

PROCESSIDENTIFIERING - REGLERAT SYSTEM SAMT
SYSTEM MED FLERA IN- OCH UTSIGNALER

ANDERS JONSON
LARS-MAGNUS STRÖM

Processidentifiering

Reglerat system samt system med flera in- och utsignaler.

Anders Jonson

Lars-Magnus Ström

Abstract

Som första avsnitt i detta examensarbete behandlas olika identifieringsmetoder och då speciellt korskorrelationsmetoden samt maximumlikelihoodmetoden. Bl.a. göres jämförelser mellan dessa identifieringsmetoder med utgångspunkt från ett givet kontinuerligt system, samplat med tre olika samplingsintervall.

Därefter behandlas identifiering av ett reglerat system med minimalvariansstrategi enligt maximumlikelihoodmetoden. Syftet är att dels få en uppfattning om möjligheterna att tillämpa denna identifieringsmetod på de speciella insignaler, som här uppträder, s.k. naturliga störningar, dels testa den teori som berörs. Denna teori behandlar bl.a. vilken tidsförskjutning modellen måste ha vid minimalvariansstrategi, för att man skall kunna finna ett entydigt minimum. De exempel som behandlas gäller identifiering av processer av första och andra ordningen. Dessutom identifieras minimalvariansregulatorn.

I det sista avsnittet behandlas identifiering av system med flera in- och utsignaler. Först berörs helt kortfattat några problem, som kan uppträda. Därefter utföres identifiering på en simulerad modell med två insignaler och två utsignaler. Här ingår även en utläggning om osäkerheten hos de koefficienter, som identifieras. Avslutningsvis identifieras data från en pappersmaskin med två insignaler och två utsignaler.

Innehållsförteckning.

	sid.
I. <u>Inledning.</u>	1
II. <u>Identifiering enligt kovarians- och maximumlikelihoodmetoderna.</u>	2
1. Inledning	2
2. Kovariansmetoden	2
3. Maximumlikelihoodmetoden	8
III. <u>Identifiering av en återkopplad process.</u>	19
1. Inledning	19
2. Teoretisk analys av identifiering vid reglerat system ...	19
3. Modell av första ordningen med minimalvariansstrategi ...	25
4. Modell av andra ordningen med minimalvariansstrategi ...	29
5. Sammanfattning	36
IIII. <u>System med flera in- och utsignaler.</u>	37
1. Inledning	37
2. Problem vid system med flera in- och utsignaler	37
3. System med två in- och utsignaler	38
4. Identifiering av mätserier från en pappersmaskin. Två in- och utsignaler	51
V. <u>Avslutning.</u>	57
Litteraturförteckning	59

I. Inledning.

Avsikten med detta examensarbete var från början att belysa några av de svårigheter som uppkommer vid identifiering av system med flera in- och utsignaler. Arbetets tyngdpunkt har dock förskjutits så att reglerade system behandlats i lika stor omfattning.

Inledningskapitlet ägnas åt allmänna identifieringsmetoder. Några exempel kommer att behandlas där identifiering sker dels med kovariansmetoden dels med maximumlikelihoodmetoden.

I nästa avsnitt studeras identifiering av reglerade system. Inledningsvis tas där upp några teoretiska aspekter. Processer av första och andra ordningen styrda med minimalvariansstrategi behandlas sedan som exempel.

Tredje avsnittet behandlar flervariabla system. Där kommer först ett simulerat system att identifieras och sedan en serie av mätvärden som härrör från en pappersmaskin.

1)

II. Identifiering enligt kovarians- och maximum likelihoodmetoderna.

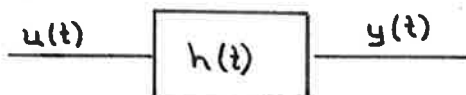
Nedanstående försöksserier har främst genomförts för att få ett begrepp om kovarians- och maximum likelihoodmetodernas utfall på några genererade exempel och för att i någon mån göra en jämförelse mellan de båda metoderna. Vi har här utgått från två exempel. Det första, vars tidsfunktion framgår av figur 1, har uppdelats i tre fall med samplingstiderna 1, 3, 5 sekunder respektive. Dessa refereras till i det kommande som exempel 1a, 1b och 1c. Exempel 2 (tidsfunktion enligt figur 2), vars siffror bygger på mätvärden från en kärnreaktor, har samplingstiden $T=5$ sek.

Exempel 1b och 2 kommer att redovisas utförligt vad det gäller erhållna resultat, medan de andra exemplen får en mer summarisk resultatsammanställning.

Framställningen har disponerats så att kovariansmetoden tas upp först, sedan maximum likelihoodmetoden varefter några sammanfattande jämförelser göres.

2. Kovariansmetoden.

Vi representerar det dynamiska systemet med dess viktfunction $h(t)$.



In- utsignalssambandet ges då av (Åström, 1)

$$y(t) = \int_{s=-\infty}^t h(t-s) u(s) ds = \int_{s=0}^{\infty} h(s) u(t-s) ds$$

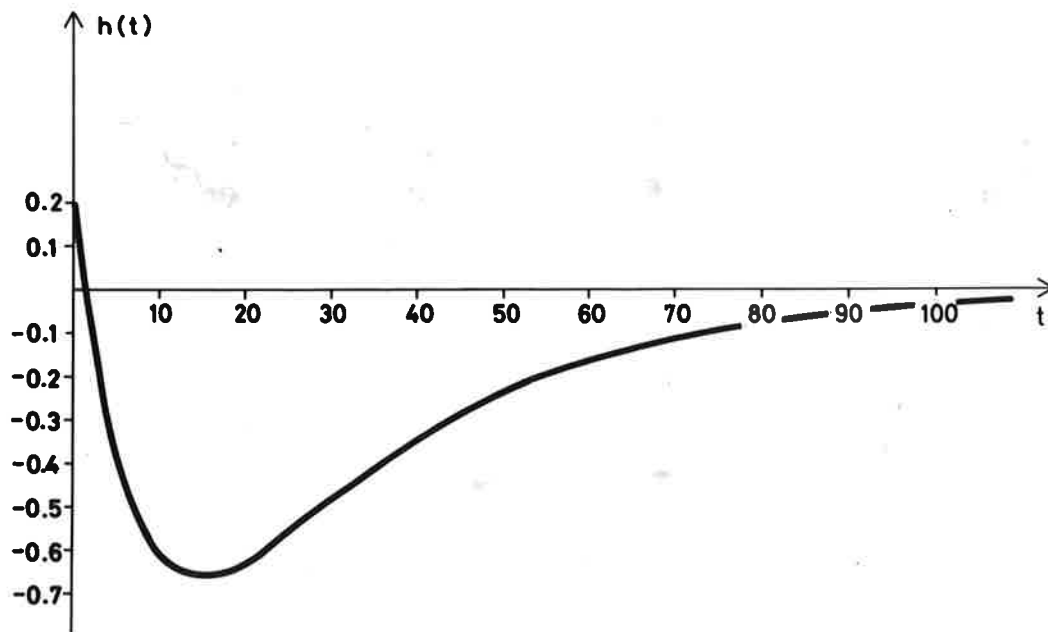
Om in- och utsignalerna antages vara svagt stationära processer med medelvärde noll fås:

$$r_{uy}(k) = E u(s) y(t) = \int_{s=0}^{\infty} h(s') r_u(s'+k) ds'$$

$k = s-t$

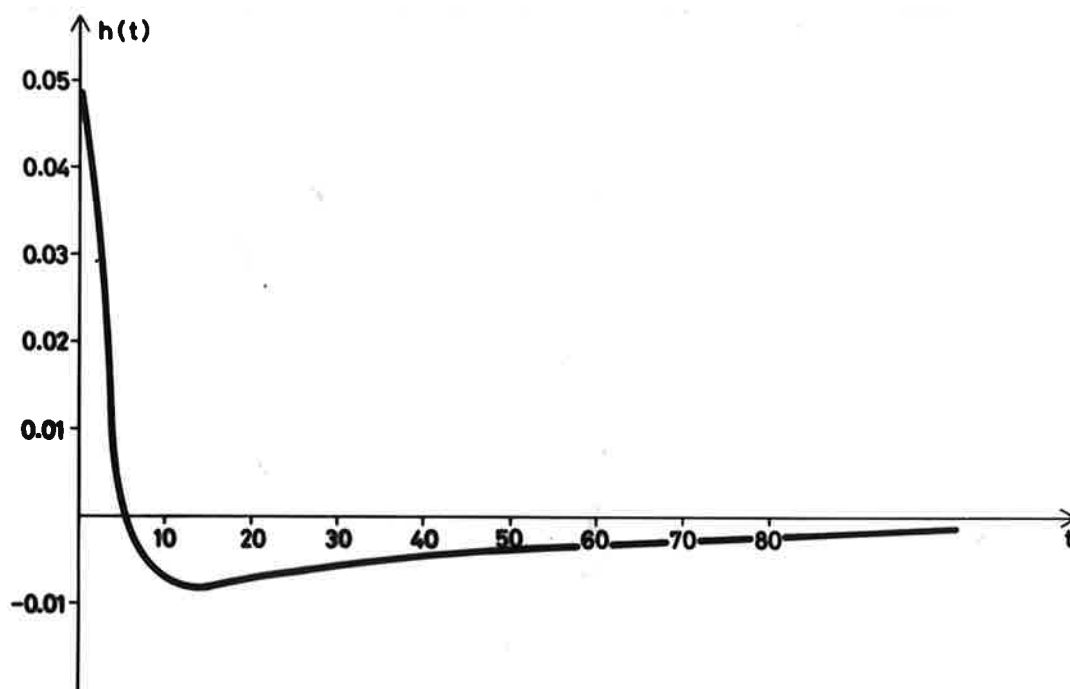
Vitt brus sändes genom systemet. r_{uu} blir då lika med $\delta(t)$.

1) ev. korrelationsmetoden.



$$h(t) = 2 \cdot e^{-0,12t} - 1,8 \cdot e^{-0,04t}$$

Fig. 1. Tidsfunktionen för exempel 1.



$$h(t) = 0,059e^{-0,362t} - 0,010 \cdot e^{-0,019t}$$

Fig. 2. Tidsfunktionen för exempel 2.

Detta ger:

$$r_{uy}(t) = \int_{s=0}^{\infty} h(s) \delta(s-t) ds = h(t)$$

Sambandet mellan in- och utsignal kan då systemen samplats allmänt skrivas

$$A(z^{-1}) y(t) = B(z^{-1}) u(t)$$

där z är förskjutningsoperatoren. Då systemen är av andra ordningen och insignalen ej har någon genomgångsterm ges A och B av

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} \\ B(z^{-1}) &= B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} \end{aligned}$$

På systemen finns dessutom en störning av typen $\lambda C(z^{-1}) e(t)$ där

$$C(z^{-1}) = 1 + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2}$$

och $e(t) \in N(0,1)$.

Tabell 1 visar de beräknade koefficienterna för de olika exemplen.

Tabell 1.

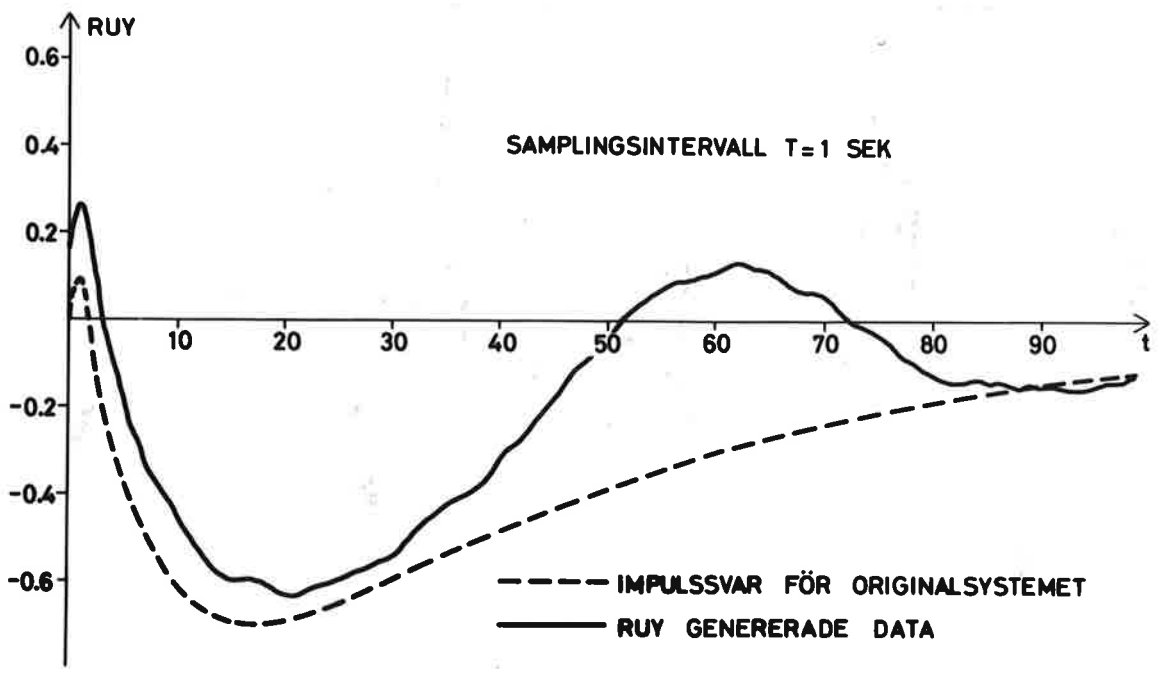
Exempel	T	A ₁	A ₂	B ₁	B ₂	C ₁	C ₂	λ
1a	1	-1,848	0,851	0,091	-0,219	-0,40	-0,21	0,20
1b	3	-1,585	0,619	-0,050	-0,918	-0,40	-0,21	0,20 (0,80)
1c	5	-1,368	0,449	-0,637	-1,680	-0,40	-0,21	0,20 (1,50)
2	5	-1,073	0,149	0,090	-0,116	-0,40	-0,21	0,20

Utdata genererades genom att sända in vitt brus på systemen enligt ovan.¹⁾
 (E $u(t) = 0$) Kovariansfunktionerna RUY, RUU, RYU, RYY beräknades. Beräkningsformel för t.e.x. RUY är

$$RUY(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} u(t) y(t+k)$$

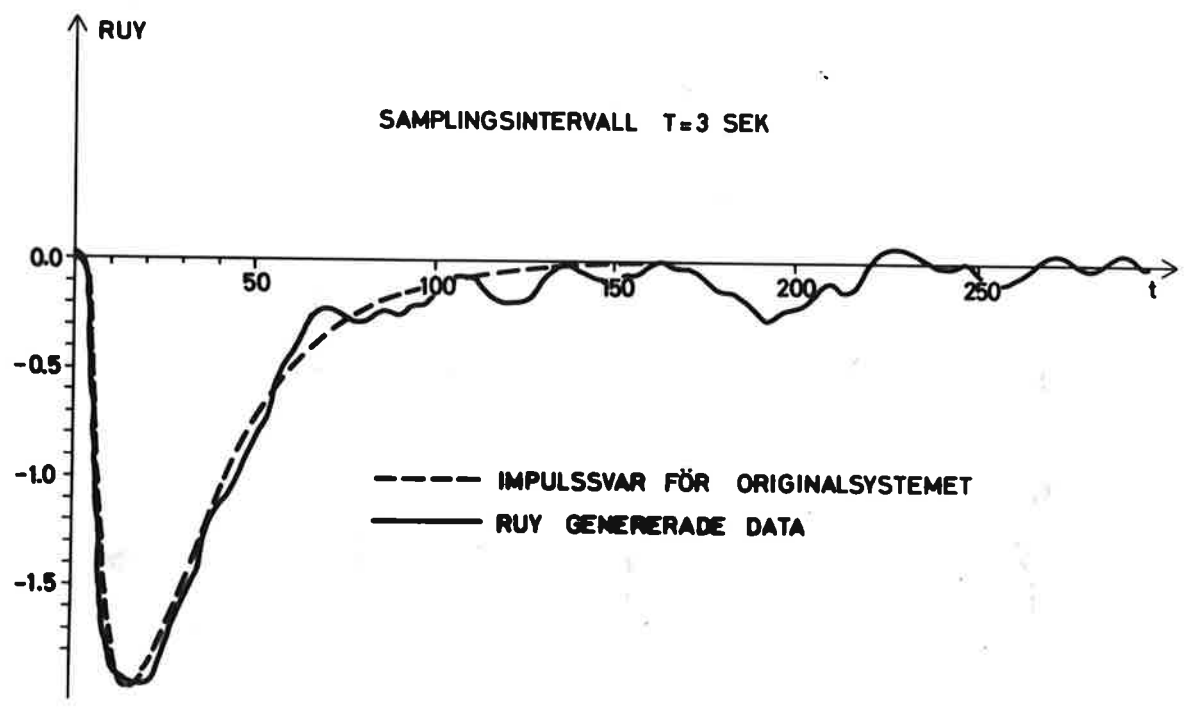
Genereringen och beräkningarna gjordes med ett FORTRAN-program ADAM. (Se Appendix 1⁹) Figurenna 3 - 8 visar RUY och impulssvaret för originalfunktionen för de olika exemplen. För att få liknande signal-störningsförhållande för de olika samplingstiderna genererades exempel 1b och 1c också med $\lambda = 0,8$ och $\lambda = 1,5$ respektive.

1) Serielängd 500 värden.



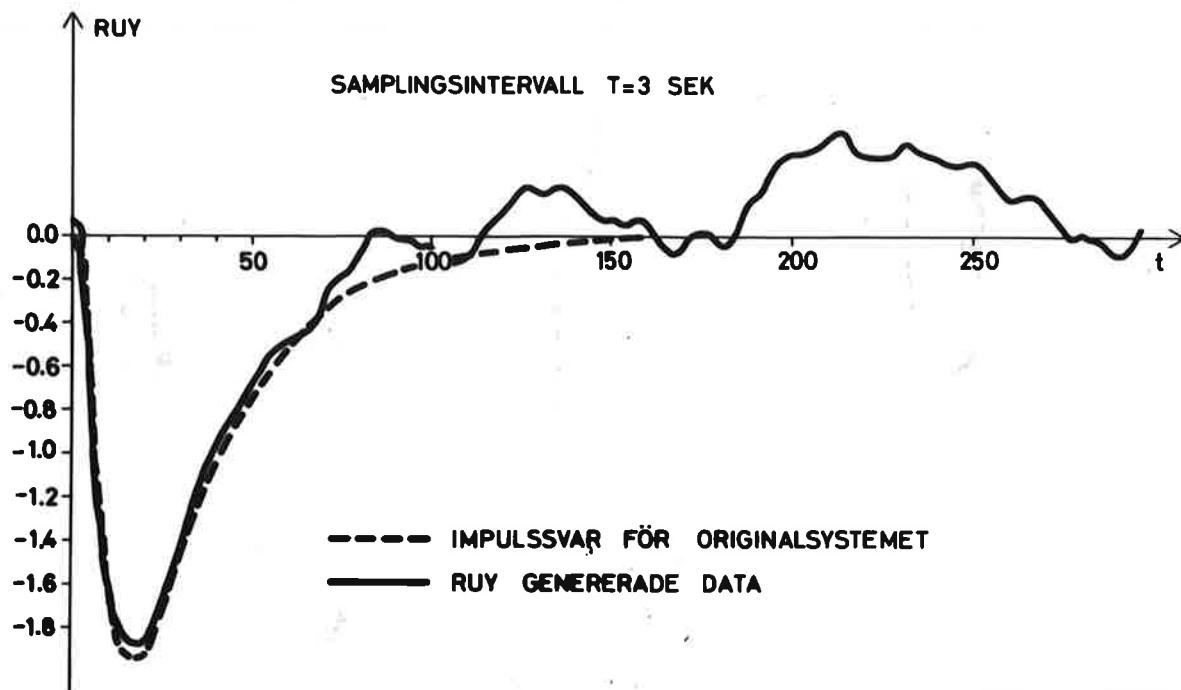
$$y(t) = \frac{0,091Z^{-1} - 0,219Z^{-2}}{1-1,848Z^{-1} + 0,851Z^{-2}} u(t) + \frac{0,2(1 - 0,4Z^{-1} - 0,21Z^{-2})}{1-1,848Z^{-1} + 0,851Z^{-2}} e(t)$$

Fig. 3. RUY för exempel 1 a.



