

DETEKTERING AV "OUTLIERS"

BERNT KRISTENSSON

Rapport RE - 35 aug. 1968

DETEKTERING AV "OUTLIERS".

Examensarbete utfört vid institutionen  
för Reglerteknik, Tekniska Högskolan i  
Lund, under vårterminen 1968 av  
Bernt Kristensson.

- I. Inledning.
- II. Teoriavdelning.
  - 1) Processbeskrivning.
  - 2) Problemformulering.
  - 3) Kalmanfilter för tidsdiskreta system.
- III. Kriterium på outliers.
- IV. Presentation av datamaskinprogram.
- V. Resultat av datamaskinsimulering.
- VI. Referenser.

Appendix: Ett exempel på ett tidskontinuerligt Kalmanfilter.

## INLEDNING:

Vid uppbyggnad av datamaskinsystem för processreglering är det viktigt att s.k outliers, dvs totalt felaktiga mätvärden inte får ligga till grund för beräkning av styrdata. Dessa outliers kan t.ex uppkomma genom brott på kablar, felbyte av mätinstrument, säkringsbrott osv. Uppgiften i examensarbetet har varit att i ett idealiserat fall konstruera ett filter som detekterar outliers. De grundläggande ideerna i det konstruerade filtret består i att detta skall beräkna nästkommande mätningars förväntningsvärden. Beräkningen sker med hjälp av ett Kalmanfilter, som parallellt med förväntningsvärdena även genererar ett mått på dessas kvalite. Genom att sedan jämföra mätvärdena med respektive förväntningsvärdena bör uppenbarligen de s.k outliers kunna upptäckas. P.g.a mätningarnas statistiska natur måste därför ett kriterium på outliers utformas som ett statistiskt test.

En central del av arbetet upptages av teorin för Kalmanfilter, som p.g.a stor komplexitet måste utlämnas här. I nästa avsnitt sker dock en kortfattad presentation av problemställning, teoriresultat och några enkla filteregenskaper. Avsnittet därpå behandlar det använda kriteriet på outliers. I arbetet har ingått, att i datamaskin testa det konstruerade filtret på ett artificiellt uppbyggt system. En presentation av det därvid använda FORTRAN-programmet och en diskussion av datamaskinkörningen sker sedan i de två avslutande avsnitten.

## TEORIAVSNITT.

### 1) Processbeskrivning.

Då syftet med examensarbetet är att konstruera ett till en datamaskinstyrd process användbart filter avgränsas framställningen till att behandla samplade system ( se ref.1). Vidare betraktas i fortsättningen endast linjära tidsinvarianta system. Med de gängse beteckningarna kan systemekvationerna skrivas på formen

$$I. \begin{cases} x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases}$$

där

$x(t)$  är tillståndsvektorn av ordning  $n$   
 $u(t)$  är styrsignalvektorn av ordning  $nu$   
 $y(t)$  är utsignalvektorn av ordning  $ny$   
 $\Phi$  är övergångsmatrisen av ordning  $n \times n$   
 $\Gamma$  är matris av ordning  $n \times nu$   
 $C$  är matris av ordning  $ny \times n$

Som brukligt är  $u(t)$  styckvis konstant över samplingsintervallen, vilka för enkelhets skull satts till en tidsenhet.

I denna systembeskrivning har hänsyn ej tagits till eventuella störningars inverkan på tillstånds- och utsignalvektorena. P.g.a lineariteten kan störningars inverkan behandlas separat. Ett slutgiltigt system får vi då om vi till systemet I superponerar ett stokastiskt system II (se ref.2) enligt

$$II \begin{cases} x(t+1) = \Phi x(t) + w(t) \\ y(t) = C x(t) + v(t) \end{cases}$$

där  $w(t)$  och  $v(t)$  är stokastiska variabler. För detta arbete innebär system I inga svårigheter och framställningen koncentreras därför på system II, som alltså utgör en beskrivning av ett samplat system utsatt för störningar i process- och mätstorheter. En tolkning av ekvationerna får vi om vi betraktar

ett fysikaliskt system. För en missil gäller t.ex att dess tillstånd, läge och hastighet, kan mätas enbart i närvaro av den additiva störningen  $v(t)$ , vars karaktär i huvudsak bestäms av mätinstrumentens kvalitet. Termen  $w(t)$  representerar de störningar som missilen utsätts för i sin bana. De kan t.ex orsakas av ojämnheter i bränsle, luftgropar osv. P.s.s kan i ett otal andra fall liknande ekvationer uppställas. I detta sammanhang bör noteras att  $v(t)$  inte innefattar de s.k outliers, vilka således inte ingår i denna systembeskrivning.

$x(t)$  i system II representerar alltså i tillståndsrummet en stokastiskt betingad avvikelse från ett deterministiskt värde  $x(t)$  enligt system I.

