

FÖRFILTRENING AV SIGNALER MED KALMANFILTER.

Examensarbete vid Institutionen för Regleringsteknik
Tekniska Högskolan i Lund VT 69.

Gunnar Bengtsson

INNEHÅLLSFÖRTECKNING.

	Sid.
RESUME	1
I. INLEDNING	3
II. RESULTAT	6
III. OPTIMALT FILTER	
Allmänt	13
Ett 1:a ordningens system	14
Ett 2:a ordningens system	15
IV. LÅGPASSFILTER	
Allmänt	16
Ett 1:a ordningens system	19
Ett 2:a ordningens system	21
V. MEDELVÄRDESFILTER	
Allmänt	22
Ett 1:a ordningens system	27
Ett 2:a ordningens system	29
VI. DIAGRAM	31 - 39

RESUME.

I detta examensarbete behandlas problemet att finna något lämpligt filter som förfilter vid digital Kalmanfiltrering. Med utgångspunkt från en stokastisk tillståndsmodell analyseras två olika filter: medelvärdesfilter och lågpasfilter. Speciellt undersöks optimala val av filtrens parametrar dvs. i medelvärdesfiltret optimalt integrationsområde h och i lågpasfiltret optimal tidskonstant α . Vid analysen av medelvärdesfiltret antages att h ej överstiger samplingsintervallets längd T .

Analysen genomföres i en mer allmän form och resultaten appliceras på två speciella system:

1. Ett 1:a ordningens system som kan karakteriseras konstant + brus.
2. Ett 2:a ordningens system som är oscillativt och störs av yttre brus och mätbrus.

Vi finner i dessa fall optimala val av h och α . I vissa fall tycks det optimalt att välja $h > T$ speciellt vid korta samplingsintervall. Vid långa samplingsintervall får man en avsevärd förbättring genom att välja $h < T$ i jämförelse med fallet $h = T$. Genom ett optimalt val av h i intervallet $(0, T)$ i de fall som studeras kommer informationsförlusten i medelvärdesfiltret endast att bli obetydligt större än i lågpasfiltret med $\alpha = \alpha_{\text{optimal}}$.

SUMMARY.

In this paper we discuss the problem of finding a suitable filter used as prefilter at digital Kalman filtering. The process is described by a stochastic state model. Two different filters are analyzed: a low-pass filter and a mean value filter. Especially we examine optimal choices of the parameters of the filters i.e. optimal integration area in the mean value filter and optimal time constant in the low-pass filter. In the analysis of the mean value filter is supposed that the integration area h doesn't exceed the length of the sampling interval T .

The analysis is carried out in a more general way and the results are applied to special dynamical systems:

1. A system of first order which can be described by a constant + noise.
2. A system of second order which is oscillating and disturbed by noise.

We find in these cases optimal choices of h and α (α denotes the time constant in the low-pass filter). In some cases it seems optimal to take $h > T$. This appears especially when the sampling interval is short. At long sampling intervals, on the other hand, we often get a considerable improvement by choosing $h < T$ in comparison with the case $h = T$. In the studied cases the low-pass filter has proved to be the best. However, we get only a slight decrease in the information function when we choose a mean value filter with a suitable integration time.

1. INLEDNING.

Antag att vi har ett lineärt deterministiskt system i kontinuerlig form. För enkelhetens skull antar vi att systemet endast har en in- och utsignal

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)u(t)$$

(1:1)

$$y(t) = C(t)X(t) + D(t)u(t)$$

Där X , A , B , C är matriser. $u(t)$ antages konstant över tidsintervall med längden T . Då kan vi sampla systemet (1:1) direkt och rekonstruera tillståndsvektorn $X(t)$ i diskreta tidpunkter nT genom att mäta det samplade systemets utsignal $y(nT)$ om detta observerbart.

Fysikaliskt sett kommer emellertid systemet (1:1) att påverkas av olika störningar av stokastisk natur: mätfel, yttre störningar, osäkerhet i begynnelsevillkor m.m. Ofta är dessa av sådan betydelse att man måste ta hänsyn till dem i sin fysikaliska modell. I rekonstruktionsproblemet ingår då också att minimera störningarnas inverkan på rekonstruktionen.

Om störningarna antages vara stokastiska processer kommer också tillståndsvektorn och utsignalen att vara stokastiska processer. Systemet (1:1) ändras och vi får följande modifierade modell:

$$dX(t) = AX(t)dt + Bu(t) \frac{dt}{dt} + dv(t)$$

(1:2)

$$dy(t) = CX(t)dt + Du(t)dt + de(t)$$

Vi antar att systemet tidsinvariant dvs matriserna A, B, C och D beror ej av tiden t . Vidare antar vi att $(e(t), t \in T)$ och $(v(t), t \in T)$ är okorrelerade Wienerprocesser av 1:a resp n :e ordningen med medelvärdet noll och de infinitesimala kovarianserna

$$\text{cov} (dv(t), dv(s)) = E dv(t)dv(s)^T = R_1 dt \text{ om } t = s \quad (1:3)$$

$$\text{cov} (de(t), de(s)) = E de(t) de(s)^T = R_2 dt \text{ om } t = s \quad (1:4)$$

Vidare antages att begynnelsestillståndet är normalfördelat med medelvärdet m_0 och kovariansen R_0 . Den stokastiska processen ($X(t)$, $t \in T$) blir då en normalfördelat markovprocess och bestäms vid varje tidpunkt entydigt av medelvärdet och kovariansen. Den optimala rekonstruktionen av tillståndsvektorn $X(t)$ ges då av ett kontinuerligt Kalmanfilter.

Följaktligen om vi ur systemet (1:2) önskar rekonstruera tillståndsvariablerna i diskreta tidpunkter ges den optimala lösningen av ett kontinuerligt Kalmanfilter åtföljt av en samplingsenhet: ($\dot{y}(t)$ är utsignalen från systemet (1:2))

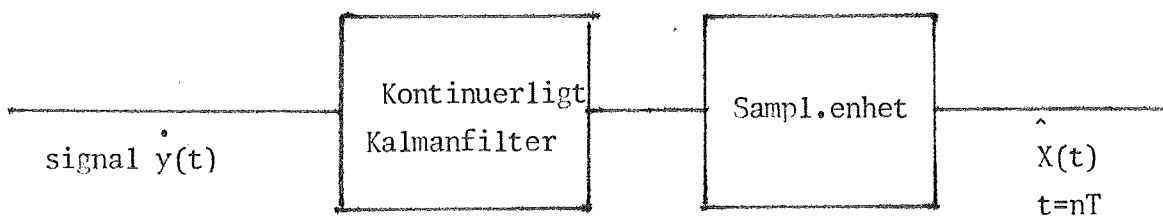


fig. 1.1

$\hat{X}(t)$ betecknar rekonstruktionen av $X(t)$. Vi vill emellertid göra rekonstruktionen med hjälp av ett digitalt Kalmanfilter. Vi kan ej som i det deterministiska fallet ovan direkt sampla utsignalen ty formellt kan vi skriva:

$$\dot{y}(t) = CX(t) + Du(t) + \dot{e}(t)$$

Men enligt vår modell är $\dot{e}(t)$ derivatan av en Wienerprocess och alltså formellt vitt kontinuerligt brus med oändlig varians. I det praktiska fallet kommer bruset att vara bandbegränsat varför variansen blir ändlig men stor. Något slag av förfiltrering är alltså nödvändig

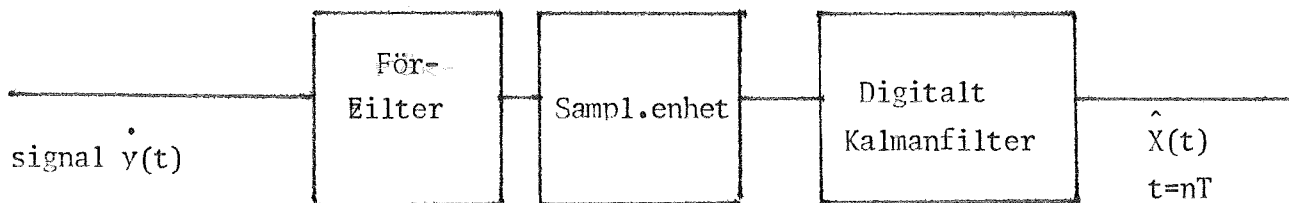


fig 1.2

Vid förfiltreringen förloras även en del nyttig information varför det är viktigt att välja filtrets parametrar optimalt dvs. så att rekonstruktionsfelets varians i någon mening avviker så lite som möjligt från det optimala fallet ovan redovisat i fig. 1.1. Med utgångspunkt från systemet (1:2) och fig. 1.2 kan vi nu formulera ett problem:

Problem: Bestäm ett enkelt filter sådant att så lite nyttig information i signalen som möjligt går förlorad.

I detta examensarbete kommer följande filter att behandlas:

1. Lågpasfilter med överföringsfunktionen $G(s) = 1/(s + \alpha)$. Vi söker optimal tidskonstant α .
2. Medelvärdesfilter somutnyttjar vanlig flat medelvärdesbildning. Vi söker optimalt integrationsområde h .

Även ett försök till jämförelse mellan de bägge filterna kommer att genomföras.

För att ej något missförstånd skall uppstå kommer i det följande systemet (1:2) att benämnas det ursprungliga systemet och systemet (1:2) inklusive filter det filtrerade systemet.

II. RESULTAT OCH SAMMANFATTNING.

Vid analysen av de bägge filterernas, medelvärdes- och lågpasfilter, inverkan på signalen utgår vi från två numeriska exempel:

1. Ett 1:a ordningens system enl. sid. 14 vilket kan karakteriseras som en konstant signal + brus.
2. Ett 2:a ordningens system enligt sid. 15 vilket är oscillativt och störs av yttre brus och mätbrus. Endast tillståndsvariabeln $X_1(t)$ mätes.

Resultaten föreligger dels i diagramform på sidorna 31-39 dels i en sammanfattning i tabellform på sidorna 9-12 .

För att kunna jämföra de bägge filternas kvaliteer måste vi ha ett mått på informationsförlusten i filtret. Som vi såg i inledningen får vi ett sådant mått genom att optimalt utnyttja informationen i det filtrerade systemet och med hjälp av ett diskret Kalmanfilter beräkna rekonstruktionsfelets varians. Om P_∞ betecknar den så erhållna variansmatrisen blir rekonstruktionsfelets varians $a^T P_\infty a$ vid rekonstruktion av lineärkombinationen $aX(t)$. Det erhållna värdet kan sedan jämföras med det optimala och skillnaden ger en uppskattning av hur mycket nyttig information som gått förlorad i filtret. De optimala rekonstruktionsmodeller som användes ger alla rekonstruktioner av typen $\hat{X}(t|t)$. Detta innebär att rekonstruktionen $a\hat{X}(t)$ är känd vid tidpunkten $t + \tau$, där τ är uträkningstiden vilken alltså antages försumbar.

I fallet med det oscillativa systemet betraktar vi speciellt rekonstruktionen av tillståndsvariablerna $X_1(t)$ och $X_2(t)$. Vi undersöker också bästa och sämsta rekonstruktion där vi utgår från följande olikhet

$$\lambda_{\max} \geq \frac{a^T P_\infty a}{a^T a} \geq \lambda_{\min}$$

vilken gäller för alla a om λ_{\max} och λ_{\min} betecknar det största respektive minsta egenvärdet i P_∞ .

