

TFRT-5051

ANALYS AV OLINJÄR REGULATOR FÖR  
SERVOSYSTEM MED MÄTTNING

LASSE MÅNSSON

Rapport RE - 51 maj 1969

TILLHÖR REFERENSBIBLIOTEKET  
UTLÄNAS EJ

Tillståndsberoende reglering av enkel-  
och dubbelintegrator med begränsning i  
insignalen.

State dependent multi-mode control for  
single and double integrator with satu-  
ration in control variable.

Lasse Månsson

ANSV. HANDELAGG: K.J. ÅSTRÖM

## INNEHÅLLSFÖRTECKNING

### I. INLEDNING

### II. PROBLEMSÄLLNING

### III. ENKELINTEGRATORN

1. Lineär kompensering
2. Analys av kompenserade systemet med mättning
3. Några regulatoralternativ
4. Analys av regulator I
5. Analys av regulator II
6. Jämförelse mellan olika regulatoralternativ

### IV. DUBBELINTEGRATORN

1. Lineär kompensering
2. Analys av kompenserade systemet med mättning
3. Några regulatoralternativ
4. Analys av regulator I
5. Analys av regulator II
6. Analys av regulator III
7. Jämförelse mellan olika regulatoralternativ

### APPENDIX:

### I. ANALOGIMASKINKOPPLINGAR OCH BERÄKNINGAR FÖR SIMULERINGARNA

### II. REFERENSER

## Sammanfattning.

Denna rapport beskriver en undersökning av system, vilka matematiskt kan beskrivas som enkel- eller dubbelintegratorer med begränsning i insignalen. Dessutom beskrivs försök att med regulatorer, som är styckvis lineära och tillståndsberoende, reglera sådana system. Vid konstruktion av regulatorer har hänsyn tagits till, i första hand: de olika lösningarnas stabilitet, i andra hand: stegsvarens utseende och systemets förmåga att eliminera stegstörning med amplitud mindre än begränsningsnivån och i tredje hand: systemets förmåga att följa ramp med olika lutningar. Förmågan att eliminera pulsstörningar ( med begränsad tidsintegral), är nära sammanknuten med stabilitetskravet. Dessa krav har lett till regulatorer av multimode-type, som för stora signalnivåer kan få systemen att bete sig, som om de vore försedda med optimal relästyrning. För små signalnivåer får de systemen att bete sig som om de vore konventionellt PI-reglerade. Dessa förändringar realiseras med enkla slutningar och brytningar i regulatorn.

### Summary .

In this paper an examination of dynamic systems, which mathematically are single or double integrators with saturation in the control variable, is described. An attempt to control these systems with regulators which are discontinuously linear is also described.

These regulators are constructed primarily to make the solutions of the system stable for as many kinds of in-signals as possible, secondarily to make good step outputs and eliminate step disturbances with amplitude below the saturation level and to make the system follow ramps. The ability to eliminate pulse disturbances with limited time integral, is bounded to the stability of the solutions of the system. These demands lead to multi-mode regulators, which make the systems act like they were, optimally relay-controlled for high signal levels and ordinarily PI-regulated for small signal levels. This is made with simple switchings.

## I. INLEDNING

Syftet med denna undersökning är att analysera och att, med så enkla medel som möjligt, reglera system med integratorer drivna av en begränsad insignal.

I kapitel II redogöres närmare för de nackdelar som finns hos system med integratorer med begränsad insignal och specificeras de krav, som ställs på de färdig-kompenserade systemen. I kapitel III analyseras enkelintegratorn och några möjligheter att, med i huvudsak PI-regulator, kompensera denna. Dessa regulatorer kommer att vara av "dual-mode" -typ, d v s regulatorn tillåts ändra karaktär när systemet passerar vissa gränser i tillståndsrummet. Strävandena har då varit att så länge som möjligt följa den optimala trajektorian, "Bang-Bang"-styrning, för att sedan, när felen blivit små, uppföra sig som ett vanligt lineärt PI-reglerat system med dess välkända egenskaper. I kapitel IV göres motsvarande analys av dubbelintegratorn och regulatorer till denna.

Rapportens rubrik, "Bang-Pip", kommer från önskan att utnyttja den optimala styrningen för stora signaler och PI eller P för att eliminera små stationära fel.

## II. PROBLEMSTÄLLNING

Utgångspunkt är en enkel- eller dubbelintegrator med begränsad insignal (mättning). Denna skall kompenseras, så att vi får ett, i så många avseende som möjligt, "bra system".

Krav på färdigkomparerade systemet:

1. Stegsvaret skall vara nära det optimala (optimala = dead-beat = Bang-bang)
2. Systemets förmåga att eliminera stegstörningar i det lineära området, skall vara goda.
3. Systemet skall kunna eliminera pulsstörning,  $v(t)$ , med begränsad tidsintegral. Detta innebär att systemet skall vara asymptotiskt stabilt för alla val av begränsade begynnelsestillstånd.
4. Systemet skall utan stationärt fel, kunna följa en ramp i det lineära området.

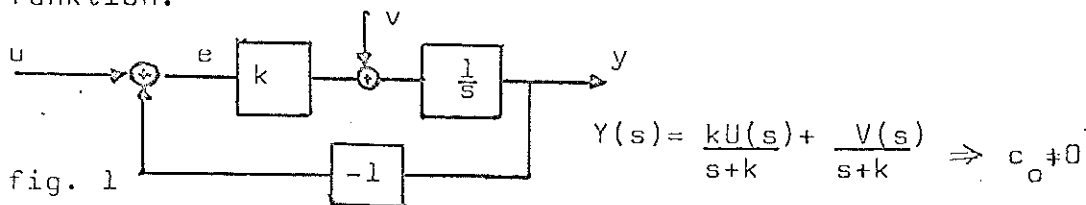
Om systemet kompenseras efter krav 2 och 4 (lineärt) i det lineära området, kommer det, för stora signaler, som mättar systemet, att ge stegsvar med våldsamma överslängar. Om man i stället t.ex. för enkelintegratorn försöker kompensera med utgångspunkt från krav 1, leder detta till en enbart proportionell regulator. Med en sådan kan emellertid ej krav 2 och 4 uppfyllas. Av detta kan man dra slutsatsen, att en regulator, som arbetade proportionellt i det olineära området och proportionellt och integrerande i det lineära skulle lösa våra problem. Krav 3 återstår. Dessa problem kommer emellertid att behandlas i kapitel III och IV. Vi har alltså ett problem, som påminner om adaptiv reglering (styrlagen ändrar karaktär med systemet). Skillnader kommer dock att framstå i analysen.

### III. ENKELINTEGRATORN

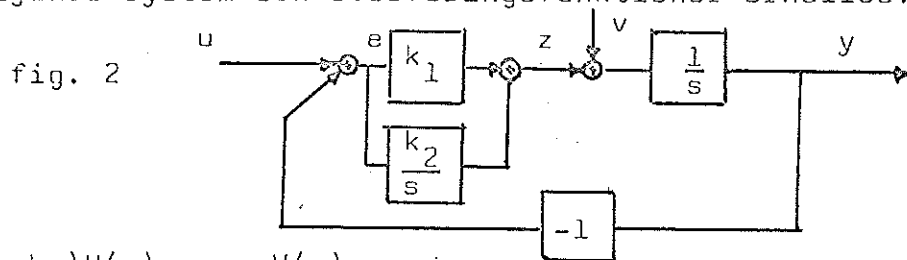
I fortsättningen kommer följande förkortningar att användas: Proportionell = P  
 Integrerande = I  
 Deriverande = D och sammansättningar av dessa.

#### III.1. Lineär kompensering av enkelintegratorn

P-reglering av  $\frac{1}{s}$  ger följande system och överföringsfunktion.



Detta system kan aldrig tillfredställande uppfylla våra villkor. Med PI-reglering kan emellertid systemet fås att tillfredsställa de krav, som vi ställer i det lineära området. Följande system och överföringsfunktioner erhålles:



$$Y(s) = \frac{(k_1 s + k_2)U(s)}{s^2 + k_1 s + k_2} + \frac{sV(s)}{s^2 + k_1 s + k_2} \quad (1)$$

$$E(s) = \frac{s^2 U(s)}{s^2 + k_1 s + k_2} - \frac{s V(s)}{s^2 + k_1 s + k_2} \quad (2)$$

$$Z(s) = \frac{s(k_1 s + k_2)U(s)}{s^2 + k_1 s + k_2} - \frac{(k_1 s + k_2)V(s)}{s^2 + k_1 s + k_2} \quad (3)$$

Detta ger felkoefficienterna:  $e_0 = e_1 = 0$ .  $e_2 = \frac{2}{k_2}$

och för styvhetskoefficienterna:  $c_0 = 0$ .  $c_1 = -\frac{1}{k_2}$

Systemet följer alltså steg och ramp och eliminerar stegstörning. För att kunna utnyttja standarddiagram omformas överföringsfunktionen.

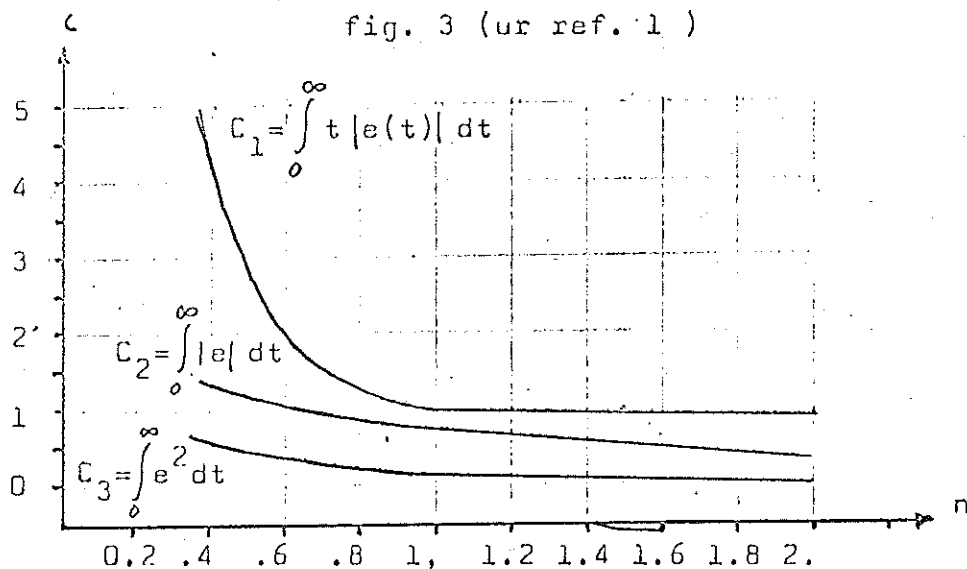


$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(k_1 s + k_2)}{s^2 + k_1 s + k_2} = G(s)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{s'}{w_0} &= s \\ k_2 &= w_0^2 \\ k_1 &= 2n w_0 \end{aligned} \right\} \text{ger:}$$

$G(s) = \frac{2ns+1}{s^2+2ns+1}$  d.v.s. vi har bytt konstanter och normerat frekvensen.

Detta system har, för stegsvar, följande värden, på olika kriterier, som funktion av n.



Av detta diagram följer, att oavsett vilket kriterium vi väljer, har vi inte mycket att vinna på att göra n större än 1.  $C_1$  eller ITAE kriteriet, som det kallas, ger emellertid avsevärd försämring då n går under värdet 1.

Fixera  $n \geq 1$ .

Stegstörning:  $V(s) = \frac{1}{s}$  ger:  $E(s) = \frac{-s V(s)}{s^2 + 2ns + 1} = \frac{-1}{s^2 + 2ns + 1}$

$$\text{ger: } e(t) = \begin{cases} -te^{-t} & n=1 \\ \frac{-1}{\sqrt{n^2-1}} e^{-nt} \sinh(\sqrt{n^2-1} t) & n \text{ större än } 1. \end{cases} \quad (4)$$

$$C_1 = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt = \begin{cases} 2 & \text{för } n=1 \\ 2n & \text{ } n \text{ större än } 1 \end{cases}$$

$$C_3 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} E(s)E(-s) ds = \frac{1}{2n \cdot 2} = \frac{1}{4n}$$

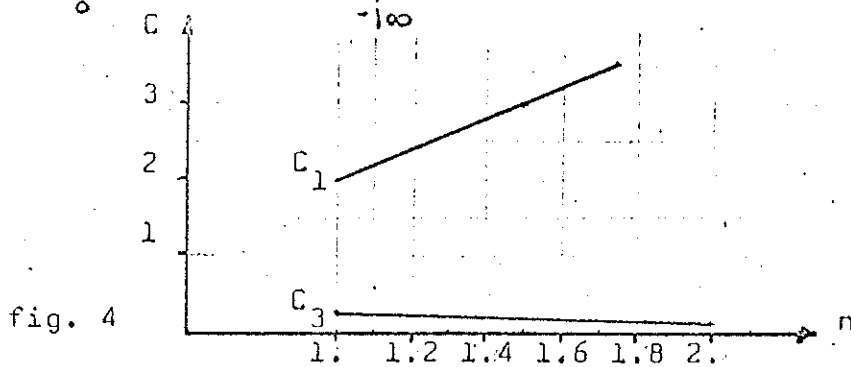


fig. 4

Välj n=1 ( Vi dimensionerar efter  $C_1$ ; stegsvar ger  $n \geq 1$  stegstörning ger  $n=1$ . Vi får försämrad steg-eliminering för ökande n )

Systemet skulle kunna dimensionerats efter ett kriterium avföljande typ:

$$\min_{k_1, k_2} (C), \quad C = aC_1, \text{stegsignal} + bC_1, \text{stegstörning} + cC_3^2, \text{brusstörn.}$$

Detta är emellertid ej undersökningens syfte, varför, helt godtyckligt, ett annat förfarande har tillämpats.

Systemets onormerade överföringsfunktion blir:

$$G(s) = \frac{2ws + w^2}{s^2 + 2ws + w^2}, \quad U(s) = \frac{1}{s} \quad \text{ger:}$$

$$y(t) = w e^{-wt} (2 - wt) \quad \text{och} \quad \dot{y}(t) = w^2 e^{-wt} (wt - 3)$$

som ger överslängens maximum vid  $t = \frac{3}{w}$

$w=2$  medför  $T_{\max} = 1,5$ , vilket innebär att vi slipper

tidsskala vid simulering på analogmaskin.

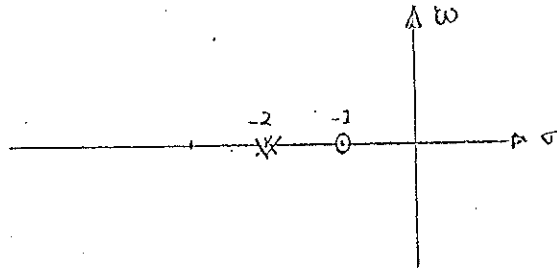
Det lineära, kompenserade systemet får alltså överföringsfunktionen:

$$G(s) = \frac{4(s+1)}{(s+2)^2} \quad (5)$$

Enligt sidan 5 överst får vi  $k_1 = k_2 = 4$

Pol-nollställeskonfiguration:

fig. 5



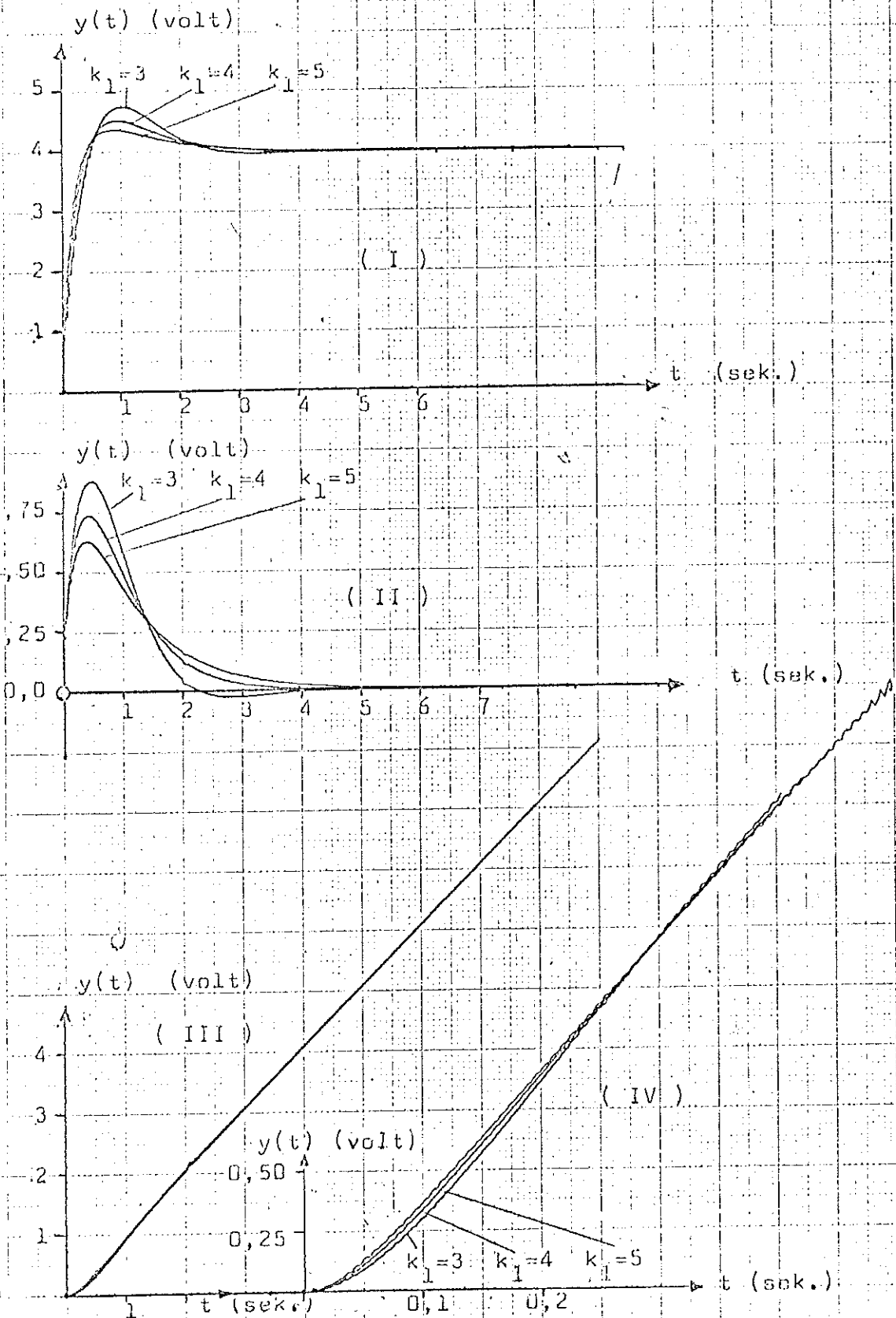
figur 6 visar systemets svar på stegsignal, ramp samt stegstörning för  $k_2 = 4$  och  $k_1 = 3, 4, 5$ . d.v.s varierande n.

figur 7 är systemets fasdiagram i  $x_1$  och  $x_2$  samt e och  $\dot{e}$  för  $k_1 = k_2 = 4$

Av fasdiagrammen framgår, att vi för  $k_1 = k_2 = 4$ , får en stabil entangentnod.

Figur 6.

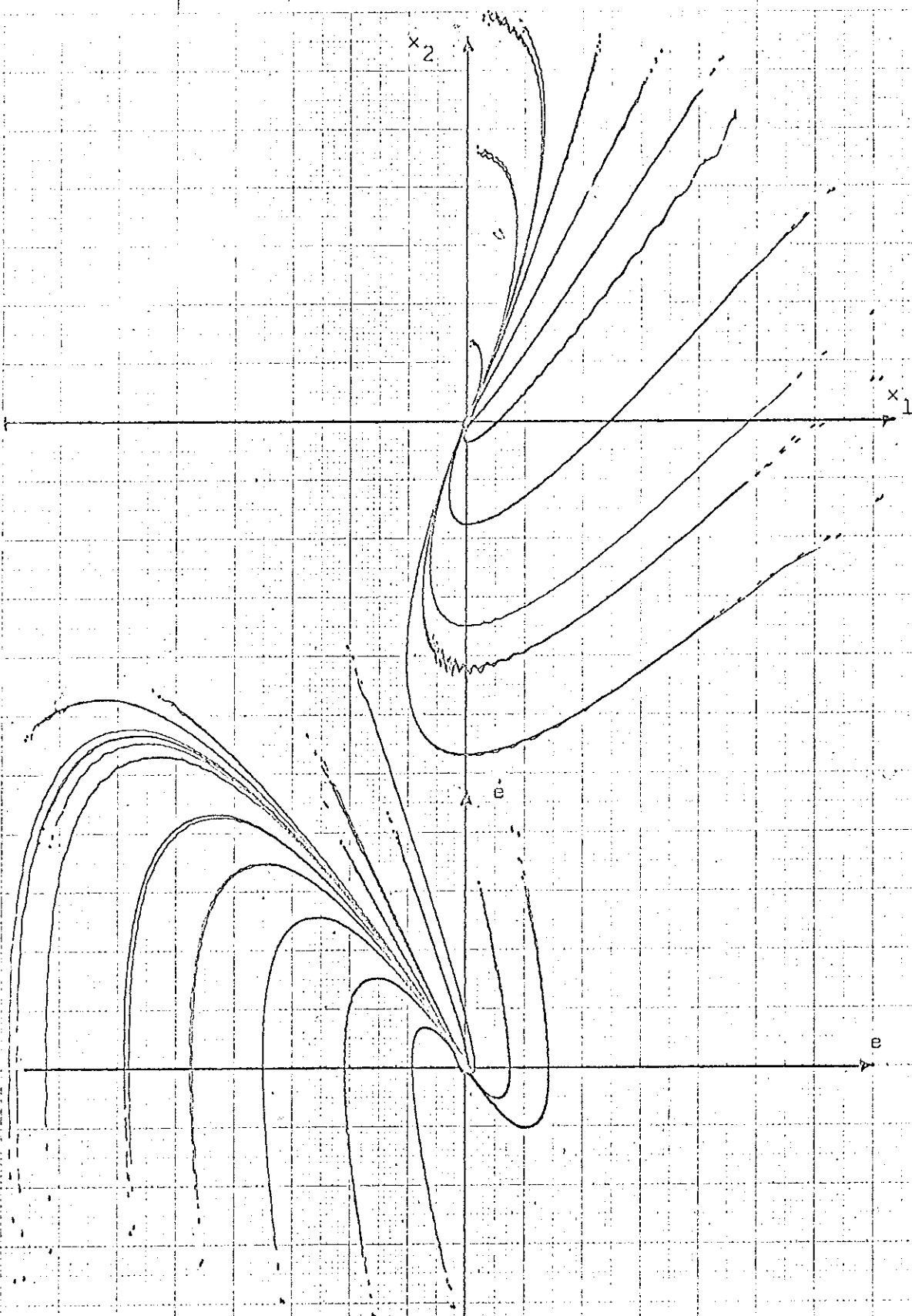
Utsignal för  $u(t)=4$  volt ( I )  
 $v(t)=4$  volt ( II ) och  $u(t)=t$  volt  
( III ) och ( IV )



Figur 7.

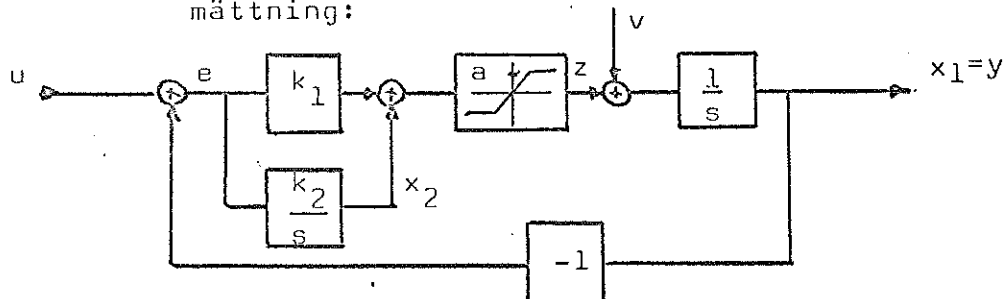
Fasporträtt.

0,5 volt/cm i båda figurerna.



### III.2. Analys av det kompenenserade systemet med mättning

figur 8. Blockschema över kompenenserade systemet med mättning:



$a=2$ , har valts för att ge utsignalen, vid mättat system, en sådan stighastighet att vi slipper skala vid simulering.

Systemekvationer:

Mättningen betecknas i överföringsfunktionerna med den variabla förstärkningen:  $K$ .  $K = \frac{2}{|z|}$  (6)

$$Y(s) = \frac{4K(s+1)U(s)}{s^2 + 4K(s+1)} + \frac{s V(s)}{s^2 + 4K(s+1)} \quad (7)$$

$$E(s) = \frac{s^2 U(s)}{s^2 + 4K(s+1)} - \frac{s V(s)}{s^2 + 4K(s+1)} \quad (8)$$

$$Z(s) = \frac{4K(s+1)U(s)s}{s^2 + 4K(s+1)} - \frac{4K(s+1)V(s)}{s^2 + 4K(s+1)} \quad (9)$$

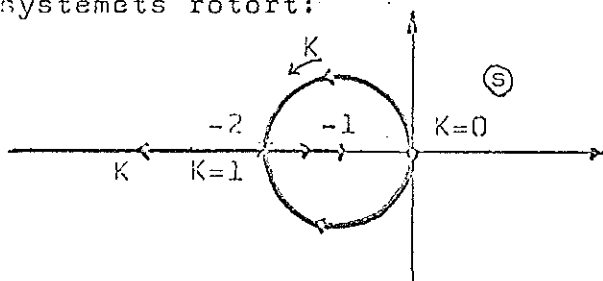
tillståndsekvationer:

$$\begin{cases} x_1 = f(z) + v \\ x_2 = 4(u - x_1) \\ z = x_2 + 4(u - x_1) \\ y = x_1 \end{cases} \quad f(z) = \begin{cases} -2 & \text{för } z < -2 \\ z & |z| < 2 \\ 2 & z > 2 \end{cases} \quad (10)$$

Systemets stabilitet:

Karakteristiska ekvationen blir:  $s^2 + 4K(s+1) = 0$

fig. 9, systemets rotort:



På rotorten syns, att systemet är stabilt för alla positiva  $K$ . För stora  $u$ , blir emellertid  $z$  stort och därigenom  $K$  litet. Det innebär att systemet blir starkt oscillativt för stora  $u$ . Denna "lineära" betraktelse stämmer ej om  $v$  är större än  $a (=2)$  ( $v$  förutsätts liksom  $u$  att vara steg då ej annat speciellt påpekas), ty  $x_1 = \int_0^t (v-2) dt$  d.v.s. en ramp, om  $|v(t)| > 2$ .

Systemet kan fås att följa stora steg bättre (utan oscillationer) genom ändring av  $k_1$  och  $k_2$ . En förbättring av stegsvaret på detta sätt kommer att medföra en försämring av stegstörningselimineringen.

Figur 10 visar  $y$  för olika  $u$  och  $v$  ( $k_1 = k_2 = 4$ )

Figur 11 visar  $y$  för  $u=8$  och  $v=1,5$ . Olika  $k_1$  och  $k_2$ .

Systemets lineära område i fasplanet bestäms av:

$$|z| \leq 2, \quad z = x_2 + 4(u - x_1) = x_2 + 4e, \quad e = u - y$$

För att bestämma de maximala signaler för vilka systemet fortfarande är lineärt, utnyttjar vi istället  $\frac{Z(s)}{U(s)}$ .

$\frac{Z(s)}{V(s)}$  Vi ser på  $z(t)$  för  $u(t) = A$ ,  $u(t) = Bt$  och

$v(t) = C$ .

$$u = A \Rightarrow U = \frac{A}{s} \Rightarrow Z(s) = \frac{4A(s+1)}{s^2 + 4(s+1)} = \frac{4A(s+1)}{(s+2)^2}$$

$$u = Bt \Rightarrow U = \frac{B}{s^2} \Rightarrow Z(s) = \frac{4B(s+1)}{s(s+2)^2}$$

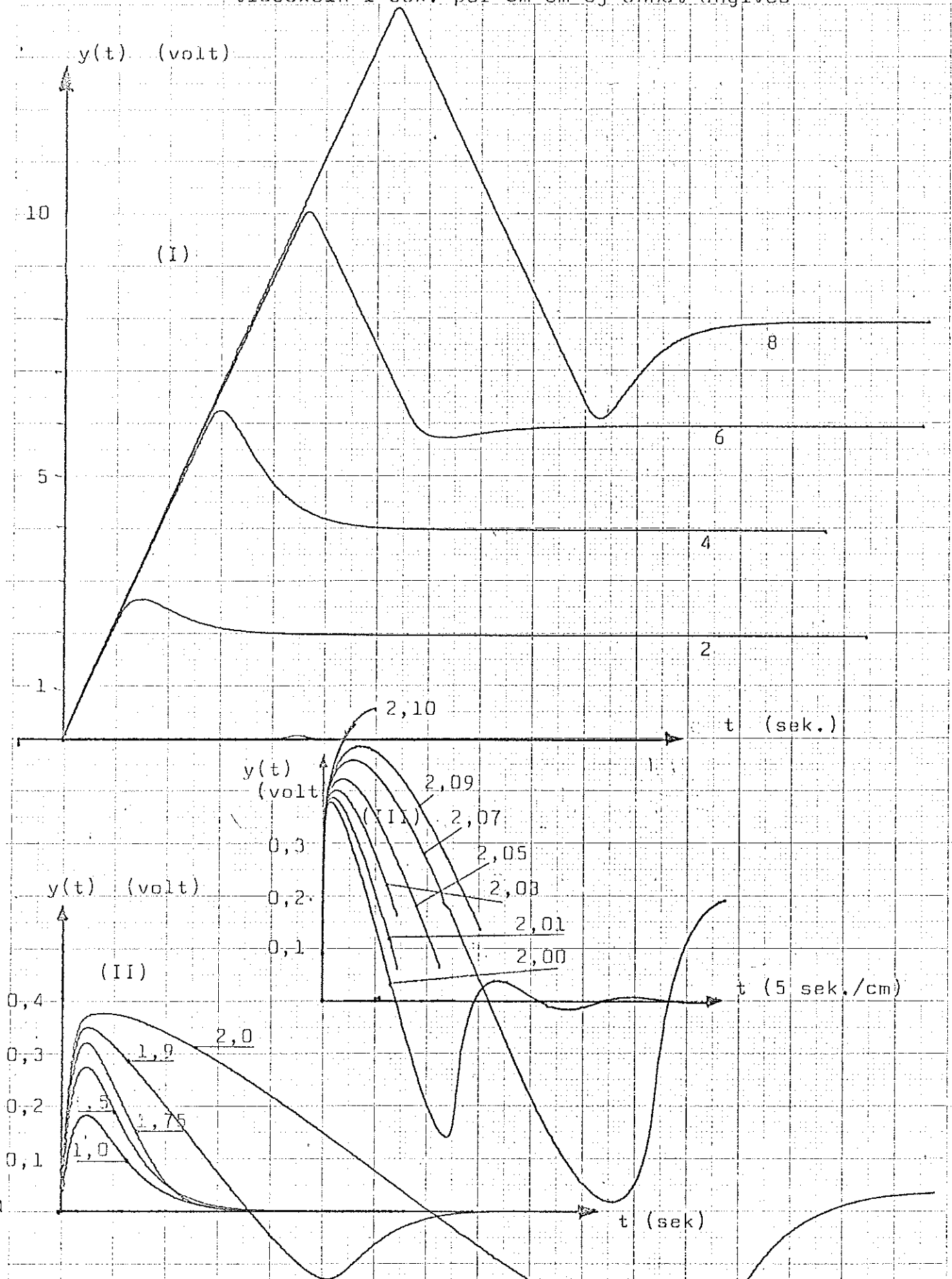
$$v = C \Rightarrow V = \frac{C}{s} \Rightarrow Z(s) = \frac{4C(s+1)}{s(s+2)^2}$$

Figur 10

$$u(t) = 2, 4, 6, 8, \quad (\text{I})$$

$$v(t) = 1 \text{ till } 2, 10 \text{ volt. } (\text{II}) \text{ o}(\text{III})$$

tidsaxeln 1 sek. per cm om ej annat angives



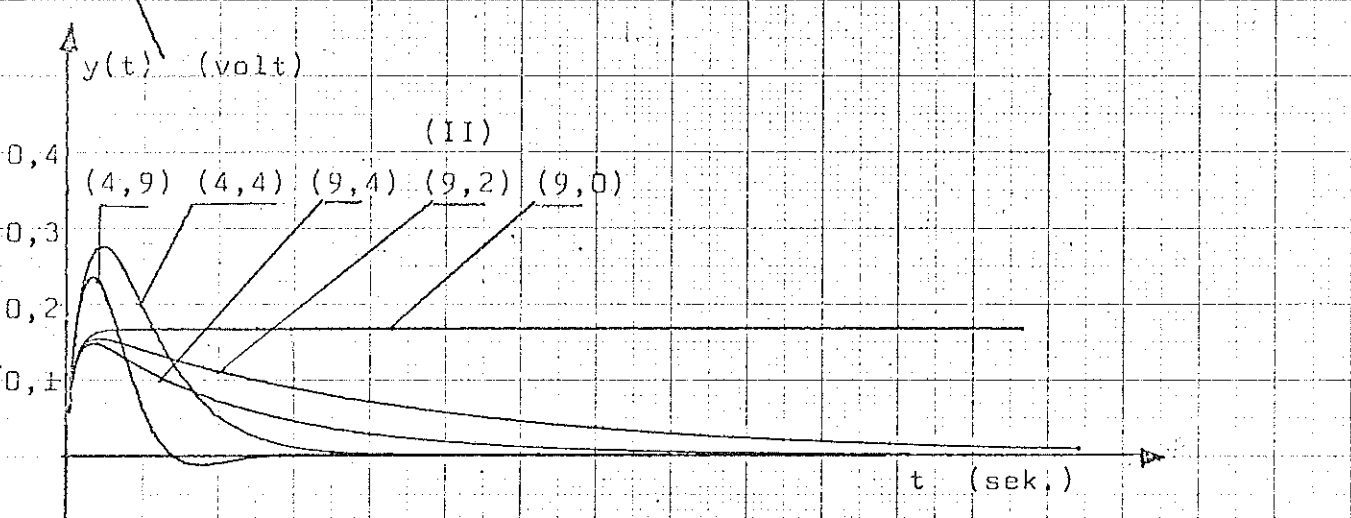
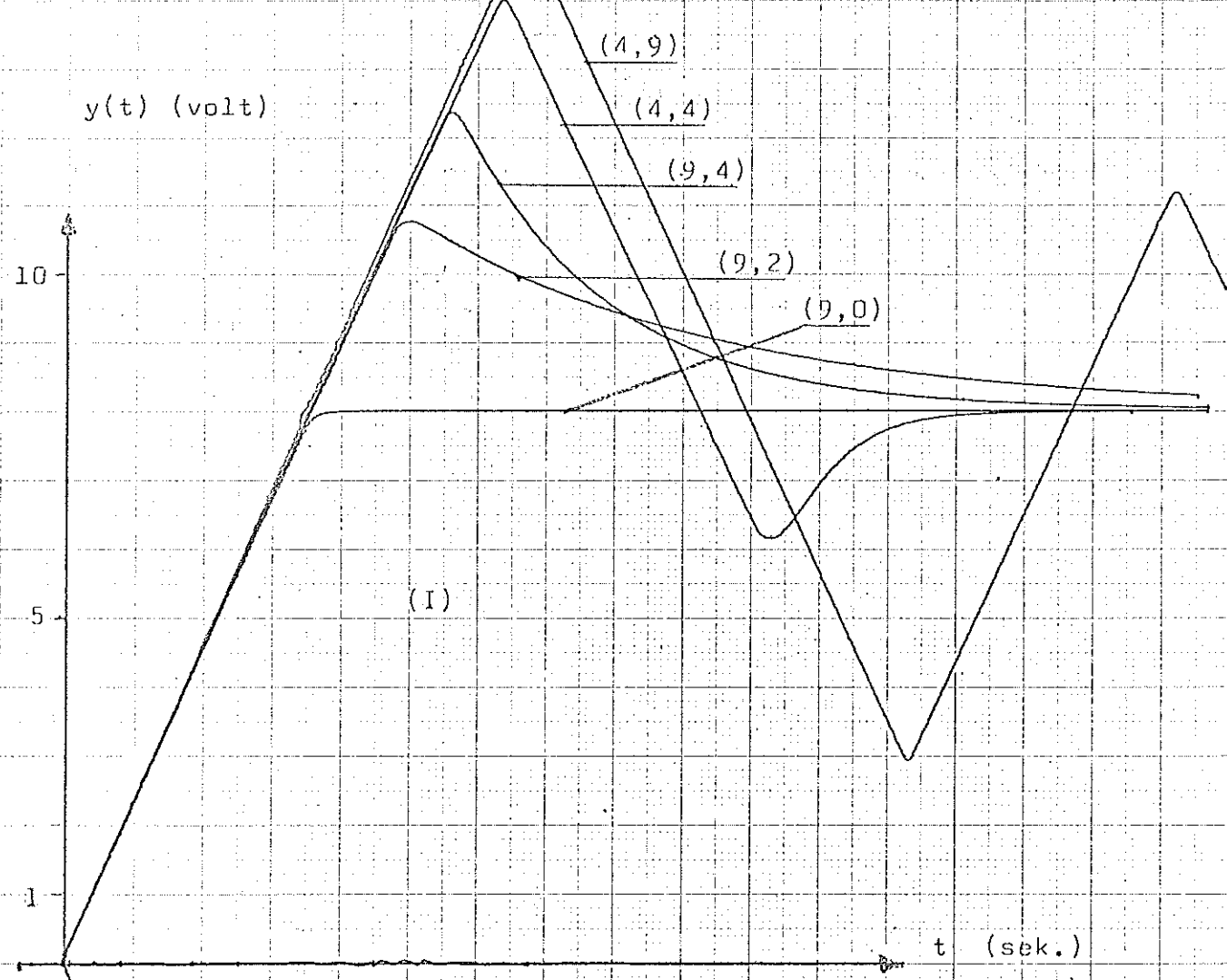
Steg större än 2 volt kan alltså elimineras, Detta beror på att mätningen ej är helt idealiserad. Se figur 12.