## 2) Formulering av problemet.

Ett väsentligt problem inom reglertekniken utgör rekonstruktion av tillståndsvariabler, som inte mäts eller som inte är tillgängliga för mätning. Ett med tillståndsrekonstruktionen närbesläktat problem består i att på grundval av mätvärden upp till tiden  $t$  prediktera tillståndsvektorn vid en senare tidpunkt  $t$ , ex  $t+1$ . Det för examensarbetet intressanta problemat, att beräkna estimatet  $\hat{x}(t+1)$  av  $x(t+1)$  givet mätvärden  $y(s), s=0, 1, \dots, t$ , formuleras i nedanstående tre punkter. För att problemet skall vara lösligt, förutsättes att  $w(t)$  och  $v(t)$  är normalfördelade. (se även ref. 4)

1. Tillståndet  $x(t)$  antages vara representerat av ekvationen

$$x(t+1) = \Phi x(t) + w(t)$$

där

$\{w(t), t=0, 1, \dots\}$  är en svit av oberoende normalfördelade variabler med medelvärde noll och kovariansmatris

$$E\{w(t) w^T(s)\} = \begin{cases} 0 & s \neq t \\ R_1 & s = t \end{cases}$$

Initialtillståndet  $x(0)$  antages vara normalfördelat  $N(m, R_0)$ .

Vidare antages den mätta storheten stå i följande relation till  $x(t)$

$$y(t) = C x(t) + v(t)$$

$\{v(t), t=0, 1, \dots\}$  är en svit oberoende normalfördelade variabler med medelvärdet noll och kovariansmatrisen

$$E\{v(t) v^T(s)\} = \begin{cases} 0 & s \neq t \\ R_2 & s = t \end{cases}$$

Vidare antages att

$$E\{w(t) v^T(s)\} = \begin{cases} 0 & s \neq t \\ R_{12} & s = t \end{cases}$$

Matriserna  $\Phi, C, R_1, R_{12}, R_2$  får bero av tiden.

2. Tillåtna estimat är klassen av alla funktioner av mätvärden upp till tiden  $t$ .
3. Det estimat är bäst (optimalt), som minimerar medelkvadratfelet

$$E\{(x(t+1) - \hat{x}(t+1))^T (x(t+1) - \hat{x}(t+1))\}$$

\*  $E\{a\}$  betecknar medelvärdet av  $a$ .

Att vi i moment 3 endast betraktar medelkvadrat-felet innebär ingen inskränkning, ty en sats av Sherman (se ref.4) visar, att så snart medelkvadratfelet har minimerats så har samtidigt ett stort antal andra rimliga förlustfunktioner minimerats. Ett studium av olika förlustfunktioner är alltså av sekundärt intresse. I sammanhanget kan inskjutas att om det optimala estimatet av  $x(t)$  är  $\hat{x}(t)$ , så ges det optimala estimatet av en lineärkombination av komponenter i  $x(t)$  av motsvarande lineärkombination av komponenter i  $\hat{x}(t)$ .

### 3) Kalmanfilter för tidsdiskreta system.

Lösningen till det i 2) ställda problemet ges av följande för datamaskin väl anpassade rekursiva ekvationer, som utgör det tidsdiskreta Kalmanfiltret.

$$\hat{x}(t+1) = \Phi \hat{x}(t) + K(t) [y(t) - C \hat{x}(t)]$$

$$\hat{x}(0) = m$$

där

$$K(t) = [\Phi P(t) C^T + R_1] [C P(t) C^T + R_2]^{-1}$$

$$P(t+1) = \Phi P(t) \Phi^T + R_1 - K(t) [C P(t) C^T + R_2]^{-1} K^T(t) \quad (= \text{varianssek})$$

$$P(0) = R_0$$

och

$\hat{x}(t+1)$  är det optimala estimatet av  $x(t+1)$

$P(t+1)$  --- kovariansmatrisen för estimationsfelet dvs.

$$P(t+1) = E \{ \tilde{x}(t+1) \tilde{x}^T(t+1) \} \quad \text{och} \quad \tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$K(t)$  är filterförstärkningen.

Ekvationerna har följande intressanta tolkningar (se ref.4)

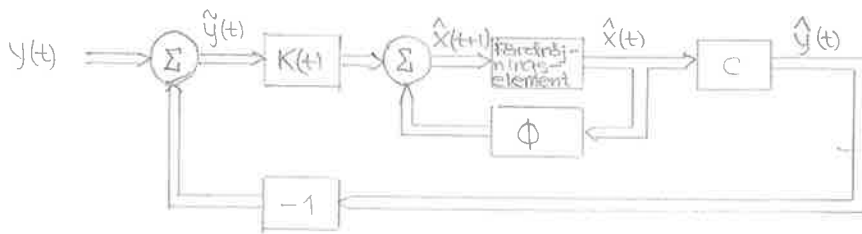
$\Phi \hat{x}(t)$  - aprioriestimatet av  $x(t+1)$

$K(t) [y(t) - C \hat{x}(t)]$  - korrektion av aprioriestimatet pga. mätning vid tiden  $t$ .

$\Phi P(t) \Phi^T + R_1$  - kovariansen för aprioriestimationsfelet

$K(t) [C P(t) C^T + R_2]^{-1} K^T(t)$  - förbättring av aprioriestimationsvariansen pga. mätning vid tiden  $t$ .





Det optimala filtret.

Vid studium av ett Kalmanfilter är det största intresset knutit till variansekvationen. Eftersom filtret rekonstruerar tillståndsvektorn vid en kommande tidpunkt är det klart att systemets observerbarhet och kontrollerbarhet inverkar på lösningen av variansekvationen. Sålunda blir lösningen begränsad om systemet är observerbart, dvs.  $\text{rang}[C, C\Phi, C\Phi^{m-1}]^T = n$ , medan försiktighet bör iakttas då systemet ej är observerbart.