Lågpassfiltrets överföringsfunktion är

$$G(s) = \frac{1}{s + \alpha}$$

Ett högt värde på α innebär att den nyttiga signalen passerar nästan utan distorsion men samtidigt passerar också en hel del brus. Ett lågt värde på parametern α medför däremot att bruset dämpas effektivt medan nästan all nyttig högfrekvent information i signalen går förlorad. Det förefaller sålunda rimligt att det mellan dessa två ytterligheter skall finnas ett optimalt val av α . Speciellt om vi väljer $\alpha = 0$ har vi ett medelvärdesfilter med integrationsområdet h lika med samplingstiden T . I fallet $h = T$ kommer därför alltid lågpassfiltret att ge minst lika bra resultat som medelvärdesfiltret om vi väljer $\alpha = \alpha_{\text{optimal}}$.

Speciellt om vi betraktar systemet av 1:a ordningen har det kontinuerliga Kalmanfiltret för detta ett enkelt utseende:

$$G(s) = \frac{\sqrt{R_1/R_2}}{s + \sqrt{R_1/R_2}}$$

Om vi alltså väljer $\alpha = \sqrt{R_1/R_2}$ bör vi få en optimal lösning vilket också bekräftas av de numeriska exemplen. Även i fallet med det oscillativa systemet finner vi optimala val av α . Vid rekonstruktionen av $X_2(t)$ blir dock $\alpha_{\text{optimal}} = 0$ dvs. vi har för detta värde ett medelvärdesfilter med $T = h$.

Som nämndes ovan blir alltid informationsförlusten större i ett medelvärdesfilter med $T = h$ än i ett lågpassfilter med $\alpha = \alpha_{\text{optimal}}$. I våra numeriska exempel är försämringen markant speciellt vid långa samplingsintervall. (undantag rekonstruktionen av $X_2(t)$ i det oscillativa systemet). Genom ett optimalt val av h i intervallet $(0, T)$ kan dock informationsförlusten avsevärt nedbringas. Vid optimala val av parametrarna i de numeriska fallen utgör skillnaden i rekonstruktionsfelets varians mellan medelvärdesfilter och lågpassfilter i systemet av 1:a ordningen maximalt 15.5% och i det oscillativa systemet maximalt 4.6% av det optimala värdet. I fallet $T = h$ blir motsvarande värden 76% resp 42%. Det bör dock påpekas att det numeriska materialet bakom dessa siffror är något magert. I flera fall

förefaller det av kurvornas utseende att döma rimligt att välja ett $h > T$ t.ex. vid rekonstruktionen av $X_2(t)$ i fig. 6.8 .
I detta examensarbete har dock endast fallet $h \leq T$ behandlats.

Valet av h tycks mera kritisk än valet av α i den meningen att en liten förändring av h_{optimal} ger större tillskott till rekonstruktionsfelets varians än motsvarande förändring av α_{optimal} (jämför t.ex. fig. 6.7 och fig. 6.2). Vidare tycks i de fall där utpräglade minima i rekonstruktionsfelets varians inträffar h_{optimal} vara relativt oberoende av samplingstiden T . (se t.ex. fig. 6.6 och fig. 6.7).

Vid en jämförelse mellan filterna bör man också ta hänsyn till att lågpasfiltret ökar systemets ordningstal med ett vilket ej medelvärdesfiltret gör.

Anmärkning: I analysen av de bägge filterna nedan har allmänna uttryck härletts som kan användas för beräkning av P_{∞} i mera sofistikerade fall än de här behandlade.

Sammanfattning av resultat från numeriska exempel.

Beteckningar: T = samplingstiden
 α = parameter i lågpasfiltret
 h = integrationsområdets längd
 P_{∞} = rekonstruktionsfelæts varians i stationärt tillstånd
 λ_{\max} = största egenvärdet i P_{∞}
 λ_{\min} = minsta " " " "

1. Ett 1:a ordningens system enligt sid. 14 (konstant signal + brus)

Optimalt värde på $P_{\infty} = 1.000$

		$T = 1.0$	$T = 2.0$	$T = 5.0$
Lågpasfilter	P_{∞} (min)	1.000	1.000	1.000
	Avvikelse från optimalt värde %	0.0	0.0	0.0
	α_{optimal}	1.00	1.00	1.00
Medelvärdesfilter ($T \geq h$)	P_{∞} (min)	1.041	1.100	1.135
	Avvikelse från optimalt värde %	4.1	10.0	13.5
	h_{optimal}	1.00	1.37	1.53
Medelvärdesfilter ($T = h$)	P_{∞}	1.041	1.155	1.756
	Avvikelse från optimalt värde %	4.1	15.5	75.6

2. Ett 2:a ordningens system enligt sid. 15 (oscillator + brus)

a. Rekonstruktion av tillståndsvariabeln $X_1(t)$

Optimalt värde på $P_{\infty 11} = 0.910$

		T = 0.5	T = 1.0	T = 2.0
Lågpass- filter	$P_{\infty 11}^{(min)}$		0.940	1.000
	Avvikelse från opti- malt värde %		3.3	9.9
	α optimalt		0.95	1.48
Medelvärdes- filter ($T \geq h$)	$P_{\infty 11}^{(min)}$	0.962	0.978	1.034
	Avvikelse från opti- malt värde %	1.8	7.5	13.5
	h optimalt	0.50	1.00	1.05
Medelvärdes- filter ($T = h$)	$P_{\infty 11}^{(min)}$	0.962	0.978	1.382
	Avvikelse från opti- malt värde %	1.8	7.5	51.9

b. Rekonstruktion av tillståndsvariabeln $X_2(t)$.Optimalt värde på $P_{\infty 22} = 1.287$

		T = 0.5	T = 1.0	T = 2.0
Lågpas- filter	$p_{\infty 22}^{(min)}$		1.377	1.666
	Avvikelse från opti- mala värdet %		7.0	29.4
	$\alpha_{optimal}$		0.0	0.0
Medelvärdes- filter (T \geq h)	$p_{\infty 22}^{(min)}$	1.309	1.377	1.666
	Avvikelse från opti- mala värdet %	1.7	7.0	29.4
	$h_{optimal}$	0.50	1.00	2.00
Medelvärdes- filter (T = h)	$P_{\infty 22}$	1.309	1.377	1.666
	Avvikelse från opti- mala värdet %	1.7	7.0	29.4

c. Bästa och sämsta rekonstruktion.

I de berörda diagrammen ligger λ_{\max} :s och λ_{\min} :s minima ganska nära varandra varför författaren försökt uppskatta de optimala värdena på h resp. α .

Optimala värden: $\lambda_{\max} = 1.505$

$\lambda_{\min} = 0.643$

		T = 0.5	T = 1.0	T = 2.0
Lågpass- filter	λ_{\max}		1.662	2.195
	λ_{\min}		0.665	0.690
	α_{optimal}		0.7	0.8
Medelvärdes- filter (T \geq h)	λ_{\max}	1.580	1.688	2.236
	λ_{\min}	0.659	0.667	0.720
	h_{optimal}	0.5	1.0	1.5
Medelvärdes- filter (T = h)	λ_{\max}	1.580	1.688	2.318
	λ_{\min}	0.659	0.667	0.730

III. OPTIMALT FILTER.

Allmänt.

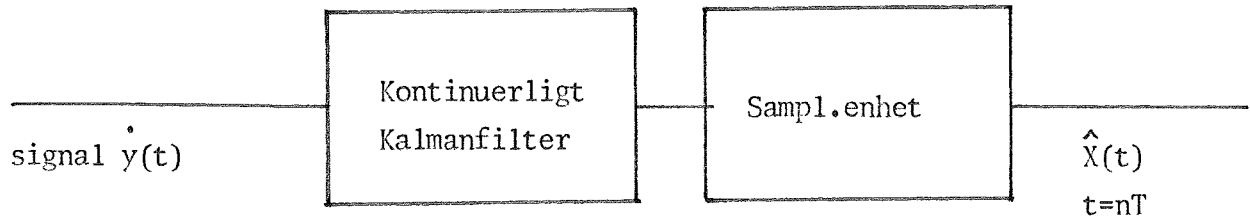


fig 3.1

Det ursprungliga systemet ges av (1:2). Med $u(t) = 0$ fås

$$dX(t) = AX(t)dt + dv(t)$$

$$dy(t) = CX(t)dt + de(t)$$

Den optimala rekonstruktionen enligt Kalman:

$$d\hat{X}(t) = A\hat{X}(t)dt + K(t)(dy(t) - C\hat{X}(t)dt)$$

$$P(t) = E (X(t) - \hat{X}(t))(X(t) - \hat{X}(t))^T = E \tilde{X}(t) \tilde{X}(t)^T$$

Där $K(t)$ väljes så att $a^T P(t) a$ har minimum för godtyckligt a . För $K(t)$ och $P(t)$ gäller då följande uttryck:

$$K(t) = P(t)C^T R_2^{-1}$$

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + R_1 - P(t)C^T R_2^{-1} CP(t)$$

Då systemet tidsinvariant gäller i stationärt tillstånd $\dot{P}_\infty = 0$. Vi får

$$AP_\infty + P_\infty A^T + R_1 - P_\infty C^T R_2^{-1} CP_\infty = 0 \quad (3:1)$$

$$K_\infty = P_\infty C^T R_2^{-1} \quad (3:2)$$

Där alltså P_∞ är rekonstruktionsfelets varians i stationärt tillstånd.

Observera ett om $\hat{y}(t)$ betecknar signalens värde i tidpunkten t så är den rekonstruerade tillståndsvektorn $\hat{X}(t)$ känd vid tiden t .

Kalmanfiltret erhölls genom att minimera rekonstruktionsfelets varians vid rekonstruktion av en godtycklig lineärkombination av tillståndsvariablerna. Om vi speciellt väljer a så att $a_j = 1$ och $a_i = 0$ för $i \neq j$ erhåller vi

$$a^T P a = p_{jj} \quad (3:3)$$

Diagonalelementen i den optimala variansmatrisen är alltså själva optimala i den meningen att det inte finns något annat filter som ger lägre värden. Detta gäller ej de övriga elementen. Skillnadsmatrisen mellan den optimala variansmatrisen och en variansmatris som erhålles genom någon annan rekonstruktionsmodell är emellertid alltid positivt definit.

a. Ett 1:a ordningens system.

Givet ett 1:a ordningens system med

$$\begin{aligned} A &= 0 & R_1 &= R_1 \\ C &= 1 & R_2 &= R_2 \end{aligned}$$

Enligt (3:1) och (3:2) gäller då för P_∞ och K_∞

$$R_1 - P_\infty^2 / R_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad P_\infty = \sqrt{R_1 R_2}$$

$$K_\infty = \sqrt{R_1 / R_2}$$

Kalmanfiltret har för det givna systemet ett okomplicerat utseende:

$$G(s) = \frac{\sqrt{R_1 / R_2}}{s + \sqrt{R_1 / R_2}}$$

Speciellt om $R_1 = 1.0000$ och $R_2 = 1.0000$ fås

$$P_\infty = 1.0000 \quad K_\infty = 1.0000 \quad G(s) = \frac{1.0000}{s + 1.0000}$$

b. Ett 2:a ordningens system.

