MINIMALTIDSPROBLEMET FÖR ETT OLINJÄRT SYSTEM UNDERSÖKT MED DYNAMISK PROGRAMMERING

PER HAGANDER

Rapport RE - 33 juni 1968

MINIMALTIDSPROBLEMET FÖR ETT OLINJÄRT SYSTEM UNDERSÖKT MED DYNAMISK PROGRAMMERING

Examensarbete

av

Per Hagander

INNEHÅLLSFÖRTECKNING.

Kap I.

Inledning.

I denna skrift presenteras ett arbete om tidsoptimering på ett olinjärt system med dynamisk programmering.

Som sammanfattning av de erhållna resultaten kan sägas att lösning av minimaltidsproblemet för ett olinjärt system med dynamisk programmering medför en mängd numeriska svårigheter. Den undersökta metoden ger långa räknetider och kräver stort minnesutrymme även för approximativa beräkningar. En stor nackdel med denna är, att det inte är praktiskt genomförbart att ta fram en optimal styrmatris, även om det är möjligt att för en viss startpunkt ta fram ett optimalt styrprogram. I det senare fallet kan en störning göra vi inte alls kommer fram till målet, medan vi i det förra från varje punkt under lösningens gång använder mot slutpunkten optimala styrsignaler.

Andra möjliga metoder presenteras, men de innehåller många nya djupa problem, och de måste undersökas separat för att något uttalande om deras användbarhet skall kunna göras.

I kapitel II formuleras det problem som tagits som exempel. En matematisk pendel skall tidsoptimalt resas till sitt instabila jämviktsläge. Härledningen av systemekvationerna har lagts i bilaga 1 , och en härledning av styrningens bang-bang-egenskaper finns i bilaga 2. Systemet har en absolutbegränsad insignal.

Kapitel III omfattar en allmän orientering om dynamisk programmering, och behandlar optimalitetsprincipen och dess förutsättningar.

I det IV:e kapitlet utvecklas dessa tankar i riktning mot lösning av mitt exempel. Val av referensvariabel diskuteras, och likaså svårigheterna med minimaltidsproblemet som implicit

variationsproblem. Två möjligheter för dettas direkta lösning diskuteras flyktigt, och möjligheten att ekvivalent formulera om problemet presenteras, och penetreras relativt noga, som den väg längs vilken arbetet har utförts. Även svårigheter, som introduceras vid olika sätt att representera aktuella funktioner, berörs i detta kapitel.

Andra delen av skriften behandlar numeriskt tillvägagångssätt och uppnådda resultat.

Kap V innehåller en programbeskrivning med hänvisningar till flödesschema och program-listning i bilaga 4. Samtidigt tages upp en del av svårigheterna vid valet av numeriska metoder och diskuteras något om datamaskinsminne mm.

Metoderna att styra räkneprocesserna genom parameterval diskuteras ingående i kap VI, som hela tiden bygger på en intuitiv bild av problemet i bilaga 3, vilken egentligen är det mest centrala i hela skriften, och till vilken det förekommer hänvisningar från nästan varje kapitel.

De ur datamaskinkörningarna erhållna resultaten presenteras med vissa kommentarer i kapitel VII, medan kapitel VIII innehåller slutdiskusioner om hela arbetet.

En inledande kommentar bör göras. Namnet dynamisk programmering är i mina ögon olämpligt valt. Dynamamisk optimering, i analogi med linjär optimering, vore mera talande i svenskan. Begreppet dynamisk programmering är emellertid myntat helt av R. Bellman, och det namnet är än det i Sverige enda gångbara, varför jag använt det genomgående om än med tvekan.

Kap II.

Problemformulering.

En matematisk pendel skall resas (från godtyckligt begynnelseläge och godtycklig begynnelsehastighet) till sitt instabila jämviktsläge, genom att man translaterar pivotpunkten längs en horisontell linje, på kortast möjliga tid. Som styrsignal användes pivotpunktens acceleration (som kan regleras med servo) och som systemvariabler tages pendelns utslagsvinkel och dess vinkelhastighet. Styrsignalens belopp antages vara begränsat. Genom att undersöka systemets dynamik enligt bilaga 1 erhålles följande systembeskrivning i dimensionslösa koordinater:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \sin x_1 + u \cos x_1 \end{cases} \qquad |u| \leq 3$$

u är då accelerationen uttryckt i antalet g. En rimlig uppskattning på maximala accelerationen, som kan erhållas med institutionens positionsservo är 3g , dvs $|u| \leq 3$. Tiden är i (1) normerad och lika med $\omega \times$verklig tid, där $\omega = \sqrt{g/l}$ är pendelns vinkelhastighet vid små svängningar. (På institutionens pendel är $\omega = 7$ rad/s) Problemet ka n nu formuleras:

$$(2) \qquad \begin{cases} \text{Sök } u(t) \quad (\text{ev } u(x,t)) \text{ så att } \quad x(T) = 0 \\ \text{för så litet T som möjligt, om } \quad x(0) = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad ! \end{cases}$$

Om u(t) är en godtycklig funktion av t med sina värden i det angivna intervallet $|u| \leq 3$, kommer den optimala styrlagen för problemet (2) på systemet (1) att vara av bang-bang-typ (enligt överläggning i bilaga 2). Dvs $u(t) = \pm 3$, och ansträngningarna måste inriktas på att ta fram de exakta tidpunkterna då u(t) ändrar värde från +3 till -3

och vice versa. Mitt mål har emellertid varit att få fram ett optimalt styrprogram (ev styrlag) till det samplade systemet som motsvarar (1). Dvs då u(t) förutsättes konstant i intervallet (t,t+h) (h fixt).
Låt (1):s samlade motsvarighet vara

$$x(t+h) = g(x(t),u(t)) \qquad |u| \leq 3 \tag{3}$$

Det är då inte längre nödvändigt, att den optimala styrlagen är av bang-bang typ, ty det är inte säkert, att de optimala "switch-tid-punkterna" sammanfaller med samplingstidpunkterna. Om h göres godtyckligt litet närmar sig styrlagen bang-bang-styrning.
Ett servo har nu begränsad snabbhet, varför h ej kan göras godtyckligt litet, om styrsignalen skall kunna anses konstant under samplingsintervallet.

Min uppgift var att lösa detta tidsdiskreta system med dynamisk programmering.

Dynamisk programmering.

Grundtanken för dynamisk programmering kan uttryckas med optimalitetsprincipen:

"En optimal strategi har egenskapen att, oberoende av starttillståndet och första styrsignalen, de återstående styrsignalerna bildar en optimal strategi med avseende på det tillstånd som fås efter första steget."

Att denna princip allmänt gäller i våra tillämpningar beror på den fullständiga beskrivning av ett system vi uppnår genom att införa tillståndsvariabler - Kausalitetsprincipen är en av grunderna. Om man tolkar om begreppet optimalt kan den emellertid tillämpas även vid systembeskrivning med stokastiska storheter.

Den andra byggklotsen i dynamisk programmering är synsättet på en lösning till en ordinär differentialekvation som en funktion även av sina startvärden.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t) \\ x(t_o) = c \end{cases} \qquad \text{har lösning} \quad x = \Phi(c,t)$$

Inför en förlust-funktion på något sätt, och definiera $V(x)$ som dennas värde, om vi startar i punkten x och använder en optimal strategi. Optimalitetsprincipen ger då omedelbart:

$$(4) \qquad V(x) = \min_u \left(h(x,u) + V(g(x,u)) \right).$$

om $h(x,u)$ är "den förlust man åsamkar sig vid förflyttningen från punkten x till punkten $g(x,u)$".

Detta är den för all dynamisk programmering grundläggande funktionalekvationen, men den är i ovannämnda form något specialicerad. Vi har nämligen använt oss av tiden som referensvariabel. Vår förflyttning mellan punkterna x och g(x,u) styres av en differentialekvation (enl. (1)) eller en differensekvation (enl. (3)) med referens i tiden. Det primära är, att tiden är en monotont varierande storhet. Motsvarigheter till (4) kan lätt formuleras med andra "stegvariabler", om dessa varierar monotont. Vikten av en monotont varierande referensvariabel i optimalitetsprincipen är intuitivt klar.

Kap IV.

Olika möjligheter att angripa problemet med dynamisk programmering.

Val av referensvariabel:

I problemet (2)+(3) skulle förutom tiden t.ex. utslagsvinkeln eller någon energistorhet kunna tänkas som referens. (jfr analogt exempel i Applied Dynamic Programming, kap VI). För speciella val av startpunkter blir utslagsvinkeln en monoton variabel. Det kan emellertid tänkas;att pendeln måste tillföras energi, genom att den gungas fram och tillbaka, innan den kan komma upp i slutläget. Jämför det intuitiva resonemanget i bilaga 3.

Trots att utslagsvinkeln oftast varierar monotont i de fall jag nedan undersökt, är man alltså för en allmän lösning hänvisad till tiden som referensvariabel, och mina ansträngningar har helt inriktats på dessa metoder.

Implicit variationsproblem.

Funktionalekvationen får följande utseende;(V(x) är den tid det tar att nå punkten $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, när vi startat i punkten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.)

$$(5) \qquad V(x) = \min_{u(t)} \left\{ h(x(t),t) + V(g(x(t),u(t))) \right\}$$

där h vanligtvis hålles konstant vid referens i tiden. Det normala förfarandet vid dynamisk programmering är nu, om man känner begynnelse- och sluttidpunkterna, att man stegar sig bakåt i tiden till begynnelsetidpunkten, under det att man minimerar (h+V) med avseende på u. Här är emellertid sluttidpunkten ej given , och vi kan ej använda denna direkta metod. Minimaltidsproblemet brukar tagas som exempel på ett "implicit variationsproblem". Vi har nu två lösningsvägar att välja mellan: Dels att helt formulera om frågeställningen och lösa det "duala" problemet (se nedan) eller också genom någon form av approximationsförfarande arbeta direkt med funktionalekvationen (5).

Succesiva approximationer, policy iteration.

En möjlighet är genom succesiva funktionsapproximationer. Principen för denna metod kan uttryckas i allmänt betraktelsesätt på följande vis. Vi har givet en funktional-ekvation $T(f) = 0$, medan en annan ekvation $S(f) = \text{konst}$ är lättare att lösa. Betrakta den rekursiva relationen

$$S(f_{n+1}) = S(f_n) - T(f_n) \quad .$$

Med lämpligt val av S och med rimliga krav på T konvergerar f_n , $n \to \infty$, mot en lösningsfunktion till $T(f) = 0$. Tillämpat på det aktuella problemet

$$(5) \qquad V(x) = \min_u \left(h + V(g(x,u)) \right)$$

får vi:

Gissa en start funktion $V_o(x)$ och använd rekursionsrelationen

$$V_{n+1}(x) = \min_u \left\{ h + V_n(g(x,u)) \right\}$$

för att bestämma gränsfunktionen $V(x)$.

För utredning om konvergenshastighet och krav för konvergens hänvisas till Bellman, Dynamic Programming.

I funktionalekvationen (5) ingår egentligen två okända funktioner, dels V dels u. En annan möjlig väg att få fram en lösning till (5) är genom approximationer i rummet av styrsignalfunktioner u. Denna metod går ofta under namnet "policy iteration" och är ett specialfall av kvasilinearisering.

Starta med en rimlig styrfunktion, $u_o(t,x)_{t=0}$. En sådan bör lätt kunna erhållas genom intuitivt resonemang i det verkliga systemet och med vetskap om bang-bang-egenskapen för det kontinuerliga fallet (jfr bilaga 3). Den motsvarande förlust-

funktionen bestämmes ur

$$V_o(x) = h + V_o(g(x,u_o(x)))$$

som kan lösas iterativt.

Förmodligen har inte gissningen u_o optimerat V, utan det excisterar bättre styrfunktioner. En sådan, $u_1(x)$ bestämmes som den funktion som minimerar

$$h + V_o(g(x,u(x)))$$

och V_1 bestämmes ur

$$V_1(x) = h + V_1(g(x,u_1(x)))$$

På samma sätt fås en bättre styrfunktion u_2 osv.

Konvergens erhålles i detta fall under allmännare förutsättningar än vid det föregående approximationsförfarandet.

En nackdel med dessa båda iterationsmetoder är, att man, om startlösningen inte är bra nog, riskerar att hamna i relativa minima.

Approximationsförfarandet gör att vi kommer ganska långt från den konventionella dynamiska programmeringen, som examensarbetet skulle vara exempel på.

"Duala problemet".

Vid det som duala problemet betecknade angreppssättet framtydligt de väsentligaste fördelarna och nackdelarana med dynamisk programmering. Mitt arbete inriktades redan från början på denna metod, trots att den, som det kommer att visa sig, har allvarliga svagheter.

Problemet formuleras om något:

"Bestäm den styrfunktion, som minimerar avståndet till origo efter tiden T. Den första tidpunkt T för vilken detta avstånd blir noll (tillräckligt litet) tages som den sökta tiden." (2')

I det kontinuerliga fallet är ekvivalensen med det ursprungliga problemet (2) lätt bevisad, men ekvivalensen är något tvivelaktig i den samplade varianten.

Detta problem skall formuleras som en funktionalekvation enligt (4). Som förlustfunktion FI, som skall minimeras, tages alltså "avståndet" till slutpunkten efter tiden t, om optimala styrstrategier u hela tiden användts. Kalla denna funktion $FI(x,t)$, där x är begynnelsepunkten. Optimalitetsprincipen ger att (tidssteg = h)

$$(6) \qquad FI(x,t) = \min_{u_{x,t}(0)} FI(\, g(x,u), t-h)$$

Eller i ord; Förlustfunktionen för tiden t i punkten x (dvs minsta "avståndet" till slutpunkten, om vi startar i x och har tiden t på oss) är lika med förlustfunktionens minsta värde för tiden t-h i någon av de punkter $g(x,u)$, som man kan nå från begynnelsepunkten på ett tidssteg med något konstant, tillåtet u-värde. Klart är, att $g(x,u)$ kan anses som begynnelsepunkt till förlustfunktionen då vi har t-h på oss, eftersom systemvariablerna $g(x,u)$ fullständigt beskriver systemet vi betraktar. Här framkommer kraven för att optimalitetsprincipen skall gälla, och vikten av en monoton variabel (tiden) märks tydligt. Förlustfunktionen för tiden t=0 är känd! Den är ju begynnelsepunktens avstånd till slutpunkten origo. Det återstår att definiera vad som menas med avstånd.

En rimlig sådan funktion är

$$(7) \qquad FI(x,0) = x_1^2 \cdot VIKT + x_2^2$$

dvs en kvadratisk funktion i x_1 och x_2, som är positivt definit, lika med noll då och endast då både x_1 och x_2 är lika med noll (dvs i slutpunkten). (6) definierar en rekursions-(funktional-)ekvation och (7) ger dess begynnelsevärden. Om pendelns utgångsläge ges av $c = \begin{pmatrix} \Theta \\ \dot{\Theta} \end{pmatrix}$, så skall rekursionen fortsättas tills följande stopprelation är uppfylld.

$$(8) \qquad FI(c,t) = 0$$

Detta t=T är den minsta tid, som pendeln kan resas på, och den tillhörande styrstrategin fås som de i (6) för varje t optimerande u:na.