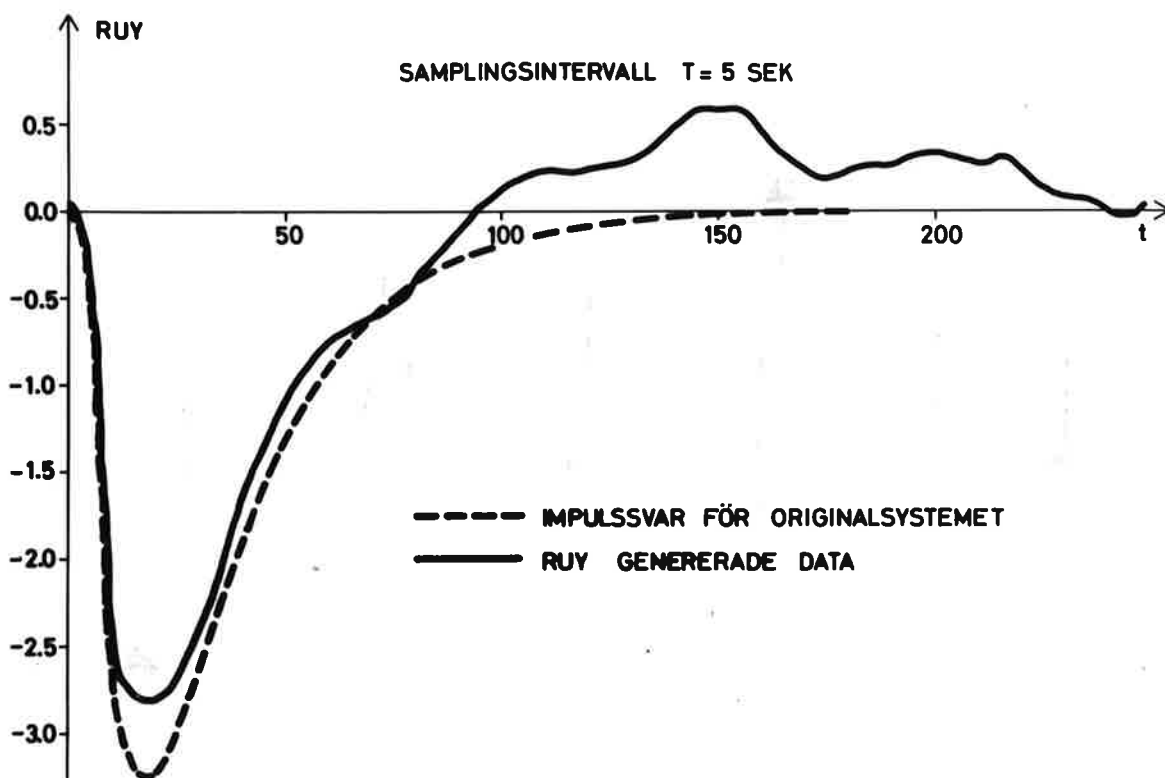
$$y(t) = \frac{-0,050Z^{-1} - 0,918Z^{-2}}{1-1,585Z^{-1} + 0,619Z^{-2}} u(t) + \frac{0,2(1-0,4Z^{-1} - 0,21Z^{-2})}{1-1,585Z^{-1} + 0,619Z^{-2}} e(t)$$

Fig. 4. RUY för exempel 1b λ = 0.2



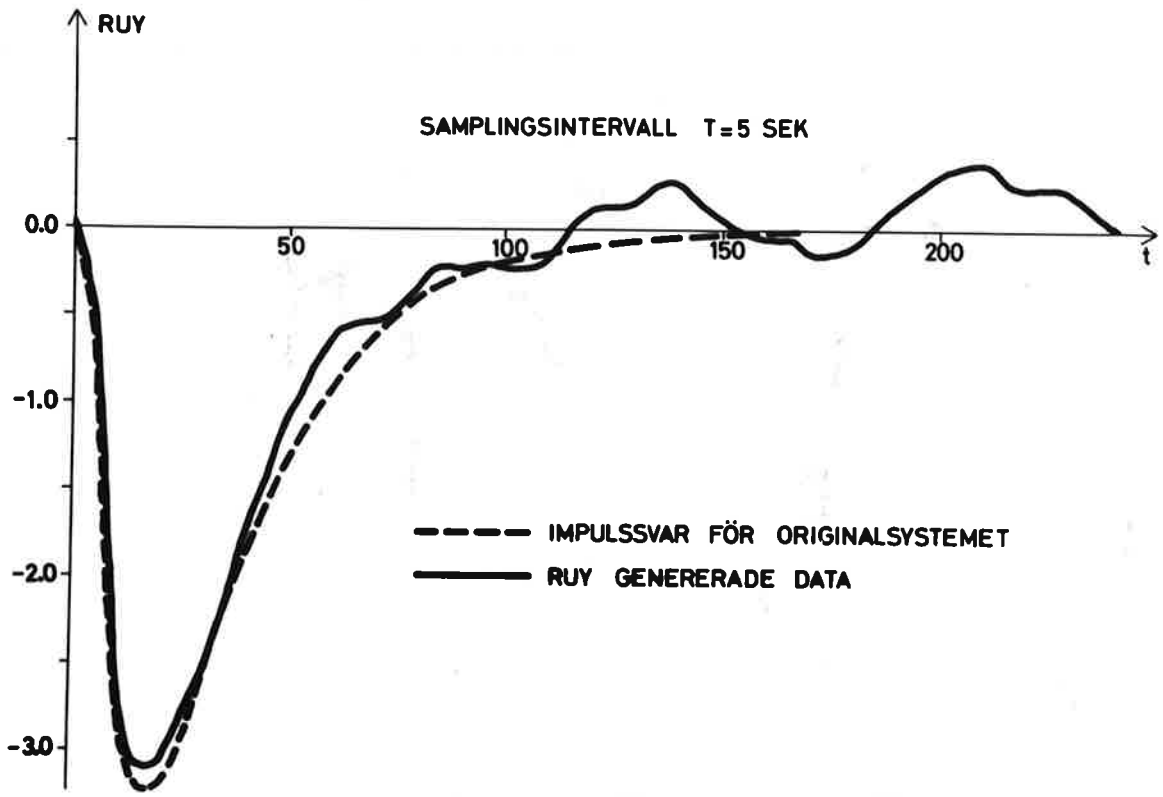
$$y(t) = \frac{-0,050Z^{-1} - 0,918Z^{-2}}{1-1,585Z^{-1} + 0,619Z^{-2}} u(t) + \frac{0,8(1 - 0,4Z^{-1} - 0,21Z^{-2})}{1-1,585Z^{-1} + 0,619Z^{-2}} e(t)$$

Fig. 5 RUY för exempel 1 b $\lambda = 0.8$



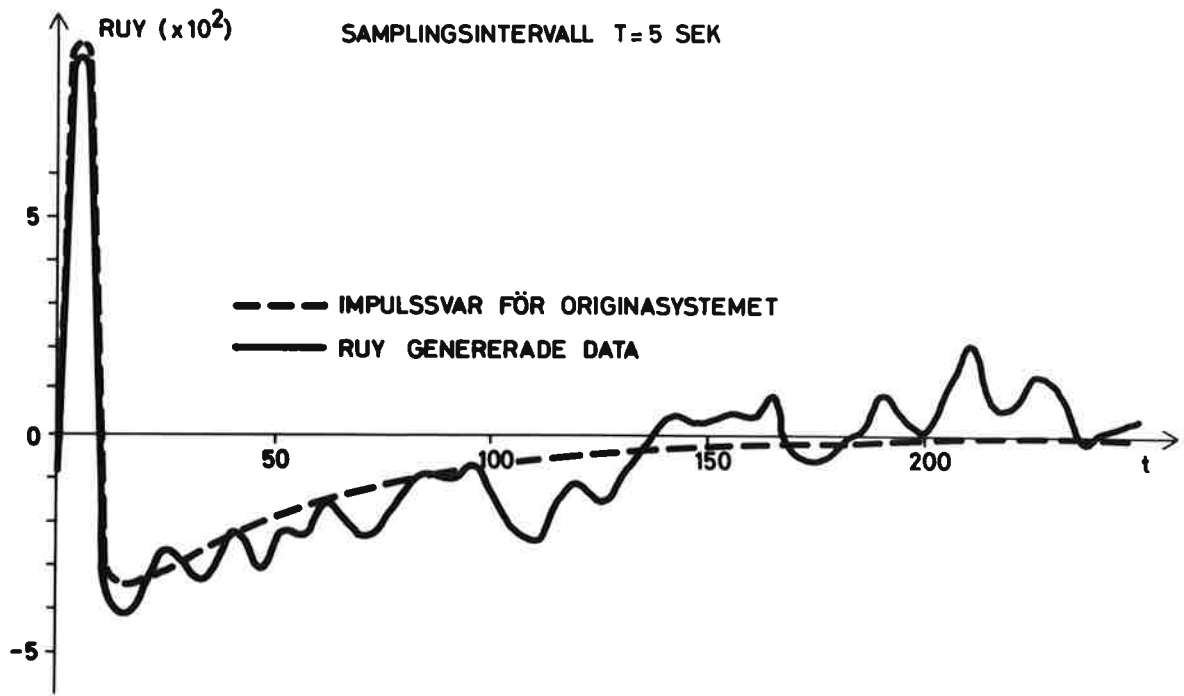
$$y(t) = \frac{-0,637Z^{-1} - 1,680Z^{-2}}{1-1,368Z^{-1} + 0,449Z^{-2}} u(t) + \frac{0,2(1-0,4Z^{-1} - 0,21Z^{-2})}{1-1,368Z^{-1} + 0,449Z^{-2}} e(t)$$

Fig. 6 RUY för exempel 1 c $\lambda = 0.2$



$$y(t) = \frac{-0,637Z^{-1} - 1,680Z^{-2}}{1-1,368Z^{-1} + 0,449Z^{-2}} u(t) + \frac{1,5(1-0,4Z^{-1} - 0,21Z^{-2})}{1-1,368Z^{-1} + 0,449Z^{-2}} e(t)$$

Fig. 7 RUY för exempel 1 c $\lambda = 1.5$



$$y(t) = \frac{0,090Z^{-1} - 0,116Z^{-2}}{1-1,073Z^{-1} + 0,149Z^{-2}} u(t) + \frac{0,2(1-0,4Z^{-1} - 0,21Z^{-2})}{1-1,073Z^{-1} + 0,149Z^{-2}} e(t)$$

Fig. 8 RUY för exempel 2.

Beträffande samplingstiden hävdar Shinnars (Shinnars,6) att den högst bör väljas lika med en femtedel av minsta signifikanta tidskonstanten för systemet. För exempel 1 ger detta att T bör väljas mindre än 1,7 sek. Som framgår av figurerna har i vårt exempel $T=3$ och $T=5$ gett lika goda resultat som $T=1$. $T=3$ ger här till och med den bästa överensstämmelsen med impulssvaret. Figurerna 9 - 15 visar sedan RUU, RYU och RYY för exempel 1b och exempel 2. RUU bör alltså vara en approximativ dirac-funktion, vilket också visade sig vara fallet vid samtliga försöksserier. RYU blir i samtliga fall brus.

3. Maximum likelihoodmetoden.

Maximum likelihoodmetoden är en metod att identifiera koefficienterna i sambandet $A(z^{-1}) y(t) = B(z^{-1}) u(t) + \lambda C(z^{-1}) e(t)$. Metoden finns utförligt beskriven (K-J Åström and T. Bohlin,1, K-J Åström,2, I. Gustavsson,4) varför vi här utlämnar teorin.

Ett FORTRAN-program har utvecklats (I.Gustavsson,4) för att beräkna koefficienterna i ovanstående typ av samband. Det program (SUBROUTINE PRO) som här användes vid beräkningarna är en vidareutveckling av det i ovanstående referens beskrivna programmet (I.Gustavsson,5). I ett FORTRAN-program IVAR (Se appendix 2) alstrades utdata på samma sätt som i ADAM och PRO anropades.

Koefficienterna beräknades för första, andra och tredje ordningens systemapproximationer. Vid beräkningen fås en första uppskattning av koefficienterna genom minsta kvadratmetoden. Iterationer görs därefter med approximativt andraderivata tills avvikelsen mellan två iterationer är mindre än 10^{-4} . Exakt andraderivata användes därefter ned till en avvikelse på mindre än 10^{-8} .

a) Exempel 1b.

De erhållna värdena för exempel 1b ges av tabell 2, 3, och 4 för första, andra och tredje ordningens modell.

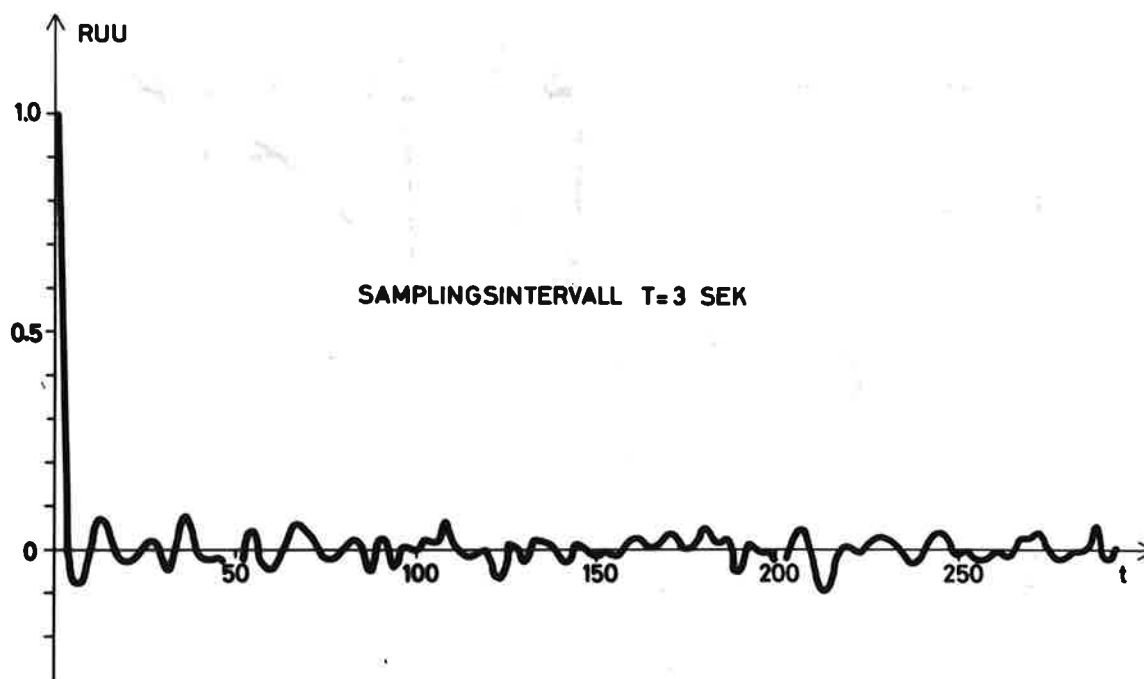


Fig. 9 RUU för exempel 1 b.

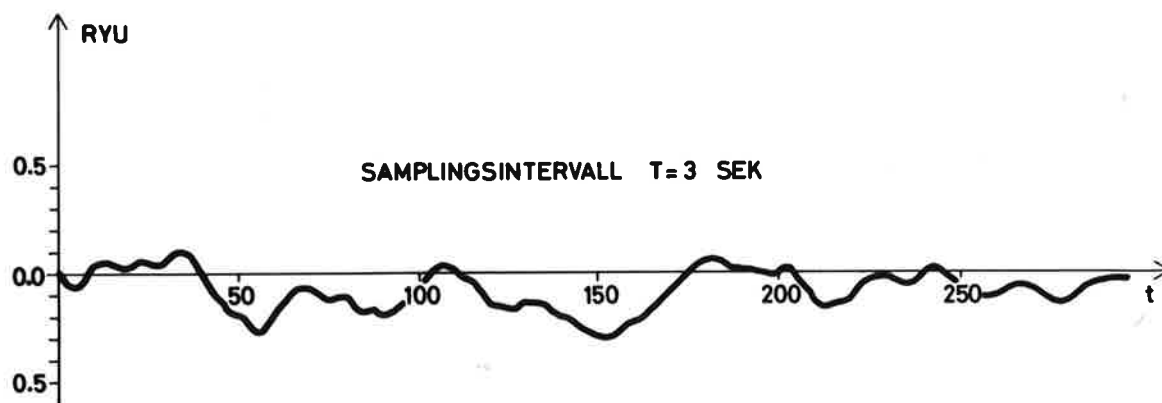
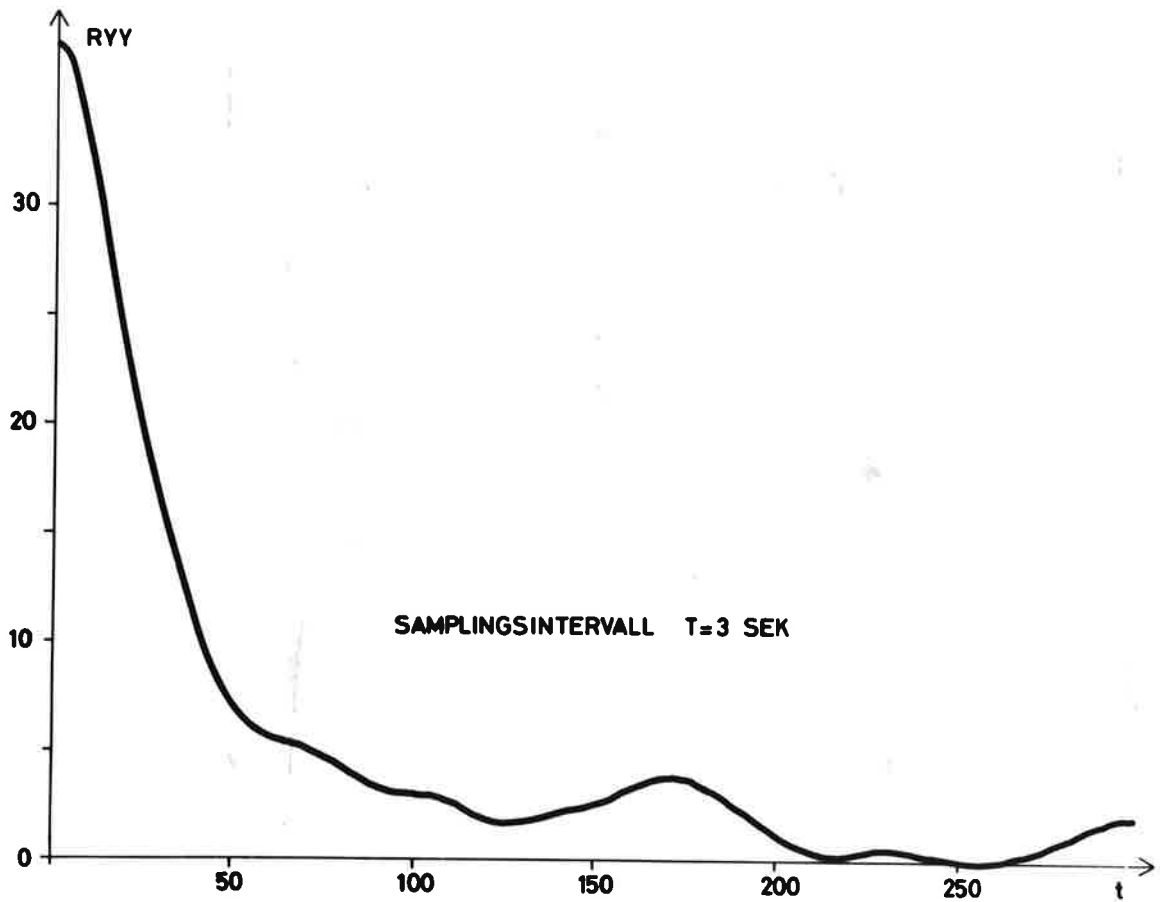


Fig. 10 RYU för exempel 1 b.



$$y(t) = \frac{-0,050Z^{-1} - 0,918Z^{-2}}{1-1,585Z^{-1} + 0,619Z^{-2}} u(t) + \frac{0,2(1-0,4Z^{-1} - 0,21Z^{-2})}{1-1,585Z^{-1} + 0,619Z^{-2}} e(t)$$

Fig. 11 RYY för exempel 1 b.

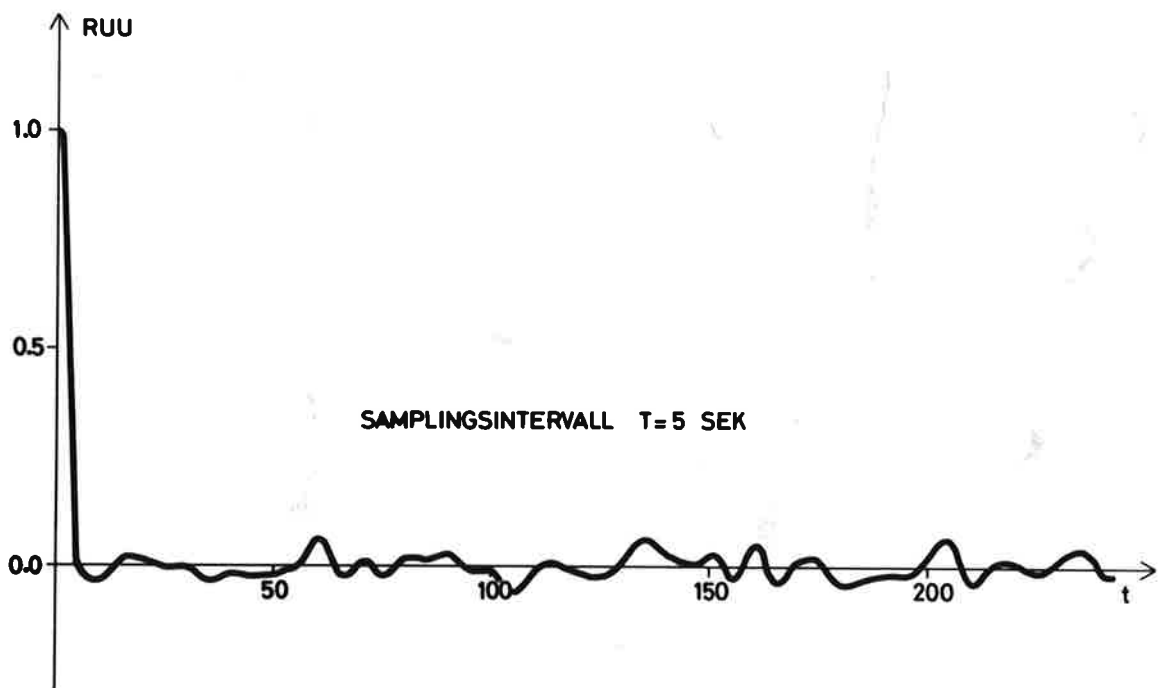


Fig. 12 RUU för exempel 2.