För förståelse om filterets arbets-sätt är följande kvalitativa tolkning av filterförstärkningen  $K(t)$  av stor hjälp. Ett strikt informationsteoretiskt resonemang visar nämligen att storleken av  $K(t)$  är ett mått på den information om tillståndet  $x(t+1)$ , som finns i  $\tilde{y}(t) = y(t) - C \cdot \hat{x}(t)$ . Att  $K(t)$  är "relativt" stor (liten) innebär således att störningarnas inverkan på  $\tilde{y}(t)$  är liten (stor) relativt sätt. Förstärkningen  $K(t)$  anpassas ständigt så att maximal mängd information strömmar in i filtret.

För ytterliggare filteregenskaper, såsom filterets känslighet för parametervariationer, matrisernas  $R_1, R_2, R_3$  inverkan på variansekvationen osv. hänvisas till litteraturen, där även den kontinuerliga filtermotsvarigheten finns beskriven (se ref. 3, 4). I appendix I presenteras ett på analogmaskin realiserat tidskontinuerligt filter. Studium av detta uppövar instruktivt förståelsen för filterteorin, då många egenskaper är gemensamma för kontinuerlig och tidsdiskret tid.

En realisering av ett Kalmanfilter i ett processreglerings-system ger reglerteknikern inte bara möjligheten att detektera outliers utan även möjligheten att bearbeta systemdata statistiskt. Exempelvis kan om  $\Phi^{-1}$  existerar det i särklass bästa estimatet av  $x(t)$  givet mätningar  $y(s), s=0, 1, \dots, t$ , med lätthet beräknas. (se ref. 3). Detta estimat representerar alltså förutom en eventuellt önskvärd rekonstruktion av icke mätbara tillstånd en statistisk bearbetning av mätdata. Ett Kalmanfilter kan alltså i hög grad vara en lönsam investering.

### III. KRITERIUM PÅ OUTLIERS.

Vi är nu mogna att närma oss examensarbetets centrala problem, detektering av outliers. Vi har sett hur Kalmanfiltret beräknar estimatet  $\hat{x}(t+1)$  och estimationsfelets kovariansmatrix  $P(t)$ . Den aktuella mätningen  $y(t)$  kan nu jämföras med sitt förväntningsvärde i ett statistiskt test, som för att vara acceptabelt bör uppvisa följande egenskaper. Testet bör vara sådant, att sannolikheten att en outlier har detekterats, om en outlier har förekommit (betecknas i fortsättningen med  $P(\text{outlier}/\text{outlier})$ ) skall vara stor medan  $P(\text{outlier}/\text{ej outlier})$  skall vara liten. En kort stunds eftertanke säger oss att dessa två önskemål är motstridiga, och vi tvingas därför till en kompromisslösning. För att kunna beräkna  $P(\text{outlier}/\text{outlier})$  krävs det att outliernas statistiska natur är känd, vilket inte alltid är fallet. Däremot låter sig  $P(\text{outlier}/\text{ej outlier})$  beräknas, om vi utformar kriteriet enligt nedan. Vi observerar, att  $\tilde{y}(t) = y(t) - C\hat{x}(t)$  är en normalfördelad vektor med medelvärde

$$E\{\tilde{y}(t)\} = E\{Cx(t) + v(t) - C\hat{x}(t)\} = E\{C\tilde{x}(t)\} + E\{v(t)\} = 0$$

och kovariansmatrix

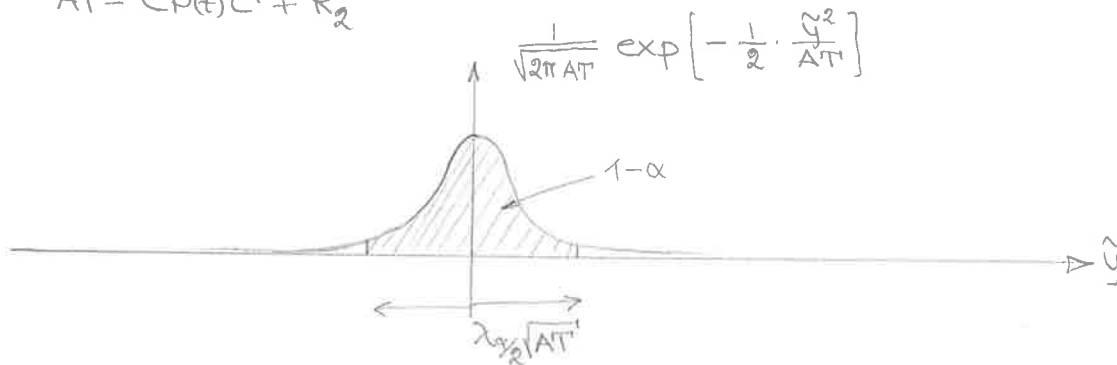
$$E\{\tilde{y}(t)\tilde{y}^T(t)\} = E\{(C\tilde{x} + v(t))(C\tilde{x}^T + v^T(t))\} = CP(t)C^T + R_2$$

vilken i fortsättningen betecknas med  $AT$ . Låt till en början antalet mätsignaler vara ett, dvs.  $AT$  blir då en skalär. Det omedelbara testet på outliers bli då att en outlier har förekommit (ej förekommit) om

$$|y| \geq \lambda_{\alpha/2} \sqrt{AT}$$

där  $\lambda_{\alpha/2}$  är den i statistisk litteratur välbekanta  $(1 - \alpha/2)$ -kvantilen för den endimensionella normalfördelningen, och vars betydelse framgår av figur.

$$AT = CP(t)C^T + R_2$$



Då den markerade ytan alltid är  $1-\alpha$  blir  $P(\text{outlier/ej outlier}) = \alpha$ .  
 I examensarbetet har  $\alpha$  försöksvis tilldelats värdet 0.01, vilket  
 medför att  $\lambda_{\alpha/2} = 2.58$ .