Funktionsrepresentation.

För att detta problem skall kunna numeriskt lösas på datamaskin, krävs, att man på något sätt kan representera de för varje t tvådimensionella funktionerna $FI(t,x_1,x_2)$ och $u_{x_1,x_2,t}(0)$. (dvs förlust-funktionen med tiden t till förfogande, om vi startar i $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, och den optimala begynnelsestyrstrategin, om vi star ar i x och har tiden t på oss.)

Det normala sättet att göra det är att diskretisera ett relevant intervall i x_1 med steget h_1 och på samma sätt för x_2 med steget h_2 för att sedan representera funktionerna med sina värden i dessa gitterpunkter i stora matriser. Detta förfarande ger problem med att få plats i kärnminnet i en datamaskin.

En annan möjlig väg är att representera funktionerna med anpassade ortogonalpolynom, och att endast lagra de tillhörande koefficienterna. För närmare detaljer om denna metodik, som leder ganska långt in i andra problemkomplex, se kap XII i ADP.

Representationsproblemet är en av de kritiska punkterna i den här metoden. I och med att man delar upp i gitterpunkter når man endast en approximativt riktig lösning. Man riskerar dessutom att få stabilitetsproblem. Storheten VIKT i relation (7) får betydelse och kriteriet (8) är knappast meningsfyllt som "stopp relation". Det måste ersättas med t.ex.

$$(8') \quad |FI(c,T)| \leq EPS$$

där EPS är en storhet, som måste väljas lämpligt både med hänsyn till VIKT och till den möjliga noggrannheten med vald gitterindelning. Ett annat akut problem är : Hur skall man välja x_1- och x_2-intervallen för att inte begränsa lösningsmöjligheterna men ändå få plats med matriserna i datamaskinens minne. Kvar är dessutom att lösa problemet med minimeringen efter u i relationen (6).

Kap V

Mina metoder att lösa problemet.

Inför dessa svårigheter famlade jag i stort sett i luften; jag hade ingen möjlighet att bedöma erforderliga räknetider eller den möjliga noggrannheten och framför allt inte, hur detta var kopplat till mina parameterval. För att få någonting att starta från konstruerade jag ett program att tillämpa på något enkelt specialfall, med utgångspunkt från de exempel Bellman angivit i sina böcker. För att inte programmeringsarbetet skulle ta allt för stor del av jobbet, valde jag genomgående de metoder längs vilka det verkade enklast att utarbeta algoritmer och program. Jag försökte att arbeta så mycket som möjligt med subroutiner för att så småningom kunna förfina mina metoder på de punkter som verkade mest kritiska.

Program-beskrivning och diskusion av svårigheter.

För flödesschema och listning av programmet hänvisas till bilaga 4.

Mina utgångspunkter var relationerna (6),(7),(8') och det faktum att jag ämnade representera funktionerna i matriser. Storleken på dessa, stegintervallen i x_1,x_2 och tid, aktuella x_1- och x_2-intervallen, startpunkten, begränsningarna på styrvariabeln och storheterna VIKT och EPS mm har jag valt att läsa in varje gång programmet köres för att nå större flexibilitet och lättare kunna testa fram lämpliga parameterkombinationer.

Min första beräkning är, att jag räknar ut FI(x,0) enligt (6) i gitterpunkterna och lägger i en matris FIO (och varje indexpar svarar alltså mot en punkt i x_1,x_2-planet). Här är valet av VIKT förmodligen ganska betydelsefullt, men jag har inte kunnat komma fram till något lämpligt kriterium för det.

De egentliga optimeringarna ligger sedan i en loop i tidssteg enligt (7), som håller på så länge som (8') ej är uppfyllt. För att inte riskera att fastna i loopen har jag begränsat antalet genomlopp med ett tal, som också läses in för varje körning. Det mesta av räkningarna i denna loop har jag lagt i en subroutine FORLUST , som med utgångspunkt från FI0, representerande FI(x,0), räknar ut två lika stora matriser FI1 och U , som representerar optimala förlustfunktionen FI(x,t+h) och optimerande strategierna $u_{x,t}$. t=0 i detta först steg. Nästa gång loopen genomlöpes skall FI(x,t+h) vara utgångspunkt för den fortsatta rekursionen. Den gamla matrisen FI0 behövs inte mer, så jag kan sätta FI0 lika med FI1 och gå in i loopen. Problemet är emellertid, att vi måste lagra U-matriserna. Vi vet inte genom vilken punkt den optimala lösningen kommer att löpa. Det kan inte beräknas, förrän rekursionen gått så långt att villkoret (8') är uppfyllt, dvs vi kommit fram till begynnelse-punkten. Då måste vi ha lagrat samtliga U-matriser (representerande $u_{x,t}(0)$) för att kunna tolka fram de optimala styrsignalerna.

MINNES DISKUSION Den datamaskin jag hade till mitt förfogande, CD 3600 i Uppsala har ett kärn minne på 25k. En rimlig storlek på mina matriser är 50 x 50 vilket svarar mot 2.5k. En stor del av maskinens minnesutrymme upptas av monitorsystem ("laddare" mm) och program. Jag kan inte räkna med att få plats med mer än 5 - 6 sådana matriser, och det räcker inte alls, så jag måste redan från början räkna med att använda yttre minne. CD 3600 i Uppsala har två trumminnen om vardera 64k, varav jag kan utnyttja åtminstone 100k, vilket måste vara tillräckligt. Man måste dessutom tänka på att stora matriser ger långa räknetider.

Dispositionen blir, att jag reserverar plats för de tre matriserna FI0,FI1 och U i kärn-minnet och sänder efter varje loop ut den beräknade matrisen U på trumma, så länge som (8') ej är uppfyllt.

Förutsättningarna för problemets lösning är vad beträffar datamaskinsutrustning de allra bästa: Ett för de oftast förekommande operationerna tillräckligt stort kärnminne, med kort som dessutom arbetar mycket snabbt, tillgång till trumma med kort accesstid (ca 17 ms) och hög överföringshastighet (8 µs per ord) för övrigt lagringsbehov, och dessutom med hjälp av BUFFER IN och BUFFER OUT statements möjlighet att, samtidigt som man t.ex. överför en matris från kärnminnet till trumman, kunna utföra operationer i vanlig ordning på övriga delar av kärnminnet.

MINIMERINGEN I FORLUST skall,för varje gitterpunkt, FI1 och U beräknas genom minimeringen i (7). En "DO-loop" i första index och i den en loop i andra index styr denna beräkning, varför minimeringen måste göras säg 50 x50 gånger. Tydligt är att räknetidsmässigt detta är mycket kritiskt. Min metod är oslipad och tar ganska lång räkne-tid.

Interpolationen Varje gång måste jag med hjälp av systemekvationen (3) ta reda på i vilken punkt g(x,u) jag hamnar i efter ett tidssteg från gitterpunkten ifråga med olika möjliga styrsignaler (u mellan -3 och 3). Detta skötes om av en subroutine RK1ST, en Runge-Kutta algoritm.

Interpolationen Jag skall sedan välja den styrsignal, som ger den minsta förlustfunktionen (i punkten g(x,u)), och lagra den i matrisen U på platsen ifråga. Förlustfunktionens värde lagras i FI1. Eftersom g(x,u) inte nödvändigtvis är en gitter-

punkt, måste jag interpolera i FIO. Jag har valt att interpolera linjärt, och gör det framför allt, därför att det är lätt att ta fram en algoritm för detta. Det ger även rimlig tidsåtgång i interpolationen. Ett svårt avgörande är att bedöma de räknetider och den noggrannhet man får, om man förfinar interpolationen, jämfört med det man får vid minskning i steglängder. Däremot verkar det, somom det här inte skulle kunna gå att "avrunda" g(x,u) till närmaste gitterpunkt. Det skulle kräva alldeles för små steg och medföra för stora matriser för rimlig noggrannhet.

Sökningsproceduren är en annan kritisk punkt. Vilka u-värden i intervallet (-3,3) skall jag prova för att få fram det optimerande? Följande metoder har både för och nackdelar.

1) Direkt diskretisering av intervallet med konstant steg. Gå igenom de diskreta U-värdena från -3.0 till +3.0! Det verkar rimligt att använda c:a 60 punkter.

2) Använd först "coarse grid" med en 5- 10 punkter! Förfina steglängden och undersök en gång till runt det erhållna minimat!

3) Utveckla 2) med flera successiva förfiningar.

4) Om vi förutsätter unimodal förlustfunktion (se ADP) kan vi hårddra 3) och i varje steg endast jämföra två punkter, vilket optimalt utföres med "Fibonaccisökning".

5) Undersök endast +3 och - 3.

6) Kombinera någon av dessa metoder med interpolation i U-värden; dvs. tag några punkter runt det erhållna minimat, lägg ett polynom genom dessa punkter och minimera polynomet.

Jag har valt metod 2) , med ett begynnelsesteg på 0.5 och andra steg på 0.05. Jag måste också se till att jag hela tiden är kvar i intervallet (-3, +3), (Se bilaga 4, sid 2). Denna metod medför att maximalt 28 U-värden undersöks.

Metod 1) verkade att ge betydligt längre körtider för samma noggrannhet. De stickprov, som har gjorts, har visat att FI:s U-beroende är ganska flackt. Vi missar inga skarpa minima genom att använda metod 2).

Alla gjorda tester talar för att metod 4) skulle vara användbar. Jag har inte upptäckt något ställe där FI har t.ex. två minima map U.

Även metod 5) är förmodligen användbar, i all synnerhet om gitterindelningarna gjorts fina. Eventuellt kan man genom att öka EPS förstora " träffområdet" något.

Metod 6) är den som verkar ge bästa noggrannheten men den kräver extra tid, och det är mycket diskutabelt, om det är värt att offra något på en exaktare UMIN-bestämning. För att interpolationen skall bli tillförlitlig måste minimat bestämmas relativt noga, innan interpolationen kan börja.

För en statistisk undersökning av felen vid metod 6) tillämpat på ett helt annat typ av exempel hänvisas till Guignabodet:s arbete.({4}). En del intressanta analogier kan emellertid dras mellan de båda problemen, och uppsatsen har gett många tips för vidareutveckling av min metod.

UTTOLKNING OCH UTSKRIFTER

Sista delen av mitt program har hand om uttolkningen av det optimal styrprogrammet och om utskriften av resultaten. För att få fram styrprogrammet och den optimala trajektorian måste man gå till väga ungefär så här: Styrsignalen i startpunkten bestämmes ur den sist framräknade U-matrisen, ev genom interpolation. Pendelns läge efter ett tidsintervall integreras fram, och denna punkt ger i den näst sista U-matrisen, som plockas in från trumman, nästa styrsignal, osv tills samtliga U-matriser är genomgångna. Slutpunkten bör då vara ungefär lika med den önskade slutpunkten. Det finns emellertid många olika källor till fel. Alla ackumuleras och uttryckes i detta slutfel.

I mitt program har jag här använt samma linjära interpolationsrutin som tidigare. Kanske vore det nu lämpligare att använda "hearest neighbour"-interpolation i stället, med tanke på att U i matrisen ofta slår om från +3 till -3 mellan två gitterpunkter. U-värdet blir knappast "bättre" vid linjär interpolation mellan två sådana punkter.

Utskrifterna har utarbetats så att de om möjligt skall förmedla all intressant information, men de bör omarbetas så att de blir mera estetiskt tilltalande och mera lättlästa. Programmeringsarbetet för detta är emellertid tidskrävande, och överhuvudtaget har utskrifterna under arbetets gång vållat mig mycket bekymmer.

Kap VI.

Parametervalen - styrningen av räkneprocessen.

Programmet fordrar för att kunna köras en hel del indata. Valet av parametrar beror på vilken startpunkt som skall undersökas, och är starkt kopplat till vilka räknetider man är villig att offra för problemets lösning och vilken noggrannhet som krävs.

RUMSINTERVALL För det första måste man bestämma, i vilka intervall som rumskoordinaterna kan tillåtas och måste få variera. Den intuitiva bilden av problemet, vilken är beskriven i bilaga 3, kan härvid vara till god hjälp, men den mest framkomliga vägen är nog att prova sig fram. Betrakta följande båda startpunkter, (de som jag huvudsakligen har undersökt).

$$(1)\begin{cases} C1 = 0.314 & (=18^{\circ}) \\ C2 = 0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} C1 = 3.14 & (=180^{\circ}) \\ C2 = 0 \end{cases}$$

I exemplet (1) är det rimligt att kraftigt begränsa sitt intervall. Den intuitiva bilden ger lösningen för det kontinuerliga fallet, och i det tidsdiskreta bör inte skillnaden vara avgörande stor. Lägg emellertid till utrymme för en översläng i X1, och undvik en del av svårigheterna vid uppstartningen genom att låta X1-intervallet nå en liten bit förbi startpunkten om möjligt! Beräkna maximala hastigheten för det kontinuerliga fallet resonemangsvägen och tillåt lite till! Randeffekter kan sprida sig, så ha därför speciellt vid många tidssteg goda marginaler. Kräv exempelvis, att även positiva vinkelhastigheter skall kunna representeras, och använd helst hastighetsintervall som är symmetriskt map noll! Exempel (2) är betydligt svårare, men låt ungefär samma regler som i (1) gälla. Det är här än viktigare, att även negativa hastigheter kan representeras, enligt vad som kommer att visa sig av mina körningar.

STEG I TIDEN

Nästa viktiga parameter att bestämma är tidssteget. Försök att ta fram en ungefär optimal strategi och tillhörande trajektoria för det kontinuerliga fallet. Detta ger även en uppskattning på den minimala tiden. Det är lämpligt att ha denna och alltså resulterande antal tidssteg i åtanke , när man bestämmer tidssteget. Det kan bli svårigheter med stabiliteten, om det blir för många steg, och givetvis kräver det längre räknetid. Man får ofta en vettig skattning på det minsta antalet steg för någorlunda noggrannhet, om man betraktar den "kontinuerliga" optimala strategin. Låt en omslagspunkt kräva ca 10 tidssteg och 2 kräva ca 20! Noggrannheten i Runge-Kutta-integrationerna bestämmer också en övre gräns på tidssteget. Jag har i mina resonemang ofta förutsatt, att detta moment inte introducerar några fel, men taget över ett stort intervall kan de accumuleras och ge svårigheter.

Om vi tänker att problemet har en fysikalisk bakgrund och tar hänsyn till att U-regleringen skall ske med ett servo med begränsad snabbhet, kan vi inte minska tidssteget för mycket. Det skall vara möjligt att realisera den erhållna samplade styrningen. Med institutionens servo verkar en rimlig undre gräns att vara 0.01 s , dvs tidssteget $H3 \geq 0.07$ (ω=7rad/s).

STEG I RUMSKOORDINATER.

För det fortsatta valet av parametrar är det nödvändigt att ta med överväganden om minne och räknetid. Med min utformning av programmet och med maskinen CD3600 i Uppsala blir den avgörande punkten körtiderna. För att kunna utföra effektiv testning måste jag använda "5 minuters sendjobb". De båda faktorerna ger direkta begränsningar på matriserna och, i och med att rumskoordinatintervallen redan är ungefärligen valda, även på X1- och X2-stegen. En inbördes avvägning är dock nödvändig.