Figur 11.

$u(t)=8$  (I),  $v(t)=1,5$  (II).

$(k_1, k_2)$  anges som vektor vid resp. kurva. Alla signaler i volt



514 A4  
S 73 25 01



Nr 1624

Vi är intresserade av  $\max_t |z(t)|$ , vilket med  $|z| \leq 2$  ger maximum för A, B och C.

Av Laplacetransformerna på föregående sida ser vi att  $C_{\max} = B_{\max}$ , varför vi endast behöver undersöka en av dem.

$$z_1(t) = 4A(1-t)e^{-2t} \quad \text{för } u=A. \quad \dot{z} = 4A(2t-1)e^{-2t} = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$z_2(t) = B(1 - e^{-2t} + 2te^{-2t}) \quad \text{för } u=Bt, v=B. \quad \dot{z} = 4B(1-t)e^{-2t} = 0 \Rightarrow$$

$$t=1.$$

$$\text{Vi får: } \max_t |z_1(t)| = \frac{2A}{e} \leq 2. \quad \max_t |z_2(t)| = B(1+e^{-2}) \leq 2$$

$$\text{d.v.s. } A \leq e = 2,72. \quad B=C \leq \frac{2e^2}{1+e^2} = 1,76 \quad (11)$$

Tillståndsekvationer i det lineära området:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v ; \quad (\text{sp}A)^2 = 4(\text{det}A) \text{ d.v.s. entangent-}$$

nod, vilket redan konstaterats av figur i III.1.  $\text{sp}A = -4 \Rightarrow$  stabilitet.

Tillståndsekvationer i det olineära området:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 2 \cdot \text{sign}(z)$$

$$u=0 \text{ och } v=0 \text{ medför: } \dot{x}_1 = -2 (= 2 \cdot \text{sign}(z))$$

$$\dot{x}_2 = -4x_1 \quad \text{som ger}$$

$$\text{parabler av typ: } x_2 = \left( \frac{x_1 - x_1(0)}{4} \right)^2 + x_1(0)t - x_2(0) \quad (12)$$

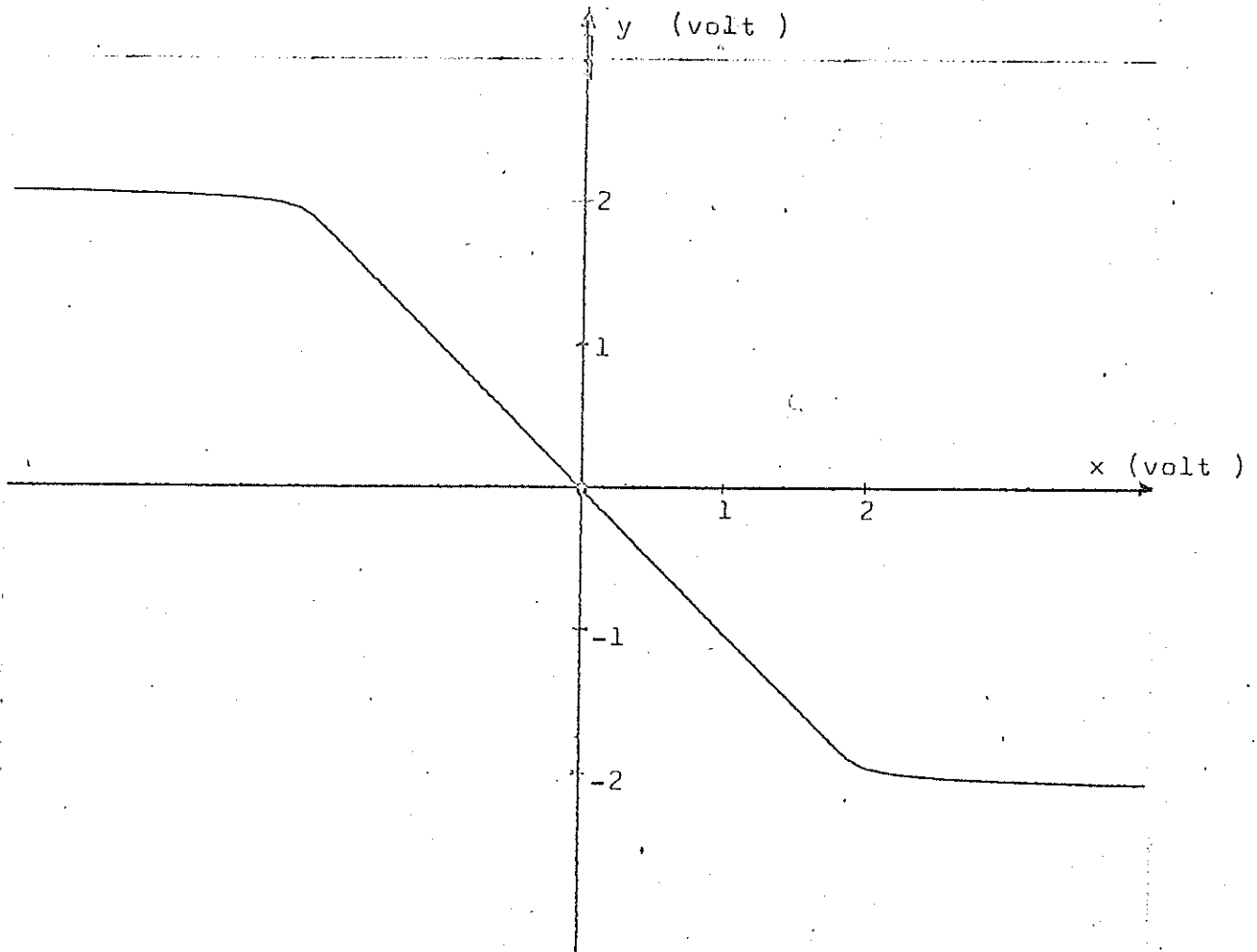
i fasplanet.

Figur 12 visar den simulerade mätningen.

Figur 13 visar det olineära systemets rampsvar.  $u(t) = Bt$  för olika B.

Figur 14 visar systemets fasporträtt i  $x_1$  och  $x_2$  samt  $e$  och  $\dot{e}$ .

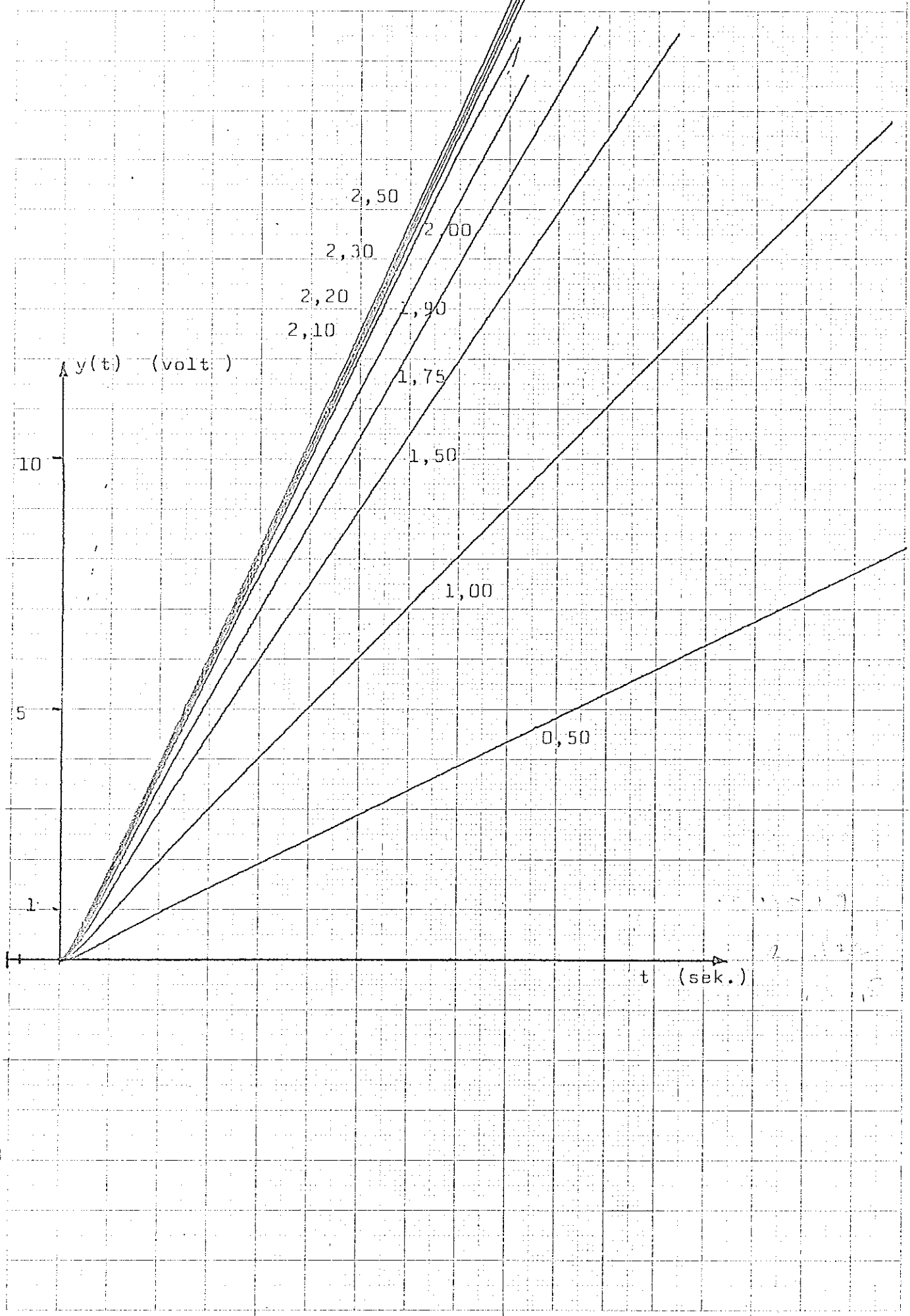
Figur 12. Den simulerade olineariteten.



Figur 13.

Rampsvar  $u(t) = Bt$  olika B

B anges vid resp. kurva.



514 A4  
73 25 01



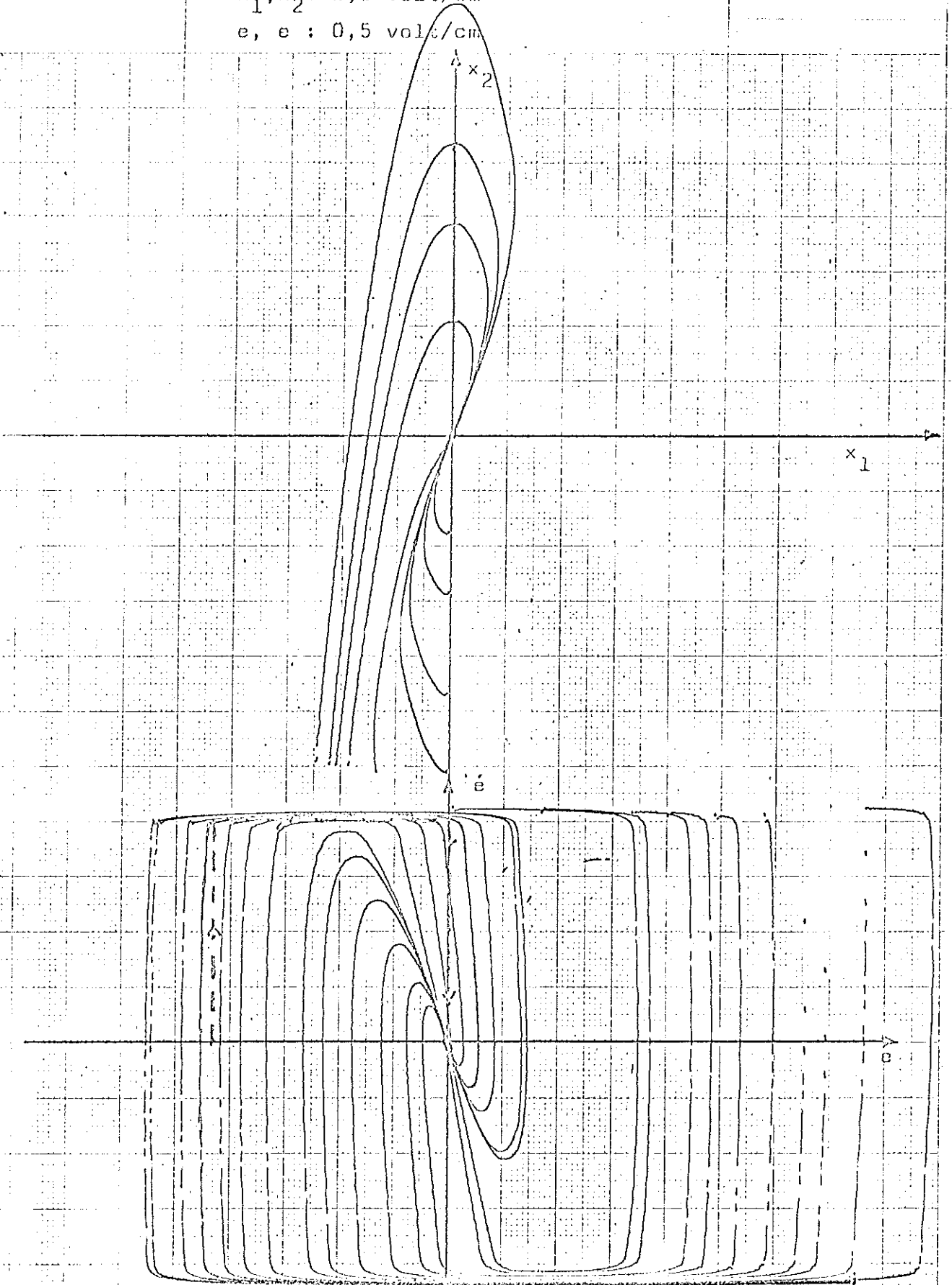
Nr 1624

Figur 14.

faserträtt.

$x_1, x_2: 2,5 \text{ volt/cm}$

$e, e: 0,5 \text{ volt/cm}$



514 A4  
SIS 73 25 01



### III.3. Några regulatoralternativ

I kapitel III.2. fann vi, att vi ej kunde uppfylla alla de krav, som ställts i kapitel II, med en helt lineär regulator. För att klara av detta kommer regulatorer, som på något sätt ändrar karaktär med systemet, att provas. Den egenskap hos den lineära regulatorn som besvärat, d.v.s. orsakat överslängarna i stegsvaret, är den form av "minne", som integratorn visar. Detta "minne" innebär, att tillståndsvariabeln  $x_2$  kan fortsätta att ge positiv styrning länge efter det att felet blivit negativt. Detta innebär, att vi på något sätt måste göra oss av med denna eftersläpning i regulatorn. Vi kan för att uppnå detta förfara på två sätt :

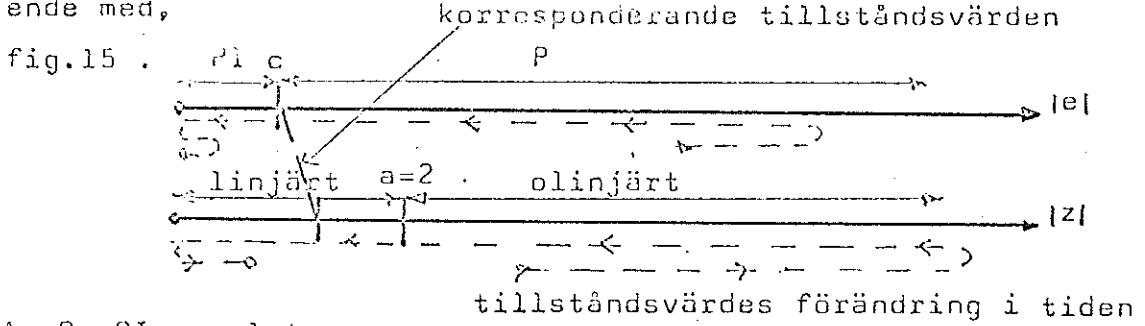
- I. Regulatorn fungerar som proportionell tills felets belopp minskat till ett värde  $c$  (litet?). Därefter för  $|e| < c$ , som proportionell och integrerande. Konstanten  $k_2$  blir alltså noll och integratorn nollställs d.v.s. när I-delen inkopplas är  $x_2 = 0$ . Dessutom kan  $k_1$  få byta storlek till  $m \cdot k_1$  när regulatorn är proportionell. Detta alternativ kommer därför att kallas:  $mP \rightarrow PI$ .
- II. Regulatorn fungerar hela tiden som PI-regulator, men integratorn nollställs "momentant" när felets belopp minskat till värdet  $c$ . Detta alternativ kommer i fortsättningen att kallas:  $PI \rightarrow PI$ .

Kopplingscheman och beräkningar för simuleringen finns i appendix I.

Ett annat sätt än de nu beskrivna att tillfredsställa de uppsatta kraven, är att, med hjälp av ett relä, för fel större än  $c$ , styra med signalen  $2 \cdot \text{sign}(e)$  och för fel mindre än  $c$ , styra med PI-regulator. Denna regulator, kommer i III.6. att användas, som jämförelsenorm, eftersom den för  $c=0$  ger det optimala stegsvaret. Vår önskan är emellertid, att med "något som huvudsakligen är en PI-regulator styra systemet.

III.4. Analys av regulator I. ( mP → PI )

för att få en grov bild av hur regulatorn fungerar, innan beräkningar och simuleringar påbörjas, kommer följande typ av diagram att användas att beskriva regulatorernas beteende med,



A. P → PI-regulator:

fig. 16.  $u =$  steg med stor amplitud.

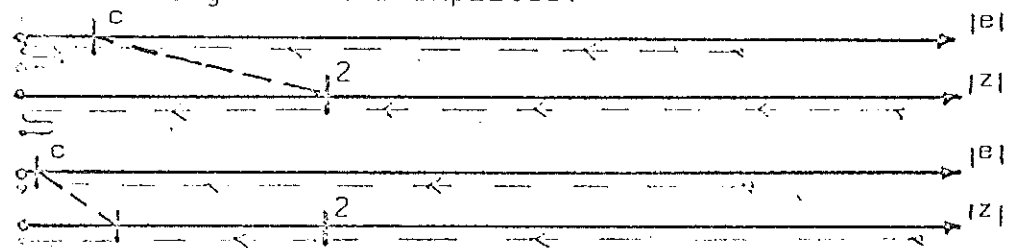
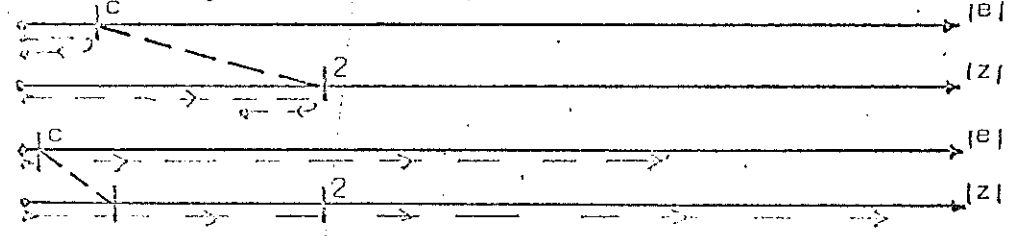


fig. 17  $v =$  steg med liten amplitud.



Av dessa figurer, kan man se att om vi väljer  $c$  litet kommer stegsvaret att få liten översläng. Litet  $c$  innebär emellertid också att systemet lättare förs ur PI-området av stegstörningar. När  $c$  minskar, kommer alltså även den maximala amplituden för eliminerbar stegstörning att minska.

$$V(s) = \frac{D}{s} \Rightarrow E(s) = \frac{-D}{(s+2)^2} \Rightarrow e(t) = D t e^{-2t} \Rightarrow \quad (13)$$

$$\dot{e}(t) = D e^{-2t} (1-2t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow \max_t |e(t)| = \frac{D}{2e} = \frac{D}{5,44}$$

villkor för stegstörningseliminering:  $|e| \leq c. \quad D \leq 5,44c$

B. mP → PI-regulator:

Eftersom P → PI-regulatorn visade negativa egenskaper, är en naturlig fråga: Kan vi förbättra egenskaperna genom att göra m ≠ 1.

Förmågan att eliminera stegstörning kommer inte att ändras, ty dessa bestäms av egenskaperna i PI-området och dessa ändras ej. Om vi ej vill förlora något i jämförelse med det lineärt reglerade, måste, enligt föregående sida nederst,  $D \leq 5,44c$   $c \geq \frac{D}{5,44} = \frac{2}{5,44} = 0,37$ .

Vi önskar dessutom full styrning så länge som möjligt när insignalen är steg. Systemets översläng vill vi också ha så liten som möjligt. Detta innebär att vi för att minska överslängen måste göra c litet, för att kunna välja c så bra som stegelimeringskravet tillåter, måste vi lösa systemets ekvationer för u = stort steg.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} u \quad \text{ger:} \quad \dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} e$$

lösning: 
$$\begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1+2t & t \\ -4t & 1-2t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_0 \\ \dot{e}_0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$e(t) = e^{-2t} \left[ (1+2t)e_0 + t\dot{e}_0 \right]$$

$e_0$  och  $\dot{e}_0$  är de värden som  $e(t)$  resp.  $\dot{e}(t)$  har när regulatorn skiftar från P till PI.

För P-området gäller:  $U(s) = \frac{A}{s}$ ,  $k_2 = 0$ ,  $k_1 = m \cdot 4$ , som ger:

$$E(s) = \frac{A}{s+4m}, \quad e(t) = Ae^{-4mt} \quad \text{och} \quad \dot{e}(t) = -4mA \cdot e^{-4mt} \quad (15)$$

$$Z(s) = \frac{4mA}{s+4m}, \quad z(t) = 4mA \cdot e^{-4mt}, \quad \text{som ger: } z(t) = 4mc \text{ när } e=c \quad (16)$$

Skiftningen sker när  $e(t) = c = e_0$  och  $\dot{e}(t) = -4mc = \dot{e}_0$

Full styrning så länge som möjligt ger: vid skiftningen,

$$z(t) = 4mc \geq 2 \quad c \geq \frac{1}{2m} \quad (17)$$



Vi skulle nu kunna söka optimalt  $m$ , i den meningen att det minimerar en förlustfunktion i PI-området. Några beräkningar på felet i P-området behöver ej göras, då vi där styr med full signal hela tiden. Ekvationerna 1 och 4 på föregående sida ger:

$$e(t) = c \cdot e^{-2t} [1 - 2t(2m-1)]$$

Tidigare vid den lineära kompenseringen, användes två olika förlustfunktioner:

$$C_1 = \int_0^{\infty} t \cdot |e(t)| dt \quad \text{och} \quad C_3 = \int_0^{\infty} e^2 dt$$

Eftersom vi inte har bundit önskemålen till en speciell förlustfunktion, använder vi  $C_3$  i detta fallet.

$E(s) = \frac{c(s+4(1-m))}{(s+2)^2}$  Enligt Parsevals relation, är:

$$C_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-j\infty}^{j\infty} E(s)E(-s) ds = \frac{c^2(4+4 \cdot 4^2(1-m)^2)}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{c^2(1+16m^2-32m+16)}{8}$$

$$\frac{d(C_3)}{dm} = \frac{c^2}{8}(32m-32) = 0 \quad \text{ger} \quad m=1, \quad \text{som ger:} \quad C_3 = \frac{c^2}{8}$$

Detta ger  $\max_t e(t) = c \cdot \exp\left(\frac{-2m}{2m-1}\right)(2m-1) = c \cdot e^{-2}$  för  $m=1$

Föregående sida ger:  $c > 0,37$  och  $c \geq \frac{1}{2 \cdot m} = 0,5$ .

I  $C_3$ 's mening, kan vi alltså ej förbättra systemet genom att välja  $m=1$ . Detta för fixt  $c$ .

I  $C_3$  ingår  $c^2$  vilket gör att vi önskar göra  $c$  litet.

Emellertid krävs  $c \geq \frac{1}{2 \cdot m}$ . Vi väljer  $c = \frac{1}{2 \cdot m}$  och sätter

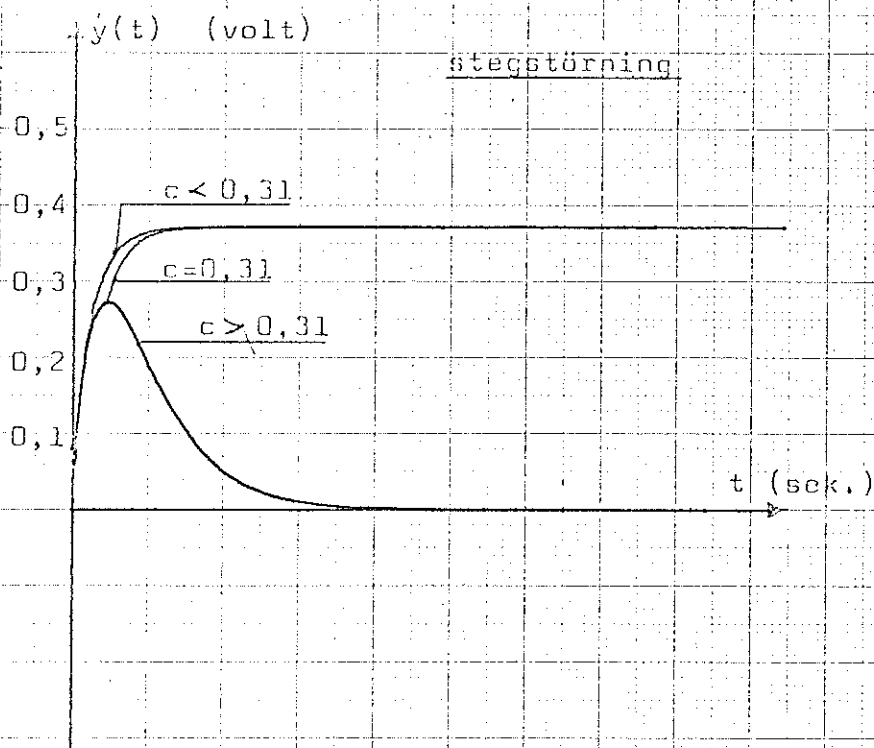
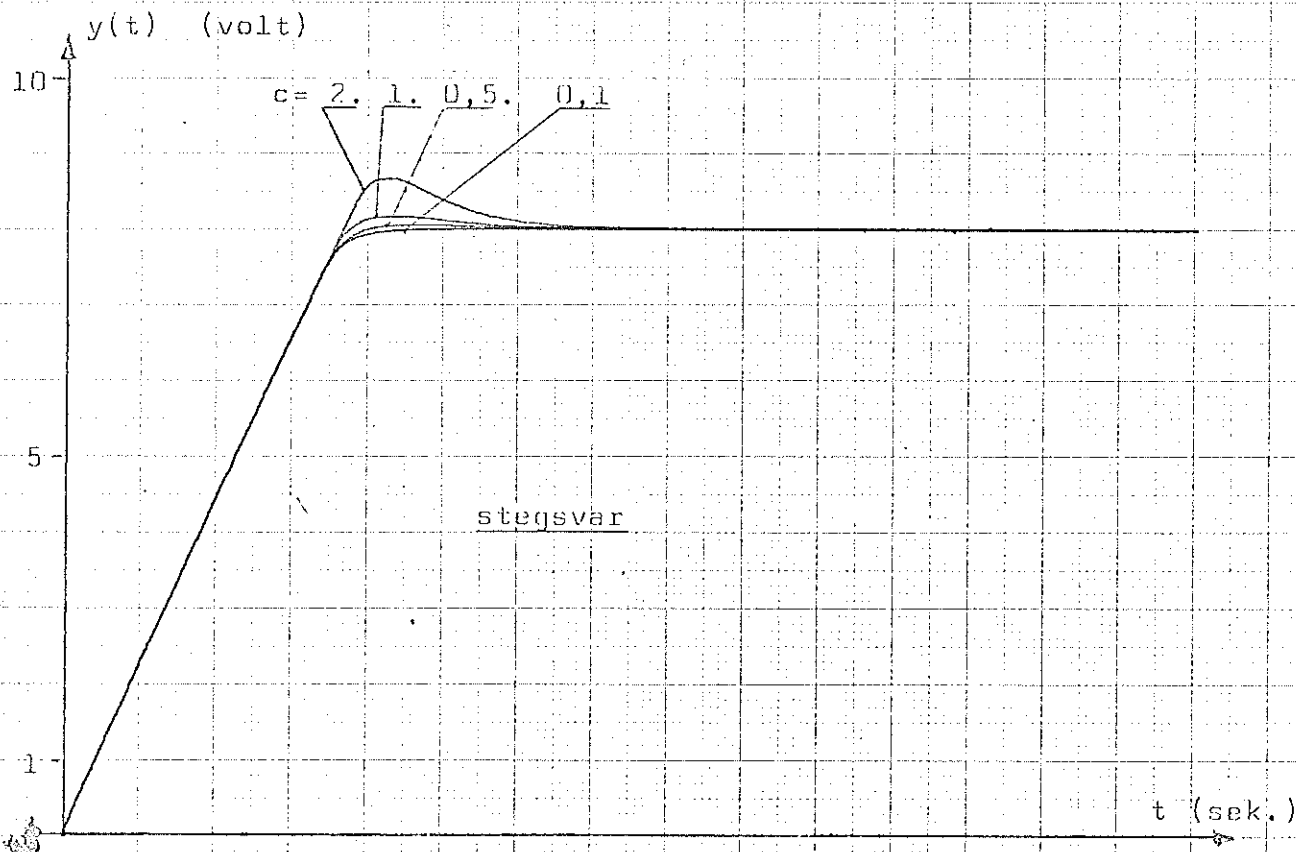
in i  $E(s)$ . Detta ger:  $\frac{d(C_3)}{dm} = \frac{16m-17}{3m} = 0 \Rightarrow m = \frac{17}{16}$ , vilket

endast obetydligt skiljer sig från föregående.