Givet ett 2:a ordningens system med

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = R_2$$

Enligt (3:1) gäller då för P_{∞} följande ekvationssystem:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = 0$$

Lösningen ges av

$$p_{11} = \sqrt{2 p_{22} R_2}$$

$$p_{12} = -R_2 + \sqrt{R_2^2 + R_1 R_2}$$

$$p_{22} = p_{11} (p_{12}/R_2 + 1)$$

Speciellt om $R_1 = 1.0000$ och $R_2 = 1.0000$ fås

$$p_{11} = 0.9102$$

$$p_{12} = 0.4142$$

$$p_{22} = 1.2868$$

IV. LÅGPASSFILTER.

Allmänt.

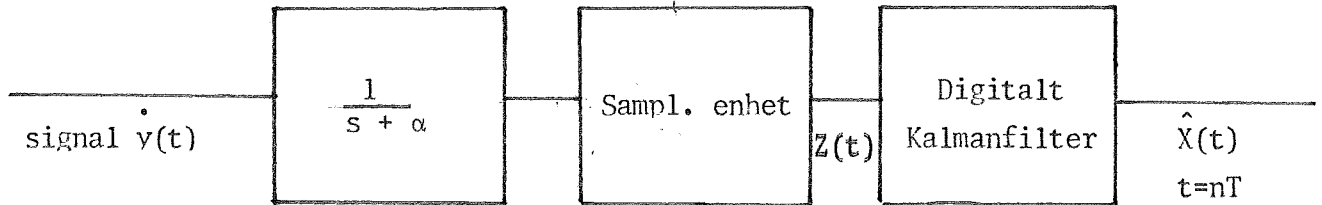


fig. 4.1

Det ursprungliga systemet ges av (1:2). Med $u(t) = 0$ få vi följande linjär stokastiska differentialekvation

$$dX(t) = AX(t)dt + dv(t)$$

$$dy(t) = CX(t) + de(t)$$

Sätt

$$A = (a_{ij}) \quad i = 1,2,\dots,n \quad j = 1,2,\dots,n$$

$$C = (c_i) \quad i = 1,2,\dots,n$$

Lågpas

För signalen ut från filtret gäller

$$dZ(t) = -\alpha Z(t)dt + dy(t) = -\alpha Z(t)dt + CX(t)dt + de(t)$$

filtrerade

Sätt $x_{n+1} = Z(t)$. Det ~~totala~~ systemet blir då

$$dX_f(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & -\alpha \end{bmatrix} X_f(t)dt + \begin{bmatrix} dv(t) \\ de(t) \end{bmatrix}$$

(4:1)

$$Z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} X_f(t)$$

Sätt nu

$$df(t) = \begin{bmatrix} dv(t) \\ de(t) \end{bmatrix} \quad A_f = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & -\alpha \end{bmatrix} \quad (4:2)$$

Den s.p. ($f(t)$, $t \in T$) är då en normalfördelad Wienerprocess av ordningen $n+1$ med medelvärde noll och den infinitesimala kovariansen

$$\text{cov} (df(t) , df(s)) = E df(t)df(s)^T = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} dt = R dt \quad \text{om } t = s \quad (4:3)$$

R_1 har dimensionen $n \times n$ och R_2 dimensionen 1×1 . R har alltså dimensionen $(n+1) \times (n+1)$.

Vi är intresserade av hur tillståndsvariablerna transformeras mellan samplingspunkterna:

$$X(t+T) = e^{A_f T} X(t) + \int_t^{t+T} e^{A_f(t+T-s)} df(s)$$

Sätt

$$\tilde{v}(t) = \int_t^{t+T} e^{A_f(t+T-s)} df(s)$$

Vi finner att

$$E \tilde{v}(t) = \int_t^{t+T} e^{A_f(t+T-s)} E df(s) = 0$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= E \tilde{v}(t)\tilde{v}(t)^T = E \int_t^{t+T} \int_t^{t+T} e^{A_f(t+T-s)} df(s)df(s')^T e^{A_f^T(t+T-s')} = \\ &= \int_0^T \int_0^T e^{A_f u} E df(u-t-T) df(u'-t-T)^T e^{A_f^T u'} = \int_0^T e^{A_f u} R e^{A_f^T u} du \end{aligned} \quad (4:4)$$

\tilde{R}_1 är alltså oberoende av tiden t . Vidare finner vi att $\tilde{v}(t)$ och $\tilde{v}(s)$ är okorrelerade om $t \neq s$ ty de är integraler över disjunkta intervall. Den s.p. ($\tilde{v}(t)$, $t \in T$) är alltså vitt diskret brus. Sätt

$$\phi = e^{A_f T} \quad \theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4:5)$$

Då vi inte har något mätbrus på det filtrerade systemet gäller

$$\tilde{R}_{12} = 0 \quad \tilde{R}_2 = 0 \quad (4:6)$$

För att kunna jämföra lågpasfiltret med det optimala filtret och medelvärdesfiltret väljes en rekonstruktion för vilken $\hat{X}(t)$ är känd i tidpunkten t . Annorlunda uttryckt skall vi alltså använda utsignalens värden i diskreta tidpunkter fram t.o.m tiden t för att uppskatta tillståndsvariablernas värden i tidpunkten t . En optimal rekonstruktionsmodell är:

$$\hat{X}(t+T) = \Phi \hat{X}(t) + K(t) (Z(t+T) - \Theta \Phi \hat{X}(t))$$

Rekonstruktionsfelets varians vid optimalt val av $K(t)$, dvs så att $a^T P(t) a$ minimeras för godtyckligt a , ges av följande uttryck:

$$P(t) = S(t) - K(t) \Theta S(t)$$

$$S(t) = \Phi P(t-T) \Phi^T + \hat{R}_1$$

$$K(t) = S(t) \Theta^T (\Theta S(t) \Theta^T)^{-1}$$

I stationärt tillstånd gäller alltså

$$P_\infty = S_\infty - K_\infty \Theta S_\infty$$

$$S_\infty = \Phi P_\infty \Phi^T + \hat{R}_1 \quad (4:7)$$

$$K_\infty = S_\infty \Theta^T (\Theta S_\infty \Theta^T)^{-1}$$

Vi för fogar fortfarande över parametern α . Vi kan vid en rekonstruktion av en viss lineärkombination av tillståndsvariablerna $aX(t)$ t.ex minimera rekonstruktionsfelets varians i stationärt tillstånd m. a. p. α , vilket är detsamma som att minimera uttrycket $a^T P_\infty a$.

a. Ett 1:a ordningens system.

Givet ett 1:a ordningens system med

$$\begin{aligned} A &= 0 & R_1 &= R_1 \\ C &= 1 & R_2 &= R_2 \end{aligned}$$

Enligt (4:2) gäller då för det filtrerade systemet:

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix}$$

$$A_f^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & -\alpha^2 \end{bmatrix} = -\alpha A_f$$

Alltså

$$A_f^n = (-\alpha)^{n-1} A_f \quad n > 1$$

Men definitionsmässigt gäller

$$e^{A_f T} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_f^k T^k}{k!}$$

Vi får alltså

$$e^{A_f T} = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^{n-1}}{n!} A_f^n T^n = E - A_f \left(\frac{e^{-\alpha T} - 1}{\alpha} \right)$$

För det diskreta systemet gäller enligt (4:5), (4:4), (4:6)

$$\Phi = e^{A_f T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1 - e^{-\alpha T})/\alpha & e^{-\alpha T} \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{R}_{12} = 0 \quad \hat{R}_2 = 0$$

$$\hat{R}_1 = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1 - e^{-\alpha u})/\alpha & e^{-\alpha u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & (1 - e^{-\alpha u})/\alpha \\ 0 & e^{-\alpha u} \end{bmatrix} du =$$

$$= \begin{bmatrix} R_1 T & \frac{R_1}{\alpha^2} (T + e^{-\alpha T} - 1) \\ \frac{R_1}{\alpha^2} (T + e^{-\alpha T} - 1) & \frac{R_2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha T}) + \frac{R_1}{\alpha^3} (T + 2e^{-\alpha T} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\alpha T}) \end{bmatrix}$$

Rekonstruktionsfelets varians i stationärt tillstånd ges slutligen av ekvationssystemet (4:7). Om vi sätter

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} \quad \tilde{R}_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

och förenklar får vi

$$p_{\infty 11} + \left(\frac{2b}{\delta} - a \right) p_{\infty 11} = \frac{b^2}{\delta^2} - \frac{ac}{\delta^2}$$

$$p_{\infty 12} = 0$$

$$p_{\infty 22} = 0$$

Observera att det är endast det ursprungliga systemet vi är intresserade av dvs $p_{\infty 11}$.

Ett numeriskt exempel med $R_1 = 1.0000$ och $R_2 = 1.0000$ kan studeras i fig. 6.1

b. Ett 2:a ordningens system.

Givet ett 2:a ordningens system med

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix} \quad R_2 = R_2$$

För det filtrerade systemet gäller enligt (4:2), (4:3), (4:5)

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix}$$

Detta system studeras endast numeriskt med $R_1 = 1.0000$ och $R_2 = 1.0000$ med hjälp av dataprogram. Resultatet framgår av fig. 6.2, 6.3, 6.4.

V. MEDELVÄRDESFILTER:

Allmänt.

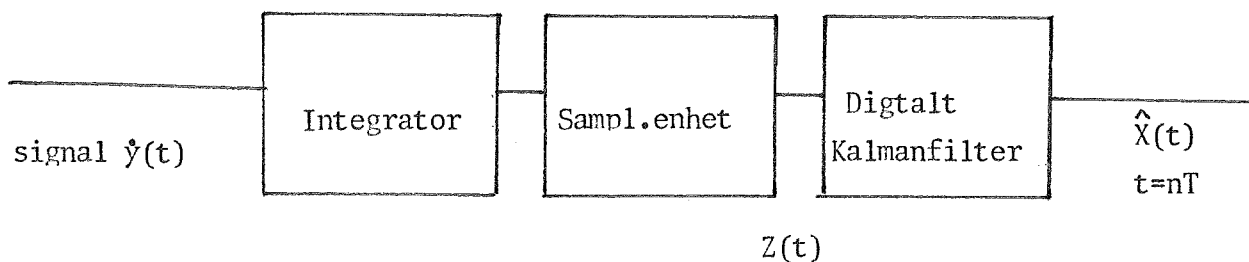


fig. 5.1

Medelvärdesfiltret utnyttjar vanlig flat medelvärdesbildning. Som det diskreta systemets utsignal $Z(t)$ sättes integratorns värde efter samplingsintervallets slut. Integratorn nollställes omedelbart efter varje avläsning. Man kan som integrationsområde välja hela samplingsintervallet eller en del därav. Det är också fysikaliskt möjligt att välja ett integrationsområde som sträcker sig över flera samplingsintervall men detta leder till teoretiska svårigheter vilket vi skall se nedan.