Betrakta för den skull systemekvationerna

$$(1)\quad \begin{cases} \dot{X1} = X2 \\ \dot{X2} = \sin X1 + U*\cos X1 \end{cases}$$

och gör en enkel Euleruppskattning av differenserna (H3 = tidssteget)

$$\begin{cases} \Delta X1 = X2*H3 \\ \Delta X2 = (\sin X1 + U*\cos X1)*H3 \end{cases}$$

Rimligt är nu att kräva att $\Delta X1$ och $\Delta X2$ under så stor del av lösningen som möjligt spänner över en till tre gitterpunkter. Kanske måste speciella hänsyn tagas till uppstartning och nedbromsning till hastigheten noll. En praktisk detalj är, att man lämpligen använder π som modul vid indelningen i vinkel; Detta för att lättare kunna representera aktuella punkter med gitterpunkter.

EPS

Parametern EPS i stopp villkoret (8') är också möjlig att reglera. Eftersom diskretiseringen och interpolationerna introducerar fel, är det inte rimligt att kräva, att absorbtionsområdet skall bestå av enbart en punkt. Stora stabilitetssvårigheter skulle uppkomma inte minst på grund av att vi skall styra lösningen till en jämviktspunkt. EPS är alltså ett instrument att skära bort instabiliteter och att ungefär reglera, hur stora fel vi kan acceptera i lösningen. Valet av EPS är svårt att göra optimalt. Det hänger givetvis samman med hur vi har fixerat vårt avstånd, hur vi har valt VIKT.

Det fram-interpolerade värdet i FI stämmer ofta ganska dåligt med slutpunktsavståndet i den erhållna lösningen. Jag har därför vid uttestningen använt en modifierad variant av mitt program, som gör att jag kringår stoppvillkoret. I stället begränsar jag antalet tidssteg med NMAX, och tar fram den optimala strategin och trajektorian för antalet steg lika

med NMAX, NMAX-1, NMAX-2 osv. I denna modifikation har jag även lagt in, att jag i samma körning kan undersöka olika startpunkter.

Rent fysikaliskt har stopprelationen en motsvarighet i det servo som måste kopplas in för att stabilisera pendeln i sitt övre läge. Ett rimligt mått på EPS är ungefär det område inom vilket servot klarar av att styra in pendeln. Relationen mellan vinkelläge och hastighet här kan ge en viss fingervisning inför valet av VIKT.

VIKT

Som tidigare nämnts, är valet av VIKT svårt att göra. VIKT styr prioriteringen mellan hastighet och läge. Vilket skall straffas mest? Att vi ligger en bit ifrån slutpunkten, eller att vi har en viss hastighet? I startögonblicket är det viktigt, att vi inte straffar hastighetsökningen för hårt. Om vi har en relativt grov gitterindelning, kan det i så fall tänkas, att det aldrig blir optimalt att lämna startpunkten. (Jag tänker mig, att vi startar i stabila jämviktspunkten.) Å andra sidan måste hastigheten straffas betydligt, för att lösningen skall få ett rimligt utseende runt slut-punkten.

Parametern VIKT har ungefär samma verkan som en förstärkningsparameter. Den kan skapa överslängar runt jämviktsläget, ev instabilitet, och insvängningsförloppet kan fås att starta väldigt långsamt. Optimalt vore förmodligen någon form av variabelt VIKT (ej genomförbart), och detta skulle mera adekvat motsvara det ursprungligen ställda problemet om enbart tidsoptimering. Avståndsdefinitionen introducerar en viktning, som inte existerar i det problemet. //De valda steglängderna i x1 och x2 inverkar också i t.ex uppstartningen och bör ha betydelse vid valet av VIKT.

Räknetider:

En rimlig skattning på räknetiderna, erhållen ur ett flertal körningar, är 100 ms per minimering, dvs ett program med 10 st FORLUST-beräkningar med matriser 20x20 tar ungefär 400 s att köra. Därtill kommer ev kompilering på ungefär 50 s, sammanlagt $7\frac{1}{3}$ min. In och utmatningar tar relativt korta tider och kan nästan försummas.

Startpunkt 18° från slutpunkten utan hastighet.

1) 31x11 matriser

$$\begin{cases} H1 = 0.0314 & X1 \in (-0.47, 0.47) \\ H2 = 0.20 & X2 \in (-1.00, 1.00) \\ H3 = 0.157 \end{cases}$$

gav med VIKT = 40 och EPS = 0.075

tid	punkt		U	
0.000	0.31	0.00	-3.0	
0.157	0.28	-0.40	-3.0	
0.314	0.28	-0.82	1.3	
0.477	0.08	-0.59	2.8	
0.628	-0.01	-0.19		slutpunkt

För stort tidssteg!

körningen tog 120 s.

2) 23x15-matriser $\begin{cases} H1 = 0.0157 \\ H2 = 0.15 \\ H3 = 0.0628 \end{cases}$ $\begin{cases} X1 \in (-0.0314, 0.314) \\ X2 \in (-1.05, 1.05) \end{cases}$

med VIKT = 40 och EPS = 0.075

tid	punkt		U	
0.000	0.314	0.000	-3.0	
0.063	0.309	-0.160	-3.0	
0.126	0.294	-0.321	-3.0	
0.189	0.269	-0.485	-3.0	
0.251	0.233	-0.652	-2.74	
0.314	0.187	-0.807	0.78	
0.377	0.138	-0.948	0.97	
0.440	0.094	-0.680	2.68	
0.503	0.056	-0.508	2.77	
0.566	0.030	-0.337	3.0	
0.628	0.015	-0.142		slutpunkt

Verkar analogt med kontinuerliga fallet, men lite svårt att hitta exakta omslagspunkten. körtid 301s

3) 23x11-matriser $\begin{cases} H1 = 0.0157 \\ H2 = 0.20 \\ H3 = 0.0628 \end{cases}$ $\begin{cases} X1 \in (-0.0314, 0.314) \\ X2 \in (-1.0, 1.0) \end{cases}$

med VIKT = 10 EPS = 0.05

tid	punkt		U	
0.000	0.314	0.000	-3.0	
0.063	0.309	-0.160	-3.0	
0.126	0.294	-0.321	-3.0	
0.189	0.269	-0.485	-1.27	
0.251	0.236	-0.546	1.27	
0.314	0.205	-0.454	0.61	
0.377	0.178	-0.405	-0.99	
0.440	0.151	-0.456	-1.86	
0.503	0.119	-0.563	2.42	
0.566	0.089	-0.405	3.0	
0.628	0.069	-0.212	3.0	
0.671	0.062	-0.020		slutpunkt

Straffar hastigheten hårdare; svårigheter runt omslagspunkten; vi har behövt ytterliggare ett tidssteg; ev även inverkan från att vi har glesare X2-indelning.

Körtid 254s

18°:s problemet erbjuder redan det, exempel på en del av problemen med metoden. Små justeringar i tidsstegen förändrar helt optimala lösningen. Likaså erhålles fullt naturligt olika utseende på strategierna beroende på hur hårt man straffar hastighet respektive läge. Problemet har kontinuerligt en omslagspunkt i x_1 = ca 0.162. Om tidsintervallets längd gör att vi inte hamnar i denna punkt, är det inte självklart, var vi skall offra på accelerationen, och var vi skall ta igen detta genom att minska på retardationen, för att få pendeln rimligt nära slutpunkten på en något längre tid. Det är fastläggandet av detta maximala avstånd, som är bestämmande för valet ovan.

Gitterindelningarna har i de körda exemplen gjorts fina, så interpolationsfelen är inte speciellt markanta. De använda rumsintervallen verkar vara tillräckliga för att inga randsvårigheter skall kunna uppstå.

Lösningarna i ovanstående körningar är med andra ord de optimala, med rimligt krav på noggrannhet, för problemen med de angivna tidsstegen och slutavstånden.

Startpunkt 180° från slutpunkten utan hastighet.

Förberedande körningarna 4) och 5), enligt sid 26, ger en fingervisning inför valen av parametrar.

Körtider: 4) 238s (inklusive kompilering)

5) 288s (objektprogram på band i Uppsala)

Speciellt 5) visar exempel på hur interpolationsfelen verkar och gör stopprelationen helt oanvändbar.

Tidssteget är alldeles för stort i båda körningarna.

4)

```
IMAX=   23      JMAX=   11          MAXANTAL FORLUST   12+1
          H1                  H2                  H3
   1.5707963268-001    5.0000000000-001    3.1415926540-001
        XMIN1               XMIN2               XMAX1               XMAX2               UVIDD
  -3.1415926540-001  -2.5000000000+000    3.1415926536+000    2.5000000000+000    3.0000000000+000
                                                                                      WSTEG
         EPS                 VIKT                                                     5.0        -001
   1.0000000000-001    1.0000000000+001
          0
AT TIME 0.000+000 IN THE POINT     3.1415926536+000     0.0000000000+000 USE U =     2.9999999999+000
AT TIME 3.142-001 IN THE POINT     2.9949002232+000    -9.2443151237-001 USE U =     2.9999999999+000
AT TIME 6.283-001 IN THE POINT     2.5752009699+000    -1.7043905372+000 USE U =     2.2072002325+000
AT TIME 9.425-001 IN THE POINT     1.9947715189+000    -1.9221916465+000 USE U =     2.9999999999+000
AT TIME 1.257+000 IN THE POINT     1.4066338235+000    -1.7300234158+000 USE U =    -4.5707725001-001
AT TIME 1.571+000 IN THE POINT     9.0190005833-001    -1.5049182796+000 USE U =     1.3423006371+000
AT TIME 1.885+000 IN THE POINT     5.1071320894-001    -9.8319609114-001 USE U =    -2.1005032279-001
AT TIME 2.199+000 IN THE POINT     2.1170926561-001    -9.3624645541-001 USE U =     2.1743216956+000
AT TIME 2.513+000 IN THE POINT     3.0262482073-002    -2.2592630596-001 USE U =     7.1005991602-001
GIVING THE FINAL POINT    -4.7265467079-003     1.3184362870-003
```

5)

```
IMAX=   23      JMAX=   11          MAXANTAL FORLUST   12+1
          H1                  H2                  H3
   1.5707963268-001    5.0000000000-001    2.5132741230-001
        XMIN1               XMIN2               XMAX1               XMAX2               UVIDD
  -3.1415926540-001  -2.5000000000+000    3.1415926536+000    2.5000000000+000    3.0000000000+000
                                                                                      WSTEG
         EPS                 VIKT                                                     5.0        -001
   1.0000000000-001    1.0000000000+001
         12
AT TIME 0.000+000 IN THE POINT     3.1415926536+000     0.0000000000+000 USE U =     3.0000000000+000
AT TIME 2.513-001 IN THE POINT     3.0473784333+000    -7.4520644128-001 USE U =     2.6370839894+000
AT TIME 5.027-001 IN THE POINT     2.7834645921+000    -1.3377473154+000 USE U =     2.9999999999+000
AT TIME 7.540-001 IN THE POINT     2.3783052315+000    -1.8455807001+000 USE U =     2.0528457735+000
AT TIME 1.005+000 IN THE POINT     1.9005559847+000    -1.9117496387+000 USE U =     2.9999999999+000
AT TIME 1.257+000 IN THE POINT     1.4351509083+000    -1.7332113286+000 USE U =    -1.2370865822+000
AT TIME 1.508+000 IN THE POINT     1.0191607847+000    -1.6033430609+000 USE U =     9.0224210005-001
AT TIME 1.759+000 IN THE POINT     6.5849648748-001    -1.2666877329+000 USE U =     9.9306117608-001
AT TIME 2.011+000 IN THE POINT     3.8338194386-001    -9.2690396782-001 USE U =     4.8119088208-001
AT TIME 2.262+000 IN THE POINT     1.7450114708-001    -7.4259660729-001 USE U =     1.6856381704+000
AT TIME 2.513+000 IN THE POINT     4.4506509484-002    -2.9631365885-001 USE U =     9.4353908906-001
AT TIME 2.765+000 IN THE POINT     6.0716828034-004    -5.4848085068-002 USE U =     3.2058719365-001
AT TIME 3.016+000 IN THE POINT    -3.1252561638-003     2.4984701871-002 USE U =    -9.9452877964-002
GIVING THE FINAL POINT    -3.6553863385-005    -2.7413266037-004
```

För att klara körningen 6) (se sid 28-31) på 5 min gjordes försök med osymmetriskt X2-intervall för att väsentligt kunna minska storleken på matriserna och därmed körtiden.

U-matriserna har efter varje steg skrivits ut i avsikt att nu upp-komna svårigheter tydligt skall kunna analyseras. Variation i läge för fix hastighet ger en rad i matrisen.

Körtid 242s (från band)

Den framtagna lösningen är helt orimlig. Det skulle vara optimalt att inte starta förrän efter två tidssteg. Någon form av instabilitet hos metoden har uppstått.

En körning med ungefär samma x1-intervall och x2-intervallet (-2.2,0.2) och med betydligt kortare rums- och tidssteg, H1 = 0.0628, H2 = 0.2, H3 = 0.0942, uppvisade exakt samma effekt. Efter 18 tidssteg kunde lösningen inte förbättras ytterliggare.

Jag har kommit fram till att effekter från egentligen ovidkommande processer sprids genom interpolationsfelen och fördärvar den sökta lösningen. Framförallt varkar framväxandet av optimallösning från sådana punkter, där man måste starta i riktning från slutpunkten, att vara instabilt. Om vi dessutom inte tillåter positiva vinkelhastigheter av någorlunda storlek så kommer randeffekterna härifrån att helt spoliera lösningarna i enlighet med körning 6).