Figur 18 visar stegsvar för  $u=8$ ,  $m=1$  och olika  $c$ , samt svar på stegstörning  $v=1,5$  för samma parametrar.

Figur 18

Regulator I, P PI med nollställning  
 $m=1$ ,  $c$  anges i diagrammen.



Figur 19 visa fasdiagram i  $x_1$  och  $x_2$  samt  $e$  och  $\dot{e}$  med  $m=1$  och  $c=0,5$ .

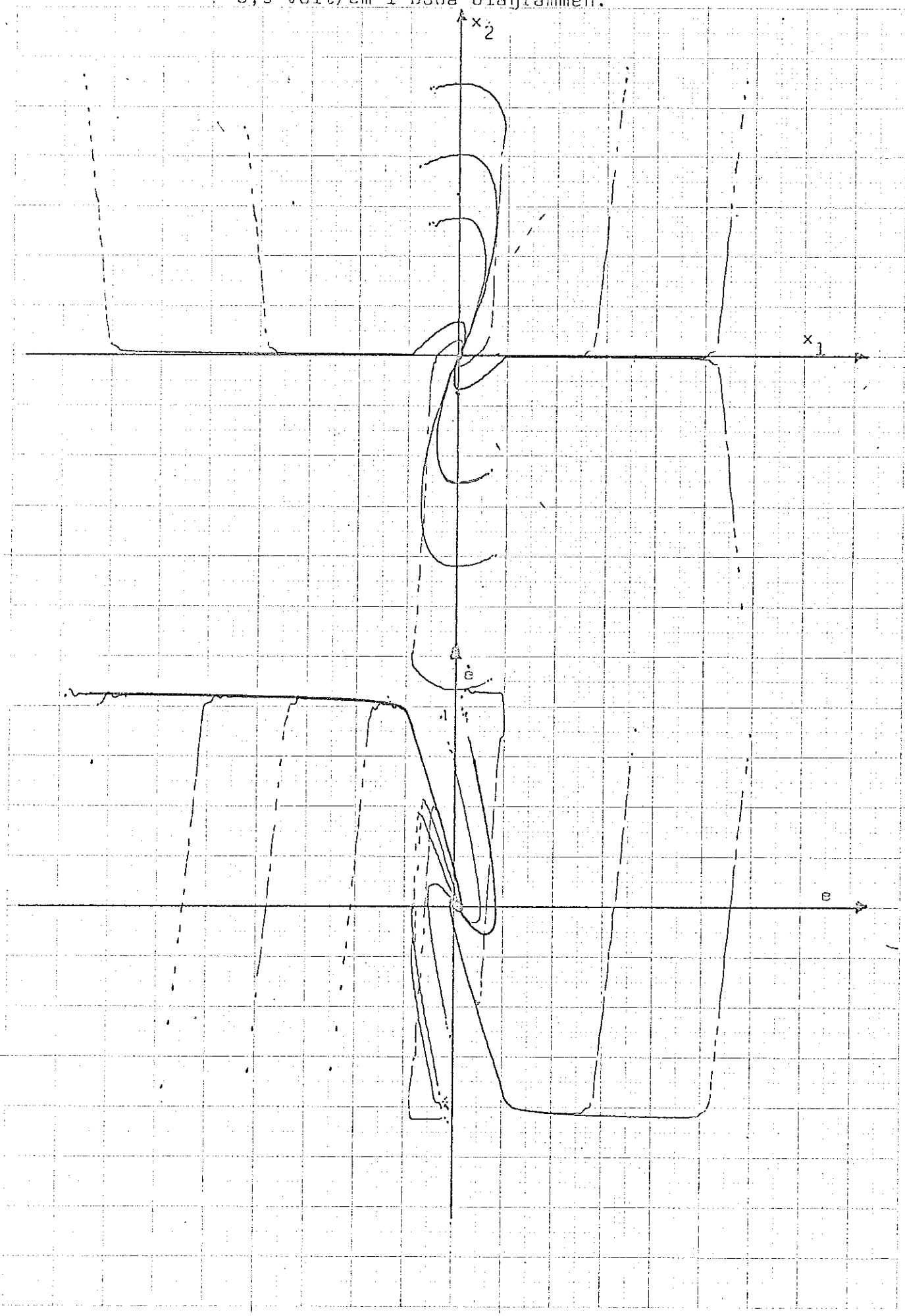
Om vi endast kopplar bort integratorn och ej nollställer, kommer systemet ej att kunna eliminera stora pulsstörningar.

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} e \quad \Rightarrow \quad \dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} e$$

och  $k_2=0$

vilket innebär, att  $e$ -axeln blir singular. Figur 20 visar detta fenomen i  $e, \dot{e}$  planet.

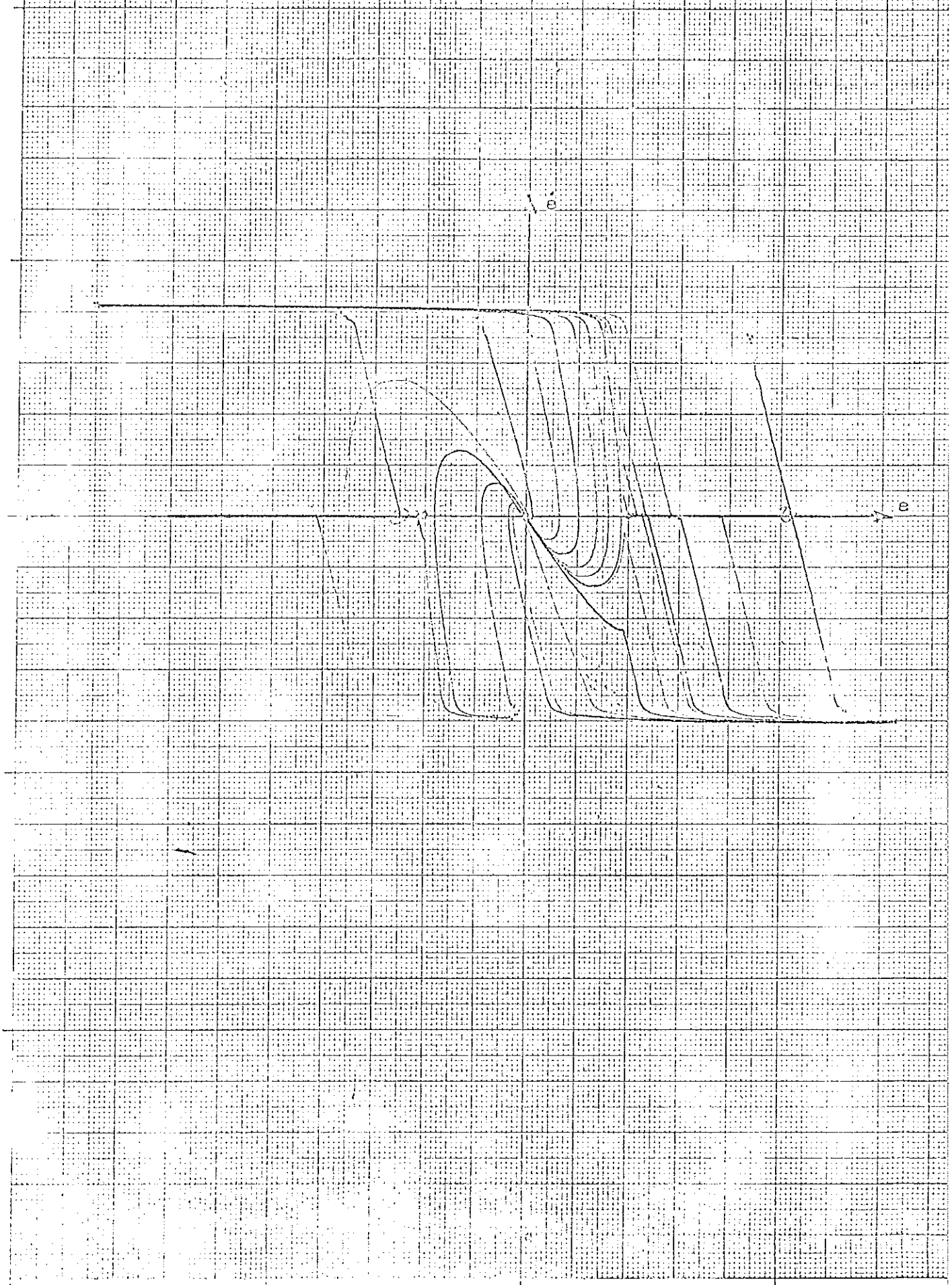
Figur 19. Fasporträtt för regulator I med nollställning.  $m=1$ ,  $c=0,5$ .  
0,5 volt/cm i båda diagrammen.



73 25 01  
1624

Figur 20.

Fasporträtt för regulator i uter-  
nollställning.  $n=1$ .  $c=1$ .  
0,5 volt/cm på häda axlarna.



### III.5. Analys av regulator II (PI-PI)

Av fasporträttet i e och  $\dot{e}$ , för det mättade systemet, kan man se att det går att få trajektorierna att följa den optimala för stora begynnelsevärden. Detta händer om vi momentant nollställer den integrator, som representerar tillståndet  $x_2$ , när  $e=0$ , ty  $\dot{e}=x_2+k_1e$  i det lineära området. På detta sätt får vi trajektorier som den streckade i fig. 14.

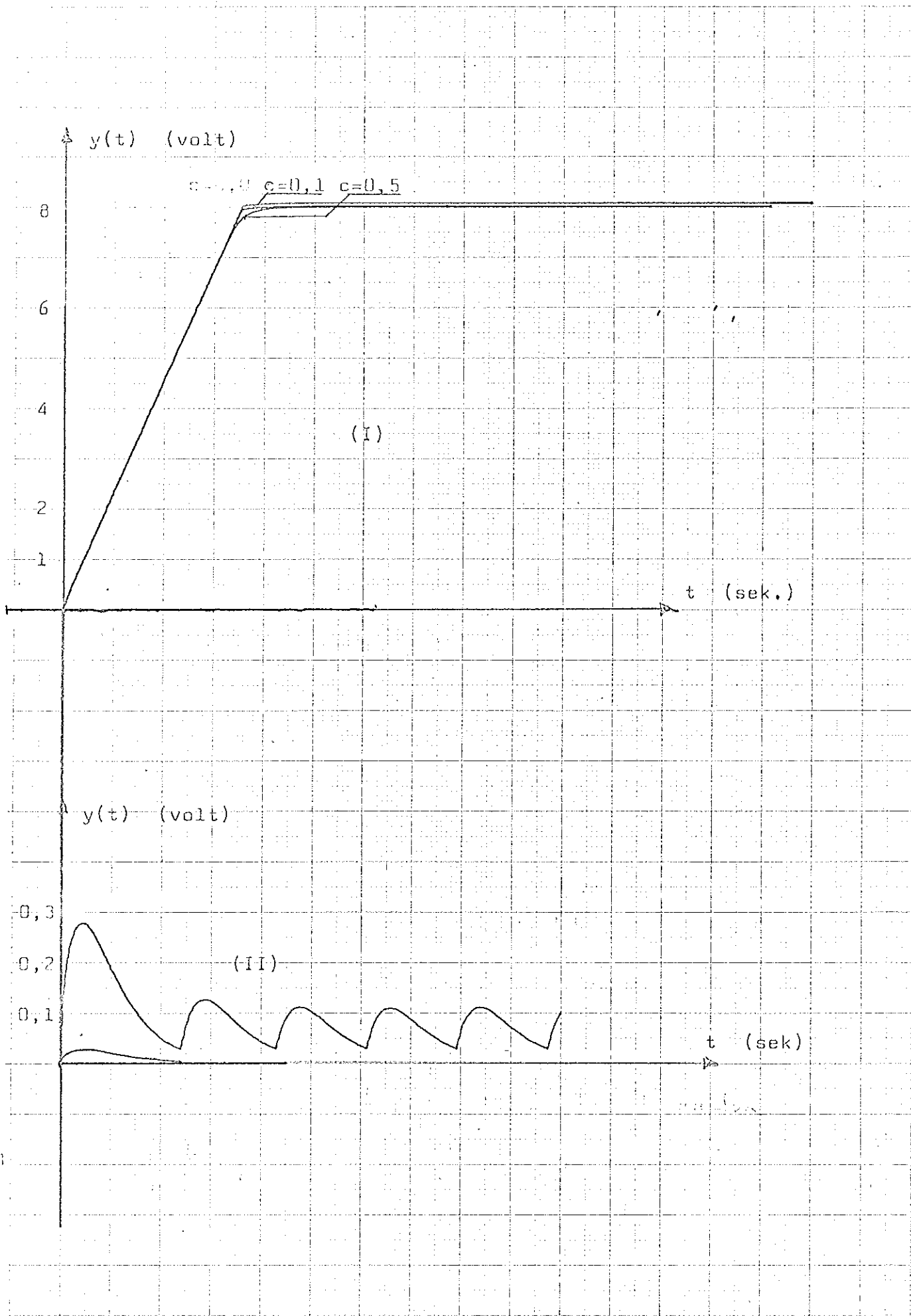
Det går emellertid ej att göra någon momentan nollställning, ty det skulle fordra en fullständig kortslutning ( $R=0$ ) av integratorns kondensator. Det är ej ens tillrådligt att försöka göra kortslutningen så bra som möjligt, ty vi måste ha ett relä eller någon liknande komponent att sluta med, och sådana komponenter tål endast begränsad ström. Detta innebär, att vi måste kortsluta kondensatorn i serie med en resistans. Detta i sin tur innebär, att det tar en viss tid innan kondensatorn urladdats och  $x_2$  blivit så litet som vi önskar. Vi väljer därför att kortsluta (nollställa) när  $|e| \leq c$ ,  $c$  litet, ty annars ( $e=0$ ) skulle vi kanske hunnit få en stor översläng innan  $x_2$  blivit så litet som vi önskar. (Beräkningar för de praktiska kretsarna, se appendix I).

Det tidigare resonemanget om trajektorierna gäller emellertid ej om  $v(t) \neq 0$ . Om  $v(t) = K$ , kommer trajektorierna ej att konvergera mot  $(0,0)$  i  $(e, \dot{e})$ -planet, utan istället mot  $(0,K)$ , ty om vi har störning med, blir  $\dot{e} = x_2 + k_1e + v(t)$ .

Figur 21 visar utsignal för stegsvar ( $u=8$ ) och stegstörning ( $v=1,5$ ), för en regulator som kortsluter (nollställer) när  $|e| \leq c$  och bryter när  $x_2 \leq b$ ,  $b$  litet. Vi får ett pulståg ut för stegstörningen, ty när  $e$  är nära noll och nollställning sker, är  $x_2$  nära  $v$ . (I stationärt tillstånd är  $x_2 = -v$  och  $x_2$ -integratorn är alltså den komponenten som balanserar ut  $v$ , så att insignalen till själva integratorn blir  $=0$ ).

Figur 21. Stegsvär (I) och stegstörning (II)

tidaxlar: sek./cm



När så nollställningen sker, och  $x_2$  minskar, stiger  $e$  tills  $x_2$  är litet nog för att nollställningen skall brytas. När sedan brytningen skett, stiger åter  $x_2$  tills  $e$  blivit så litet att nollställning åter sker och vi får ett pulståg ut. Steg svaret går däremot att göra mycket bra.

För att ej försämra systemets styvhet måste vi på något sätt se till, att nollställning ej sker i det lineära området d.v.s. där vi kan eliminera stegstörningar. Detta kan ske, genom att vi avbryter nollställningen, eller icke påbörjar den, om  $x_2$  eller  $z$  är under ett visst värde. För att undersöka detta alternativ närmare lösas ekvationerna för det lineära systemet: ( $|z| \leq 2$ )

$$x = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v \quad . \quad \text{Sätt } u(t) = M \text{ och } v(t) = N$$

Vi får:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1-2t & t \\ -4t & 1+2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+(2t+1)e^{-2t} \\ 4te^{-2t} \end{bmatrix} M + t e^{-2t} N$$

Vi undersöker  $u=0$  och  $v(t)=N$ .  $x_1(0)=x_2(0)=0$ .

$$e(t) = N t e^{-2t}$$

$$x_2(t) = N - N(2t+1)e^{-2t}$$

$$z = x_2 + 4e \quad \text{ger:} \quad z = N(1 - e^{-2t} + 2te^{-2t})$$

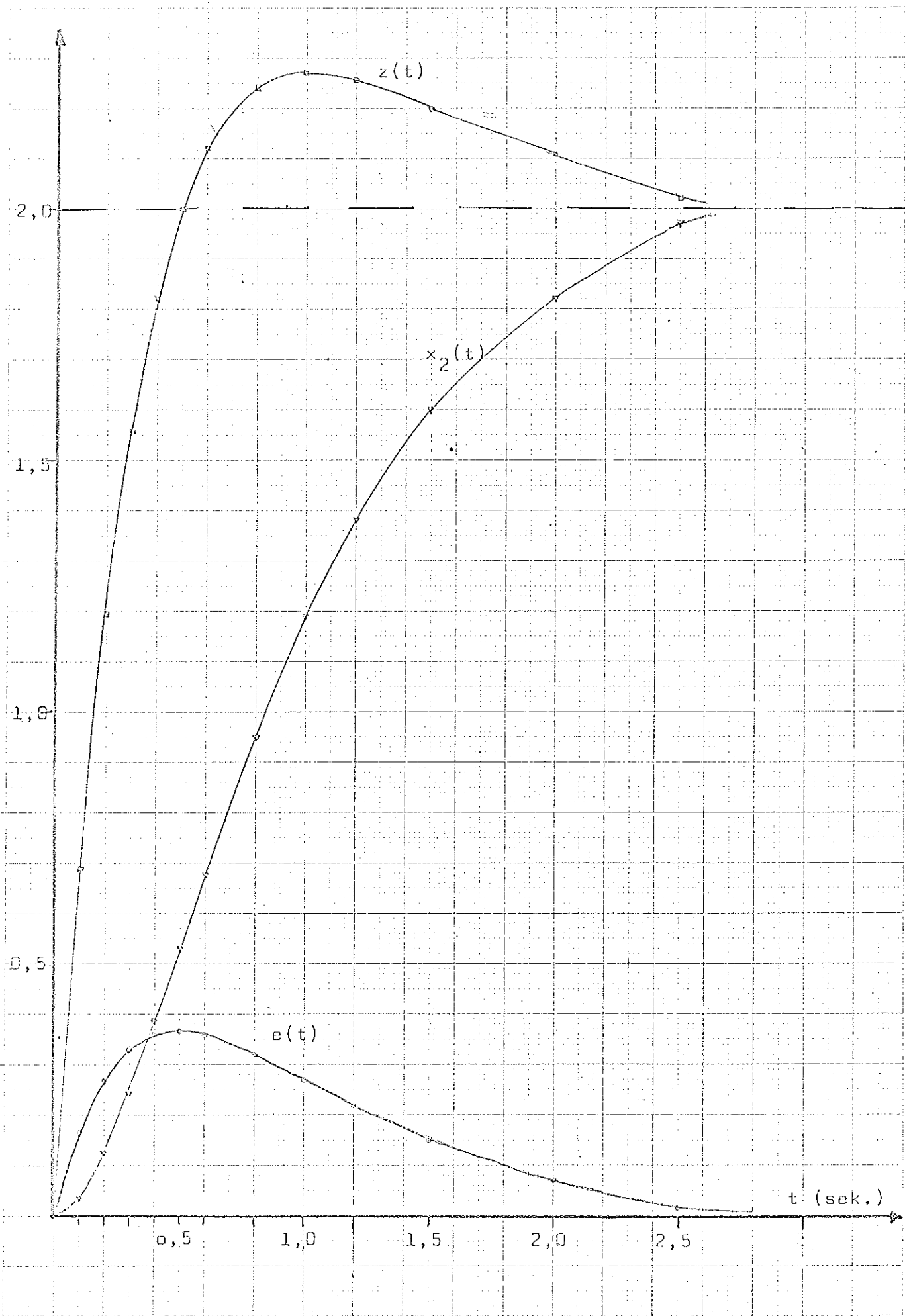
Figur 22 visar  $e$ ,  $x_2$  och  $z$  inritade till belopp, som funktion av  $t$ .

Av denna figur kan man se, att  $x_2$  och  $z$  är lämpliga att ha att reglera brytningen. ( Detta visste vi emellertid innan, ty vi fordrade stegstörningseliminering, och det sker endast i det lineära området.) För sådana steg, som elimineras, blir alltså  $x_2$  aldrig större än 2.



Figur 22.

Beräknade värden för:  $e(t)$ ,  $z(t)$   
och  $x_2(t)$  linjärt system



Vi konstruerar alltså regulatorn så, att de nollställer  $x_2$  när  $e \leq c$ , men endast om  $z$  eller  $x_2$  är större än 2. Valet mellan dessa båda har ej någon större betydelse, ty vid nollställning är  $e$  nära noll och  $z = x_2 + 4e$ . Vi väljer att använda  $x_2$ .

Regulatorns funktion kan nu beskrivas med följande:

$$\text{Funktionssätt: } \begin{cases} \text{PI} & \text{om } e > c \text{ och } x_2 > 2 \\ \text{P med nollställning av } x_2 & \text{om } e \leq c \text{ och } x_2 > 2 \\ \text{PI} & \text{om } e \leq c \text{ och } x_2 \leq 2 \end{cases}$$

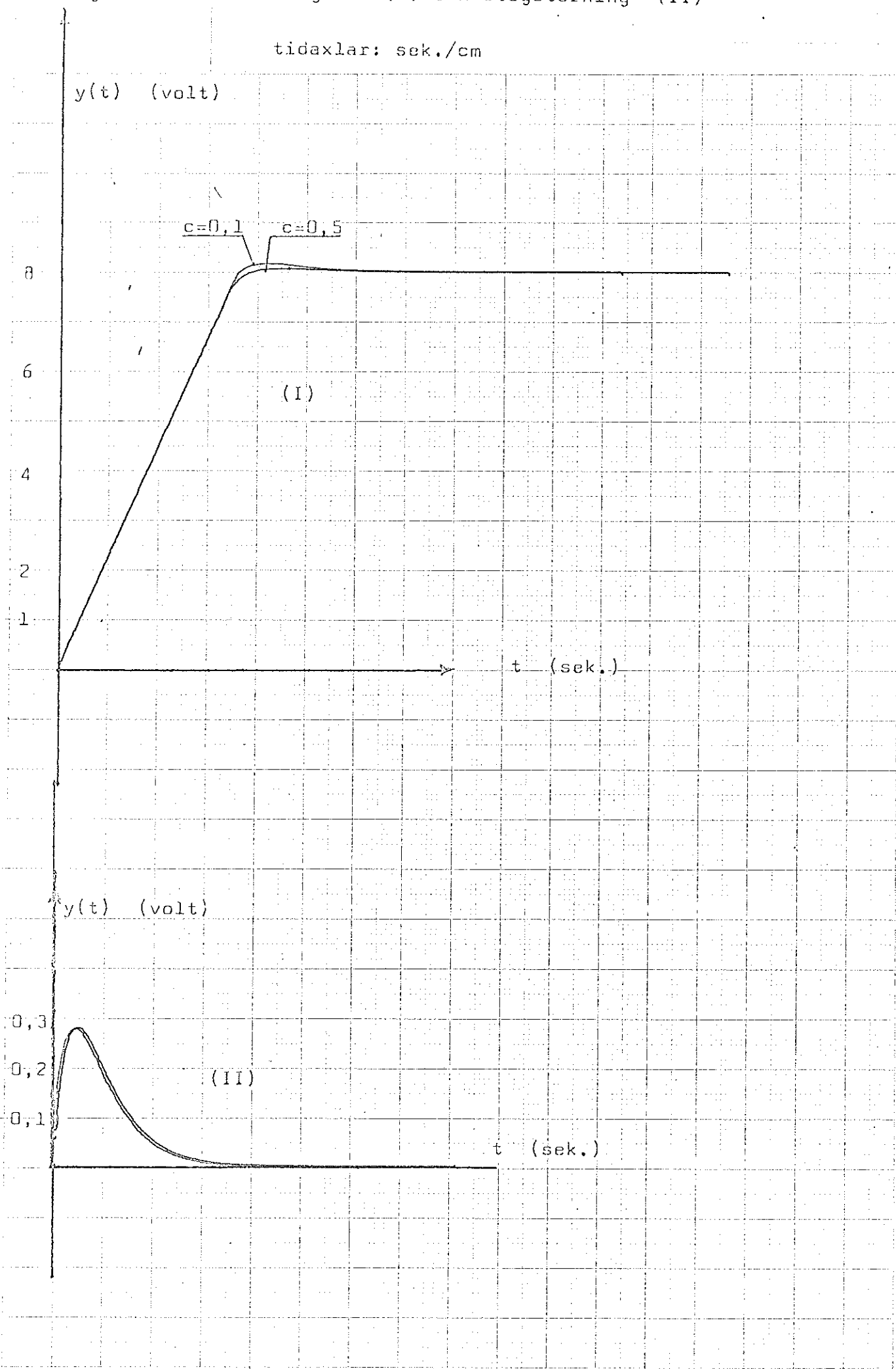
Figur 23 visar utsignalen från systemet med ovannämnda regulator, för  $u=8$  och  $v=1,5$ .  $c$  anges vid kurvorna.

Figur 24 visar fasporträtt för samma system som fig.23, i  $x_1$  och  $x_2$  samt  $e$  och  $\dot{e}$ .

Figur 23.

Stegsvar (I) och stegstörning (II)

tidaxlar: sek./cm

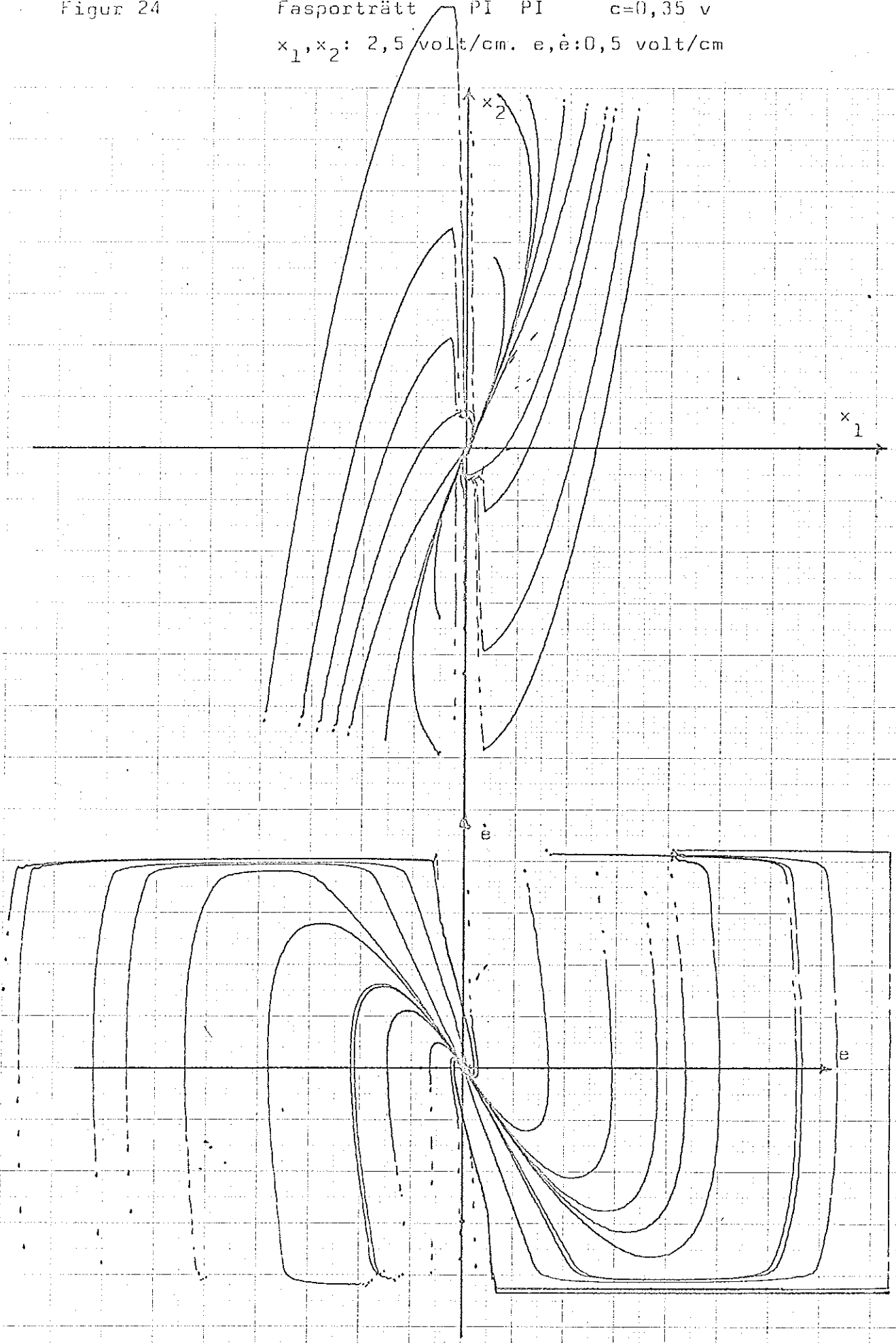


414 A4  
70 25 01  
1957  
1634

Figur 24

Fasporträtt PI PI  $c=0,35 v$

$x_1, x_2: 2,5 \text{ volt/cm. } e, \dot{e}: 0,5 \text{ volt/cm}$



511 A4  
SIS 73 2501



Nr 1624

### III.6. Jämförelse mellan olika regulatoralternativ.

#### Stegföljning:

Se figurerna 18, 21 och 23.

Den bästa steg följlningen fås med PI  $\rightarrow$  PI-regulator med nollställning vid litet  $e$  och brytning vid litet  $x_2$ . Fig. 21.  $mP \rightarrow$  PI-regulatorn med  $m=1$  och litet  $c$  skiljer sig ej väsentligt i stegsvaret från den här nämnda PI  $\rightarrow$  PI-regulatorn. Se fig. 18.

#### Stegstyvhet:

Se figurerna 18, 21 och 23.

PI  $\rightarrow$  PI-regulatorn med brytning för litet  $x_2$ , kan ej eliminera stegstörningar. Se fig. 21. Både  $mP \rightarrow$  PI-regulatorn och PI  $\rightarrow$  PI-diton med brytning för  $|x_2| < 2$ , ger oförsämrad stegstyvhet jämfört med det lineärt kompenserade systemet med mättning. Fig. 18. och 23.

$mP \rightarrow$  PI-regulatorn utan nollställning av  $x_2$ , ger bra stegsvar och god ( oförsämrad ) stegstyvhet.

#### Förmåga att eliminera pulsstörning.

Alla regulatorerna utom  $mP \rightarrow$  PI-regulatorn utan nollställning kan eliminera pulsstörningar med begränsad tidsintegral. Se figurerna 19, 20 och 24.

Se även figur 25, som visar utsignalen som funktion av  $t$  med  $x_1(0) = x_2(0) = 6$  och inga insignaler. I figuren är den optimala kurvan inritad streckat för jämförelse.

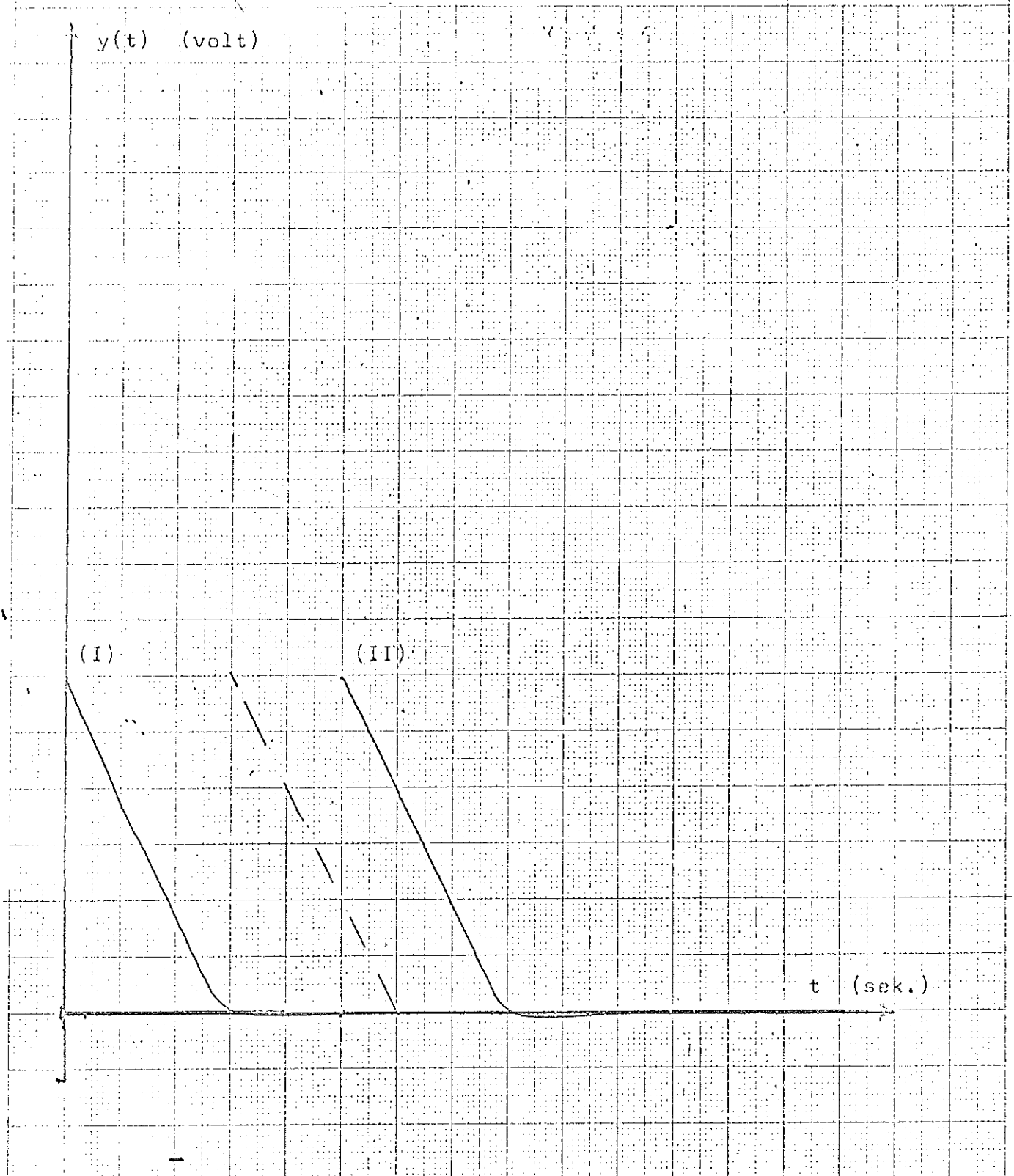
Kurvorna är endast upptagna för de två regulatorer, som både gav oförsämrad stegstyvhet och kunde eliminera pulsstörningar.