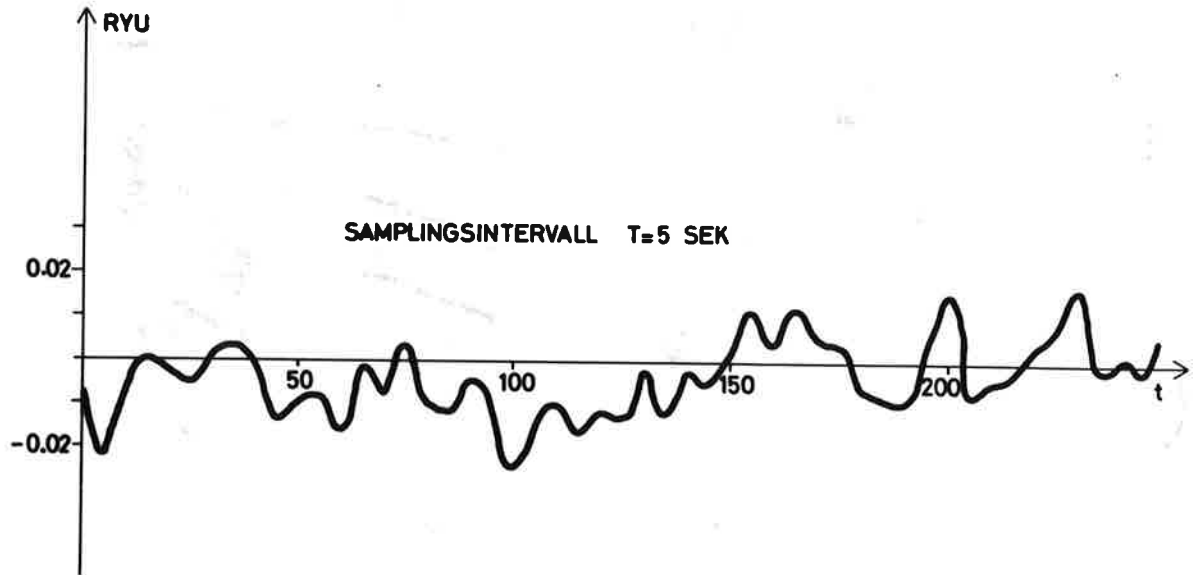
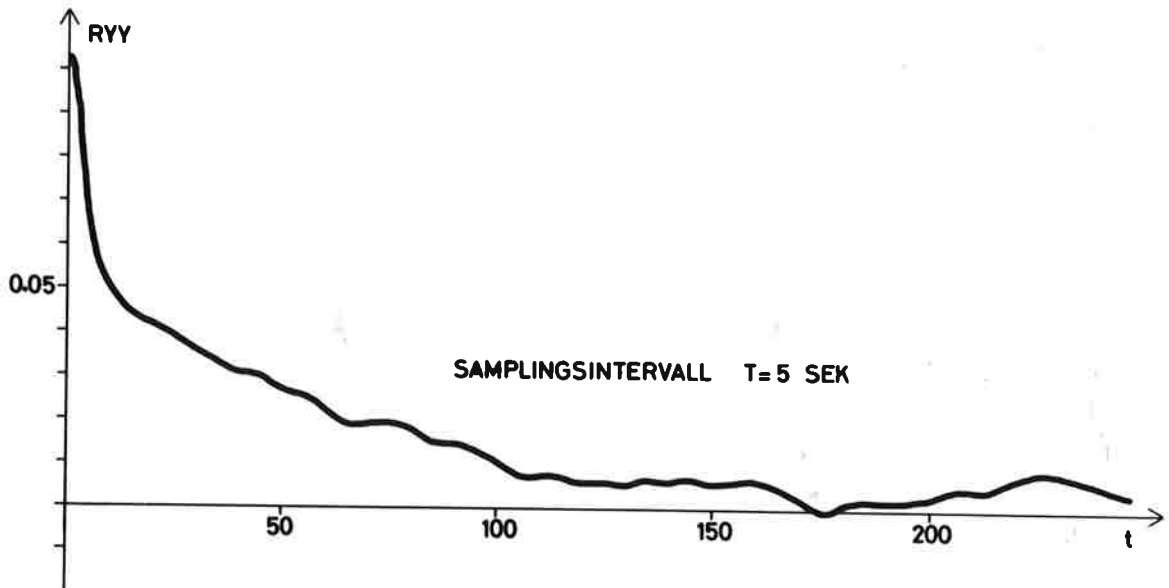


Fig. 13 RYU för exempel 2.



$$y(t) = \frac{0,090Z^{-1} - 0,116Z^{-2}}{1-1,073Z^{-1} + 0,149Z^{-2}} u(t) + \frac{0,2(1-0,4Z^{-1} - 0,21Z^{-2})}{1-1,073Z^{-1} + 0,149Z^{-2}} e(t)$$

Fig. 14 RYY för exempel 2.

Tabell 2. Parametervärden 1:a ordningens modell.

k	A1	B1	C1	λ	V1
0	0,000	0,000	0,000	5,769	16797
1	-0,978	-0,056	0,000	1,265	800,3
2	-0,950	-0,066	0,590	1,098	602,7
3	-0,964	0,324	0,554	0,995	494,7
4	-0,953	0,301	0,830	0,974	474,2
5	-0,957	0,378	0,700	0,969	469,9
6	-0,956	0,378	0,729	0,969	469,5
7	-0,956	0,392	0,714	0,969	469,4
8	-0,956	0,389	0,722	0,969	469,3
9	-0,956	0,388	0,722	0,969	469,3
10	-0,956	0,389	0,722	0,969	469,3
11	-0,956	0,389	0,722		
σ	$9,06 \cdot 10^{-3}$	$2,30 \cdot 10^{-3}$	$1,92 \cdot 10^{-3}$		
λ	0,969				

Här står k för antalet iterationer; V1 är förlustfunktionen och σ betecknar standardavvikelsen.

Tabell 3. Parametervärden 2:a ordningens modell.

k	A1	A2	B1	B2	C1	C2	λ	V2
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	5,796	16797
1	-1,538	0,573	-0,049	-0,920	0,000	0,000	0,415	86,0
2	-1,598	0,630	-0,047	-0,911	-0,506	-0,251	0,374	69,79
3	-1,585	0,618	-0,047	-0,916	-0,558	-0,092	0,365	66,46
4	-1,584	0,617	-0,047	-0,918	-0,559	-0,069	0,364	66,39
5	-1,584	0,618	-0,047	-0,918	-0,560	-0,069	0,364	66,39
6	-1,584	0,618	-0,047	-0,918	-0,560	-0,069	0,364	66,39
$\times/ \sigma(10^3)$	6,21	6,14	11,61	12,95	32,43	31,70		
λ	0,364							

\times/ σ :s värde har i tabellen multiplicerats med 10^3 .

Tabell 4. Parametervärden 3:e ordningens modell.

k	A1	A2	A3	B1	B2	B3	C1	C2	C3	λ	V3
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	5,796	16797
1	-1,180	0,004	0,224	-0,042	-0,938	-0,375	0,000	0,000	0,000	0,384	73,66
2	-1,767	0,898	-0,105	-0,046	-0,912	0,168	-0,730	-0,075	-0,172	0,369	68,08
3	-1,401	0,328	0,113	-0,047	-0,925	-0,171	-0,378	-0,177	-0,021	0,364	66,42
4	-1,206	0,019	0,233	-0,047	-0,934	-0,349	-0,183	-0,288	-0,013	0,364	66,38
5	-1,179	-0,024	0,250	-0,047	-0,936	-0,374	-0,156	-0,304	-0,014	0,364	66,38
6	-1,079	-0,182	0,311	-0,047	-0,940	-0,465	-0,056	-0,359	-0,021	0,364	66,38
7	-0,799	-0,626	0,484	-0,047	-0,954	-0,722	0,224	-0,515	-0,043	0,364	66,36
8	-0,606	-0,932	0,604	-0,047	-0,963	-0,900	0,418	-0,621	-0,059	0,364	66,35
9	-0,730	-0,733	0,526	-0,047	-0,956	-0,787	0,293	-0,552	-0,049	0,364	66,35
10	-0,634	-0,887	0,586	-0,047	-0,962	-0,874	0,390	-0,605	-0,058	0,364	66,35
11	-0,700	-0,782	0,545	-0,047	-0,958	-0,815	0,324	-0,568	-0,053	0,364	66,35
12	-0,670	-0,829	0,563	-0,047	-0,960	-0,842	0,354	-0,584	-0,056	0,364	66,35
13	-0,676	-0,819	0,559	-0,047	-0,959	-0,836	0,348	-0,581	-0,055	0,364	66,35
14	-0,678	-0,817	0,558	-0,047	-0,959	-0,835	0,346	-0,580	-0,055	0,364	66,35
15	-0,678	-0,816	0,558	-0,047	-0,959	-0,835	0,346	-0,580	-0,055	0,364	66,35
16	-0,678	-0,816	0,558	-0,047	-0,959	-0,835	0,346	-0,580	-0,055	0,364	66,35
6	0,193	0,306	0,120	0,012	0,016	0,177	0,197	0,100	0,042		

Test av systemets ordning kan ske på olika sätt (I.Gustavsson,4).
Exempelvis kan F-test användas. (K-J Åström,2;I.Gustavsson,4). Det gäller i vårt fall att variabeln

$$\xi_n = \frac{V_n - V_{n+1}}{V_{n+1}} \frac{N - 3(n + 1)}{3}$$

har en $F(3, N - 3(n + 1))$ fördelning under nollhypotes. V är förlustfunktionen, N antalet mätvärden och n ordningen på systemet. På en risknivå av 5 % har vi $F(3,994) = 2,60$. ξ_1 är i vårt fall 2010 och hypotesen att systemet är av första ordningen förkastas därför. $\xi_2 = 0,20$ och hypotesen att systemet är av andra ordningen antas därför på nivån 5 %. F-testet ger alltså här ett riktigt resultat. Tabell 5 ger en jämförelse mellan de beräknade parametervärdena och de riktiga.

Tabell 5.

Koeff.	Beräknat	Exakt
A1	-1,584 ± 0,006	-1,585
A2	0,618 ± 0,006	0,619
B1	-0,047 ± 0,012	-0,050
B2	-0,918 ± 0,013	-0,918
C1	-0,560 ± 0,032	-0,400
C2	-0,069 ± 0,032	-0,210
λ	0,364	0,200

b) Exempel 2.

I tabellerna nedan sammanfattas beräknade värden för exempel 2. F-test användes även här och ξ_1 och ξ_2 beräknades till 68,1 respektive 0,83. Testet ger alltså andra ordningens system.

Tabell 6. Sammanställning av parametervärden för exempel 2.

n	1	2	3
A1	-0,586 ± 0,038	-1,114 ± 0,055	-1,286 ± 0,374
A2		0,182 ± 0,048	0,389 ± 0,417
A3			-0,053 ± 0,081
B1	0,102 ± 0,007	0,094 ± 0,006	0,094 ± 0,006
B2		-0,117 ± 0,007	-0,136 ± 0,036
B3			0,024 ± 0,044
C1	0,150 ± 0,048	-0,476 ± 0,062	-0,644 ± 0,373
C2		-0,148 ± 0,040	-0,027 ± 0,184
C3			-0,040 ± 0,076
λ	0,220	0,201	0,200
V_n	24,28	20,14	20,09

Tabell 7. Beräknade koefficienter för andra ordn. modell samt exakta värden. Exempel 2.

Koeff.	Beräknat värde.	Exakt värde.
A1	-1,114 ± 0,055	-1,073
A2	0,182 ± 0,048	0,149
B1	0,094 ± 0,006	0,090
B2	-0,117 ± 0,007	-0,116
C1	-0,476 ± 0,062	-0,400
C2	-0,148 ± 0,040	-0,210
λ	0,201	0,200

De följande tabellerna ger värdena för andra ordningens system för de övriga exemplen. F-test gav i samtliga fall andra ordningens system som framgår av tabell 8.

Tabell 8. F-test.

Exempel.	λ	ξ_1	ξ_2
1a	0,2	149	0,25
1b	0,8	406	0,19
1c	0,2	5070	0,14
1c	1,5	514	0,54

Tabell 9. Beräknade koefficienter och exakta för 2:a ordn. modell.
Exempel 1a, $\lambda = 0,2$.

Koeff.	Beräknat värde.	Exakt värde.
A1	$-1,860 \pm 0,014$	-1,848
A2	$0,863 \pm 0,014$	0,851
B1	$0,092 \pm 0,010$	0,091
B2	$-0,217 \pm 0,011$	-0,219
C1	$-0,654 \pm 0,035$	-0,400
C2	$-0,089 \pm 0,032$	-0,210
λ	0,327	0,200

Tabell 10. Beräknade koefficienter och exakta för 2:a ordn. modell.
Exempel 1b, $\lambda = 0,8$.

Koeff.	Beräknat värde.	Exakt värde.
A1	$-1,583 \pm 0,016$	-1,585
A2	$0,615 \pm 0,015$	0,619
B1	$-0,040 \pm 0,028$	-0,050
B2	$-0,915 \pm 0,030$	-0,918
C1	$-0,452 \pm 0,034$	-0,400
C2	$-0,155 \pm 0,031$	-0,210
λ	0,872	0,800

Tabell 11. Beräknade koefficienterna och exakta för 2:a ordn. modell.
Exempel 1c, $\lambda = 0,2$.

Koeff.	Beräknat värde.	Exakt värde.
A1	$-1,367 \pm 0,003$	-1,368
A2	$0,448 \pm 0,005$	0,449
B1	$-0,633 \pm 0,014$	-0,637
B2	$-1,681 \pm 0,017$	-1,680
C1	$-0,506 \pm 0,032$	-0,400
C2	$-0,050 \pm 0,032$	-0,210
λ	0,441	0,200

Tabell 12. Beräknade koefficienter och exakta för 2:a ordn. modell.

Exempel 1c, $\lambda = 1,5$.

Koeff.	Beräknat värde.	Exakt värde.
A1.	$-1,364 \pm 0,018$	-1,368
A2	$0,443 \pm 0,017$	0,449
B1	$-0,615 \pm 0,050$	-0,637
B2	$-1,676 \pm 0,059$	-1,680
C1.	$-0,432 \pm 0,035$	-0,400
C2.	$-0,161 \pm 0,032$	-0,210
λ	1,559	1,500

4. Sammanfattning.

Som framgår av tabellerna ovan har identifiering enligt maximum likelihoodmetoden gett goda uppskattningar av A och B koefficienterna. Vid lågt brus-signalförhållande har C koefficienterna erhållit värden som markant skiljer sig från de riktiga. Ökas bruset fås bättre uppskattningar av C koefficienterna medan samtidigt noggrannheten i A och B koefficienterna blir sämre. Jämför man kovariansmetoden med maximum likelihoodmetoden visar sig den senare klart överlägsen. I exempel 1b och 1c ger maximum likelihoodmetoden så god anslutning till impulssvaren att det är svårt att skilja dem i diagram. I figurerna nedan jämföres de erhållna resultaten från de olika metoderna för exempel 1a och exempel 2. Som synes av figur 15 kan stora svårigheter uppstå om man försöker anpassa en parametrisk modell till den enligt kovariansmetoden erhållna kurvan.

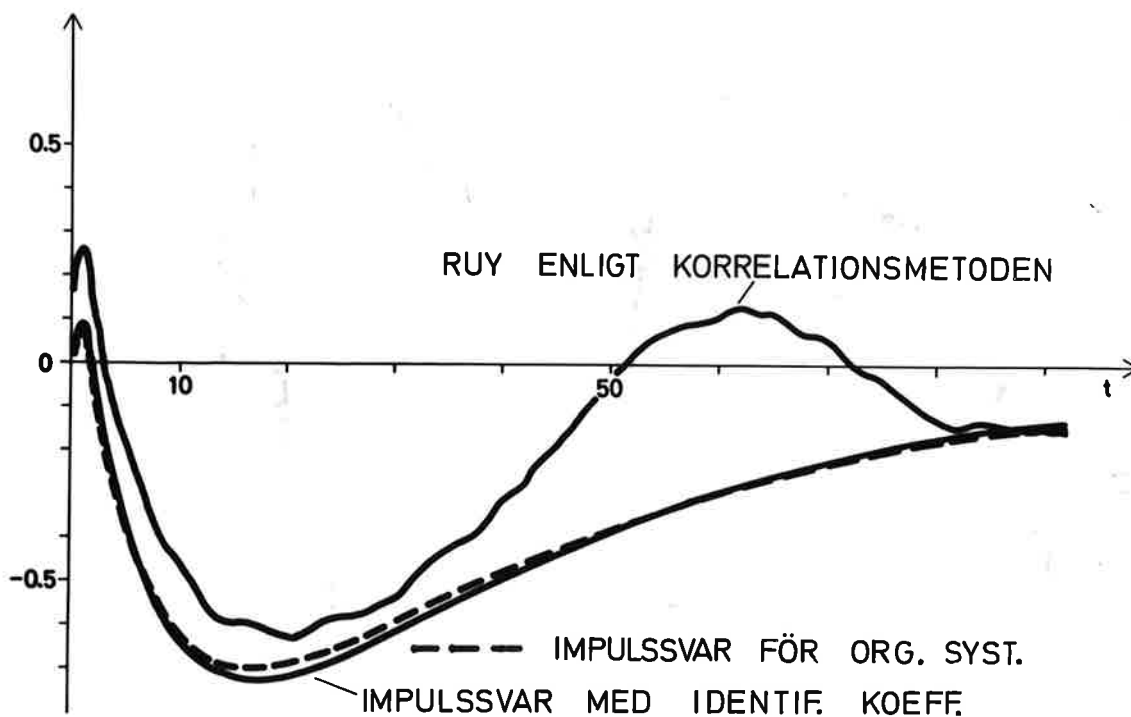


Fig. 15 RUY och impulssvar med koeff. enligt maximum likelihoodmetoden för exempel 1 a.

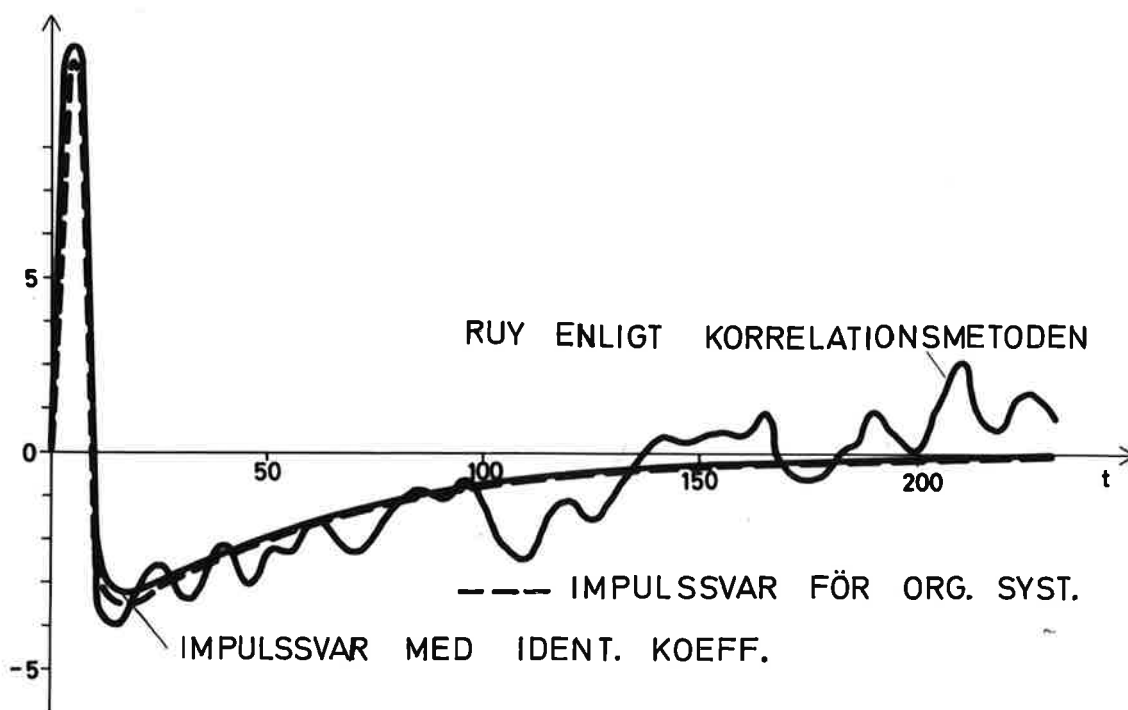


Fig. 16 RUY och impulssvar med koeff. enligt maximum likelihoodmetoden för exempel 2.

