5067

# FLERVARIABLA SYSTEM

GÖRAN FICK

Rapport RE - 67 okt. 1969

# FLERVARIABLA SYSTEM

GÖRAN FICK
OKTOBER 1969
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
INST.FÖR REGLERINGSTEKNIK

INNEHÅLL


I SAMMANFATTNING / INLEDNING..... 2

II SUMMARY IN ENGLISH / INTRODUCTION..... 4

III ÖPPNA SYSTEM

III:1 Matrisrepresentationerna S(ABCD) och S(AECF)..... 6

III:2 Allmänt betraktelsesätt för system-representationen S(AECF)..... 8

III:3 Styrbarhet

A. Allmänt..... 9

B. Kriterium för systemet S(ABCD)..... 9

C. Kriterium för systemet S(AECF).....10

D. När är S(AECF) ej styrbart ?.....10

Kriterier oberoende av $u^o$.....11

Kriterier på valet av $u^o$.....13

E. Exempel 1: styrbart system.....16

F. Exempel 2: ej styrbart system.....18

III:4 Observerbarhet.....20

III:5 Överföringsfunktioner

A. Allmänt.....21

B. Konstruktion av överföringsfunktioner.....21

C. Nollställen.....23

D. Poler.....23

E. Minimum-fas-begreppet.....24

F. Exempel 3.....25

IV SLUTNA SYSTEM

IV:1 Inledning.....29

IV:2 Syntes av reglersystem: k-styrning och systemets poler.....30

IV:3 Syntes av reglersystem: $u^o$-styrning

A. Allmänt.....34

B. Konstant $u^o$.....34

C. Variabelt $u^o$.....36

D. Exempel 4: konstant $u^o$.....37

IV:4 Blockschema för slutna system.....40
IV:5 Om det s.k. "pole assignment"-problemet.....42
V JÄMFÖRELSE MED SYSTEM MED EN INSIGNAL.....47
VI REFERENSER.....49
APPENDIX 1: Program SIMKONST,programlista.....51
APPENDIX 2: Program SIMKONST,utskriftsexempel.....56
APPENDIX 3: Program VARDEN,programlista.....58

# I SAMMANFATTNING / INLEDNING

# I Sammanfattning / Inledning.

I föreliggande arbete behandlas system med flera insignaler genom att insignalvektorn delas upp i två storheter, vektorns "belopp" som är en skalär storhet, samt en enhetsvektor som anger styrvektorns riktning (dvs proportionerna mellan styrsignalerna) i det linjära rummet av styrvektorer. (III:1)

En formalism för representation av flervariabla system på matrisform, där styrvektorns "belopp" betraktas som den enda insignalen, medan riktningsvektorn behandlas som en systemparameter, introduceras.(III:2) Med denna formalism undersökes systemet,med metoder för system med en insignal, vad gäller styrbarhet (III:3) och observerbarhet (III:4) varefter det konstrueras överföringsfunktioner från det formella systemets skalära insignal till systemets utsignaler (III:5). Dessa ger god insyn vad gäller poler och nollställen för flervariabla system.

Det visas därefter att läget för polerna till slutna system endast beror av styrvektorns "belopp" (IV:2). Sedan detta bestämts för styrning av ett system, och därmed polerna fastlagts, kan styrvektorns riktning väljas så att andra egenskaper hos systemet uppnås (IV:3).Detta behandlas för två fall, styrning med konstant eller variabel styrvektorriktning. Härvid diskuteras minimum-fas-karaktärer och styrning med minimal styrenergi. Simulering av ett exempel redovisas.

Slutligen diskuteras det s.k. "pole assignment"-problemet (IV:4) där det visas att detta, om styrlagen skall vara en linjär återkoppling från tillstånden, nödvändigtvis medför konstant riktning i styrvektorrummet.

# II SUMMARY IN ENGLISH / INTRODUCTION

## II Summary in English / Introduction.

In this report multi-input systems are treated by considering the input vector consist of two elements, it's magnitude which is a scalar, and a unit vector representing the direction of the control vector (i.e. the ratio between the control signals) in the linear space formed by the control vectors (III:1).

A formalism for representing multi-variable systems in matrix-form, where the magnitude of the control vector is considered being the one and only input, while the unit vector representing the direction is treated as a parameter of the system itself (III:2). Using this formalism the system is analysed by methods for single-input systems and after an investigation of the controllability (III:3) and the observability (III:4) transfer functions are constructed from the single-input of the formal system to the output signals (III:5). They will provide a profound insight to the poles and zeroes of multi-input systems.

There will be shown that the poles of the closed-loop system are variables of the magnitude of the input vector only (IV:2) After having fixed the control function for the magnitude of the input vector, i.e. the poles are fixed, the direction of the input vector can be used to create other desirable properties of the system (IV:3). Two cases are considered, a constant or a variable direction of the input vector. Minimum-fase-characters and minimum-energy-control are discussed.Simulation of an example is presented.

Finally the pole assignment problem is treated (IV:4) and it is shown that if the control-law is bound to be a linear feedback from the state-vector the direction of the control vector must necessarily be a constant.

# III ÖPPNA SYSTEM

## III:1 Matrisrepresentationerna S(ABCD) och S(AECF)

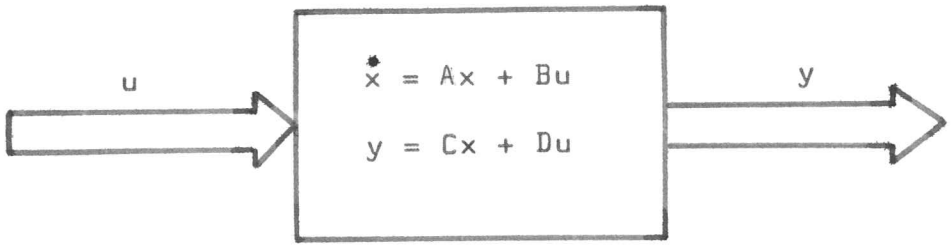
Givet är det linjära,tidsinvarianta systemet

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

där

A är en n x n matris
B är en n x r matris
C är en p x n matris
D är en p x r matris
x är en n-dimensionell tillståndsvektor
u är en r-dimensionell styrvektor
y är en p-dimensionell utsignalvektor

Systemrepresentationen, som i det följande benämnes S(ABCD) illustreras av figur 1:




Figur 1

I det r-dimensionella linjära rum som konstitueras av mängden av styrvektorer u kan varje styrsignal u beskrivas med en vektor $u^o$ enligt

$$u^o = \frac{u}{\|u\|}$$
$$\|u^o\| = 1$$

som anger riktningen i rummet ( dvs proportionerna mellan styrvektorns komponenter ), samt en skalär storhet k för

vilken det gäller

$$k = \|u\|$$

Således gäller sambandet

$$u = k\, u^{o}$$

Med denna formalism kan en ny systemrepresentation anges enligt

$$\dot{x} = Ax + Bu^{o}\, k$$
$$y = Cx + Du^{o}\, k$$

vilket om nya beteckningar införes enligt

$E = Bu^{o}$ E är en n-dimensionell vektor

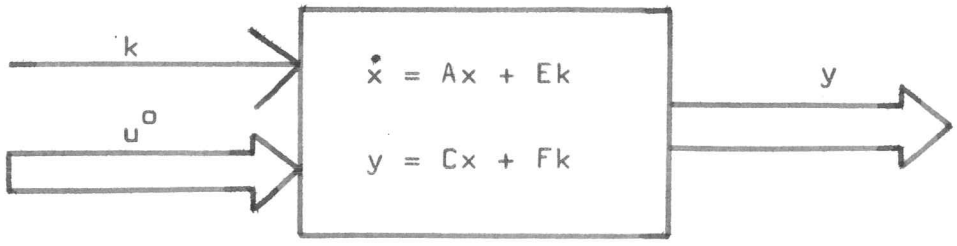
$F = Du^{o}$ F är en p-dimensionell vektor

enklare skrives

$$\dot{x} = Ax + Ek$$
$$y = Cx + Fk$$

Observera att E och F med dessa definitioner ej är konstanta utan beroende av insignalen.

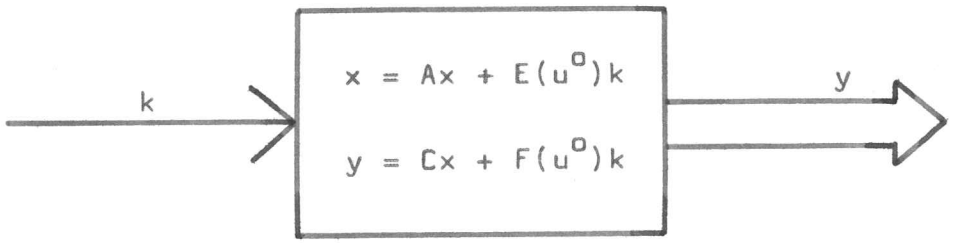
Denna nya systemrepresentation benämnes i det följande S(AECF) och illustreras av blockschemat i figur 2:




Figur 2

## III:2 Allmänt betraktelsesätt för representationsformen S(AECF)

Föreliggande resultat för flervariabla system erhålles främst genom att systemet på formen S(AECF) ( se figur 2 ) betraktas som om det hade en insignal k, medan $u^o$ behandlas som en fri parameter hos systemet. Blockschemat blir då som i figur 3:




Figur 3

Denna metod möjliggör användandet av tidigare kända resultat för system med en insignal. Härigenom ställes många kraftfulla satser från dessa välkända teorier till förfogande för analys av mera komplexa system.

Representationen ovan har karaktären av tidsvariant system. Man måste dock ha klart för sig att representationen S(AECF) är endast ett formellt grepp på ett i grunden tidsinvariant system, varför S(AECF) kan behandlas som ett kvasitidsinvariant system i den bemärkelsen att för varje $u^o$ uppför sig systemet som om det vore invariant i tiden.

## III:3 Styrbarhet

### 3:A Allmänt

Vid undersökning av systemets styrbarhet måste man skilja mellan "systemen" i de båda skilda representationsformerna

$$S(ABCD): \qquad \dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

respektive

$$S(AECF): \qquad \dot{x} = Ax + Ek$$
$$y = Cx + Fk$$

Dessa är formellt skilda system med olika kriterier för styrbarhet. För S(ABCD) gäller villkor på A och B. För S(AECF) gäller villkor på A och E. Det senare innebär att $u^o$ inverkar på systemets styrbarhet eftersom E beror av denna storhet. Detta är ej något märkligt, ty som tidigare angivits räknas för denna representationsform $u^o$ som en fri parameter hos s y s t e m e t medan insignalen endast utgöres av k. Krav på $u^o$ skall således betraktas som krav på det formella systemet S(AECF).

Det är på sin plats att påminna om följande

DEFINITION
Ett tillstånd $x^o$ är styrbart om det finns ett ändligt $t_1 > 0$ och en styrsignal u i intervallet $(0,t_1)$ som överför tillståndet $x^o$ till origo. Ett system säges vara styrbart om varje tillstånd är styrbart.