#### Rampföljning:

Av sidan 11 nederst, ser vi att i det lineära området, är stegstyvhet ekvivalent med rampföljning ( samma överföringsfunktion ) De regulatorer, som uppfyller kravet på stegstyvhet, ger alltså också rampföljning utan stationärt fel, för ramper vars lutning ej är så stor, att mättning uppstår.

mP PI (I). PI PI (II)

tidaxeln: sek./cm



Vid jämförelse mellan de två regulatorer, som uppfyllt kraven, mP  $\rightarrow$  PI och PI  $\rightarrow$  PI, är skillnaderna ej av väsentlig storlek. Stegföljningen är emellertid, av figur 18 och 23 att döma, aningen bättre för mP  $\rightarrow$  PI regulatorn. Det som emellertid är väsentligt i detta sammanhang, är att mP  $\rightarrow$  PI-regulatorn är mindre komplicerad, och alltså lättare att realisera än PI  $\rightarrow$  PI-regulatorn:

IV 1. Lineär kompensering av dubbelintegratorn

Vi ställer följande krav på systemet i det lineära området:

Steg och rampföljning utan stationärt fel ( $e_0 = e_1 = 0$ )

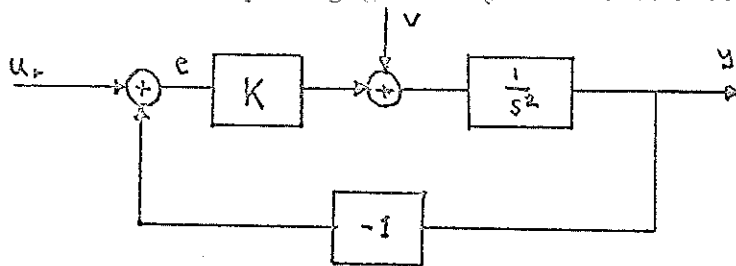
Styvhetskoefficient för stegstyrning noll ( $c_0 = 0$ ) dvs

stegstyrning elimineras utan stationärt fel.

Vi bortser alltså från den olineära länken, och kompenserar systemet lineärt.

Försök med enkel återkoppling ger följande resultat:

fig (26)



$$G(s) = \frac{K}{s^2 + K}$$

$$E(s) = \frac{s^2 U(s)}{s^2 + K} - \frac{V(s)}{s^2 + K}$$

Detta system är ej asymptotiskt stabilt. Dessutom är  $c_0 \neq 0$

För att få  $c_0 = 0$ , måste en integrerande del tillföras kompenseringsslänken, som tidigare var proportionell.

Dvs vi byter K-länken i fig (1) mot  $K \frac{s+b}{s}$  som ger PI-regulering (proportionell och integrerande)

Detta ger oss:

$$E(s) = \frac{s^3 U(s) - sV(s)}{s^3 + Ks + Kb}$$

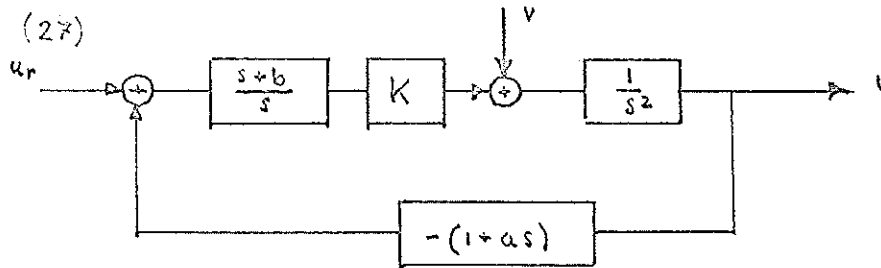
vi får av detta att  $e_0 = e_1 = c_0 = 0$ , men systemet blir instabilt, ty Routh's test av karakteristiska funktionen  $s^3 + Ks + Kb = 0$  ger:

Routh's tablå:

	1	K
teckenväxling $\rightarrow$	0	Kb
	$\rightarrow \infty$	

För att stabilisera systemet inför vi återkoppling av  $\dot{y} = x_2$  dvs tachoåterkoppling.

fig (27)



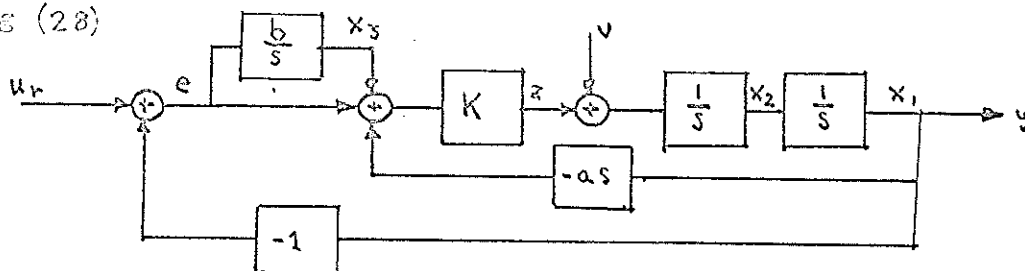
Detta ger oss:

$$E(s) = \frac{(s^3 + aKs^2 + sKbs)U(s) - sV}{s^3 + aKs^2 + K(ab+1)s + Kb}$$

dvs  $e_0 = c_0 = 0$  men  $e_1 \neq 0$  ty lägsta s-termen i nämnaren framför  $U(s)$  är av grad 1. Den måste vara av grad  $\geq 2$  om  $e_1 = 0$ .

Vi försöker då att koppla i signalen  $-as$  efter PI-regulatorn.

fig (28)



Vi får nu:

$$Y(s) = \frac{K(s+b)U(s) + sV(s)}{s^3 + K(as^2 + s + b)}$$

$$E(s) = \frac{(s^3 + Kas^2)U(s) - sV(s)}{s^3 + K(as^2 + s + b)}$$

som ger  $e_0 = e_1 = c_0 = 0$ , och stabilt system för lämpligt val av  $K$ ,  $a$  och  $b$ .



Konstanterna väljes enligt IIR-kriteriet, dvs. vi minimerar förlustfunktionen  $\int_0^{\infty} |e| t dt$  där  $e = felet$  när  $u = step$ .

Detta ger:

$$G(s) = \frac{3,25\omega_0^2 s + \omega_0^3}{s^3 + 1,75\omega_0 s^2 + 3,25\omega_0^2 s + \omega_0^3}$$

men  $G(s) = \frac{Ks + Kb}{s^3 + Kas + Ks + Kb}$

som ger  $1,75\omega_0 = Ka$   
 $3,25\omega_0^2 = K$   
 $\omega_0^3 = Kb$

vi väljer  $\omega_0 = 2$  vilket ger oss ett system med lämplig snabbhet med tanke på simuleringen.

$\omega_0 = 2$  ger:  $K = 13$   $a = \frac{7}{26}$  och  $b = \frac{8}{13}$

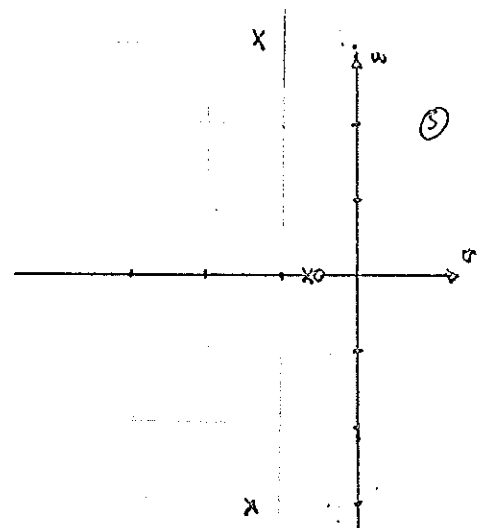
$$G(s) = \frac{13s + 8}{s^3 + 3,5 s^2 + 13 s + 8}$$

polnollställeskonfigurationen blir:

nollst  $s = -\frac{8}{13} = -0,615$

pol  $s = -0,73$

$= -1,385 \pm 3,010i$



Det linära systemets ekvationer:

Överföringsfunktioner

$$G(s) = \frac{13 s + 8}{s^3 + 3,5 s^2 + 13 s + 8}$$

$$E(s) = \frac{(s^3 + 3,5 s^2)U(s) - sV(s)}{s^3 + 3,5 s^2 + 13 s + 8}$$

$$Z(s) = \frac{(13s + 8)s^2 U(s) - (3,5s^2 - 13s - 8)V(s)}{s^3 + 3,5s^2 + 13s + 8}$$

Tillståndsekvationer:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -13 & -3,5 & 13 \\ -\frac{8}{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \\ \frac{8}{13} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

Tillståndsvariablerna valda enligt fig (37)

Vi transformerar ekvationen på följande sätt:

$$e_1 = e = u - x_1$$

$$e_2 = \dot{e} = \dot{u} - \dot{x}_2$$

$$e_3 = \ddot{e} = -\ddot{x}_3 \quad (\ddot{u} = 0, \text{ ty vi är endast intresserade av steg och rampar i } u)$$

Detta ger:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -13 & -3,5 \end{bmatrix} e$$

Diagram 29 visar  $y$  för  $u = 10$  och  $v = 10$  samt för  $u = Bt$ ,  $B = 1, 2$  och  $4$

Diagram 30 visar  $x_1, x_2, x_3, e$  och  $\dot{e}$  för  $u = 5$   $v = 5$  och  $u = 5t$

Diagram 31 visar samma variabler för  $u = 0$   $v = 0$  och olika  $x_1(0), x_2(0), x_3(0)$ .

Diagram 29.  
tidaxeln 1 cm/ssek

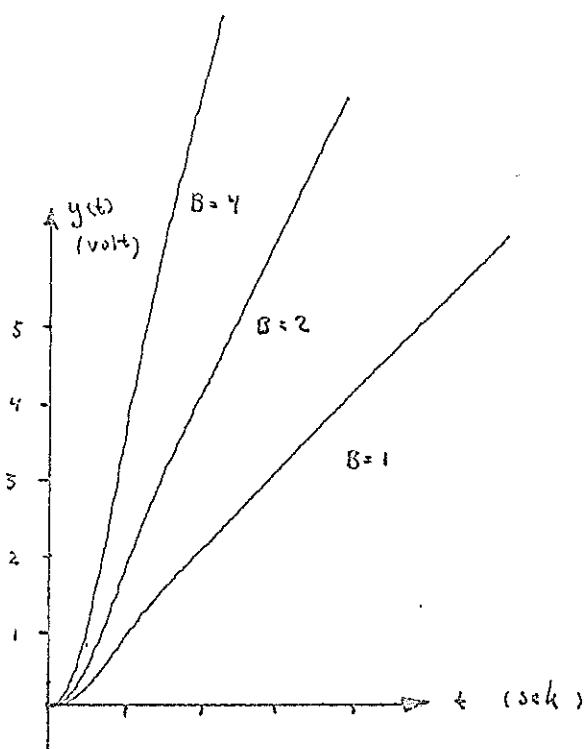
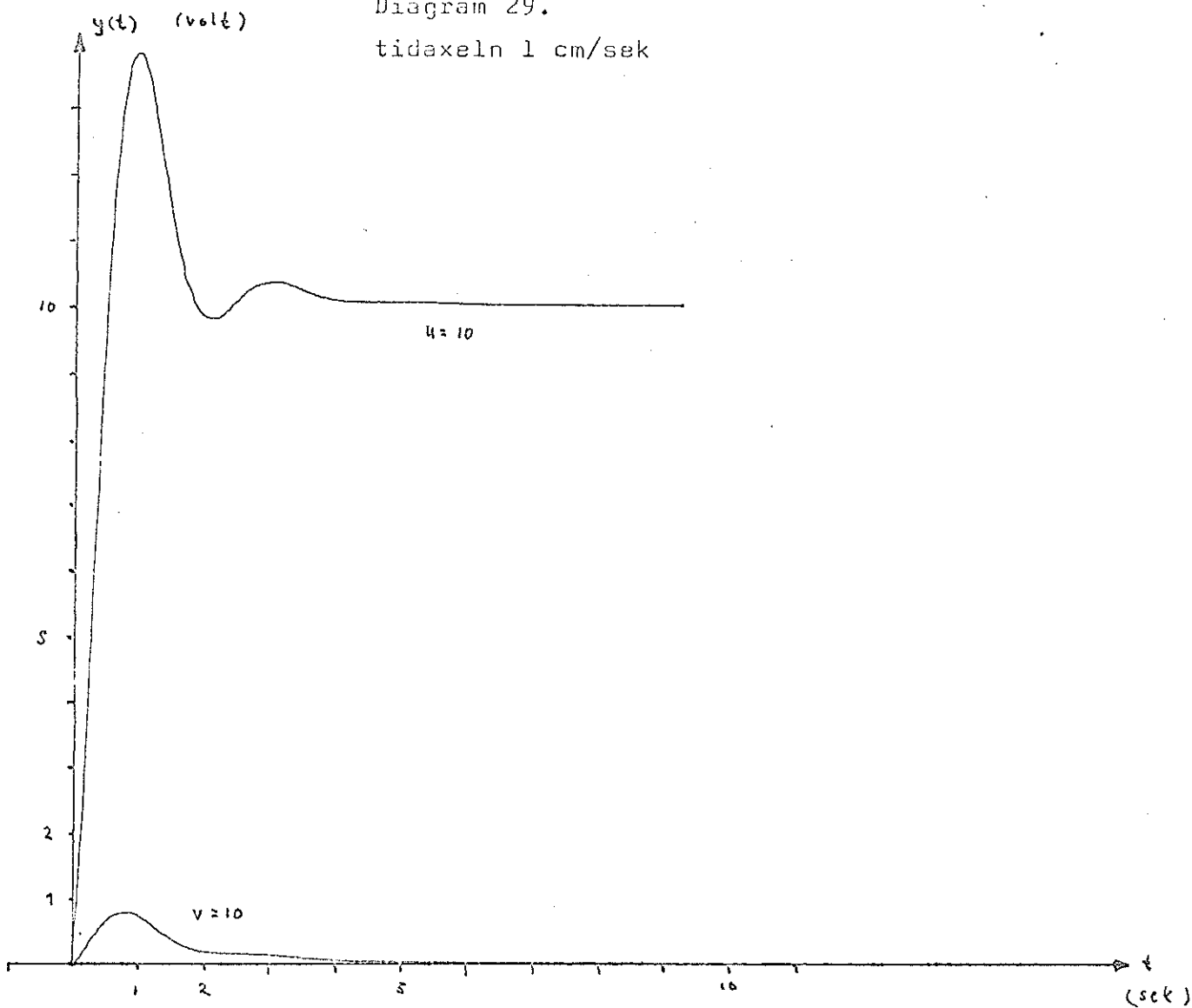


Diagram 30.

tidaxeln 5mm/sek.

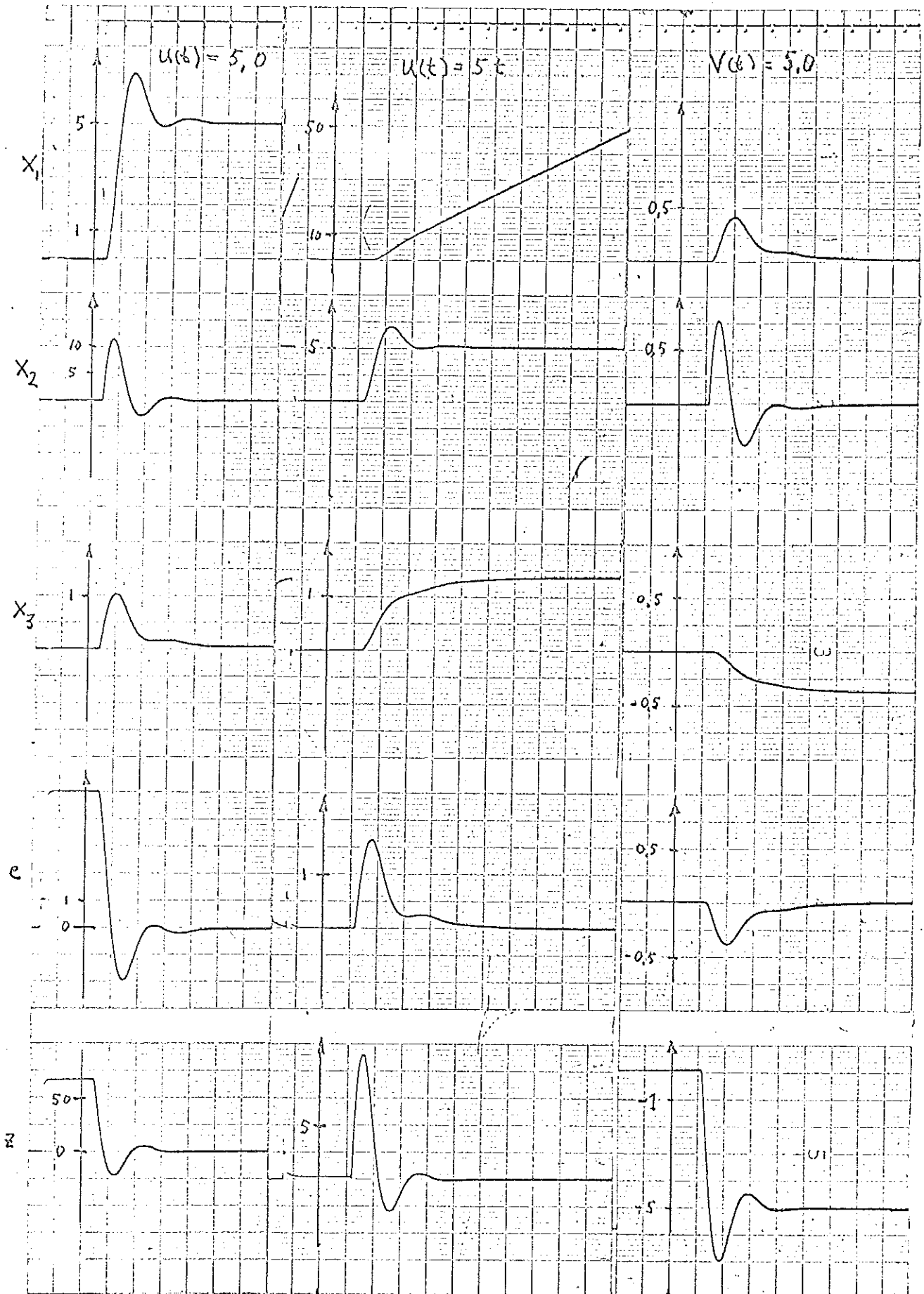
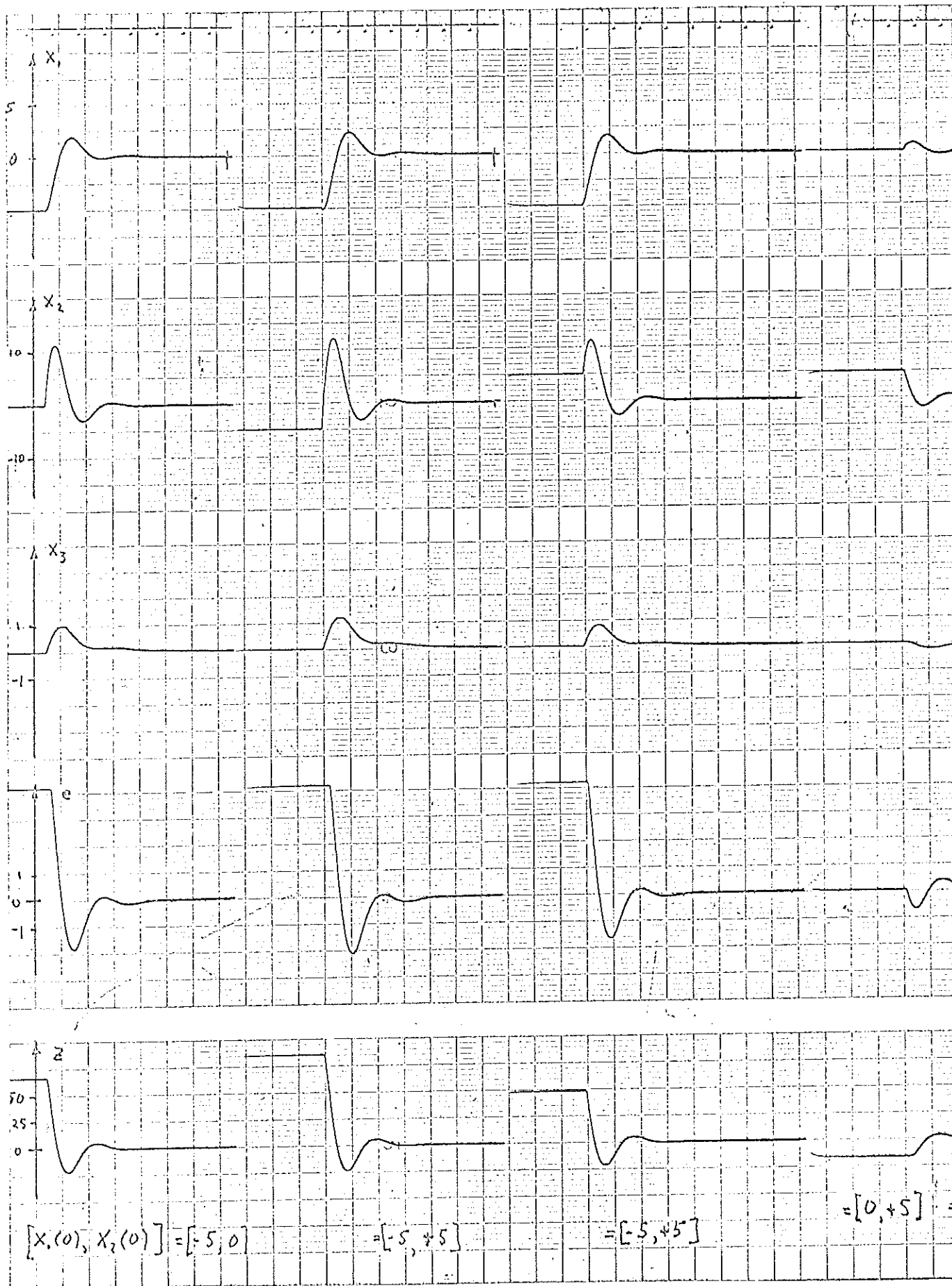


Diagram 31

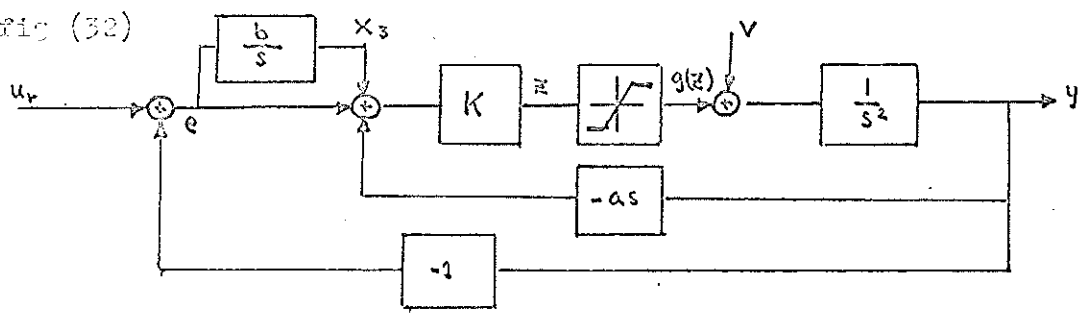
tidaxeln 5mm/sek.



IV.2. Analys av kompenserade systemet med mätning.

När mätningen införs i systemet, sätter vi åter in ett  $K$  i överföringsfunktionen. Detta  $K$  betecknar den variabla förstärkning, som mätningen representerar. Överföringsfunktionerna för det mättande systemet blir:

fig (32)



$$Y(s) = \frac{K(13s + 8)U(s) + sV(s)}{s^3 + K(3,5s^2 + 13s + 8)}$$

$$E(s) = \frac{(s^3 + 3,5Ks^2)V(s) - sV(s)}{s^3 + K(3,5s^2 + 13s + 8)}$$

$$Z(s) = \frac{(13s + 8)s^2 U(s) - (3,5s^2 + 13s + 8)V(s)}{s^3 + K(3,5s^2 + 13s + 8)}$$

Tillståndsekvationerna blir:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -13 & -3,5 & 13 \\ -\frac{8}{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \\ \frac{8}{13} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} v \quad |z| \leq 2$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{8}{13} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \text{sign}(z) \quad |z| > 2$$

$$s = 13(u - x_1 - \frac{7}{26} x_2 + x_3) = 13(u - x_1) - 3,5 x_2 + 13 x_3$$

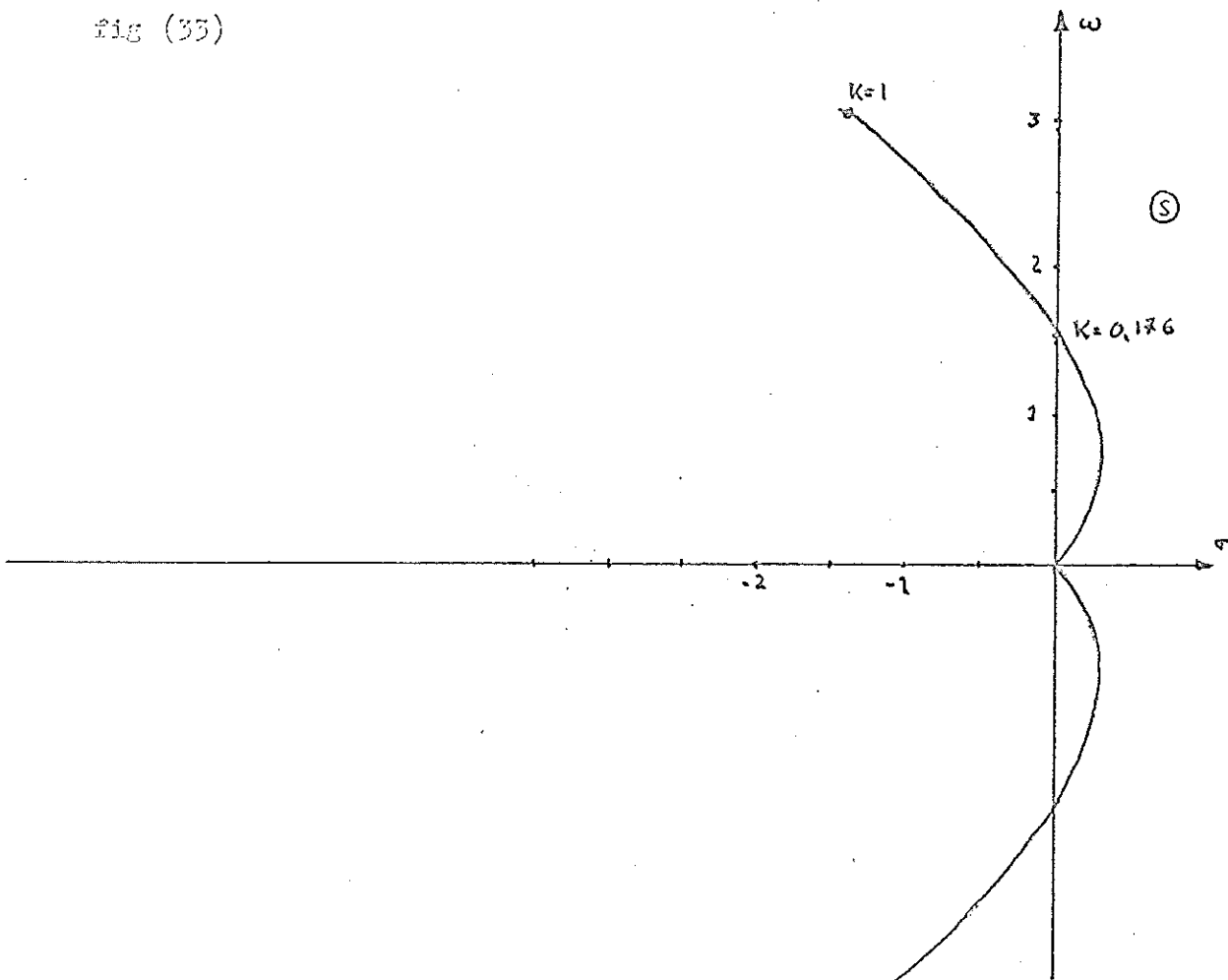
Mätningen kan behandlas som en variabel förstärkning. Detta innebär, att rotortmetoden kan användas för att avgöra lösningarnas stabilitet.

Karakteristiska ekvationen:  $s^3 + K(3,5 s^2 + 13 s + 8) = 0$

$$K = \begin{cases} \frac{2}{|z|} & |z| > 2 \\ 1 & |z| \leq 2 \end{cases} \implies 0 \leq K \leq 1$$

rotort:

fig (33)



För  $K \leq 0,176$  får vi instabila lösningar dvs om  $|z| > 11,385$

$K = 0,176 \Rightarrow$  instabil gränssvängning, ty  $K = \frac{2}{|z|}$  när  $|z| > 2$ , och när  $K$  minskar lite från  $0,176$ , blir lösningarna instabila och  $z$  ökar. Detta medför att  $K$  minskar ytterligare, och rötterna stannar i högra halvplanet.

Av intresse är nu, för vilka signalstorlekar  $K$  blir  $0,176$ .

Mättningsgränsen för de olika signaltyperna är också intressant.

Intressanta signaler:  $U(s) = \frac{A}{s}$ ,  $U(s) = \frac{B}{s^2}$  och  $V(s) = \frac{C}{s}$

Att beräkna stabilitetsgränser för  $A, B$  och  $C$  blir mycket komplicerat. Därför har dessa bestämts genom analoga simuleringar med olika  $A, B$  och  $C$ .

Mättningsgränserna kan utan större svårighet beräknas analytiskt, ty systemet är lineärt ända tills mättningsgränsen passerats. Även här har emellertid analog simulering utnyttjats. Mättningar har gjorts på  $z(t)$  för  $u = 10$ ,  $v = 10$  och  $u = 10 t$ .

$\max_t |z(t)|$  har avlästs för de olika insignalerna

Mättningsgränserna  $A_m$ ,  $B_m$  och  $C_m$  ges då av:

$$\frac{A}{\max_t |z(t)|_{u=A}} = \frac{A_m}{2} \quad \text{och motsvarande för } B \text{ och } C$$

Figur 34 visar  $x_1, x_2, x_3, e, z$  och  $g(z)$  för olika  $u=A$ , olika  $A$ .

Figur 35 visar samma sak för  $u=Bt$ , olika  $B$ .

Figur 36 visar också samma tillståndsvariabler, men för  $v=C$ , olika  $C$ .