III. Identifiering av en återkopplad process.

1. Inledning.

I vissa fall kan det vara attraktivt att mäta på ett system utan att störa utifrån, exempelvis genom de variationer i signalen som förekommer då ett system är reglerat. Detta förfarande kan leda till svårigheter och felaktiga resultat.

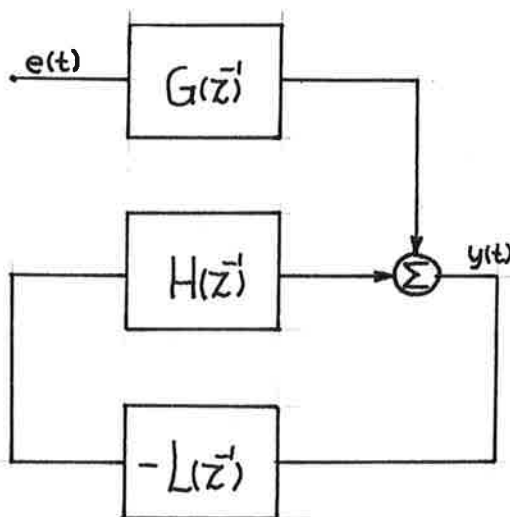
Vi kommer först att teoretiskt belysa några av de svårigheter som uppkommer vid identifiering av en återkopplad process. Speciellt analyseras de villkor som gäller vid en process styrd enligt minimalvariansstrategi.

Sedan kommer vi som exempel att utföra identifiering enligt maximumlikelihood-metoden på en process av första ordningen styrd med minimalvariansstrategi.

En andra ordningens process tas därefter upp till behandling, där identifiering utföres dels av processen och dels av regulatorn. Detta system är också styrt enligt minimalvariansstrategi.

2. Teoretisk analys av identifiering vid reglerat system.

Det reglerade systemet beskrives av följande modell:



Här är

$$G(z) = \frac{C(z)}{A(z)}$$

$$H(z) = \frac{z^{k_B} B(z)}{A(z)}$$

$$L(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$e(t) \in N(0,1)$$

$$\begin{aligned} A(z) &= 1 + a_1 z + \dots + a_n z^n \\ B(z) &= b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-1} z^{n-1} \\ C(z) &= 1 + c_1 z + \dots + c_n z^n \\ P(z) &= p_0 + p_1 z + \dots + p_r z^r \\ Q(z) &= 1 + q_1 z + \dots + q_l z^l \end{aligned}$$

Vid identifiering enligt maximumlikelihoodmetoden bestäms parametrarna genom minimering av förlustfunktionen

$$V(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \varepsilon^2(n) \quad \text{där}$$

$$\theta = (a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_{n-1}, c_1, \dots, c_n)$$

N = mätseriens längd

Residualerna $\varepsilon(t)$ ges av:

$$C(z^{-1}) \varepsilon(t) = A(z^{-1})y(t) - z^{-k}B(z^{-1})u(t) - \cancel{\theta(z^{-1})\varepsilon(t)} \dots (1)$$

där $\varepsilon(t) \in N(0, \lambda)$

Enligt modellen fås:

$$A^0(z^{-1})y(t) = z^{-k}B^0(z^{-1})u(t) + \lambda C^0(z^{-1})e(t) \dots (2)$$

där

$$u(t) = - \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} y(t) \dots (3)$$

Polynomen $A^0(z)$, $B^0(z)$, $C^0(z)$, $P(z)$ och $Q(z)$ har fasta koefficienter medan $A(z)$, $B(z)$ och $C(z)$ är polynom vars koefficienter skall identifieras.

Ekvationerna (2) och (3) ger:

$$y(t) = \frac{\lambda C^0(z^{-1})}{A^0(z^{-1})} e(t) - \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} \cdot \frac{z^{-k}B^0(z^{-1})}{A^0(z^{-1})} y(t)$$

$$y(t) = \frac{\lambda C^0(z^{-1})Q(z^{-1})}{A^0(z^{-1})Q(z^{-1}) + z^{-k}P(z^{-1})B^0(z^{-1})} e(t)$$

Insatt i ekvation (1) fås:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{C^0(z^{-1}) [A(z^{-1})Q(z^{-1}) + z^{-k}B(z^{-1})P(z^{-1})]}{C(z^{-1}) [A^0(z^{-1})Q(z^{-1}) + z^{-k}B^0(z^{-1})P(z^{-1})]}$$

$$\mathcal{E}(t) = K(z^{-1}) e(t) \dots\dots\dots (4)$$

Dessutom har man:

$$\mathcal{E}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \mathcal{E}(n) \quad (\text{K-J Åström, 7})$$

$$\mathcal{E}(n) = K(z) e(n)$$

$$\mathcal{E}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} K(z) e(n) = K(z) \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} e(n) = K(z) E(z)$$

Enligt Parsevals relation (K-J Åström, 7) fås:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} \mathcal{E}^2(t) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \mathcal{E}(z) \cdot \mathcal{E}(z^{-1}) \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} K(z)K(z^{-1})E(z)E(z^{-1}) \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

där Γ = enhetscirkeln ($|z|=1$)

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} e(n) \quad \text{vilket ger}$$

$$E(z)E(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} e(n) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n e(n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^2(n)$$

Då övre summationsgränsen N (serielängden) $\rightarrow \infty$ fås:

$$V(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} \mathcal{E}^2(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint K(z)K(z^{-1}) \frac{dz}{z} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^2(n)$$

Att minimera förlustfunktionen är alltså identiskt med att söka minimum av:

$$I(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \oint K(z)K(z^{-1}) \frac{dz}{z}$$

Serielängden är i praktiken oftast så stor att generalisering till oändlig mätserie inte innebär någon större approximation.

En intressant frågeställning är nu vilka relationer som gäller mellan parametrarna i θ vid $I(\theta)$'s minimum.

För att enkelt belysa detta beräknas här $I(\theta)$ då

$$K(z) = \frac{1 + sz}{1 + tz}$$

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{(1 + sz)(1 + sz^{-1})}{(1 + tz)(1 + tz^{-1})} \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{(1 + sz)(s + z)}{(1 + tz)(t + z)} \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

Antag nu att $-t$ ligger inom enhetscirkeln. Därav följer:

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \sum \text{Res } z_j = \frac{(1 - st)(s - t)}{(1 - t^2)(-t)} + \frac{s}{t} = \\ &= \frac{1}{1 - t^2} (1 + s^2 - 2st) = 1 + \frac{(t - s)^2}{1 - t^2} \end{aligned}$$

Alltså minimum då $t = s$.

Låt oss antaga att generellt gäller:

$$K(z) = \frac{1 + s_1 z + \dots + s_m z^m}{1 + t_1 z + \dots + t_m z^m}$$

och $I(\theta)$ har minimum att

$$t_i = s_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

dvs.

$$K(z) \equiv 1 \quad (1) \quad \dots \dots \dots (5)$$

I den fortsatta framställningen skrives A istället för A(z).

Enligt formel (4):

$$K(z) = \frac{C^0 [AQ + z^k BP]}{C [A^0 Q + z^k B^0 P]} = \frac{\sum_{i=0}^n c_i^0 z_i \left[\sum_{v=0}^{1+n} z^v \left(\sum_{s=0}^v a_s^0 q_{v-s} \right) + z^k \sum_{v=0}^{n+r+1} z^v \left(\sum_{s=0}^v b_s^0 p_{v-s} \right) \right]}{\sum_{i=0}^n c_i^0 z^i \left[\sum_{v=0}^{1+n} z^v \left(\sum_{s=0}^v a_s^0 q_{v-s} \right) + z^k \sum_{v=0}^{n+r+1} z^v \left(\sum_{s=0}^v b_s^0 p_{v-s} \right) \right]} \quad \dots \dots (6)$$

$$a_0 = a_0^0 = c_0 = c_0^0 = q_0 = 1$$

Antag att vi har ett n:te ordningens system. Då finns 3n parametrar att bestämma.

Ur identiteten (5) och ekvation (6) fås villkoren för att parametrarna skall kunna bestämmas entydigt. K(z) antages sakna gemensamma rötter och erhållna samband antages vara linjärt oberoende. 3n ekvationer bestämmer då parametrarna.

Detta medför: (Se ekv. (6)!)

$$l \geq n$$

eller

$$k + r \geq n + 1$$

Dvs. antingen gäller att regulatorns nämnare minst skall ha samma gradtal som systemet eller också skall antalet tidsförskjutningar plus gradtalet på regulatorns täljare minst vara ett gradtal högre än systemets ordning.

Vid styrning med minimalvariansstrategi gäller:

$$P = F$$

$$Q = EB^0$$

1) Se not nästa sida!

där E och F fås ur sambandet:

$$C^0 = EA^0 + z^k F$$

F har gradtal $n - 1$

E har gradtal $k - 1$

Detta ger

$$K(z) = \frac{AQ + z^k BP}{CB^0} =$$

$$= \frac{\sum_{v=0}^{2n+k-2} z^v \left(\sum_{s=0}^v a_s q_{v-s} \right) + z^k \cdot \sum_{v=0}^{2n+k-2} z^v \left(\sum_{s=0}^v b_s p_{v-s} \right)}{\sum_{v=0}^{n-1} b_v^0 z^v \cdot \sum_{v=0}^n c_v z^v} \dots\dots\dots (7)$$

Villkoret för att bestämma ett n :te ordningens system blir alltså;

$$k \geq n + 2$$

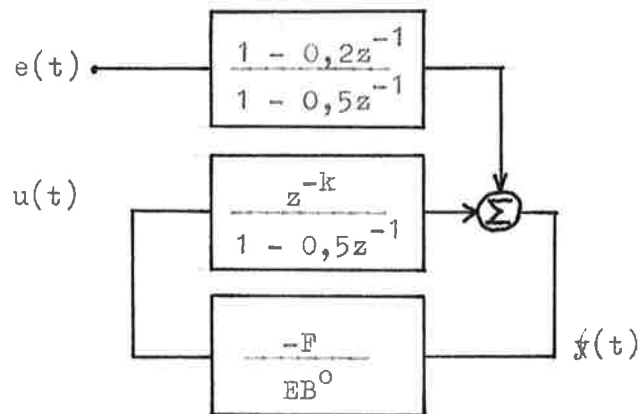
Dvs. antalet tidsförskjutningar måste minst vara två enheter större än systemets ordning.

Ovanstående innebär således att om man har ett andra ordningens system styrt med minimalvariansstrategi och 3 samplingsintervalls förskjutning, fås 5 ekvationer och 6 obekanta. Parametrarna blir bara inbördes relaterade. Vi har i princip ett oändligt antal minima av förlustfunktionen. (Se exempel nedan!)

1) Det går att visa att $I(\Theta) \geq 1$ och har ett minimum för $K(z) \equiv 1$. Entydigheten hos ovannämnda parameterrelationer är dock svårare att bevisa. ($t_i = s_i$)

3. Modell av första ordningen med minimalvariansstrategi.

Systemet beskrives enligt nedanstående figur:



där k antager värdena 1, 2 och 3.

a. $k = 1$

$$F(z) = 0,3$$

$$E(z) = 1$$

$$B^0(z) = 1$$

Vi har enligt (7):

$$K(z) = \frac{(1 + az)1 + z^1 b_{0,3}}{(1 + cz)1} \equiv 1 \quad \text{enligt (5)}$$

Därför följer:

$$a + 0,3b = c$$

Dvs. förlustfunktionen har ett oändligt antal minima på ett plan i parameterutrymmet. Jämför villkoret vid minimalvariansstrategi $k \geq n + 2$.

b. $k = 2$

$$F(z) = 0,15$$

$$E(z) = 1 + 0,3z$$

$$B^0(z) = 1$$

$$K(z) = \frac{(1 + az)(1 + 0,3z)1 + z^2 0,15b}{(1 + cz)1} = 1$$

Detta ger:

$$a = -2b$$

$$c = a + 0,3$$

Dvs. förlustfunktionen har ett oändligt antal minima på en linje i parameter-
rummet.

Vi lät c-parametern anta fixa värden i modellen och identifierade systemet. y och u-värden genererades av slumpstal $e(t) \in N(0,1)$. Mätseriens längd $N = 500$ värden. Genereringen och identifieringen utfördes enligt ett FORTRAN-program REGULA. (Se appendix 3!) I samtliga fall där det gäller att identifiera processen förskjutes in- och utsignalerna $k - 1$ steg i förhållande till varandra, dvs. z^k i modellen ovan minskas till z.

När identifieringarna enligt ovan genomfördes antog parametrarna värden som väl överensstämde med de teoretiskt beräknade. (Se figur nedan med a som funktion av c.)

Om modellen studeras inses att man borde få åtminstone två minima, nämligen processens värden och $y = E e(t)$ som fås ur minimalvariansstrategin. Som synes av figuren ligger dessa på linjen och bestämmer i och för sig linjens lutning.

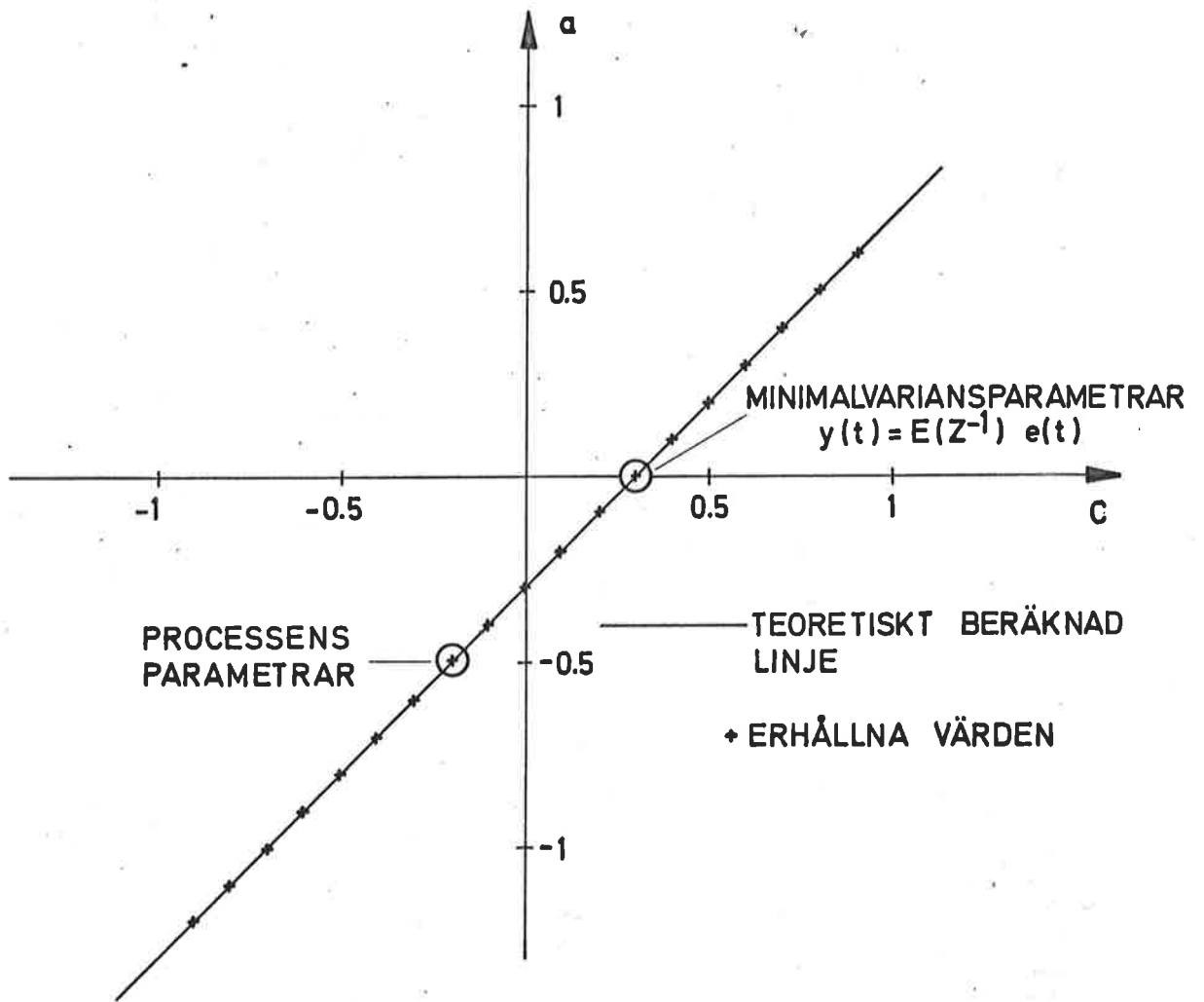
I figur 18 är förlustfunktionen inprickad som funktion av c-parametern. Enligt teorin med oändligt antal mätpunkter skall förlustfunktionen vara konstant över hela intervallet samt oändlig i punkterna $c = -1$ och $c = +1$. Dock kan man i figuren skönja två minima.

Vid identifiering utan låsta parametrar erhöles:

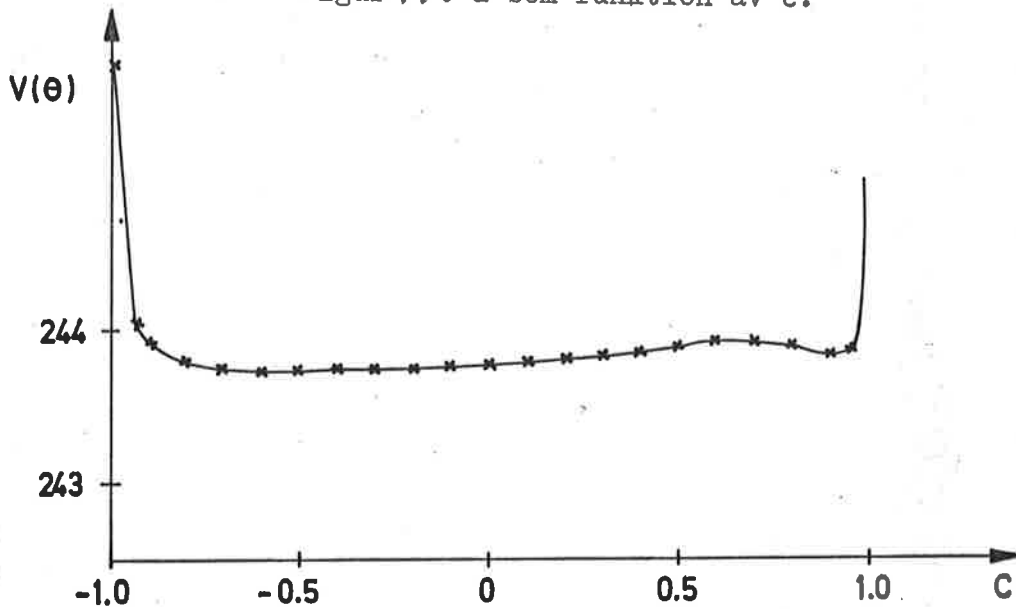
$$a = -0,80 \pm 1,10$$

$$b = 1,60 \pm 2,12$$

$$c = -0,50 \pm 1,10$$



Figur 17. a som funktion av c.



Figur 18. Förlustfunktionen som funktion av c.