I de fall vi förfogar över flera mätsignaler, kan vi för varje komponent av mätvektorn utföra med ovan analoga test. Nackdelen med detta förfarande är att mätsignalernas inbördes beroende inte utnyttjas. Det gäller nämligen att  $\tilde{y}(t)$  tillhör den flerdimensionella normalfördelningen med medelvärde noll och kovariansmatrisen  $AT$ . Med hjälp av statistisk teori kan vi sålunda få effektiva men förmodligen mera invecklade test.

En outlier får icke användas för beräkning av styrdata och givetvis icke heller för beräkning av filterestimatet. Vi får nu stor glädje av de i avsnittet II.3 gjorda tolkningarna av filterekvationerna. Genom att eliminera termerna  $K(t)[y(t) - \mathcal{C}(\hat{x}(t))]$  och  $K(t)[\mathcal{C}(t)\mathcal{C} + R_2]K^T(t)$ , vilka vanligen representerar förbättringar av av aprioriestimatet och aprioriestimationfelets varians, kan vi anpassa filtret efter faktumet att en outlier har detekterats. Trots denna ändring är filtret även nu ur vår synvinkel optimalt, ty i detta fall är

$$\hat{x}(t+1) = \Phi \hat{x}(t)$$

det bästa estimatet med kovariansmatrisen

$$P(t+1) = \Phi P(t) \Phi^T + R_1.$$

Styrkan i det konstruerade kriteriet framgår nu tydligt. Beroende på estimatets kvalite kommer storheten  $\lambda_{\alpha/2} \sqrt{AT}$  alltid att anpassas efter vår kunskap om systemet. Mycket stora outliers torde alltid kunna detekteras, medan filtrets förmåga att detektera "små" outliers starkt beror på matrisen  $AT$ . Testet är i detta avseende mycket flexibelt. Den variabla kvantiteten  $\lambda_{\alpha/2} \sqrt{AT}$  medför att filtret får intressanta dynamiska egenskaper. Den i examensarbetet ingående simuleringen på datamaskin har visat att filtrets outlierdetekterande förmåga i hög grad beror av dessa dynamiska egenskaper.

#### IV. PRESENTATION AV FORTRANPROGRAMMET KFILT.

Som tidigare uppgivits skall det konstruerade filtret med outlierkriterium testas på ett i datamaskin artificiellt bildat system. I programmet betecknas systemets tillståndsvektor med  $X$  (av ordning  $N \leq 5$ ) och estimaten med  $Y$ . De tidigare införda storheterna har i några fall måst döpas om enligt tabell.

|             |           |   |   |   |                         |
|-------------|-----------|---|---|---|-------------------------|
| $\Phi$      | -FI       | " | " | " | av ordning $N \times N$ |
| C           | -C        | " | " | " | $NY \times N$           |
| K           | $-UL^T$   | " | " | " | $N \times NY$           |
| $R_{11}$    | $-Q_{11}$ | " | " | " | $N \times N$            |
| $R_{12}$    | $-Q_{12}$ | " | " | " | $N \times NY$           |
| $R_{22}$    | $-Q_{22}$ | " | " | " | $NY \times NY$          |
| $\tilde{y}$ | $-FEIY$   | " | " | " | $NY$                    |
| $\tilde{x}$ | $-FELX$   | " | " | " | $N$                     |

Vidare motsvaras vektorerna  $w(t)$  och  $v(t)$  av  $A \times W$  resp.  $B \times V$ , där  $A$  och  $B$  är matriser av ordning  $N \times NW$  resp.  $NY \times NV$ .  $W$  och  $V$  är normalfördelade vektorer av ordning  $NW$  resp.  $NV$ . Genom subroutineanropet CALL RANSS(KK,RR), där vid återhopp till huvudprogrammet  $RR \in N(C,1)$ , kan elementen i  $W$  och  $V$  succesivt bildas. Elementen i dessa vektorer blir på så vis oberoende och  $N(0,1)$ . En följd av detta blir att

$$E\{w(t) \cdot w^T(t)\} = E\{AW \cdot W^T A^T\} = A \cdot A^T$$

dvs.  $Q_{11} = A \cdot A^T$ , och att pss.  $Q_{22} = B \cdot B^T$ . I Kfilt har inga åtgärder vidtagits för att arrangera ett beroende mellan  $W$  och  $V$  och  $Q_{12}$ :s alla element tilldelas därför värdet noll.