Vi får mättningsgränserna

$$A_m = 0,154$$

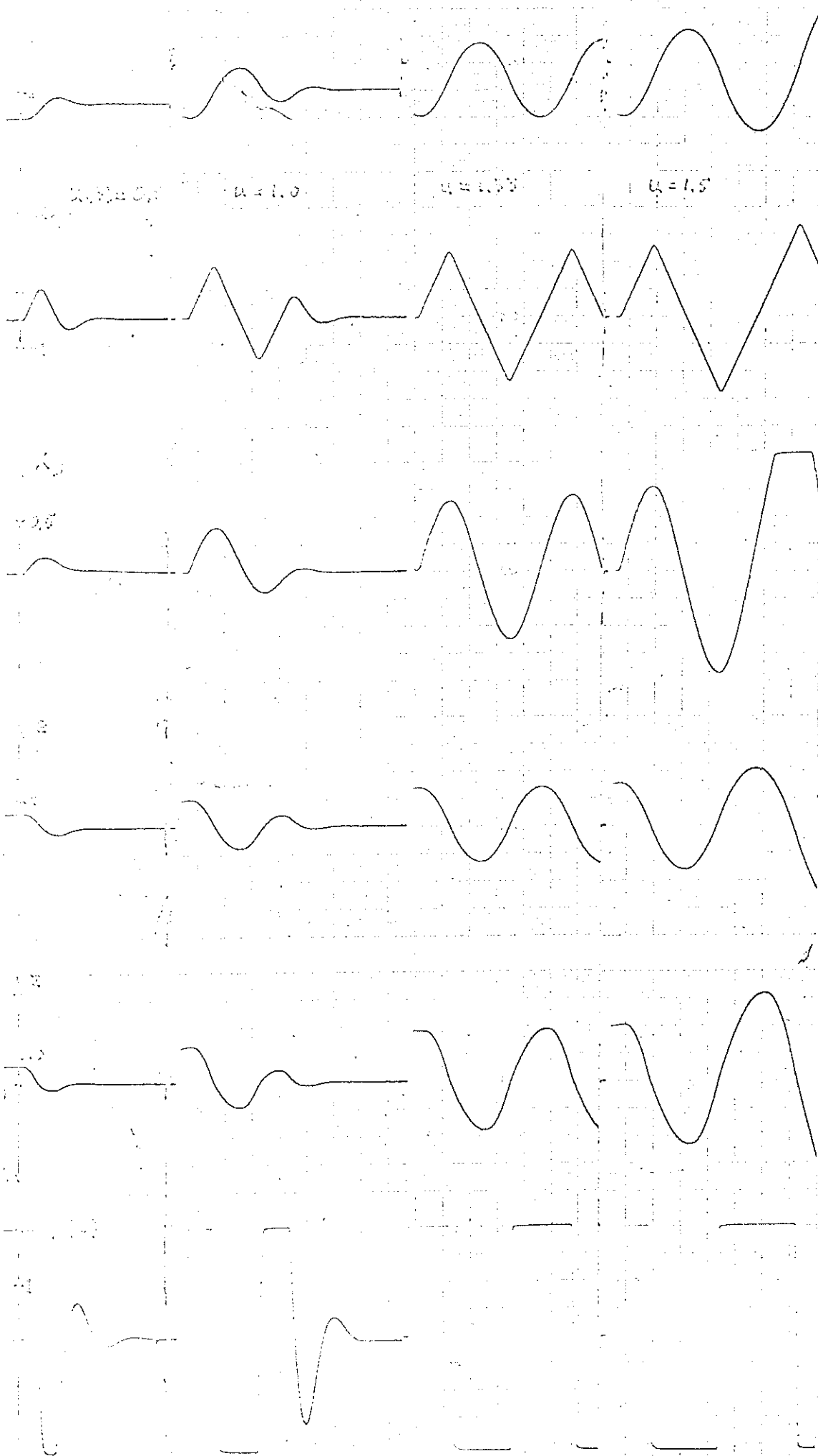
$$B_m = 0,882$$

$$C_m = 0,145$$

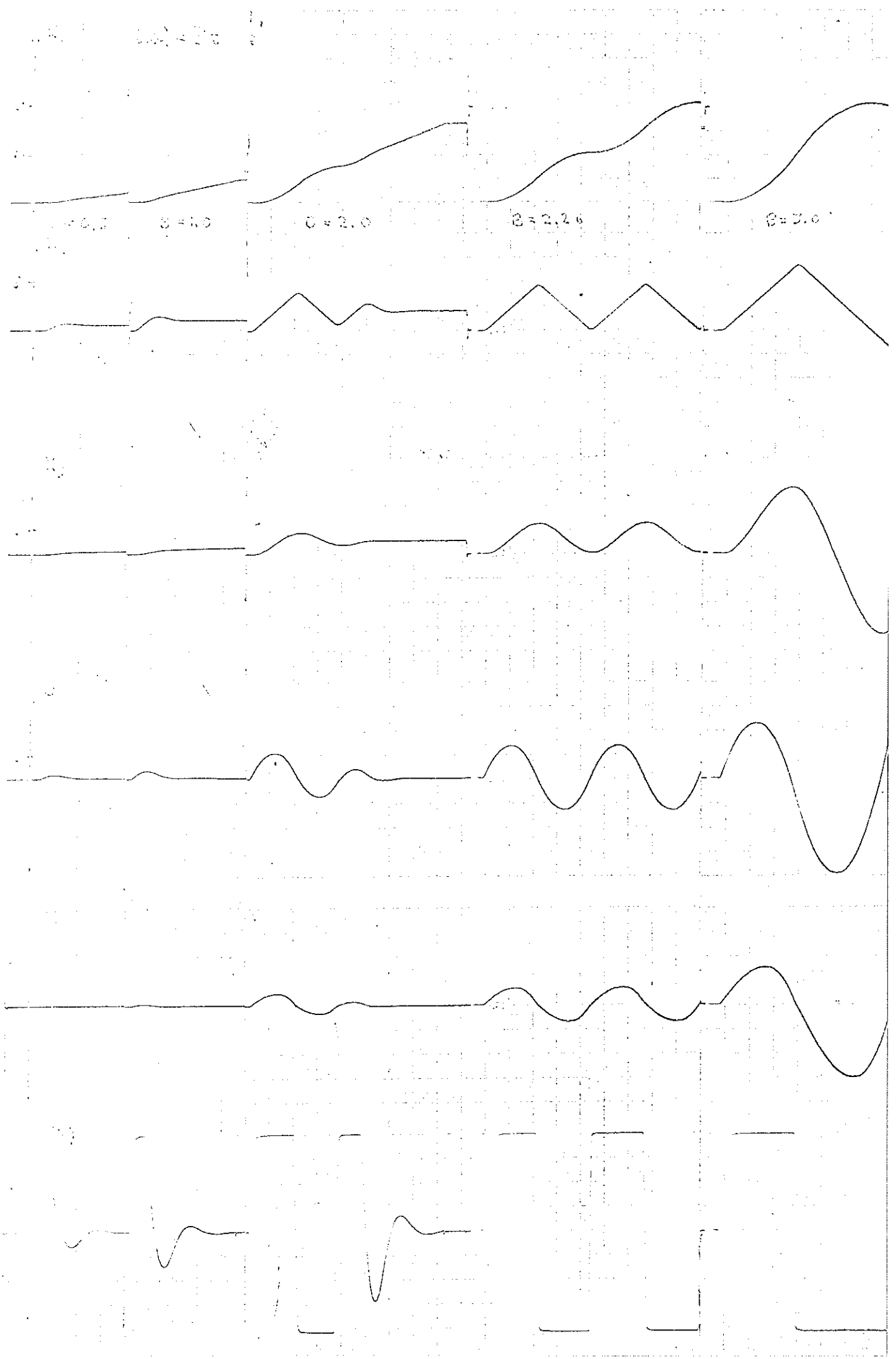


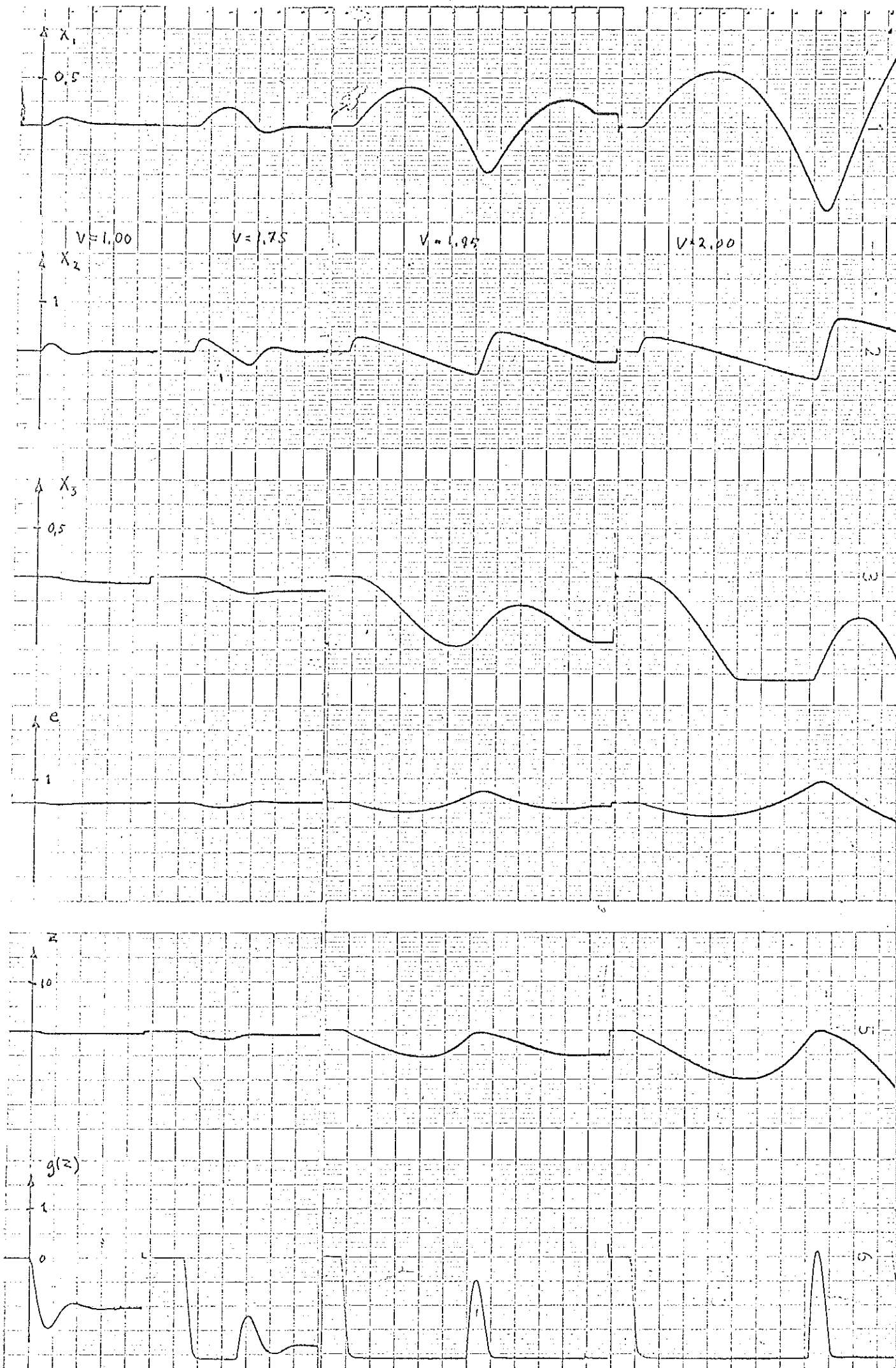
Figur 34.

tidaxeln 5mm/sek



Figur 35.  
tidaxeln 5mm/s





och stabilitetsgränserna

$$A_s = 1,33$$

$$B_s = 2,26$$

$$C_s = 1,95$$

Figur 37 visar  $y$  för  $u=A$  o  $v=C$  samt  $e$  för  $u=Bt$ , ursprungliga systemet.

Möjlighet finns, att genom ändring av konstanterna i systemet höja mättnings- och stabilitetsgränserna, åtminstone för A och B. För C går den absoluta stabilitetsgränsen vid  $C = 2$  ty om  $C > 2$ , får vi  $y = \int_0^t \left[ \int_0^y (2 - z) dz \right] ds$ , som blir en parabelböge.

För att höja mättnings- och stabilitetsgränserna, främst de senare för A och B, göres följande parameterändringar:

1. a och b samma  $K = 5, 10, 15, 25$

Detta ger förhöjande värden när  $K = 15$  och förbättrade för  $K = 10$ .  $K$  måste emellertid höjas mycket för att ändringarna i gränserna skall bli av betydelse. (se sid. 37)

2. Samma system, men  $\omega_0$  ändras från 2 till 1. (se sid. 37)

Diagram 38 visar  $y$  för  $u = A$  och  $v = C$  samt  $e$  för  $u = Bt$

Detta ger:

$$A_s = 5,35 \quad A_m = 0,615$$

$$B_s = 4,55 \quad B_m = 1,70$$

$$C_s = 1,94 \quad C_m = 1,40$$

3. Parametrarna ändras till  $a = 0,43$ ,  $b = 0,73$  och  $K = 10,9$ .

Detta ger  $Kb = 8$  dvs  $\omega_0 = 2$ , som det ursprungliga systemet.

Diagram 39 visar  $y$  för  $u = A$  och  $v = C$ , samt  $e$  för  $u = Bt$

Detta ger oss:

$$A_s = 2,03 \quad A_m = 0,684$$

$$B_s = 2,81 \quad B_m = 1,25$$

$$C_s = 1,93 \quad C_m = 1,55$$

Diagram 47

$\lambda_2$  (14 cm)

$b = 0,75, a = 0,6, 0,8, 1,0$

$a = 1,0$   
 $b = 0,5$   
 $d = 0,3$

$\lambda_1$  (25 cm)

$\lambda$   
(25 cm)

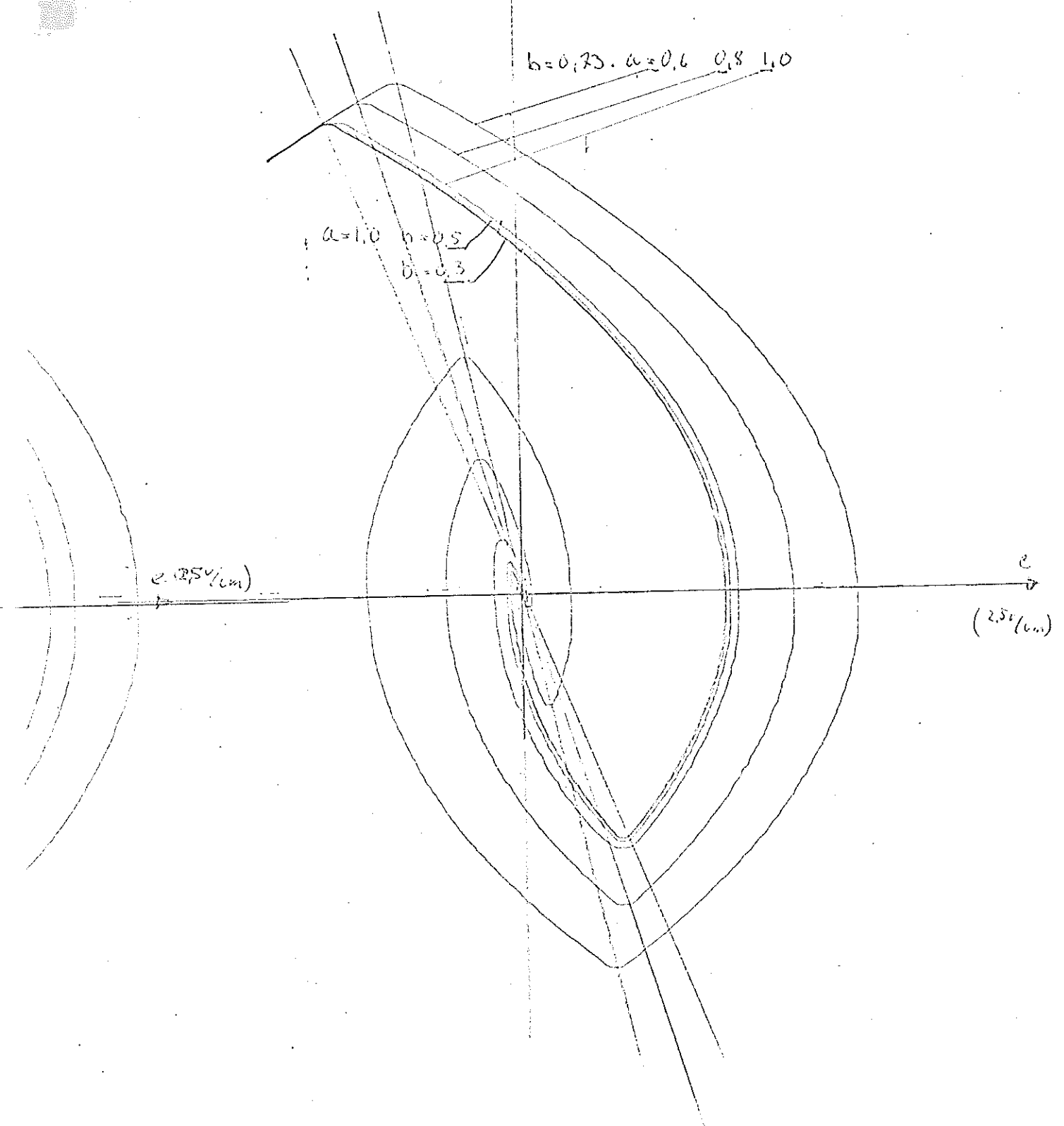


Diagram 37  
tidsskala sek/cm

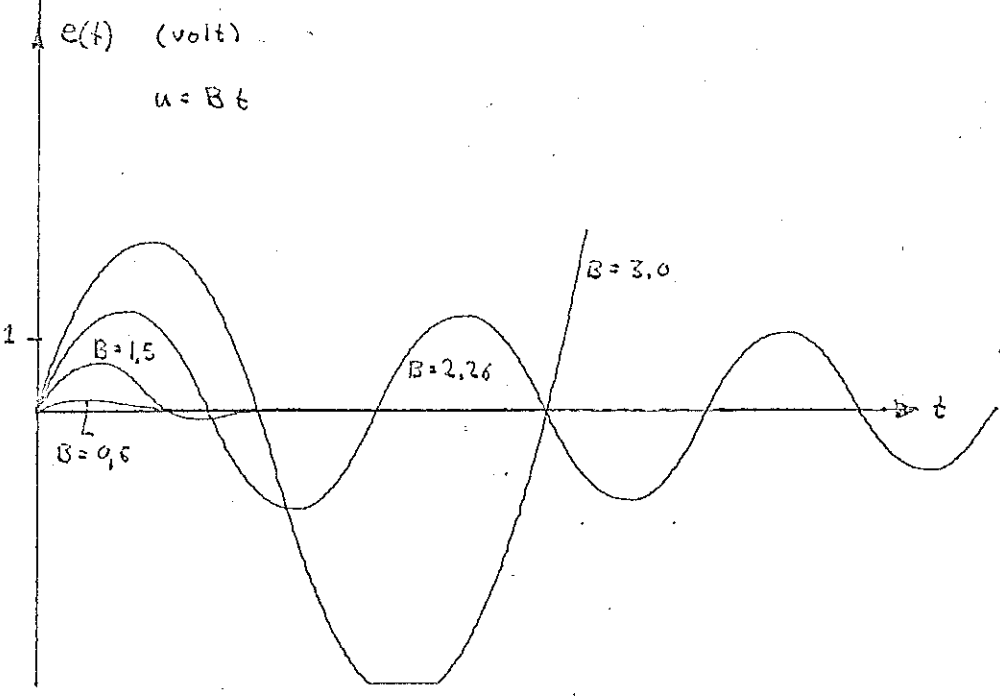
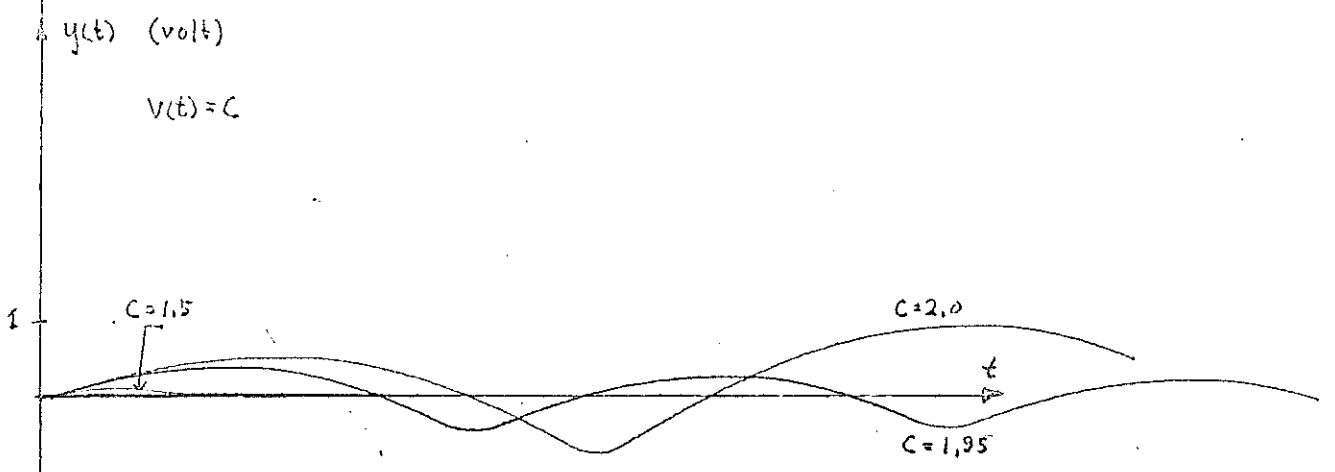
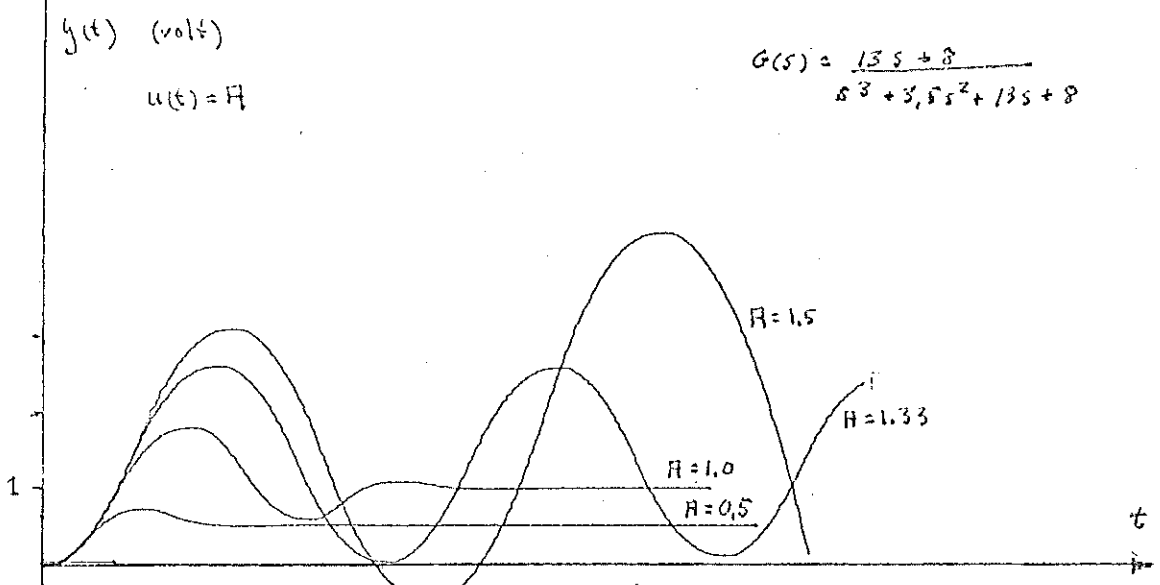
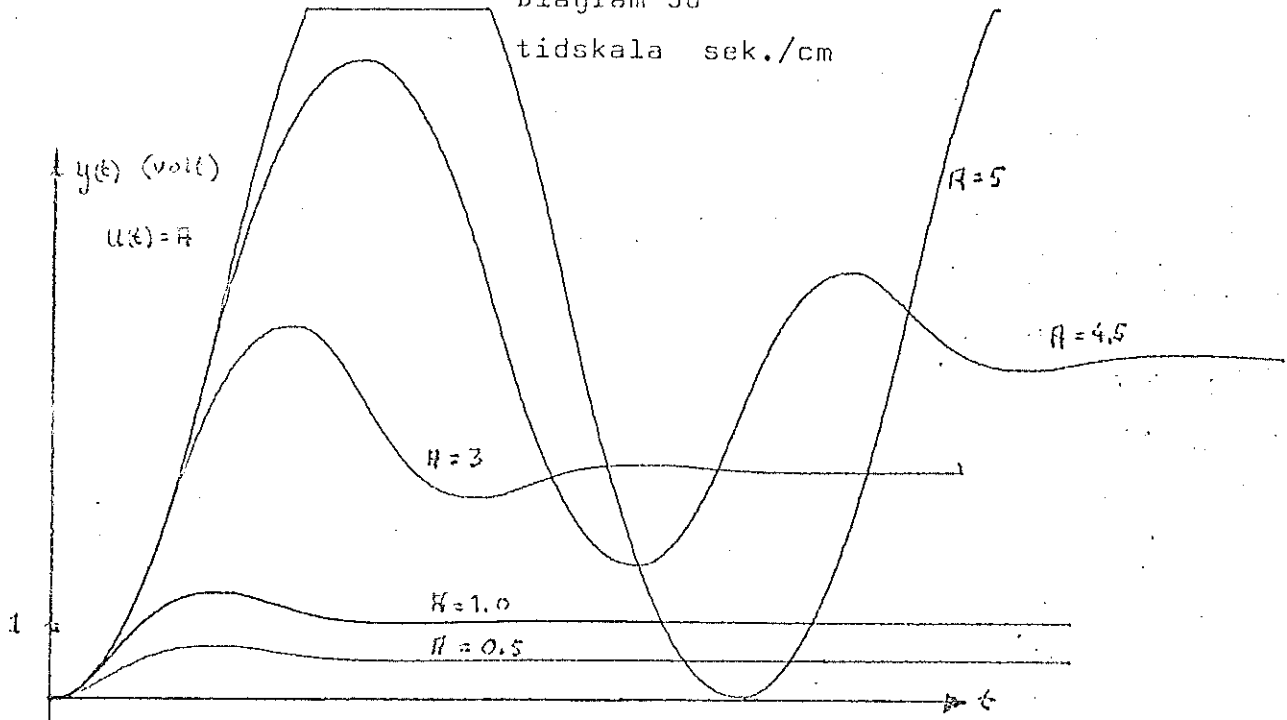
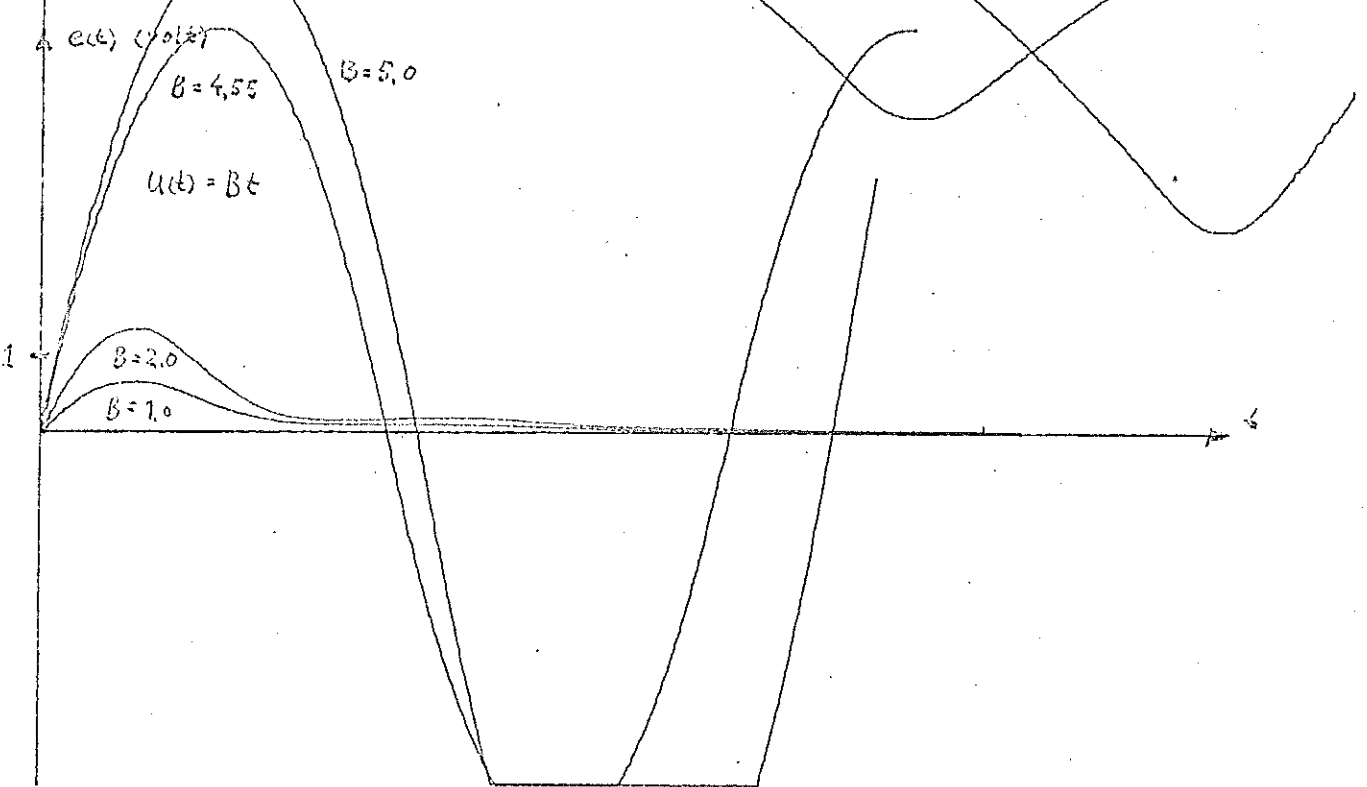
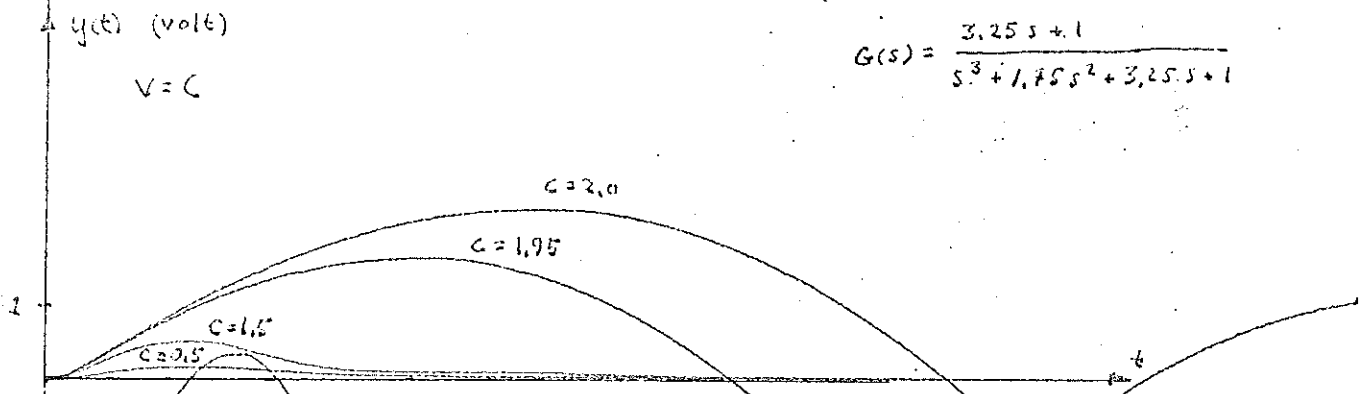


Diagram 38  
tidsskala sek./cm



$$G(s) = \frac{3,25s + 1}{s^3 + 1,75s^2 + 3,25s + 1}$$



villket är en klar förbättring jämfört med det ursprungliga systemet med  $\omega_0 = 2$ .

4. Samma system som i punkt 3, men  $\omega_0 = 1$ .

Diagra 40 visar  $y$  för  $u = 1$  och  $v = C$  samt  $e$  för  $u = Bt$

Detta ger:

$A_s = 3,23$	$A_m = 0,733$
$B_s = 5,70$	$B_m = 2,35$
$C_s = 1,99$	$C_m = 1,60$

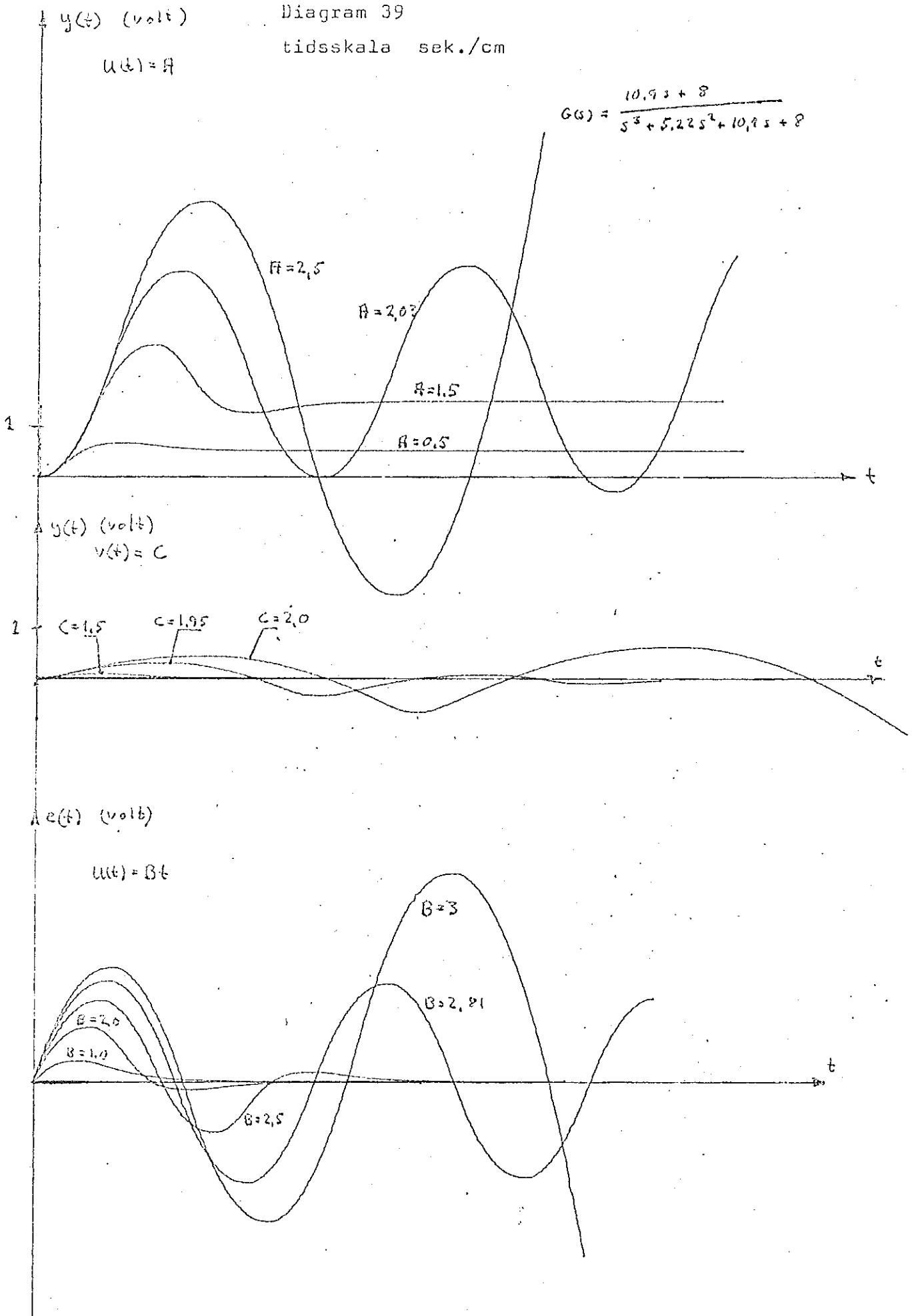
Man ser av diagrammen 37, 38, 39 och 40 att vissa egenskaper hos systemet kan förbättras genom ändring av konstanterna  $a$ ,  $b$  och  $K$ .  $A_s$  och eller  $B_s$  kan ökas. Stegstörning kan undertryckas bättre för  $C$  nära 2.