Denna punkt ligger också på linjen. Som synes av de stora standardavvikelserna är minimat väldigt flackt. Se även figur 18!

c. $k = 3$

$$F(z) = 0,075z$$

$$E(z) = 1 + 0,3z + 0,15z^2$$

$$B^0(z) = 1$$

$$K(z) = \frac{1 + (0,3 + a)z + (0,15 + 0,3a)z^2 + (0,15a + 0,075b)z^3}{1 + cz}$$

$$z: \quad 0,3 + a = c$$

$$z^2: \quad 0,15 + 0,3a = 0$$

$$z^3: \quad 0,15a + 0,075b = 0$$

Här gäller $k \geq n + 2$ och parametrarna entydigt bestämda. Lösning av ekvationssystemet ovan ger:

$$a = - 0,5$$

$$b = 1,0$$

$$c = - 0,2$$

Alltså modellens parametrar. Vid identifiering av systemet konvergerade parametrarna mot:

$$a = - 0,52 \pm 0,16$$

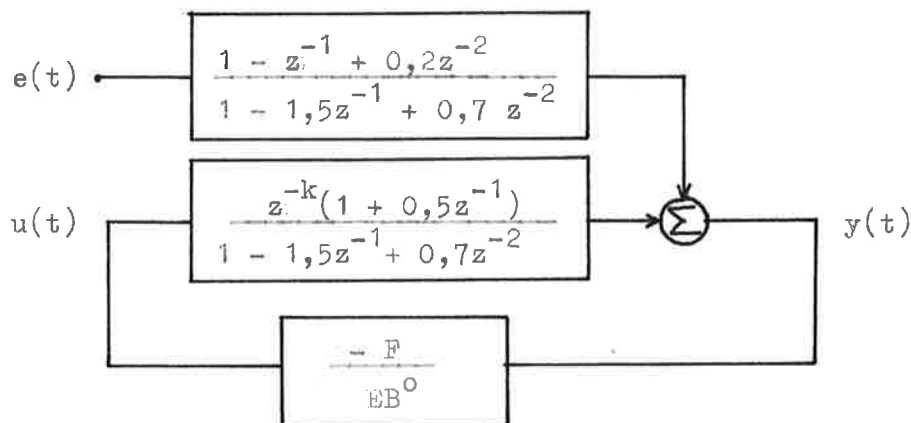
$$b = 1,19 \pm 0,74$$

$$c = - 0,23 \pm 0,18$$

Jämför man med de teoretiskt beräknade parametrarna är ehållna värden acceptabla. En något större osäkerhet i b kan bero på att den först bestäms vid identiteten för z^3 .

4. Modell av andra ordningen med minimalvariansstrategi.

Systemet beskrivs enligt nedanstående figur:



där k antager värdena 3 och 4.

a. $k = 3$

$$F(z) = 0,025 - 0,175z$$

$$E(z) = 1 + 0,5z + 0,25z^2$$

$$B^0(z) = 1 + 0,5z$$

a1. Identifiering av processen.

Relationen $k \geq n + 2$ är här inte uppfylld varför parametrarna inte bör bli entydigt bestämda.

Uppsättes:

$$K(z) = \frac{(1 + a_1z + a_2z^2)(1 + 0,5z + 0,25z^2)(1 + 0,5z)}{(1 + c_1z + c_2z^2)(1 + 0,5z)} + \frac{z^3(b_0 + b_1z)(0,025 - 0,175z)}{(1 + c_1z + c_2z^2)(1 + 0,5z)} \equiv 1$$

fås:

$$z^1: 1 + a_1 = 0,5 + c_1$$

$$z^2: 0,5 + a_1 + a_2 = 0,5c_1 + c_2$$

$$\begin{aligned} z^3: & 0,125 + 0,5a_1 + a_2 + 0,025b_0 = 0,5c_2 \\ z^4: & 0,125a_1 + 0,5a_2 - 0,175b_0 + 0,025b_1 = 0 \\ z^5: & 0,125a_2 - 0,175b_1 = 0 \end{aligned}$$

Vi har alltså 6 parametrar och 5 ekvationer. Ur ekvationerna kan man beräkna linjära samband enligt:

$$d_i = kd_j + l \quad i \neq j \quad k, l \text{ är konstanter.}$$

där i, j antar värdena 1 till 6.

Exempelvis fås:

$$c_1 = 30c_2 - 7$$

$$a_1 = -\frac{15}{7} a_2$$

Identifiering genomfördes som tidigare med REGULA. (Se appendix 3 \dagger)

Mätseriens längd $N = 500$ värden.

Det visade sig väldigt svårt att erhålla konvergens. (Gradienten av storleksordningen 10^0 . Bör vara $10^{-5} - 10^{-6}$.) Efter ett fåtal iterationer fixerades dock parametrarna. a_1 fick värdet 0,78. Enligt ovanstående teori kan då övriga parametrar bestämmas.

I tabellen nedan redovisas teoretiskt beräknade och erhållna parametervärden.

Tabell 13. ($a_1 = 0,78$)

	a_2	b_0	b_1	c_1	c_2
Teoretiskt värde	- 0,36	- 0,60	- 0,26	1,28	0,28
Erhållet värde	- 0,34	-0,59	- 0,33	1,28	0,29

Som synes av tabellen stämmer värdena bra. Parametrarna som kommer in vid identiteter med z av högre ordning blir sämre bestämda, som tidigare iakttagits. Jämför b_1 parameterns större avvikelse.

I försök att nå konvergens utfördes identifiering med processens parametervärden som startvärden. Då blev gradienten av storleksordningen 10^{-8} .

Detta kan förklaras av att parametrarna redan från början placerats på den linje i parameterrummet som uppfyller de teoretiska identiteterna. (Processens värden är en punkt på denna linje.)

Beräknas p.s.s. förut de övriga parametervärdena ur det erhållna a_1 -värdet fås tabellen nedan.

Tabell 14. ($a_1 = 0,66$)

	a_2	b_0	b_1	c_1	c_2
Teoretiskt värde	- 0,31	- 0,40	- 0,22	1,16	0,27
Erhållet värde	- 0,14	- 0,84	- 0,70	1,16	0,42

Här syns ännu tydligare att b-parametrarna är svåra att bestämma vid identifiering. Identiteterna för z^1 och z^2 bestämmer a- och c-parametrarna inbördes förhållande. De högre identiteterna blir aldrig uppfyllda. I princip har vi alltså 2 ekvationer och 4 obekanta. (a_1, a_2, c_1 och c_2) Två parametrar måste då fixeras för att de övriga två skall kunna beräknas.

Genom undersökning av förlustfunktionen inom c-parametrarnas stabila område (Se nedan!) kunde ytterligare ett minimum skönjas. Identifiering utfördes då med den förmodade minimipunktens c-parametrar som startvärde. God konvergens erhöles. (Gradient 10^{-6}) Parametrar redovisade som förut enligt tabell nedan.

Tabell 15. ($a_1 = - 0,64$)

	a_2	b_0	b_1	c_1	c_2
Teoretiskt värde	0,33	0,39	0,14	- 0,16	0,26
Erhållet värde	0,30	0,25	0,21	- 0,14	0,23

Standardavvikelserna för parametervärdena är stora, vilket framgår av nedanstående tabell.

Tabell 16.

	Ident. koeff.
a_1	- 0,64 \pm 1,49
a_2	0,30 \pm 0,74
b_0	0,25 \pm 1,13
b_1	- 0,21 \pm 0,67
c_1	- 0,14 \pm 1,59
c_2	0,23 \pm 0,10

Som synes av de stora standardavvikelserna är minimat flackt och svårt att finna. c_1 :s betydligt större standardavvikelse än c_2 kan förklaras av att den förut nämnda minimalinjen $c_1 = 30c_2 - 7$ nästan är parallell med c_1 -axeln. (Se även figur nedan !)

Identifiering utfördes också där a- och b-parametrarna tvingades ha värdet noll. Enligt föregående resonemang blir då c_1 och c_2 helt bestämda. ($c_1=0,50$, $c_2=0,25$). Identifiering gav $c_1 = 0,25$, $c_2 = 0,49$ och god konvergens. Efter som minimalvariansstrategi föreligger är dessa parametrar identiska med e_1 och e_2 i sambandet $y(t) = E(z) e(t)$. Denna punkt befinner sig också på den förutnämnda linjen i parameterrummet.

c_1 och c_2 :s stabila område i c_1, c_2 -planet utgörs av en triangel. (I. Gustavsson, 4) Förlustfunktionens värde bestämdes inom detta område i ekvidistanta punkter. (Se program NIVA appendix 4!) Området utökades till en kvadrat där förlustfunktionen fick ett konstant värde utanför ovan angivna triangel. Med hjälp av ett FORTRAN-program KONTUR (Se appendix 5!) ritades nivåkurvor, för lika värden på förlustfunktionen, inom detta område enligt figur nedan. I figuren har inritats den teoretiskt beräknade minimalinjen. ($30c_2 - c_1 = 7$) Som synes av figuren finns två minima, ett flackt i vänstra delen av figuren och ett mer distinkt i högra delen. Dessa överensstämmer väl med de som erhållits vid tidigare identifieringar. (Utmärkta med kryss i figuren.) De trappstegslinjer som erhållits vid kanterna beror på att triangelns randlinje och punkterna utanför denna erhållit konstanta värden.

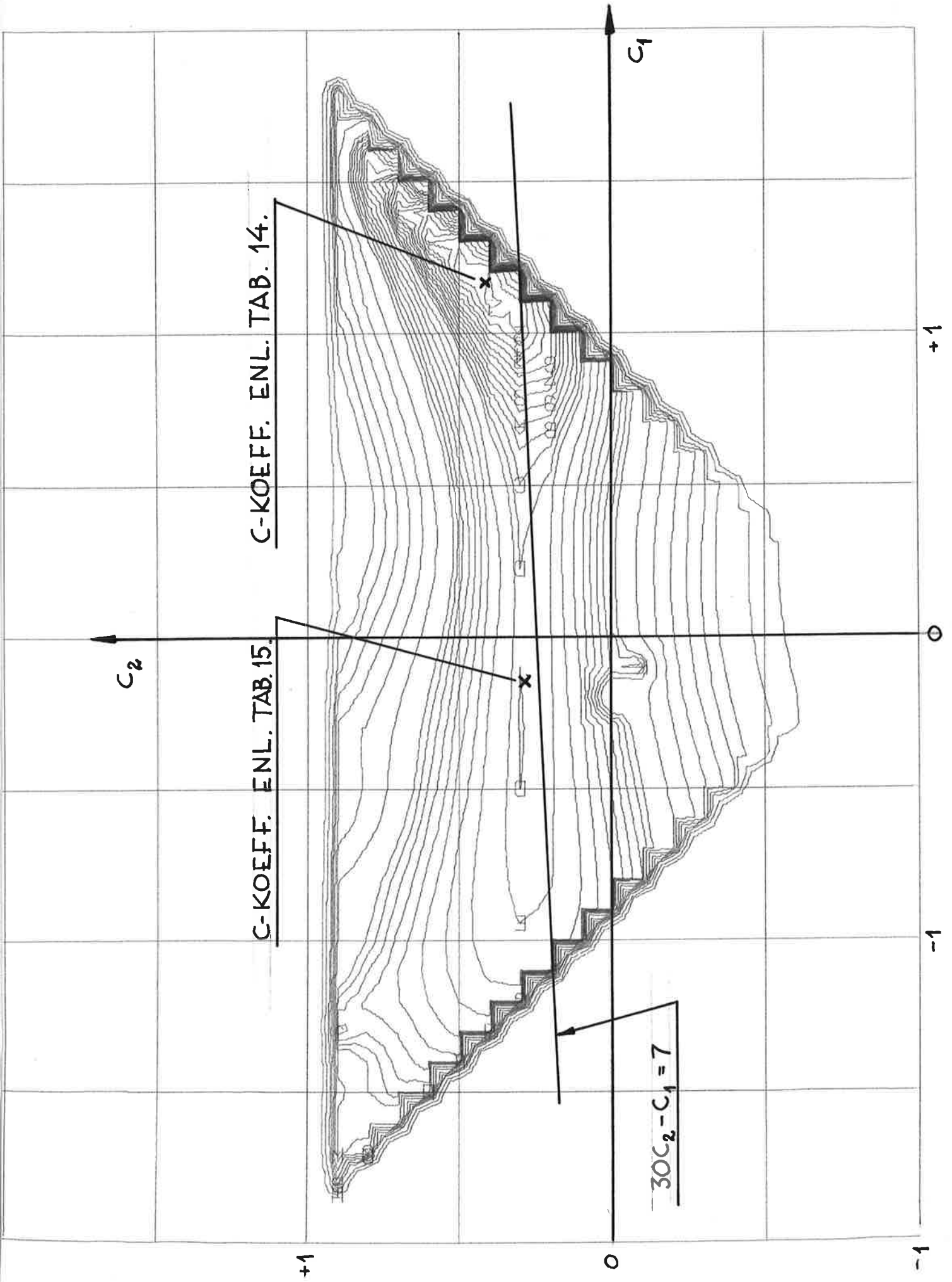


FIG. 19

+1

-1

0

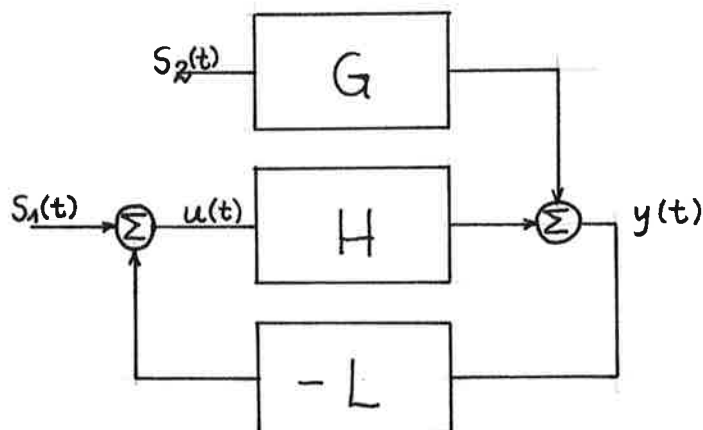
+1

0

-1

a2. Identifiering av regulatorn.

Betrakta nedanstående figur:



I tidigare identifieringar har vi försökt att identifiera H med $S_1(t) = 0$ och $S_2(t) \neq 0$. $S_1(t)$ och $S_2(t)$ är störningar. Insignalens karaktär har gjort H svår att identifiera. Att identifiera regulatorn med samma modell bör vara lättare då insignalen på denna består av en störning genererad genom slumptal $e(t) \in N(0,1)$.¹⁾

För att kunna få med den direkt genomgående signalen i regulatorn förskjöts in- och utsignal ett steg i förhållande till varandra. (OBS! Motsatt riktning mot tidigare.) Identifieringen gav då lätt ett 3:e ordningens system med parametervärden exakt överensstämmande med regulatorns riktiga värden.

I sammanhanget kan nämnas att om man försöker att identifiera processen och förskjuter in- och utsignalen enligt ovan, betraktas vid identifieringen insignalen som utsignal och utsignalen som insignal, varför regulatorns in- och utsignaler erhålles.

b. $k = 4$

$$F(z) = 0,1375 + 0,0175z$$

$$E(z) = 1 + 0,5z + 0,25z^2 + 0,025z^3$$

$$B^0(z) = 1 + 0,5z$$

Relationen $k \geq n + 2$ är här uppfylld, varför parametrarna bör bli entydigt bestämda.

1) Identifiering av regulatorn går att beskriva med modellen $A(z) y(t) = B(z) u(t)$ dvs $\lambda = 0$.

Uppsättes:

$$K(z) \equiv 1$$

fås

$$z^1: a_1 - c_1 = -0,5$$

$$z^2: a_1 + a_2 - 0,5c_1 - c_2 = -0,5$$

$$z^3: 0,5a_1 + a_2 - 0,5c_2 = -0,15$$

$$z^4: 0,15a_1 + 0,5a_2 - 0,1375b_0 = -0,0125$$

$$z^5: 0,0125a_1 + 0,15a_2 - 0,0175b_0 - 0,1375b_1 = 0$$

$$z^6: 0,0125a_2 - 0,0175b_1 = 0$$

Alltså 6 parametrar och 6 ekvationer. Löses ekvationssystemet fås processens parametervärden. Vid identifieringen erhöles följande parametervärden. (Gradient 10^{-6})

Tabell 17.

	Ident.par.	Riktiga värden
a_1	$0,53 \pm 0,16$	- 1,50
a_2	$- 0,24 \pm 0,11$	0,70
b_0	$- 0,82 \pm 0,41$	1,00
b_1	$- 0,72 \pm 0,35$	0,50
c_1	$1,03 \pm 0,17$	- 1,00
c_2	$0,27 \pm 0,12$	0,20

Som iakttagits tidigare kommer b-parametrarna först in vid identiteter där z är av hög ordning och är därför svåra att bestämma. De identifierade a- och c-parametrarna satisfierar de tre första ekvationerna i ekvationssystemet ovan. Alltså 4 parametrar och 3 ekvationer. Fixeras en kan de tre övriga beräknas.

Tabell 18. ($a_1 = 0,53$)

	a_2	c_1	c_2
Teoretiskt värde	- 0,32	1,03	0,20
Erhållet värde	- 0,24	1,03	0,27

En viss avvikelse kan förklaras med att b_0 -parametern i z^4 : relationen stör bestämningen av a- och c-parametrarna. Gjordes förskjutning ytterligare ett steg ($k = 5$) borde alltså a- och c-parametrarna bestämmas helt. b-parametrarnas värden blir alltid svåra att nå.

Vi har här sett hur vanskligt det är att identifiera en återkopplad process. Man måste göra k tillräckligt stort för att entydigt kunna bestämma alla parametrarna, Samtidigt försämrar man dock sina möjligheter att hitta rätta b-parametrar.

5. Sammanfattning.

Samtliga gjorda försök, som utförts på system av första och andra ordningen med minimalvariansstrategi, visar att parametrarna konvergerar mot värden som uppfyller identiteten $K(z) \equiv 1$. Försöken tyder på att ett lägsta entydigt minimum existerar för denna identitet. Särskilt tydligt har detta visats sig för första ordningens system, där tre tidsförskjutningar i modellen gav entydigt bestämda parametrar i enlighet med teorin. Dessa parametrar överensstämde bra med processens parametervärden. Dock kunde man redan här skönja en viss svårighet att bestämma b-parametern. Dessa svårigheter ökade för andra ordningens system då ytterligare en tidsförskjutning fordrades för att systemet skulle bli entydigt bestämt. Det visade sig att identiteter vid höga z -potenser, där särskilt b-parametrarna förekom, gav sämre överensstämmelse.

Villkoren att entydigt bestämma systemet samt att kunna erhålla goda uppskattningar på b-parametrarna står alltså i strid med varandra.

Som väntat gick regulatorn mycket lätt att bestämma på grund av insignalens stokastiska natur.

IIII. System med flera in- och utsignaler

1. Inledning

I detta avsnitt kommer vi först i någon mån belysa de svårigheter som uppkommer vid flervariabla system.

Det finns exempelvis ingen kanonisk struktur vid flera utsignaler. Ej heller är det trivialt att avgöra systemets ordning vid mätning på en bestämd överföringsfunktion. Dessa problem belyses i avsnitt 2.

Sedan följer ett enkelt exempel som behandlar en metod att delvis bemästra problemen. Man uppsätter en modell för varje utsignal. Därefter sammanställs modellerna.

Avslutningsvis behandlas data från en pappersmaskin enligt samma princip.

2. Problem vid system med flera in- och utsignaler

De problem som uppstår p.g.a. att man icke kan finna en kanonisk struktur vid flera utsignaler belyses lättast genom ett enkelt exempel. Betrakta ett kontinuerligt system.

Antag att vi har två insignaler och en utsignal. Man vet då att systemet, om egenvärdena är skilda och båda tillståndsvariablerna observerbara, kan skrivas på formen:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 1] x$$

Om man däremot har två utsignaler måste man prova sig fram beroende på att det går att beskriva systemet på ett antal principiellt olika sätt. Vi har alltså:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} u$$

$$y = Cx$$

Där C är en 2×2 matris som beroende på sitt utseende ger principiella skillnader åt systemet. C kan exempelvis vara matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Andra matriser är $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Det existerar i detta fall fyra olika modeller att testa. Man ser genast vilka svårigheter detta skulle föra med sig om man utökar antalet utsignaler i systemet. Antalet olika kombinationsmöjligheter i C -matrisen och därmed antalet olika modeller kommer snabbt att öka.

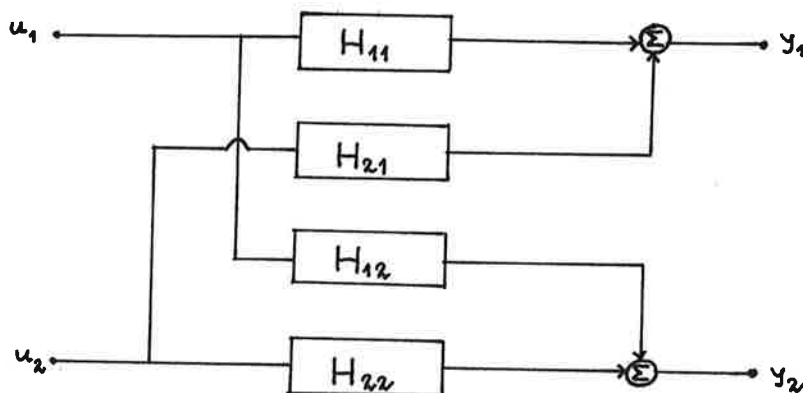
Ovannämnda svårigheter kan kringgås genom att mäta samtliga insignaler mot en utsignal i taget och sedan sammanställa modellerna (se avsnitt 3 nedan).