En realisering av in- och utsignal kan se ut som i fig. nedan.

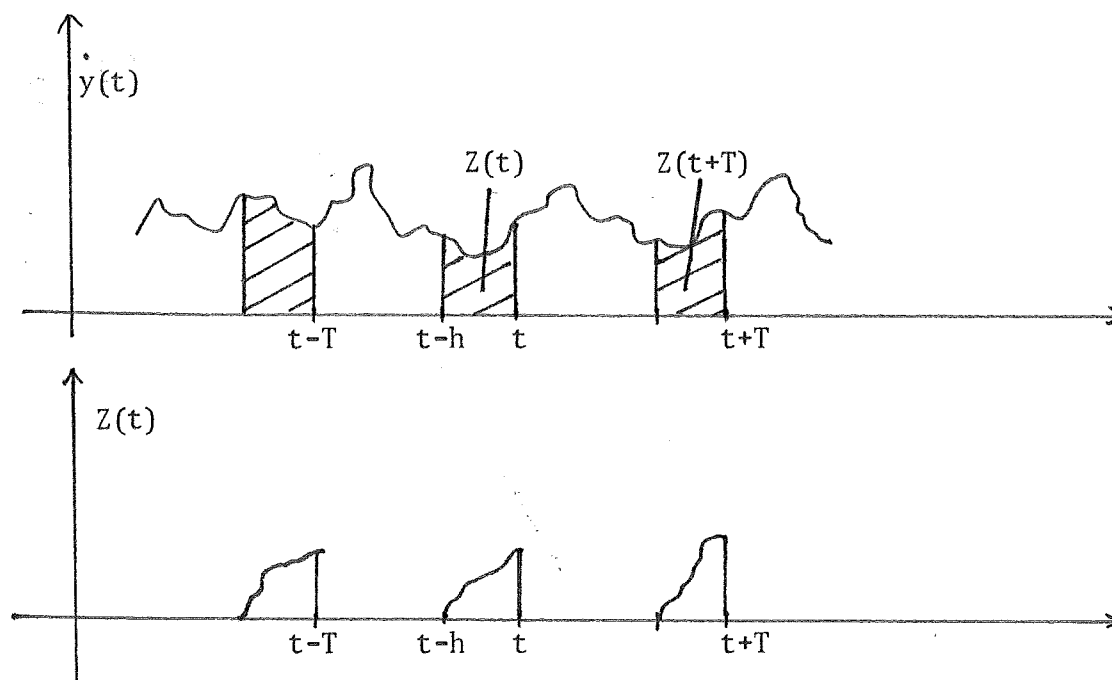


fig. 5.2

Det ursprungliga systemet ges av (1:2). Med $u(t) = 0$ fås följande linära stokastiska differentialekvation:

$$dX(t) = AX(t)dt + dv(t)$$

$$dy(t) = CX(t)dt + de(t)$$

Tillståndsvektorns transformation mellan samplingspunkterna:

$$X(t+T) = e^{AT} X(t) + \int_t^{t+T} e^{A(t+T-s)} dv(s) \quad (5:1)$$

$$\tilde{v}(t) = \int_t^{t+T} e^{A(t+T-s)} dv(s)$$

Som vi såg på sid.17 blir den s.p. ($\tilde{v}(t)$, $t \in T$) vitt diskret brus med kovariansfunktionen

$$\tilde{R}_1 = \int_0^T e^{Au} R_1 e^{A^T u} du \quad (5:2)$$

Som utsignal från det diskreta systemet $Z(t+T)$ sätter vi alltså integralen av den kontinuerliga signalen över området ($t+T-h$, $t+T$)

$$Z(t+T) = \int_{t+T-h}^{t+T} dy(s) = \int_{t+T-h}^{t+T} CX(s)ds + de(s)$$

Men

$$X(s) = e^{A(s-t)} X(t) + \int_t^s e^{A(s-u)} dv(u)$$

Alltså

$$Z(t+T) = C \int_{t+T-h}^{t+T} e^{A(s-t)} X(t)ds + \int_{t+T-h}^{t+T} ds \int_t^s C e^{A(s-u)} dv(u) + \\ + \int_{t+T-h}^{t+T} de(s)$$

Sätt nu

$$\theta = \int_{t+T-h}^{t+T} C e^{A(s-t)} ds = \int_{T-h}^T C e^{Au} du \quad (5:3)$$

$$\tilde{e}(t) = \int_{t+T-h}^{t+T} ds \int_t^s C e^{A(s-u)} dv(u) + \int_{t+T-h}^{t+T} de(s)$$

Om $h < T$ så är $\tilde{e}(t)$ och $\tilde{e}(s)$ okorrelerade om $s \neq t$ ty de är integraler över disjointa intervall. Om $h > T$ är åtminstone $\tilde{e}(t)$ och $\tilde{e}(t+T)$ korrelerade ty integrationsområdena täcker varandra delvis. Medelvärdesfunktionen av $\tilde{e}(t)$ ges av

$$E \tilde{e}(t) = \int_{t+T-h}^{t+T} ds \int_t^s C e^{A(s-u)} E dv(u) + \int_{t+T-h}^{t+T} E de(s) = 0$$

Kovariansen av $\tilde{e}(t)$ om $h < T$ ges av

$$\begin{aligned} R_2 &= E \tilde{e}(t) \tilde{e}(t)^T = E \int_{t+T-h}^{t+T} ds \int_{t+T-h}^{s'} ds' \int_t^{ss'} C e^{A(s-u)} dv(u) dv(u')^T e^{A^T(s'-u')} C^T + \\ &+ E \int_{t+T-h}^{t+T} de(s) de(s')^T + E \left(\int_{t+T-h}^{t+T} de(s) \right) \left(\int_{t+T-h}^{t+T} ds \int_t^s C e^{A(s-u)} dv(u) \right)^T + \\ &+ E \left(\int_{t+T-h}^{t+T} ds \int_t^s C e^{A(s-u)} dv(u) \right) \left(\int_{t+T-h}^{t+T} de(s) \right)^T \quad (5:4) \end{aligned}$$

De två sista termerna blir noll då $e(t)$ och $v(t)$ okorrelerade. Den första termen blir

$$\begin{aligned} &\int_{t+T-h}^{t+T} ds \int_{t+T-h}^{s'} ds' \int_t^{ss'} C e^{A(s-u)} E dv(u) dv(u')^T e^{A^T(s'-u')} C^T = \\ &= \int_{t+T-h}^{t+T} ds \int_t^{\min(s, s')} C e^{A(s-u)} R_1 e^{A^T(s'-u')} C^T du \end{aligned}$$

Betrakta nu fig. 5.3 på nästa sida

I området S_1 : $\min(s, s') = s'$

I området S_2 : $\min(s, s') = s$

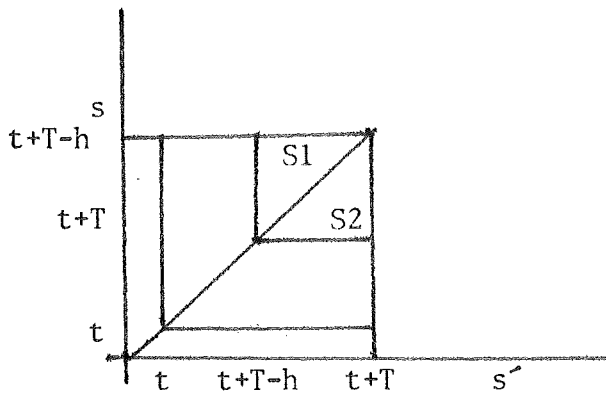


fig. 5.3

Integralen kan då skrivas

$$\begin{aligned}
 & \int_{S_1+S_2} \int_t^{\min(s,s')} ds ds' C e^{A(s-u)} R_1 e^{A^T(s'-u)} C^T du = \\
 & = \int_{t+T-h}^{t+T} ds \int_{t+T-h}^s ds' \int_t^{s'} C e^{A(s-u)} R_1 e^{A^T(s'-u)} C^T du + \\
 & + \int_{t+T-h}^{t+T} ds' \int_{t+T-h}^{s'} ds \int_t^s C e^{A(s-u)} R_1 e^{A^T(s'-u)} C^T du \quad (5:5)
 \end{aligned}$$

Men de två delintegralerna i uttrycket (5:5) är varandras transponater vilket inses om man i delintegral två byter s mot s' och vice versa. Vidare är matrisuttrycken under integraltecknen skalärer. De bägge delintegralerna är alltså lika stora. Den andra termen i uttrycket (5:4) blir

$$E \int_{t+T-h}^{t+T} \int_{t+T-h}^s de(s) de(s')^T = R_2 h$$

Sammanfattningsvis fås alltså för kovariansen av $\tilde{e}(t)$ då $T \geq h$

$$\hat{R}_2 = E \tilde{e}(t) \tilde{e}(t)^T = R_2 h + 2 \int_{t+T-h}^{t+T} ds \int_{t+T-h}^s ds' \int_t^{s'} C e^{A(s-u)} R_1 e^{A^T(s'-u)} C^T du$$

Gör nu följande koordinattransformation

$$q = s - t, \quad q' = s' - t, \quad v = u - t$$

Vi finner då att \hat{R}_2 är oberoende av tiden t :

$$\tilde{R}_2 = R_2 h + 2 \int_{T-h}^T dq \int_{T-h}^q dq' \int_0^{q'} C e^{A(q-v)} R_1 e^{A^T(q'-v)} C^T dv \quad (5:6)$$

Den s.p. ($\tilde{e}(t)$, $t \in T$) är alltså vitt diskret brus om $T \geq h$. Detta gäller ej i fallet $T < h$ ty som vi såg ovan är $\tilde{e}(t)$ i så fall korrelerad med $\tilde{e}(t+T)$. I det följande kommer endast fallet $T \geq h$ att behandlas.