Det är emellertid svårt att förbättra alla egenskaperna samtidigt, ty om  $A_s$  och  $B_s$  höjs, blir samtidigt  $y_{max}$  för stegstörning nära 2, större, eller också blir lösningarnas konvergens mycket långsam, eller bådadera.

Oavsett hur  $a$ ,  $b$  och  $K$  väljes, kommer vi alltid att ha ett  $A_s$  och  $B_s$  vars höjning, om vi använder lineär kompensering, endast kan köpas till priset av långsammare konvergens, eller andra nackdelar.



Diagram 39  
tidsskala sek./cm



$y(t)$  (volt)

Diagram 40.a.

tidsskala sek./cm

$u(s) = \bar{H}$

$$G(s) = \frac{2,73s + 1}{s^3 + 2,66s^2 + 2,73s + 1}$$

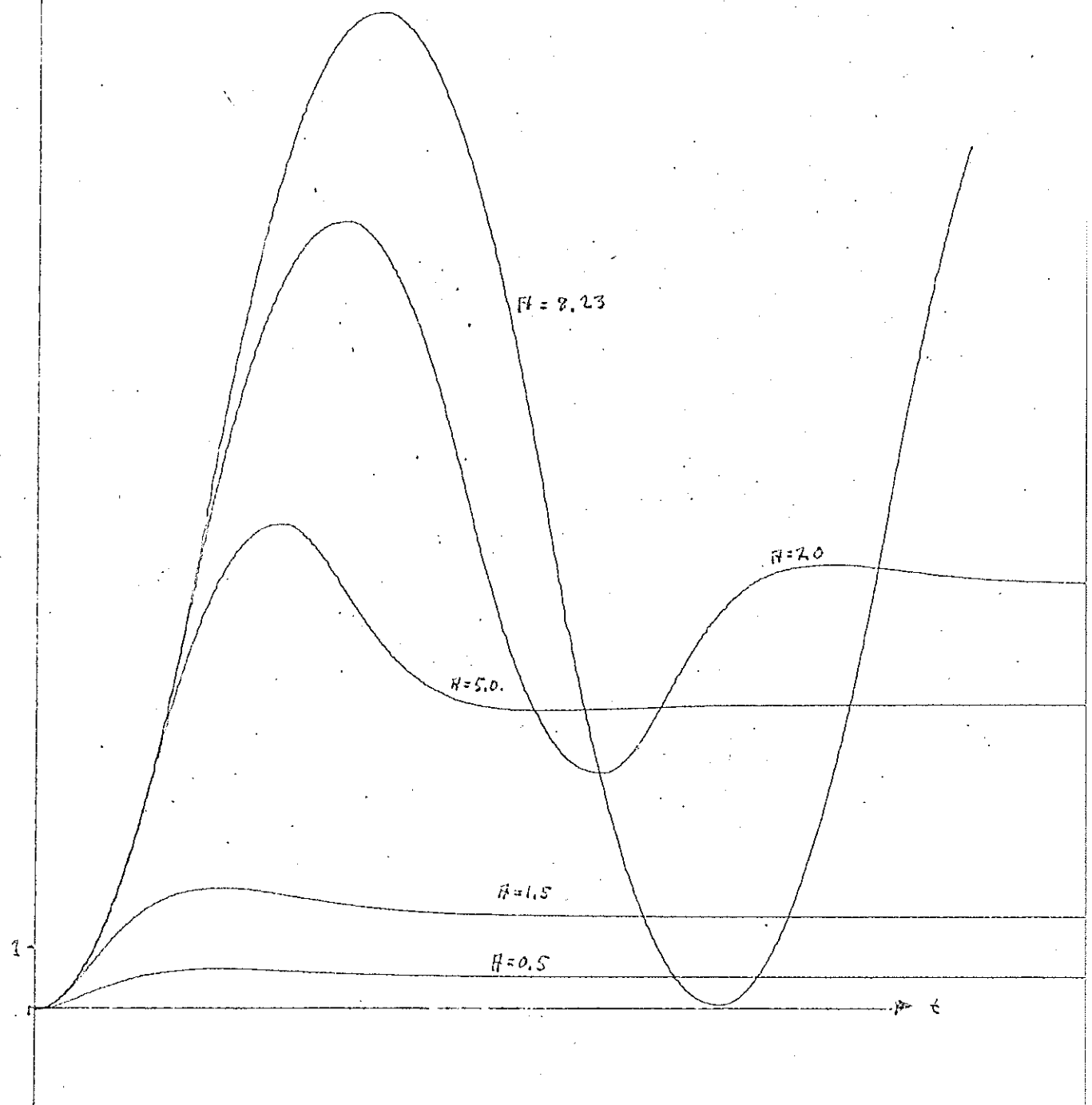
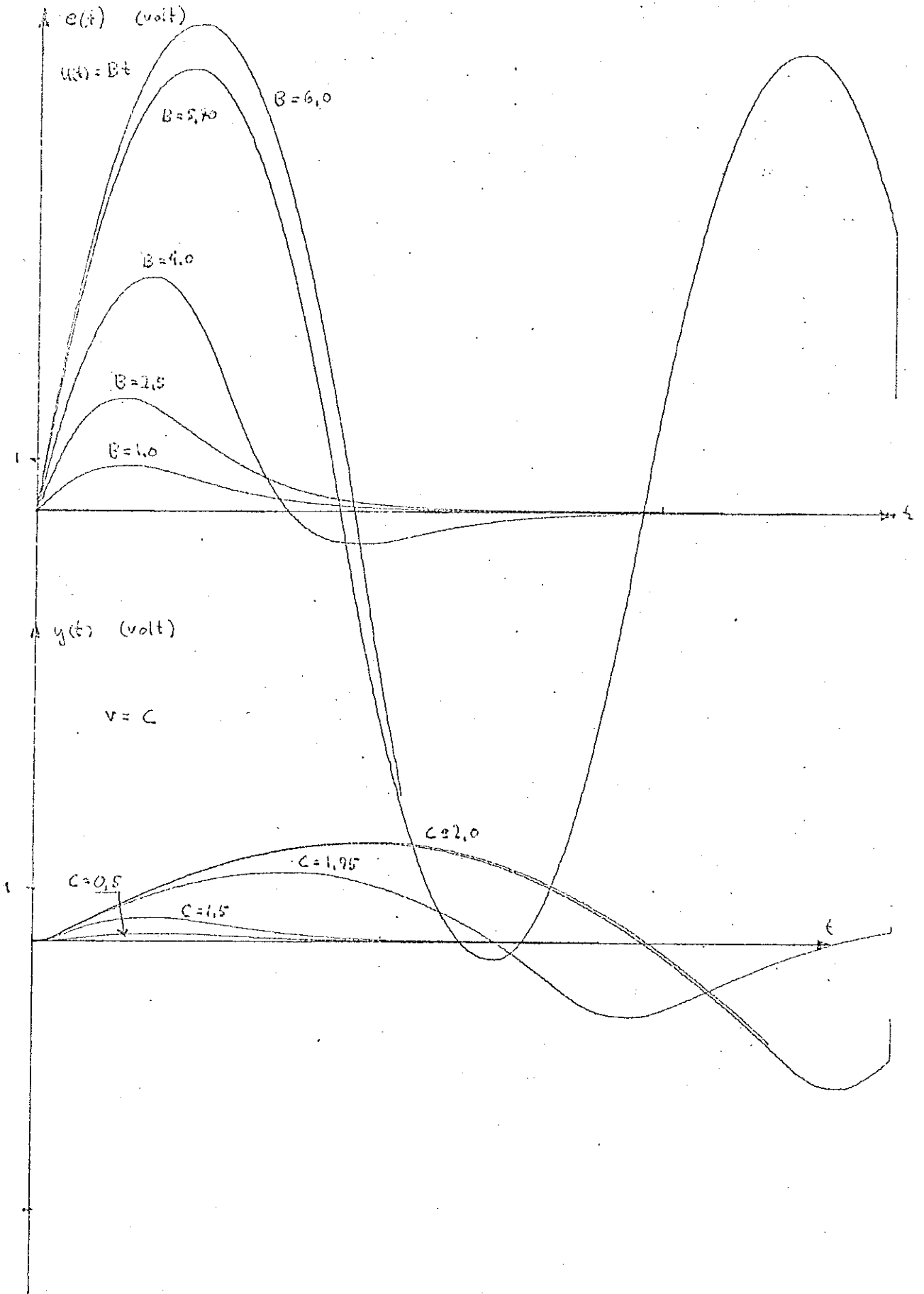


Diagram 40.b.

tidsskala sek./cm



#### IV. 3. Regulatoralternativ

För dubbelintegratorn blir reglerproblemen svårare än för enkelintegratorn. Detta kommer av att den lineärt kompen-  
sorade dubbelintegratorn med mättning har stabila lösning-  
ar endast inom ett begränsat område i fasrummet. (Enkel-  
integratorn stabil för begränsade  $x_1(0)$  och  $x_2(0)$ ). Man  
måste därför nog kontrollera att alla lösningar för de  
signaltyper vi är intresserade av är stabila. Vi kan ald-  
rig få stabila lösningar om  $v(t)$  är steg med amplitud stör-  
re än mättningsgränsen (se analysen). Därför lämnar vi  
genast det problemet.

Önskemål på systemet är enligt kapitel II. Kraven 2 och 4  
är automatiskt uppfyllda i och med att vi har en PI - regu-  
lator. Vi önskar emellertid att kunna följa ramp  $u(t) = Bt$   
där  $|B| \leq 2$  och eliminera steg  $v = C$  där  $|C| < 2$ .

För att tillgodose kraven 1 och 3 kommer några olika icke-  
lineära regulatorer att provas. Olineariteten i regulatorer-  
na kommer att bestå av brytningar, slutningar, nollställningar  
och teckenvändningar.

För att uppfylla krav 3, som är intimt förknippat med lös-  
ningarnas stabilitet, kan man ändra systemet till ett andra  
ordningens system, när signalnivåerna överstiger vissa värden.  
Denna ändring göres, genom att koppla ifrån och nollställa  
den integrerande delen i PI - regulatorn. I ett andra ordnin-  
gens system kan systemkonstanterna väljas så, att lösningar-  
na blir stabila för  $u(t) = A$  och alla  $A$ , trots mättningen.

För att förbättra stegsvaret, kan man dessutom vända tecken  
på signalen till mättningen, när felet är halva insignalen  
eller eventuellt mer eller mindre. När systemet kommer in  
i det området i tillståndsrummet där PI - regulatorn är in-  
kopplad helt, måste då signalens tecken vändas tillbaka till  
det normala. Detta bör ge stegsvaret, som överensstämmer väl  
med optimal rallostyrning.

Följande regulatoralternativ har provats:

- I . PI-reglering när systemet ej mättar ( $b=0,73$ ) och  
P-reglering när systemet mättar ( $b=0$ ). Detta för  
systemet med  $a=0,48$ ,  $b=0,73$  och  $K$  (lineära förstärkn.)=  
 $=10,9$ .
- II. Samma som I, men med andra val av  $a$ ,  $b$ , och  $K$ .
- III. Samma som I, men med följande tillägg:
  - a. Om störsignalen  $v=0$ , och  $e = 1,5$ , PI-reglering tills  
felet är =konstant  $A$ ,  $u(t)=A$ . Konstanten  $=\frac{1}{2}$  för stora  
 $A$ . Därefter teckenvänds  $z(t)$  tills  $e=1,5$ .
  - b. Samma som III.a. men  $z(t)$  bryts istället för teckenvänds.

#### IV.4. Analys av regulator I

För att få bättre stabilitetsmarginaler för A och B, ( $u=Bt, u=A$ ), ändrar vi först den lineära regulatorn. Vi sätter  $K=10,90$ ,  $a=0,48$  och  $b=0,73$ . Systemet får följande överföringsfunktioner:

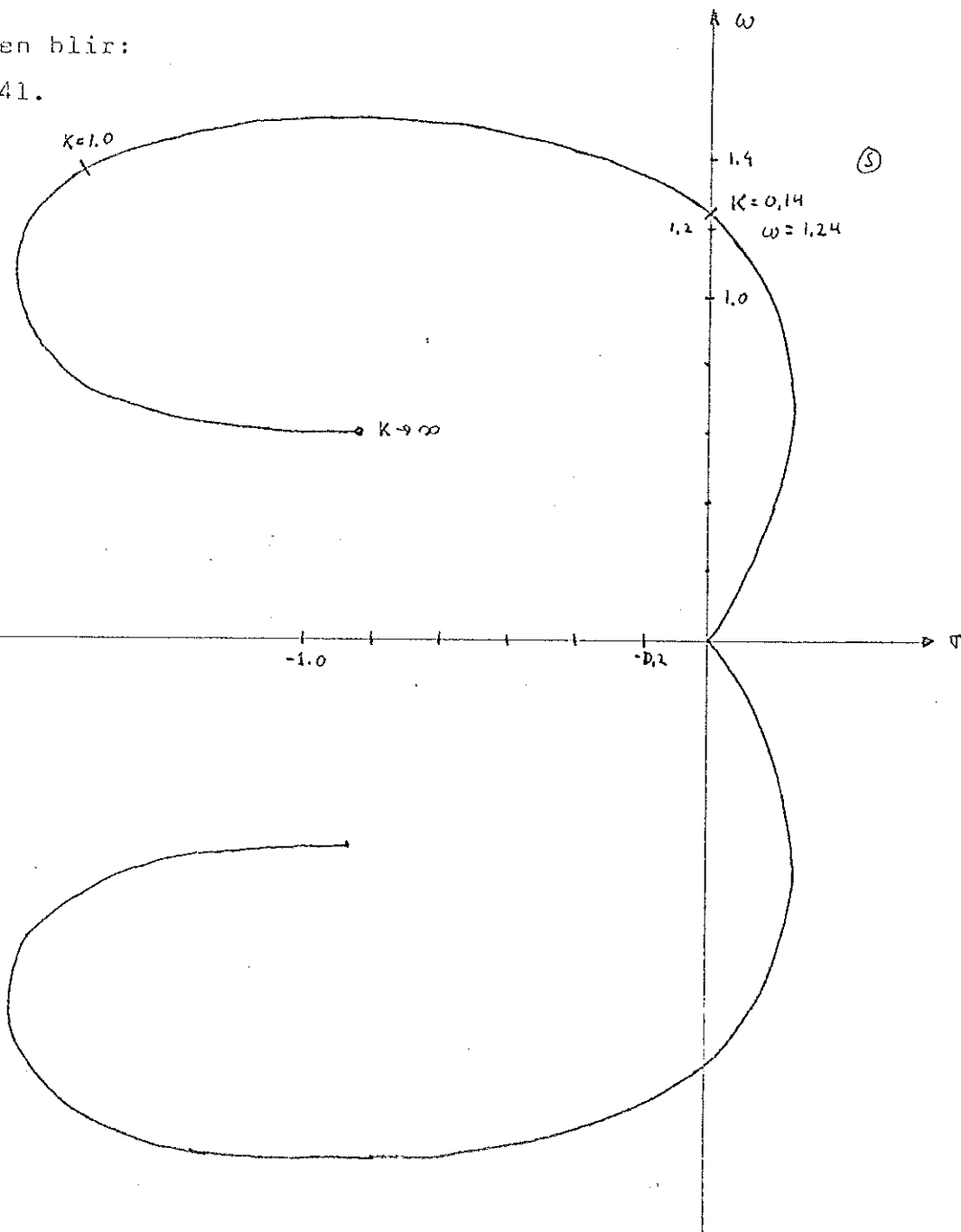
$$Y(s) = \frac{K(10,9s+8)U(s)+sV(s)}{s^3+K(5,22s^2+10,9s+8)} \quad \text{denna nämnare kallar vi: } n$$

$$E(s) = \frac{(s^3+5,22Ks^2)U(s)-sV(s)}{n}$$

$$Z(s) = \frac{(10,9s+8)s^2U(s)-(5,22s^2+10,9s+8)V(s)}{n}$$

rotorten blir:

Figur 41.



När  $b$  sättes  $=0$  och  $x_3$  nollställes, fås följande överföringsfunktioner:

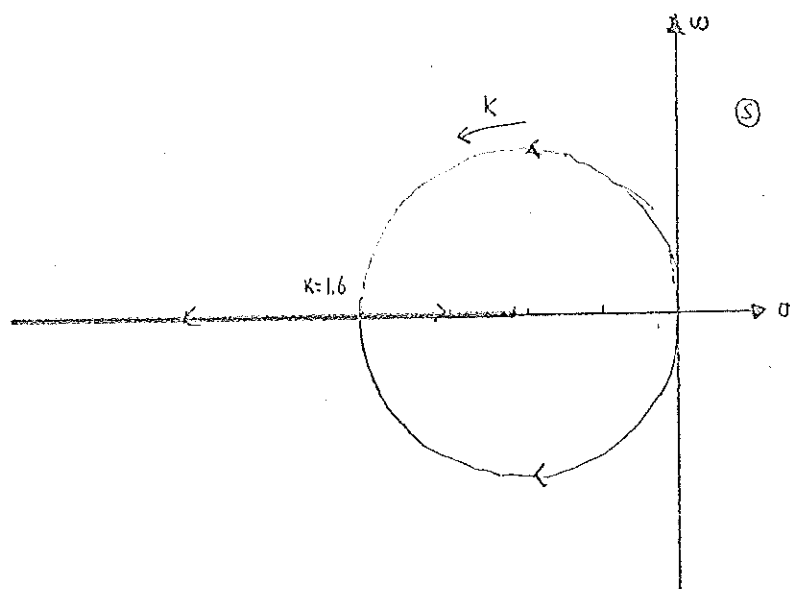
$$Y(s) = \frac{10,9K U(s) + V(s)}{s^2 + (5,22s + 10,9)K} \quad \text{nämnamren} = n_1$$

$$E(s) = \frac{(s^2 + 5,22Ks)U(s) - V(s)}{n_1}$$

$$Z(s) = \frac{10,9s^2 U(s) - (5,22s + 10,9)V(s)}{n_1}$$

rotorten blir:

figur 42.



Av rotorten för systemet med  $b=0$  och  $b=0,73$ , kan man se att den instabilitet, som förekommer i systemet med  $b=0,73$  för små  $K$  ( stora  $z(t)$ ,  $K$  representerar hela tiden mätningen i överföringsfunktionerna.), försvinner om  $b=0$ .

För stora  $z(t)$ , vilket innebär små  $K$  och alltså risk för att lösningarna blir instabila, bör man alltså se till så att  $b$  sättes  $=0$  och integratorn, som ger  $x_3$  nollställes.

För  $v=C$  (större än mättningsgränsen blir emellertid lösningarna alltid instabila ( se sid. 48.)

Om man för  $b=0$  ser på  $E(s)$ , finner man, att  $e_0=0$ ,  
 $e_1=0,48$  och  $c_1 = \frac{-1}{10,9} = -0,092$ .

$v(t)=2$ , som är gränsen för hur stort  $v$  som kan tillåtas. Detta ger ett stationärt fel, som är  $0,184$ , vilket innebär, att vi bör koppla in  $x_3$  igen för ett fel, som är större än  $0,184$ . Om inte, riskerar man att lösningarna stannar för stora  $C$  (strax under  $2$ ), Vi får stationärt fel, eftersom  $x_3$  (PI-regleringen) kanske aldrig kopplas in. Detta kan naturligtvis hända när  $u(t)=A$  och  $u(t)=Bt$  också.

Ett annat mindre trevligt fenomen, som kan uppträda, är, att när  $x_3$  inkopplas, stiger den så snabbt, att  $x_3$  åter nollställes, och vi får små svängningar kring ett jämviktssläge. De dämpas ned långsamt eller kan ibland bli bestående.

I regulator I sättes  $b=0$  och  $x_3$  nollställes när  $|z| \geq 2$ . Detta är icke det bästa möjliga, utan valt, därför att det är systemets mättningsgräns. Det kommer att visa sig att skifningen borde ske för lägre  $z$ , dels för att förbättra stegstörningselimineringen och dels för att undvika "hackningar" mellan  $b=0$  och  $b=0,73$ , för så stora signaler som möjligt.

Enligt tidigare, måste emellertid denna  $z$ -gräns vara större än något bestämt värde för att alla  $v=C, |C| < 2$ , skall kunna elimineras utan stationärt fel. Vi låter därför denna  $z$ -gräns vara  $2$  och provar regulatorn genom simulering.

Diagram 43 visar en "hackning" av nämnd typ, för  $u(t)$  steg.

Diagram 44 visar stegsvar för systemet med regulator I  $u(t) = 2, 5, 10$  och  $15$ . Dessutom fasporträtt för dessa  $u(t)$



Diagram 43

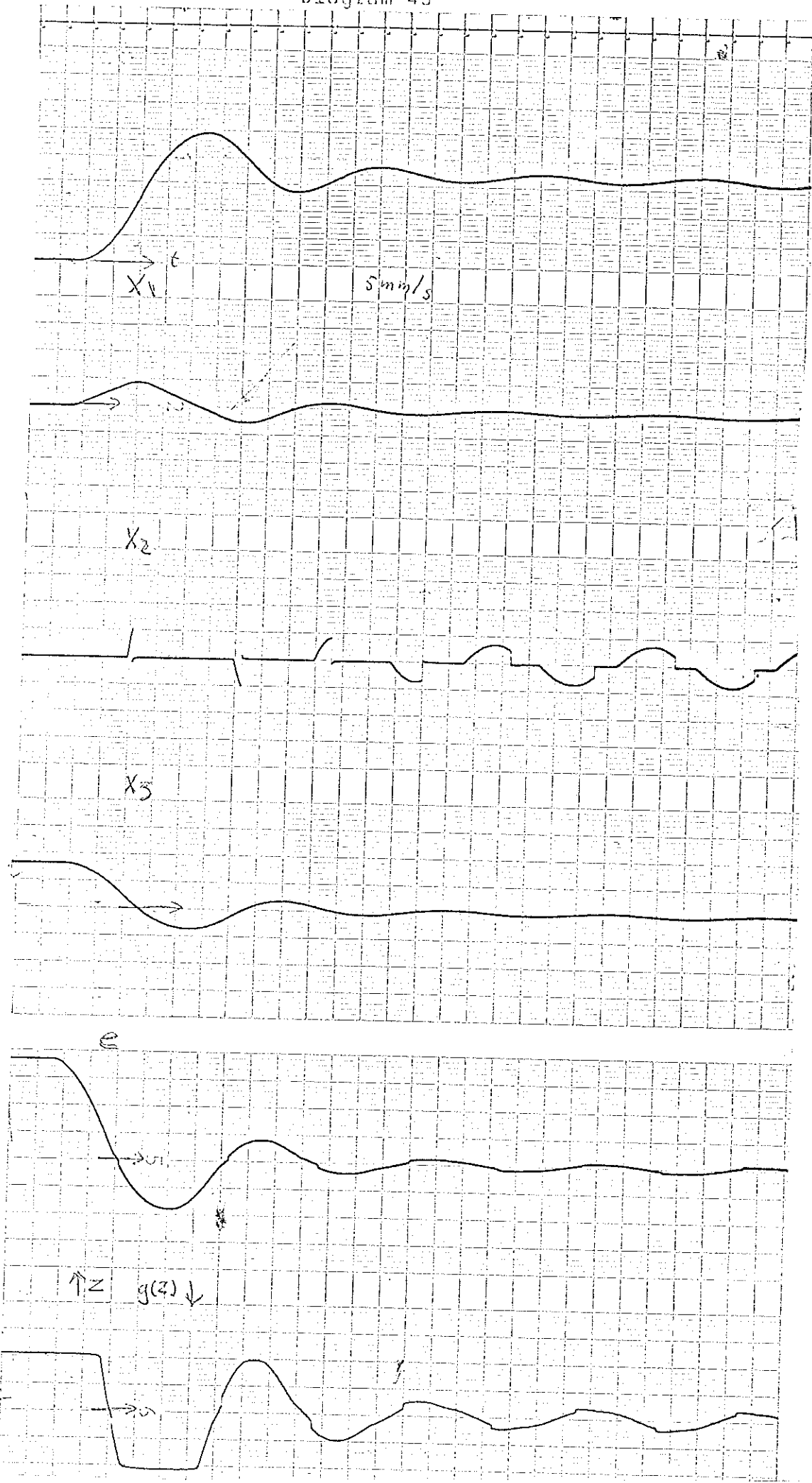


Diagram 19 ↓

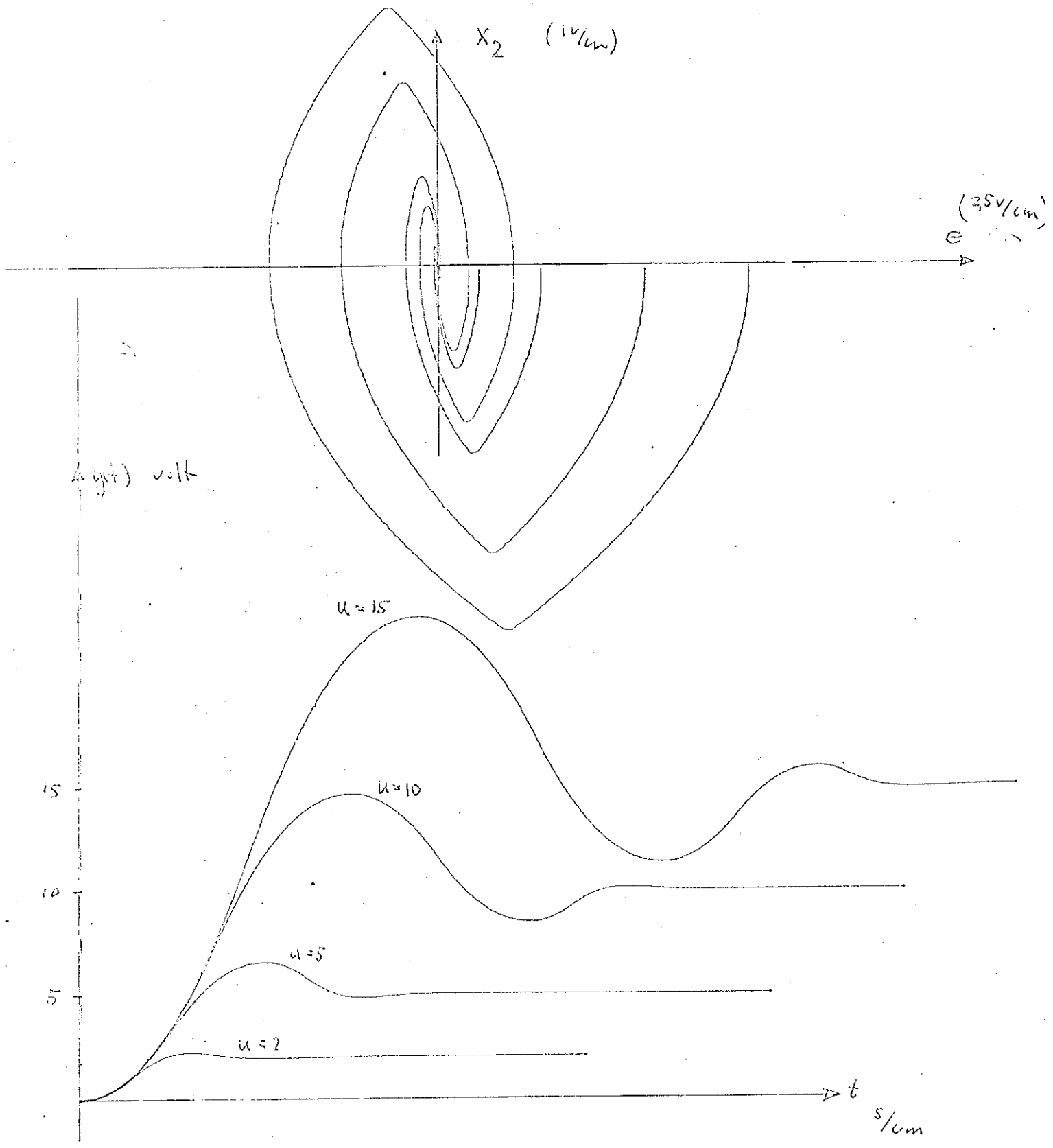
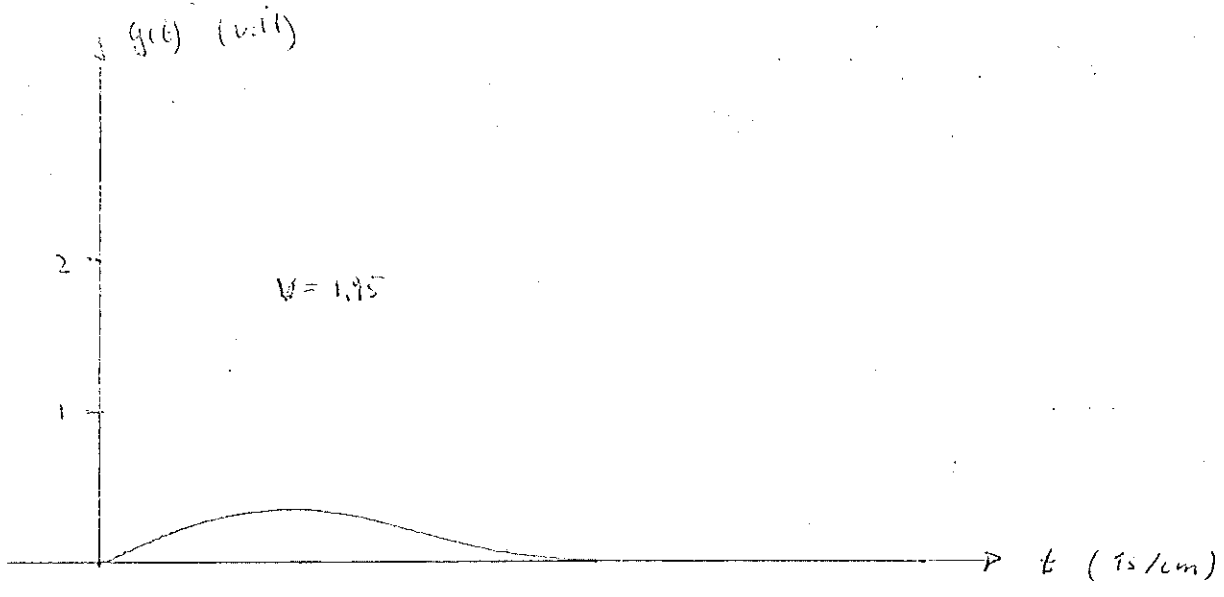
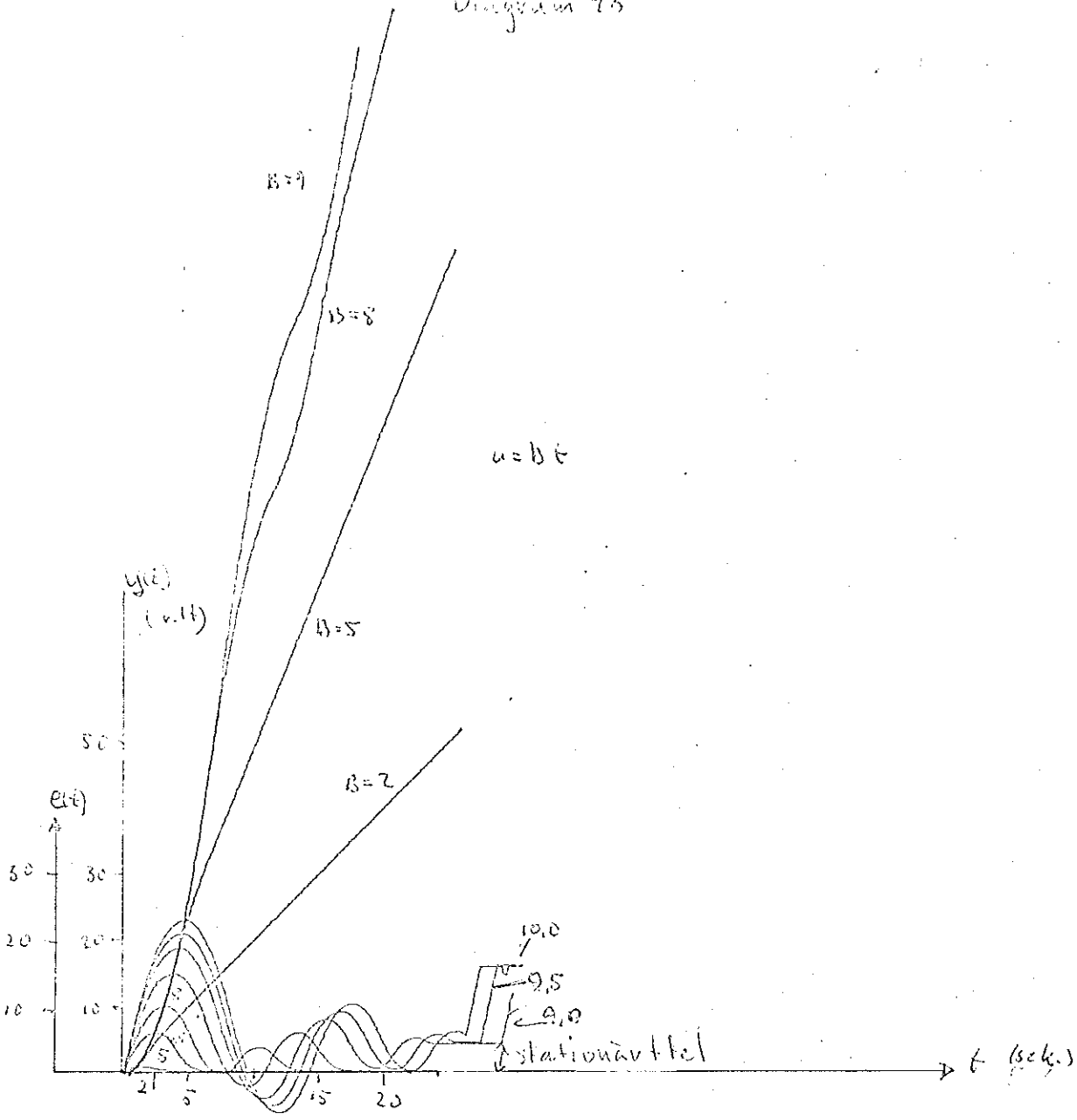


Diagram 45



15  
10  
5

Diagram 45 visar  $y(t)$  och  $e(t)$  för  $u(t)=Bt, B= 2, 5, 8$  och 9. Dessutom visas  $y(t)$  för  $v(t)=1,95$ .

