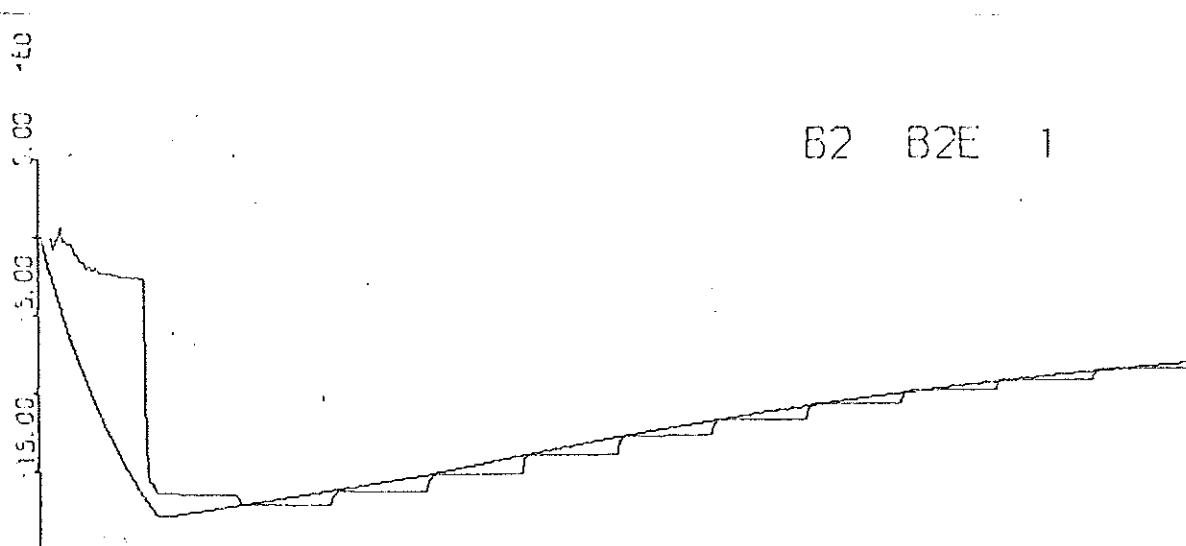
A2 A2E 1



B1 B1E 1

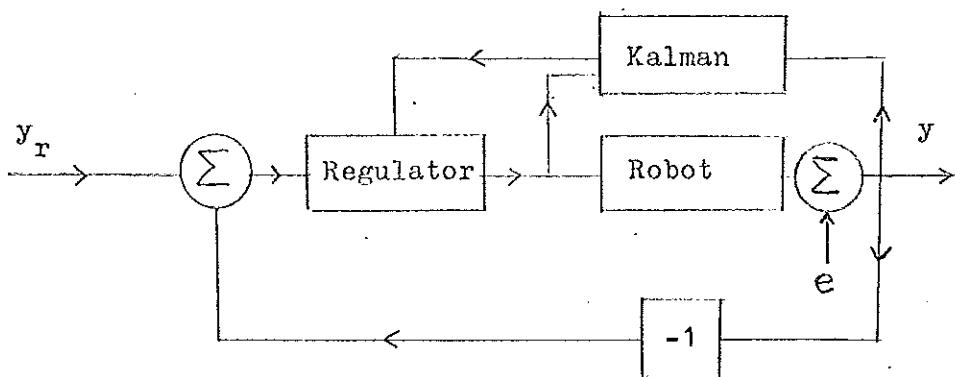


B2 B2E 1



## 4. STYRLAGAR.

### Inledning.



Robotens systemekvation är

$$y(t+2) + a_1(t+2)y(t+1) + a_2(t+2)y(t) = b_1(t+2)u(t+1) + \\ + b_2(t+2)u(t) + \lambda e(t)$$

Parametrarna  $a_k(t)$  och  $b_k(t)$  varierar med tiden. Med ett Kalmanfilter kan man uppskatta dessa. Parameteruppskattningarnas varians och kovarians får man samtidigt från Kalmanfiltret.

Vi har i detta kapitel kallat styrlagen mod. min. var. resp. min. var. styrlagen, vilket är något oegentligt, eftersom det är medelkvadratfelet som minimeras och inte variansen. Om referenssignalen  $y_r = 0$  är det dock variansen som minimeras.

Vårt mål är

1. att kunna styra roboten med så liten avvikelse från en bestämd bana som möjligt
2. att kunna styra roboten med en referenssignal  $y_r$ .

Båda dessa villkor uppfylls om medelkvadratfelet (förkortas i fortsättningen med kvafel)  $E(y(t)-y_r)^2$  minimeras genom att  $u(t)$  tilldelas lämpliga värde för var tidpunkt t.

Vi bestämmer två olika minimalvariansstyrrlagar. I den första antar vi att parametrarna varierar långsamt och att variansen kovariansen för parametrarna kan försummas. Vi får den vanliga minimalvariansstyrrlagen som används vid konstanta parametrar. Om istället variansen och kovariansen inte försummas får vi en bättre och intressantare styrlag, den kommer att i fortsättningen kallas modifierad minimalvariansstyrlag (mod.min.var. styrlag).

Min.var. styrlagen är ett specialfall av mod.min.var. styrlagen och kan lätt erhållas genom att sätta variansen och kovariansen lika med noll i denna.

Minimalvariansstyrrlagarna jämförs med en proportionell och integrerande regulator (PI-regulator). PI-regulatoren bör ge större medkvafel  $E(y(t)-y_r)^2$  men om skillnaden är liten jämfört med min.var. styrlagarna är PI-regulatoren kanske ett bättre alternativ, eftersom den är enklare. Framför allt behövs ju inget Kalmanfilter. För närmare studier av min.var. styrlagar hänvisas till Åström [4].

#### Härledning av minimalvariansstyrrlagarna.

Ett allmänt system med varierande parametrar kan skrivas

$$y(t+k) + a_1(t+k)y(t+k-1) + \dots + a_n(t+k)y(t+k-n) = b_1(t+k)u(t-1) + \dots + e(t+k)$$

Parametrarna  $a_1(t+k)$ ,  $a_2(t+k)$ , ...,  $b_1(t+k)$ ,  $b_2(t+k)$ , ... uppskattas i vart tidsögonblick.

$u(t)$  skall bestämmas så att medkvafelet  $E(y(t)-y_r)^2$  får minimum.

Beroende på vilket som är det sista tillgängliga värdet på utsignalen får vi två olika styrlagar:

1.  $y(t), y(t-1), \dots$  kända vid tidpunkten  $t$ . Insignalen  $u(t)$  kan då vara en funktion av dessa, dvs.  $u(t) = F_1(q^{-1})y(t)$
2.  $y(t-1), y(t-2), \dots$  kända vid tidpunkten  $t$ . Insignalen  $u(t)$  kan då vara en fkn av endast dessa, dvs.  $u(t) = F_2(q^{-1})y(t-1)$

Vi skall visa att om fall 2 gäller dvs.  $u(t) = F_2(q^{-1})y(t-1)$  skall systemets fördröjning ökas ett steg och en min.var. styrlag  $u(t) = R(q^{-1})y(t)$  beräknas på vanligt sätt för detta nya system.

Styrlagen för det ursprungliga systemet blir då  $u(t) = R(q^{-1})y(t-1)$ .

Detta kan visas enligt följande:

Betrakta två system med samma parametrar men olika fördröjningar k resp. k+1

$$y_I(t) = S(u_I(t-k), u_I(t-k-1), \dots)$$

$$y_{II}(t) = S(u_{II}(t-k-1), u_{II}(t-k-2), \dots)$$

Antag att man känner

$$y_I(t-k-1), y_I(t-k-2), \quad \text{obs. ej } y_I(t-k)$$

$$y_{II}(t-k-1), y_{II}(t-k-2),$$

vid tidpunkten t-k resp. t-k-1, samt att

$$y_I(t') = y_{II}(t') \quad \text{för } t' \leq t-k-1$$

Min.var.styrlagar skall nu bestämmas.

Välj i (I)  $u_I(t-k)$  och i (II)  $u_{II}(t-k-1)$  så att medkvafelet  $V_I$  och  $V_{II}$  får minimum. I (II) användes vanlig minimalvariansstrategi, som minimerar  $V_{II}$  för alla t. Om man väljer  $u_I(t-k) = u_{II}(t-k-1)$  för alla t blir  $V_I = V_{II}$  för alla t, ty det motsvarar att fördröjningen ökas med ett steg för system I och detta blir lika med system II.

Är detta den bästa styrlagen för system I, dvs. finns det ej styrsignaler  $u_I'(t-k)$  som ger mindre värde på  $V_I$ ?

Eftersom  $u_I'(t-k)$  i så fall är en funktion av  $y_I(t-k-1)$ ,  $y_{II}(t-k-2)$ , ..., skulle man kunna välja  $u_{II}' = u_I'(t-k)$  och få mindre värde på  $V_{II}$ , vilket dock motsäger antagandet ovan att vi valt en minimalvariansstyrslag för system II.

Följaktligen utgör strategin

$$u_I(t-k) = u_{II}(t-k-1)$$

en minimalvariansstrategi för system I.

Då systemets ordning n= 2 och fördröjning k= 1, vilket gäller för roboten, fås systemet

$$\begin{aligned} y(t) = & -a_1(t)y(t-1) - a_2(t)y(t-2) + b_1(t)u(t-1) + b_2(t)u(t-2) + \\ & + e(t) \end{aligned}$$

För roboten antages att utsignalen  $y(t)$  inte är tillgänglig vid tidpunkten  $t$ , varför en styrslag  $u(t)$  endast kan vara funktion av  $y(t-1), y(t-2), \dots$

Enligt vad som visats ovan ökas fördröjningen k ett steg, dvs.  $k=2$  och en styrslag beräknas för detta system:

$$y(t) = -a_1(t)y(t-1) - a_2(t)y(t-2) + b_1(t)u(t-2) + b_2(t)u(t-3) + e(t)$$

$y(t-1)$  skrives om som funktion av  $y(t-2), y(t-3), u(t-2), u(t-3)$  och  $u(t-4)$ , eftersom  $u(t-2)$  inte kan vara en funktion av  $y(t-1)$ .

$$\begin{aligned} y(t) &= a_1(t)a_1(t-1)y(t-2) + a_1(t)a_2(t-1)y(t-3) - a_1(t)b_1(t-1)u(t-3) \\ &\quad - a_1(t)b_2(t-1)u(t-4) - a_1(t)e(t-1) - a_2(t)y(t-2) + b_1(t)u(t-2) + \\ &\quad + b_2(t)u(t-3) + e(t) = \\ &= (a_1(t)a_1(t-1) - a_2(t))y(t-2) + a_1(t)a_2(t-1)y(t-3) + \\ &\quad + b_1(t)u(t-2) + (b_2(t) - a_1(t)b_1(t-1))u(t-3) - a_1(t)b_2(t-1)u(t-4) \\ &\quad - a_1(t)e(t-1) + e(t). \end{aligned}$$

Medkvafelet  $E(y(t)-y_r)^2$  skall minimeras m.a.p.  $u(t-2)$ , dvs. vid tidpunkten  $t-2$  skall vi bestämma en insignal så att medkvafelet  $E(y(t)-y_r)^2 = E(E(y(t)-y_r)^2 | y_{t-2}))$  får minimum vid tidpunkten  $t$ .

$$Y_{t-2} = (y(t-2), y(t-3), \dots, u(t-2), u(t-3), \dots)$$

$E((y(t)-y_r)^2 | Y_{t-2})$  är medkvafel vid tidpunkten  $t$ , betingat av att  $y(t-2), y(t-3), \dots, u(t-2), u(t-3), \dots$  är kända vid denna tidpunkt.