Vi observerar att $\tilde{e}(t)$ och $\tilde{v}(s)$ korrelerade om $t = s$:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{12} &= E \tilde{e}(t) \tilde{v}(t)^T = E \int_{t+T-h}^{t+T} ds \int_t^{s, t+T} C e^{A(s-u)} dv(u) dv(u')^T e^{A^T(t+T-u')} + \\ &+ E \left(\int_{t+T-h}^{t+T} de(s) \right) \left(\int_t^{t+T} e^{A(t+T-u')} dv(u') \right)^T \end{aligned}$$

Men $e(s)$ och $v(u')$ okorrelerade varför den sista termen blir noll. Den första termen blir

$$\begin{aligned} &\int_{t+T-h}^{t+T} ds \int_t^{s, t+T} C e^{A(s-u)} E dv(u) dv(u')^T e^{A^T(t+T-u')} = \\ &= \int_{t+T-h}^{t+T} ds \int_t^s C e^{A(s-u)} R_1 e^{A^T(t+T-u)} du \end{aligned}$$

Sätt nu

$$q = s - t, \quad v = u - t$$

Vi ser då att \tilde{R}_{12} är oberoende av tiden t :

$$\tilde{R}_{12} = \int_{T-h}^T dq \int_0^q C e^{A(q-v)} R_1 e^{A^T(T-v)} dv \quad (5:7)$$

Liksom vid analysen av lågpasfiltret önskar vi rekonstruera tillståndsvektorn genom att utnyttja signalens värden i diskreta tidpunkter fram t.o.m. tiden t . $\hat{X}(t)$ är då känd vid tidpunkten t . En optimal rekonstruktionsmodell är

$$\hat{X}(t+T) = \Phi \hat{X}(t) + K(t) (Z(t+T) - \Theta \hat{X}(t))$$

$$P(t) = E (X(t) - \hat{X}(t)) (X(t) - \hat{X}(t))^T = E \hat{X}(t) \hat{X}(t)^T$$

Vid optimalt val av $K(t)$, dvs så att $a^T P(t) a$ minimeras för godtyckligt a , gäller för rekonstruktionsfelets varians

$$P(t+T) = \phi P(t) \phi^T + \hat{R}_1 - K(t) (\hat{R}_2 + \theta P(t) \theta^T) K(t)^T$$

$$K(t) = (\phi P(t) \theta^T + \hat{R}_{12}) (\theta P(t) \theta^T + \hat{R}_2)^{-1}$$

I stationärt tillstånd gäller då

$$P_\infty = \phi P_\infty \phi^T + \hat{R}_1 - K_\infty (\hat{R}_2 + \theta P_\infty \theta^T) K_\infty^T \quad (5:8)$$

$$K_\infty = (\phi P_\infty \theta^T + \hat{R}_{12}) (\theta P_\infty \theta^T + \hat{R}_2)^{-1}$$

Vi kan nu välja integrationsområdet h så att vi t.ex. minimera rekonstruktionsfelets varians vid rekonstruktion av en given lineärkombination av tillståndsvariablerna $aX(t)$ dvs så att $a^T P_\infty a$ har minimum.

a. Ett 1:a ordningens system.

Givet ett 1:a ordningens system med

$$A = 0 \quad R_1 = R_1$$

$$C = 1 \quad R_2 = R_2$$

För det diskreta systemet fås enligt (5:1), (5:2), (5:3), (5:6), (5:7)

$$\phi = e^{0 \cdot T} = 1$$

$$\theta = \int_{T-h}^h 1 \cdot 1 \, du = h$$

$$\hat{R}_1 = \int_0^T 1 \cdot R_1 \cdot 1 \, du = R_1 T$$

$$\hat{R}_2 = R_2 h + 2 \int_{T-h}^T dq \int_{T-h}^q dq' \int_0^{q'} 1 \cdot R_1 \cdot 1 dv = R_2 h + R_1 h^2 (T - \frac{2}{3} h)$$

$$\hat{R}_{12} = \int_{T-h}^T dq \int_0^q 1 \cdot R_1 \cdot 1 dv = R_1 h (T - \frac{1}{2} h)$$

Rekonstruktionsfelets varians i stationärt tillstånd fås sedan ur uttrycket (5:8)

$$P_\infty = P_\infty + \hat{R}_1 - K_\infty (\hat{R}_2 + h P_\infty h) K_\infty$$

$$K_\infty = (P_\infty h + \hat{R}_{12}) (h P_\infty h + \hat{R}_2)^{-1}$$

Förenklat fås

$$P_\infty^2 + P_\infty \left(\frac{2 \hat{R}_{12}}{h} - \hat{R}_1 \right) = \frac{\hat{R}_1 \hat{R}_2}{h^2} - \frac{\hat{R}_{12}}{h}$$

Löses denna och insättes ovan framräknade uttryck på \hat{R}_1 , \hat{R}_2 ; och \hat{R}_{12} finner vi att

$$P_\infty = \sqrt{R_1 R_2} \left(\sqrt{\frac{T}{h} - \frac{1}{6} \frac{R_1}{R_2} T h + \frac{1}{4} \frac{R_1}{R_2} T^2} - \sqrt{\frac{1}{4} \frac{R_1}{R_2} (T - h)^2} \right)$$

Sätt

$$\beta = \frac{1}{12} \frac{R_1}{R_2} T^2 \quad h = k \cdot T \quad 0 \leq k \leq 1 \quad P_{\infty \text{ opt.}} = \sqrt{R_1 R_2}$$

Vi får

$$\frac{P_\infty}{P_{\infty \text{ opt.}}} = \sqrt{\frac{1}{k} - 2\beta k + 3\beta} - \sqrt{3\beta} (1 - k)$$

$\frac{P_\infty}{P_{\infty \text{ opt.}}}$ är uppritad för några olika k -värden i fig.6.5 som funktion av β .

Ett numeriskt exempel med $R_1 = 1.000$ och $R_2 = 1.000$ kan studeras i fig. 6.6.

b. Ett 2:a ordningens system.

Givet ett andra ordningens system med

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix} \quad R_2 = R_2$$

För det diskreta systemet gäller enligt (5:1), (5:2), (5:3), (5:6), (5:7)

$$\Phi = e^{AT} = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \int_{T-h}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos u & \sin u \\ -\sin u & \cos u \end{bmatrix} du = \sin T - \sin(T-h), \cos(T-h) - \cos T$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_1 &= \int_0^T \begin{bmatrix} \cos u & \sin u \\ -\sin u & \cos u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{bmatrix} du = \\ &= \frac{R_1}{4} \begin{bmatrix} 2T - \sin 2T & 1 - \cos 2T \\ 1 - \cos 2T & 2T - \sin 2T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{12} &= \int_{T-h}^T dq \int_0^q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q-v) & \sin(q-v) \\ -\sin(q-v) & \cos(q-v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \cos(T-v) & -\sin(T-v) \\ \sin(T-v) & \cos(T-v) \end{bmatrix} dv = \left[(2(T-h)\sin h - 3\cos h + 3 + \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \cos 2T - \cos(2T-h) \right] \cdot \frac{R_1}{4}$$

$$\begin{aligned}
\hat{R}_2 &= R_2 h + 2 \int_{T-h}^T \int_{T-h}^q \int_0^{q'} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q-v) & \sin(q-v) \\ -\sin(q-v) & \cos(q-v) \end{bmatrix} x \\
&\quad \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q'-v) & -\sin(q'-v) \\ \sin(q'-v) & \cos(q'-v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dv = \\
&= R_2 h + \frac{R_1}{2} (h + 2T - 2(T-h)\cos h - 3 \sin h + \frac{1}{2} \sin 2T + \frac{1}{2} \sin 2(T-h) - \\
&\quad - \sin(2T-h))
\end{aligned}$$

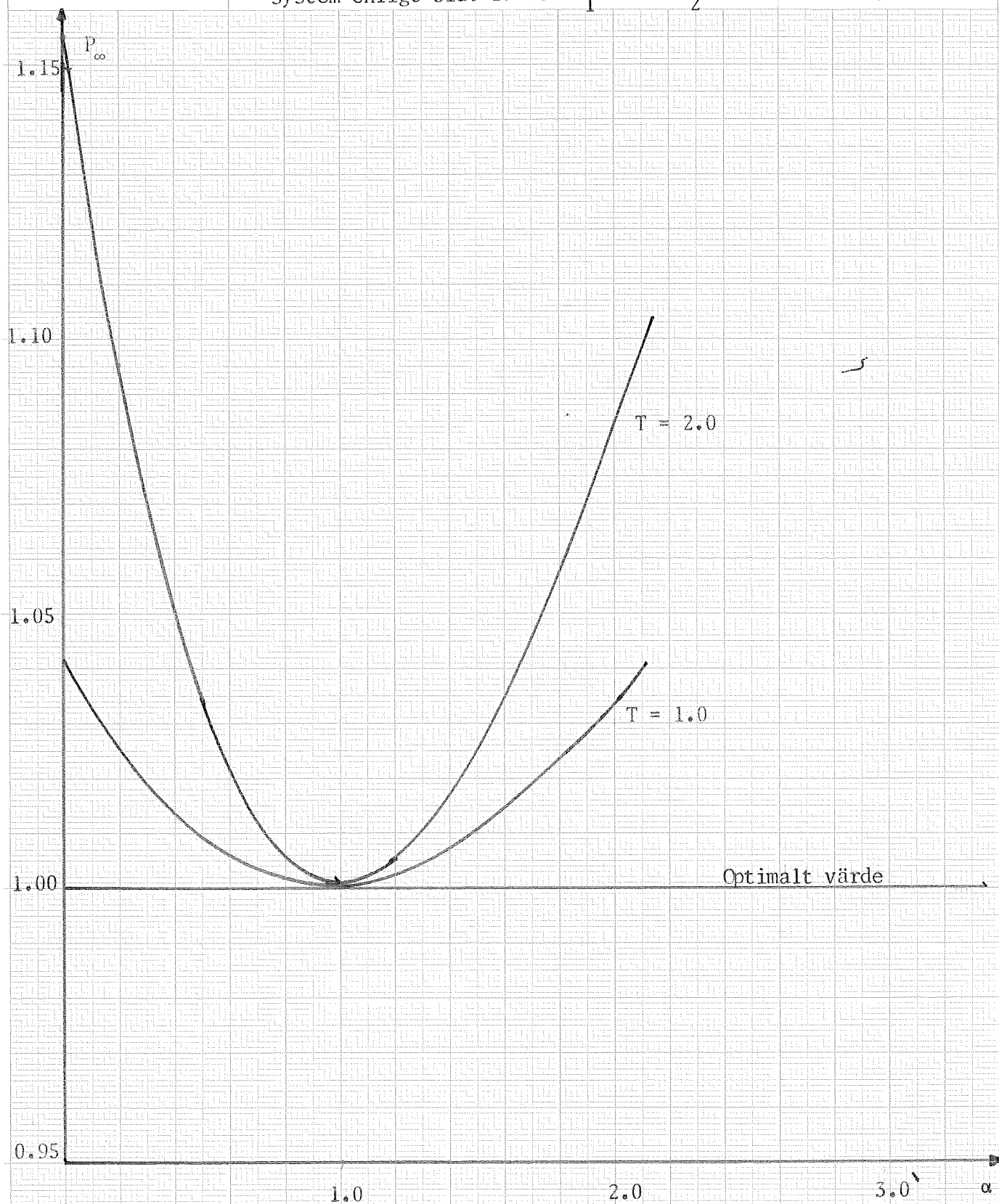
Med hjälp av de framräknade matriserna kan rekonstruktionsfelets varians i stationärt tillstånd beräknas enligt uttrycket (5:8).

Ett numeriskt exempel med $R_1 = 1.0000$ och $R_2 = 1.0000$ kan studeras i fig. 6.7, 6.8, 6.9 .

Lågpasfilter.