Mellan de två viktiga reglerproblemen optimering och prediktion råder relationen att så snart ett av dem har lösts så har även lösningen av det andra problemet i princip erhållits (se ref.4). Detta förhållande har utnyttjats såtillvida att subrutinen DYNPROG, som används vid lösning av det linjärkvadratiske optimeringsproblemet, ingår i KFILT. DYNPROG beräknar matriserna  $UL(t)$  och  $S(t)$  enligt

$$UL(t) = [G^T S(t+1)G + Q_{22}]^{-1} [G^T S(t+1)F + Q_{12}^T]$$

$$S(t) = F^T S(t+1)F + Q_{11} - UL^T(t) [G^T S(t+1)G + Q_{22}] UL(t)$$

\* se bilaga över RANSS.

Utför vi följande substitutioner

$$\begin{aligned} F \text{ mot } FI^T & : UL^T \text{ mot } K & : S(t) \text{ mot } P(t+1) \\ G \text{ mot } C^T & : S(t+1) \text{ mot } P(t) ; \text{ och } P^T = P ; \end{aligned}$$

får vi de välbekanta ekvationerna för filterförstärkning och kovariansmatrisen. I KFILT bildas i inledningen matriserna  $F = (FI)^T$  och  $G = C^T$ . Soubroutine-anropet blir alltså (se utskrift av KFILT och DYNPROG) `CALL DYNPROG(F,G,Q11,Q12,Q22,N,NY,P,UL,5,5,IERR,OUT)`. Vid återhopp får vi sedan  $K(t) = UL^T$ , och  $P$  har nu tilldelats det nya värdet  $P(t+1)$ . För vårt speciella ändamål har parameterlistan i DYNPROG måst utökas med den reella variabeln `OUT`, som ombesörjer nödvändiga ändringar av beräkningarna i fallet att en outlier har detekterats. Genom att i huvudprogrammet tilldela `OUT` värdet `0.0 (1.0)`, om en outlier har detekterats (ej detekterats), och i DYNPROG låta  $UL = OUT \cdot (E^T S(t+1) E + Q22)^{-1} (E^T S(t+1) F + Q12^T)$  erhålles de enligt föregående avsnitt önskade värdena på  $K(t) = UL^T$  och  $P(t+1)$ . Då tiden betecknas med `NT` blir i FORTRAN-beteckningar system och filterekvationerna:

$$\begin{aligned} X(NT+1) &= FI * X(NT) + A * W(NT) \\ EX(NT+1) &= FI * EX(NT) + UL * FELY(NT) \\ FELY(NT) &= C * FELX(NT) + B * V(NT) \\ K(NT) \text{ och } P(NT+1) &\text{ se ovan.} \end{aligned}$$

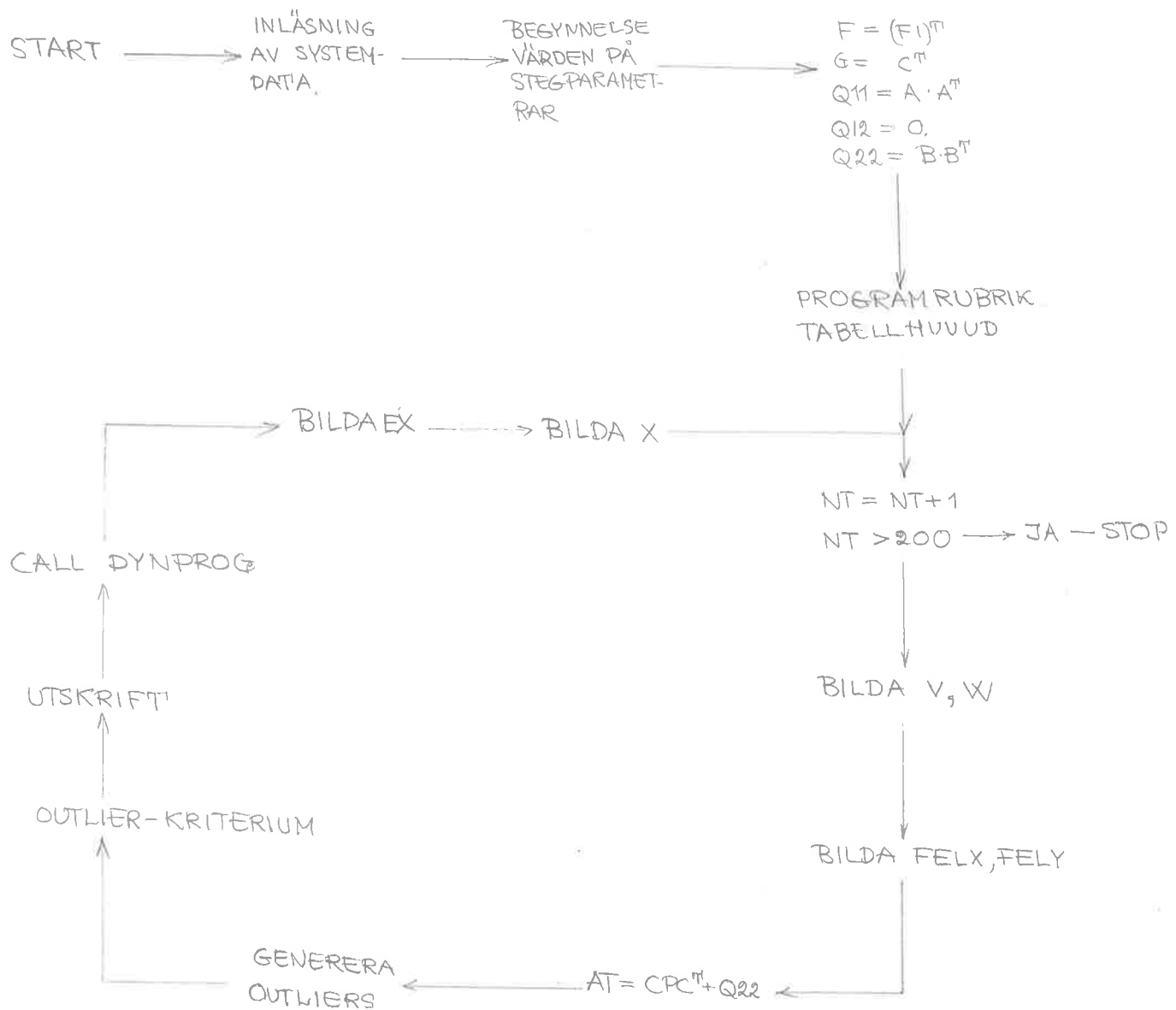
Kovariansmatrisen  $CP(NT)C^T + Q22$  för  $FELY(NT)$  lagras i fältet `AT`. Kriteriet på outliers är i linje med tidigare framställning. För varje mätsignal jämföres  $(FELY(I))^2$  med  $\lambda_{\alpha/2}^2 \cdot AT(I,I)$ , där  $\alpha = 0.01$  och  $\lambda_{\alpha/2}^2 = 6.63$ . Om en outlier detekteras (ej detekteras) i den  $i$ :te mätsignalen tilldelas det  $i$ :te elementet av vektorn `OUTY` värdet `0.0 (1.0)`. Är sedan alla elementen i `OUTY` `1.0` tilldelas `OUT` värdet `1.0`. I annat fall sätts `OUT = 0.0`.