I den identifieringsmodell som här användes anpassas de olika överföringsfunktionerna till ett gemensamt ordningstal. Detta kan medföra att ordningstalet blir mindre distinkt och svårare att bestämma. Lägre ordningstal än det identifierade i individuella överföringsfunktioner framkommer då genom gemensamma rötter som kan förkortas bort. En modell som tillät skiftande ordningstal mellan de olika in- utsignalerna kunde tänkas medföra fördelar vid test av system med flera insignaler.

Försöker man få reda på de enskilda överföringsfunktionernas ordningstal genom att mäta en insignal mot en utsignal visar det sig att man också då möter på svårigheter. De andra insignalerna kan nämligen inverka så starkt att man vid identifikation erhåller ett annat ordningstal än det verkliga. Detta förhållande beröres något i avslutningen på avsnitt 3 nedan.

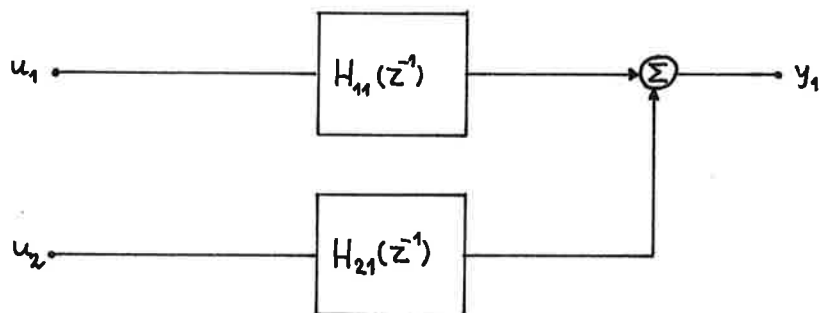
3. System med två in- och utsignaler

Systemet ser ut enligt följande:



Detta system delas upp i två modeller.

Modell 1



Systemet enligt modell 1 beskrivs av ekvationen:

$$A_1(z^{-1})y_1(t) = z^{-k_1}B_{11}(z^{-1})u_1(t) + z^{-k_2}B_{21}(z^{-1})u_2(t) + \lambda C_1(z^{-1})e(t)$$

$$A_1(z) = 1 + A_1z + \dots + A_n z^n$$

$$C_1(z) = 1 + C_1z + \dots + C_n z^n$$

$$B_{11}(z) = B_0^1 + B_1^1 z + \dots + B_{n-1}^1 z^{n-1}$$

$$B_{21}(z) = B_0^{11} + B_1^{11} z + \dots + B_{n-1}^{11} z^{n-1}$$

$$e(t) \in N(0,1)$$

$H_{ij} = \frac{B_{ij}}{A_j}$ = överföringsfunktionen från insignalen u_i till utsignalen y_j .

Parametrarna $(A_1 \dots A_n, B_0^1 \dots B_{n-1}^1, B_0^{11} \dots B_{n-1}^{11}, C_1 \dots C_n)$

beräknas med hjälp av maximumlikelihoodmetoden på sätt som tidigare.¹⁾

Datamaskinprogrammet (I. Gustavsson, 5) kan utnyttjas för system upp till 8 insignaler mot en utsignal.

Identifieras processen enligt modell 1 för $n = 1, 2$ och 3 samt $k_1 = k_2 = 1$ fås värden enligt tabell 18.

1) Ett FORTRAN-program MULTI enligt appendix 6 användes.

Tabell 18.

n	1	2	3
A ₁	-0,794±0,010	-1,686±0,020	-2,143±2,277
A ₂		0,708±0,016	1,493±3,830
A ₃			-0,334±1,605
B ₀ ¹	0,099±0,004	0,095±0,004	0,099±0,009
B ₁ ¹		-0,074±0,006	0,129±0,195
B ₂ ¹			0,044±0,155
B ₀ ¹¹	0,162±0,004	0,166±0,004	0,166±0,004
B ₁ ¹¹		-0,153±0,004	-0,229±0,382
B ₂ ¹¹			0,073±0,349
C ₁	-0,588±0,036	-1,701±0,036	
C ₂		0,724±0,036	
C ₃			
λ	0,109	0,099	
V _n	2,9627	2,4306	2,4099

3:e ordningens system har ej konvergerat färdigt (koeff. avvikelse mindre än 10^{-8}) men angivna värden ligger mycket nära sina gränsvärden vilket framgår av en liten gradient (ung. 10^{-2}).

Om man utför F-test mellan system av olika ordningstal fås:

$$\xi_1 = \frac{V_1 - V_2}{V_2} \cdot \frac{492}{4} = 26,9$$

$$\xi_2 = \frac{V_2 - V_3}{V_3} \cdot \frac{492}{4} = 1,06$$

Med F-test på 5%-nivån kan man anse att det är ett system av 2:a ordningen.

Vi får alltså:

$$A_1(z^{-1}) = 1 - 1,686z^{-1} + 0,708z^{-2} = (1 - 0,888z^{-1})(1 - 0,798z^{-1})$$

$$z^{-1}B_{11}(z^{-1}) = 0,095z^{-1} - 0,074z^{-2} = 0,095z^{-1}(1 - 0,779z^{-1})$$

$$z^{-1}B_{21}(z^{-1}) = 0,166z^{-1} - 0,153z^{-2} = 0,166z^{-1}(1 - 0,921z^{-1})$$

$$H_{11}(z^{-1}) = \frac{z^{-1}B_{11}(z^{-1})}{A_1(z^{-1})} = \frac{0,095z^{-1}(1 - 0,779z^{-1})}{(1 - 0,888z^{-1})(1 - 0,798z^{-1})}$$

Om man antar att 0,779 och 0,798 är samma rot fås:

$$H_{11}(z^{-1}) = \frac{0,095z^{-1}}{1 - 0,888z^{-1}}$$

$$H_{21}(z^{-1}) = \frac{z^{-1}B_{21}(z^{-1})}{A_1(z^{-1})} = \frac{0,166z^{-1}(1 - 0,921z^{-1})}{(1 - 0,888z^{-1})(1 - 0,798z^{-1})}$$

Antag 0,0921 och 0,888 samma rot.

Detta ger:

$$H_{21}(z^{-1}) = \frac{0,166z^{-1}}{1 - 0,798z^{-1}}$$

Med $H(z^{-1}) = \frac{\Gamma z^{-1}}{1 - \phi z^{-1}}$ fås den kontinuerliga överföringsfunktionen

$G(s)$ enligt:

$$G(s) = \frac{b}{s - a} \quad \text{där}$$

$$a = \frac{1}{T} \ln \phi$$

$$b = \frac{a \Gamma}{\phi - 1}$$

Med $T = 0,1$ sek. fås

$$G_{11}(s) = \frac{1,0}{s + 1,2}$$

$$G_{21}(s) = \frac{1,8}{s + 2,3}$$

Antar man att inga gemensamma rötter existerar fås:

$$H_{11}(z^{-1}) = \frac{0,117z^{-1}}{1 - 0,888z^{-1}} - \frac{0,022z^{-1}}{1 - 0,798z^{-1}} \quad \text{samt}$$

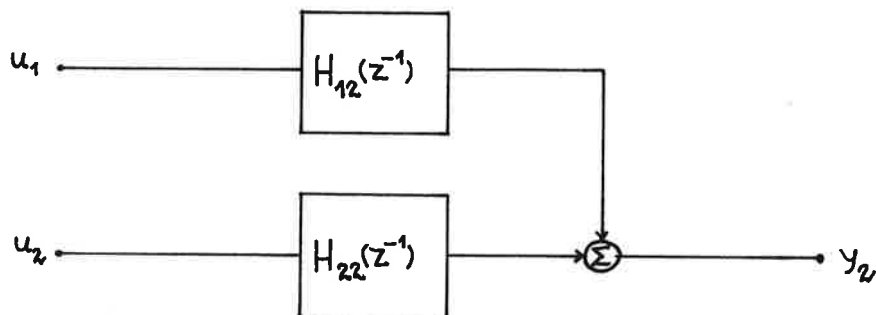
$$H_{21}(z^{-1}) = \frac{0,056z^{-1}}{1 - 0,888z^{-1}} + \frac{0,222z^{-1}}{1 - 0,798z^{-1}}$$

vilket ger

$$G_{11}(s) = \frac{1,2}{s + 1,2} - \frac{0,2}{s + 2,3}$$

$$G_{21}(s) = \frac{0,6}{s + 1,2} + \frac{2,4}{s + 2,3}$$

Modell 2



Systemet enligt modell 2 beskrivs av ekvationen:

$$A_2(z^{-1})y_2(t) = z^{-k_1}B_{12}(z^{-1})u_1(t) + z^{-k_2}B_{22}(z^{-1})u_2(t) + \lambda C_2(z^{-1})e(t)$$

Identifieras processen enligt modell 2 för $n = 1, 2$ och 3 samt $k_1 = k_2 = 1$ fås värden enligt tabell 19.

Tabell 19.

n	1	2	3
A ₁	-0,906±0,003	-1,341±0,266	0,055±0,075
A ₂		0,397±0,241	-0,095±0,060
A ₃			-0,699±0,038
B ₀ ¹	0,092±0,003	0,093±0,004	0,095±0,003
B ₁ ¹		-0,041±0,023	0,088±0,006
B ₂ ¹			0,066±0,003
B ₀ ¹¹	0,095±0,002	0,086±0,004	0,092±0,003
B ₁ ¹¹		-0,307±0,027	0,090±0,007
B ₂ ¹¹			0,080±0,002
C ₁	-0,941±0,014	-1,369±0,275	
C ₂		0,404±0,259	
C ₃			
λ		0,092	
V _n	2,1622	2,1311	

3:e ordningens system har ej konvergerat färdigt (koeff. avvikelser mindre än 10^{-8}) men angivna värden ligger mycket nära sina gränsvärden vilket framgår av en liten gradient (ung. 10^{-2}).

Om man utför F-test mellan system av olika ordningstal fås:

$$\xi_1 = \frac{V_1 - V_2}{V_2} \cdot \frac{492}{4} = 1,80$$

Med F-test på 5%-nivån kan man anse att det är ett system av 1:a ordningen.

Vi får alltså:

$$H_{12}(z^{-1}) = \frac{0,092z^{-1}}{1 - 0,906z^{-1}}$$

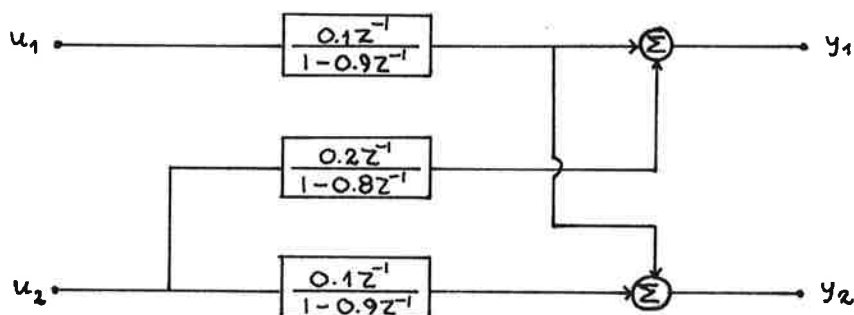
$$H_{22}(z^{-1}) = \frac{0,095z^{-1}}{1 - 0,906z^{-1}}$$

Den kontinuerliga överföringsfunktionen är:

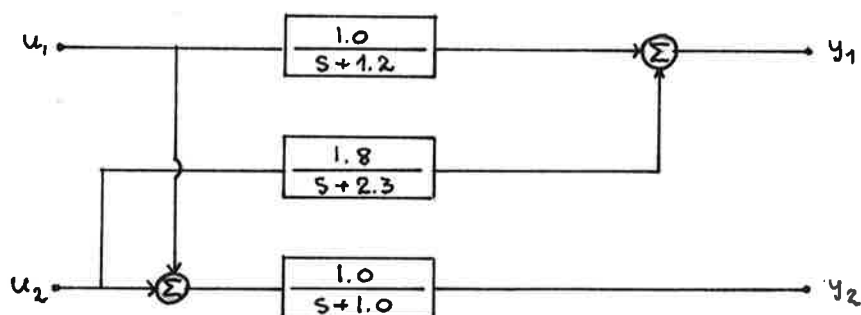
$$G_{12}(s) = \frac{1,0}{s + 1,0}$$

$$G_{22}(s) = \frac{1,0}{s + 1,0}$$

Sammanställes modell 1 och 2 fås:



Eller som kontinuerligt system:



Här ser vi ett praktiskt exempel på de svårigheter som kan uppkomma vid flera in- och utsignaler.

I ett samplat system med en decimals noggrannhet är $H_{11}(z^{-1})$ och $H_{22}(z^{-1})$ identiska, medan i motsvarande kontinuerliga system fortfarande med en decimals noggrannhet $G_{11}(s)$ och $G_{22}(s)$ är två överföringsfunktioner med något skilda egenskaper.

Det artificiellt genererade systemet har följande utseende:

$$G_{11}(s) = G_{12}(s) = G_{22}(s) = \frac{1}{s + 1}$$

$$G_{21}(s) = \frac{2}{s + 3}$$

Insignal: u_1 PRBS med period 31

u_2 PRBS med period 67

Serielängd: 500

På båda utsignalerna lades en störning bestående av oberoende slumptal $N(0,1)$.

Som synes är överensstämmelsen god i samtliga fall utom för $G_{21}(s)$.

Detta kan dock i viss mån förklaras av att standardavvikelsen hos de koefficienter som ingår i den överföringsfunktion där man förkortat bort en gemensam rot i täljare och nämnare är större än hos koefficienterna i den ursprungliga överföringsfunktionen. $G_{11}(s)$ och $G_{21}(s)$ är ju ursprungligen överföringsfunktioner av 2:a ordningen med gemensam nämnare.

Detta kan visas med följande resonemang:

Från själva identifieringen erhålles följande överföringsfunktioner:

$$H_1 + H_2 = \frac{d_1 z + d_2}{z^2 + a_1 z + a_2} + \frac{d_3 z + d_4}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

De överföringsfunktioner som erhålles efter förkortning av en gemensam rot är:

$$H_3 + H_4 = \frac{b_1}{z + a_3} + \frac{b_2}{z + a_4}$$

Vi söker alltså standardavvikelsen hos koefficienterna i $H_3 + H_4$ då standardavvikelsen är känd hos koefficienterna i $H_1 + H_2$.

Vi har alltså:

$$H_3 + H_4 = \frac{b_1}{z + a_3} + \frac{b_2}{z + a_4} =$$

$$= \frac{b_1 z + b_1 a_4}{z^2 + (a_3 + a_4)z + a_3 a_4} + \frac{b_2 z + b_2 a_3}{z^2 + (a_3 + a_4)z + a_3 a_4}$$

Identifieras koefficienterna i identiteten $H_1 + H_2 = H_3 + H_4$ fås:

$$b_1 = d_1$$

$$b_2 = d_3$$

$$a_3 + a_4 = a_1$$

$$a_3 a_4 = a_2$$

Detta ger:

$$a_3 = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$

$$a_4 = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$

Vi ser alltså att koefficienterna b_1 och b_2 får samma standardavvikelse som d_1 resp. d_3 . Däremot är situationen något mer komplicerad vad gäller koefficienterna a_3 och a_4 .

Vi antar att $a_1 \dots a_4$ är normalfördelade.

Om x har medelavvikelsen Δx fås avvikelsen för x^2 enligt:

$$(x \pm \Delta x)^2 = x^2 \pm 2|x| \Delta x + (\Delta x)^2 \dots \dots \dots (1)$$

Antag vidare att y har medelavvikelsen Δy . Avvikelsen för \sqrt{y} får då delas upp i två fall, nämligen om y är större eller mindre än Δy .

$y < \Delta y$ ger

$$(y \pm \Delta y)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\Delta y} \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{y}{\Delta y} - \frac{1}{8} \left(\frac{y}{\Delta y} \right)^2 \pm \dots \right) \dots \dots \dots (2 a)$$

$y > \Delta y$ ger

$$(y \pm \Delta y)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y} \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{y} - \frac{1}{8} \left(\frac{\Delta y}{y} \right)^2 \pm \dots \right) \dots \dots \dots (2 \text{ b})$$

Felet σ ges i fall (2 a) och 2 b) av:

$$\sigma_y = \left| \sqrt{y} - \sqrt{y + \Delta y} \right|$$

Dessutom gäller om $\xi_1 \in N(m_1, T_1)$, $\xi_2 \in N(m_2, T_2)$

$$(a \xi_1 + b) \in N(am_1 + b, |a| \sigma_1) \dots \dots \dots (3)$$

$$(\xi_1 + \xi_2) \in N(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}) \dots \dots \dots (4)$$

Vi utgår alltså från sambandet:

$$a_3 = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$

Medelavvikelsen T_1 för $\frac{a_1^2}{4}$ blir enligt (1) och (3):

$$\sigma_1 = \frac{2|a_1| \Delta a_1 + (\Delta a_1)^2}{4}$$

Medelavvikelsen σ_2 för a_2 är given

$$\sigma_2 = \Delta a_2$$

Detta ger för $y = \frac{a_1^2}{4} - a_2$ enl. (4)

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Om vi för enkelhetens skull sätter $y = 0$ fås enl. (2 a):

$$\Delta y = \sqrt[4]{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

D.v.s. standardavvikelsen för \sqrt{y} beror enbart av Δy .

För $y > \Delta y$ gäller dock enl. (2 b):

$$\sqrt{y \pm \Delta y} = \sqrt{y} \pm \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{y} - \frac{1}{8} \frac{(\Delta y)^2}{y^{3/2}} \pm \dots$$

Medelavvikelsen för \sqrt{y} är beroende av både y och Δy .

Som synes blir felet betydligt mindre för $y > \Delta y$ än för $y = 0$.

Vidare gäller att medelavvikelsen σ_3 för $\frac{a_1}{2}$ är:

$$\sigma_3 = \frac{\Delta a_1}{2}$$

Med siffor ur den identifierade processen

$$a_1 \pm \Delta a_1 = -1,686 \pm 0,020$$

$$a_2 \pm \Delta a_2 = 0,708 \pm 0,016$$

fås

$$\sigma_1 = \frac{2|a_1|\Delta a_1 + (\Delta a_1)^2}{4} = 0,01696$$

$$\sigma_2 = 0,016$$

$$\sigma_3 = 0,010$$

$$y = \frac{a_1^2}{4} - a_2 = 0,002$$

alltså $y \approx 0$ vilket ger

$$\Delta y = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$\Delta a_3 = \sqrt{\sigma_3^2 + \Delta y}$$

$$\Delta a_3 = 0,129$$

Standardavvikelsen för a_3 är i detta fall alltså 6 ggr större än för a_1 .

I realiteten har vi alltså

$$a_3 \pm \Delta a_3 = -0,888 \pm 0,129$$

$$a_4 \pm \Delta a_4 = -0,798 \pm 0,129$$

för koefficienterna i $H_{11}(z^{-1})$ och $H_{21}(z^{-1})$, medan man har

$$a_5 \pm \Delta a_5 = a_6 \pm \Delta a_6 = -0,906 \pm 0,003$$

för koefficienterna i $H_{12}(z^{-1})$ och $H_{22}(z^{-1})$.

Det bör dock påpekas att den stora ökningen i felet beror på ett olyckligt val av a_1 och a_2 .

Vi har

$$y = \frac{a_1^2}{4} - a_2$$

Om a_1 och a_2 hade anpassats så att $y > \Delta y$ skulle ökningen i felet blivit betydligt mindre. Enl. (2 b) hade vi då fått:

$$(y \pm \Delta y)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y} \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{y} - \dots \right)$$

Antag $y = 1,0$ och $\Delta y = 0,1$

Vi får då:

$$(y \pm \Delta y)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1,0} \pm \frac{1}{2} \frac{0,1}{\sqrt{1,0}} = 1,0 \pm 0,05$$

D.v.s. felet halveras.

Jämför $y = 0,0$ och $\Delta y = 0,1$ vilket ger $\sqrt{\Delta y} = 0,3$. Ett 6 ggr större fel.