Numeriskt exempel med ett 1:a ordningens system enligt sid. 19 och $R_1 = 1$ $R_2 = 1$

fig. 6.1



T = samplingstiden

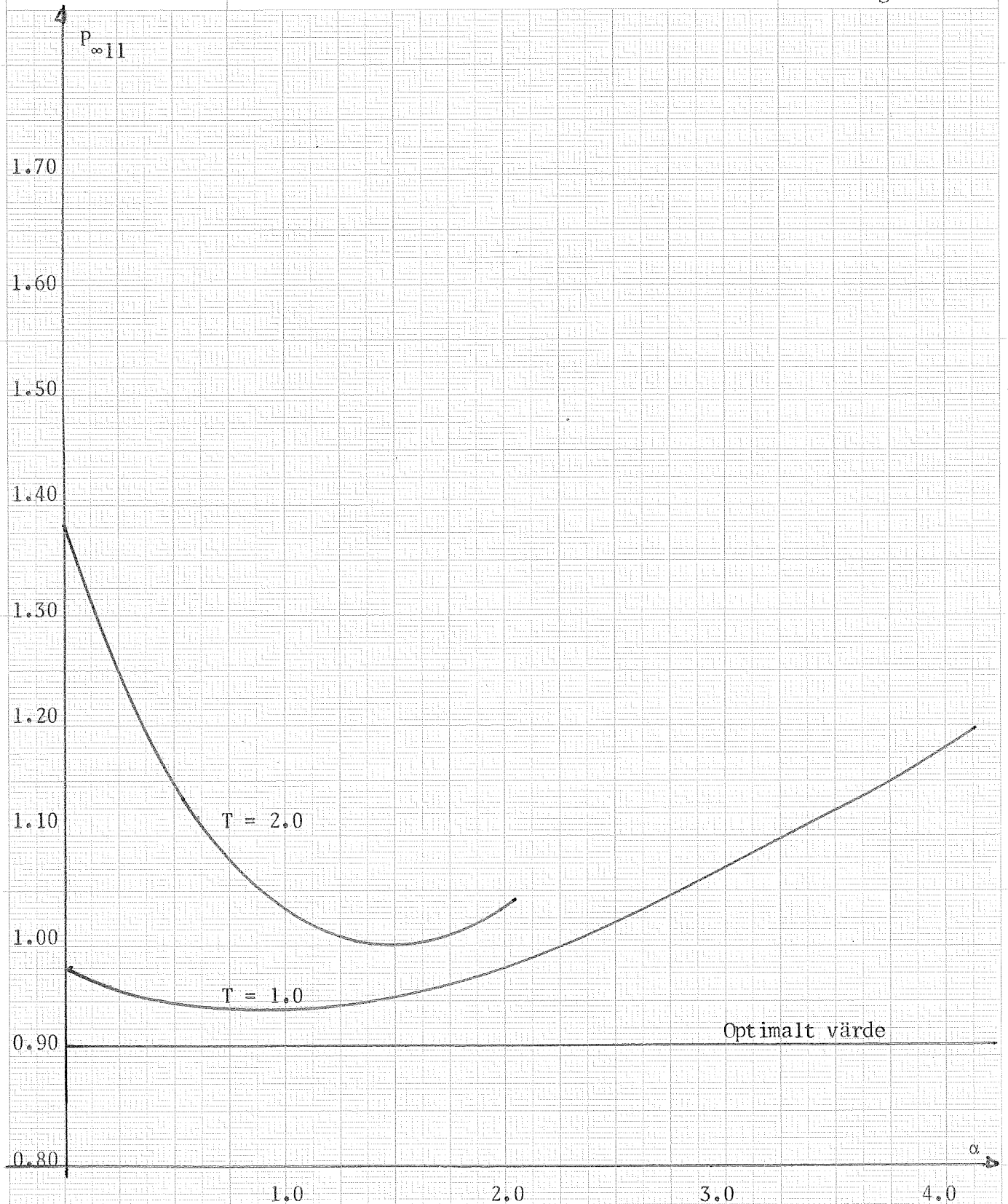
P_∞ = rekonstruktionfelets varians i stationärt tillstånd

α = parameter i lågpasfiltret

$$P_{\infty 11} = P_{\infty 11}(\alpha)$$

Numeriskt exempel med ett 2:a ordningens
SYSTEM ENLIGT SID. 121 $R_1 = 1$ $R_2 = 1$

fig. 6.2



T = samplingsstiden

α = parameter i lågpasfiltret

$P_{\infty 11}$ = rekonstruktionsfelets varians i stationärt tillstånd vid rekonstruktion av tillståndsvariabeln $X_1(t)$

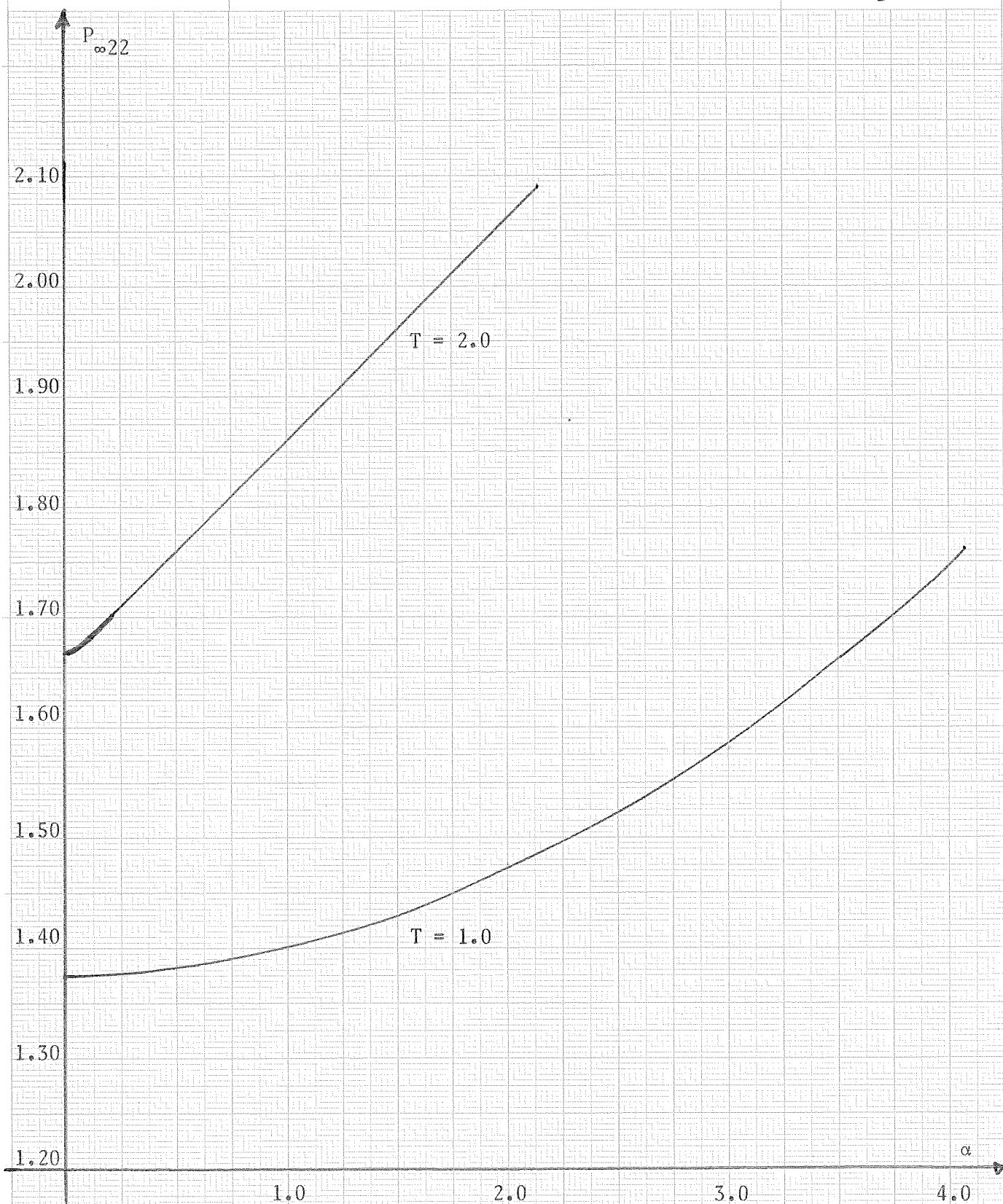
Lågpassfilter.

$$P_{\infty 22} = P_{\infty 22}(\alpha)$$

Numeriskt exempel med ett 2:a ordningens system enligt sid. 21

$$R_1 = 1 \quad R_2 = 1$$

fig. 6.3



T = samplingstiden

α = parameter i lågpassfiltret

$P_{\infty 22}$ = rekonstruktionsfelets varians i stationärt tillstånd vid rekonstruktion av tillståndsvariabeln $X_2(t)$

$$\lambda_{\max} = \lambda_{\max}(\alpha)$$

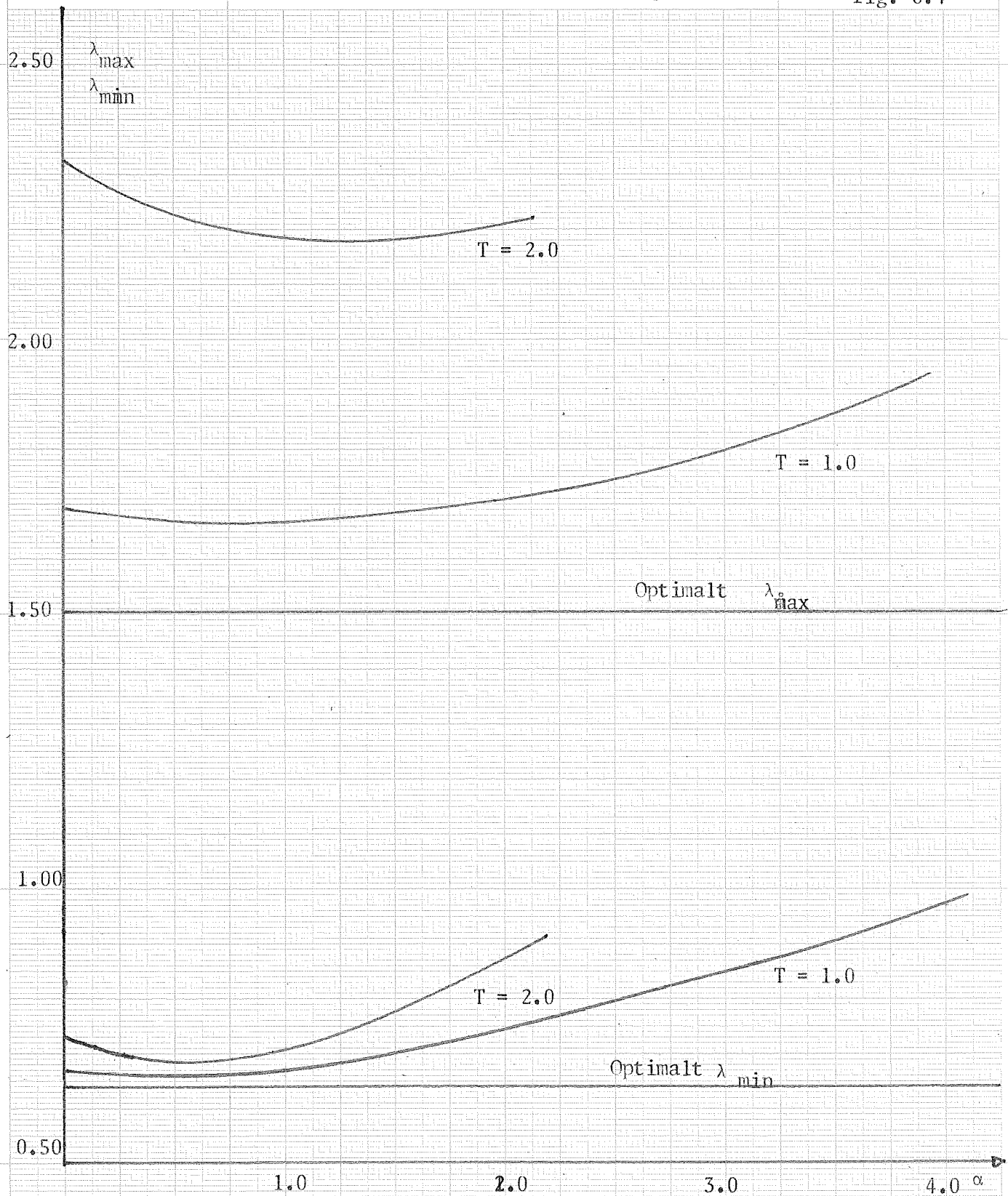
$$\lambda_{\min} = \lambda_{\min}(\alpha)$$

Lågpasfilter.