### 3:B Kriterium för systemet S(ABCD)

Enligt välkänd sats - se exempelvis Åström: Reglerteori, kap. 3:5 - är det klart att de styrbara tillstånden ligger i det underrum till tillståndsrummet som spännes upp av

kolonnerna i matrisen

$$\left( B \mid AB \mid A^2B \mid \ldots\ldots \mid A^{n-1}B \right)$$

Systemet är styrbart om

$$\text{rang} \left( B \mid AB \mid A^2B \mid \ldots\ldots \mid A^{n-1}B \right) = n$$

### 3:C Kriterium för systemet S(AECF)

Enligt samma referens som ovan fås att de styrbara tillstånden ligger i det underrum till tillståndsrummet som uppspännes av kolonnerna i matrisen

$$\left( E \mid AE \mid A^2E \mid \ldots\ldots \mid A^{n-1}E \right)$$

I fortsättningen finns det ofta anledning att behandla denna matris varför följande beteckning införes:

$$M = \left( E \mid AE \mid A^2E \mid \ldots\ldots \mid A^{n-1}E \right)$$

Hela tillståndsrummet är styrbart om

$$\text{rang } M = n$$

Matrisen M är emellertid av n x n typ varför detta villkor är ekvivalent med

$$\det M \neq 0$$

### 3:D När är S(AECF) ej styrbart?

Att systemet S(AECF) ej är styrbart är enligt resonemanget ovan ekvivalent med att

$$\det M = 0$$

vilket i sin tur är ekvivalent med att det finns tal $m_i$ där $i = 0,1,\ldots,n-1$ så att

$$m_0E + m_1AE + m_2A^2E + \ldots\ldots + m_{n-1}A^{n-1}E = 0$$

vilket även kan skrivas

$$(m_0 I + m_1 A + m_2 A^2 + \ldots\ldots + m_{n-1} A^{n-1})\, E = 0$$

Om beteckningen

$$P = m_0 I + m_1 A + m_2 A^2 + \ldots\ldots + m_{n-1} A^{n-1}$$

införes, och sambandet

$$E = B\, u^o$$

beaktas, skrives uttrycket som

$$PBu^o = 0$$

Kriterier oberoende av $u^o$.

Om slututtrycket ovan skall gälla oberoende av valet av $u^o$ måste således

$$\det M = 0$$

vara ekvivalent med att det finns tal $m_i$ så att

$$PB = 0 \qquad (m_i \neq 0 \text{ för något } i)$$

Då $B \neq 0$ är en förutsättning för problemställningen, och således ej behöver ifrågasättas, är uttrycket ekvivalent med att det föreligger något av de två fallen:

1. Det finns tal $m_i$ så att $P = 0$
2. $P \neq 0$ men $PB = 0$

Dessa behandlas var för sig.

1. Det finns $m_i$ så att $P = 0$

   Antag nu att A kan diagonaliseras, dvs att det finns en transformationsmatris S så att

   $$SAS^{-1} = D$$

   där D är en diagonalmatris som kommer att innehålla A:s egenvärden i huvuddiagonalen. Dessa betecknas $\lambda_i$, i=1...n

   Påstående: Det finns $m_i$ så att $m_i \neq 0$ för något i och $P=0$ är ekvivalent med att A har ( minst ) två lika egenvärden.

Bevis: Betrakta systemet i ett koordinatsystem där A framställes av en diagonalmatris D. Att det finns $m_i$ så att P=0 betyder då enligt definitionen av P att det finns $m_i$ så att

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Den kvadratiska matrisen ovan betecknas med Q. Sambandet ovan kan endast satisfieras om

$$\det Q = 0$$

och vektorn m tillhör lösningsrummet till ekvationssystemet.

Men

$$\det Q = \prod_{n \geq j > k \geq 1} (\lambda_j - \lambda_k)$$

enligt Arne Persson: Föreläsningar i lineär algebra för betygen 6 och 7, sid 40 Utg. LTH 1965. Om uttrycket gäller har således A minst två lika egenvärden.

Om, å andra sidan, A har minst två lika egenvärden medför detta att

$$\det Q = 0$$

som implicerar att det finns $m_i$ som uppfyller den givna relationen.

V.S.B.

Om A kan diagonaliseras och har (minst) två lika egenvärden är således

$$\det M = 0$$

och systemet ej styrbart, hur än $u^o$ väljes.

Om A ej kan diagonaliseras gäller ej ovanstående resonemang. Förhållandena är då mera komplicerade. Detta problem behandlas i "On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems" av W.M.Wonham (Se referenser)

2. $P \neq 0$ men $PB = 0$

Låt $b_i$ vara den i:e kolonnen i B-matrisen, dvs

$$b_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}$$

Med denna beteckning erhålles att

$$PB = 0$$

är ekvivalent med

$$Pb_i = 0 \qquad \text{för alla } i = 1,2,\ldots,r$$

Dessa r uttryck satisfieras om, och endast om, vektorerna $b_i$ tillhör lösningsrummet till ekvationssystemet

$$Px = 0$$

Något enkelt kriterium på denna egenskap har ej påträffats. Direkt uträkning av determinanten för M är oftast enklast.

Kriterier på valet av $u^o$.

Låt X beteckna tillståndsrummet.

Låt $R(A,b_i)$ beteckna det underrum till tillståndsrummet X som uppspännes av kolonnerna i matrisen

$$\left( b_i \mid Ab_i \mid A^2b_i \mid \ldots\ldots \mid A^{n-1}b_i \right)$$

Detta underrum är styrbart från u-vektorns i:e komponent, för vilken beteckningen $u_j$ användes. (j= 1,2,.....,r )

För att hela tillståndsrummet skall spännas upp måste mängden av $R(A,b_i)$ för i= 1,2,...r tillsammans konstituera X. Om $u_i^o$ är konstant lika med noll för något i kommer motsvarande underrum $R(A,b_i)$ icke att bidraga till uppbyggandet av hela tillståndsrummet.Styrbarhetsbegreppet är således förknippat med frågan huruvida någon eller några av $u^o$;s komponenter är konstant lika med noll.

Alltefter det givna systemets egenskaper kan det hänföras till någon av följande fem grupper, med därav givna krav på $u^o$.

1. Systemegenskaper:

   $R(A,b_i) = X$ för alla $i \in \bar{N}$ , med $\bar{N} = \{1,2,...r\}$

   Krav:
   För något i är $u_i^o$ icke konstant lika med noll

2. Systemegenskaper:

   $R(A,b_i) = X$ för alla $i \in N$ , med $N \subset \bar{N}$
   $R(A,b_i) \subset X$ för alla $i \notin N$
   Det finns N' så att $N' \subseteq \lceil N$ och $\bigcup_{i \in N'} R(A,b_i) = X$

   Krav:
   Antingen: för något $i \in N$ är $u_i^o$ icke konstant lika med noll
   eller: för alla $i \in N'$ är $u_1^o$ icke konstant lika med noll
   Anm: Det kan finnas flera olika N'-mängder som duger.

3. Systemegenskaper:

   $R(A,b_i) = X$ för alla $i \in N$ , med $N \subset \bar{N}$

   $\bigcup_{i \in \lceil N} R(A,b_i) \subset X$

   Krav:
   För något $i \in N$ är $u_i^o$ icke konstant lika med noll

4. Systemegenskaper:

$R(A,b_i) \subset X$ för alla $i \in \bar{N}$

Det finns N så att $N \subseteq \bar{N}$ och $\bigcup_{i \in N} R(A,b_i) = X$

Krav:

För alla $i \in N$ är $u_i^o$ icke konstant lika med noll

Anm: Det kan finnas flera olika N-mängder som duger.

5. Systemegenskaper:

$\bigcup_{i \in \bar{N}} R(A,b_i) \subset X$

Systemet är ej styrbart.

Även då S(AECF) uppfyller kriterierna ovan kan det inträffa att

$$\det M = 0$$

för vissa enskilda $u^o$-värden. Dessa måste beräknas genom direkt uträkning.

3:E Exempel 1: Styrbart system

Undersök systemet S(AB)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} u$$

Karaktäristiska ekvationen för A lyder

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} =$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

Egenvärdena fås enligt

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

och är således skilda.

$R(A,b_1) = R(A,b_2) = R^2 = X$

Systemet tillhör således grupp 1. Krav på $u^o$ blir att för något i=1,2 är $u_i^o$ icke konstant lika med noll.

Sätt

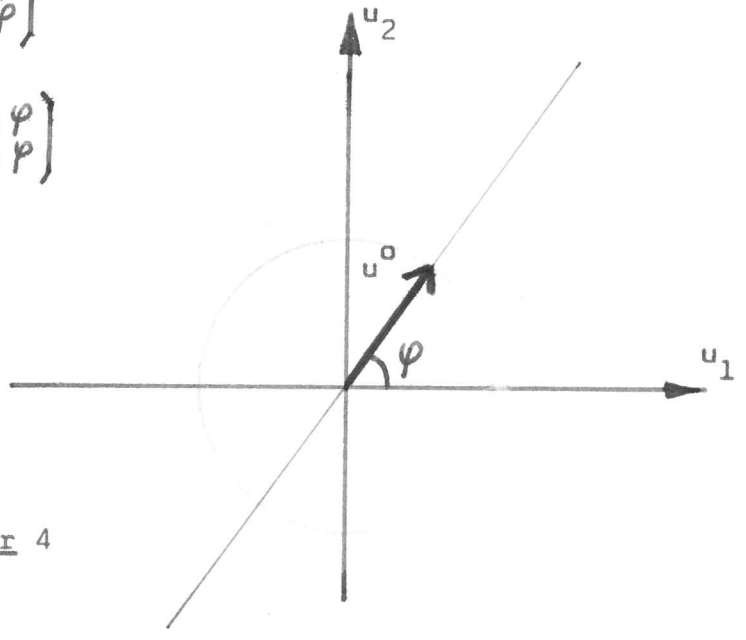
$$u^o = \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$

och därmed

$$u = k \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Det gäller

$$|u^o| = 1$$




Figur 4

$$E = B\,u^{o} = \begin{bmatrix} 2\sin\varphi + \cos\varphi \\ \sin\varphi - \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Systemrepresentationen S(AE) ges således av

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2\sin\varphi + \cos\varphi \\ \sin\varphi - \cos\varphi \end{bmatrix} k$$

Undersök

$$\det \left[ E \,\vdots\, AE \right] = \det \begin{bmatrix} 2\sin\varphi + \cos\varphi & \vdots & 11\sin\varphi + \cos\varphi \\ \sin\varphi - \cos\varphi & \vdots & 5\sin\varphi + \cos\varphi \end{bmatrix} =$$