Avslutningsvis kan nämnas att relationerna $u_1 - y_1$ och $u_2 - y_1$, d.v.s. processerna med överföringsfunktionerna $H_{11}(z^{-1})$ och $H_{21}(z^{-1})$ även identifieras enligt maximumlikelihoodmetoden för en in- och utsignal. Det visade sig då attförhållandet $u_1 - y_1$

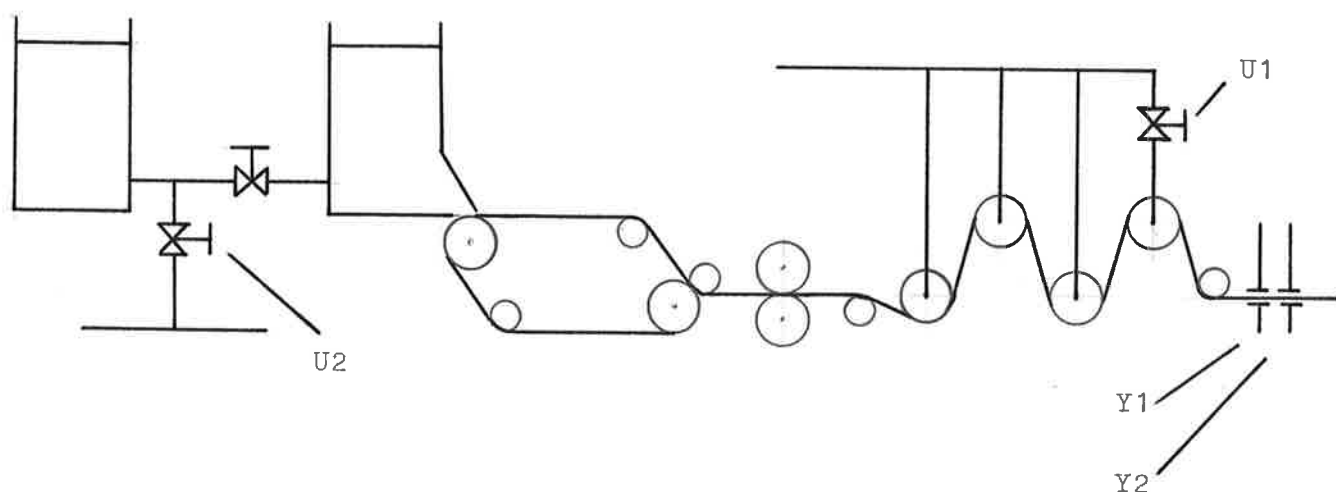
påverkades så starkt av u_2 att $H_{11}(z^{-1})$ blev av 2:a ordningen. Man måste alltså gå upp till 2:a ordningen för att modellen skall tolka u_2 som brus. Förkortar man i 2:a ordningens modell bort den gemensamma roten fås bättre överensstämmelse med de riktiga parametervärdena än 1:a ordningens modell gav.

Den starka påverkan från $H_{21}(z^{-1})$ kan förklaras med dess större negativa rot ($S = -3$ mot $S = -1$) som ger den en dominerande ställning.

4. Identifiering av mätserier från en pappersmaskin. Två in- och utsignaler.

I detta avsnitt kommer den i föregående avsnitt genomgångna tekniken att tillämpas på några industriella mätserier. Det rör sig i detta fall om värden från en pappersmaskin. Dessa mätserier har förut analyserats (T. Bohlin) men en annorlunda modelluppbyggnad gör att resultaten är svåra att jämföra. Vi kommer nedan att kort beskriva de för oss väsentliga delarna av systemet. För en utförligare redogörelse om mätseriernas bakgrund hänvisas till referens 2 i litteraturförteckningen. (K-J Åström, 2)

I figuren nedan visas en enkel principskiss över de för oss väsentliga delarna av pappersmaskinens uppbyggnad. Använda in- och utsignaler har utmärkts.



Figur20. Principskiss över pappersmaskinen.

U1 (z^{-1} PSB) betecknar här ångtrycket, U2 (z^{-1} LDK) är koncentrationen medan Y1 (MSP) är fukthalten i det färdiga papperet och Y2 (WSP) massan likaså hos det färdiga papperet.

Tillgängliga data hade en serielängd av 484 mätvärden och samplingstiden var 0,01 timme.

Figurerna 21, 22, 23, och 24 visar de plottade mätserierna. Med utgångspunkt av dessa försökte vi uppskatta tidsfördröjningarna mellan de olika in- och utsignalerna. Ett preliminärt värde sattes till 1-2 samplingsenheters förskjutning¹⁾ mellan insignalen U1 och båda utsignalerna och 3 förskjutningar mellan insignalen U2 och de båda utsignalerna.

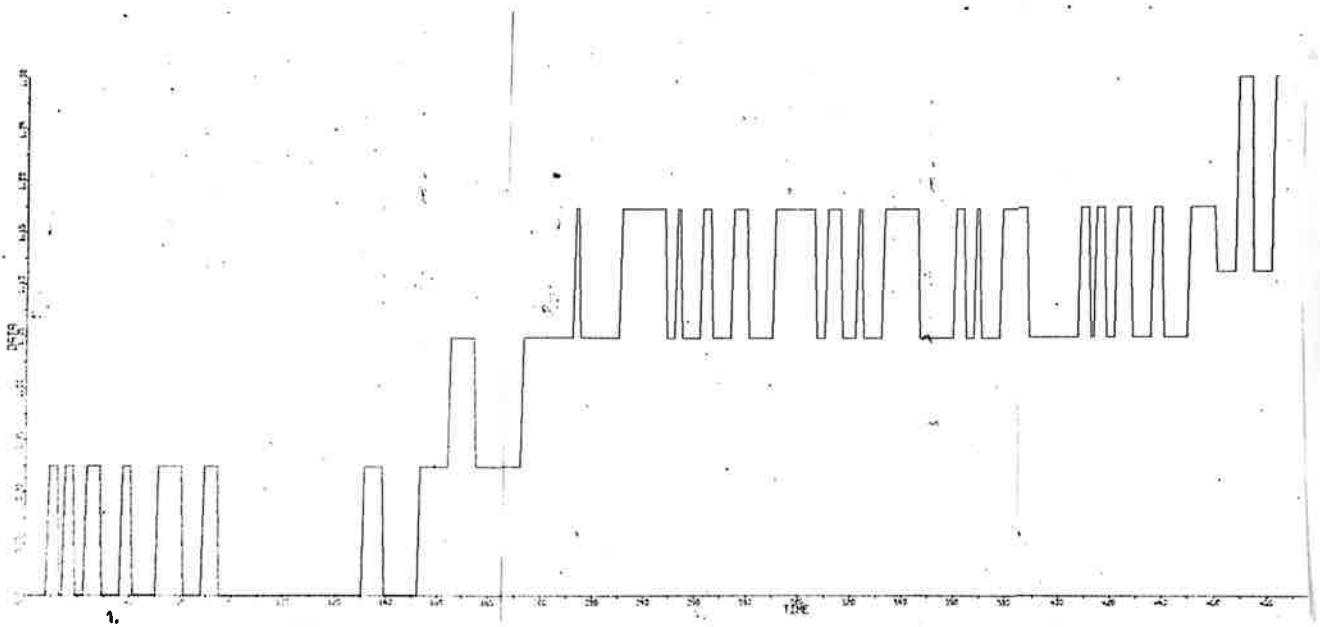
Av de plottade kurvornas utseende kunde man misstänka att drift förekom i systemet. En första test av förhållandet U1-Y1 gav också för handen att en gemensam faktor $1 - z^{-1}$ förekom i både täljare och nämnare. För att eliminera denna togs differenserna av respektive signaler. Alla kommande beräkningar är alltså utförda mellan de differentierade signalerna.

Förskjutningen U1-Y1 och U1-Y2 hade uppskattats till 1-2 samplingsintervall. Vid test av sambandet mellan U1 och Y1 med 1 respektive 2 förskjutningar visade det sig att 1 förskjutning gav den lägre förlustfunktionen. Vi antog då tillsviðare att de förut nämnda fördröjningarna mellan in- och utsignaler var 1 respektive 3 samplingsintervall.

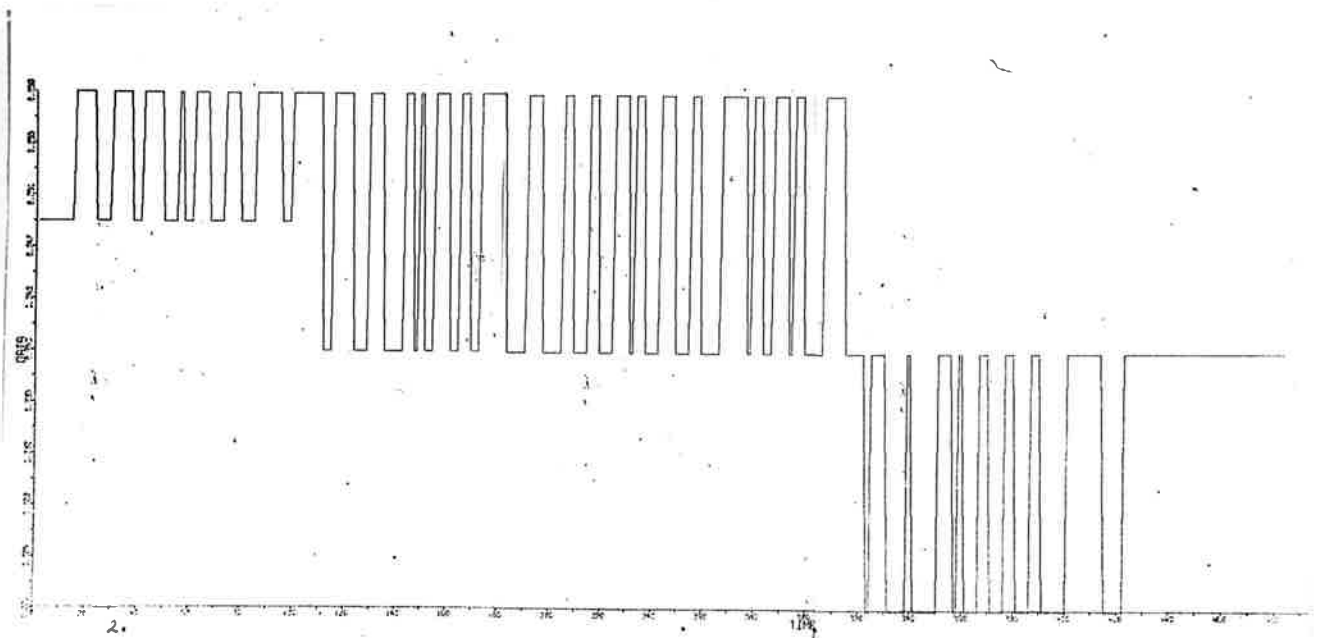
För att få en uppfattning om de olika överföringsfunktionernas ordningstal testades U1-Y1 med 1 förskjutning och U2-Y1 med 3 förskjutningar mellan in- och utsignal. För detta användes ett FORTRAN-program PAPER. (Se appendix 7!) Programmet i appendixet dock anpassat för två insignaler.) Dessa tester tydde på att 2:a ordningens modeller förelåg. Märk dock den osäkerhet som kan uppkomma vid ett sådant test beroende på den andra insignalens inverkan. (Se föregående avsnitt!)

Vi testade därpå systemet med 2 insignaler mot 1 utsignal enligt tidigare mönster. En modell kunde då uppsättas enligt figur nedan.

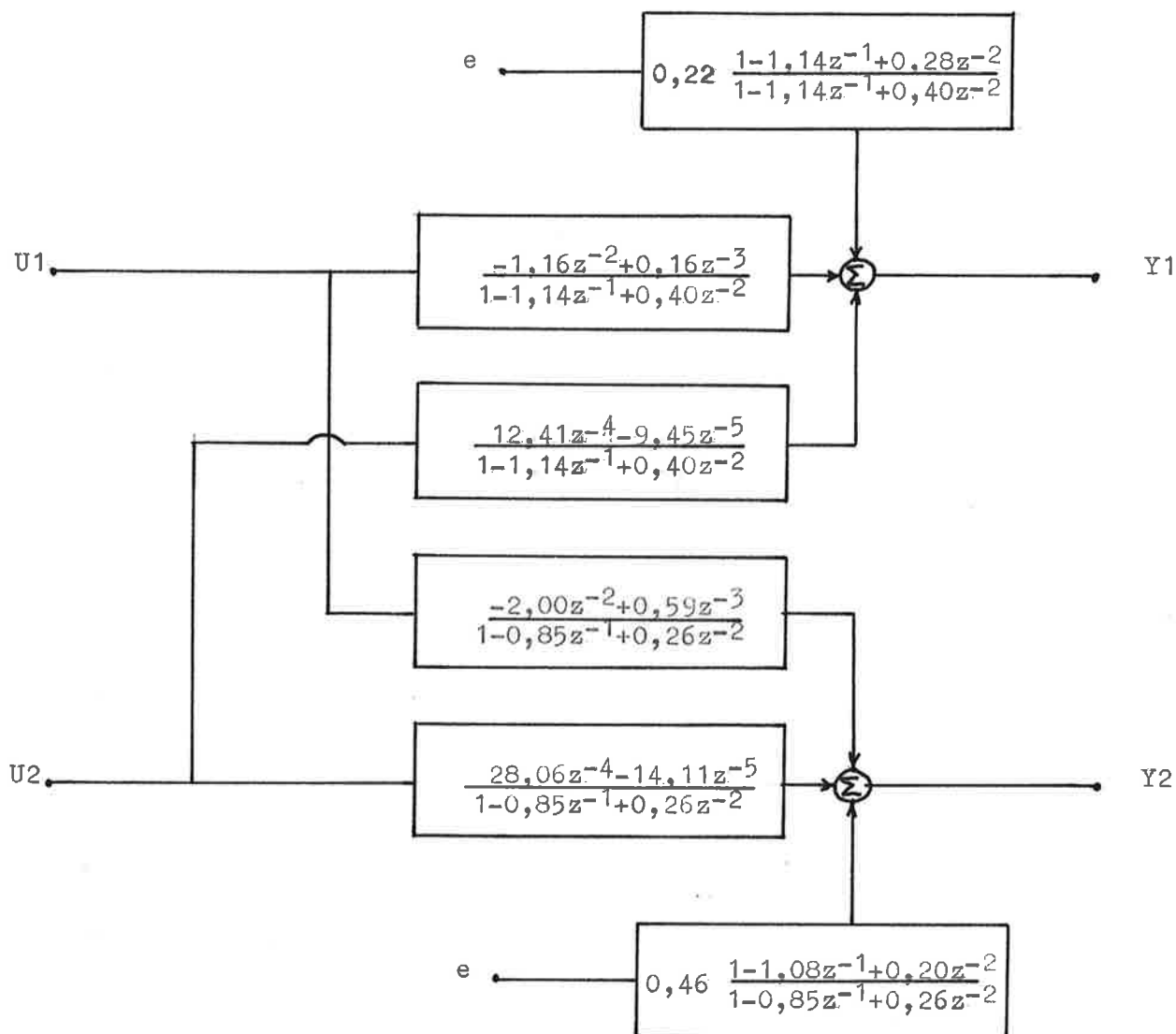
1) Jämför variablerna k_1 och k_2 i föregående avsnitts modell! Med t.ex. en samplingsenhets förskjutning menas i detta avsnitt $k = 2$. 1 förskjutning finns redan inbyggd i modellen. B_0 är alltså lika med noll.



Figur 21. U1 (ångtrycket).



Figur 22. U2 (koncentrationen).



Figur 25. Erhållen modell vid 1 respektive 3 förskjutningar mellan in- och utsignalerna.

Tabell 20.



$$A1 = -1,140 \pm 0,307$$

$$A2 = 0,400 \pm 0,144$$

$$B1' = -1,164 \pm 0,265$$

$$B2' = 0,160 \pm 0,795$$

$$B1'' = 12,407 \pm 1,891$$

$$B2'' = -9,450 \pm 5,556$$

$$C1 = -1,145 \pm 0,365$$

$$C2 = 0,282 \pm 0,281$$

$$\lambda = 0,216$$

$$V2 = 11,250$$



$$A1 = -0,850 \pm 0,256$$

$$A2 = 0,259 \pm 0,119$$

$$B1' = -2,003 \pm 0,485$$

$$B2' = 0,591 \pm 0,805$$

$$B1'' = 28,063 \pm 4,512$$

$$B2'' = -14,110 \pm 8,359$$

$$C1 = -1,085 \pm 0,263$$

$$C2 = 0,195 \pm 0,225$$

$$\lambda = 0,460$$

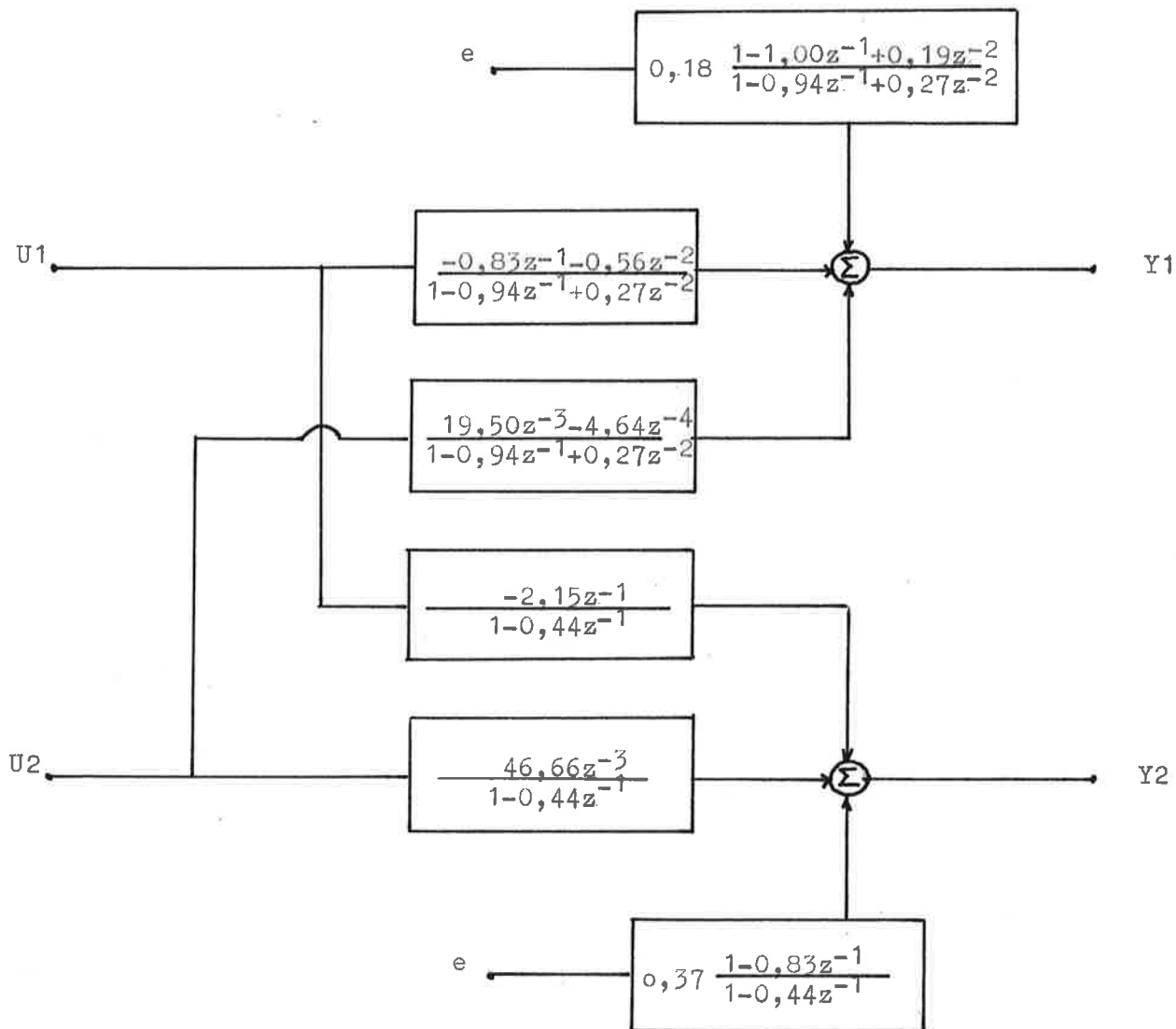
$$V2 = 51,113$$

Ordningstalet för överföringsfunktionerna mellan insignalerna U1 och U2 och utsignalen Y1 var något diffust. F-testets värde låg något över 5% nivån, 2,82 mot gränsvärdet 2,37. En långsam konvergens gav samtidigt misstankar om att rätt antal tidsförskjutningar inte förelåg.

U1-Y1 testades därför utan förskjutning mellan in- och utsignal. Det visade sig då att första ordningens modell gav högre förlustfunktion än motsvarande för en förskjutning. Andra ordningens modell gav däremot en lägre förlustfunktion utan förskjutning fortfarande jämfört med motsvarande modell med en förskjutning mellan in- och utsignal. Detta visar hur vanskligt det kan vara att avgöra antalet tidsförskjutningar i ett system. En tänkbar lösningsmetod, att testa antalet fördröjningar i ett system, vore nämligen att testa första ordningens förlustfunktion för ett antal olika tidsförskjutningar. Exemplet här visar att man då kan få ett felaktigt resultat. En närmare analys kring minimistället är alltså nödvändig.

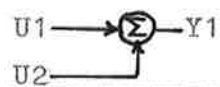
Insignalerna förskjöts nu istället 0 respektive 2 samplingsintervall relativt utsignalerna. Då identifiering genomfördes konvergerade modellerna snabbare och förlustfunktionerna erhöll betydligt lägre värden

F-test för U1-U2 mot Y1 gav $\xi_1 = 10,4$ och $\xi_2 = 1,8$. Gränsen för 5% nivån är 2,37 och ett andra ordningens system accepterades därför. För U1-U2 mot Y2 erhölls $\xi_1 = 2,0$ och en första ordningens modell accepterades på nivån 5%. Av figur och tabell nedan framgår de erhållna resultaten.