Numeriskt exempel med ett 2:a ordningens

system enligt sid. 21 $R_1 = 1$ $R_2 = 1$

fig. 6.4



T = samplingstiden

α = parameter i lågpasfiltret

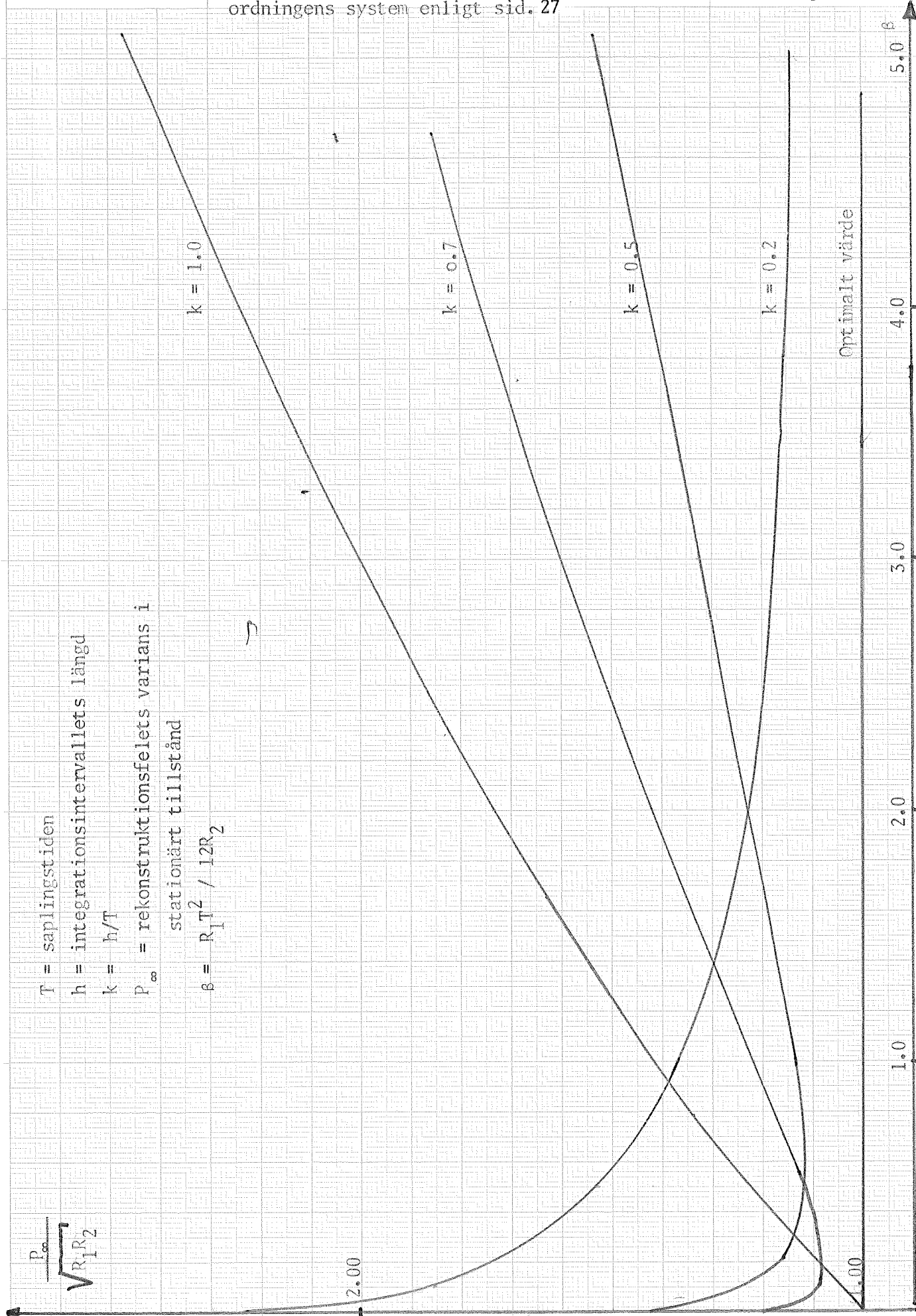
λ_{\max} = största egenvärdet i rekonstruktionfelets variansmatrix

λ_{\min} = minsta " " " "

$$P_{\infty} = P_{\infty}(\beta)$$

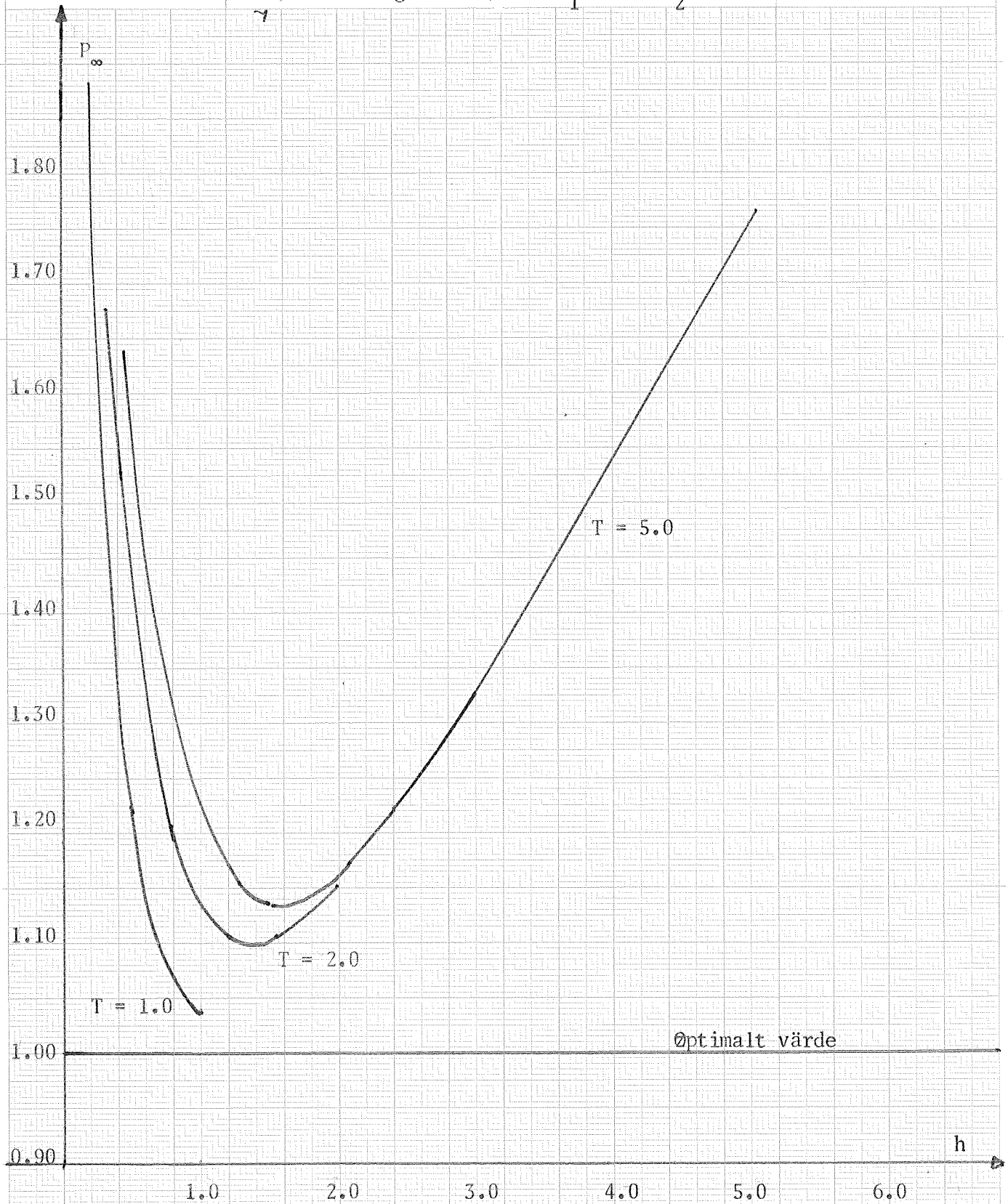
Rekonstruktionsfelets varians i stationärt tillstånd vid rekonstruktion av ett 1:a ordningens system enligt sid. 27

fig. 6.5



Numeriskt exempel med ett 1:a ordningens
system enligt sid. 27 $R_1 = 1$ $R_2 = 1$