I fallen  $N = 2$  och  $NY = 1, 2$  ombesörjer programmet utskrift av `NT, OUT`, och elementen i `X, FELX, FELY, P` på radskrivare.

Generering av outliers sker i ett speciellt avsnitt i KFILT (se flödesschema) och den är arrangerad enligt den testkörning som diskuteras i nästa avdelning.

Datamaskinkörningen har utförts på Lunds datacentral, CD 8090. Genom att i KFILT införa soubrutinen RITA kan resultaten förutom på radskrivare fås i diagram (se nästa avdelning). I övrigt hänvisas till fullständig programutskrift och bifogat flödesschema.

FLÖDESSCHEMA ÖVER PROGRAM KFILT.



Använda subroutiner: DYNPROG  
SYMLNV : inverterar symmetriska matriser  
RANSS

```

PROGRAM KFILT
C THE PROGRAM COMPUTES THE KALMANFILTER FOR
C A SYSTEM OF ORDER N.LE.5
C THE SYSTEM IS
C  $X(T+1)=FI*X(T)+A*W$ 
C  $Y(T)=C*X(T)+B*V$ 
C X IS THE STATE OF ORDER N
C FI IS THE TRANSITION-MATRIX OF ORDER N*N
C A MATRIX OF ORDER N*NW
C Y IS THE OUTPUT OF ORDER NY
C C MATRIX OF ORDER NY*N
C B MATRIX OF ORDER NY*NV
C W IS A GAUSSIAN RANDOM-VECTOR OF ORDER NW.THE VARIANCE=1.
C V IS A GAUSSIAN RANDOM-VECTOR OF ORDER NV. THE VARIANCE=1.
C
C THE FILTER IS
C  $EX(T+1)=FI*EX(T)+(UL)T*FELY$ 
C EX IS THE ESTIMATE OF X
C (UL)T IS THE FILTER GAIN OF ORDER N*NY
C P IS THE VARIANCE-MATRIX OF ORDER N*N
C
C IF OUT=0,THE PROGRAM HAS DETECTED AN OUTLIER.ELSE OUT=1.
C AUTHOR BERNT KRISTENSSON, JUNE-68.
C
C SUBROUTINE REQUIRED
C   DYNPROG (MODIFIED.)
C   SYMINV
C   RANSS
C
C
C DIMENSION FI(5,5),C(5,5),A(5,5),B(5,5)
C DIMENSION X(5), EX(5), FELX(5),FELY(5)
C DIMENSION V(5), W(5), P(5,5), Q11(5,5), Q12(5,5), Q22(5,5)
C DIMENSION T(5), UL(5,5), F(5,5), G(5,5)
C DIMENSION AT(5,5), OUTY(5)
C
C READ 100, N, NW, NY,NV
100 FORMAT(4I1)
C READ 101, ((FI(I,K),K=1,N),I=1,N)
C READ 101, ((A(I,K),K=1,NW),I=1,N)
C READ 101, ((C(I,K),K=1,N),I=1,NY)
C READ 101, ((B(I,K),K=1,NV),I=1,NY)
C READ 101, ((P(I,K),K=1,N),I=1,N)
C READ 101, (X(I),I=1,N)
C READ 101, (EX(I),I=1,N)
C
101 FORMAT(5E12.5)
C
C KK=1
C NT=0
C NT0=1
C NT3=0
C OUT=1.0
C
C DO 4 I=1,N
C FELY(I)=0.
C DO 5 K=1,N
5 F(I,K)=FI(K,I)