KÖRNING 6).

```
AX=    23      JMAX=     8          MAXANTAL FORLUST    12+1
      H1                    H2                     H3
1.5707963268-001      4.4999999999-001      1.7276759590-001
     XMIN1                  XMIN2                 XMAX1                 XMAX2                 UVIDD                 USTEG
-3.1415926540-001     -2.2500000000+000     3.1415926536+000      8.9999999998-001      3.0000000000+000      5.0000000000-001
      EPS                   VIKT
1.5000000000-001      1.0000000000+001
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-2.75 0.75 0.55 0.35 0.15
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.95 1.40 1.20 3.00 3.00 3.00 2.80
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.40 2.45 2.55-1.15-1.65-2.45-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 2.85 2.65 2.50 2.40-0.45-0.65-0.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.35 0.15 0.00-0.15-0.35-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.40-2.50-2.65-2.85-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
     0       THIS STEP MAKES FIBEG = 9.0250757203+001
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-2.70-3.00 3.00 3.00 3.00 2.15 1.45 1.05 0.75 0.55 0.35 0.15
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.50-1.00-1.40-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.80
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 2.40-0.55-0.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 3.00 2.55-0.20-0.45-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 3.00-0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 2.75 0.00-2.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.95 0.10-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.20-2.55-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
     1       THIS STEP MAKES FIBEG = 8.9050831525+001
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.65 3.00-1.75-2.70-3.00-3.00 3.00 3.00 2.15 1.45 1.05 0.75 0.55 0.35 0.15
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.45 0.75-1.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.80
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 2.40-0.55-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 3.00 3.00-0.25-1.25-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 2.80-0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 2.80 0.00-2.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
2.95 0.10-2.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.20-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
     2       THIS STEP MAKES FIBEG = 7.7472827494+001
```

```
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.70 3.00-1.75-2.70-3.00-3.00 3.00 3.00 2.15 1.45 1.05 0.75 0.55 0.35 0.15
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.45 2.50-1.00-1.90-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.80
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 2.45-0.55-2.10-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.55-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 2.80-0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 2.75 0.00-2.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.95 0.10-2.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.20-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
    3      THIS STEP MAKES FIBEG = 6.4387314182+001
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-2.70-3.00-3.00 3.00 3.00 2.15 1.45 1.05 0.75 0.55 0.35 0.15
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.55-1.00-1.35-2.75-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.80
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 2.45 1.85-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.40-2.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 2.95-0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 2.75 0.00-2.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 1.95 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.95 0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.20-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
    4      THIS STEP MAKES FIBEG = 4.9880419709+001
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.15 1.45 1.05 0.75 0.55 0.35 0.15
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.55-0.75-1.35-1.95-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.80
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 2.45 1.35-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.40-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 2.50 1.70 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 2.95-0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 2.80 0.00-2.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 1.95 1.35 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.95 0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.20-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
    5      THIS STEP MAKES FIBEG = 3.6258342463+001                 * ⇒ ligg kvar!
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00 1.45 1.05 0.75 0.55 0.35 0.15
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.55-1.00-1.35-1.95-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 2.15 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.80
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 2.45 0.75-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.40-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00-3.00 1.25 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 2.90-0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-2.75 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
3.00 2.80 0.00-2.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 1.95 1.35 1.05 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
2.95 0.10-2.90-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.20-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
    6      THIS STEP MAKES FIBEG = 2.4950271781+001.
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-2.70-2.50 0.55 0.35 0.15
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.55-1.00-1.35-1.95-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 2.00 1.40 1.00 0.90 3.00 3.00 2.80
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 2.45 0.30-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.40-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00 0.90 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 2.95-0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-2.75 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
3.00 2.80 0.00-2.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 1.95 1.35 1.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
2.95 0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.20-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
```

```
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-2.70-2.50-2.40-2.40-2.5
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.55-1.00-1.35-1.95-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 2.00 1.40 1.00 0.75 0.55 0.30 0.3
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 2.45 0.10-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-2.45 3.00 3.0
0.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.40-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-0.25 0.45 3.00 3.0
0.00 3.00 2.95-0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-2.50 3.00 3.00 3.00 3.0
3.00 2.80 0.00-2.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 1.95-3.00-2.35 1.30 3.00 3.00 3.00 3.0
2.95 0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.30 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.0
0.20-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.0
       8      THIS STEP MAKES FIBEG = 9.8958119764+000
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-2.70-2.50-2.40-2.40-3.0
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.55-1.00-1.35-1.95-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 2.00 1.40 1.00 0.75 0.55-3.00-3.0
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 2.45 0.10-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-2.5
0.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.40-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.60 0.2
0.00 3.00 2.95-0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-2.45 0.35 2.35 3.0
3.00 2.80 0.00-2.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 1.95-3.00-2.70-2.40 0.50 3.00 3.00 3.0
2.95 0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 1.80 1.25 0.90 2.35 3.00 3.00 3.00 0.0
0.20-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.0
       9      THIS STEP MAKES FIBEG = 5.5233647082+000
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-2.70-2.50-2.40-2.40-3.0
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.55-1.00-1.35-1.95-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 2.00 1.40 1.00 0.75 0.55-3.00-3.0
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 2.45 0.10-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.0
0.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.40-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.0
0.00 3.00 2.95-0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-2.70-2.45 0.0
3.00 2.80 0.00-2.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-2.40 0.30 0.20 2.0
2.95 0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-2.90-2.00 0.65 0.50 3.00 3.00 0.0
0.20-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 2.45 1.05 1.20 0.90 3.00 3.00 3.00 3.00 0.0
      10      THIS STEP MAKES FIBEG = 3.8571783199+000
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-2.70-2.50-2.40-2.40-3.0
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.55-1.00-1.35-1.95-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 2.00 1.40 1.00 0.75 0.55-3.00-3.0
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 2.45 0.10-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.0
0.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.40-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.0
0.00 3.00 2.95-0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-2.5
3.00 2.80 0.00-2.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-2.40 0.20 0.0
2.95 0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-2.90-2.00-2.45-1.80 0.30 2.80 0.0
0.20-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 2.45 1.65 1.20 0.90 0.65 2.50 2.95 3.00 0.0
      11      THIS STEP MAKES FIBEG = 3.8571783212+000
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-2.70-2.50-2.40-2.40-3.0
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.55-1.00-1.35-1.95-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 2.00 1.40 1.00 0.75 0.55-3.00-3.0
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 2.45 0.10-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.0
0.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.40-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.0
0.00 3.00 2.95-0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-2.5
3.00 2.80 0.00-2.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-2.40 0.20 0.0
2.95 0.10-2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-2.90-2.00-2.45-2.40 0.30 2.80 0.0
0.20-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 2.45 1.05 1.20 0.90 0.65 0.45 2.95 3.00 0.0
      12      THIS STEP MAKES FIBEG = 3.8571783225+000
```

```
      12STEG GER FIBEG    3.8571783225+000
      12
T TIME 0.000+000 IN THE POINT     3.1415926536+000     0.0000000000+000 USE U =      1.3642420526-011
T TIME 1.728-001 IN THE POINT     3.1415926536+000    -1.4714128982-012 USE U =      1.3642420526-011
T TIME 3.456-001 IN THE POINT     3.1415926536+000    -2.9426257964-012 USE U =      2.5999999999+000
T TIME 5.184-001 IN THE POINT     3.1028794276+000    -4.4692809198-001 USE U =      2.8406971416+000
T TIME 6.912-001 IN THE POINT     2.9844334268+000    -9.1973735313-001 USE U =      2.9986434322+000
T TIME 8.639-001 IN THE POINT     2.7850556507+000    -1.3781560758+000 USE U =      2.9045515871+000


T TIME 1.037+000 IN THE POINT     2.5133730644+000    -1.7488167777+000 USE U =      2.9999999999+000
T TIME 1.210+000 IN THE POINT     2.1879939625+000    -1.9911166285+000 USE U =      2.0645594484+000
T TIME 1.382+000 IN THE POINT     1.8379776810+000    -2.0320353782+000 USE U =      2.0747336501+000
T TIME 1.555+000 IN THE POINT     1.4969284351+000    -1.8945634830+000 USE U =     -2.9703538667+000
T TIME 1.728+000 IN THE POINT     1.1762493721+000    -1.8462024083+000 USE U =     -2.8220767604+000
T TIME 1.901+000 IN THE POINT     8.5155209403-001    -1.9379472333+000 USE U =      1.0311136139+000
T TIME 2.073+000 IN THE POINT     5.4464050696-001    -1.6120393851+000 USE U =      2.9999999999+000
IVING THE FINAL POINT     3.1277225891-001    -1.0695641703+000
```

En körning, helt identisk med 6) så när som på att vi hade symmetrisk X2-intervall (-2.25,2.25), klarade av att få lösningen att starta från början (med 13 tidssteg), men svårigheter uppstod fortfarande runt "kritiska området". Randeffekterna från detta och randeffekter från X2 > -2.25 verkade att interferera på grund av det stora hastighetssteget och interpolationsfelen.

Dessutom noterades att erhållna FIBEG ej stämmer med slutpunktens avstånd till origo efter motsvarande antal tidssteg på grund av de stora interpolationsfelen i FI. Oftast är lösningen bättre än FIBEG.

I körning 7) är eliminerat en del av dessa störningsorsaker. Hastighetssteget är mindre och hastighetsintervallet betydligt större, (-3.0,3.0).

Fortfarande är emellertid gittret för grovt för att man skall kunna säga att lösningen är optimal. Detta gäller speciellt insvängningsförloppet mot origo. Vissa svårigheter uppstår även runt X1 lika med ca 2.2, vilket dock förmodligen beror på svårigheterna att hitta exakta omslags punkten med det långa tidssteget och en därav orsakad nedragning av hastighetsnivån.

Körning 7). (sid 34-43)

Utskrifter från DYNPROG med följande parametrar:

IMAX = 23 JMAX = 21 NMAX = 13

H1 = 0.1571 XMIN1 = -0.314 XMAX1 = 3.1416

H2 = 0.3 XMIN2 = -3.0 XMAX2 = 3.0

H3 = 0.1728

UVIDD = 3.0 USTEG = 0.5 EPS = 0.1 VIKT = 10

Innehåll:

1) 14 U^T-matriser med tillhörande FIBEG i (23,11)

2) Strategier för olika antal tidssteg tillåtet.

Körtid 576s.

→ Länge ↓ Lastighet

```
 1         3                                     10                       15                        20              23
 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.0
 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.0
 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.50-1.5
 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.50-1.45-1.45 0.35 0.2
 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-2.70-1.95-1.60-1.45 0.75 0.55 2.20 2.0
 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.95 1.55 1.20 2.90 2.50 3.00 3.0
 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.10 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.45 1.45 1.50-1.65-2.45-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
 0.00 3.00 3.00 3.00 1.55 1.45-0.65-0.90-1.25-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
 0.00 3.00 1.75 1.60-0.30-0.50-2.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
 2.10 0.15 0.00-0.15-2.10-2.45-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
 0.30-1.60-1.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.0
-1.55-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00 0.0
          0     THIS STEP MAKES FIBEG = 9.6243712876+001
 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.55 1.70 1.20 0.85 0.60 0.40 0.2
 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.65 2.30 2.0
 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.80 2.30-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.55-1.85-2.85-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.60-1.50-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.45-0.30-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 1.45-0.60-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
 0.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.60-2.65-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
 0.00 3.00 3.00 1.45-2.05-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
 0.00 3.00 2.60-1.20-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
 3.00 3.00 0.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
 3.00 1.20-2.60-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.0
 2.05-1.45-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.0
 0.20-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00 0.0
          1     THIS STEP MAKES FIBEG = 8.9026982330+001
```

```
0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.55 1.70 1.20 0.85 0.60 0.40 0.25
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.20-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.65 2.30 2.05
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.55 1.75-2.65-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.45-1.30-2.30-3.00-3.00 2.60 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.40-1.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 2.30 0.95-1.70-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 0.00 3.00 3.00 2.70-0.35-2.15-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 3.00 3.00 3.00-0.25-2.25-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 3.00 3.00 1.65-2.05-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 3.00 1.80-0.55-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
3.00 3.00 0.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
3.00 0.55-1.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
2.05-1.65-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
0.25-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
2.70-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.65-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00 0.00
      2      THIS STEP MAKES FIBEG = 7.7960470656+001
0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.55 1.70 1.20 0.85 0.60 0.40 0.25
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.25 3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.65 2.30 2.05
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.80-2.60-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.60-1.85-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.45-1.00-1.90-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.45-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 1.50-0.55-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.45-2.60-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 3.00 3.00 1.65-2.05-2.40-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 3.00 1.80-0.70-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
3.00 3.00 0.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
3.00 0.70-1.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
2.05-1.65-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
0.20-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
2.95-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.65-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00 0.00
      3      THIS STEP MAKES FIBEG = 6.4351231757+001
[illegible] 3.00-3.00-3.00-2.25-1.80 1.20 0.85 0.60 0.40 0.25
```

```
.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-2.25-1.80 1.20 0.85 0.60 0.40 0.25
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.40 1.90 3.00 3.00 2.65 2.30 2.05
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.85 2.50-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.50-1.35-1.95-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.45-1.05-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 1.50 1.45-0.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.40-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 3.00 1.60-2.05-2.30-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 1.80-0.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 0.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 0.80-1.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.05-1.60-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.20-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.85-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00 0.00
     4      THIS STEP MAKES FIBEG = 4.9807919177+001
```