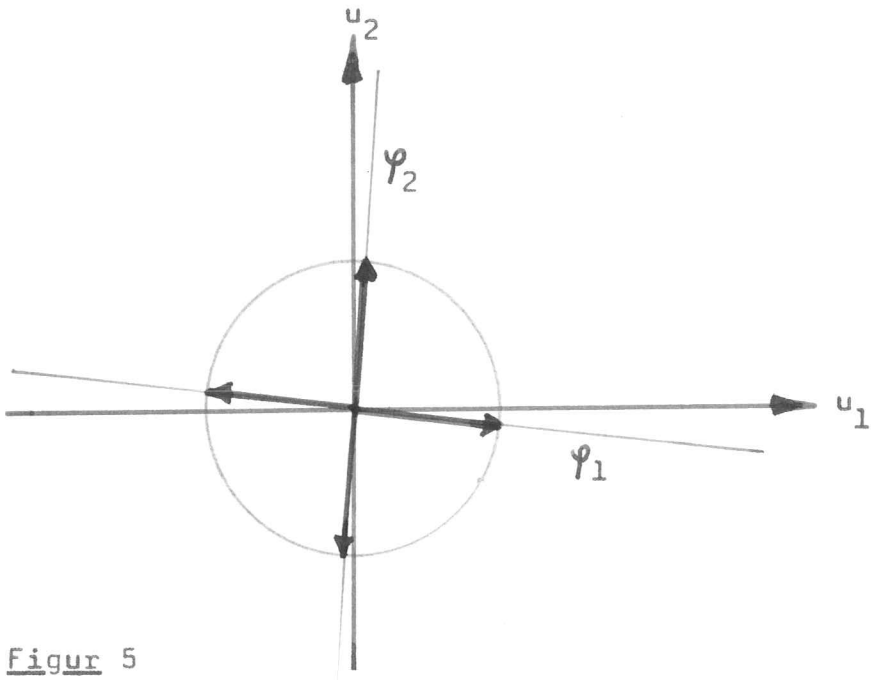
$$2\cos^{2}\varphi + 17\cos\varphi\sin\varphi - \sin^{2}\varphi$$

Detta uttryck är skilt från noll utom då $\varphi$ antar värden enligt

$$\cot\varphi = (-17-\sqrt{297})/4 = -8{,}558$$
$$\cot\varphi = (-17+\sqrt{297})/4 = 0{,}058$$

Således är det M = 0 för

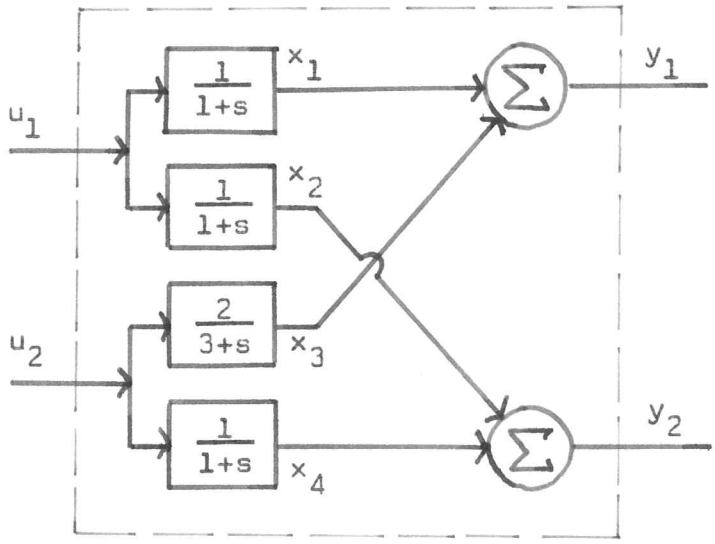
$$\varphi_1 = 173^{o}\ 20'\ (\text{samt } \varphi_1 + 180^{o})$$
$$\varphi_2 = 86^{o}\ 39'\ (\text{samt } \varphi_2 + 180^{o})$$




Figur 5

## 3:F Exempel 2: Icke styrbart system

Rosenbrock har i "On the design of linear multivariable systems" angett följande exempel:




En icke-minimal realisation

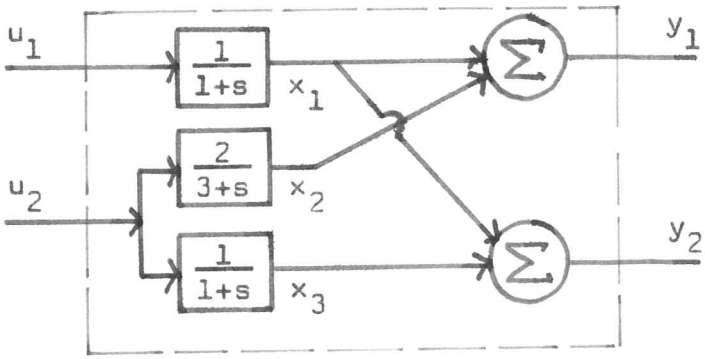
Figur 6

Systemet kan skrivas

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Eftersom $x_1$ och $x_2$ är identiska tillstånd förenklas systemet till




En minimal realisation av det givna systemet.

Figur 7

Detta system skrives på matrisform enligt:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Sätt nu

$$u^o = \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$

som uppfyller

$$|u^o| = 1$$

Då erhålles

$$E = \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Undersök systemets styrbarhet på formen S(AEC)

$$\det \left[ E \mid AE \mid A^2E \right] =$$

$$\det \begin{bmatrix} \sin\varphi & -\sin\varphi & \sin\varphi \\ 2\cos\varphi & -6\cos\varphi & 18\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\cos\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = 0 \text{ för alla } \varphi$$

Systemet är således ej styrbart. Detta inses även om man betraktar matrisen A som här angivits på diagonalform. Matrisen har två lika egenvärden -1 och är således enligt moment III:3:D ej styrbart.

## III:4 Observerbarhet

För systemet S(ABCD) gäller att de observerbara tillstånden ligger i det lineära underrum av tillståndsrummet som spännes upp av raderna i matrisen

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Systemet är observerbart om rangen av denna matris är lika med n.

För systemet S(AECF) gäller exakt samma kriterier.

## III:5 Överföringsfunktioner

### 5:A Allmänt

Tillgång till den formalism som överföringsfunktioner innebär, är av stort värde vid analys av system med en insignal. För flervariabla system brukar överföringsfunktionen anges som en matris. Denna representationsform ger begränsade möjligheter till insyn i systemets funktion. Flera försök har gjorts att genom uppdelning i delsystem ( i matrisform ) vinna bättre insikt om systemen.

Nedan utvecklas en metod att med hjälp av representationsformen S(AECF) framställa överföringsfunktioner från insignalen k till var och en av utsignalens komponenter, varvid $u^o$ är en fri parameter.

### 5:B Konstruktion av överföringsfunktioner

Enligt kända förhållanden för system med en insignal ges överföringsfunktionen från k till y för systemet S(AECF) formellt av

$$G(s) = F + C\,(sI-A)^{-1}E$$

där G(s) har p komponenter.

Överföringsfunktionerna konstrueras lämpligen med utgångspunkt från systemrepresentationen S(AECF) transformerad till styrbar kanonisk form.
Om systemet förutsättes styrbart, kan det genom byte av koordinater i tillståndsrummet

$$z = T^{-1}x$$

med

$$T = \left( E \mid AE+a_1E \mid \ldots\ldots \mid A^{n-1}E+a_1A^{n-2}E+\ldots+a_{n-1}E \right)$$

där $a_i$, i=1....n är koefficienterna i den karaktäristiska ekvationen

$$\det(\lambda I-A) = \lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots\ldots+a_n = 0$$

beskrivas genom

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} k$$

$$y = CTz + Fk$$

Anm. Det bör observeras att transformationsmatrisen T är beroende av systemparametern $u^o$. Vidare är det $M \neq 0$ ett villkor för att den gjorda transformationen skall kunna utföras.

Sätt

$$Q = CT \qquad \text{där Q blir av p x n typ}$$

Låt $q_{ij}$ beteckna elementen i matrisen Q samt $q_i$ beteckna raderna i samma matris.

Låt $f_i$ beteckna komponenterna i F enligt

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}$$

Systemet

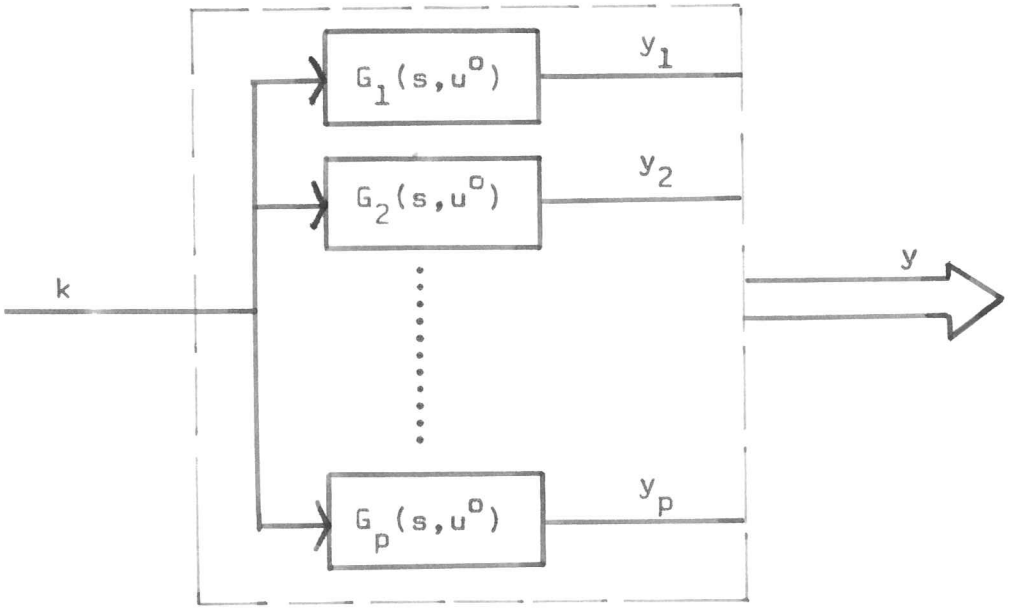
$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} k$$

$$y_i = q_i z + f_i k$$

representerar delsystemet med insignalen k och utsignalen $y_i$. I analogi med kända förhållanden för enkla system kan då överföringsfunktionen anges enligt:

$$G_i(s) = f_i + \frac{q_{i1}s^{n-1} + q_{i2}s^{n-2} + \cdots + q_{in}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Av de i överföringsfunktionen ingående storheterna är $f_i$ och $q_{ij}$ beroende av "parametern" $u^o$, varför en mera adekvat beteckning för överföringsfunktionerna är $G_i(s,u^o)$. S(AECF) kan således representeras med ett schema enligt figur 8:




Figur 8

5:C Nollställen

Nollställena till överföringsfunktionen $G_i(s,u^o)$ ges av

$$q_{i1}s^{n-1} + q_{i2}s^{n-2} + \ldots\ldots + q_{in} = 0$$

och är således beroende av $u^o$ samt skilda för de olika $G_i$.

5:D Poler

En intressant egenskap hos $G_i(s,u^o)$ observeras om nämnaren betraktas. Nollställena till detta uttryck

$$s^n + a_1s^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0$$

- systemets poler - är konstanta, oberoende av $u^o$. De $G_i(s,u^o)$ vars nämnare och täljare ej ha någon gemensam faktor har dessutom samma poler. Om täljare och nämnare däremot har en gemensam faktor försvinner motsvarande mod för denna överförings-

funktion.
För det genomförda resonemanget antages systemet vara observerbart från alla utsignaler.