```

```

DO 6 K=1,NY
G(I,K)=C(K,I)
6 Q12(I,K)=0.
DO 4 J=1,N
R=0.
DO 7 K=1,NW
7 R=R+A(I,K)*A(J,K)
4 Q11(I,J)=R
C
DO 10 I=1,NY
DO 10 J=1,NY
R=0.
DO 9 K=1,NV
9 R=R+B(I,K)*B(J,K)
10 Q22(I,J)=R
C
PRINT 102
102 FORMAT(1H1,41HDETECTION OF OUTLIERS WITH A KALMANFILTER)
C
PRINT 103
103 FORMAT(/10H MATRIX FI,/)
DO 11 I=1,N
11 PRINT 1000, (FI(I,J),J=1,N)
C
PRINT 105
105 FORMAT(/,9H MATRIX A,/)
DO 13 I=1,N
13 PRINT 1000,(A(I,J),J=1,NW)
C
PRINT 106
106 FORMAT(/,9H MATRIX C,/)
DO 14 I=1,NY
14 PRINT 1000,(C(I,J),J=1,N)
C
PRINT 107
107 FORMAT(/,9H MATRIX B,/)
DO 15 I=1,NY
15 PRINT 1000,(B(I,J),J=1,NV)
C
1000 FORMAT(6E20.10)
C
IF(NY-2) 60,61,62
60 PRINT 108
108 FORMAT(///5H OUT ,3H T,5X,2HX1,8X,2HX2,5X,5HFELX1,5X,
1 5HFELX2,5X,5HFELY1,5X,5HFELY2,7X,3HP11,7X,3HP12,7X,3HP22)
GO TO 62
61 PRINT 63
63 FORMAT(///5H OUT ,3H T,5X,2HX1,8X,2HX2,5X,5HFELX1,5X,
1 5HFELX2,5X,5HFELY1,5X,5HFELY2,7X,3HP11,7X,3HP12,7X,3HP22,
27X,5HOUTY1,3X,5HOUTY2)
62 CONTINUE
C
16 CONTINUE
NT=NT+1
IF(NT-200) 18,18,17
17 GO TO 500
18 CONTINUE
C
DO 33 I=1,NW
CALL RANSS(KK,RR)

```



```

33 W(I)=RR
   DO 41 K=1,NV
   CALL RANSS(KK,RR)
41 V(K)=RR

```

C

```

19 DO 20 I=1,N
20 FELX(I)=X(I)-EX(I)
   DO 23 I=1,NY
   R=0.
   S=0.
   DO 21 K=1,NV
21 R=R+B(I,K)*V(K)
   DO 22 K=1,N
22 S=S+C(I,K)*FELX(K)
23 FELY(I)=R+S

```

C

```

   DO 25 I=1,NY
   DO 25 J=1,NY
   R=0.
   DO 24 K=1,N
   DO 24 L=1,N
24 R=R+C(I,K)*P(K,L)*C(J,L)
25 AT(I,J)=R+Q22(I,J)

```

C

```

   IF(NT-20) 251,250,250
250 IF(NT-40) 252,251,251
252 FELY(1)=FELY(1)+50.0
251 CONTINUE
   IF(NT-50) 261,260,260
260 IF(NT-70) 262,262,261
262 NT0=NT0+1
   IF(NT0-2) 263,264,263
264 NT0=0
   FELY(1)=FELY(1)+50.0
263 CONTINUE
261 CONTINUE

```

C

```

   DO 303 I=1,NY
   IF(FELY(I)*FELY(I)-6.63*AT(I,I)) 301,301,300
300 OUTY(I)=0.
   GO TO 303
301 OUTY(I)=1.0
303 CONTINUE
   DO 306 I=1,NY
   IF(OUTY(I)-0.5) 304,305,305
304 OUT=0.
   GO TO 307
305 OUT=1.0
306 CONTINUE
307 CONTINUE
   IF(NT-99) 271,270,271
270 FELY(1)=100.
   OUT=1.0
271 CONTINUE

```

C

```

   IF(NY-2) 70,71,72
70 PRINT 109, OUT, NT, X(1), X(2), FELX(1), FELX(2),
   1FELY(1),P(1,1),P(1,2),P(2,2)
   GO TO 72
71 PRINT 73, OUT, NT, X(1), X(2), FELX(1), FELX(2),

```

```
1FELY(1),FELY(2),P(1,1),P(1,2),P(2,2),OUTY(1),OUTY(2)
72 CONTINUE
109 FORMAT(1X,F4.1,I4,5F10.3,F20.3,3F10.3)
73 FORMAT(1X,F4.1,I4,9F10.3,2F9.1)
```

C

C

```
CALL DYNPROG(F,G,Q11,Q12,Q22,N,NY,P,UL,5,5,IERR,OUT)
```

C

```
DO 30 I=1,N
R=0.
S=0.
DO 28 K=1,N
28 R=R+FI(I,K)*EX(K)
DO 29 K=1,NY
29 S=S+UL(K,I)*FELY(K)
30 T(I)=R+S
DO 32 I=1,N
32 EX(I)=T(I)
```

C

```
DO 35 I=1,N
R=0.
SS=0.
DO 36 K=1,NW
36 R=R+A(I,K)*W(K)
DO 38 K=1,N
38 SS=SS+FI(I,K)*X(K)
35 T(I)=R+SS
DO 39 I=1,N
39 X(I)=T(I)
```