fig. 6.6



T = samplings tiden

h = integrationsintervallens längd

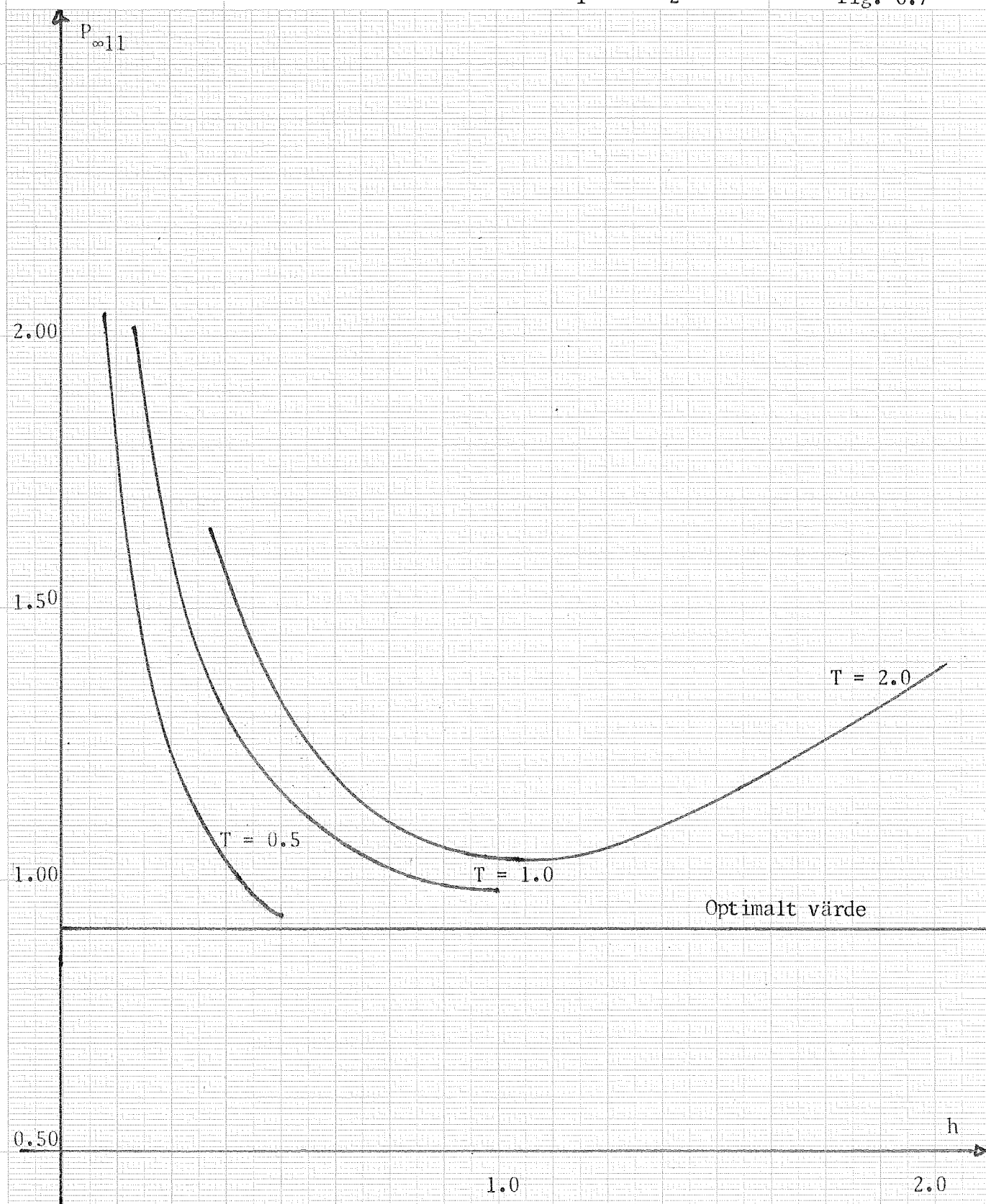
P_{∞} = rekonstruktionsfelets varians i stationärt tillstånd

Medelvärdesfilter.

$$P_{\infty 11} = P_{\infty 11}(h)$$

Numeriskt exempel med ett 2:a ordningens system enligt sid. 29 $R_1 = 1 \quad R_2 = 1$

fig. 6.7



T = samplingstiden

h = integrationsområdets längd

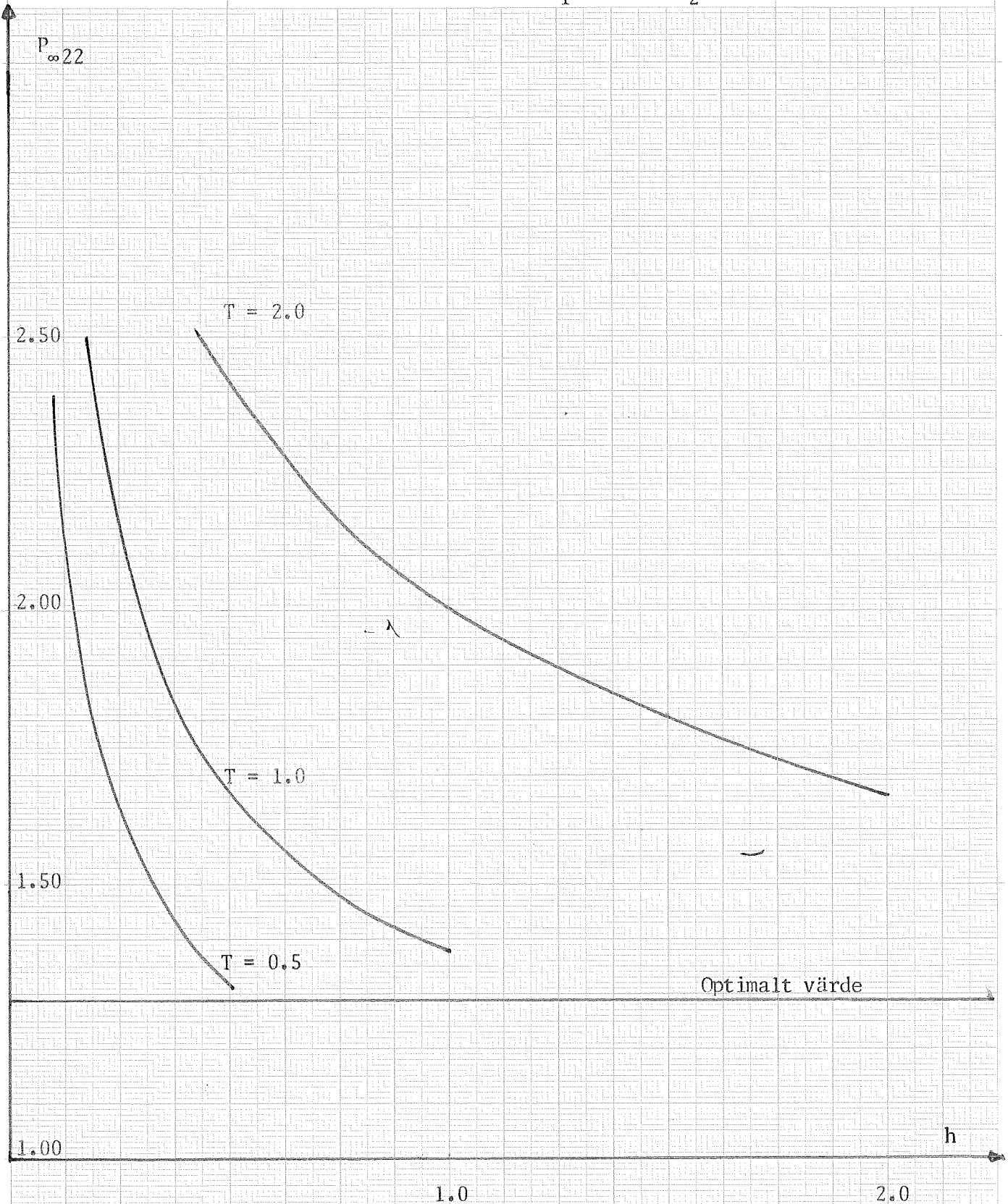
$P_{\infty 11}$ = rekonstruktionsfelets varians i stationärt tillstånd vid rekonstruktion av tillståndsvariabeln $X_1(t)$

$$P_{\infty 22} = P_{\infty 22}(h)$$

Medelvärdesfilter.

Numeriskt exempel med ett andra ordningens system enligt sid. 29 $R_1 = 1$ $R_2 = 1$

fig. 6.8



T = samplingstiden

h = integrationsintervallets längd

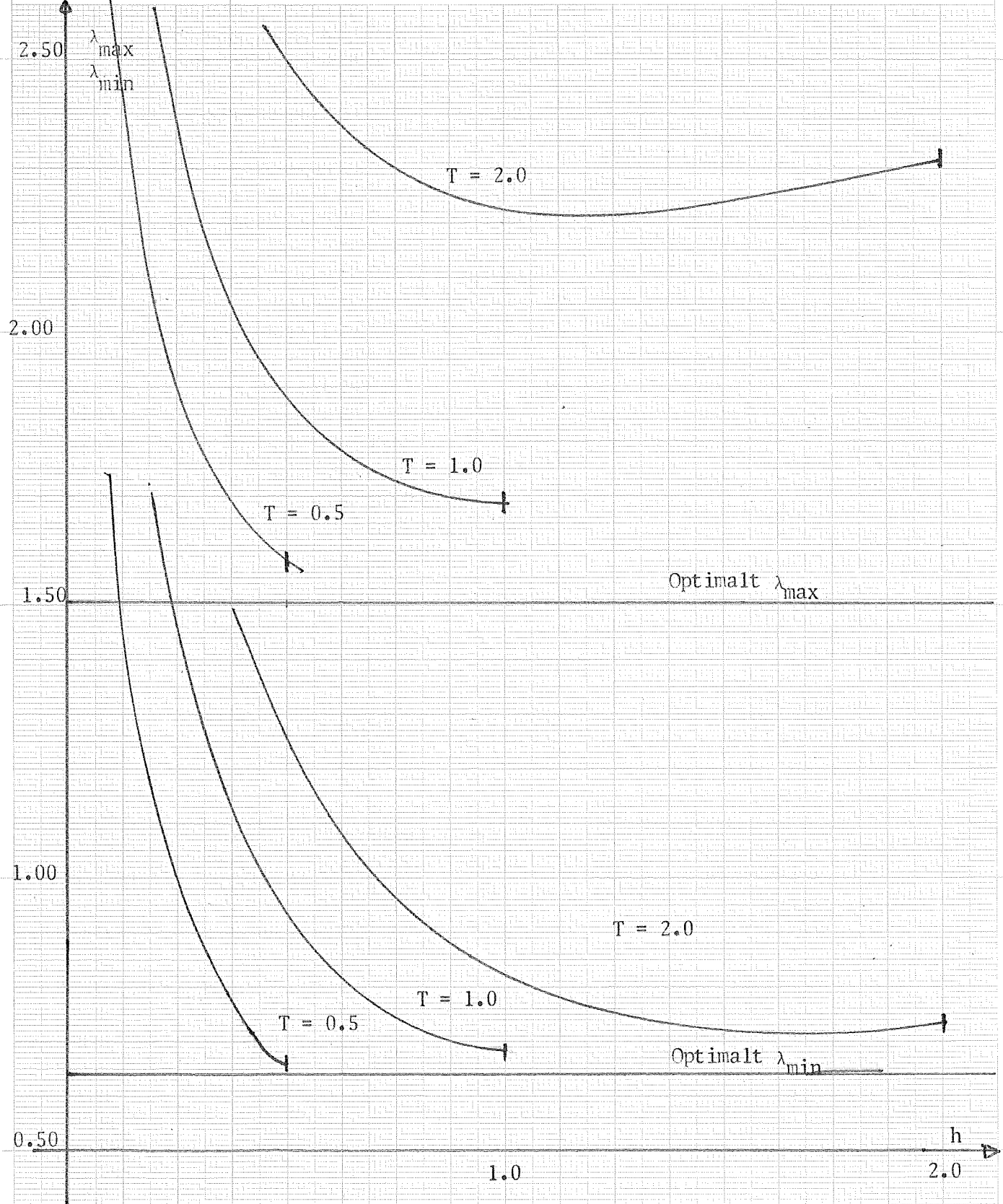
$P_{\infty 22}$ = rekonstruktionsfelets varians vid rekonstruktion av tillståndsvariabeln $X_2(t)$ i stationärt tillstånd

Medelvärdesfilter

Numeriskt exempel med ett 2:a ordningens system enligt sid. 29

$$R_1 = 1 \quad R_2 = 1$$

fig. 6.9



T = samplingtiden

h = integrationsintervallets längd

λ_{\max} = största egenvärdet i rekonstruktionsfelets variansmatris

λ_{\min} = minsta " " " "

REFERENCES.

K - J. Åström: Stokastisk reglerteori (Lic. kurs)

Bogdanoff - K. : Proceedings of the first symposium
on engineering applications of
random function theory and probability