11 13 15 19

```
.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.55-1.50 0.60 0.40 0.25
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-2.15 1.60 1.15 1.10 2.65 2.30 2.05
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-2.95 2.20 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 2.50 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.60-1.95-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.45 1.50-1.45-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 1.50 1.45-0.80-1.10-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.40-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 3.00 1.60-2.05-2.30-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 1.80-0.85-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 0.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 0.85-1.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.05-1.60-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.20-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00 0.00
     5      THIS STEP MAKES FIBEG = 3.6038367270+001
```

```
0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.45-1.50 0.25
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.55 0.85 0.60 0.65 2.05
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-2.05-1.70 1.10 3.00 2.60 3.00 3.00
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-2.70 2.05 1.45 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.60 1.95-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.45 1.50-1.45-2.10-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 1.50 1.45-0.80-1.10-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.40-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 3.00 3.00 1.60-2.05-2.30-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 3.00 1.80-0.85-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
3.00 3.00 0.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
3.00 0.85-1.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
2.05-1.60-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
0.25-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
2.60-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00 0.00
      6      THIS STEP MAKES FIBEG = 2.4515026932+001
0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.60
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.45-1.45-1.45 0.20
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.50 0.80 0.55 1.25 2.00
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-2.70-1.95-1.65 1.05 2.95 2.50 3.00 3.00
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.60 1.95-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 1.95 1.55 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.45 1.50-1.45-2.10-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 1.50 1.45-0.80-1.10-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.40-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 3.00 3.00 1.60-2.05-2.30-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 3.00 1.80-0.85-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
3.00 3.00 0.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
3.00 0.85-1.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
2.05-1.60-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
0.25-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
2.55-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00 0.00
      7      THIS STEP MAKES FIBEG = 1.5668479252+001
```

```
.00 0,00 0,00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00
.00 0,00 0,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00
.00 0,00 0,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.85 0.20
.00 0,00 0,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.50-1.45-1.45 0.35 2.00
.00 0,00 3,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.60 1.95-3.00-3.00 3.00-3.00-2.70-1.95-1.65 1.05 0.75 0.50 2.20 3.00
.00 0,00 3,00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.45 1.50-1.45-2.10-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.95 1.55 3.00 2.90 2.45 3.00 3.00
.00 0,00 3,00 3.00 3.00 1.50 1.45-0.80-1.10-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3,00 3,00 3.00-0.20-0.40-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3,00 3,00 1.60-2.05-2.30-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3,00 1,80-0.85-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3,00 0,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 0,85-1,80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.05-1,60-3,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.25-3,00-3,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.50-3,00-3,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.00-3,00-3,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
.00-3,00-3,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
.00-3,00-3,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
.00-3,00-3,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00 0.00
.00-3,00-3,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00 0.00
.00-3,00-3,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00 0.00

      8      THIS STEP MAKES FIBEG = 9.3133568990+000

.00 0,00 0,00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00
.00 0,00 0,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00
.00 0,00 0,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.50-1.60
.00 0,00 0,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.50-1.45-1.45 0.35 0.20
.00 0,00 3,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.60 1.95-3.00-3.00 3.00-3.00-2.70-1.95-1.65 1.05 0.75 0.50 2.20-1.60
.00 0,00 3,00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.45 1.50-1.45-2.10-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.95 1.55 3.00 2.90 2.45 3.00 0.15
.00 0,00 3,00 3.00 3.00 1.50 1.45-0.80-1.10-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.90
.00 3,00 3,00 3.00-0.20-0.40-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3,00 3,00 1.60-2.05-2.30-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3,00 1,80-0.85-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3,00 0,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 0,85-1,80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.05-1,60-3,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.25-3,00-3,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.50-3,00-3,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.00-3,00-3,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
.00-3,00-3,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3,00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
.00-3,00-3,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
.00-3,00-3,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00 0.00
.00-3,00-3,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00 0.00
.00-3,00-3,00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00 0.00

      9      THIS STEP MAKES FIBEG = 4.9803207455+000
```

```
.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.50-1.60
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.50-1.45-1.45 0.35 0.20
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-2.70-1.95-1.65 1.05 0.75 0.50 2.20 1.95
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.60 1.95-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 1.95 1.55 3.00 2.90 2.45 3.00 3.00
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.45 1.50-1.45-2.10-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 1.50 1.45-0.80-1.10-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.40-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 3.00 1.60-2.05-2.30-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 1.80-0.85-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 0.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.80 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 0.85-1.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.05-1.60-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.25-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.50-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00 0.00
   10       THIS STEP MAKES FIBEG = 2.3930695254+000
.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.50-1.60
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.50-1.45-1.45 0.35 0.20
.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-2.70-1.95-1.65 1.05 0.75 0.50 2.20 1.95
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.60 1.95-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 1.95 1.55 3.00 2.90 2.45 3.00 3.00
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.45 1.50-1.45-2.10-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 0.00 3.00 3.00 3.00 1.50 1.45-0.80-1.10-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.40-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 3.00 1.60-2.05-2.30-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 1.80-0.85-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00-2.65-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 3.00 0.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
.00 0.85-1.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.05-1.60-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-2.20-1.70-1.50 1.65 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.25-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 2.45 1.65 1.20 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
.50-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00 0.00
   11       THIS STEP MAKES FIBEG =
```

```
0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.50-1.60
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.50-1.45-1.45 0.35 0.20
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-2.70-1.95-1.65 1.05 0.75 0.50 2.20 1.95
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.60 1.95-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 1.95 1.55 3.00 2.90 2.45 3.00 3.00
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.45 1.50-1.45-2.10-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 1.50 1.45-0.80-1.10-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.40-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 3.00 3.00 1.60-2.05-2.30-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
0.00 3.00 1.80-0.85-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-2.70-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
3.00 3.00 0.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00
3.00 0.85-1.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
2.05-1.60-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-2.20-1.70-1.50-1.40-1.10 3.00 3.00 3.00 0.00
0.25-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 2.45 1.65 1.20 0.90 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00
-2.50-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00 0.0
     12      THIS STEP MAKES FIBEG = 6.3928936808E-001
0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.0
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.50-1.6
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-1.50-1.45-1.45 0.35 0.2
0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00-3.00-2.70-1.95-1.65 1.05 0.75 0.50 2.20 1.9
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.60 1.95-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 1.95 1.55 3.00 2.90 2.45 3.00 3.0
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 1.45 1.50-1.45-2.10-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 1.50 1.45-0.80-1.10-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
0.00 3.00 3.00 3.00-0.20-0.40-0.75-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 1.70 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
0.00 3.00 3.00 1.60-2.05-2.30-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
0.00 3.00 1.80-0.85-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
3.00 3.00 0.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.0
3.00 0.85-1.80-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 0.0
2.05-1.60-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00-2.20-1.70-1.50-1.40-1.40 3.00 3.00 3.00 0.0
0.25-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 2.45 1.65 1.20 0.90 0.65 3.00 3.00 3.00 0.0
-2.50-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.0
-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00-3.00 0.00 0.00 0.00 0.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 3.00 0.00 0.00 0.00 0.0
```

```
WITH  4+1 STEPS WE HAVE THE FOLLOWING STRATEGIES
AT TIME 0,000+000 IN THE POINT     3,1415926536+000     0.0000000000+000 USE U =      3,0000000000+000
AT TIME 1,728-001 IN THE POINT     3,0969244757+000    -5.1565405807-001 USE U =      2,9999999999+000
AT TIME 3,456-001 IN THE POINT     2,9644270604+000    -1.0129407543+000 USE U =      2,9999999999+000
AT TIME 5,184-001 IN THE POINT     2,7495570737+000    -1.4630607748+000 USE U =      2,9999999999+000
AT TIME 6,912-001 IN THE POINT     2,4640739090+000    -1.8218934657+000 USE U =      1,1048050641+000
GIVING THE FINAL POINT     2.1481188373+000    -1.8218026966+000


WITH  7+1 STEPS WE HAVE THE FOLLOWING STRATEGIES
AT TIME 0,000+000 IN THE POINT     3,1415926536+000     0.0000000000+000 USE U =      3,0000000000+000
AT TIME 1,728-001 IN THE POINT     3,0969244757+000    -5.1565405807-001 USE U =      2,9999999999+000
AT TIME 3,456-001 IN THE POINT     2,9644270604+000    -1.0129407543+000 USE U =      2,9999999999+000
AT TIME 5,184-001 IN THE POINT     2,7495570737+000    -1.4630607748+000 USE U =      3,0000000000+000
AT TIME 6,912-001 IN THE POINT     2,4640739090+000    -1.8218934657+000 USE U =      2,9999999999+000
AT TIME 8,639-001 IN THE POINT     2,1282828312+000    -2.0370427616+000 USE U =      2,9999999999+000
AT TIME 1,037+000 IN THE POINT     1,7708394215+000    -2.0682445177+000 USE U =      2,9999999999+000
AT TIME 1,210+000 IN THE POINT     1,4246516341+000    -1.9090571967+000 USE U =      2,9999999999+000
GIVING THE FINAL POINT     1.1203638538+000    -1.5907325867+000


WITH  8+1 STEPS WE HAVE THE FOLLOWING STRATEGIES
AT TIME 0,000+000 IN THE POINT     3,1415926536+000     0.0000000000+000 USE U =      3,0000000000+000
AT TIME 1,728-001 IN THE POINT     3,0969244757+000    -5.1565405807-001 USE U =      2,9999999999+000
AT TIME 3,456-001 IN THE POINT     2,9644270604+000    -1.0129407543+000 USE U =      2,9999999999+000
AT TIME 5,184-001 IN THE POINT     2,7495570737+000    -1.4630607748+000 USE U =      3,0000000000+000
AT TIME 6,912-001 IN THE POINT     2,4640739090+000    -1.8218934657+000 USE U =      2,9999999999+000
AT TIME 8,639-001 IN THE POINT     2,1282828312+000    -2.0370427616+000 USE U =      2,9999999999+000
AT TIME 1,037+000 IN THE POINT     1,7708394215+000    -2.0682445177+000 USE U =      2,7401654465+000
AT TIME 1,210+000 IN THE POINT     1,4249621840+000    -1.9080246575+000 USE U =     -2,9498544685+000
AT TIME 1,382+000 IN THE POINT     1,0986352229+000    -1.8985466165+000 USE U =      2,9999999999+000
GIVING THE FINAL POINT     8.0739963227-001    -1.4569573597+000


WITH  9+1 STEPS WE HAVE THE FOLLOWING STRATEGIES
AT TIME 0,000+000 IN THE POINT     3,1415926536+000     0.0000000000+000 USE U =      3,0000000000+000
AT TIME 1,728-001 IN THE POINT     3,0969244757+000    -5.1565405807-001 USE U =      2,9999999999+000
AT TIME 3,456-001 IN THE POINT     2,9644270604+000    -1.0129407543+000 USE U =      2,9999999999+000
AT TIME 5,184-001 IN THE POINT     2,7495570737+000    -1.4630607748+000 USE U =      3,0000000000+000
AT TIME 6,912-001 IN THE POINT     2,4640739090+000    -1.8218934657+000 USE U =      2,9999999999+000
AT TIME 8,639-001 IN THE POINT     2,1282828312+000    -2.0370427616+000 USE U =      2,9999999999+000
AT TIME 1,037+000 IN THE POINT     1,7708394215+000    -2.0682445177+000 USE U =     -8,9751830152-001
AT TIME 1,210+000 IN THE POINT     1,4294144079+000    -1.8922304307+000 USE U =     -3,0000000000+000
AT TIME 1,382+000 IN THE POINT     1,1058814219+000    -1.8821993570+000 USE U =     -7,4565530606-001
AT TIME 1,555+000 IN THE POINT     7,8716858545-001    -1.8177771494+000 USE U =      3,0000000000+000
GIVING THE FINAL POINT     5.1702274987-001    -1.3011978703+000
```

```
WITH 10+1 STEPS WE HAVE THE FOLLOWING STRATEGIES
AT TIME 0,000+000 IN THE POINT     3,1415926536+000     0.0000000000+000 USE U =     3,0000000000+000
AT TIME 1,728-001 IN THE POINT     3,0969244757+000    -5.1565405807-001 USE U =     2,9999999999+000
AT TIME 3,456-001 IN THE POINT     2,9644270604+000    -1.0129407543+000 USE U =     2,9999999999+000
AT TIME 5,184-001 IN THE POINT     2,7495570737+000    -1.4630607748+000 USE U =     3,0000000000+000
AT TIME 6,912-001 IN THE POINT     2,4640739090+000    -1.8218934657+000 USE U =     2,9645699248+000
AT TIME 8,639-001 IN THE POINT     2,1286522297+000    -2.0330515493+000 USE U =     2,9999999999+000
AT TIME 1,037+000 IN THE POINT     1,7718704939+000    -2.0646369315+000 USE U =    -8,1035948247-001
AT TIME 1,210+000 IN THE POINT     1,4309734135+000    -1.8888460282+000 USE U =    -3,0000000000+000
AT TIME 1,382+000 IN THE POINT     1,1081081624+000    -1.8777933799+000 USE U =    -2,5732866274+000
AT TIME 1,555+000 IN THE POINT     7,7545000468-001    -1.9983022641+000 USE U =     2,9999999999+000
AT TIME 1,728+000 IN THE POINT     4,7445121043-001    -1.4775916275+000 USE U =     3,0000000000+000
GIVING THE FINAL POINT     2.6614104063-001    -9,3265892710-001


WITH 11+1 STEPS WE HAVE THE FOLLOWING STRATEGIES
AT TIME 0,000+000 IN THE POINT     3,1415926536+000     0.0000000000+000 USE U =     3,0000000000+000
AT TIME 1,728-001 IN THE POINT     3,0969244757+000    -5.1565405807-001 USE U =     2,9999999999+000
AT TIME 3,456-001 IN THE POINT     2,9644270604+000    -1.0129407542+000 USE U =     2,9999999999+000
AT TIME 5,184-001 IN THE POINT     2,7495570738+000    -1.4630607748+000 USE U =     2,9999999999+000
AT TIME 6,912-001 IN THE POINT     2,4640739090+000    -1.8218934657+000 USE U =     2,3749533122+000
AT TIME 8,639-001 IN THE POINT     2,1348076697+000    -1.9664478207+000 USE U =     1,3939930847+000
AT TIME 1,037+000 IN THE POINT     1,7993825995+000    -1.9000564319+000 USE U =     2,9999999999+000
AT TIME 1,210+000 IN THE POINT     1,4805156804+000    -1.7630149403+000 USE U =    -3,0000000000+000
AT TIME 1,382+000 IN THE POINT     1,1820717759+000    -1.7186536488+000 USE U =    -2,6194208708+000
AT TIME 1,555+000 IN THE POINT     8,7997755092-001    -1.8021434029+000 USE U =    -2,9978508407-002
AT TIME 1,728+000 IN THE POINT     5,7872159434-001    -1.6914966099+000 USE U =     2,6164054516+000
AT TIME 1,901+000 IN THE POINT     3,2786208997-001    -1.2103992304+000 USE U =     3,0000000000+000
GIVING THE FINAL POINT     1,6580532210-001    -6,6649736697-001


WITH 12+1 STEPS WE HAVE THE FOLLOWING STRATEGIES
AT TIME 0,000+000 IN THE POINT     3,1415926536+000     0.0000000000+000 USE U =     3,0000000000+000
AT TIME 1,728-001 IN THE POINT     3,0969244757+000    -5.1565405807-001 USE U =     2,9999999999+000
AT TIME 3,456-001 IN THE POINT     2,9644270604+000    -1.0129407543+000 USE U =     2,9999999999+000
AT TIME 5,184-001 IN THE POINT     2,7495570737+000    -1.4630607748+000 USE U =     2,9999999999+000
AT TIME 6,912-001 IN THE POINT     2,4640739090+000    -1.8218934657+000 USE U =     2,3749533116+000
AT TIME 8,639-001 IN THE POINT     2,1348076697+000    -1.9664478207+000 USE U =    -1,9281449215-001
AT TIME 1,037+000 IN THE POINT     1,8096663561+000    -1.7950442919+000 USE U =     2,9999999999+000
AT TIME 1,210+000 IN THE POINT     1,5081960217+000    -1.6680447403+000 USE U =    -3,0000000000+000
AT TIME 1,382+000 IN THE POINT     1,2277178341+000    -1.6039538030+000 USE U =    -2,5978847516+000
AT TIME 1,555+000 IN THE POINT     9,4776207269-001    -1.6588767178+000 USE U =    -1,9568560770+000
AT TIME 1,728+000 IN THE POINT     6,5312646062-001    -1.7693485138+000 USE U =     2,5209136818+000
AT TIME 1,901+000 IN THE POINT     3,8714309546-001    -1.3064426390+000 USE U =     2,5353489643+000
AT TIME 2,073+000 IN THE POINT     2,0197557795-001    -8.3803115780-001 USE U =     2,9143933756+000
GIVING THE FINAL POINT     1,0249166081-001    -3,1505567932-001
```

```
AT TIME 0,000+000 IN THE POINT    3,1415926536+000    0.0000000000+000 USE U =    3,0000000000+000
AT TIME 1,728-001 IN THE POINT    3,0969244757+000   -5.1565405807-001 USE U =    2,9999999999+000
AT TIME 3,456-001 IN THE POINT    2,9644270604+000   -1.0129407543+000 USE U =    2,9999999999+000
AT TIME 5,184-001 IN THE POINT    2,7495570737+000   -1.4630607748+000 USE U =    2,9999999999+000
AT TIME 6,912-001 IN THE POINT    2,4640739090+000   -1.8218934657+000 USE U =    2,3749533116+000
AT TIME 8,639-001 IN THE POINT    2,1348076697+000   -1.9664478207+000 USE U =   -1,9281449215-001
AT TIME 1,037+000 IN THE POINT    1,8096663561+000   -1.7950442919+000 USE U =    2,9999999999+000
AT TIME 1,210+000 IN THE POINT    1,5081960217+000   -1.6680447403+000 USE U =   -3,0000000000+000
AT TIME 1,382+000 IN THE POINT    1,2277178341+000   -1.6039538030+000 USE U =   -2,2232083420+000
AT TIME 1,555+000 IN THE POINT    9,5012707887-001   -1.6286405886+000 USE U =   -7,0307020418-002
AT TIME 1,728+000 IN THE POINT    6,7930510035-001   -1.5118421803+000 USE U =    8,0541367824-001
AT TIME 1,901+000 IN THE POINT    4,3637095956-001   -1.3030469039+000 USE U =    1,0580956853+000
AT TIME 2,073+000 IN THE POINT    2,3127552803-001   -1.0744465995+000 USE U =    2,3674174516+000
AT TIME 2,246+000 IN THE POINT    8,2999924743-002   -6.4446967671-001 USE U =    2,9999999999+000
GIVING THE FINAL POINT    1,7149503480-002    -1,1536067897-001
```

TIMEOPTIMAL TRAJECTORY

STARTPOINT 3.14 0.00 TIMESTEP 0.17

TIME	POSITION		USED U
0.173	3.09692	-0.51565	3.0
0.346	2.96443	-1.01294	3.0
0.518	2.74956	-1.46306	3.0
0.691	2.46407	-1.82189	3.0
0.864	2.12828	-2.03704	3.0
1.037	1.77084	-2.06824	3.0
1.210	1.42465	-1.90906	3.0
1.382	1.09794	-1.90245	-3.0
1.555	0.75703	-2.07301	-3.0
1.728	0.44347	-1.54870	3.0
1.901	0.22296	-1.00344	3.0
2.073	0.09623	-0.46531	3.0
2.246	0.06162	0.06399	3.0

Detta är det optimala resultatet med bang-bang-styrning, framtaget enligt analogin med kontinuerliga fallet, för det i föregående körningar använda samplingsintervallet.