För roboten utgår vi från att  $y_{t-2}$  är känd vid tidpunkten  $t$ .

För att medkvafel  $E(y(t)-y_r)^2$  då skall bli så liten som möjligt skall  $E((y(t)-y_r)^2 | Y_{t-2})$  minimeras m.a.p.  $u(t-2)$ .

Då medkvafel har minimum gäller

$$\frac{\delta}{\delta u(t-2)} E((y(t)-y_r)^2 | Y_{t-2}) = 0$$

Integrations- resp. derivationsordningen omkastas.

$$0 = E(2 \frac{\delta y(t)}{\delta u(t-2)} (y(t) - y_r) | y_{t-2}))$$

$$\frac{\delta y(t)}{\delta u(t-2)} = b_1(t)$$

$$\begin{aligned} 0 &= E((b_1(t)a_1(t)a_1(t-1) - b_1(t)a_2(t))y(t-2)) + \quad (5) \\ &+ E((b_1(t)a_1(t)a_2(t-1)))y(t-3) + E(b_1^2(t))u(t-2) + \\ &+ E((b_1(t)b_2(t) - b_1(t)a_1(t)b_1(t-1)))u(t-3) - \\ &- E(b_1(t)a_1(t)b_2(t-1))u(t-4) - E(a_1(t)b_1(t)e(t-1)) + \\ &+ E(b_1(t)e(t)) - E(b_1(t))y_r \end{aligned}$$

$e(t-1)$ ,  $a_1(t)b_1(t)$  oberoende och  $Ee(t-1) = 0$

$e(t)$ ,  $b_1(t)$  oberoende och  $Ee(t) = 0$

Det gäller

$$Varx = Ex^2 - (Ex)^2 \Rightarrow Ex^2 = Varx + (Ex)^2$$

$$Cov(x, y) = Exy - ExEy \Rightarrow Exy = Cov(x, y) + ExEy \quad (6)$$

$$E(xyz) = (Ex)cov(y, z) + (Ey)cov(x, z) + (Ez)cov(x, y) + ExEyEz$$

Parametrarna  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $b_1(t)$  och  $b_2(t)$  varierar approximativt enligt (se Kalmanfiltret)

$$\begin{bmatrix} a_1(t+1) \\ a_2(t+1) \\ a_3(t+1) \\ a_4(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 v_1(t) \\ \sigma_2 v_2(t) \\ \sigma_3 v_3(t) \\ \sigma_4 v_4(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$v_n(t)$  är oberoende normalprocesser  $N(0, 1)$

Jämför med R1-matrisen i Kalmanfiltret, som antar värdena  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2$  i diagonalen.

Parametrarna uppskattas med Kalmanfiltret så att  $Ea(t) = \hat{a}(t|t-1)$ . Uppskattningarna har variansen  $P_a(t|t-1)$  resp. kovariansen  $P_{ab}(t|t-1)$ , vilka man får direkt från Kalmanfiltret.

Målet är nu att uttrycka  $u(t-2)$  som funktion dels av parameteruppskattningarna, deras kovarians och varians vid tidpunkten  $t-2$  och dels av  $y(t-3), \dots$  och  $u(t-3), \dots$

Ur (7) erhålls

$$\begin{aligned} E a_1(t) &= E(1 \cdot a_1(t-1) + \sigma_1 v_1(t-1)) = E a_1(t-1) = \hat{a}_1(t-1|t-2) = \hat{a}_1 \\ \text{cov}(a_1(t), b_1(t-1)) &= \text{cov}(a_1(t-1) + \sigma_1 v_1(t-1), b_1(t-1)) = \\ &= \text{cov}(a_1(t-1), b_1(t-1)) = P_{a_1 b_1}(t-1|t-2) \\ &\text{ty } v_1(t-1) \text{ och } b_1(t-1) \text{ oberoende.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(a_1(t), a_1(t-1)) &= \text{cov}(a_1(t-1) + \sigma_1 v_1(t-1), a_1(t-1)) = \\ &= \text{cov}(a_1(t-1), a_2(t-1)) = P_{a_1}(t-1|t-2) = P_{a_1} \\ &\text{osv.} \end{aligned}$$

Vi kan nu m.h.a. (6) beräkna

$$\begin{aligned} E(b_1^2(t)) &= E((1 \cdot b_1(t-1) + \sigma_3 v_3(t-1))^2) = E b_1^2(t-1) + \\ &+ 2E b_1(t-1) \sigma_3 v_3(t-1) + \sigma_3^2 E v_3^2(t-1) = \hat{b}_1^2(t-1|t-2) + P_{b_1}(t-1|t-2) \\ &+ \sigma_3 E b_1(t-1) E v_3(t-1) + \sigma_3^2 \cdot 1 = \\ &= \hat{b}_1^2 + P_{b_1} + \sigma_3^2 \\ E(b_1(t)a_1(t)a_1(t-1)) &= E(b_1(t))\text{cov}(a_1(t), a_1(t-1)) + \hat{b}_1 \hat{a}_1^2 + \\ &+ E(a_1(t))\text{cov}(b_1(t), a_1(t-1)) + E(a_1(t-1))\text{cov}(b_1(t), a_1(t)) = \\ &= \hat{b}_1 \cdot P_{a_1} + \hat{a}_1 P_{a_1 b_1} + \hat{a}_1 P_{a_1 b_1} + \hat{b}_1 \hat{a}_1^2 \\ E(b_1(t)a_2(t)) &= \text{cov}(b_1(t)a_2(t)) + E b_1(t) E a_2(t) = P_{b_1 a_2} + \hat{a}_2 \hat{b}_1 \\ E(b_1(t)a_1(t)a_2(t-1)) &= \hat{b}_1 P_{a_1 a_2} + \hat{a}_1 P_{a_2 b_1} + \hat{a}_2 P_{a_1 b_1} + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{b}_1 \\ E(b_1(t)b_2(t)) &= \hat{b}_1 \hat{b}_2 + P_{b_1 b_2} \\ E(b_1(t)a_1(t)b_2(t-1)) &= \hat{b}_1 P_{a_1 b_2} + \hat{a}_1 P_{b_1 b_2} + \hat{b}_2 P_{a_1 b_1} + \hat{a}_1 \hat{b}_1 \hat{b}_2 \end{aligned}$$

Vi kan nu beräkna styrlagen för det system som har fördröjningen  $k=2$ . Ur ekvation (5) fås

$$\begin{aligned} u(t-2) &= -(\hat{a}_1^2 \hat{b}_1 + 2\hat{a}_1 P_{a_1 b_1} + \hat{b}_1 P_{a_1} - \hat{a}_2 \hat{b}_1 - P_{a_2 b_1})y(t-2) - \\ &- (\hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{b}_1 + \hat{b}_1 P_{a_1 a_2} + \hat{a}_1 P_{a_2 b_1} + \hat{a}_2 P_{a_1 b_1})y(t-3) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (\hat{b}_1 \hat{b}_2 + P_{b_1 b_2} - 2 \hat{b}_1 P_{a_1 b_1} - \hat{a}_1 P_{b_1} - \hat{a}_1^2 b_1^2) u(t-3) + \\
& + (\hat{a}_1 \hat{b}_1 \hat{b}_2 + \hat{b}_1 P_{a_1 b_2} + \hat{a}_1 P_{b_1 b_2} + \hat{b}_2 P_{a_1 b_1}) u(t-4) + \\
& + \hat{b}_1 y_r) / (\hat{b}_1^2 + P_b + \sigma_3^2)
\end{aligned}$$

För roboten eller m.a.o. det ursprungliga systemet med födröjningen  $k=1$  och  $u(t) = f(y(t-1), y(t-2), \dots, u(t-1), \dots)$  får vi

$$\begin{aligned}
u(t) = & - (\hat{a}_1^2 \hat{b}_1 + 2 \hat{a}_1 P_{a_1 b_1} + \hat{b}_1 P_{a_1} - \hat{a}_2 \hat{b}_1 - P_{a_2 b_1}) y(t-1) - \\
& - (\hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{b}_1 + \hat{b}_1 P_{a_1 a_2} + \hat{a}_1 P_{a_2 b_1} + \hat{a}_2 P_{a_1 b_1}) y(t-2) - \\
& - (\hat{b}_1 \hat{b}_2 + P_{b_1 b_2} - 2 \hat{b}_1 P_{a_1 b_1} - \hat{a}_1 P_{b_1} - \hat{a}_1^2 b_1^2) u(t-1) + \\
& + (\hat{a}_1 \hat{b}_1 \hat{b}_2 + \hat{b}_1 P_{a_1 b_2} + \hat{a}_1 P_{b_1 b_2} + \hat{b}_2 P_{a_1 b_1}) u(t-2) + \\
& + \hat{b}_1 y_r) / (\hat{b}_1^2 + P_b + \sigma_3^2) \tag{8}
\end{aligned}$$

Min.var. styrlagen får vi ur (8) genom att kovarianserna och varianserna sättes till noll.

$$\begin{aligned}
u(t) = & - (\hat{a}_1^2 - \hat{a}_2) / \hat{b}_1 \cdot y(t-1) - \hat{a}_1 \hat{a}_2 / \hat{b}_1 \cdot y(t-2) - (\hat{b}_2 - \hat{a}_1 \hat{b}_1) / \hat{b}_1 \cdot u(t-1) \\
& + \hat{a}_1 \hat{b}_2 / \hat{b}_1 \cdot u(t-2) + y_r / \hat{b}_1 \tag{9}
\end{aligned}$$

För den allmänna lösningen av mod.min.var. med  $u(t) = F(y(t-1), \dots)$  och godtycklig ordning hänvisas till Wieslander - Wittenmark [3].

### PI-regulatorn.

För att konstruera en PI-regulator för roboten, utgår vi från ett kontinuerligt system. För ett sådant system blir ekvationen för PI-regulatorn

$$u(t) = -K(y(t) - y_r) - T^{-1} \int_0^t (y(s) - y_r) ds \quad (10)$$

(10) deriveras

$$\dot{u}(t) = -Ky'(t) - T^{-1}(y(t) - y_r)$$

Om vi sätter  $\dot{x}(t) = y(t) - y_r$  kan regulatorn skrivas

$$\dot{x}(t) = 0 \cdot x(t) + y(t) - y_r$$

$$u(t) = -T^{-1}x(t) - K(y(t) - y_r)$$

Vi samplar detta system med samplingsintervallet  $h$

$$x(t+1) = \phi x(t) + f(y(t) - y_r)$$

$$u(t) = -T^{-1}x(t) - K(y(t) - y_r)$$

$$\text{där } \phi = e^{0 \cdot h} = 1; \quad f = \int_0^h e^{0 \cdot s} ds \cdot 1 = h$$

$$x(t) = (q-1)^{-1}h(y(t) - y_r)$$

$$u(t) = -T^{-1} \cdot (q-1)^{-1}h(y(t) - y_r) - K(y(t) - y_r) \quad (11)$$

Vi har antagit för roboten att  $y(t)$  inte är tillgängligt vid tiden  $t$ .  $u(t)$  kan då inte vara en funktion av  $y(t)$  utan endast av  $y(t-1)$ .