## 5:E Minimum-fas-begreppet

För enkla system användes beteckningen minimum-fas för system med både poler och nollställen i vänstra halvplanet. Som framgår av moment 5:D saknas en direkt motsvarighet till detta begrepp för flervariabla system, i och med att $u^o$ påverkar nollställenas lägen. För vissa $u^o$ kan $G_i(s,u^o)$ ha minimum-fas-egenskaper och om detta för alla i=1,2,..,p kan hela systemet sägas vara av minimum-fas-karaktär för ifrågavarande $u^o$-värden.

## 5:F Exempel 3

Systemet i exempel 1 vidareutvecklas med tillägget

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Den karaktäristiska ekvationen

$$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

ger

$$a_1 = -5$$
$$a_2 = -2$$

För koordinattransformationen beräknas matrisen T

$$T = \left( E \;\middle|\; AE + a_1 E \right) = \left( \begin{matrix} 2\sin\varphi + \cos\varphi & \sin\varphi - 4\cos\varphi \\ \sin\varphi - \cos\varphi & 6\cos\varphi \end{matrix} \right)$$

$$Q = CT = \left( \begin{matrix} 3\sin\varphi & \sin\varphi + 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi + \cos\varphi & \sin\varphi - 4\cos\varphi \end{matrix} \right)$$

På styrbar kanonisk form anges då systemet enligt

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} k$$

$$y = \left( \begin{matrix} 3\sin\varphi & \sin\varphi + 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi + \cos\varphi & \sin\varphi - 4\cos\varphi \end{matrix} \right) z$$

Således fås överföringsfunktionerna

$$G_1(s, \varphi) = \frac{3\sin\varphi\, s + \sin\varphi + 2\cos\varphi}{s^2 - 5s - 2}$$

$$G_2(s, \varphi) = \frac{(2\sin\varphi + \cos\varphi)\, s + \sin\varphi - 4\cos\varphi}{s^2 - 5s - 2}$$

Polerna ges för båda delsystemen av

$$s = ( 5 \pm \sqrt{33} )/2$$

vilket visar att systemet är instabilt.

Nollställena ges av:

För $G_1(s,\varphi)$

$$s = \frac{-\sin\varphi - 2\cos\varphi}{3\sin\varphi}$$

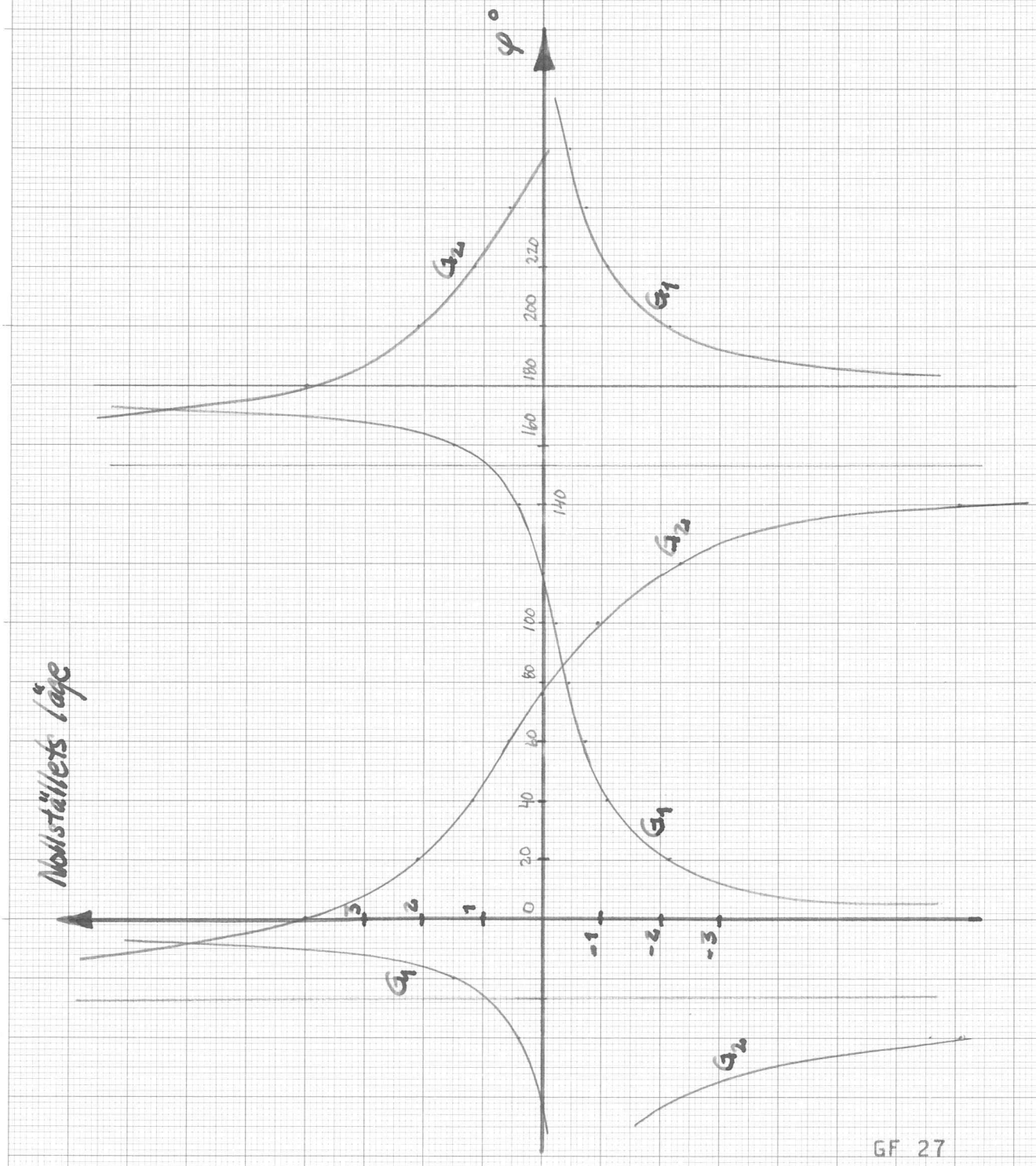
För $G_2(s,\varphi)$

$$s = \frac{4\cos\varphi - \sin\varphi}{2\sin\varphi + \cos\varphi}$$

Nollställenas läge för olika värden på $\varphi$ framgår av diagram 1.

III:5:F

Diagram I




514 A4
SIS 73 25 01

TULLBERG RST KLIPPAN
Nr 1624

GF 27

# IV SLUTNA SYSTEM

## IV:1 Inledning

Det reglertekniska huvudproblemet, att genom återkoppling styra system så att deras syfte uppnås på ett i någon mening vettigt sätt, löses för flervariabla system oftast antingen genom användande av optimeringsmetoder, vilka har nackdelen att fordra tillgång till stora dataprogram samt stor datamaskinkapacitet, eller genom teoretiskt mindre tillfredställande förfaranden med exempelvis PID-regulatorer vilkas parametervärden inställes med mer eller mindre empiriska metoder.

Genom användande av representationsformen S(AECF) möjliggöres syntes av slutna flervariabla system med de relativt enkla och välkända metoder som föreligger för system med en insignal.

Det förutsättes i hela detta avsnitt att samtliga tillstånd är tillgängliga för direkt mätning, eller kan genereras genom rekonstruktion i samma syfte.

## IV:2 Syntes av reglersystem: k-styrning och systemets poler

Antag att det slutna systemets önskade egenskaper åtminstone till en del kan anges genom läget av polerna till överförings-funktionerna från styrsignalen k till utsignalen $y_i$. Låt vidare den på detta sätt önskade nämnaren till dessa funktioner ges av

$$P(s) = s^n + p_1 s^{n-1} + p_2 s^{n-2} + \ldots\ldots + p_n$$

Systemet representeras av S(AECF) transformerat till styrbar kanonisk form, på så sätt som genomförts i avsnittet rörande överföringsfunktioner. Antag vidare att F = 0 vilket ej är en väsentlig inskränkning utan endast ett sätt att underlätta räkningarna.

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \ldots\ldots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} k$$

$$y = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_r \end{pmatrix} z$$

Inför nu en återkoppling definierad av följande styrlag:

$$k = k_{ref} + (a_1 - p_1) z_1 + (a_2 - p_2) z_2 + \ldots\ldots + (a_n - p_n) z_n$$

eller

$$k = k_{ref} + k_{återk}$$

där $k_{ref}$ är det återkopplade systemets insignal, samt

$$k_{återk} = (a_1-p_1, a_2-p_2, \ldots, a_n-p_n)z = L\ z$$

Det återkopplade systemet ges då av

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{n-1} & -p_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} k_{ref}$$

$$y = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_r \end{pmatrix} z$$

och därmed fås det återkopplade systemets överföringsfunktioner enligt

$$G_i(s,u^o) = \frac{q_{i1}s^{n-1}+q_{i2}s^{n-2}+\ldots+q_{in}}{s^n+p_1s^{n-1}+\ldots+p_n}$$

Anm

Om $F \neq 0$ får koefficienterna i överföringsfunktionernas täljare andra värden.

Med den angivna styrlagen har således det slutna systemet nu fått de specifiserade polerna.

Den beräknade styrlagen gäller då systemet anges på styrbar kanonisk form. I det ursprungliga systemet, med tillståndsvektorn x, har k-styrlagen en annan form. Denna beräknas nu med inverstransformationen till den tidigare gjorda transformationen.

Således

$$z = T^{-1}\ x$$

varav

$$k_{återk} = L\ T^{-1}\ x$$

Bestäm nu $T^{-1}$ ur tidigare explicit angivna T! Låt för detta ändamål $t_{jk}$ beteckna elementen i T samt $T_{jk}$ beteckna det algebraiska komplementet till $t_{jk}$. Definiera så

$$T' = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & \cdots & T_{n1} \\ T_{12} & T_{22} & \cdots & T_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{1n} & T_{2n} & \cdots & T_{nn} \end{pmatrix}$$

Enligt känd sats för matriser gäller

$$T^{-1} = \frac{T'}{\det T}$$

Det inses genast att determinanten för T är ett komplicerat uttryck. Nu visas emellertid följande:

Påstående: $\det T = \det M$

Bevis:

Använd determinantens linearitetsegenskap och dela upp determinanten för T enligt

$$\det T = \det \left( E \mid AE+a_1E \mid \ldots\ldots \mid A^{n-1}E+a_1A^{n-2}E+\ldots+a_{n-1}E \right)$$

$$= \det\left(E \mid AE \mid \ldots\right) + \det\left(E \mid a_1E \mid \ldots\right)$$

där den andra determinanten blir noll p.g.a. kolonnernas proportionalitet. I nästa steg utvecklas den tredje kolonnen och kvar blir då

$$\det\left(E \mid AE \mid A^2E \mid A^3E+a_1A^2E+a_2AE+a_3E \mid \ldots\ldots\ldots\right)$$

På samma sätt utvecklas samtliga resterande kolonner och kvar fås då

$$\det T = \det\left(E \mid AE \mid A^2E \mid \ldots\ldots \mid A^{n-1}E\right) = \det M$$

V.S.B.