Fasporträtt för systemet med regulator I visas i diagram 46, för olika  $e(0)$  och  $x_2(0)$ .

Vi kan se av diagrammen, att denna regulator ger stora överslängar i stegsvaret. Dessutom klarar systemet ej av att följa ramp med  $|B| \geq 9$ .

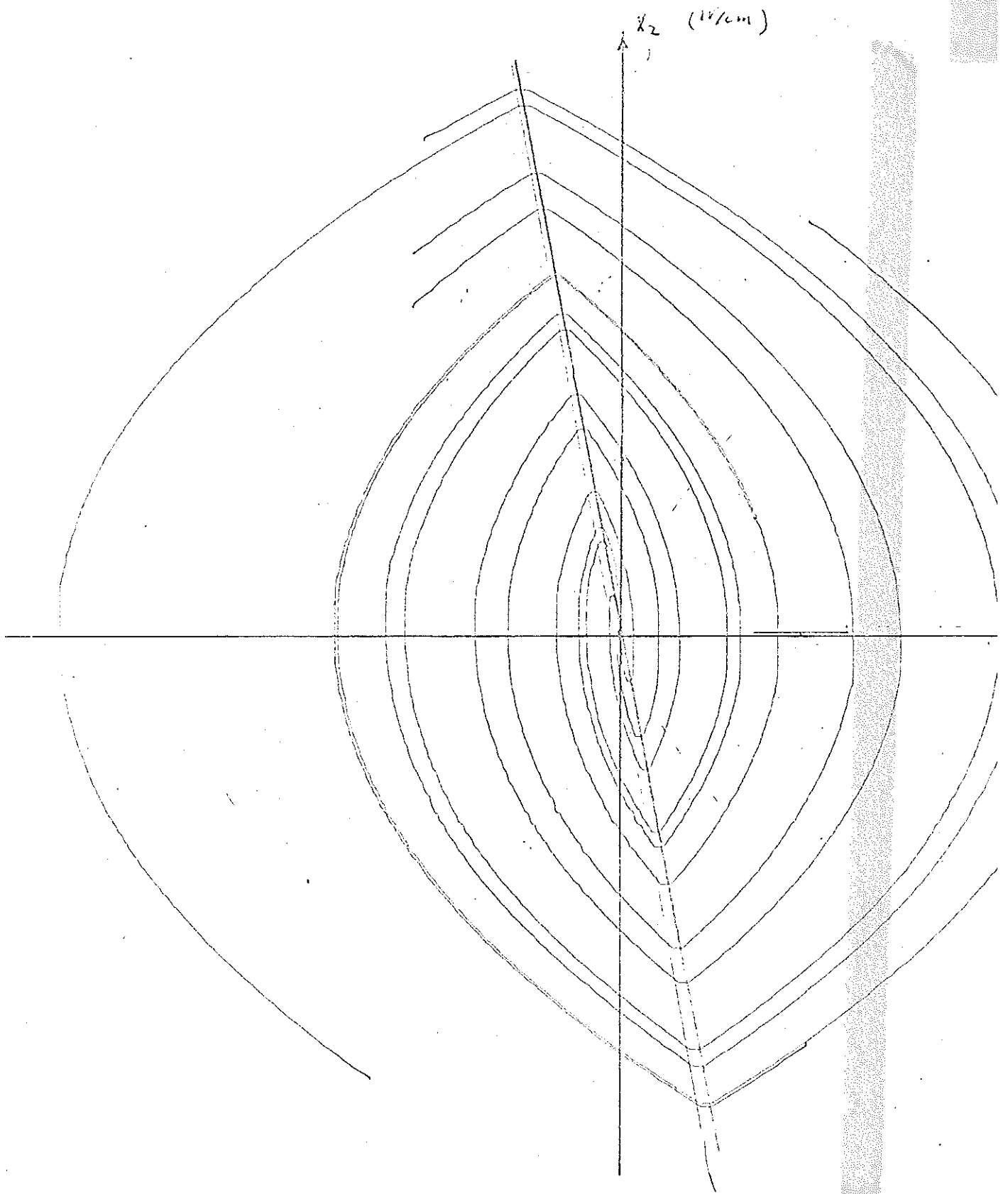
Diagram 48 visar  $x_1, x_2, x_3, e, z$  och  $g(z)$  för  $u=8$

Diagram 49 visar samma sak för  $u=8t$ .

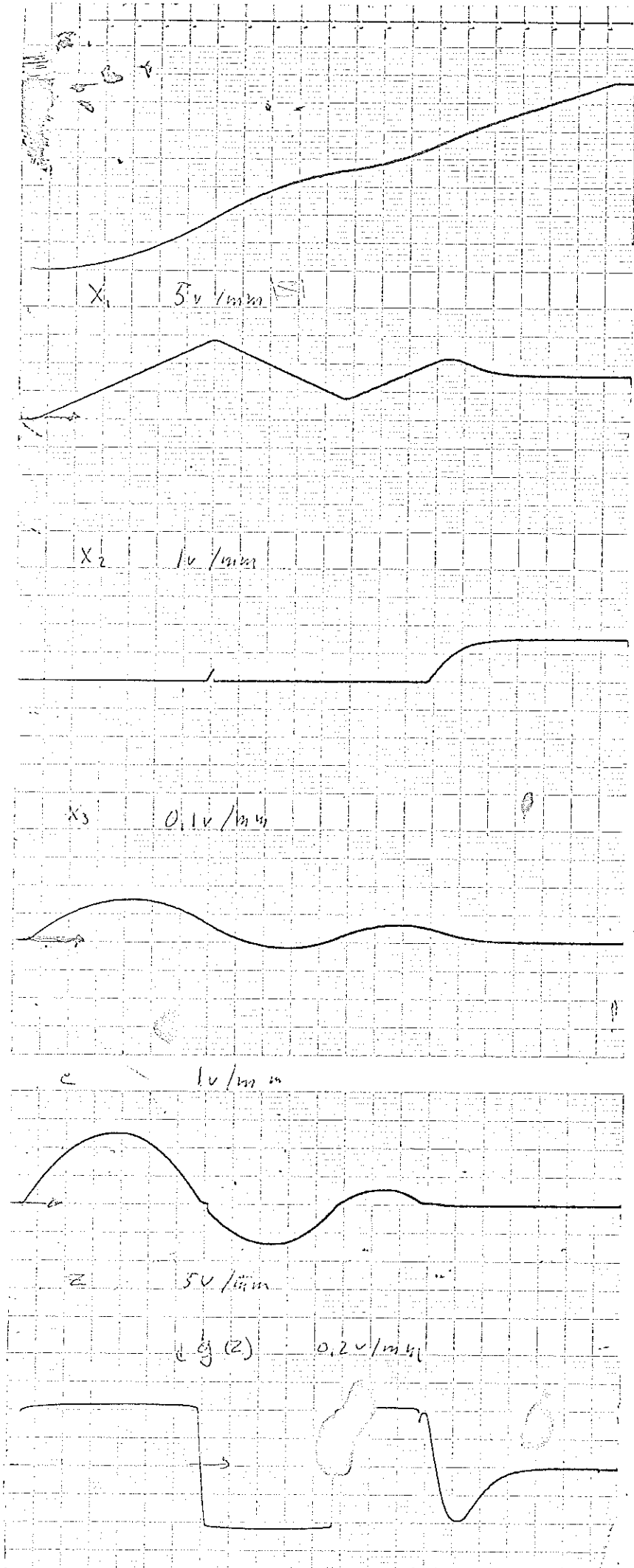
Diagram 50 visar också alla tillstånden i systemet för  $v(t)=1,9$ .

tidsskalan på flärkanalregistreringarna är alltid 5mm/sek. om ej annat anges.

Diagram 96











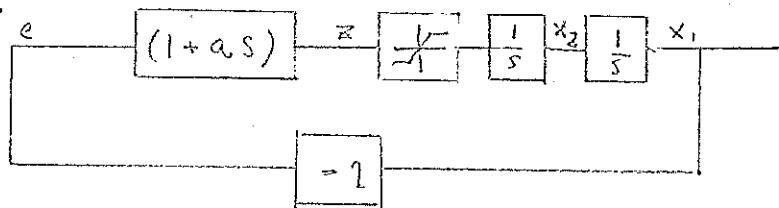
IV.5. Analys av regulator II

Regulator II skiljer sig endast från regulator I däri-  
 genom att vi ändrat några konstanter i de lineära länk-  
 arna för att minska överslängarna i stegsvaren och för  
 att kunna följa ramper med större B utan stationärt fel.  
 Vid höga signalnivåer bestäms systemets snabbhet väsent-  
 ligen av dess mättningsgränser. En ändring i konstanterna,  
 som skulle försämrat systemets snabbhet och andra egen-  
 skaper behöver alltså inte innebära någon väsentlig för-  
 sämring för det olineära systemet. Det visar sig också,  
 att vi får förbättringar med regulator av typ I om vi  
 ändrar några konstanter.

Diagram 47 visar fasporträtt i  $e(t)$  och  $x_2$  för samma  
 $e(0)$  och  $x_2(0)$ , men olika val av konstanterna  $a$ ,  $b$  och  
 $K$ .

Vi ser av detta att lösningens konvergens förättras med  
 ökande  $a$ . Förbättring sker även för minskande  $b$ , men i  
 mindre omfattning. När  $a$  ökar får man en större fas-  
 avancering. Ty om  $b=0$  och insignal saknas, kan syste-  
 met beskrivas med följande blockschema:

figur 51.

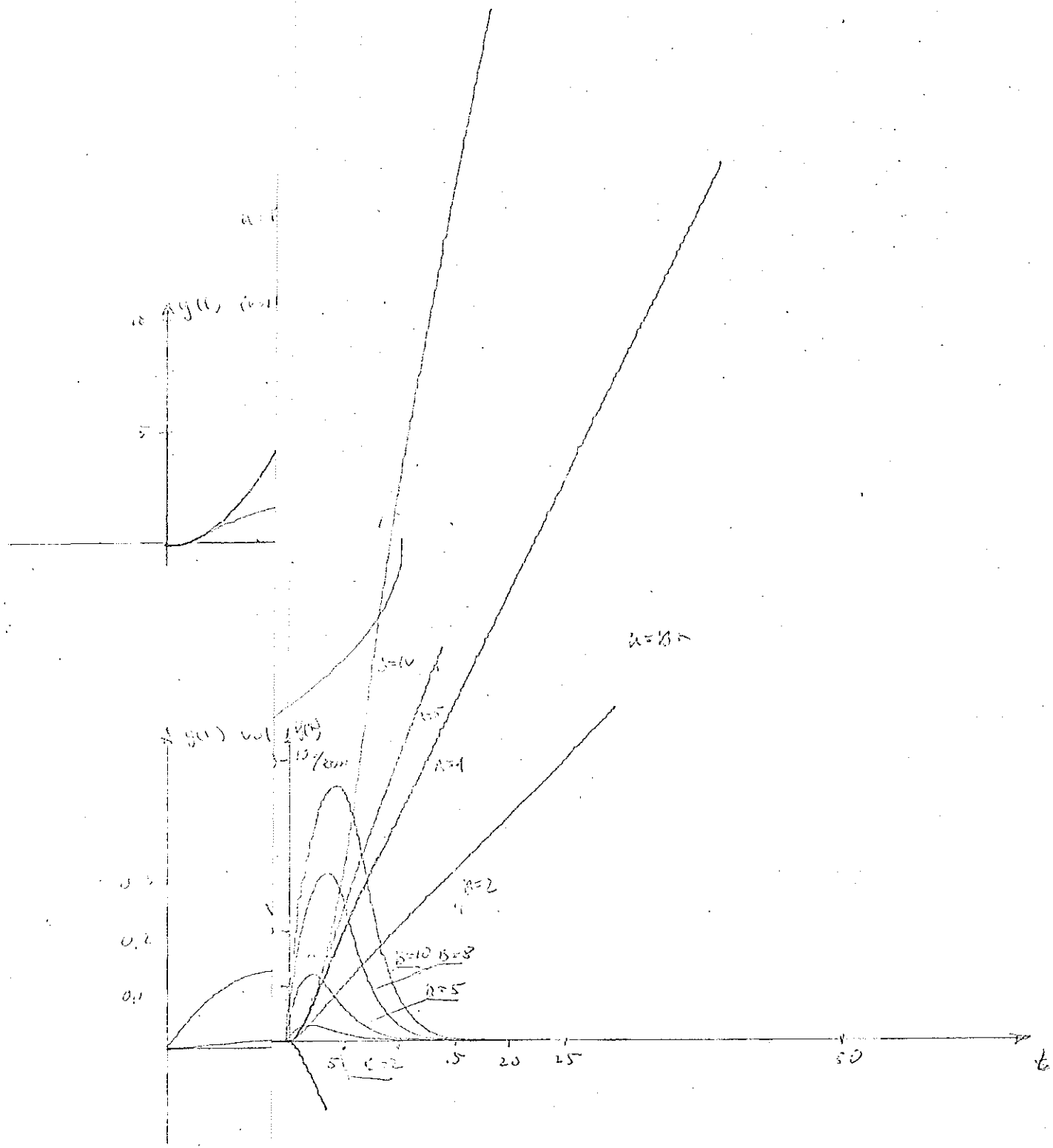


$1+as$  är en fas avancerande länk och den ger fas-avancering-  
 en  $\arg(1+aj\omega)$ , som ökar med  $a$ . Detta innebär, att till-  
 ståndet  $x_2$  snabbare påverkar  $z(t)$  som i sin tur ger en  
 motverkande insignal till integratorn, som ger  $x_2$ . Detta  
 innebär, att lösningarnas banor i  $e, x_2$  -planet, ändrar  
 riktning i  $x_2$ -led för mindre  $e$  ju större  $a$  blir.

Diagram 52 visar  $y(t)$  för  $u = 2, 8, \text{ och } 15$ . och  $v(t) = 1,95$  samt  $e(t)$  och  $y(t)$  för  $u = \dot{b}t$ ,  $B = 2, 4, 5, \text{ och } 10$ . Dessutom fasporträtt i  $e$  och  $x_2$  för  $u = A$ , olika  $A$ .

Vi kan av dessa figurer se, att överslängarna på stegsvaren minskat kraftigt, men i gengäld konvergerar lösningarna mycket långsamt den sista biten. Stegstörningsundertryckningen har också förbättrats något. Detsamma gäller förmågan att följa ramp. Av figurerna kan vi se att detta system klarar av  $B = 10$  utan stationärt fel. Vid stora steg i  $u(t)$ , får vi också en ganska kraftig översläng tyvärr. Denna regulator har alltså både fördelar och nackdelar..

Diagram



IV.5. Analys av regulator III

För att ytterligare förbättra stegsvaren, införes ytterligare en icke-lineär enhet i regulatorn, som i övrigt är enligt I. När  $v=0$ , låter vi regulatorn vara både proportionell och integrerande (PI) så länge  $|e| > 1,5$  och om det  $e$  strider mot villkoren för regulator I. Dessutom teckenvänder vi  $z(t)$  när  $|e - \frac{1}{2}u|$  passerar noll.

Detta gäller regulator III.a. för regulator III.b. bryter vi  $z(t)$  istället för att teckenvända. Detta förfarande ger i fall III.a. stegsvar, som så länge  $e > 1,5$  och  $z = 2$  följer samma bana som om systemet hade haft optimal relästyrning.

Diagram 53 visar  $y(t)$  för  $v=1,95$  och  $u=2, 5, 10$  och  $15$ , med regulator III.a.

Diagram 54 visar fasporträtt i  $e$  och  $x_2$  för  $u=5, 10$  och  $15$ , samt  $u=\beta t$ ,  $\beta=2, 5, 5,0$  och  $8,0$ . Regulator III.a.

Diagram 55 visar fasporträtt för samma regulator i  $e$  och  $x_2$  för olika  $e(0)$  och  $x_2(0)$ .

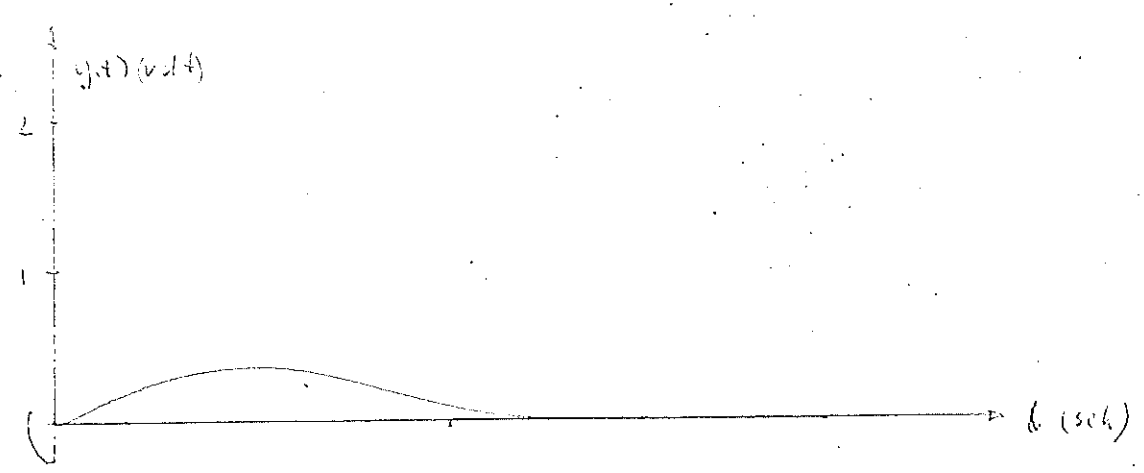
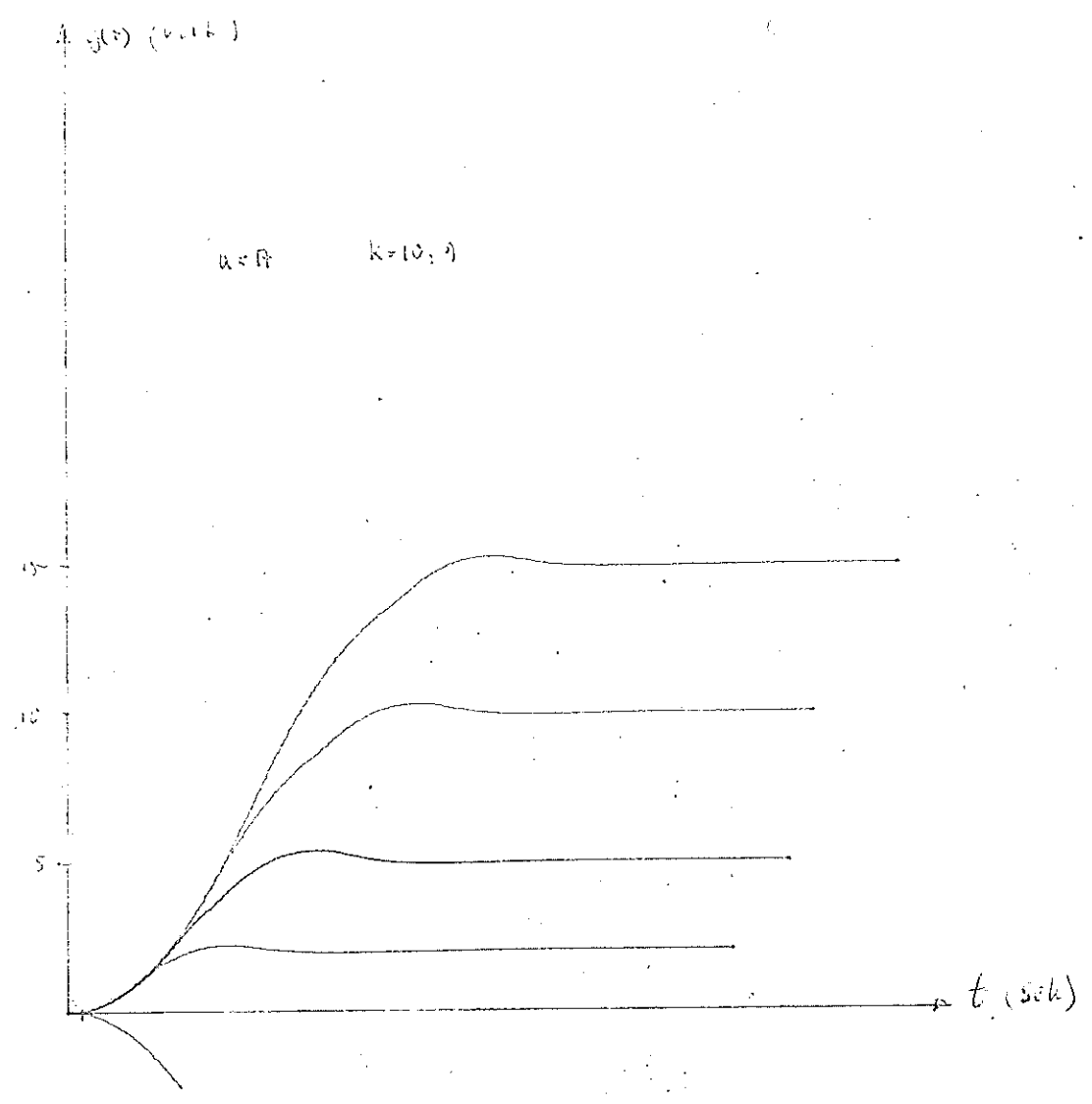
Överslängen i stegsvaren, blir mer märkbar för små  $u=A$ , ty när  $e = \frac{1}{2}u$  för små  $A$ , är  $e$  också mindre än  $1,5$ . Detta innebär, att någon teckenvändning av  $z(t)$  aldrig sker. För att råda bot på detta kan man om  $|u| \leq 3$  låta teckenvändningen ske tidigare än när  $e = \frac{1}{2}u$ .

Detta visas för  $u=2, 5, 5,0$  och  $10,0$  i diagram 56.

Stegsvar för  $u=8$  för både regulator III.a. och III.b. visas i diagram 57.

Den enda skillnaden för lösningarna, är att stegsvaret blir sämre för III.b.

Diagram 53  
tidsskala cm/sek.



2,5 v/cm på alla axlar

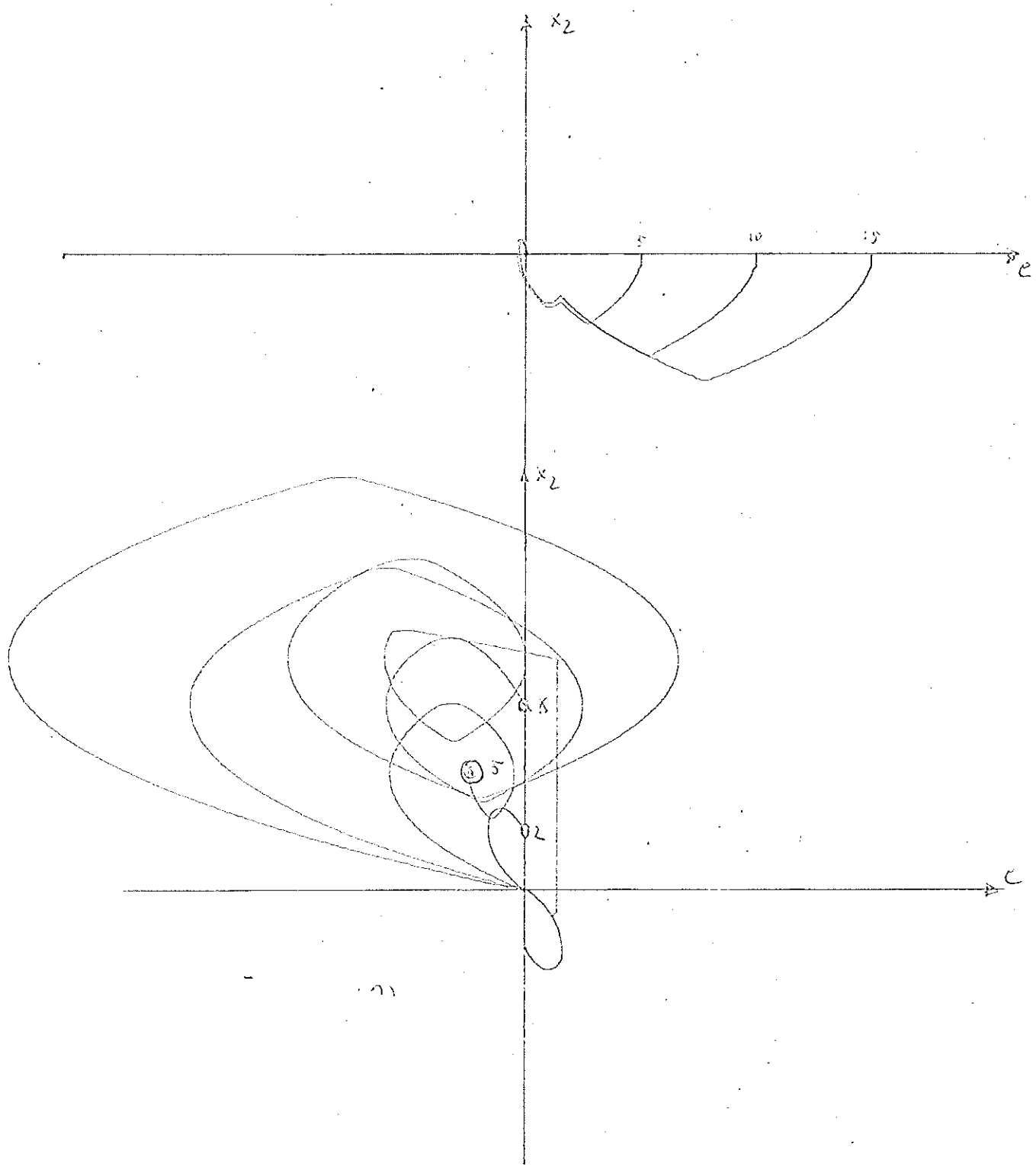
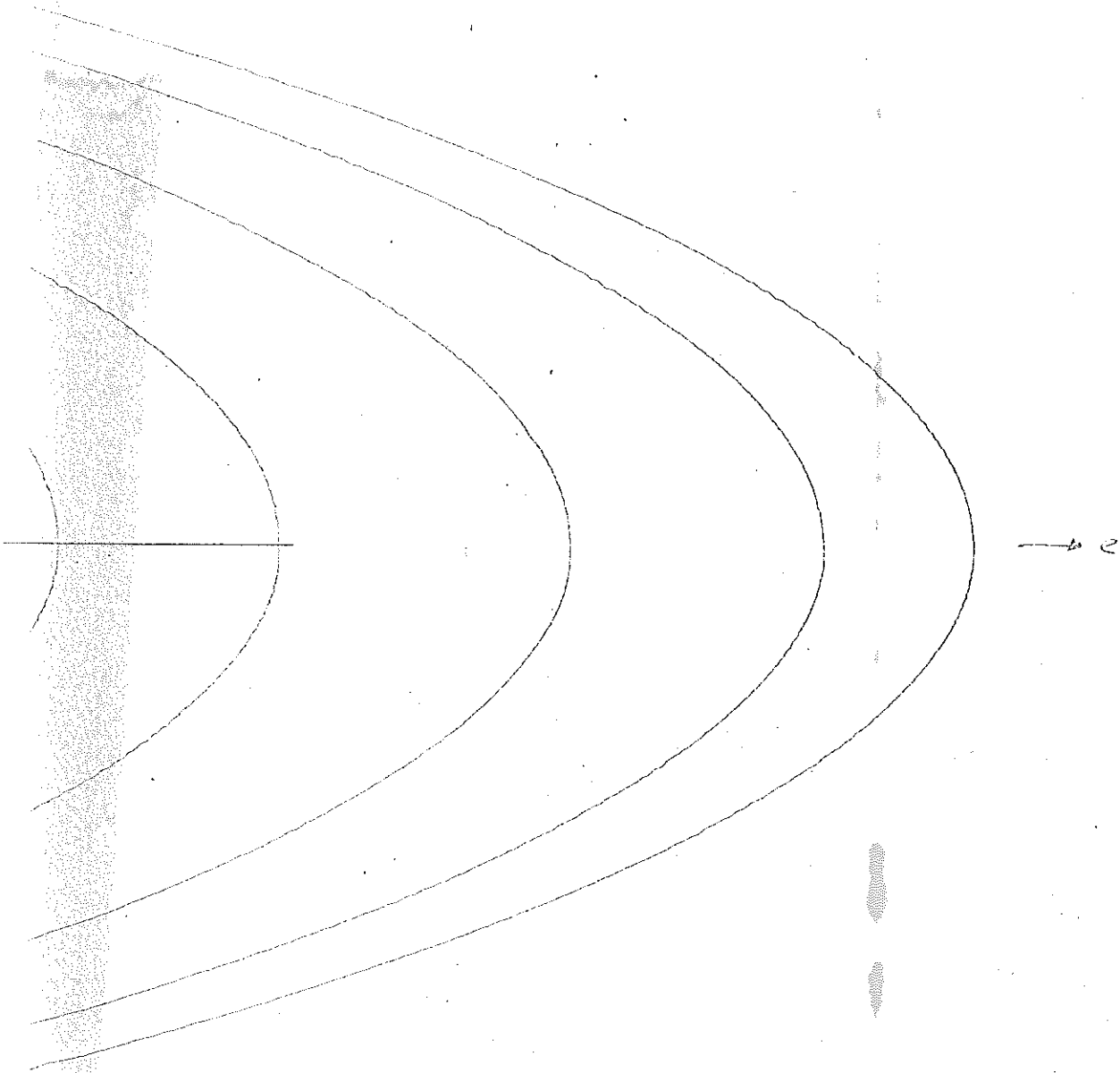