Felen i Runge-Kutta-integrationerna över dessa 13 steg uppskattas till 2 enheter i 4:e decimalen ur en körning med halva tidssteget och med samma omslagspunkter.

Om den andra omslags punkten inte hade skett just runt det i bilaga 3 framtagna 0.73, hade pendeln inte alls haft hastigheten noll så nära den önskade slutpunkten. Hade tidsintervallet varit något större, så att vi efter 8 tidssteg legat runt X1 = 0.85 (nästa steg med U = -3 ger X1 0.55), och vi där skiftat U, så hade pendeln haft vändläge ungefär för X1 = 0.20. Det är med andra ord väldigt svårt att säga något om hur den tidsoptimala styrningen i den samplade varianten bör se ut. Små variationer i samplingsintervallets storlek ger stora förändringar i den maximala tiden och förändrar styrstrategins utseende totalt.

Problemet att optimera samplingsintervallets storlek, inom vissa gränser, för styrning från en viss punkt är lösbart och utföres nog lättast genom direkt framtestning, men att ta fram ett samplingsintervall, som är på något sätt optimalt för

samtliga punkter, är inte ens teoretiskt tänkbart!

För att kunna lösa problemet (2) på (3) bör man fixera sitt tidsintervall redan från början!

Med ledning av körningen överst sid 44 kan man säga att minimaltiden för 180°:s problemet i kontinuerliga fallet är 0.3 sekunder.

Kap VIII.

Kommentarer.

Examensarbetet har framför allt gett erfarenheter om programmeringsarbete. Många fel har begåtts i utarbetandet av det fungerande programmet. Det är inte minst villkorssatserna och utmatningen, som har varit stötestenar. Ett långt drivet pedanteri är att anbefalla! Ut-formningen av lämpliga kontrollutskrifter för felsökningen krävde från början mycket tid. Svårigheten var att kunna välja ut de relevanta avsnitten bland mellan-räkningarnas ofantliga informationsmängder. Intimt förknippat med detta problem var problemet att avgöra, om "misstänkta" resultat berodde på programfel, olämpliga parameterval eller kanske rent av var "riktiga".

Programmet bör kunna förbättras på en rad punkter. Som redan inledningsvis nämndes, strävar vi efter en styrmatris, så att vi med hjälp av en liten processdatamaskin skulle kunna föra pendeln till det önskade läget utan att störningar skulle ha alltför stor inverkan. Den här beskrivna metoden klarar sig inte av att ta fram denna matris, men metoden med "policy iterations", enligt sid 8f , ger som primärt resultat just en sådan matris, varför det är rimligt att tillåta ganska långa räknetider. En intressant utveckling vore att undersöka problemet med mycket korta tidssteg (approximation av kontinuerliga fallet) och förutsättningar om bang-bang-styrning med policy iteration. Man skulle då kunna lagra att antal U-värden i ett datamaskinsord och slippa ha bekymmer med minnesutrymme, även om gitterindelningarna (funktionsrepresentation i matriser förutsatt) gjorts fina!

En del anmärkningar på den använda metoden bör också göras. Det är först och främst enl sid 18 rimligare att ha "nearest neighbour"-interpolation i stället i uttolkningen av styrprogrammet. Vidare är det lämpligt att några långa kör-

ningar göres med t.ex. H3 = 0.02*π (30-35 tidssteg) och väsentligt förfinade gitterindelningar. Det vore intressant att se, hur lösningen klarar sig förbi svårigheterna runt $x \approx (2.2, 1.8)$. Det skulle emellertid kräva timmars körtid och är knappast realistiskt.

Uppsnabbning av programmet vore för praktiska tillämpningar en nödvändighet.

Rent programmeringsmässigt finns en del att göra. Framför allt stjäl redigeringsarbetet med subroutinerna RK1ST och INTERP en hel del tid, i och med att de anropas så många gånger i FORLUST, men övriga detaljer, som skulle kunna förbättras, är nog inte värda besväret. Många gånger väsentligare är det att ev modifiera metodvalet på några punkter. Sökningen är ett långsamt moment. Antagligen skulle man med någon flerstegssökning, t.ex. Fibonaccisökning, skära ner tiden till hälften. Tveksammare är det, om det skulle gå att inte räkna ut "hela" matriserna från början, förslagsvis med hjälp av den explicita lösningen man får genom att linjärisera i varje punkt. Det skulle i så fall medföra variabla IMAX, JMAX och XMIN.

När nu programtestningen är klar, och de flesta parametrar är någorlunda uttestade, borde Runge-Kutta-integrationen, som uppenbarligen gett nästan onödig noggrannhet, bytas ut mot en ofantligt mycket snabbare Euler-approximation. Man bör i alla händelser se efter vad som går att åstadkomma på det sättet. Kanske räcker noggrannheten.

För allmännare startpunkter t.ex. med "hastighet åt fel håll" måste avståndsdefinitionen modifieras. Man måste ta hänsyn till att det finns mer än en absorbtionspunkt. Med vetskap om startpunkten och med hjälp av en intuitiv energibetraktelse borde det gå att begränsa sig till två, och i de allra flesta fall räcker det nog med en. För de svåra startpunkterna lägger man ~~därför~~ lämpligen till en dimension på

FI-matriserna och kan på så vis representera avståndet efter n steg med optimal strategi till båda absorbtionspunkterna. Minimeringen sker över möjliga punkter i båda matrishalvorna.

Stabilitetsproblemet är svårt att behandla för all dynamisk programmering men är inte desto mindre överhängande. En överläggning på ett annat exempel finns i ADP sid 327ff , där också svårigheter, som uppkommer vid start och slutpunkt i singulära punkter, berörs. Jag konstaterar endast, att även om störningar har liten inverkan på minimala tiden , kan väsentliga förändringar ske i de optimala strategierna. Låt t.ex. två olika strategier ge ungefär samma tid men reagera olika för en viss störning. Det kan mycket väl hända, att inte samma strategi längre är bäst.

Hur länge kan FI-matriserna innehålla signifikant information? Alla beslut fattas endast på grundval av dessa data. Det gäller att i FI-värdet i några gitterpunkter hålla all information om valet av bästa vägar, när det plötsligt blir bättre att bromsa med U=-3 än att bromsa med U=+3 osv, information, som skall bestämma, om det någonstans går att minska accelerationen, utan att det gör för mycket, men så att man tjänar på det, genom att man träffar precis i någon kritisk punkt. FI-värdet innehåller dessutom en massa onyttig information om prioriteringar mellan hastighet och läge.

En nackdel med dynamisk programmering är, att så många svårigheter är specifikt kopplade till en viss tillämpning. Som regel är det lämpligt att kombinera dynamisk programmering med andra metoder framkomna ur intuitiva resonemang eller genom speciella listigheter. Visserligen är mitt program principiellt enkelt att använda på andra tillämpningar. Det är bara att byta ut systemekvationerna i FUNC. Men parametervalen kräver de långa överläggningarna. Om antalet tillstånds-

variabler i systembeskrivningen överstiger två, är det oftast inte praktiskt möjligt att använda metoden. I det här aktuella problemet med servostyrning av en pendel skulle vi t.ex. vilja införa begränsningar på $\dot{\xi}$ och ξ. Vid höga $\dot{\xi}$-värden klarar servot inte av att ge $\ddot{\xi} = \pm 3$, och det spel i vilket vagnen med pendeln kan röra sig, är ganska litet! Däremot är det snarare en förenkling, om vi är tvungna att begränsa pendelns vinkelhastighet på grund av luftmotstånd etc.

Den stora fördelen med dynamisk programmering, om man har råd att offra lite räknetid på en stor maskin, är att det är lätt att ta fram erforderliga algoritmer för att klara av optimeringsproblem med absoluta begränsningar på både styrsignal och tillståndsvariabler.

REFERENSER:

{1} BELLMAN,R.E., DREYFUS,S.E.
(ADP) "Applied Dynamic Programming"
Princeton 1962.

{2} BELLMAN, R.E.
"Dynamic Programming"
Princeton 1957.

{3} BELLMAN, R.
"Adaptiv Control Processes: A Guided Tour"
Princeton 1961.

{4} GUIGNABODET, J.J.G.
"Dynamic Programming: Cumultative Errors In The Evaluation of An Optimal Policy"
JACC 1962.

Bilaga 1

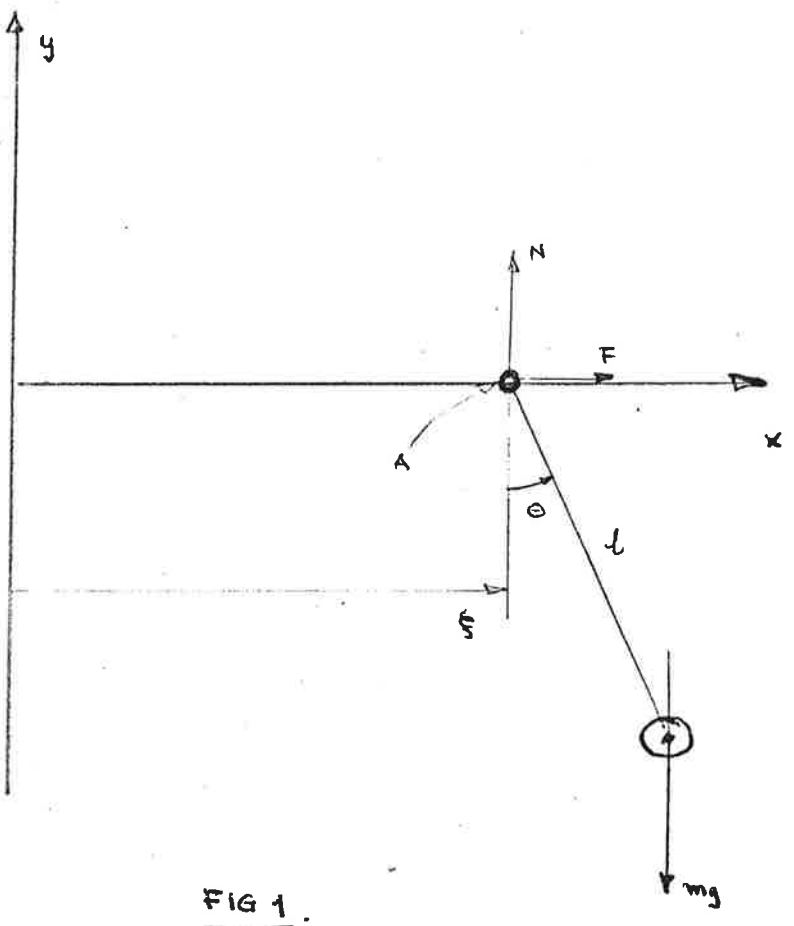


FIG 1.

Anm N kan vara både positiv och negativ

Pkt A friktionsfritt rörlig längs x-axeln och bunden till denna axel.

Geometrin ger $\begin{cases} x = \xi + l \sin\theta \\ y = -l\cos\theta \end{cases}$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{\xi} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} = l\ddot{\theta}\sin\theta + l\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases}$$

dynamiken ger

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F \\ m\ddot{y} = N - mg \\ -J_c\ddot{\theta} = F \cdot \ell \cdot \cos\theta + N\ell\sin\theta \end{cases}$$

$J_c \approx 0$ eliminera $F, N, \ddot{x}, \ddot{y}$

$$0 = m\{\ddot{\xi} + l\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta\}\, l\cos\theta +$$

$$+ m\{g + \ell\ddot{\theta}\sin\theta + \ell\dot{\theta}^2\cos\theta\}\, l\sin\theta$$

dvs $0 = \ddot{\theta} \cdot \ell + \ddot{\xi}\cos\theta + g\sin\theta$

anm. Det uttrycket, som erhålles om $\ddot{\xi}$ elimineras, i stället för F, är betydligt bökigare.

mit

$$\begin{cases} u = -\ddot{\xi}/g \\ \tau = t \cdot \sqrt{\frac{g}{\ell}} = t \cdot \omega \\ x_1 = \pi - \theta \\ x_2 = -\dot{\theta}/\omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = x_2 \\ \frac{dx_2}{d\tau} = \sin x_1 + u \cos x_1 \end{cases}$$

Bilaga 2.

Härledning med hjälp av maximumprincipen av styrlagens utseende.

Systemet beskrives av

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_o) = c \end{cases}$$

där $\begin{cases} f_1(x,u) = x_2 \\ f_2(x,u) = \sin x_1 + u \cos x_1 \end{cases}$

$u(t)$ sökes så att följande uttryck minimeras

$$\int_{t_o}^{T} L(x,u)ds + L_o(x(T))$$

där $L(x,u) = 1$ och $L_o(x(T)) = 0$

så att $x(T) = 0$ (eller allmännare $x(T) \in \{|x| \leq EPS\}$)

när $u \in U$, $U = \{|u| \leq 3\}$

Bilda $H(x,p,u) = L(x,u) + p^T f(x,u)$

så att

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{dH}{dp_i} & i=1,\dots,n \\ \frac{dp_i}{dt} = \frac{dH}{dx_i} & i=1,\dots,n \end{cases}$$

Sätt $M(x,p) = \sup_{u \in U} H(x,p,u)$

Pontryagins maximumprincip säger:

"Låt $\overset{u=}{u}(t)$, $t \in (t_o,T)$ vara en tillåten styrsignal, som överför systemet från $x(t_o)=c$ till $x(T) = 0$ (ev omgivn. av 0), och $\overset{x=}{x}(t)$ vara den därtill hörande trajektorian. Ett nödvändigt villkor för att $\overset{u=}{u}(t)$ skall vara en optimal strategi, är att det existe-

rar en till $x(t)$ och $u(t)$ hörande vektor $p(t)$, ej identiskt noll så att:

A. för alla t, $t_o \leq t \leq T$, u är vald så att $H(x,p,u)$ antar sitt maximum = $M(x,p)$

B. vid sluttidpunkten gäller $M(x(T),p(T)) \geq 0$."

I det aktuella fallet:

$$H(x,p,u) = 1 + p_1 x_2 + p_2 \sin x_1 + p_2 u \cos x_1$$

genast inses att

$$u_o = 3 \cdot \operatorname{sign}(p_2 \cos x_1) \quad , \; t \in (t_o, T)$$

$$\Rightarrow \quad H(x,p,u_o) = \sup_{u \in U} H(x,p,u)$$

Det är alltså klart att en optimal styrning är av bang-bang-typ, om någon existerar.