Inversmatrisen $T^{-1}$ kan således skrivas

$$T^{-1} = \frac{T'}{\det M}$$

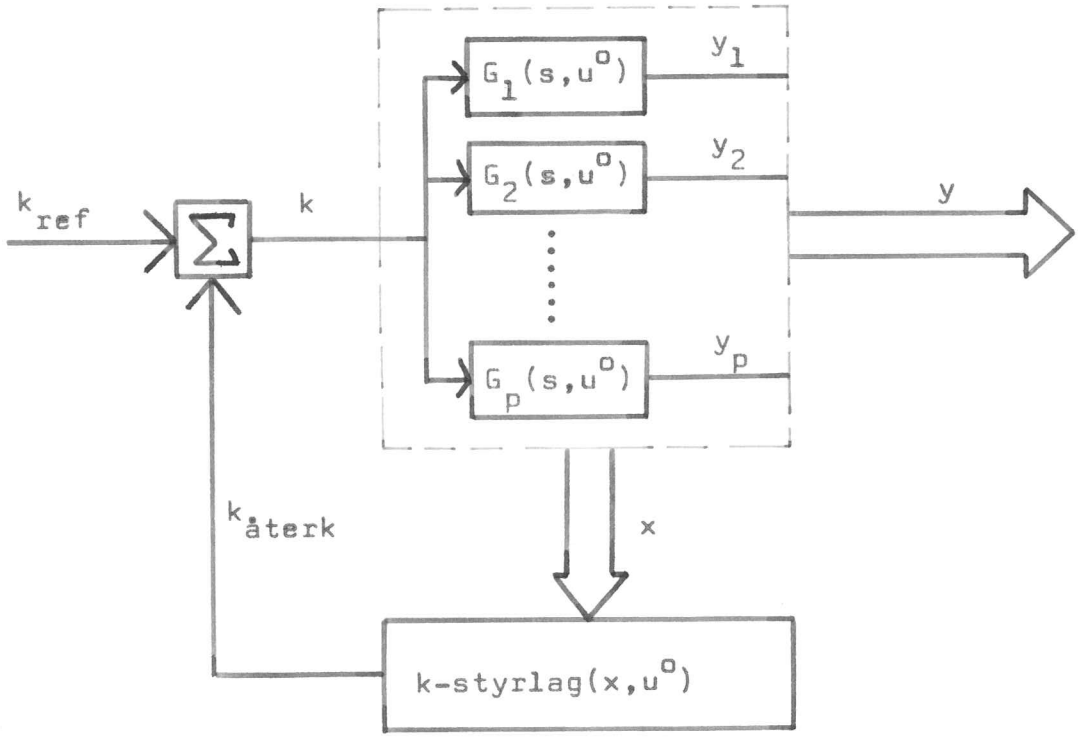
och därmed fås k-styrlagen

$$k_{återk} = \frac{L\ T'x}{\det M}$$

Av de i detta uttryck ingående storheterna beror T' och M av parametern $u^o$. En adekvat beteckning vore således även:

$$k_{återk}\ (x,u^o) = \frac{L\ T'(u^o)\ x}{\det M(u^o)}$$

Systemet kan i detta läge anges av följande blockschema:




Figur 9

Ovan behandlade k-styrning ger som framgått ej tillräcklig information för styrning av systemet S(ABCD) i och med att $u^o$ också är en variabel. Det bör emellertid påpekas att hur än $u^o$ behandlas (med restriktioner endast vad gäller systemets styrbarhet) är det slutna systemets poler givna av denna styrlag.

## IV:3 Syntes av reglersystem: $u^o$-styrning.

### 3:A Allmänt

Om,sedan polerna till det slutna systemet bestämts med k-styrlagen, $u^o$-styrning appliceras kan ytterligare önskvärda egenskaper hos reglersystemet erhållas.

Ett naturligt önskemål är att minimera den styrenergi som åtgår för att styra systemet. Likaså är man intresserad av att överföringsfunktionerna $G_i(s,u^o)$ skall ha minimum-fas-karaktär. Den senare egenskapen är inte generellt möjlig att uppfylla eftersom nollställenes läge beror av $u^o$ enligt olika samband för skilda $G_i(s,u^o)$. Man kan då inte vara säker på att det finns någon mängd av $u^o$ för vilken samtliga överföringsfunktioner har minimum-fas-karaktär.

Anm Om $F \neq 0$ får, som tidigare påpekats, koefficienterna i täljarpolynomen hos $G_i(s,u^o)$ andra värden då systemet slutes med k-styrning än vad som gäller för det öppna systemet. Detta påverkar givetvis nollställenas läge och således även möjligheterna att syntetisera system med minimum-fas-egenskaper.

### 3:B Konstant $u^o$

En enkel metod att styra system med flera insignaler gives om $u^o$ fixeras till ett konstant värde. Styrlagen får då en enkel form:

$$u = u^o\, k = u^o\, LT^{-1} x = (u^o LT^{-1})\, x$$

där uttrycket inom parentesen är en konstant r x n matris. Således är styrlagen en linjär återkoppling från tillstånden.

En väsentlig fråga är nu hur $u^o$ skall väljas. Man kan härvid-

lag ta hänsyn till olika önskade egenskaper hos det slutna systemet. Den eventuella möjligheten att ge flera av systemets utsignaler minimum-fas-karaktär har tidigare berörts.

Strävan att, för en given k-styrlag, minimera den för styrning av systemet erforderliga styrenergin är av stort intresse. Som kvantitativt mått på styrenergin kan lämpligen användas integralen

$$\int \left( |u_1| + |u_2| + \ldots\ldots + |u_r| \right) dt$$

eller

$$\int u^2 \, dt = \int k^2 \, (u^o)^2 \, dt = \int k^2 \, dt$$

Den senare integralen "straffar" i viss mening stora styrsignaler och är därför väl lämpad.

Simulering av ett exempel för att studera dessa energimåtts beroende av valet av $u^o$ har genomförts, se moment IV:3:D.

Simuleringen visar som väntat mycket stora energivärden för $u^o$ som ligger nära att göra

$$\det M = 0$$

dvs när systemets styrbarhet är nära att gå förlorad. Vidare finns intervall för $u^o$ där styrningens syfte uppnås med liten styrenergi. Någon systematisk egenskap för att lätt finna $u^o$ i ett sådant intervall har icke påträffats.

Man observerar ur simuleringsmaterialet att en viss initialstörning slages ned till ett värde nära noll på samma tid oberoende av valet av $u^o$. Detta är ett väntat resultat eftetsom systemets snabbhet huvudsakligen bestämmes av polernas läge.

3:C Variabelt $u^o$

Ur k-styrlagens form

$$k = LT^{-1}(u^o)\ x$$

inses att integralen

$$\int k^2\ dt$$

som mått på förbrukad styrenergi kan få ett mycket litet värde om $u^o$ väljes variabelt så att k hela tiden antar små värden.

Vad innebär då det patologiska fallet att $u^o$ väljes så att

$$k \equiv 0$$

Detta är dock ett icke möjligt fall, ty när k = 0 så är icke vektorns u riktning definierad ( nollvektorn har inget definierat argument ), dvs $u^o$ har ej något bestämt värde och kan således ej anta det värde som gör k = 0. Motsägelsen visar att detta fall icke är möjligt, vilket även av andra skäl är ett väntat resultat.

Styrprincipen ovan torde kumma tolkas så att för ett givet värde på tillståndsvektorn x ges $u^o$ ett värde så att systemet S(AECF), som ju beror av $u^o$, antar en form för vilken just den aktuella riktningen av tillståndsvektorn styres med liten energi.

3:D Exempel 4: konstant $u^o$.

Samma system som i exempel 1 och 3 undersökes:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} u$$

Karaktäristiska ekvationen lyder enligt tidigare:

$$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

Således:

$$a_1 = -5$$
$$a_2 = -2$$

Polerna fås enligt tidigare resultat:

$$= \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

vilket visar att systemet är instabilt.

Nu specifiseras det önskade slutna systemets poler till -1 och -2 . För att erhålla en styrlag som säkerställer dessa egenskaper förfares enligt beskriven metodik. Denna metod fordrar att systemet är givet på styrbar kanonisk form. Transformera således till denna form enligt angiven metod:

$$T = \left[\begin{array}{c|c} E & AE+a_1E \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 2\sin\varphi + \cos\varphi & \sin\varphi - 4\cos\varphi \\ \sin\varphi - \cos\varphi & 6\cos\varphi \end{array}\right]$$

Det på S(AECF)-form skrivna systemet kan nu med transformationen

$$z = T^{-1}x$$

anges som

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} k$$

Den karaktäristiska ekvationen för det önskade systemet skall ges av

$$(s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$$

dvs

$$p_1 = 3$$
$$p_2 = 2$$

Den sökta styrlagen får då formen

$$k = k_{ref} + ( -5-3 ) z_1 + ( -2-2 ) z_2$$

Sätt

$$k_{ref} = 0$$

och då skrives

$$k = \begin{bmatrix} -8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = L z$$

Transformera nu tillbaka denna styrlag till det ursprungliga koordinatsystemet:

$$k = LT^{-1}x = \frac{LT^{\circ}x}{\det T} = \frac{LT^{\circ}x}{\det M}$$

Determinanten för M har tidigare angivits. $T^{\circ}$ges av

$$T^{\circ} = \left[\begin{array}{c|c} 6\cos\varphi & -\sin\varphi + 4\cos\varphi \\ -\sin\varphi + \cos\varphi & 2\sin\varphi + \cos\varphi \end{array}\right]$$

Explicit ges således k-styrlagen av

$$k = 4\,\frac{(\sin\varphi - 13\cos\varphi)\,x_1 - 9\cos\varphi \cdot x_2}{2\cos^2\varphi + 17\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi}$$