I ekvation (11) ersätttes  $y(t)$  med  $y(t-1)$

$$u(t) = -T^{-1}(q-1)^{-1}h(y(t-1) - y_r) - K(y(t-1) - y_r)$$

Detta kan skrivas om som

$$u(t) = u(t-1) - K(y(t-1) - y_r) + (K - T^{-1}h)(y(t-2) - y_r)$$

eller enklare uttryckt

$$u(t) = u(t-1) - K_1(y(t-1) - y_r) + K_2(y(t-2) - y_r) \quad (12)$$

$$\text{där } K_1 = K \text{ och } K_2 = K - h/T$$

Konstanterna  $K_1$  och  $K_2$  skall bestämmas så att systemet robot+regulator blir stabilt och samtidigt skall förlustfunktionen  $V = \sum_t (y(t) - y_r)^2$  bli minimal.

$V$  är ett mått på hur bra roboten följer styrsignalen  $y_r$ . Genom att testa olika värden på  $K_1$  och  $K_2$  bör vi kunna få optimala värden.

För att få en uppfattning om  $K_1$ :s och  $K_2$ :s storleksordning, kan vi använda Schur-Cohns stabilitetskriterium.

Karakteristiska ekvationen för systemet är

$$z^4 + (a_1 - 1)z^3 + (a_2 - a_1 + K_1 b_1)z^2 + (-a_2 - K_2 b_1 + K_1 b_2)z - K_2 b_2 = 0$$

Parametrarna  $a_1(t)$  och  $a_2(t)$  varierar inte så mycket och kan approximeras med sina medelvärden.  $b_1(t)$  och  $b_2(t)$  kan stängas in mellan sina minsta resp. största värden.

$$a_1 \approx -1.5$$

$$a_2 \approx 0.7$$

$$0 \leq b_1 \leq 21$$

$$-18.5 \leq b_2 \leq 0$$

Om  $0 < K_1 < 4.5$  och  $-0.05 \leq K_2 \leq 0.05$  bör det finnas några värden i dessa intervall som uppfyller våra villkor.

Vid körföring av robot+PI-regulator på dator fann vi att  $K_1 = 0.06$  och  $K_2 = 0.05$  gav bästa värde på förlustfunktionen  $V$ .

Exempel på användningar av styrlagarna.

För att avgöra hur bra en styrlag begränsar bruset hos utsignalen  $y(t)$ , använder vi förlustfunktionen

$V = \sum_t (y(t) - y_r)^2$ . Om summan räknas från starten  $t=0$  kommer insvägningsförloppet med i denna, vilket kan ge V stora värden. Detta kan vara missvisande om V skall vara ett mått på styrlagens förmåga att minimera variansen. Summan får istället räknas från en tidpunkt då insvägningen upphört.

Vi kommer att använda de tre olika styrlagarna på samma sätt. Först kommer ett steg  $y_r = 5$  läggas på systemet robot+styrlag och sedan en pulsfunktion  $y_r = \pm 5$  med perioden 5 sekunder. I kapitlet om parameteruppskattning hade vi samma referensvärde  $y_r$  i de olika exemplen.

Ex. 5

I en tabell redovisas hur V blir dels då summan beräknas från  $t=0$  sekunder och dels  $t=2.55$  sekunder, när  $y_r = 5$  och  $\lambda = 1$ . R1:s diagonalelement sättes till 0.001, 0.001, 0.1 och 0.1 enligt exempel 1.

	Mod.min.var. flygfall			Min.var. flygfall			PI flygfall		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
V0	3100	12500	6280	111000	2890	5870	6220	4030	53200
V2.55	2105	2100	5240	≈2000	2130	5370	6050	3300	51000
V0	1630	1435	2580	1630	1435	2580	1630	1435	2580

$$\text{där } V_0 = \sum_0^{30} (y(t) - y_r)^2$$

$$V_{2.55} = \sum_{2.55}^{30} (y(t) - y_r)^2$$

$$V_0 = \sum_{2.55}^{30} (1+a_1^2) \lambda^2$$

Av tabellen framgår att mod.min.var. är den styrlag, som ger minst varians hos utsignalen för  $t \geq 2.55$  s. Min.var. styrlagen är något sämre och PI-regulatorn betydligt sämre.

Insvängningsförloppet ger stort bidrag till förlustfunktionen  $V$  om mod.min.var. styrlagen användes för flygfall 2, eller om min.var. styrlagen användes för flygfall 1. Det är naturligtvis en nackdel om insvängningen är kraftigt oscillativ eller alltför långsam, varför det är diskutabelt om min.var. styrlagen kan användas i flygfall 1 utan vissa ändringar.

Eftersom mod.min.var. och min.var. styrlagarna har likartade egenskaper men mod.min.var. styrlagen är något bättre, så kommer vi i de följande exemplen att koncentrera vårt intresse till denna styrlag och till PI-regulatorn.

#### Ex. 6

En pulsfunktion  $y_r = \pm 5$  med perioden  $t = 5$  sek. användes för systemet robot+styrlag då  $\lambda = 1$ . Enligt kap. 3 blir uppskattningarna av parametrarna bättre när  $y_r$  varierar än när det är konstant. Mod.min.var. styrlagen bör därför ge bättre resultat i detta exempel än i föregående.

	Mod.min.var. flygfall			PI flygfall		
	1	2	3	1	2	3
$V_0 = \sum_{\sigma}^{30} (y - y_r)^2$	4790	13800	6210	15100	13500	63000

Trots att vi får ett insvängningsförlopp var gång  $y_r$  ändrar värde (totalt 12 ggr) blir förlustfunktionen inte så mycket sämre än i föregående fall. För flygfall 3 är den t.o.m. bättre.

PI-regulatorns förlustfunktion kan endast jämföras med mod.min.var. i flygfall 2, medan den i övrigt är mycket sämre.

I de bifogade diagrammen har insignalen, utsignalen samt förlustfunktionen plottats för mod.min.var. och PI-regulatorn för flygfall 1, för mod.min.var. dessutom för flygfall 2 och 3.

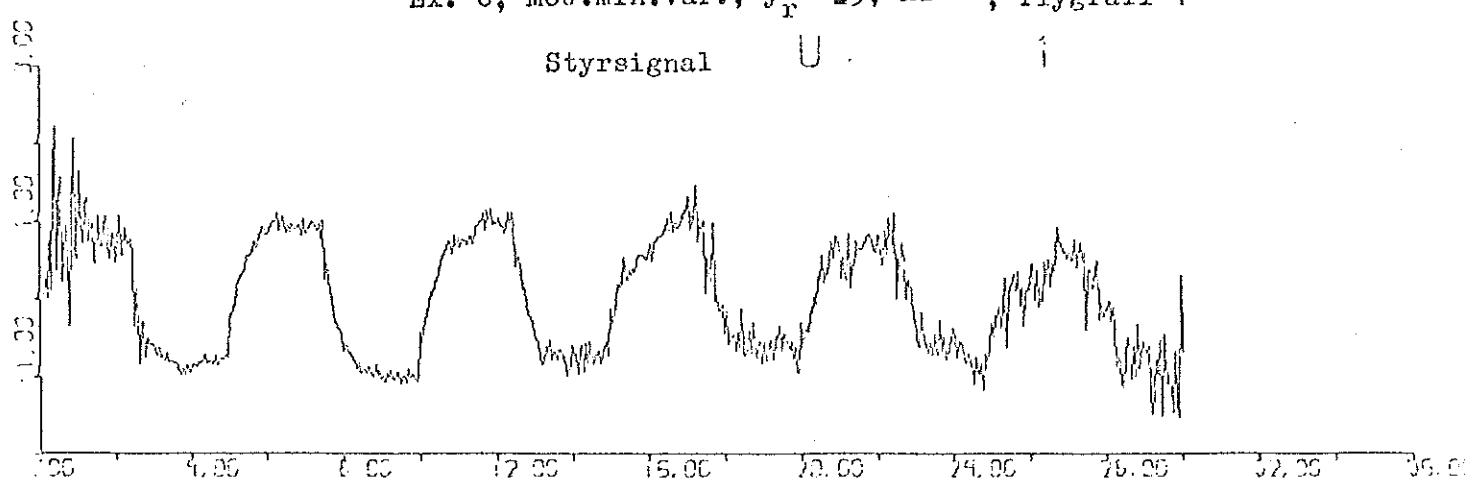
Den optimala förlustfunktionen  $\sum_t R_2(1+a_1^2)$  är också indragen i diagrammen.