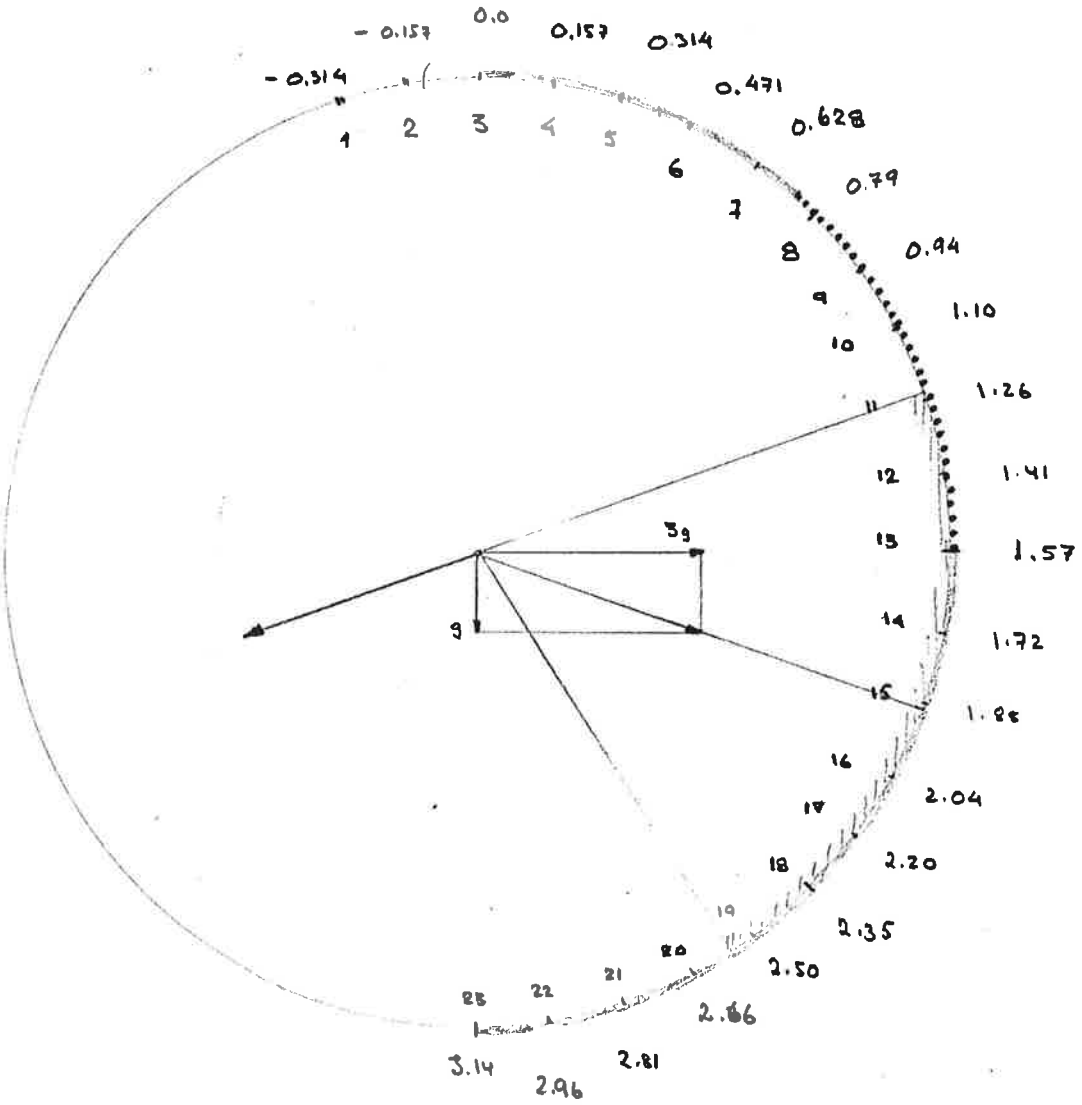

0.0
- 0.157
0.157
0.314
- 0.314
0.471
0.628
0.79
0.94
1.10
1.26
1.41
1.57
1.72
1.88
2.04
2.20
2.35
2.50
2.66
2.81
2.96
3.14
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
3g
g

FIG 1.

Bilaga 3.

Försök att ta fram tidsoptimal styrlag genom intuitivt resonemang.

Nedanstående kommer helt att referera till fig 1, där även min mest använda vinkelindelning finns angiven. Resonemangen kommer dock att hänföra sig till en kontinuerlig styrning, dvs "om - slagstidpunkterna" är inte i förväg fixerade, utan kan helt refereras till systemvariablerna. Gitterpunkternas nummer kommer ofta att få representera vinkellägen.

Grunden för detta resonemangs genomförande är, att man kan tänka sig att pivotpunktensacceleration sammansättes med tyngdaccelerationen till ett gravitationsfält, vars riktning och storlek alltså inom vissa gränser är reglerbar. Denna sammansatta gravitationsvektor tänkes generera ett koordinatsystem, i vilket elementära resonemang kan tillämpas på pendeln.

I bilaga 2 är visat att styrningen blir av bang-bang-typ. Tyngdkraftfältets riktning för $u = \pm 3$ är alltså speciellt intressant. +3 - vektorn går genom punkt 15 ($x_1 = 108^\circ = (108\,43^\circ)$ $= 180^\circ - \text{arctg } 3$) och -3-vektorn (eller rättare dess förlängning bakåt) genom punkt 11 , och dessa punkter är stabilt resp. instabilt jämviktsläge till de båda systemen.

Betrakta följande exempel:

Starta i punkt 23 (med $x_2 = 0$), och lägg på u = +3. Pendeln kommer att svänga upp mot punkt där den har maximal vinkel-hastighet, och vänder i punkt 7 för att åter vända till punkt 23 osv.

Punkt 11 är "-3 systemets" instabila jämviktspunkt. Om pendeln har negativ vinkelhastighet (går upp mot punkt 3) i denna punkt, så kommer den att slå över jämviktsläget och börja accelereras i detta system.

Vi ledes fram till att följande strategi verkar rimlig:

$\begin{cases} u = +3 \\ u = -3 \\ u = +3 \end{cases}$ tills vi kommer någonstans mellan 15 och 11 härefter och till någon punkt, säg ca 8-10, så att med pendeln skulle ha vändläge i punkt 3

Vi har som utgångspunkt att hela tiden ha så hög hastighet som möjligt i riktning mot punkt 3. För att få det accelererar vi ~~(så mycket som möjligt)~~ maximalt ända till den punkt där vi måste börja retardera för att med full retardation få ner hastigheten till noll i punkt 3.

Detta kriterium är ekvivalent med minimal tid, om vi bortser från möjligheten att det kanske i något intervall går att höja "maxhastigheten" betydligt genom att i ett annat inte använda "maxhastighet" eller kanske rent av använda positiv vinkelhastighet, och dessutom bortser från möjligheten att kombinera detta med att klättra upp till 3 bakvägen.

Problemet att på kortast möjliga tid föra pendeln från vila i sitt stabila jämviktsläge i punkt 3 till vila i sitt instabila jämviktsläge i punkt 3 har alltså reducerats till följande:

1/ Sök första omslagspunkten så att den nödvändiga retardationen mellan punkterna 15 och 11 blir så liten som möjligt!

2/ Hitta andra omslagspunkten någonstans runt 9, som lagom stoppar pendeln i punkt 3!

Båda dessa problem är möjliga att lösa analytiskt. Betraktelser av pendelns rörelseenergi och potentiella energi i +3 resp -3-systemen ger möjlighet att beräkna hastigheten under vägen.

1/ Kalla omslagspunkten a. Hastigheten i denna punkt fås ur:

$$x_2^2(a) = 2(1-\cos 72^\circ)\sqrt{10} - 2(1-\cos(108^\circ-a))\sqrt{10}$$

hastigheten i punkt 11:

$$x_2^2(11) = x_2^2(a) - 2(1-\cos(a-72^\circ))\sqrt{10}$$

$$x_2^2(11) = 2(1-\cos 72^\circ)\sqrt{10} - 2\sqrt{10}\{2 \underbrace{-\cos(108^\circ - a) - \cos(a-72^\circ)}_{-f(a)}\}$$

maximera $x_2^2(11)$ map a $\Leftrightarrow$ maximera $f(a)$

$f'(a) = 0 \Rightarrow a = 90^\circ$ (övriga rötter ointressanta)

optimal omslagspunkt: punkt 13

$x_2^2(11) \leq 2\sqrt{10}\,(2\cos 18^\circ - \cos 72^\circ - 1)$

2/ Antag omslagspunkten b.

Enligt 1/ fås

$$x_2^2(b) = x_2^2(11) + 2\sqrt{10}\,(1-\cos(72^\circ - b))$$

Om hastigheten i punkt 3 skall kunna bli noll, kräves:

$$x_2^2(b) = 2\sqrt{10}\left\{2\sin\frac{b}{2}\cdot\cos\left(72^\circ - \frac{180^\circ - b}{2}\right)\right\}$$

Om dessa ekvationer kombineras, fås:

$$\sin(b-18^\circ) + \sin(b+18^\circ) = 2\cos 18^\circ - 2\sin 18^\circ$$

$$\sin b = \frac{2(\cos 18^\circ - \sin 18^\circ)}{2\cdot\cos 36^\circ} = 2/3 \quad ; \quad b = 41{,}8^\circ = 0{,}7298$$

Optimal omslagspunkt strax "efter" punkt 8.

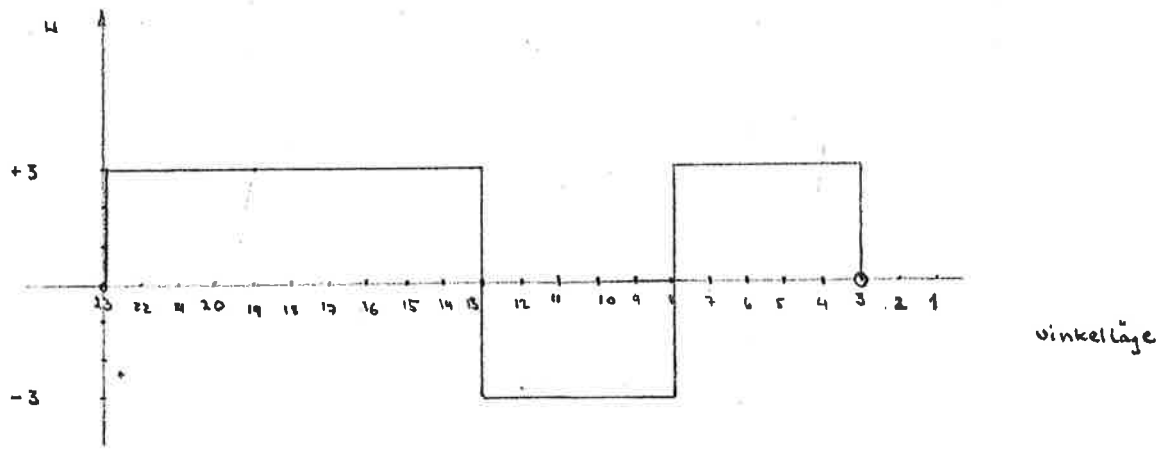


fig 2.

Ovanstående styrprogram ger en minimaltid på ca 0.30 s.

Om vi däremot startar i någon annan punkt, är det kanske inte lika lätt att inse, hur den tidsoptimala lösningen ser ut.

Betrakta följande exempel:

Starta i punkt 17 med hastigheten noll. Minimera tiden att nå punkt 3. U = +3 ger negativ hastighet. U = -3 ger positiv hastighet. Naturligt vore att välja U = +3, så att vi närmar oss punkt 3, men pendeln kommer då att ha vändläge i punkt 13 och når alltså aldrig förbi punkt 11, där det skulle löna sig att slå om till u=-3. Vi bör i stället starta med u=-3 och skifta u ungefär runt 19, så att pendeln med u=+3 har vändpunkt runt 20-21, dvs andra vändpunkten förbi 11. Men var detta skifte från -3 till +3 första gången skall ske, är inte intuitivt klart och går inte att lätt beräkna analytiskt.

Området mellan punkterna 19 och 11 är kritiskt vid start utan hastighet. Här är det nödvändigt att starta i riktning från slutpunkten. Man måste här också starkt beakta möjligheten, att det är optimalt att svänga upp bakvägen.

Ovanför punkt 11 är det åter naturligt att accelerera för fullt och därefter bromsa för fullt.

Svårigheterna uppstår alltså framför allt i området mellan 19 och 11 vid hastigheten noll och i motsvarande område vid andra hastigheter. Lösningen är , om den går genom något sådant område komplicerad, och den kommer inte att variera kontinuerligt med begynnelsevärdet (startpunkten). Detta och det faktum att det är bang-bang-styrning gör, att varje approximationsförfarande bör ha svårigheter med konvergens och stabilitet.