Den totala styrlagen ges av

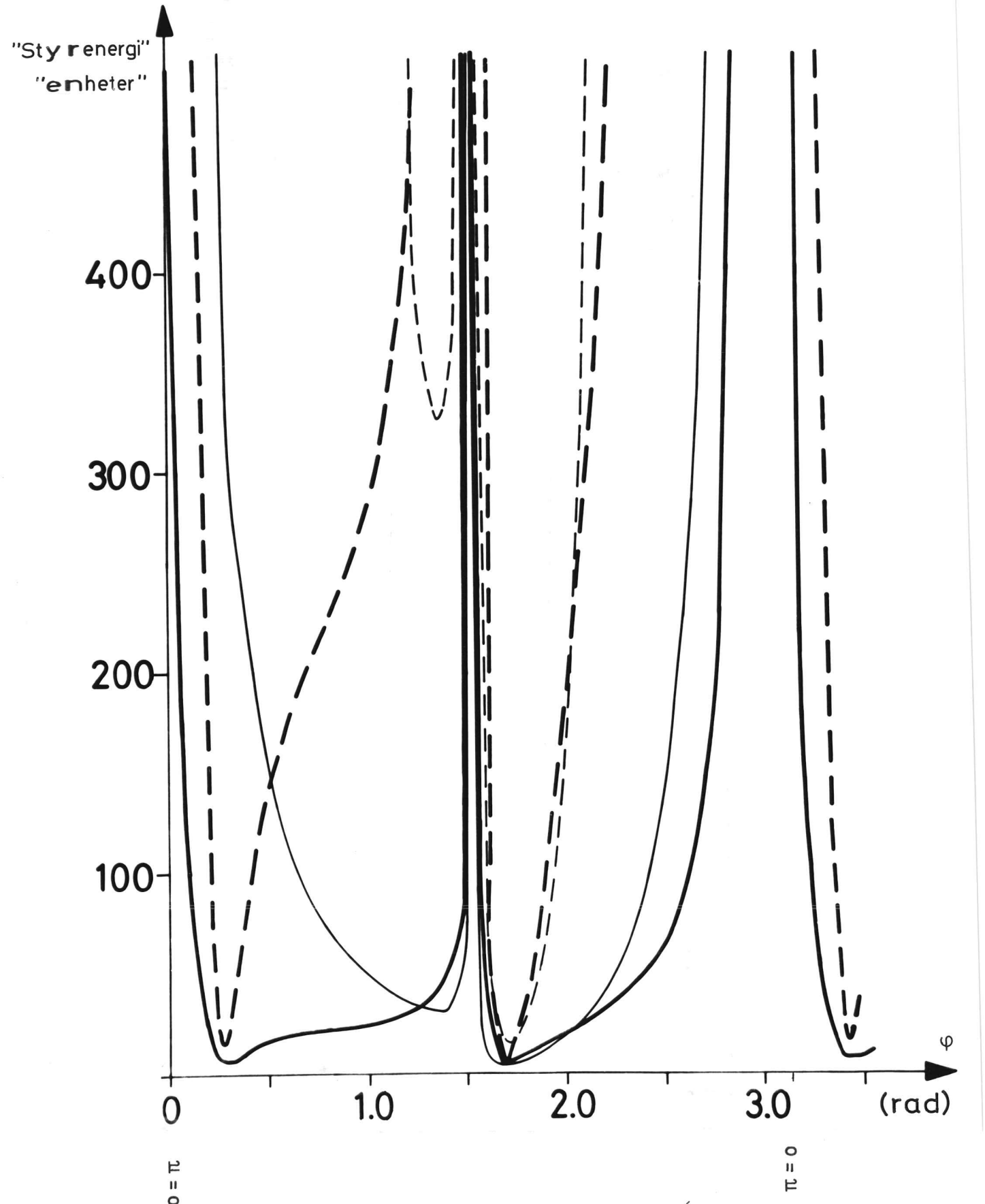
$$u_1 = (2\sin\varphi + \cos\varphi)\,k$$
$$u_2 = (\sin\varphi - \cos\varphi)\,k$$

Systemet har simulerats digitalt med denna styrlag för initialstörningar (10,10) och (10,-10) med $\varphi$ varierande 0,1(0,1)3,2 radianer samt i fallet initialstörning (10,-10) även för $\varphi$ i intervallet 0,20(0,01)0,30 varvid förbrukad

styrenergi beräknats enligt de båda integraler som angivits i moment IV:3:B.
Programlistan för program SIMKONST ( SIMulering med KONSTant $\varphi$ ) bifogas i appendix 1. Exempel på utskrift bifogas i appendix 2.
Data för de olika styrlagarna har beräknats med program VARDEN. Programlistan bifogas i appendix 3.
Plottning av energiåtgången för skilda val av $u^o$ ( dvs $\varphi$ ) framgår av diagram 2. Kommentarer till diagrammet återfinnes i moment IV:3:B.

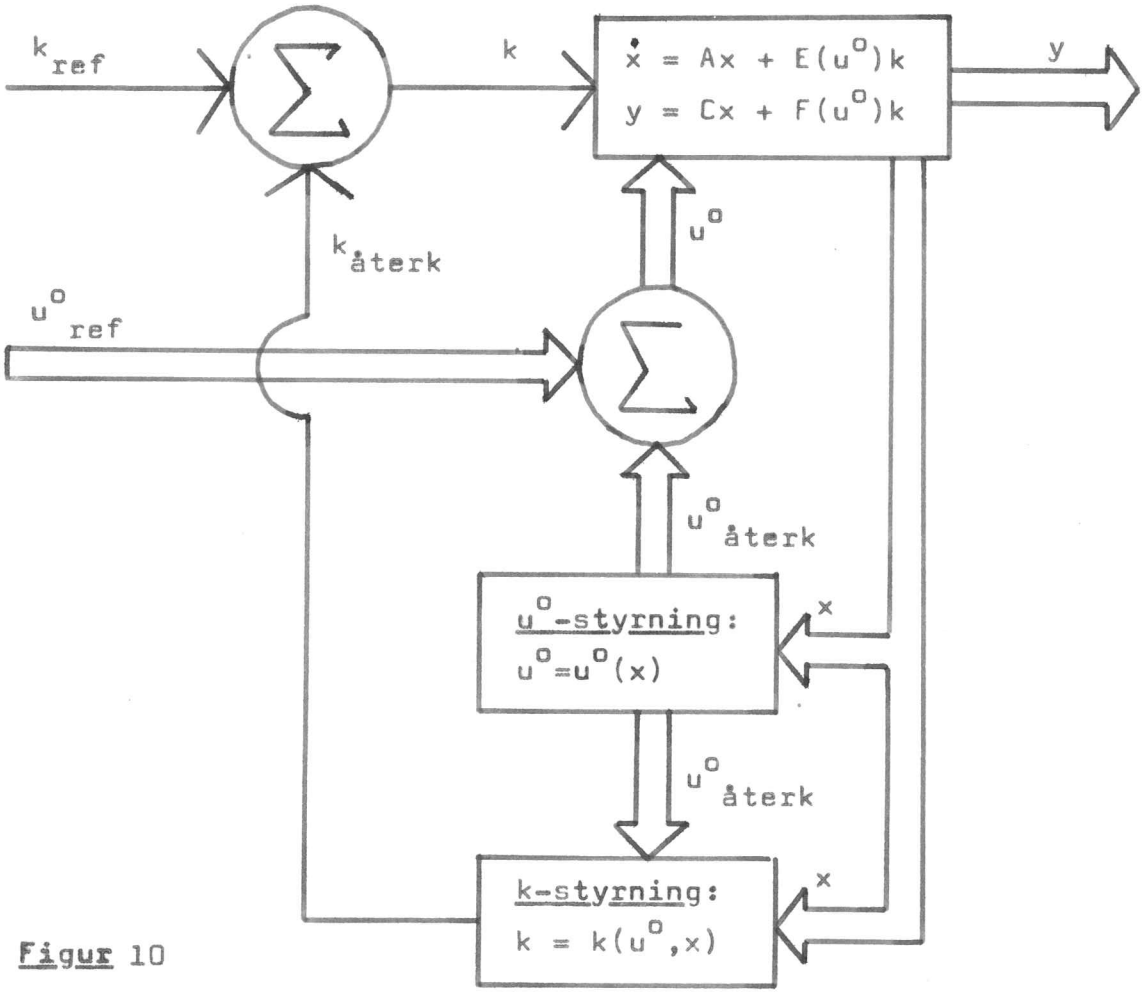
DIAGRAM 2

Resultat, simulering med konstant φ.



## IV:4 Blockschema för slutna system

Med den utvecklade formalismen kan systemet S(AECF) med en applicerad k-styrlag och en $u^o$-styrlag beskrivas genom blockschemat i figur 10.




**Figur** 10

Då systemet framställes med detta blockschema framhäves den i moment II:2 introducerade tolkningen av $u^o$ som en systemparameter, för representationsformen S(AECF). När styrlagarna appliceras på ett system som beskrives på formen S(ABCD) kommer motsvarande blockschema att få utseendet enligt figur

200

100

0

0.5

1.0

1.5

2.0

2.5

3.0

3.5 (rad.)

$\varphi$

$\dot{\varphi} \leftrightarrow 0$

$\varphi \leftrightarrow 0$

Initialstörning (10, -10)

——— $\int (|v_{11}| + |v_{21}|)\,dt$

- - - - - - - $\int k^2\,dt$

Initialstörning (10, 10)