Figur 26. Erhållen modell vid 0 respektive 2 förskjutningar mellan in- och utsignalerna.

Tabell 21.



$$A1 = -0,945 \pm 0,178$$

$$A2 = 0,274 \pm 0,109$$

$$B1' = -0,834 \pm 0,186$$

$$B2' = -0,564 \pm 0,329$$

$$B1'' = 19,498 \pm 1,264$$

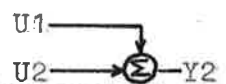
$$B2'' = -4,635 \pm 4,400$$

$$C1 = -0,997 \pm 0,203$$

$$C2 = 0,189 \pm 0,162$$

$$\lambda = 0,178$$

$$V2 = 7,636$$



$$A1 = -0,444 \pm 0,031$$

$$B1' = -2,153 \pm 0,287$$

$$B1'' = 4,667 \pm 2,406$$

$$C1 = -0,828 \pm 0,030$$

$$\lambda = 0,372$$

$$V1 = 33,549$$

V. Avslutning.

Detta examensarbete har inte gjort några anspråk att fullständigt belysa de problem som berörs. Snarare har det varit meningen att det skall ge en uppfattning om de svårigheter man kan stöta på. Dessutom torde det kunna ge uppslag om områden där det vore intressant att fortsätta mera ingående undersökningar.

I första delen har olika identifieringsmetoder behandlats. Här vore exempelvis trevligt att utreda, med vilket samplingsintervall man skall sampla ett givet kontinuerligt system, för att ehålla största möjliga noggrannhet i parametervärdena. Vidare hur uppskattningarna är beroende av insignalens karaktär, störningarnas storlek m.m. Dessa undersökningar kunde på ett givande sätt ge en jämförelse mellan maximumlikelihoodmetode och andra identifieringsmetoder.

Vid studium av reglerade system uppstod flera intressanta problem. Om man identifierar en reglerad process ställs man ofta inför problem av typen: Finns det ett entydigt minimum? Går det överhuvudtaget att uppskatta koeficienterna? I detta arbete har dessa frågeställningar berörts. Dock har flera inskränkningar fått göras. Bl.a. har i identiteten $K(z) \equiv 1$ antagits att ekvationerna är linjärt oberoende samt att polynomen i täljare och nämnare inte har gemensamma rötter. Ett närmare studium av den matris som bestämmer ekvationssystemet skulle kunna ge ett mer generellt resultat. Vidare visade det sig, när vi sökte uppskatta parametrarna i processen med maximumlikelihoodmetoden, att b-parametrarnas skattning blev allt sämre ju större tidsförskjutningen var i modellen. Däremot bestämdes a- och c-parametrarna relativt bra. En undersökning av möjligheterna att finna alla parametrar vore intressant.

I sista avsnittet behandlas system med flera in- och utsignaler. Ett speciellt problem är här att avgöra systemets ordningstal. I det identifieringsprogram som här använts beskrivs systemet av modellen:

$$A(z^{-1}) y(t) = \sum_{i=1}^n z^{-k_i} B_i(z^{-1}) u_i(t) + \lambda C(z^{-1}) e(t)$$

Högst θ insignaler. ($n = \theta$)

Som synes skattas alla överföringsfunktioner med samma nämnare. Många gånger vore det attraktivt att kunna testa de olika överföringsfunktionerna med inbördes olika modeller (olika ordningstal). Dvs. i identifieringsprogrammet beskriva systemet enligt modellen:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{z^{-k_i} B_i(z^{-1})}{A_i(z^{-1})} + \lambda \frac{C(z^{-1})}{A_0(z^{-1})} e(t)$$

Denna modell har vissa fördelar. För det första behöver man inte ta ställning till problemet om en rot är gemensam i täljare och nämnare. För det andra slipper man den ökning i osäkerhet hos parametervärden vid bortdivision av gemensamma rötter.

Referenser.

1. K-J Åström and T. Bohlin: "Numerical Identification of Linear Dynamic Systems from Normal Operating Records".
Proceedings of the IFAC Conference on Self- Adaptive Control Systems, Teddington (1965)
2. K-J Åström: "Computer Control of a Paper Machine - an Application of Linear Stochastic Control Theory".
IBM, Journal of research and development Vol.11 No 4 July 1967
3. K-J Åström: "Stokastiska system".
Föreläsningar vid LTH. TLTH/VBV 1968
4. I. Gustavsson: "Parametric Identification of time series"
Report 6863 April 16 1968 Lunds Institute of Technology,
Division of Automatic Control.
5. I. Gustavsson: "SUBROUTINE PRO" Koncept
6. Shinnars: "Techniques of System Engineering".
Mc Graw Hill.
7. K-J Åström: "Samplade system".
Föreläsningar vid LTH. TLTH/VBV 1968.
8. E.I. Jury: "Theory and Application on the z- Transform Method".
John Wiley & Sons , New Yourk (1964).

FTN5.4B

```

PROGRAM ADAM
  DIMENSION Y(1100),U(1100),E(1100),RUY(100),RUU(100),RYU(100),
  F RYY(100)
95 READ 90,NT
90 FORMAT(15)
  IF (NT-2)9,9,333
9 READ 100,A1,A2,B1,B2,C1,C2,ALAM
  IT=1
  DO 1 I=1,1100
    CALL RANSS(IT,U(I))
1 CALL RANSS(IT,E(I))
  Y(1)=Y(2)=0.0
  DO 2 I=3,1100
2 Y(I)=-A1*Y(I-1)-A2*Y(I-2)+B1*U(I-1)+B2*U(I-2)+ALAM*(E(I)+
1C1*E(I-1)+C2*E(I-2))
  DO 3 I=1,1000
  U(I)=U(I+100)
3 Y(I)=Y(I+100)
  S=T=0.0
  DO 4 I=1,1000
  T=T+Y(I)
4 S=S+U(I)
  T0=T/1000.0
  S0=S/1000.0
  DO 5 I=1,1000
  Y(I)=Y(I)-T0
5 U(I)=U(I)-S0
  DO 7 J=1,100
  R1=R2=R3=R4=0.0
  J=J-1
  J1=1000-J
  DO 6 I=1,J1
  R1=R1+U(I)*Y(I+J)
  R2=R2+U(I)*U(I+J)
  R3=R3+Y(I)*U(I+J)
6 R4=R4+Y(I)*Y(I+J)
  A=J
  J=J+1
  RUY(J)=R1/(1000.0-A)
  RUU(J)=R2/(1000.0-A)
  RYU(J)=R3/(1000.0-A)
7 RYY(J)=R4/(1000.0-A)
  PRINT 200
200 FORMAT(/5X*RUY*/)
  PRINT 101,(RUY(J),J=1,100)
  PRINT 201
201 FORMAT(/5X*RUU*/)
  PRINT 101,(RUU(J),J=1,100)
  PRINT 202
202 FORMAT(/5X*RYU*/)
  PRINT 101,(RYU(J),J=1,100)
  PRINT 203
203 FORMAT(/5X*RYY*/)
  PRINT 101,(RYY(J),J=1,100)
100 FORMAT(7F8.4)
101 FORMAT(5E16.8)

```

FTN5.4B

```
GO TO 95
333 CONTINUE
CALL EXIT
END
```

LOAD

BINARY DECK

RUN,5,1500, ,1

EXECUTION STARTED AT 1409 -12

FTN5.4B

10/07-68

```

PROGRAM IVAR
COMMON EE,V,Y,U(8),E(10),C(100),EC(100),V1(100),VCC(200),
1ECC(200),V2(60,60),DAT(5000)
DIMENSION YA(1100),UA(1100),EA(1100)
95 READ 50,NT
90 FORMAT(I5)
IF(NT_2) 69,69,70
69 READ 400,A1,A2,B1,B2,C1,C2,ALAM
100 FORMAT(7F8.4)
IT=1
DO 1 I=1,1100
CALL SANSS(IT,UA(I))
1 CALL SANSS(IT,EA(I))
YA(1)_YA(2)=0.0
DO 2 I=3,1100
2 YA(I)=-A1*YA(I-1)-A2*YA(I-2)+B1*UA(I-1)+B2*UA(I-2)+
1ALAM*(EA(I)+C1*EA(I-1)+C2*EA(I-2))
DO 3 I=1,1000
UA(I)_UA(I+100)
3 YA(I)_YA(I+100)
S=T=0.0
DO 4 I=1,1000
T=T+Y(I)
4 S=S+U(I)
TU=T/1000.0
SU=S/1000.0
DO 5 I=1,1000
YA(I)_YA(I)-TU
5 UA(I)_UA(I)-SU
NP=1000
DO 10 I=1,NP
I1=2*I-1
I2=2*I
DAT(I1)=UA(I)
10 DAT(I2)=YA(I)
NI=1
READ 14,NOA,NOB,IA,IB,IC,IE,IF,IG,IH,IJ,IK,IL,IM,AC1,AC2,
1AC3,IPRINT1,IPRINT2,IPRINT3,IPRINT4
114 FORMAT(14I2,3E7.0,4I2)
DO 51 I=NOA,NOB
CALL BRO(I,NI,NP,IA,IB,IC,AC1,AC2,IPRINT1)
CALL BRO(I,NI,NP,IE,IF,AC1,AC2,IPRINT2)
CALL BRO(I,NI,NP,IG,IH,IJ,AC1,AC2,IPRINT3)
51 CALL BRO(I,NI,NP,IK,IL,IM,AC3,AC2,IPRINT4)
GO TO 95
70 CONTINUE
CALL EXIT
END

```

```

SKIP,15,4
LOAD,15,NR
LOAD

```

```

***BINARY DECK***
RUN,5,1500, 1

```

EXECUTION STARTED .T 2156 -38

FTN5.4B

20/09-68

```

PROGRAM REGULA3
COMMON EE,V,Y,U(8),E(10),C(100),EC(100),V1(100),VCC(200),
1ECC(200),V2(60,60),DAT(5000)
DIMENSION YA(1100),UA(1100),EA(1100)
95 READ 90,NT
90 FORMAT(I5)
   IF(NT-2) 69,69,70
69 READ 100,A1,A2,B1,B2,C1,C2,ALAM,D0,D1,F1
   READ 101,F2,F3,F4,K1
100 FORMAT(10F8.4)
101 FORMAT(3F8.4,I2)
   IT=1
   DO1 I=1,600
   1 CALL RANSS(IT,EA(I))
   DO 2 I=1,6
   2 YA(I)=UA(I)=0.0
   N1=K1+3
   DO 11 I=N1,600
   YA(I)=-A1*YA(I-1)-A2*YA(I-2)+B1*UA(I-K1-1)+B2*UA(I-K1-2)+ALAM*
1(EA(I)+C1*EA(I-1)+C2*EA(I-2))
11 UA(I)=-F1*UA(I-1)-F2*UA(I-2)-F3*UA(I-3)-F4*UA(I-4)+D0*YA(I)+
1D1*YA(I-1)
   DO 3 I=1,500
   UA(I)=UA(I+100)
   3 YA(I)=YA(I+100)
   S=T=0.0
   DO 4 I=1,500
   T=T+YA(I)
   4 S=S+UA(I)
   SO=S/500.0
   TO=T/500.0
   DO 5 I=1,500
   YA(I)=YA(I)-TO
   5 UA(I)=UA(I)-SO
   NP=498
   DO 10 I=1,NP
   YA(I)=YA(I+2)
   I1=2*I-1
   I2=2*I
   DAT(I1)=UA(I)
10 DAT(I2)=YA(I)
   NI=1
   READ 114,NOA,NOB,IA,IB,IC,ID,IE,IF,IG,IH,IJ,IK,IL,IM,AC1,AC2,
1AC3,IPRINT1,IPRINT2,IPRINT3,IPRINT4
114 FORMAT(14I2,3E7.0,4I2)
   DO 51 I=NOA,NOB
   CALL PRO(I,NI,NP,IA,IB,IC,AC1,AC2,IPRINT1)
   CALL PRO(I,NI,NP,ID,IE,IF,AC1,AC2,IPRINT2)
   CALL PRO(I,NI,NP,IG,IH,IJ,AC1,AC2,IPRINT3)
51 CALL PRO(I,NI,NP,IK,IL,IM,AC3,AC2,IPRINT4)
   GO TO 95
70 CONTINUE
   CALL EXIT
END

```

```

SKIP,15,4
LOAD,15,NR
LOAD

```

```

***BINARY DECK***

```

```

RUN,5,1500, ,1

```

FTN5.4B

06/12-08

```

PROGRAM NIVA
COMMON EE,V,Y,U(8),E(10),C(100),EC(100),V1(100),VCC(200),
1ECC(200),V2(60,60),DAT(5000)
DIMENSION YA(1100),UA(1100),EA(1100),V5(50,50)
95 READ 90,NT
90 FORMAT(I5)
   IF(NT-2) 69,69,70
69 READ 100,A1,A2,B1,B2,C1,C2,ALAM,D0,D1,F1
   READ 101,F2,F3,F4,K1
100 FORMAT(10F8.4)
101 FORMAT(3F8.4,I2)
   IT=1
   DO1 I=1,600
   1 CALL RANSS(IT,EA(I))
   DO 2 I=1,6
   2 YA(I)=UA(I)=0.0
   N1=K1+3
   DO 11 I=N1,600
   YA(I)=-A1*YA(I-1)-A2*YA(I-2)+B1*UA(I-K1-1)+B2*UA(I-K1-2)+ALAM*
1(EA(I)+C1*EA(I-1)+C2*EA(I-2))
11 UA(I)=-F1*UA(I-1)-F2*UA(I-2)-F3*UA(I-3)-F4*UA(I-4)+D0*YA(I)+
1D1*YA(I-1)
   DO 3 I=1,500
   UA(I)=UA(I+100)
   3 YA(I)=YA(I+100)
   S=T=0.0
   DO 4 I=1,500
   T=T+YA(I)
   4 S=S+UA(I)
   SO=S/500.0
   TO=T/500.0
   DO 5 I=1,500
   YA(I)=YA(I)-TO
   5 UA(I)=UA(I)-SO
   NP=498
   DO 10 I=1,NP
   YA(I)=YA(I+2)
   I1=2*I-1
   I2=2*I
   DAT(I1)=UA(I)
10 DAT(I2)=YA(I)
   NI=1
   READ 114,NOA,NOB,IA,IB,IC,ID,IE,IF,IG,IH,IJ,IK,IL,IM,AC1,AC2,
1AC3,IPRINT1,IPRINT2,IPRINT3,IPRINT4
114 FORMAT(14I2,3E7.0,4I2)
   I=2
   DO 33 J=1,21
   DO 34 K=1,41
34 V5(K,J)=60.0
33 CONTINUE
   DO 51 L=1,19
   R1=L
   R2=-1.0+R1/10.0
   R3=-0.1*R1
   M=2*L-1
   DO 52 K=1,M

```

FTN5.4B

06/12-68

```
R4=K
C(6)=R2
C(5)=R3+R4/10.0
R5=C(5)
CALL PRO(I,NI,NP,IA,IB,IC,AC1,AC2,IPRINT1)
  J=10.0*R5+21.0
  N=10.0*R2+11.0
52 V5(J,N)=V5(J,N)+V-300.0
51 CONTINUE
  DO 93 I=1,4
93 CALL SKIPFILE(18)
  DO 71 J=1,41
  DO 72 N=1,21
72 WRITE TAPE 18,V5(J,N)
71 CONTINUE
  PRINT 107,((V5(J,N),J=1,41),N=1,21)
107 FORMAT(10F7.3)
  GO TO 95
70 CONTINUE
  CALL EXIT
  END
```

```
SKIP,15,11
LOAD,15,NR
LOAD
***BINARY DECK***
RUN,30,5000, ,1
```

EXECUTION STARTED AT 1931 -54

```
PROGRAM KONTUR
DIMENSION V5(50,50),V6(30),A(400)
95 READ 90,NT
90 FORMAT(15)
69 IF(NT-2) 69,69,70
69 DO 34 J=1,41
DO 34 K=1,41
34 V5(K,J)=90.0
34 READ 110,(A(I),I=1,361)
MA=0
DO 36 J=2,20
N=19+J
L=23-J
DO 36 K=L,M
HA=MA+1
36 V5(K,J)=A(MA)
110 READ 111,(V6(J),J=1,30)
111 FORMAT(13F6.2)
ARCONPLT(V5,50,50,41,41,30,1,V6,8,8,30,10,0,0,0,0,0,0,0
1,0,0,0)
GO TO 95
70 CONTINUE
CALL EXIT
END
LOAD
RUN,3,1000, 1
EXECUTION STARTED AT 1419 -16
```

FTN5.4B

07/08-68

```

PROGRAM MULTI
COMMON EE,V,Y,U(8),E(10),C(100),EC(100),V1(100),VCC(200),
1ECC(200),V2(60,60),DAT(5000)
DIMENSION U1(500),U2(500),Y1(500)
95 READ 90,NT
90 FORMAT(I5)
   IF(NT-2) 69,69,70
69 NP=500
   DO 80 I=1,4
80 CALL SKIPFILE(17)
   READ TAPE 17,(U1(I),U2(I),Y1(I),I=1,NP)
   S1=S2=S3=0.0
   DO 10 I=1,NP
     S1=S1+U1(I)
     S2=S2+U2(I)
10 S3=S3+Y1(I)
   A0=NP
   T1=S1/A0
   T2=S2/A0
   T3=S3/A0
   DO 11 I=1,NP
     U1(I)=U1(I)-T1
     U2(I)=U2(I)-T2
11 Y1(I)=Y1(I)-T3
   NI=2
   DO 12 I=1,NP
     I1=3*I-2
     I2=3*I-1
     I3=3*I
     DAT(I1)=U1(I)
     DAT(I2)=U2(I)
12 DAT(I3)=Y1(I)
   READ 114,NOA,NOB,IA,IB,IC,ID,IE,IF,IG,IH,IJ,IK,IL,IM,AC1,AC2,
1AC3,IPRINT1,IPRINT2,IPRINT3,IPRINT4
114 FORMAT(14I2,3E7.0,4I2)
   DO 51 I=NOA,NOB
     IF(I.EQ.3)IE=10
     CALL PRO(I,NI,NP,IA,IB,IC,AC1,AC2,IPRINT1)
     CALL PRO(I,NI,NP,ID,IE,IF,AC1,AC2,IPRINT2)
     CALL PRO(I,NI,NP,IG,IH,IJ,AC1,AC2,IPRINT3)
51 CALL PRO(I,NI,NP,IK,IL,IM,AC3,AC2,IPRINT4)
   GO TO 95
70 CONTINUE
   CALL EXIT
   END

SKIP,15,4
LOAD,15,NR
LOAD
RUN,5,1500, ,1

```

EXECUTION STARTED AT 1347 -51

FTN5.4B

18/11-68

```

PROGRAM PAPER
COMMON EE,V,Y,U(8),E(10),C(100),EC(100),V1(100),VCC(200),
1ECC(200),V2(60,60),DAT(5000)
DIMENSION U1(500),U2(500),Y1(500),Y2(500),Y3(500)
95 READ 90,NT
90 FORMAT(I5)
IF(NT-2) 69,69,70
69 NP=484
DO 80 I=1,3
80 CALL SKIPFILE(18)
DO 85 I=1,NP
85 READ TAPE 18,U1(I),U2(I),Y1(I),Y2(I),Y3(I)
S1=S2=S3=0.0
DO 10 I=1,NP
S1=S1+U1(I)
S2=S2+U2(I)
10 S3=S3+Y2(I)
A0=NP
T1=S1/A0
T2=S2/A0
T3=S3/A0
DO 11 I=1,NP
U1(I)=U1(I)-T1
U2(I)=U2(I)-T2
11 Y2(I)=Y2(I)-T3
DO 6 I=1,483
Y2(I)=Y2(I+1)-Y2(I)
U1(I)=U1(I+1)-U1(I)
6 U2(I)=U2(I+1)-U2(I)
NI=2
DO 12 I=3,483
I1=3*I-2
I2=3*I-1
I3=3*I
DAT(I1)=U1(I)
DAT(I2)=U2(I-2)
12 DAT(I3)=Y2(I)
DO 17 I=1,1443
17 DAT(I)=DAT(I+6)
READ 114,NOA,NOB,IA,IB,IC,ID,IE,IF,IG,IH,IJ,IK,IL,IM,AC1,AC2,
1AC3,IPRINT1,IPRINT2,IPRINT3,IPRINT4
114 FORMAT(14I2,3E7.0,4I2)
DO 51 I=NOA,NOB
CALL PRO(I,NI,NP,IA,IB,IC,AC1,AC2,IPRINT1)
CALL PRO(I,NI,NP,ID,IE,IF,AC1,AC2,IPRINT2)
CALL PRO(I,NI,NP,IG,IH,IJ,AC1,AC2,IPRINT3)
51 CALL PRO(I,NI,NP,IK,IL,IM,AC3,AC2,IPRINT4)
GO TO 95
70 CONTINUE
CALL EXIT
END

SKIP,15,4
LOAD,15,NR
LOAD
RUN,30,3000, ,1

```

EXECUTION STARTED AT 2041 -21