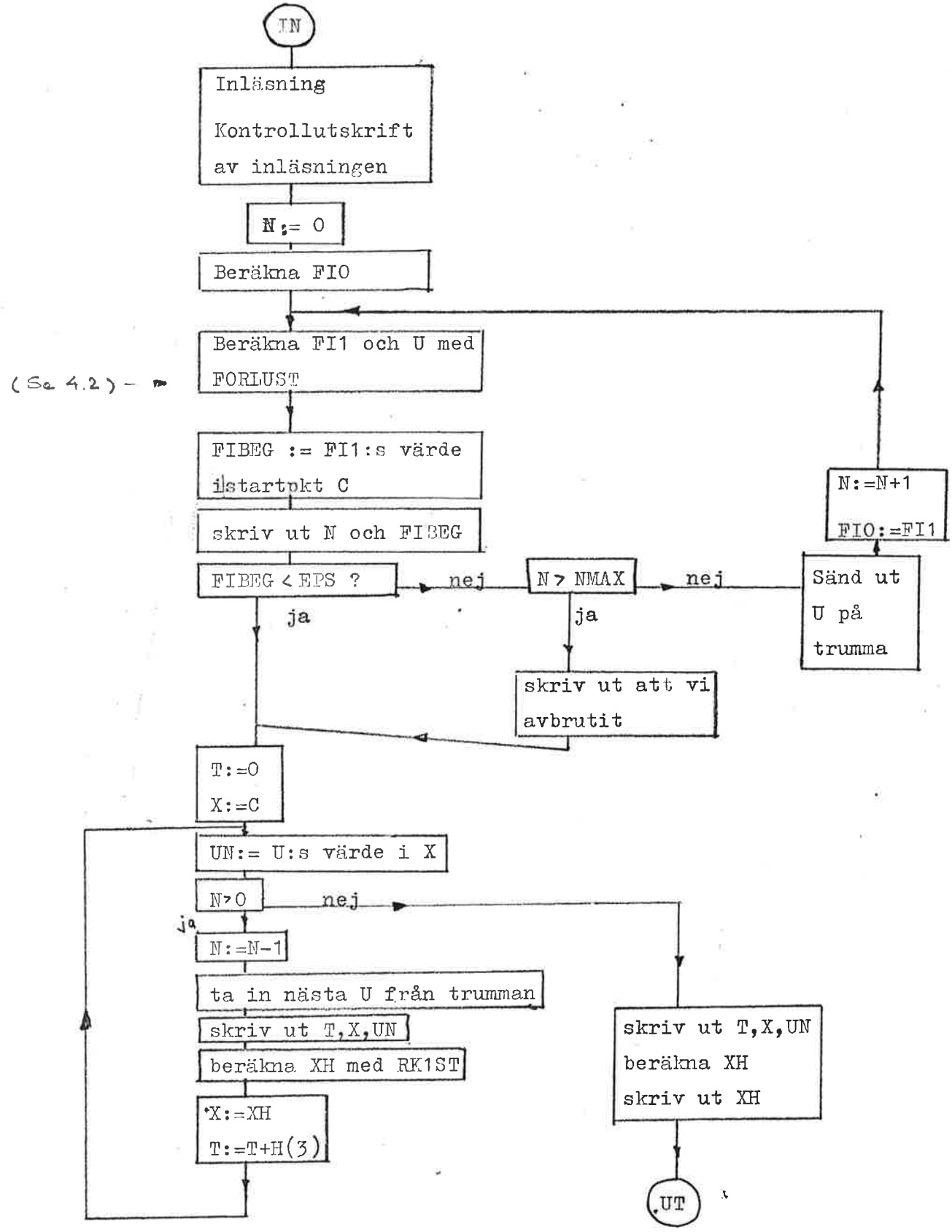
Om vi har andra begränsningar på styrvariabeln, kan lösningarna radikalt ändra utseende. Vi har då $|u| \leq u_{max}$, där alltså u_{max} = 3.0 i mina tillämpningar. Betrakta åter det första exemplet, där pendeln startar stilla i nedersta

läget. En liten minskning av u_{max} (eller en ökning) kommer att innebära, att a ligger stilla, och att b varierar kontinuerligt. Om däremot u_{max} minskas radikalt, kommer kanske punkt 23 att inkluderas i det område varifrån punkt 3 inte kan nås med monoton x1-variation. Gränsfallet mellan de båda lösningstyperna inträffar, då vändläget i +3-systemet ligger i det instabila jämviktsläget till -3-systemet, dvs om denna punkt ligger i $x1 = \pi/3$. U_{max} är då $\sqrt{3} = 1.732$.

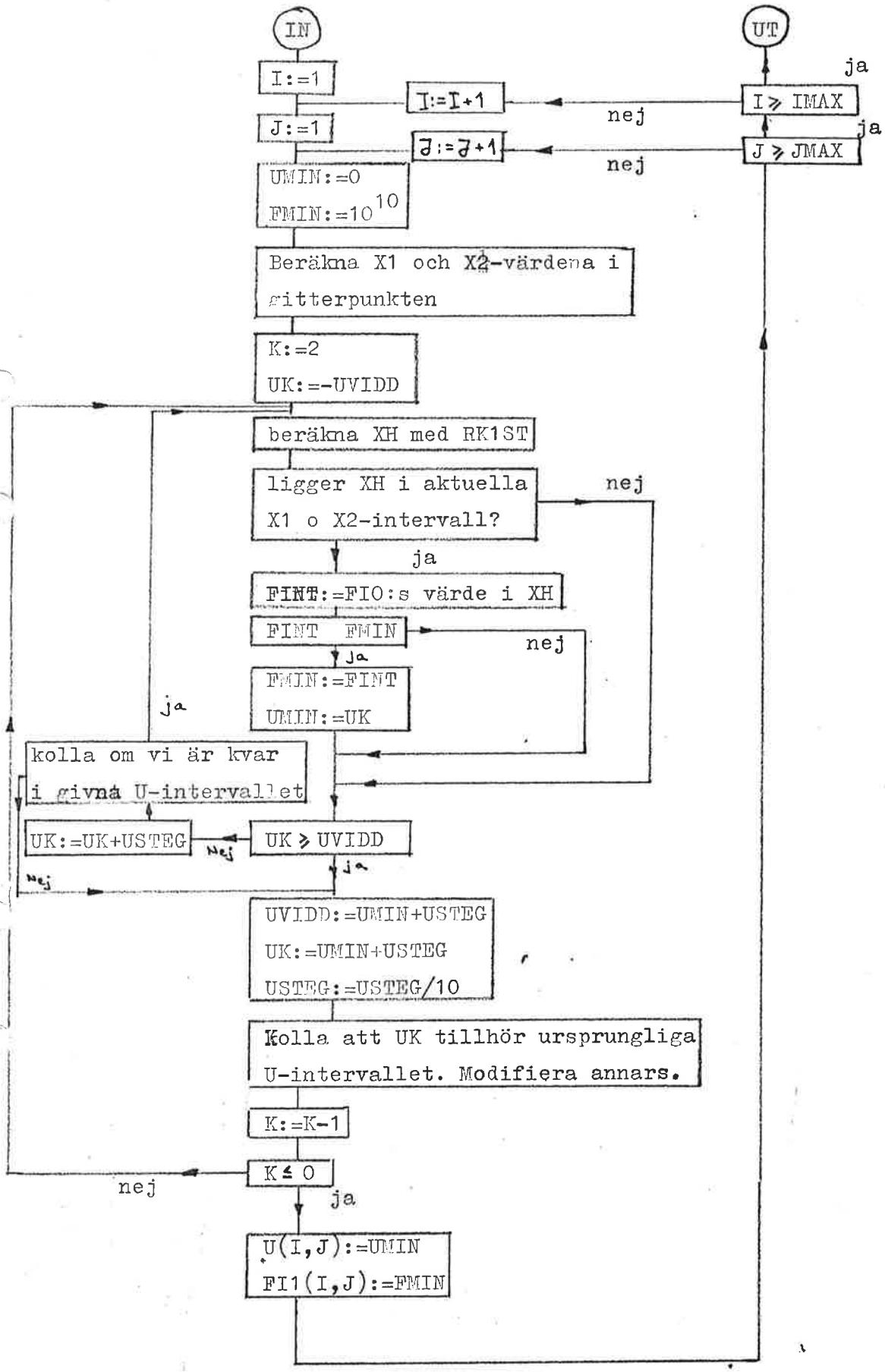
Motsvarande resonemang kan genomföras med andra startpunkter.

BILAGA 4.

Flödesschema över huvudprogrammet.



Flödesschema för FORLUST



```
      PROGRAM DYNPROG
C
C     THIS PROGRAM PRODUCES AN APPROXIMATELY TIMEOPTIMAL STRATEGY
C     TO GO FROM
C     X1 = C1 ,X2 = C2    TO
C     X1 = 0 , X2 = 0
C
C     NEEDED SUBROUTINES
C     FOR LINEAR INTERPOLATION
C      INTERP
C     FOR INTEGRATION
C      RK1ST                , THAT NEEDS
C      FUNC
C     (PROVIDES THE ACTUAL SYSTEMEQUATIONS)
C     FOR THE MINIMIZATION
C      FORLUST
C
C     THE FIRST MATRICES MUST BE DIMENSION (IMAX,IMAX)
      DIMENSION FI0(23,23),FI1(23,23),U(23,23),X(2),XH(2),C(2)
      COMMON/BLOCK1/ H(3),XMIN(2),XMAX(2),IMAX,JMAX,UVIDD,USTEG
      READ 100,H,SLASK,XMIN,C,VIKT,EPS,UVIDD,USTEG
      READ 101,IMAX,JMAX,NMAX
  100 FORMAT(4E20.10)
  101 FORMAT(3I10)
      XMAX(1) = FLOAT(IMAX-1)*H(1) + XMIN(1)
      XMAX(2) = FLOAT(JMAX-1)*H(2) + XMIN(2)
      PRINT 118,IMAX,JMAX,NMAX
  118 FORMAT(6H IMAX=,I5,5X,5HJMAX=,I5,8X16HMAXANTAL FORLUST,I5,2H+1)
      PRINT 119
  119 FORMAT(10X,2HH1,18X,2HH2,18X,2HH3)
      PRINT 102,H
  102 FORMAT(6E20.10)
      PRINT 120
  120 FORMAT(9X,5HXMIN1,15X,5HXMIN2,15X,5HXMAX1,15X,5HXMAX2,15X,5HUVIDD,
     2 15X,5HUSTEG)
      PRINT 102,XMIN,XMAX,UVIDD,USTEG
      PRINT 121
  121 FORMAT(9X,3HEPS,17X,4HVIKT)
      PRINT 102, EPS, VIKT
C
      N = 0
      DO 10 I = 1,IMAX
      DO 10 J = 1,JMAX
      X(1) = XMIN(1) + H(1)*FLOAT(I-1)
      X(2) = XMIN(2) + H(2)*FLOAT(J-1)
   10 FI0(I,J) = X(1)*X(1)*VIKT+ X(2)*X(2)
      REWIND 22
C
   20 CALL FORLUST (FI0,FI1,U,IMAX)
      CALL INTERP (FI1,C,FIBEG,2,IMAX)
      PRINT 500, N, FIBEG
  500 FORMAT(I10,5X,23HTHIS STEP MAKES FIBEG =,E17.10)
      IF(FIBEG-EPS) 50,50,21
   21 IF(NMAX-N) 70,70,22
   22 BUFFER OUT(22,1) (U(1,1),U(IMAX,JMAX))
      DO 23 I=1,IMAX
      DO 23 J=1,JMAX
   23 FI0(I,J) = FI1(I,J)
```

```
      N = N+1
   24 IF(UNIT,22) 25,20
   25 PRINT 101, N
      GO TO 24
C
   50 X(1)=C(1)
      X(2)=C(2)
      T = 0.
   51 CALL INTERP (0,X,UN,2,IMAX)
      IF(N) 60,60,52
   52 N=N-1
      M = IMAX*JMAX*N
      CALL LOCATE (22,M)
      BUFFER IN (22,1) (U(1,1),U(IMAX,JMAX))
      PRINT 300,T,X,UN
  300 FORMAT(8H AT TIME,E10.3,13H IN THE POINT,2E20.10,9H USE U = ,
     2E20.10)
      CALL RK1ST(T,X,H(3),XH,2,2,UN)
      T=T+H(3)
      X(1)=XH(1)
      X(2)=XH(2)
   53 IF(UNIT,22) 54,51
   54 GOTO 53
   60 PRINT 300,T,X,UN
      CALL RK1ST(T,X,H(3),XH,2,2,UN)
      PRINT 301,XH
  301 FORMAT(23H GIVING THE FINAL POINT,2E20.10)
      CALL EXIT
C
   70 PRINT 105, NMAX,FIBEG
  105 FORMAT(I10,14HSTEG GER FIBEG,E20.10)
      GOTO 50
      END
```

```
      SUBROUTINE INTERP (F,X,FINT,N,IA)
      DIMENSION F(IA,IA),X(N),FX(10),IX(10)
      COMMON/BLOCK1/ H(3),XMIN(2),XMAX(2),IMAX,JMAX,UVIDD,USTEG
      DO 10 I=1,N
      FX(I) = (X(I)-XMIN(I))/H(I)+1.
      IX(I) = FX(I) + 0.5
   10 FX(I) = FX(I) - FLOAT(IX(I))
      I = IX(1)
      J = IX(2)
      I1 = I - 1
      IF(FX(1) .GT. 0.) I1 = I + 1
      J1 = J - 1
      IF(FX(2) .GT. 0.) J1 = J +1
      FL = F(I,J) + ABS(FX(1))*(F(I1,J)-F(I,J))
      FH = F(I,J1) + ABS(FX(1))*(F(I1,J1)-F(I,J1))
      FINT = FL + ABS(FX(2))*(FH-FL)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE RKFIST(T,YIN,H,YE,N,IA,U)
      DIMENSION YIN(IA),YE(IA),W(10),Z(10),A(5)
      COMMON/FUNCTION/TE,W,Z
      A(1)=A(2)=A(5)=H/2.
      A(3)=A(4)=H
      TE=T
      DO 10 I=1,N
   10 YE(I)=W(I)=YIN(I)
      DO 20 J=1,4
      CALL FUNC(U)
      TE=T+A(J)
      DO 20 K=1,N
      W(K)=YIN(K)+A(J)*Z(K)
   20 YE(K)=YE(K)+A(J+1)*Z(K)/3.
      RETURN
      END
      SUBROUTINE FUNC (U)
      DIMENSION DXDT(10),X(10)
      COMMON/FUNCTION/ T,X,DXDT
      DXDT(1)=X(2)
      DXDT(2) = SIN(X(1)) + U*COS(X(1))
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE FONLUST(A,B,C,IA)
      DIMENSION A(IA,IA),B(IA,IA),C(IA,IA),X(2),XH(2)
      COMMON/BLOCK1/ H(3),XMIN(2),XMAX(2),IMAX,JMAX,UVIDD,USTEG
      DO 30 I=1,IMAX
      DO 30 J=1,JMAX
      UMIN = 0.
      FMIN = 1.E10
      X(1) = XMIN(1) + H(1)*FLOAT(I-1)
      X(2) = XMIN(2) + H(2)*FLOAT(J-1)
      UVIDDK = UVIDD
      USTEGK = USTEG
      K = 1
    9 UK = -UVIDDK
   10 CALL RK1ST(1,X,H(3),XH,2,2,UK)
      DO 12 L = 1,2
      IF(XH(L)-XMAX(L)) 11,11,14
   11 IF(XMIN(L)-XH(L)) 12,12,14
   12 CONTINUE
      CALL INTERP (A,XH,FINT,2,IA)
   19 IF(FINT-FMIN) 13,13,14
   13 FMIN = FINT
      UMIN = UK
   14 IF(UVIDDK-1.E-8 - UK) 20,20,15
   15 IF(UVIDD - UK - 1.E-8) 20,20,18
   18 UK = UK + USTEGK
      GO TO 10
   20 UVIDDK = USTEGK  + UMIN
      UK = UMIN - USTEGK
      IF(UK .LT. -UVIDD) UK = -UVIDD
      USTEGK = USTEGK/10.
      K=K-1
      IF(K) 21,21,19
   21 C(I,J) = UMIN
   30 B(I,J) = FMIN
      RETURN
      END
```