Ex. 6, Mod.min.var.,  $y_r = \pm 5$ , R2= 1, flygfall 1

Styrsignal

U

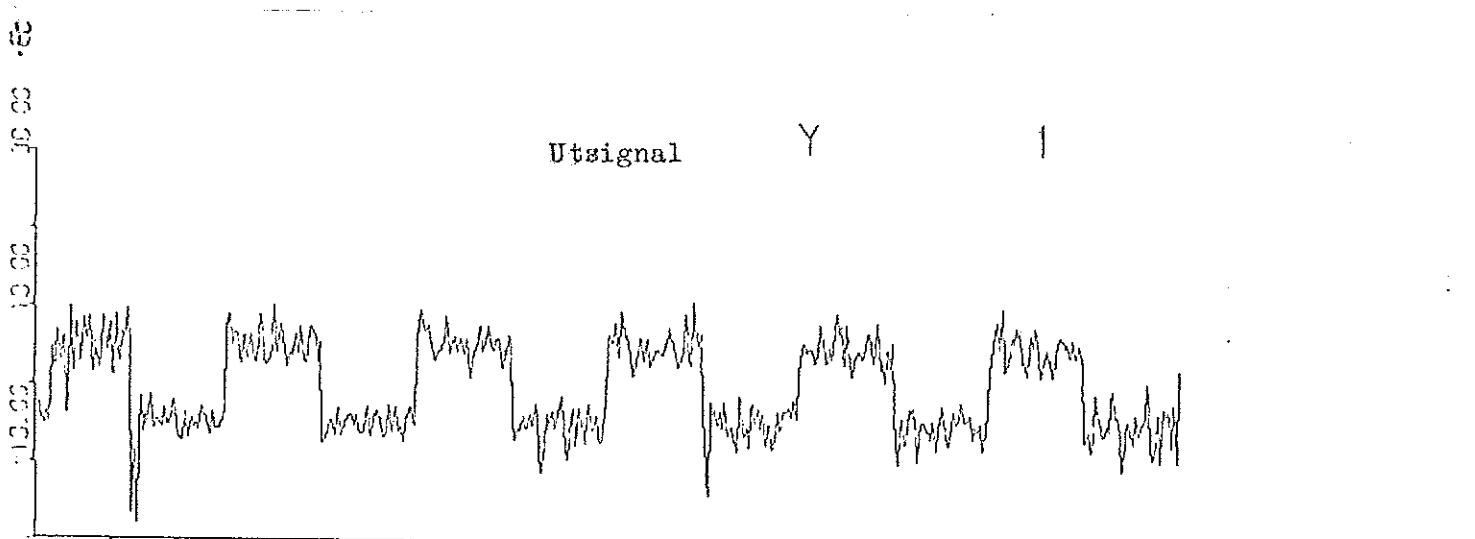
I



Utsignal

Y

I

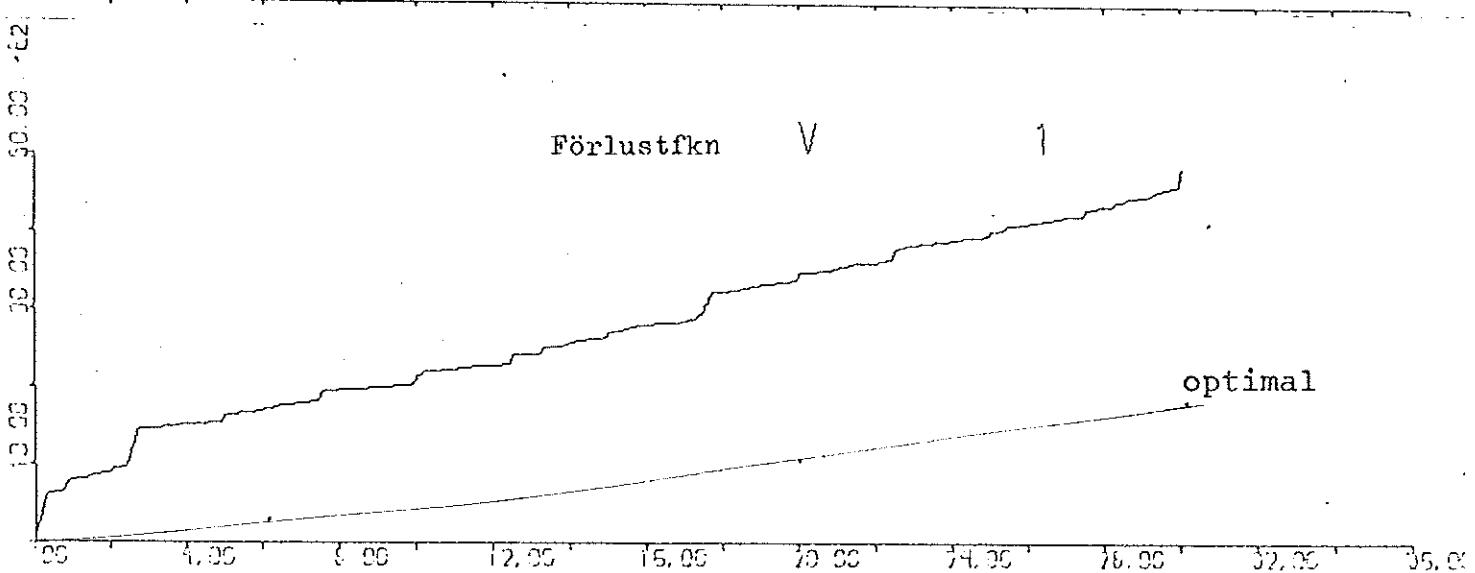


Förlustfkn

V

I

optimal

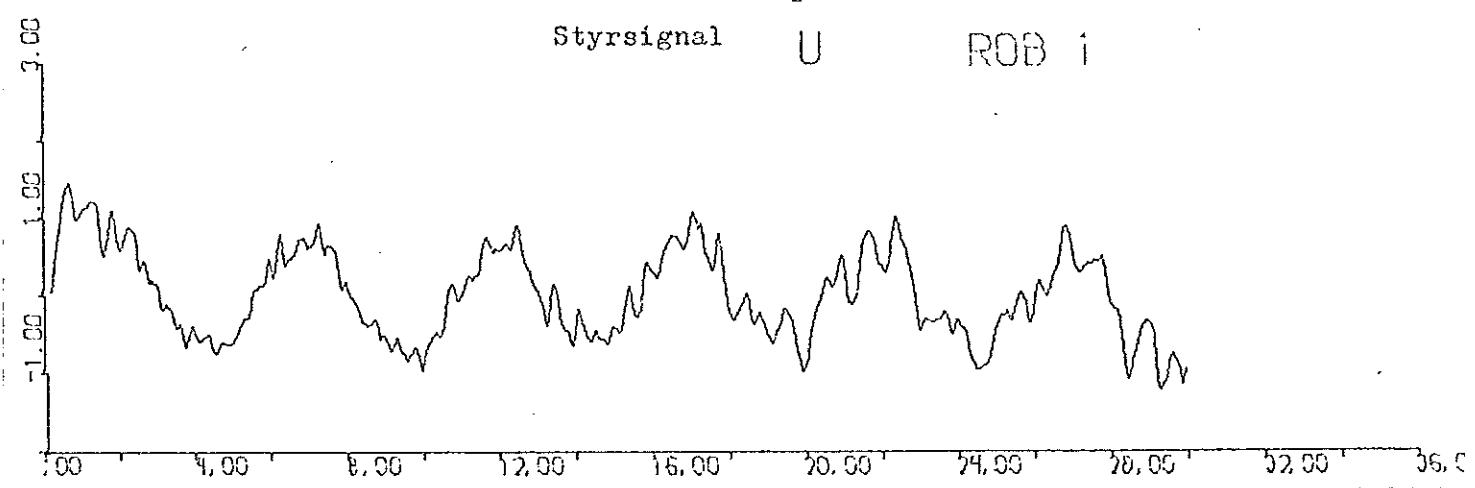


Ex. 6, PI-regulator,  $y_r = -2$ ,  $n_{\text{deg}} = 1$ , flygfall 1

Styrsignal

U

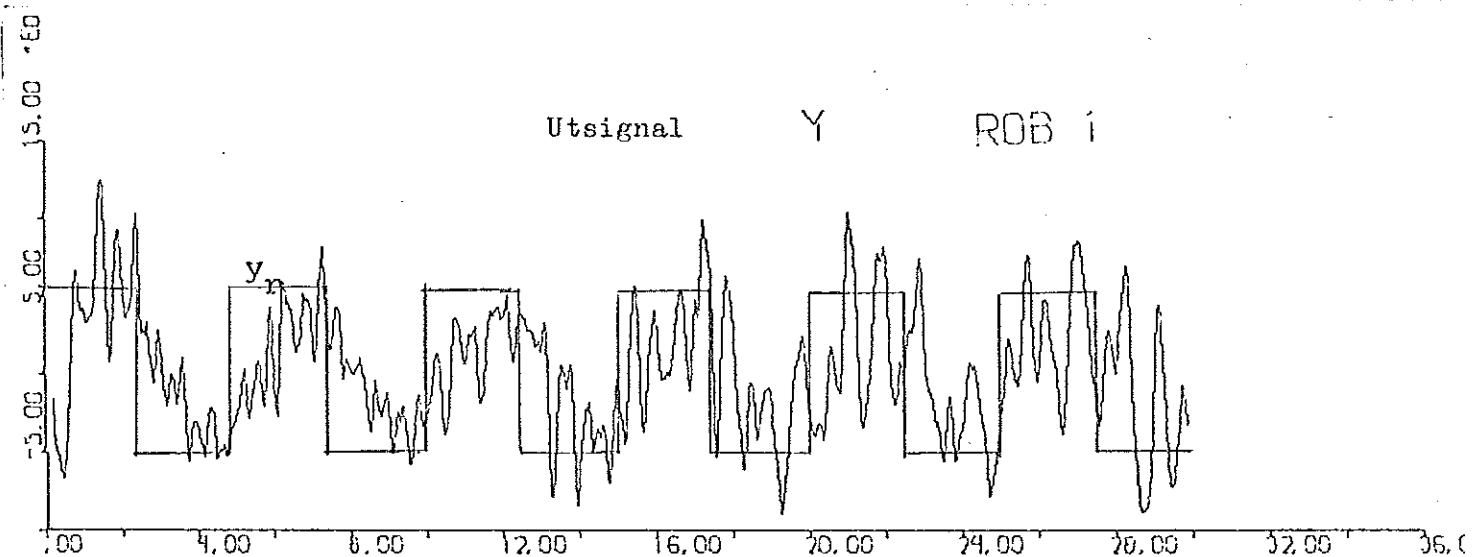
ROB 1



Utsignal

Y

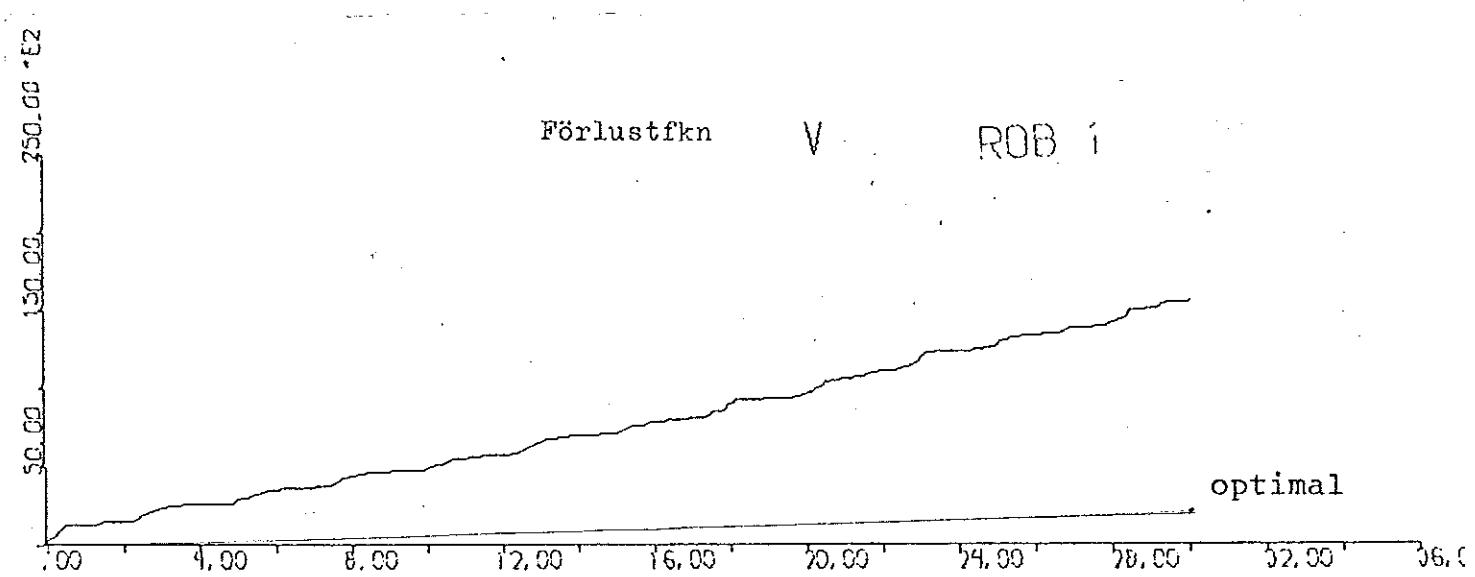
ROB 1



Förlustfkn

V

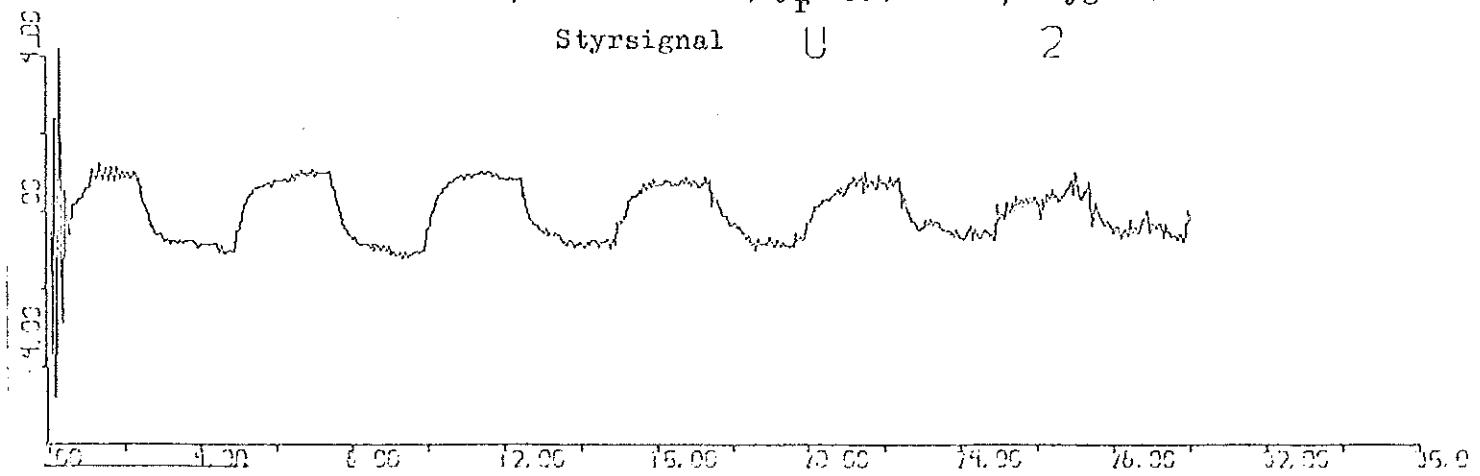
ROB 1



Ex. 6, Mod.min.var.,  $y_r = \pm 5$ , R2= 1, flygfall 2

Styrsignal

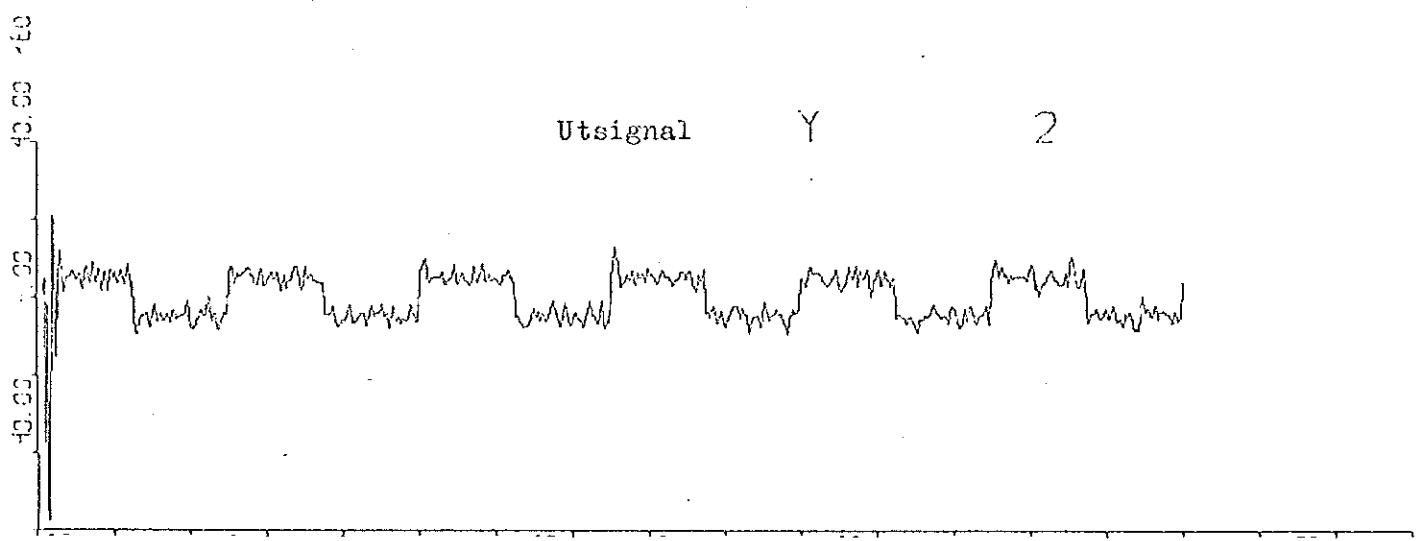
2



Utsignal

Y

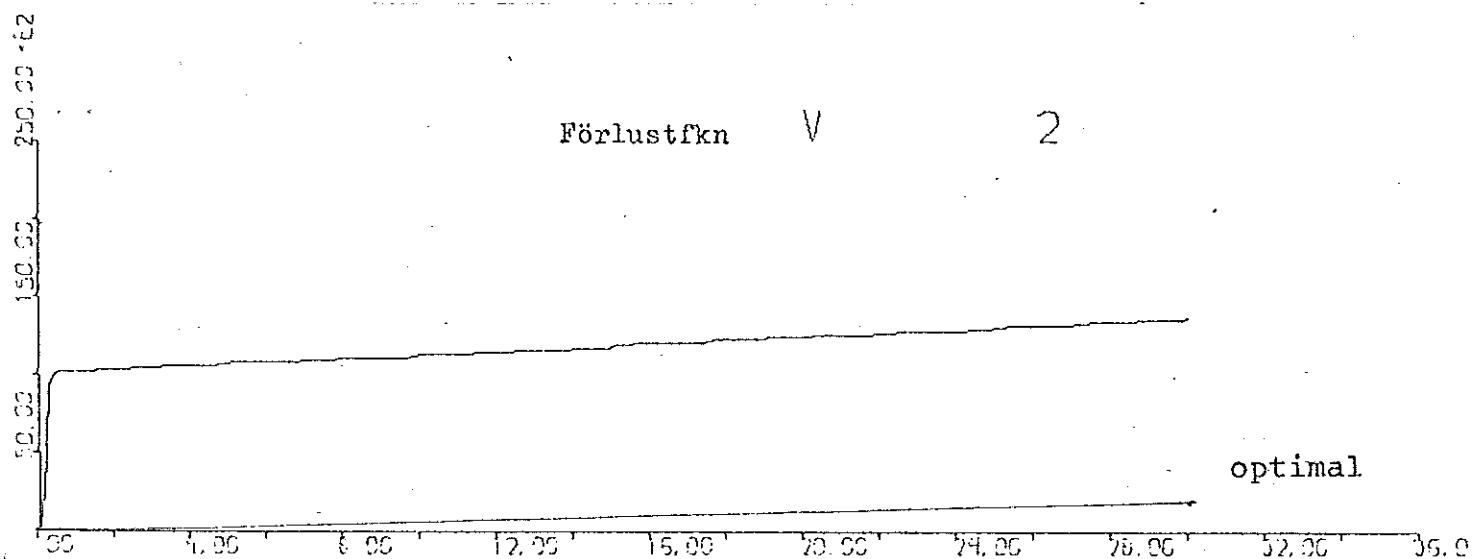