$\frac{\int (|v_{11}| + |v_{d1}|)\,dt}{\int k^2\,dt}$

Copyright

ESSELTE 4300 A2 B

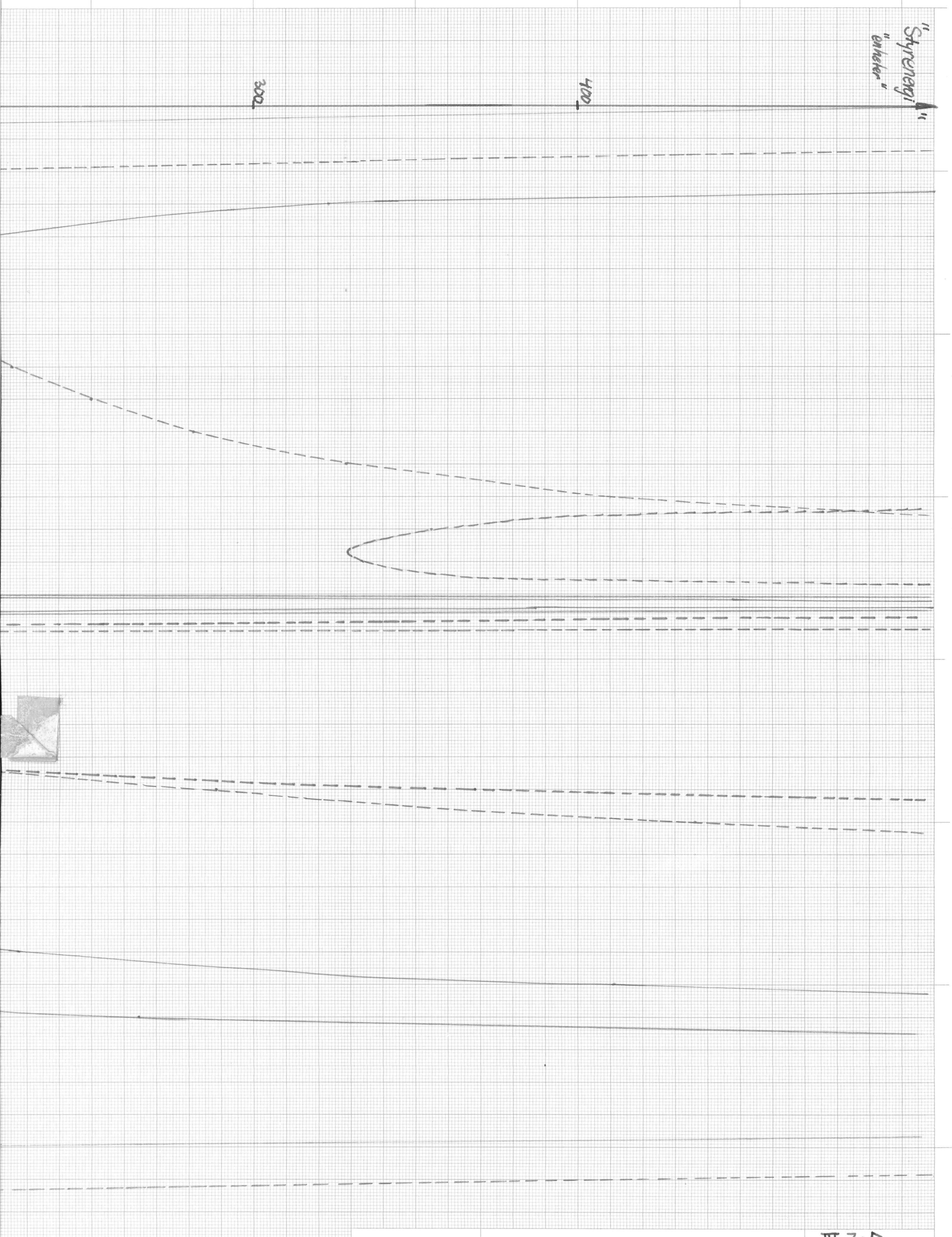
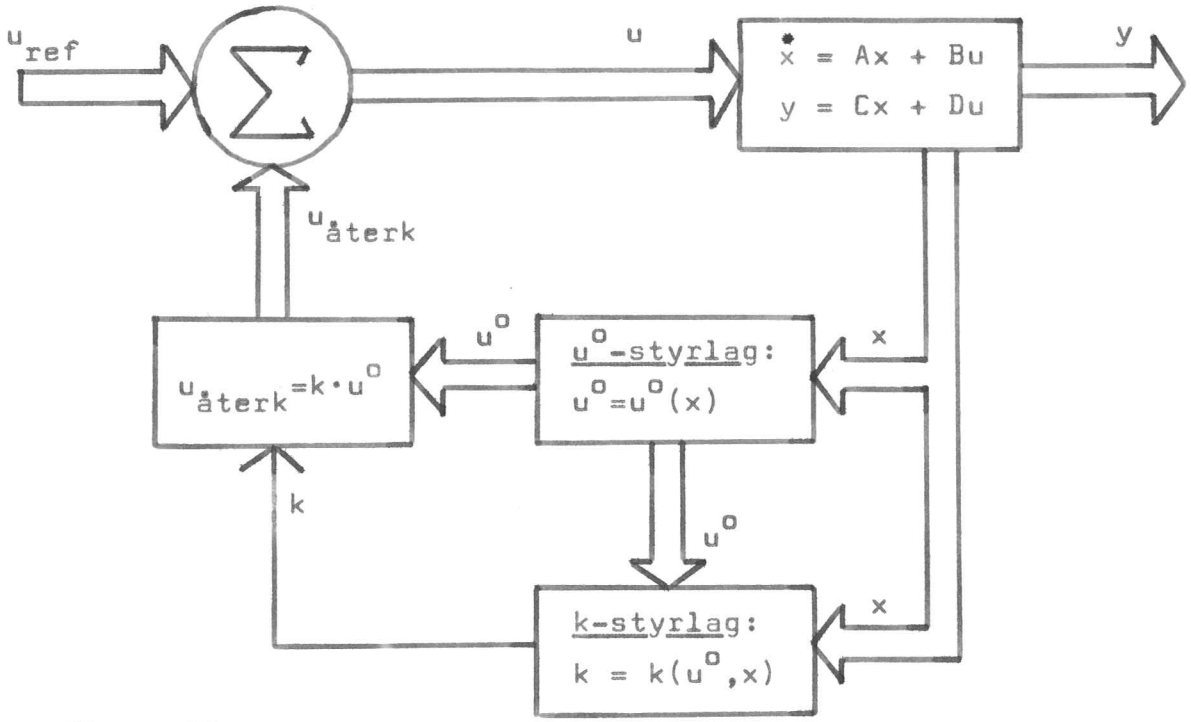



DIAGRAM 2.
Resultat, simulering med konstant φ.

IV:3:D

GÖRAN FICK


u ref
u
ẋ = Ax + Bu
y = Cx + Du
y
u återk
u återk=k·u o
u o
u o-styrlag:
u o=u o(x)
x
k
u o
x
k-styrlag:
k = k(u o,x)

Figur 11

## IV:5 Om det s.k."Pole assignment"-problemet.

Det s.k. "pole assignment"-problemet gäller att ge det slutna systemet en sådan återkoppling att systemets poler får på förhand specifiserade värden. För enkla system har problemet en enkel lösning, se exempelvis Åström: Reglerteori,kap 6:5, som ger en linjär återkoppling från tillstånden som styrlag.

Nedan behandlas problemet för system med flera insignaler.

Sök en funktion $u^o = f(x)$ och en matris S så att den totala styrsignalen

$$u = u^o\, k$$

för en given k-styrlag

$$k = LT^{-1}(u^o)\, x$$

(som fastlägger det slutna systemets poler) ges av en linjär återkoppling från tillstånden enligt

$$u = - Sx$$

där S är en r x n matris.

Studera nu

$$u = u^o\, LT^{-1}(u^o)\, x = - Sx$$

som är ekvivalent med

$$(u^o\, LT^{-1}(u^o) + S)\, x = 0$$

Eftersom detta uttryck skall gälla för alla x är det ekvivalent med

$$S = - u^o\, LT^{-1}(u^o)$$

Multiplicera båda leden med $T(u^o)$ från höger varvid erhålles

$$ST(u^o) = - u^oLI = - u^oL \qquad (1)$$

Inför beteckningen

$$L = \left(l_1\ l_2 \ldots\ldots l_n\right)$$

T ges enligt tidigare resonemang av

$$T(u^o) = \left( E \mid AE+a_1E \mid \ldots\ldots \mid A^{n-1}E+a_1A^{n-2}E+\ldots+a_{n-1}E \right)$$

med

$$E = Bu^o$$

Höger led i uttrycket (1) kan skrivas

$$-u^oL = \left(-l_1u^o \mid -l_2u^o \mid \ldots\ldots \mid -l_nu^o\right)$$

I vänster led av samma uttryck utgör den j:e kolonnen matrisen S multiplicerad med den j:e kolonnvektorn i T. Således är den första kolonnen i ST

$$SE = SBu^o$$

och den andra kolonnen

$$S(AE+a_1E) = S(AB+a_1B)u^o = (SAB+a_1SB)\ u^o$$

På samma sätt kan övriga kolonner bestämmas.
Då uttrycket (1) gäller skall ju kolonnerna i vänster och höger led parvis vara lika. För de första kolonnerna ger detta

$$(SB)u^o = -l_1u^o \qquad (2)$$

som satisfieras om

1. $-l_1$ är egenvärde till matrisen SB
2. $u^o$ är egenvektor till SB för egenvärdet $-l_1$

För de andra kolonnerna fås på samma sätt

$$(SAB+a_1SB)\ u^o = -l_2u^o$$

men då sambandet (2) användes kan detta skrivas

$$(SAB)u^o = (a_1l_1-l_2)\ u^o$$

som satisfieras om

1. $(a_1l_1-l_2)$ är egenvärde till SAB

2. $u^o$ är egenvektor till SAB med egenvärdet ovan

På samma sätt erhålles villkor för övriga kolonner.

Redan sambandet för de första kolonnerna visar att problemet kan endast ha lösningen $u^o$ = konstant eftersom $u^o$ måste vara egenvektor till en konstant matris.
Således har problemet lösningen

$$u = u^o \, LT^{-1}(u^o) \, x$$

samt

$$S = - u^o LT^{-1}(u^o)$$

där $u^o$ har ett konstant värde.

Jämförelse med andra resultat

I referensen "On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems" visas en sats:
Sats: "Styrbarhet för det öppna systemet är ekvivalent med möjligheten att genom en linjär återkoppling från tillstånden förse det slutna systemet med på förhand specifiserade poler."
Ovan har nu visats:

1. S(AE) styrbar
2. Det slutna systemet har en k-styrlag definierad

$\Longleftrightarrow$

1. "Pole assignability"
2. Återkopplingsmatrisen har rangen ett.

medan Wonhams teorem anges p.s.s genom följande mera generella sats

S(AB) styrbar $\Longleftrightarrow$ "Pole assignability"

K-styrlagen

$$k = \frac{LT^{\circ}x}{\det M}$$

ger här utmärkt insikt i förhållandena genom att direkt visa "pole assignability"-problemets beroende av styrbarheten ( det $M \neq 0$ ).

# V JÄMFÖRELSE MED SYSTEM MED EN INSIGNAL

## V Jämförelse med system med en insignal.

Hitintills behandlad teori för system med flera insignaler måste då r = 1 som specialfall ge kända resultat för enkla system. Så är också fallet. Följande observationer kan vara av intresse att speciellt uppmärksammas:

1. Representationsformerna S(ABCD) och S(AECF) blir identiska då r = 1.

2. Konstruktionen av överföringsfunktioner blir identisk med motsvarande teori för enkla system.

3. $u^o$ är konstant lika med 1 då r = 1 och styrlagen

$$k = LT^{-1}x$$

överensstämmer med teorin för enkla system.

# VI REFERENSER

## VI Referenser

Karl Johan Åström: Reglerteori
Almqvist & Wiksell/Gebers Förlag AB,Stockholm 1968

W.M.Wonham: On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems.
IEEE Transactions on Automatic Control,Vol AC-12
No 6,December 1967

Arne Persson: Föreläsningar i lineär algebra för betygen 6 och 7. Utgiven vid LTH 1965