Diagram 53  
vrem alla axlar



$\Delta x_2$

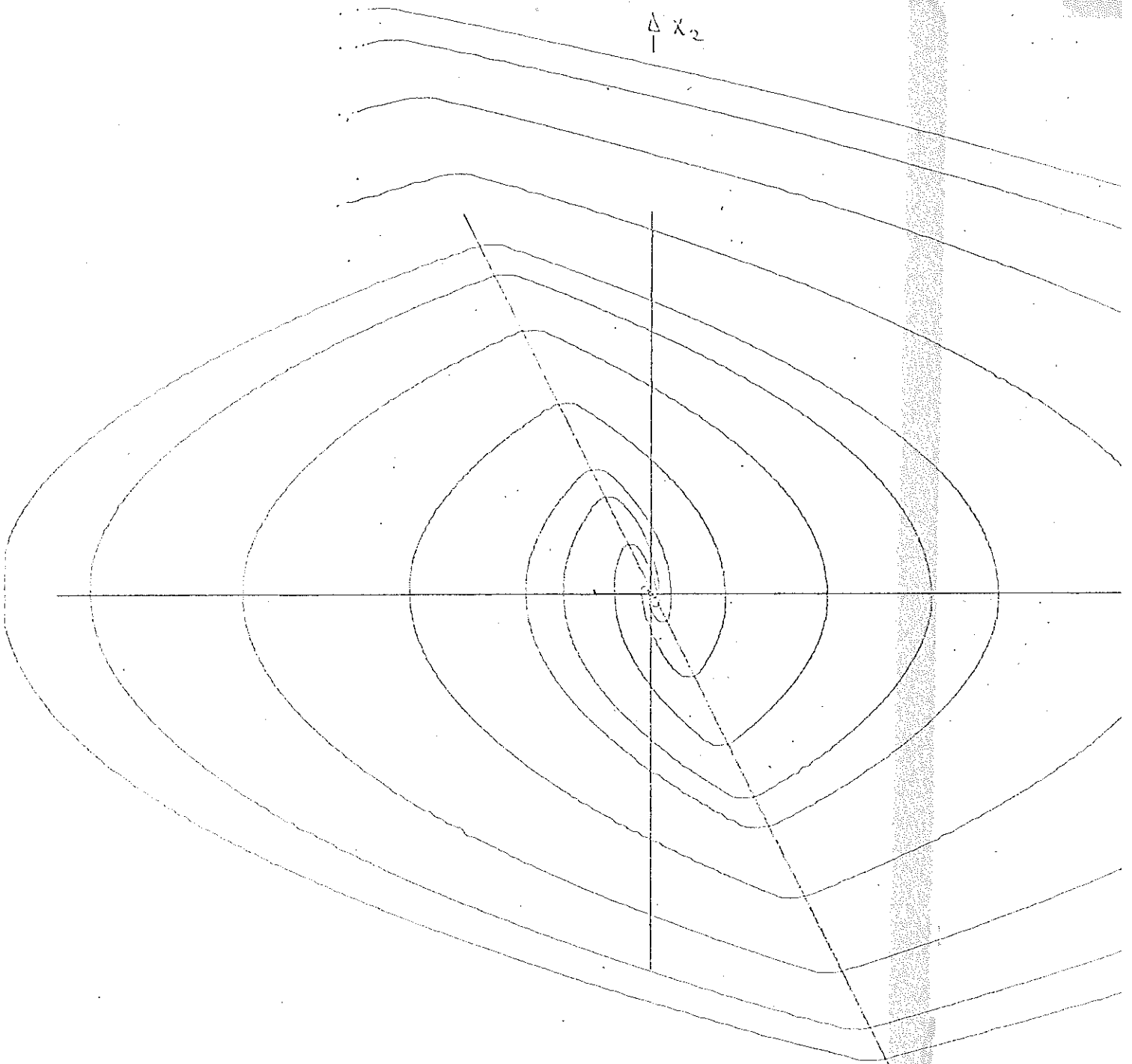
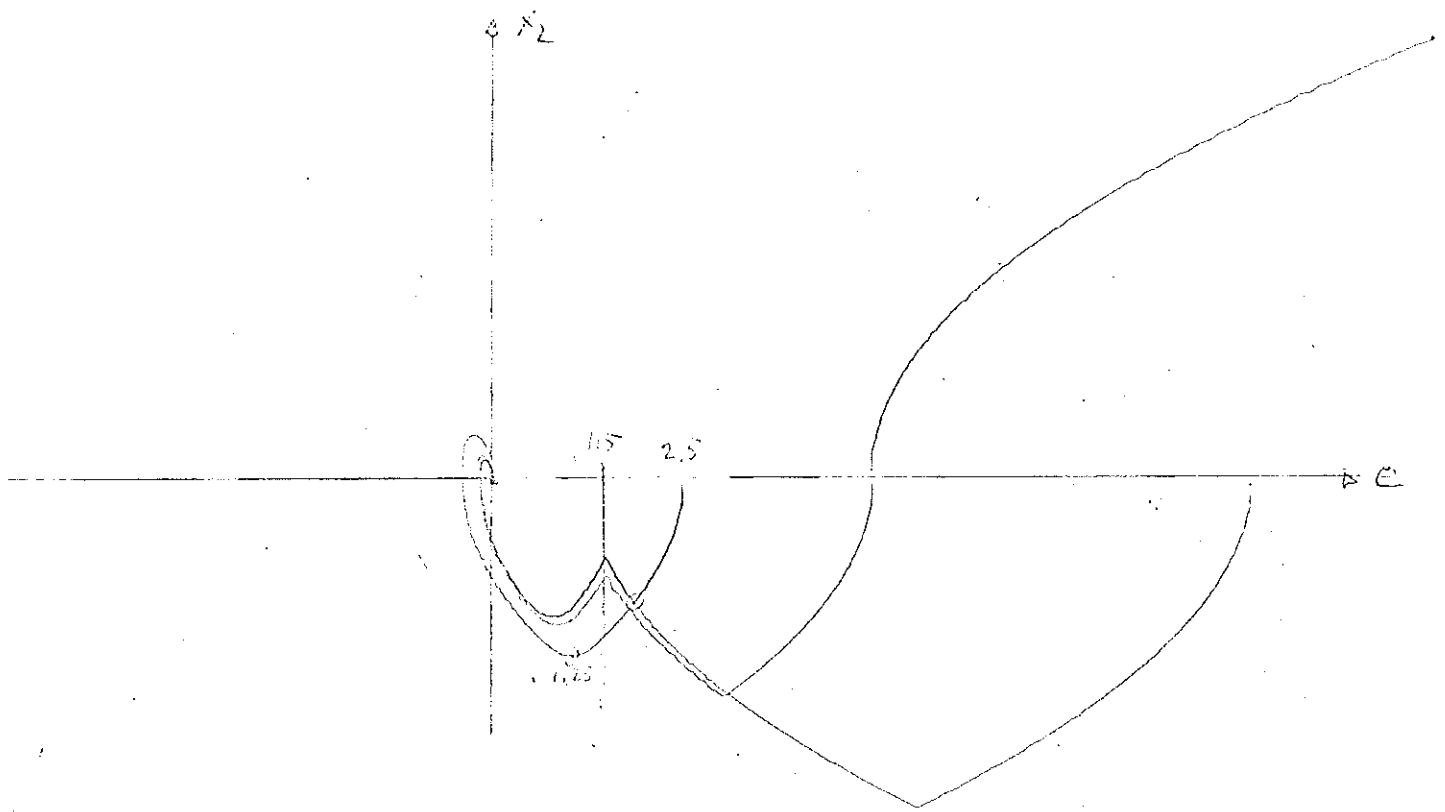
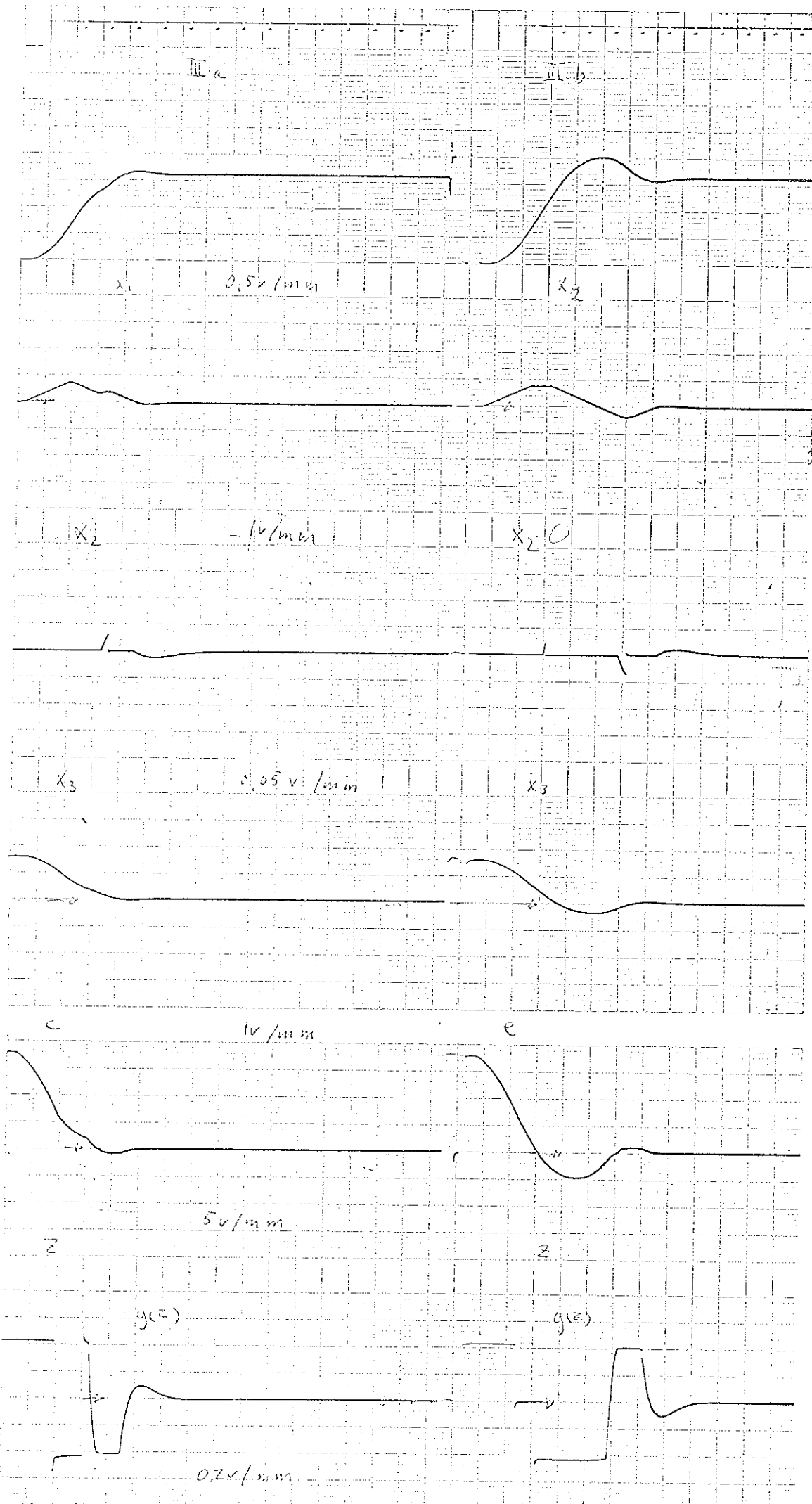




Diagram 56

Alla oxlar 1 v/cm.





#### IV.7. Jämförelse mellan olika regulatoralternativ.

Stegsvaret:

Diagram 58 visar stegsvar för regulator I, III.a. och IIIb.  $u=8$ . Se även tidigare figurer på stegsvar.

Av dessa framgår, att regulator III.a. är det bästa alternativet, speciellt om den modifieras enligt figur 56.

Rampföljning:

Den regulator, som visar bäst rampföljning, är regulator II. Man kan emellertid modifiera regulator III.a. så, att den uppför sig som reg. I för rampsignal. På detta sätt kan man få ett bra system.

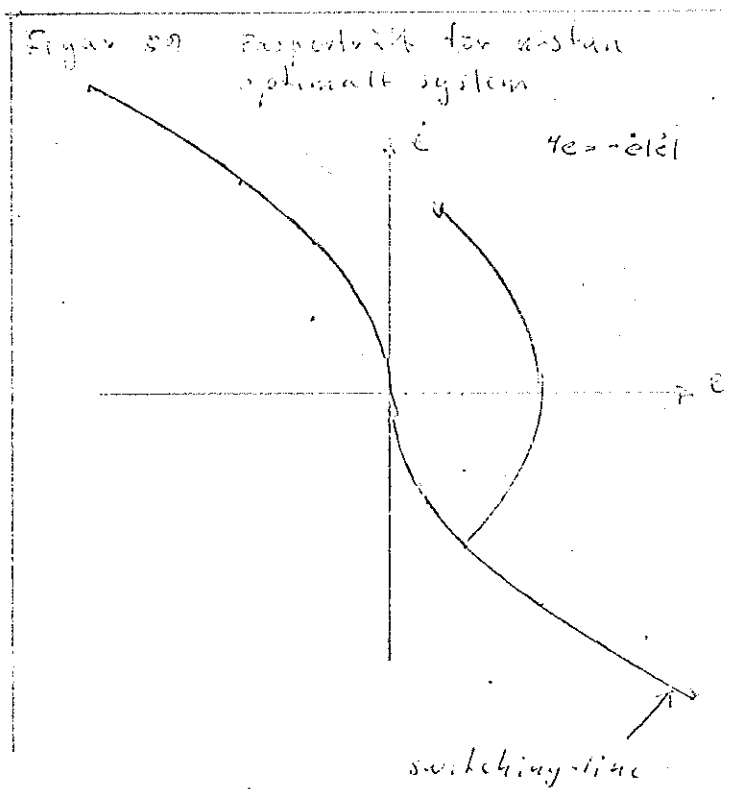
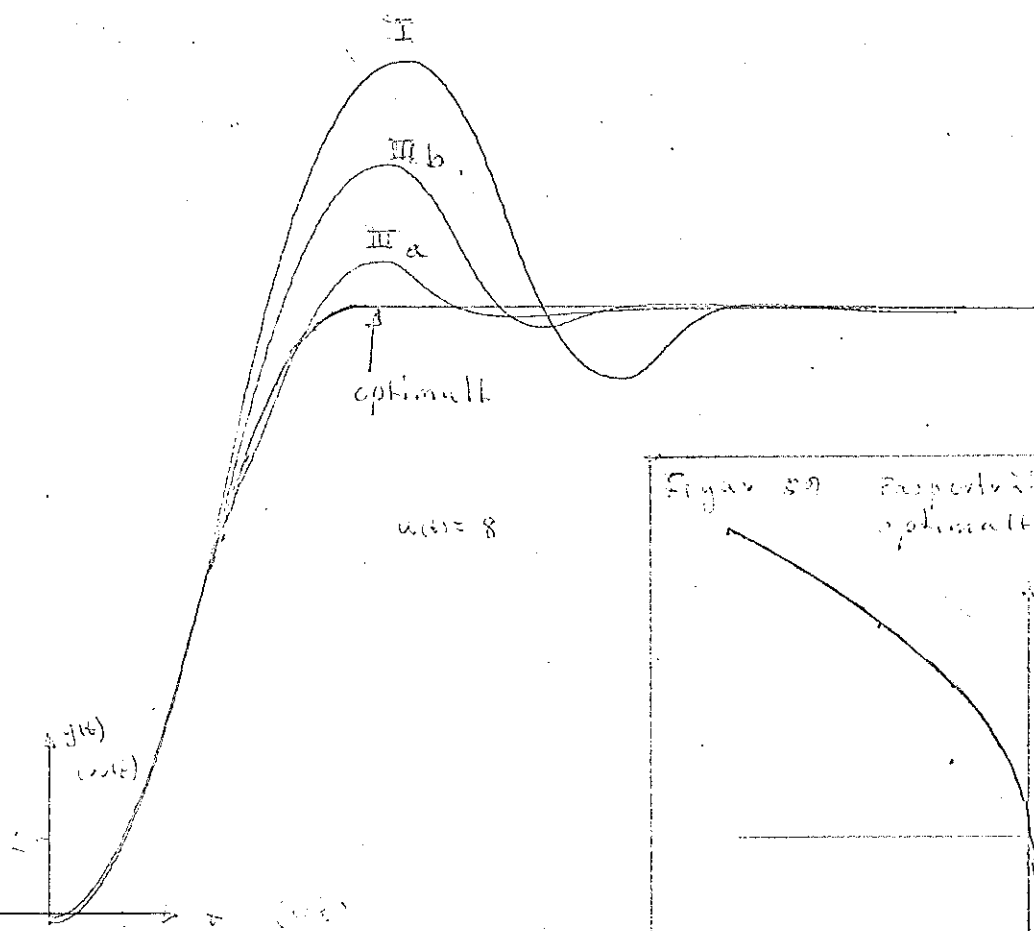
Stegstörningseliminering:

Vad det gäller stegstyvhet visar de olika regulatorerna mycket små skillnader, så det är ur denna synpunkt ej av större betydelse vilken vi väljer.

Det samma gäller ej för stabiliteten för stora  $e(0)$  och  $x_2(0)$  eller stora störpulser vars tidsintegral är begränsad. Här är regulator II att föredra. Se diagrammen till analysen av de olika regulatorerna.

Ur dessa resultat skulle man kunna konstruera en regulator, som hade reg. II's egenskaper för stora signaler d.v.s. samma parametervärden i de linjära länkarna som denna, men med reg. I och III's egenskaper för små signaler, samt reg. III.a.'s teckenvändning för stegsignaler i  $u(t)$ .

Ett ännu bättre alternativ skulle man få, om man lät systemet ha optimal relästyrning (Bang-Bang) för stora signaler, och PI-reglering för små. Själva relästyrningen är emellertid redan väl utredd, varför det endast skulle behöva beräknas, när PI-regleringen skulle börja. Detta är redan gjort för de tidigare nämnda regulatorerna.

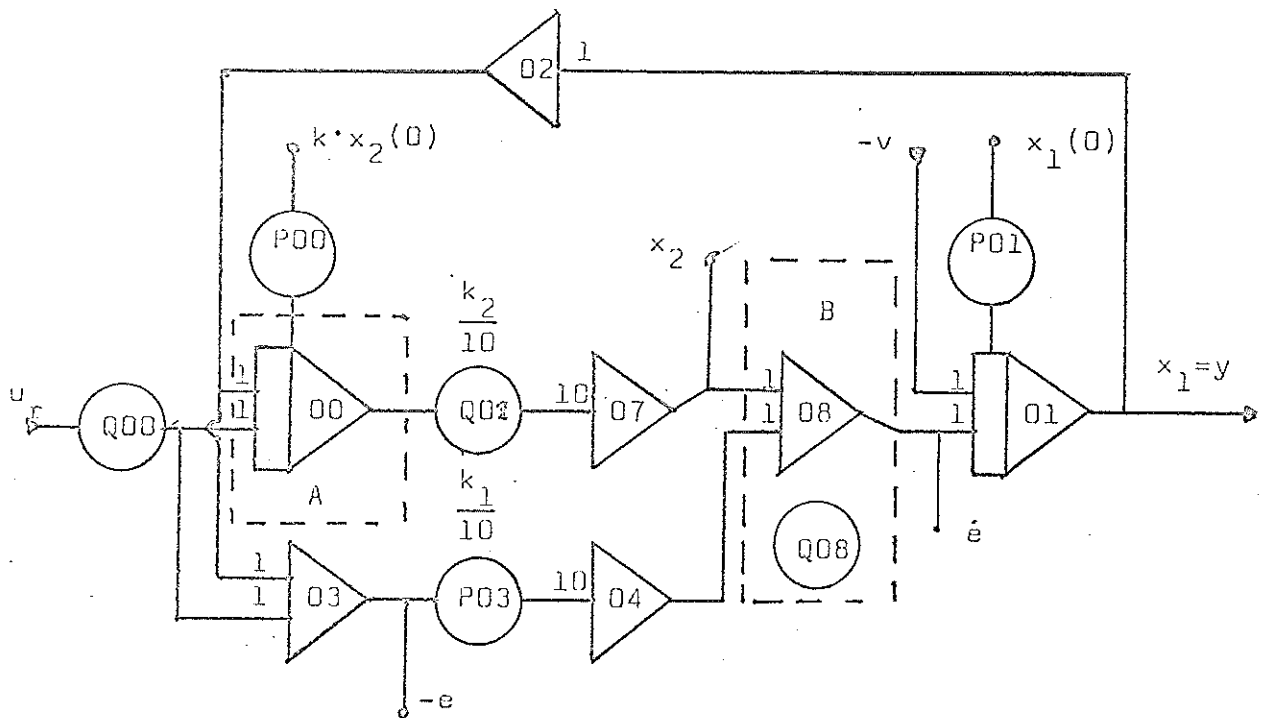


APPENDIX I

ANALOGIMASKINKOPPLINGAR

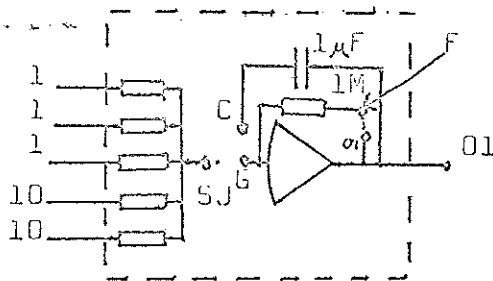
OCH BERÄKNINGAR.

System med enkelintegrator :



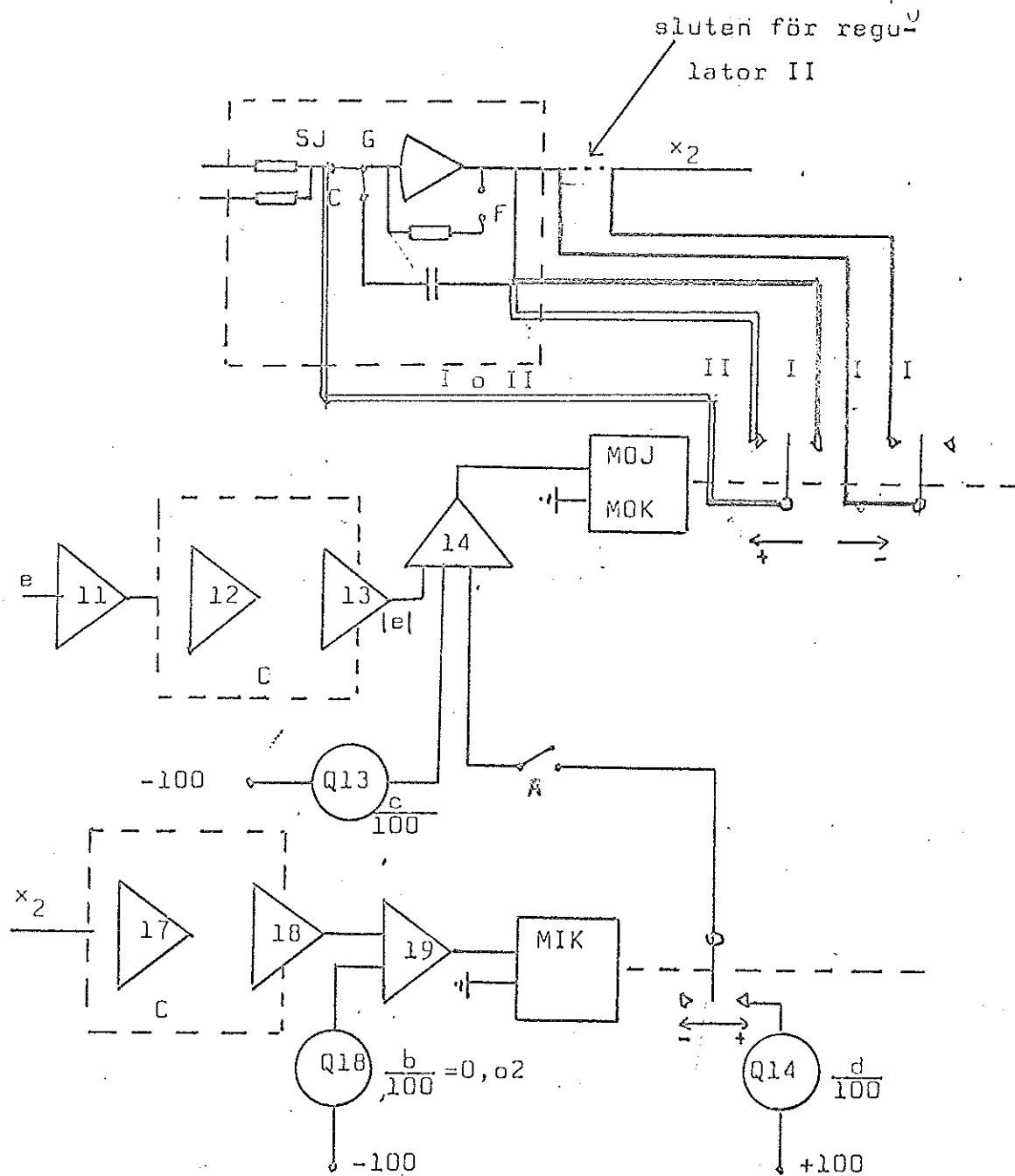
Den streckade rektangeln, märkt A, är den integrator på vilken styrlagen ändras. Den återfinns också i schemat över reglerkretsarna samt i detaljerad form nederst på denna sida. Den andra rektangeln, märkt B, är den förstärkare, som ingår i amplitudbegränsaren (mättningen) i den olinjära modellen. Detaljerad beskrivning av amplitudbegränsaren finns på sidan I.3

Integrator (detaljerad):



Bokstavs-beteckningarna är efter de, som förekommer på patch-panelen.

De icke-lineära reglerkretsarna för enkelintegratorn

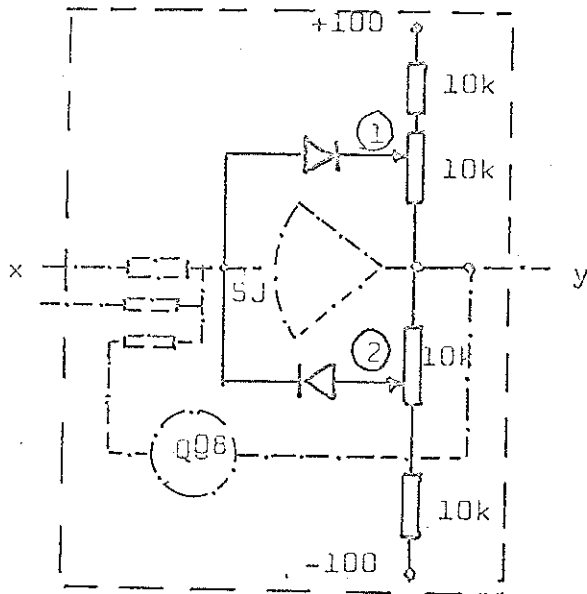


Kretsen i C-märkta rektangeln är en beloppbildare  
Den beskrivs på nästa sida.

Regulator I: A bruten.

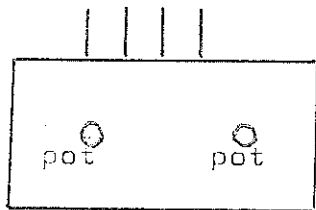
Regulator II: A sluten.

Ledningarna från MOJ o MOK markerade med siffra efter  
vilken regulator de hör till.



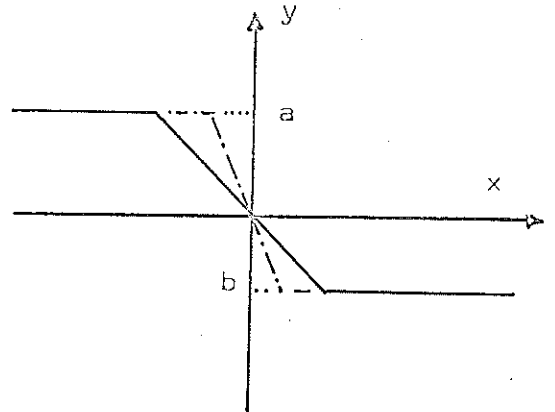
kopplingsschema.

- + ut SJ



mekaniskt utförande.

Amplitudbegränsare

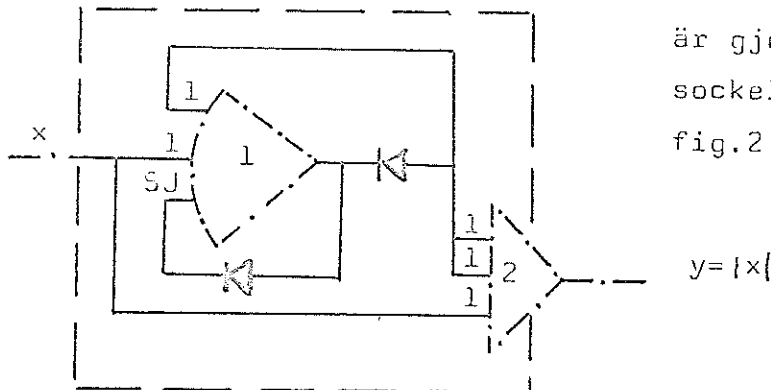


Lutningen i det lineära området kan regleras med Q08.

Nivåerna a och b regleras med potentiometrarna ① och ②

Beloopbildare

kopplingsschema



Alla mellankopplingarna är gjorda på en oktalssockel enligt fig.1 och fig.2

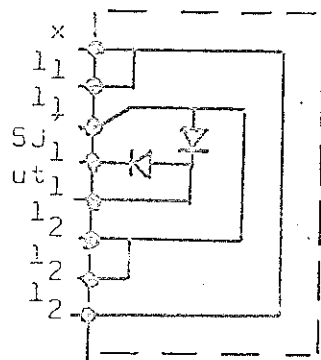


fig.1

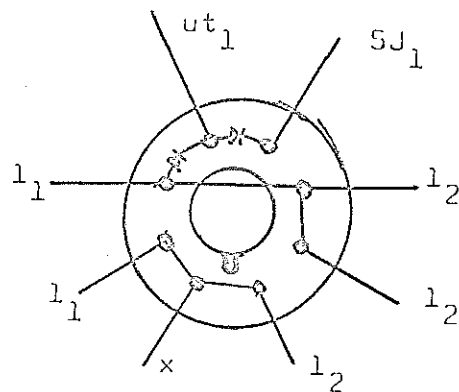


fig.2



### Beräkningar för nollställningen till enkelintegratorn:

För att ej överbelasta maskinen, kontrollerar vi hur stor den största tillståndsvariabeln blir i maskinen, vid mättat system. ( Ingen skalning ). Eftersom felet blir långvarigt, vid mättnig, blir  $x_2$  störst ( $x_2 = \int_0^t k e dt$ ).

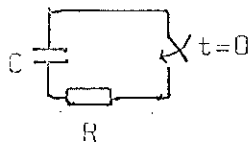
$$x_2 = 4ut - 4t^2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 4u - 8t = 0 \quad \text{ger: } \max(x_2) \text{ för } t = \frac{u}{2}$$

$$\text{d.v.s. : } \max_t(x_2) = 2u^2 - u^2 = u^2$$

Maskinens variabler bör gå utanför  $\pm 100$  volt, vilket innebär, att vi bör välja  $|u| < 10$  volt. Vi väljer  $u=8$  för våra simuleringar.

Nollställningen:



$$V_c = \frac{pC}{\frac{1}{RC} + p} \cdot \frac{1}{pC} (E - \tilde{E})$$

$E - \tilde{E}$  = spänningen över reläkontakten.

$\tilde{E} = V_0 = V_{x_2}$  vid  $t=0$ .  $C = 10^{-6}$  F. Sök  $t$ , då  $V_c = V_m$ .

$V_m$  = det värde vi vill att  $V_{x_2}$  skall ha efter nollställningen.

$$V_c = E - \tilde{E} + \tilde{E} \exp(-t/RC) \quad \text{som ger: } V_m = V_0 \exp(-10^6 t/R)$$

Sök  $R$ , då  $V_0$ ,  $V_m$  och  $t$  är givna.

$$R = \frac{10^6 \cdot t}{\ln V_0 - \ln V_m} \quad (*)$$

$V_0 = x_2 = 4ut - 4t^2$  då  $e = u - 2t = 0$  d.v.s.:  $t = \frac{1}{2}u$  som ger:

$$x_2 = u^2 \quad u = 8 \text{ volt, ger: } V_0 = 64 \text{ volt.}$$

Vi önskar  $V_m = 0,1$  volt och  $t = 0,01$  sek. Detta ger;  $R \approx 1,5 \text{ k}\Omega$

Maximalt tillåten ström genom reläkontakten = 200 mA.

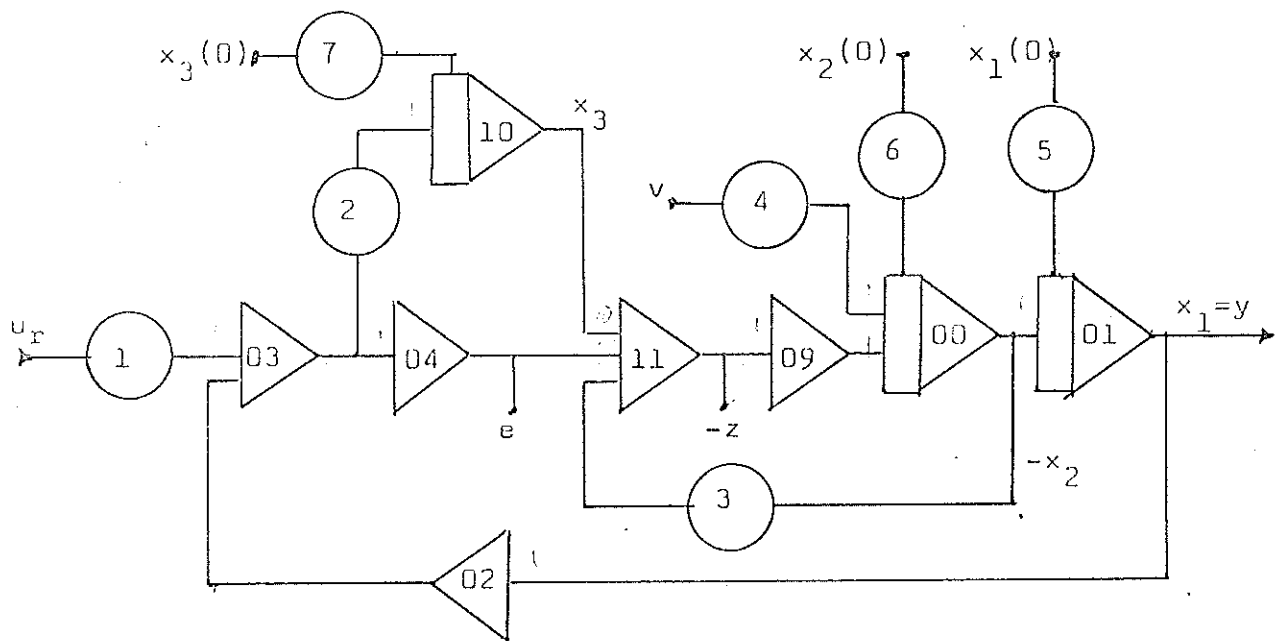
Max-strömmen blir i detta fall:  $\frac{64}{1,5} = 43 \text{ mA}$ .

Potentiometerlista för enkelintegratorn:

pot. nr. finns direkt utsatt i schemat.

pot. nr.	variabel	värde
Q00	$u_r$	
Q01	$k_2/10$	0,4
P03	$k_1/10$	0,4
P00	$k x_2(0)$	
P01	$x_1(0)$	
Q08	först.mättn.	1

System\_med\_dubbelintegrator:



Mätningen byggs upp kring summatoren 09 enligt sidan I.3, överst.

De icke-lineära regulatorerna byggs upp med samma element, och efter samma principer, som för enkelintegratorn. ( sid. I.2 ). Styrsignalerna till beloppbildarna, som styr ändringarna i regulatorerna, blir emellertid annorlunda, exvis.:  $z$  och  $e$ -ku eller  $z$  och  $e$ .

PI  $\rightarrow$  P sker på samma sätt, som regulator I på sidan I.2

PI  $\rightarrow$  0 sker genom brytning mellan förstärkarna 11 och 09 samt nollställning av 10 (ev.).

PI  $\rightarrow$  (-PI) sker genom inkoppling av en extra summatör mellan 11 och 09, samt nollställning av 10.

Potentiometerlista .

nr.	pot. nr.	variabel	värde
1	Q00	$u_r$	
2	Q10	$b$	0,73
3	P11	$a$	0,48
4	Q01	$v$	
5	P01	$x_1(0)$	
6	P00	$kx_2(0)$	
7	P10	$x_3(0)$	

$K=10,9$  fås i mätningen, genom regleringen av lutningen  
i dess lineära område. ( sid 1.3)

Appendix II References

Litteratur:

- I. Oldenburg m.fl.: Optimal and self-optimizing control. MIT press
- II K.J. Åström: Kompendium i Oliucära system  
VBV-TLTH