2



Förlustfkn

V

2



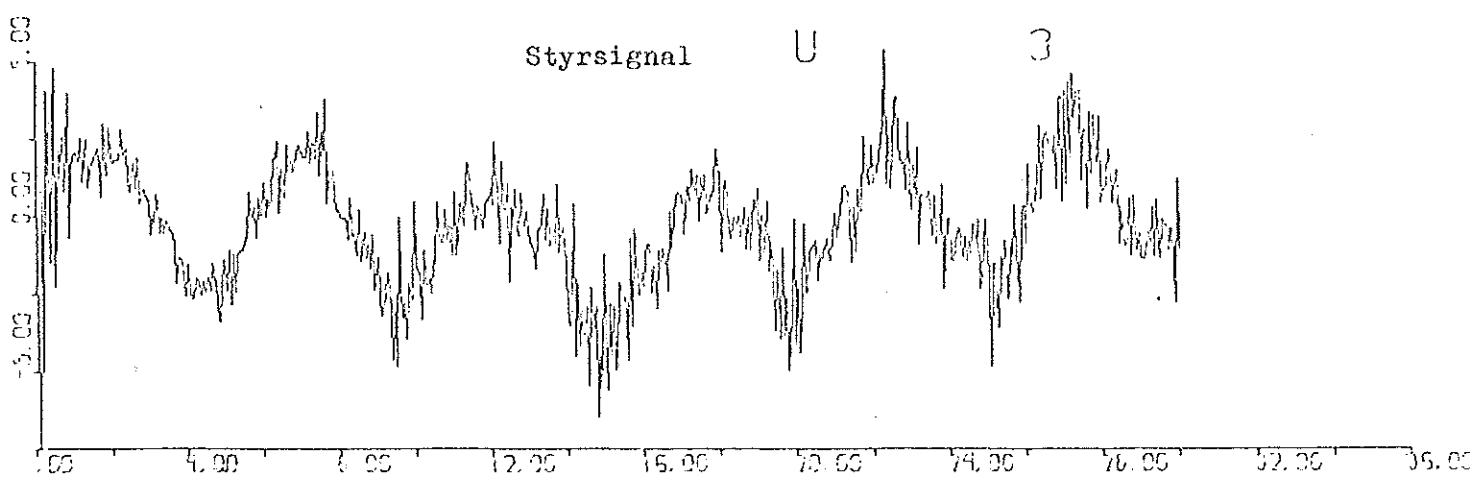
optimal

Ex. 6, Mod.min.var.,  $y_x = \pm 5$ , R2= 1 ,flygfall 3

Styrsignal

U

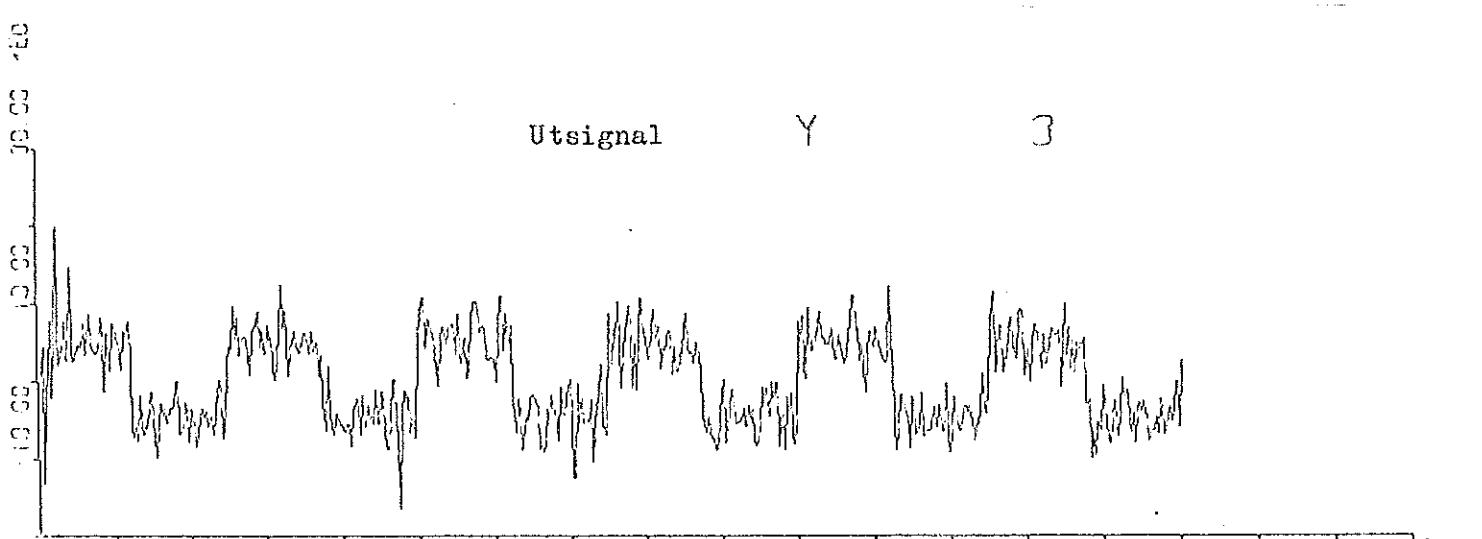
3



Utsignal

Y

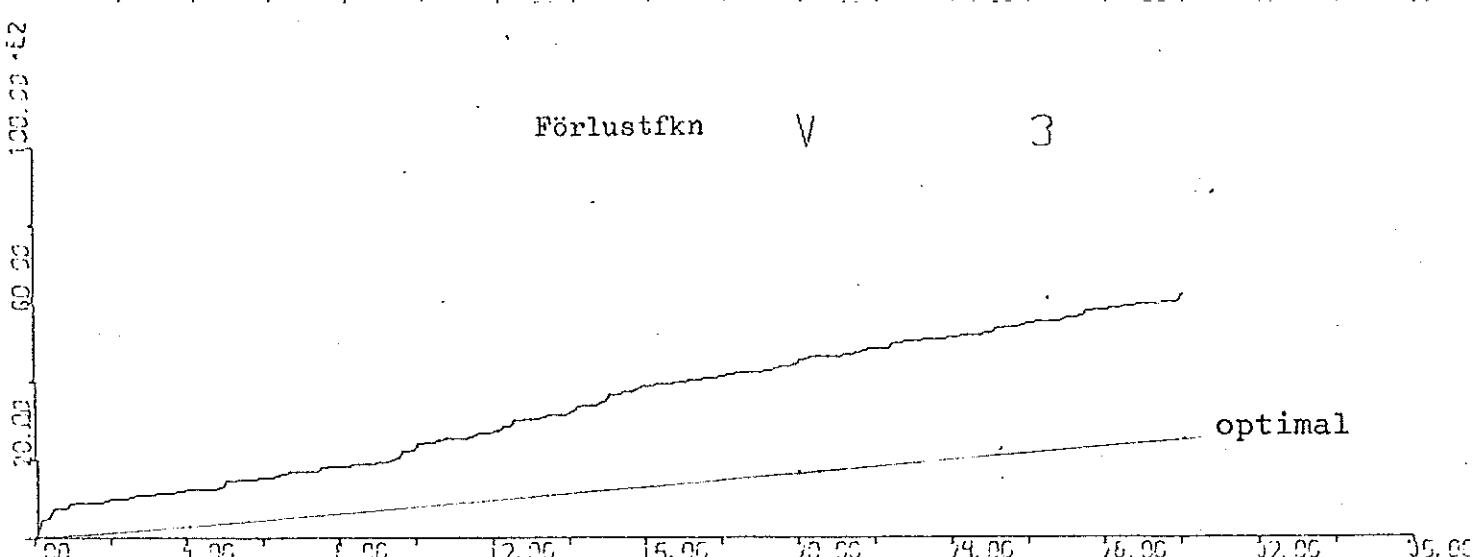
3



Förlustfkn

V

3

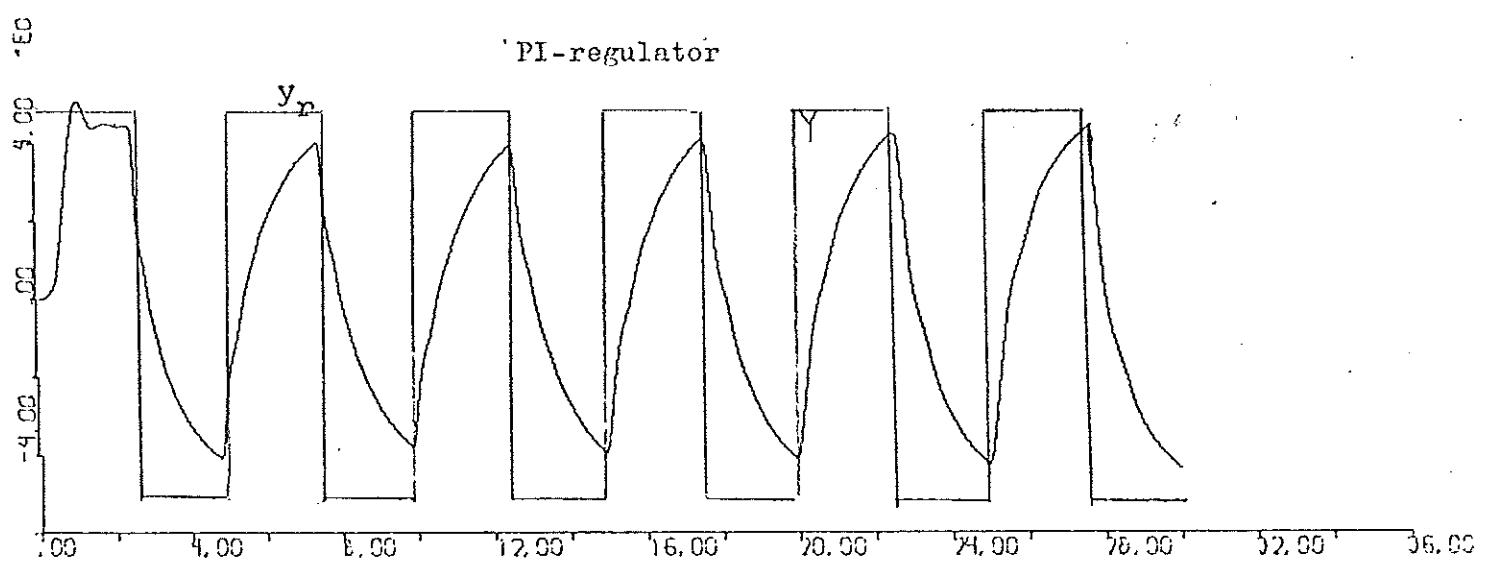
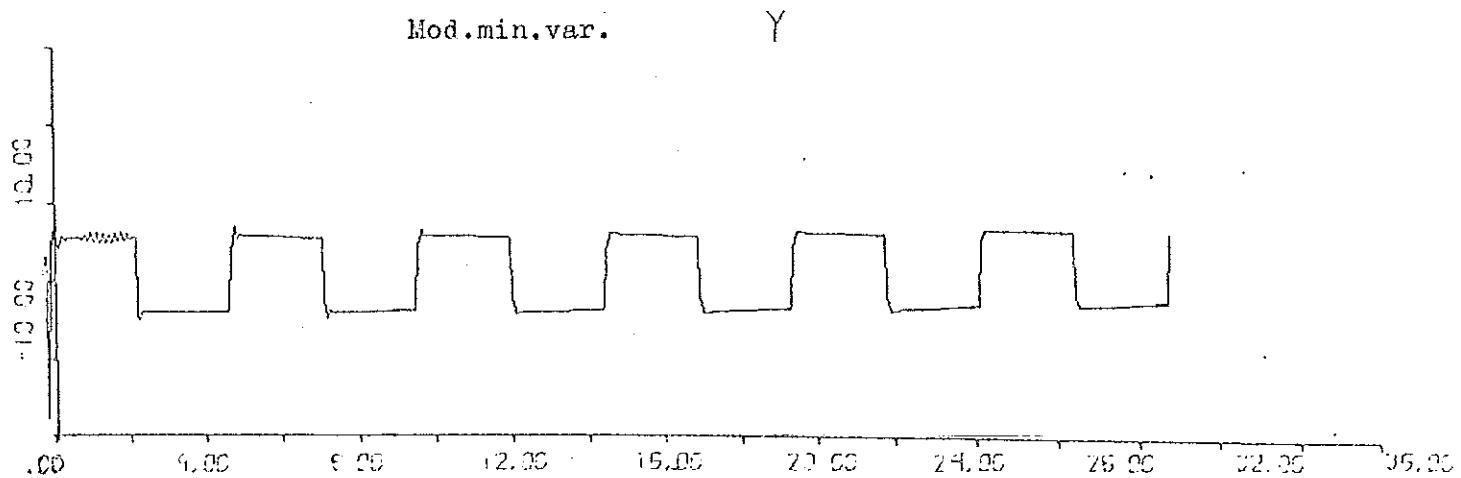


Ex. 7

För att kunna studera överföringsfunktionen  $y_r \rightarrow y(t)$  bättre, tar vi bort bruset hos systemet, dvs.  $\lambda = 0$  (vi sätter dock  $R_2=0.001$  för att Kalmanuppskattningen skall fungera tillfredsställande; samma sak gäller för ex. 4). Samma referensvärde  $y_r = \pm 5$  som i föregående exempel appliceras på systemet. Utsignalen för mod.min.var. såväl som PI-regulatorn framgår av diagram.

Mod.min.var. har en överföringsfunktion som nästan är  $q^{-2}$  (för ett system med konstanta parametrar är den exakt  $q^{-2}$ ). PI-regulatorn ger en mer sammansatt överföringsfunktion. Insvängningen med denna styrslag tar väldigt lång tid. Under periodtiden hinner  $y(t)$  inte nå värdet +5 eller -5. Diagram bifogas för flygfall 1.  
För flygfall 2 och 3 ser mod.min.var.:s utsignal likadan ut, medan PI-regulatorns utsignal är jämförbar för flygfall 2, men sämre för flygfall 3.

Ex. 7,  $y_r = \pm 5$ , R2= 0, flygfall 1.