APPENDIX 1

Program SIMKONST

Programlista

```
      PROGRAM SIMKONST
C
C     THIS PROGRAM IS A REVISED VERSION OF PROGRAM INVADICP CONTAINING
C     A SUPPLEMENT COMPUTING USED CONTROL ENERGY
C
C     ENER1-USED ENERGY
C     ENER2-USED ENERGY-QUADRATIC FUNCTION
C
C
C     PROGRAM INVADICP
C
C     PROGRAM FOR COMPUTING AND PLOTTING THE STATE RESPONSE FOR
C     INITIAL VALUE DISTURBANCES FOR OPTIMAL CONTROLLED SYSTEMS.
C     AUTHOR,K.MORTENSSON 25/08-68.
C
C     LT-.LT. 100 IF DATA FOR A NEW EXAMPLE ARE FOLLOWING,OTHERWISE .GE.
C     100.
C     N-ORDER OF THE SYSTEM(MAX 20).
C     NU-NUMBER OF CONTROL VARIABLES(MAX 20).
C     NPOINT-NUMBER OF POINTS IN WHICH THE STATE IS COMPUTED.
C     NUMBDIST-EVERY NUMBDIST POINT IS PRINYED.
C     IPLOT-IF IPLOT=1 THE STATES SPECIFIED BY IX WILL BE PLOTTED.
C     ONLY EVERY NUMBDIST POINT IS PLOTTED.MAXIMUM ORDER OF POINTS
C     THAT CAN BE PLOTTED=200.
C     TSAMP-DISTANCE BETWEEN THE POINTS SPECIFIED BY NPOINT.
C     (INTEGRATION STEP LENGTH.)
C     A-SYSTEM MATRIX (NXN).
C     B-SYSTEM MATRIX (NXNU).
C     UL-FEEDBACK MATRIX (NUXN).
C     X0-INITIAL VALUE OF THE SYSTEM.VECTOR OF ORDER N.
C     IX-N-DIMENSIONAL VECTOR.IF IX(I)=1,THE STATE X(I) WILL BE PRINTED
C     (AND PLOTTED IF IPLOT=1) AT EVERY NUMBDIST POINT.IF IX(I)=0,
C     X(I) IS NEITHER PRINTED NOR PLOTTED.
C
C     SUBROUTINE REQUIRED
C              MEXP7T
C              NORM
C
      DIMENSION A(20,20),B(20,20),UL(20,20),X(20),X0(20),IX(20),IP(20)
      DIMENSION V(20,20),PLOT(20,201),TAX(201),Y(201),Z(201)
C
    1 READ 1000,NR
 1000 FORMAT(I3)
      IF(NR-99) 2,2,100
    2 READ 1001,N,NU,NPOINT,NUMBDIST,IPLOT
 1001 FORMAT(5I5)
      READ 1002,TSAMP
 1002 FORMAT(F10.5)
      READ 1003,((A(I,J),J=1,N),I=1,N)
      READ 1003,((B(I,J),J=1,NU),I=1,N)
      READ 1003,((UL(I,J),J=1,N),I=1,NU)
      READ 1003,(X0(I),I=1,N)
 1003 FORMAT(4E20.10)
      READ 1004,(IX(I),I=1,N)
 1004 FORMAT(20I1)
      PRINT 1005
```

```
 1005 FORMAT(31H1PRINTOUT FROM PROGRAM INVADICP,/)
      PRINT 1006
 1006 FORMAT(9H MATRIX A,/)
      DO 4 I=1,N
    4 PRINT 1007,(A(I,J),J=1,N)
 1007 FORMAT(6E20.10)
      PRINT 1008
 1008 FORMAT(/,9H MATRIX B,/)
      DO 6 I=1,N
    6 PRINT 1007,(B(I,J),J=1,NU)
      PRINT 1009
 1009 FORMAT(/,18H FEEDBACK MATRIX L,/)
      DO 8 I=1,NU
    8 PRINT 1007,(UL(I,J),J=1,N)
      PRINT 1010
 1010 FORMAT(/,19H INITIAL VALUE OF X,/)
      PRINT 1007,(X0(I),I=1,N)
      PRINT 1011,TSAMP
 1011 FORMAT(/,17H SAMPLING LENGTH=,F10.5,/)
      PRINT 1012,NPOINT
 1012 FORMAT(18H NUMBER OF POINTS=,I5,/)
      PRINT 1013,NUMBDIST
 1013 FORMAT(6H EVERY,I5,19HTH POINT IS PRINTED,/)
      PRINT 1014
 1014 FORMAT(33H THE FOLLOWING STATES ARE PRINTED,/)
      DO 12 I=1,N
   12 IP(I)=0
      DO 16 I=1,N
      IF(IX(I)) 16,16,14
   14 IP(I)=I
   16 CONTINUE
      PRINT 1015,(IP(I),I=1,N)
 1015 FORMAT(20I5)
      PRINT 4711
 4711 FORMAT(14X,1HT,15X,2HX1,18X,2HX2,15X,5HENER1,15X,5HENER2,//)
      IF(IPLOT-1) 20,18,20
   18 PRINT 1016
 1016 FORMAT(/,30H THESE STATES ARE ALSO PLOTTED,1H1)
   20 NUST=0
      DO 24 I=1,N
      IF(IX(I)) 24,24,22
   22 NUST=NUST+1
   24 CONTINUE
C
      DO 34 I=1,N
      DO 34 J=1,N
      R=0.
      DO 32 K=1,NU
   32 R=R+B(I,K)*UL(K,J)
   34 V(I,J)=(A(I,J)-R)*TSAMP
      NOTRACE=1
C
      CALL MEXP7T(V,A,N,20,NOTRACE)
C
      DO 36 I=1,N
   36 PLOT(I,1)=X0(I)
```

```
      TAX(1)=0.
      LPRINT=0
      LPLOT=1
      ENER1=0.
      ENER2=0.
      DO 60 L=1,NPOINT
      STYR=0.
      LPRINT=LPRINT+1
      T=L*TSAMP
      DO 44 I=1,N
      R=0.
      DO 42 J=1,N
   42 R=R+A(I,J)*X0(J)
   44 X(I)=R
      DO 46 I=1,N
   46 X0(I)=X(I)
      DO 98 I=1,N
   98 STYR=STYR+UL(I)*X(I)
      STYR=ABSF(STYR)
      DENER1=STYR*TSAMP
      DENER2=DENER1*STYR
      ENER1=ENER1+DENER1
      ENER2=ENER2+DENER2
      IF(LPRINT-NUMBDIST) 60,48,48
   48 LPRINT=0
C
      IND=0
      DO 52 I=1,N
      IF(IX(I)) 52,52,50
   50 IND=IND+1
      X(IND)=X(I)
      X(IND)=X(I)
   52 CONTINUE
      PRINT 1007,T,(X(I),I=1,NUST),ENER1,ENER2
C
      IF(IPLOT-1) 60,54,60
   54 LPLOT=LPLOT+1
      DO 56 I=1,NUST
   56 PLOT(I,LPLOT)=X(I)
      TAX(LPLOT)=T
   60 CONTINUE
C
      IF(IPLOT-1) 90,62,90
C
C     PLOTTING
C
   62 ISNUMB=6700000000000000B
      LSNUMB=6701000000000000B
      MSNUMB=6702000000000000B
      IND=0
      DO 80 I=1,N
      IF(IX(I)) 80,80,64
   64 IND=IND+1
      DO 66 J=1,LPLOT
      Y(J)=PLOT(IND,J)
   66 Z(J)=TAX(J)
```

```
            IF(I-10) 68,70,72
         68 KSNUMB=ISNUMB+I*2**30
            GO TO 78
         70 KSNUMB=LSNUMB
            GO TO 78
         72 IF(I-20) 74,76,76
         74 IV=I-10
            KSNUMB=LSNUMB+IV*2**30
            GO TO 78
         76 KSNUMB=MSNUMB
         78 CONTINUE
      C
            CALL SCALE(Z,LPLOT,25.0,XMIN,DX)
            CALL SCALE(Y,LPLOT,15.0,YMIN,DY)
            CALL AXIS(0.0,0.0,4HTIME,-4,30.0,0.0,XMIN,DX)
            CALL AXIS(0.0,0.0,14HSTATE VARIABLE,14,16.0,90.0,YMIN,DY)
            CALL LINE(Z,Y,LPLOT,1)
            CALL SYMBL4(25.0,10.0,1.0,KSNUMB,0.0,3)
            CALL PLOTTA(40.0,0.0,-3)
         80 CONTINUE
      C
         90 CONTINUE
            GO TO 1
        100 CONTINUE
            CALL EXIT
            END
LOAD
RUN,3,1500, ,*

EXECUTION STARTED AT   1922 -53
```

APPENDIX 2

Program SIMKONST
Exempel på utskrift

PRINTOUT FROM PROGRAM INVADICP

MATRIX A

4.0000000000+000 3.0000000000+000
2.0000000000+000 1.0000000000+000

MATRIX B

6.1353264551-001
1.4128568961+000

FEEDBACK MATRIX L

5.2380725569+000 3.3876548292+000

INITIAL VALUE OF X

1.0000000000+001 -1.0000000000+001

SAMPLING LENGTH= 1.00000

NUMBER OF POINTS= 30

EVERY 1TH POINT IS PRINTED

THE FOLLOWING STATES ARE PRINTED

1 2

| T | X1 | X2 | ENER1 | ENER2 |
|---|---|---|---|---|
| 1.0000000000+000 | 5.6896230822+000 | -9.7583717792+000 | 2.9802658526+001 | 8.8819845521+002 |
| 2.0000000000+000 | 2.3652314263+000 | -4.4126856793+000 | 4.2191912351+001 | 1.0416920656+003 |
| 3.0000000000+000 | 9.0694962647-001 | -1.7346876842+000 | 4.6942580300+001 | 1.0642609115+003 |
| 4.0000000000+000 | 3.3863246742-001 | -6.5322570095-001 | 4.8716361735+001 | 1.0674072121+003 |
| 5.0000000000+000 | 1.2525048064-001 | -2.4234777662-001 | 4.9372432840+001 | 1.0678376414+003 |
| 6.0000000000+000 | 4.6168368261-002 | -8.9430776937-002 | 4.9614266102+001 | 1.0678961248+003 |
| 7.0000000000+000 | 1.6996748457-002 | -3.2937098425-002 | 4.9703296304+001 | 1.0679040511+003 |
| 8.0000000000+000 | 6.2544263798-003 | -1.2121936693-002 | 4.9736057443+001 | 1.0679051244+003 |
| 9.0000000000+000 | 2.3011011683-003 | -4.4600954588-003 | 4.9748110778+001 | 1.0679052697+003 |
| 1.0000000000+001 | 8.4655843596-004 | -1.6408700153-003 | 4.9752545112+001 | 1.0679052894+003 |
| 1.1000000000+001 | 3.1143558869-004 | -6.0365487463-004 | 4.9754176434+001 | 1.0679052920+003 |
| 1.2000000000+001 | 1.1457131114-004 | -2.2207391363-004 | 4.9754776568+001 | 1.0679052924+003 |
| 1.3000000000+001 | 4.2148505789-005 | -8.1696656684-005 | 4.9754997344+001 | 1.0679052924+003 |
| 1.4000000000+001 | 1.5505579014-005 | -3.0054551439-005 | 4.9755078565+001 | 1.0679052924+003 |

FI = 2.4

GF 56

APPENDIX 3

Program VARDEN

Programlista

```
      PROGRAM VARDEN
C     PROGRAM FOR COMPUTING DATA FOR SIMKONST
C     AUTHOR GORAN ECK
      PRINT 999
  999 FORMAT(//,3H FI,10X,3HDET,19X,2HE1,18X,2HE2,18X,2HL1,18X,2HL2)
      DO 30 I=1,32
      FI=I*0.1
      DET=DE(FI)
      AK=A(FI)/DET
      BK=B(FI)/DET
      CK=C(FI)
      DK=D(FI)
      PRINT 1000,FI,DET,CK,DK,AK,BK
 1000 FORMAT(/,F5.2,1X,5E20.10)
   30 CONTINUE
      CALL EXIT
      END

      FUNCTION DE(FI)
      DE=2.*COSF(FI)*COSF(FI)+17.*COSF(FI)*SINF(FI)-SINF(FI)*SINF(FI)
      RETURN
      END

      FUNCTION A(FI)
      A=52.*COSF(FI)-4.*SINF(FI)
      RETURN
      END

      FUNCTION B(FI)
      B=36.*COSF(FI)
      RETURN
      END

      FUNCTION C(FI)
      C=2.*SINF(FI)+COSF(FI)
      RETURN
      END

      FUNCTION D(FI)
      D=SINF(FI)-COSF(FI)
      RETURN
      END
LOAD
RUN.3.1500. .1
```