### Sammanfattning.

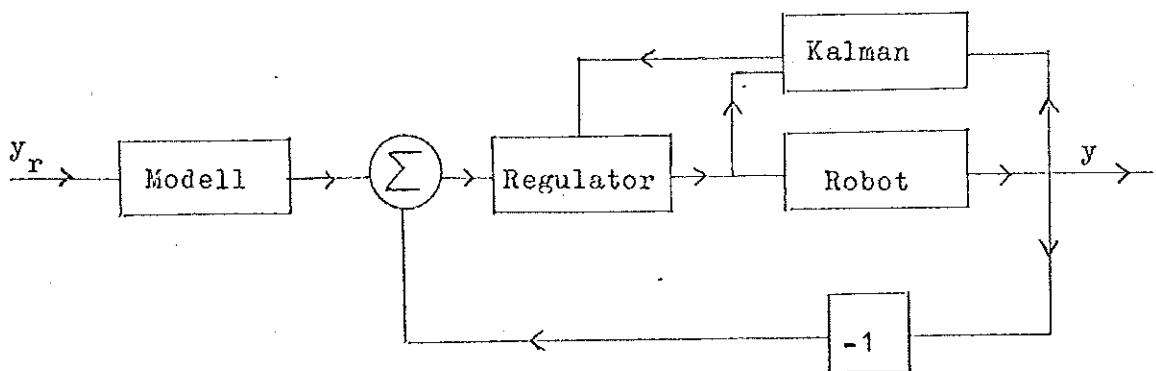
Av diagrammen framgår att det första insvägningsförloppet ger ett större bidrag till förlustfunktionen för min.var. styrlagarna än för PI-regulatorn, vilket beror på att parametrarna håller på att svänga in sig. Efter detta insvägningsförlopp blir min.var. styrlagarna klart bättre än PI-regulatorn, som hela tiden har ungefär samma förlustfunktionsökning.

Den styrlag som bäst lämpar sig att realisera är mod.min.var. styrlagen. De identifierade parametrarna användes i denna styrlag för att minimera medelkvadratfelet  $E(y(t)-y_r)^2$ . Denna styrlag anpassar sig bäst till varje specifikt flygfall, dvs. vi har här fördelen av en adaptiv regulator.

## 5. MODELL.

I exempel 7 belystes överföringsfunktionen  $y_r \rightarrow y(t)$  och i de där bifogade diagrammen kan man tydligt se att överföringsfunktionen är  $q^{-2}$ .

För att få ett mjukare stegsvärapplicerar vi en modell på systemet enligt nedan (mätbruset lika med noll)



Motivet till att mjuka upp stegsvaret är att man av exempelvis hållfasthetsteckniska skäl ej kan svänga hur snabbt som helst.

Två olika modeller kommer att studeras.

En i flygplan vanlig uppmjukningsmodell har överföringsfunktionen

$$H(q) = (0.0105q + 0.0097)/(q^2 - 1.795q + 0.8153)$$

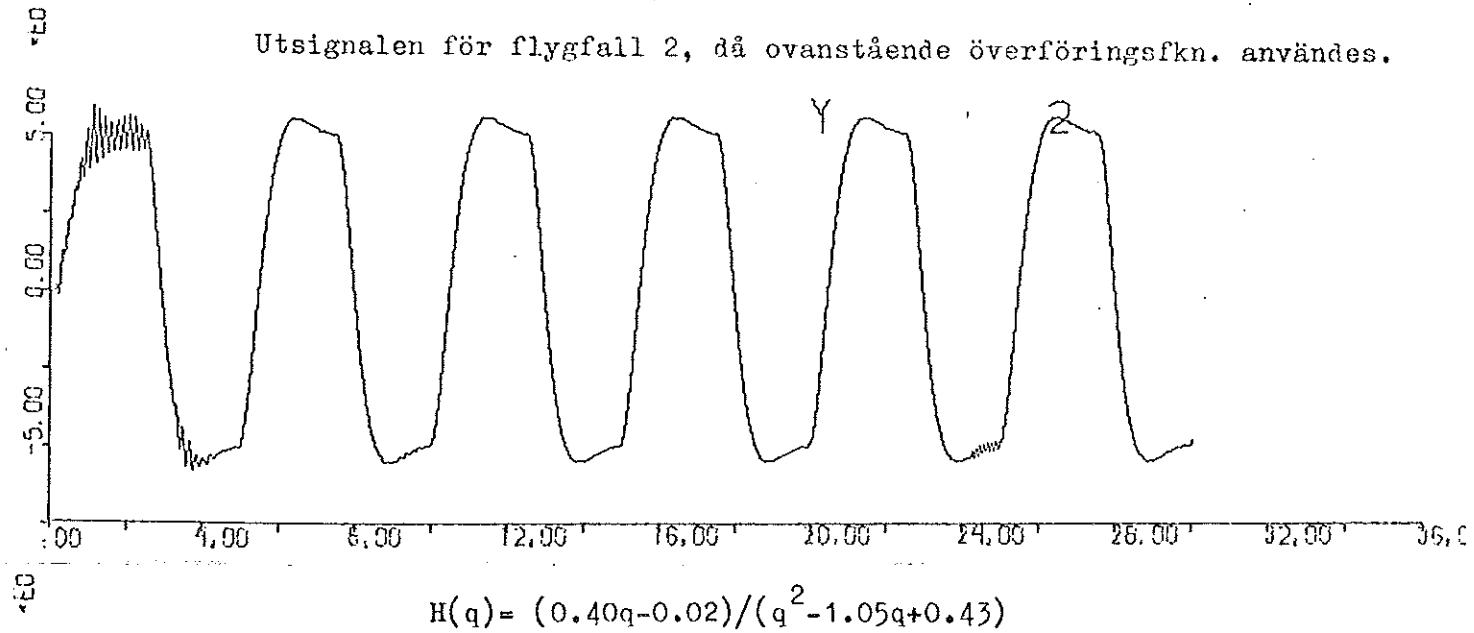
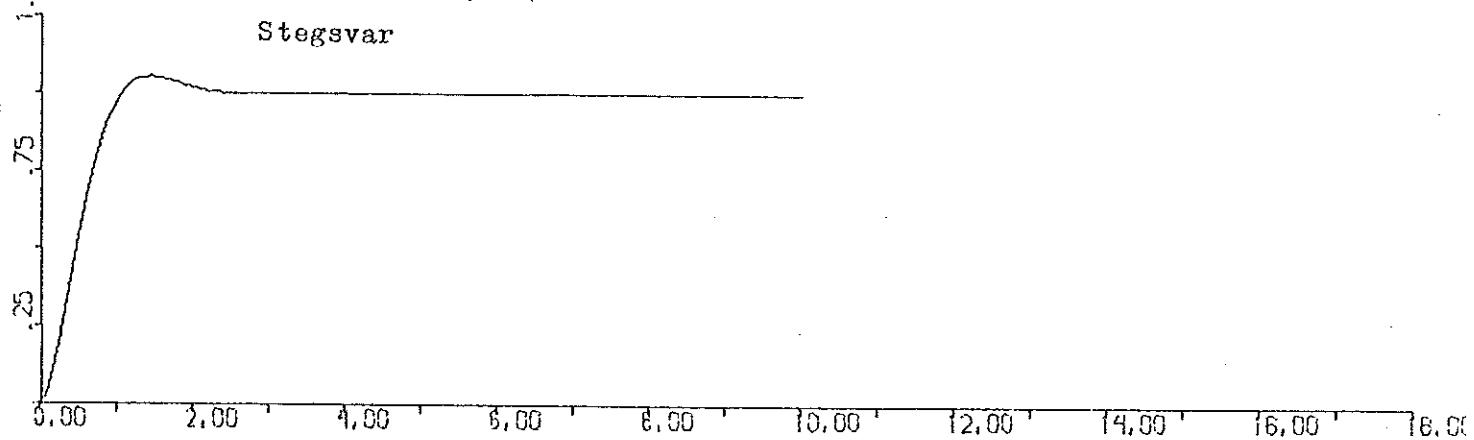
Det är önskvärt att systemet ej skall ha för stor översläng, samtidigt som den ej skall vara för långsam. Den ovan nämnda modellen är för långsam, eftersom den når slutvärdet först vid periodtidens slut.

M.h.a. av dator har olika modeller provats fram. Modellen som skall visas har överföringsfunktionen  
 $H(q) = (0.40q - 0.02)/(q^2 - 1.05q + 0.43)$ .

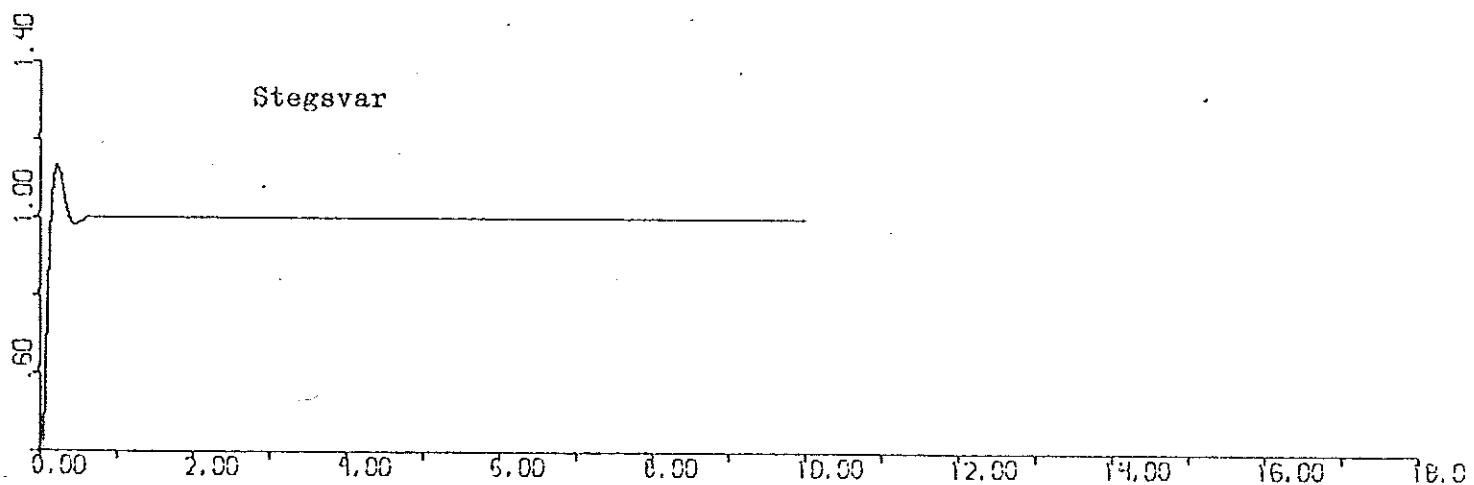
Denna modell är mycket snabbare, men har kanske en något för stor översläng.

I de bifogade diagrammen kan modellens stegsvar samt utsignalen från systemet robot + styrlag + modell studeras, när  $y_r$  är en pulsfunktion  $\pm 5$  med periodtiden 5 sek och bruset försummas. För de andra flygfallen erhålls särlika diagram.

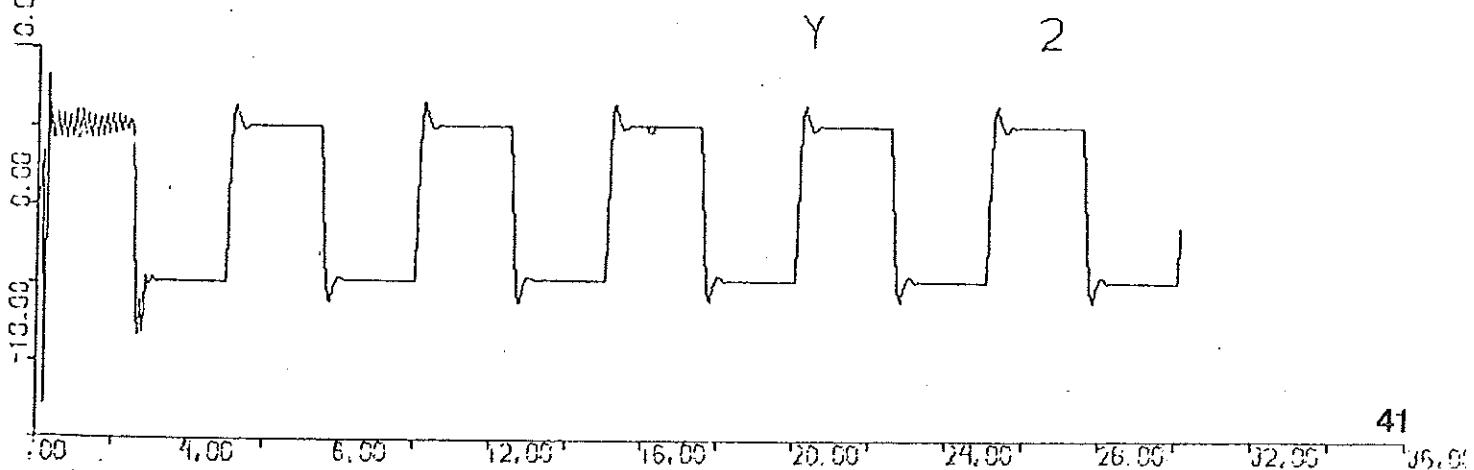
$$H(q) = (0.0105q + 0.0097) / (q^2 - 1.7951q + 0.8153)$$



$$H(q) = (0.40q - 0.02) / (q^2 - 1.05q + 0.43)$$



Utsignalen för flygfall 2, då ovanstående överföringsfkn. användes.



6. REFERENSER.

- [1] Pauli, Andreas: Examensarbete vid LTH, Re 74
- [2] Wieslander, J: Real Time Identification Part I,  
Rapport 6908, November 1969
- [3] Wieslander J, Wittenmark B: An approach to Adaptive Control  
Using Real Time Identification,  
Paper 6.3, 2 nd. IFAC Symposium  
on Identification and Parameter  
Estimation, Prag June 1970
- [4] Åström, K.J.: Stokastiska System

## APPENDIX.

### Programupphyggnad.

För att underlätta ändringar i programmen har ett antal subrutiner använts.

#### SUBROUTINE MOMIVA

Denna subroutine används för att beräkna styrsignalen, enligt mod.min.var.

#### SUBROUTINE KALM

Denna subroutine bestämmer parameteruppskattningarna, dvs. den fungerar som ett Kalmanfilter.

#### SUBROUTINE PONO

För att bestämma nollställen och poler hos roboten har denna subroutine använts.

Ur programbibliotek har lånats

#### SUBROUTINE MCNODI

Denna subroutine ger ett tal, som är  $N(0,1)$ .

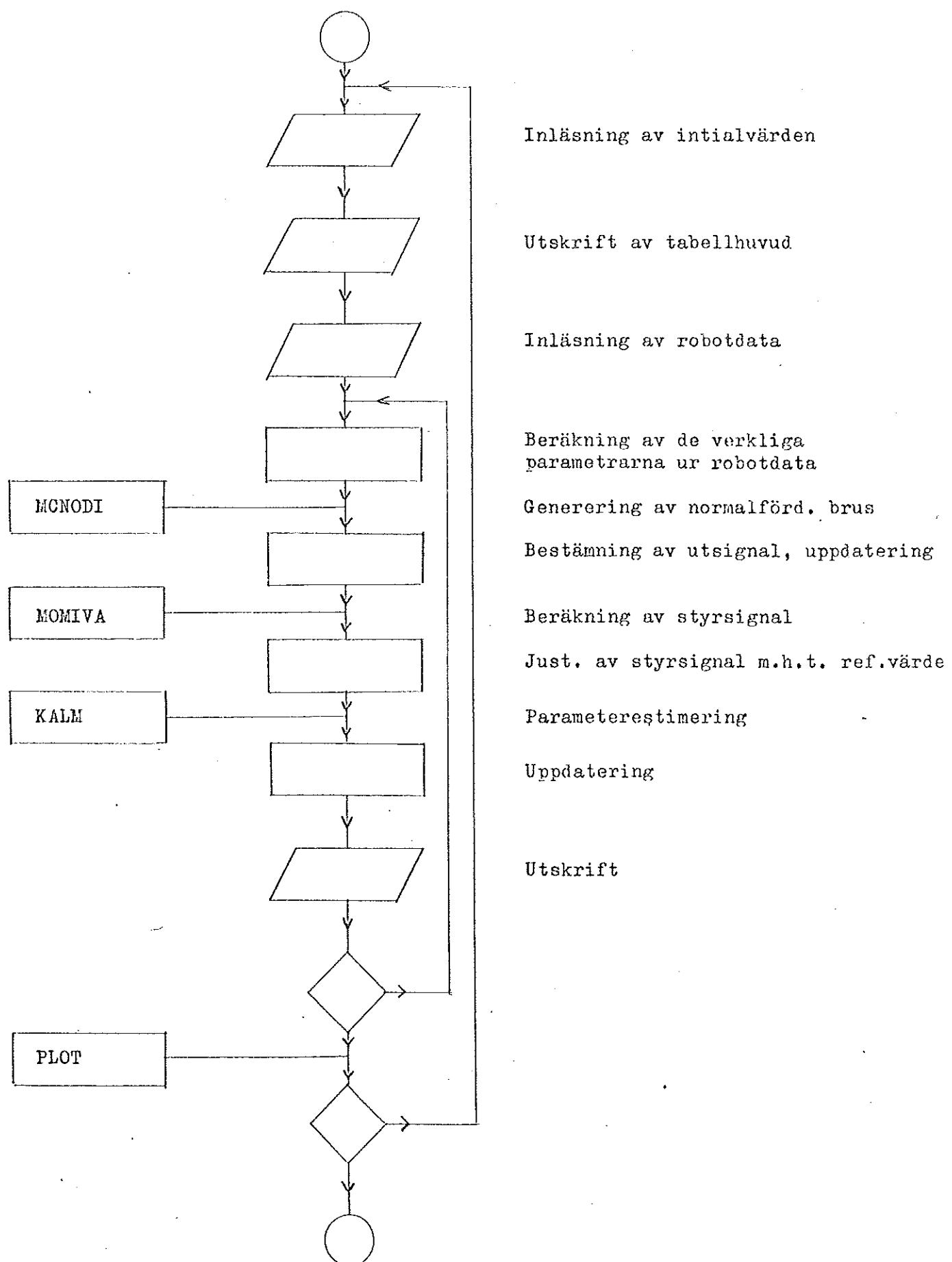
För att få en ungefärlig uppfattning hos signalerna har SUBROUTINE RADPLO använts, vilken ger utskrift på radskrivare,

Vissa beräkningsresultat har dessutom presenterats i form av diagram, varför särskilda plottningsroutiner använts.

Erforderligt minnesutrymme för MOMIVA är 300 celler för kod-delen och 220 för datadelen, för KALM 143 celler för kod-delen och 84 för datadelen.

Program ROBTES har följande blockstruktur.

Programmet har använts vid simuleringsar enl. kap. 4.



```

1*      SUBROUTINE MOMIVA(AE,BE,P,R1,YN,UN,N,IA)
2*      DIMENSION AE(1),BE(1),P(IA,IA),R1(IA,IA),UN(1),YN(1)
3*      X(16),FI(11,11),FIL(11)
4*      N2=2*N
5*      DO 10 I=1,N
6*      X(I)=AE(I+1)
7* 10   X(I+N)=BE(I)
8*      DO 20 I=1,N
9*      FI(I,I)=YN(I+1)
10* 20   FI(I,I+N)=UN(I)
11*      DO 30 I=2,N2
12*      DO 30 J=1,N2
13* 30   FI(I,J)=0.
14*      IF(N.EQ.1) GO TO 80
15*      DO 40 I=2,N
16*      FIL(I)=YN(I)
17* 40   FIL(I+N)=UN(I-1)
18*      CONTINUE
19*      FIL(1)=0.
20*      FIL(N+1)=0.
21* C
22*      DEN=BE(1)**2+P(N+1,N+1)+R1(N+1,N+1)
23*      SL=0.
24*      DO 50 I=1,N2
25*      DO 50 J=1,N2
26* 50   SL=SL+(X(I)*FI(I,J)*X(J)+P(I,J)*FI(J,I))*BE(1)
27*      1+X(I)*FI(I,J)*P(N+1,J)+P(N+1,I)*FI(I,J)*X(J)
28*      1+R1(N+1,I)*FI(I,J)*X(J)
29*      DO 60 I=1,N2
30* 60   SL=SL-FIL(I)*(BE(1)*X(I)+R1(N+1,I)+P(N+1,I))
31*      SL=SL/DEN
32*      N1=N+1
33*      DO 70 I=1,N1
34*      L=N+2-I
35* 70   UN(L+1)=UN(L)
36*      UN(1)=SL
37*      RETURN
38*      END

```

END OF UNIVAC 1108 FORTRAN V COMPILATION. 0 \*DIAGNOSTIC\* MESSAGE(S)

AE, BE	de uppskattade parametrarna
P	kovariansmatris
R1	enligt kap. 3
YN	utsignaler
UN	styrsignaler
N	systemordning
IA	ordning på P-matris

```

1*   C      KALMANFILTER X(T+1)=X(T)+FK*(Y-CX)
2*      SUBROUTINE KALM(P,C,R1,R2,X,Y,N,IA)
3*      DIMENSION P(IA,IA),C(1),X(1),H(4),FK(4),R1(IA,IA)
4*      CM3=0.
5*      DO 10 M=1,N
6*      H(M)=0.
7*      DO 10 K=1,N
8*      10 H(M)=H(M)+P(M,K)*C(K)
9*      HK=0.
10*      DO 30 M=1,N
11*      30 HK=HK+C(M)*H(M)
12*      DO 40 I=1,N
13*      DO 40 J=1,N
14*      40 P(I,J)=P(I,J)+R1(I,J)-H(I)*H(J)/(HK+R2)
15*      C
16*      DO 50 I=1,N
17*      50 FK(I)=H(I)/(HK+R2)
18*      C
19*      H3=0.
20*      DO 60 L=1,N
21*      60 H3=H3+C(L)*X(L)
22*      DO 70 I=1,N
23*      70 X(I)=X(I)+FK(I)*(Y-H3)
24*      RETURN
25*      END

```

END OF UNIVAC 1108 FORTRAN V COMPIILATION. 0 \*DIAGNOSTIC\* MESSAGE(S)

P	kovariansmatris
C	föregående in- resp. utsignaler
R1	enligt kap. 3
R2	enligt kap. 3
X	de uppskattade parametrarna
Y	aktuell utsignal
N, IA	ordning på P-matris