C

```
GO TO 16
```

C

```
500 CONTINUE
CALL EXIT
END
```

C

```
SUBROUTINE DYNPROG(F,G,Q11,Q12,Q22,N,NY,P,UL,5,5,IERR,OUT)
```

FTN5,4B

22/07-68

```

SUBROUTINE DYNPROG(F,G,Q11,Q12,Q22,N,NU,S,UL,IA,IB,IERR,OUT)
C
C THE SUBROUTINE COMPUTES
C  $UL = ((G)T * S * G + Q22) - 1 * ((G)T * S * F + (Q12)T)$ 
C AND
C  $S = ((F)T * S * F + Q11) - (UL)T * ((G)T * S * G + Q22) * UL$ 
C AUTHOR,K,MORTENSSON 26/03-68.
C
C F-SYSTEM MATRIX OF ORDER NXN.
C G-SYSTEM MATRIX OF ORDER NXNU.
C Q11-LOSS FUNCTION MATRIX OF ORDER NXN.
C Q12-LOSS FUNCTION MATRIX OF ORDER NXNU.
C Q22-LOSS FUNCTION MATRIX OF ORDER NUXNU.
C S-MATRIX OF ORDER NXN.S IS THE SOLUTION TO THE DISCRETE
C RICCATI EQUATION,WHEN CALLING DYNPROG S SHOULD CONTAIN S(T+1),
C UPON RETURN S CONTAINS S(T).
C UL-MATRIX OF ORDER NUXN,RETURNED CONTAINING THE OPTIMAL FEEDBACK
C MATRIX UL(T). (U(T)=-UL(T)*X(T).)
C IA,IB-DIMENSION PARAMETERS.
C IERR-RETURNED -1 IF ANY INVERSION IN DYNPROG HAS FAILED.
C
SUBROUTINE REQUIRED
      GJRV
C
DIMENSION F(IA,IA),G(IA,IB),Q11(IA,IA),Q12(IA,IB),Q22(IB,IB)
DIMENSION S(IA,IA),UL(IB,IA),T(10,10),V(10,10)
C
      DO 4 I=1,N
      DO 4 J=1,NU
      R=0,
      DO 2 K=1,N
      DO 2 L=1,N
2 R=R+G(K,I)*S(K,L)*G(L,J)
4 T(I,J)=R+Q22(I,J)
C
      CALL SYMINV(NU,10,IERR,T)
C
      IF(IERR=1) 8,6,8
6 RETURN
8 DO 12 I=1,NU
      DO 12 J=1,N
      R=0,
      DO 10 K=1,N
      DO 10 L=1,N
10 R=R+G(K,I)*S(K,L)*F(L,J)
12 V(I,J)=R+Q12(J,I)
C
      DO 16 I=1,NU
      DO 16 J=1,N
      R=0,
      DO 14 K=1,NU
14 R=R+T(I,K)*V(K,J)
16 UL(I,J)=R*OUT
C
      DO 20 I=1,N
      DO 20 J=1,N

```

FTN5,4B

22/07-68

```
      R=0,  
      DO 18 K=1,N  
      DO 18 L=1,N  
18  R=R+F(K,I)*S(K,L)*F(L,J)  
20  T(I,J)=R+Q11(I,J)  
C  
      DO 24 I=1,N  
      DO 24 J=1,N  
      R=0,  
      DO 22 K=1,NU  
22  R=R+UL(K,I)*V(K,J)  
24  S(I,J)=T(I,J)-R  
C  
      RETURN  
      END  
C
```

FTN5.48

22/07-68

```

SUBROUTINE SYMINV(N,IA,IFAIL,A)
C
C SUBROUTINE FOR INVERSION OF SYMMETRIC MATRICES.
C REFERENCE,RUTISHAUSER,CACM,ALG.NR.150.
C AUTHOR,K.MORTENSSON 04/04-68.
C
C A-MATRIX TO BE INVERTED,UPON RETURN A CONTAINS A-1 IF THE
C INVERSION HAS SUCCEEDED,
C N-ORDER OF A,
C IFAIL-RETURNED 0 IF THE SUBROUTINE HAS EXECUTED CORRECTLY,
C 1 IF NOT,
C IA-DIMENSION PARAMETER.
C CAUTION,NEAR-SINGULAR MATRICES MAY GIVE MISLEADING RESULTS.
C MAXIMUM ORDER OF A=40.
C
C SUBROUTINE REQUIRED
C     NONE
C
C DIMENSION A(IA,IA),P(40),Q(40),IR(40)
C
C     IFAIL=0
C     DO 2 I=1,N
2     IR(I)=1
C
C     MAIN LOOP
C
C     DO 34 I=1,N
C
C     BIG=0,
C     DO 8 J=1,N
C     TEST=ABSF(A(J,J))
C     IF(TEST=0) 8,8,4
4     IF(IR(J)) 8,8,6
6     BIG=TEST
C     K=J
8     CONTINUE
C     IF(BIG) 12,10,12
10    IFAIL=1
C     RETURN
12    CONTINUE
C
C     IR(K)=0
C     Q(K)=1,0/A(K,K)
C     P(K)=1,0
C     A(K,K)=0,
C     KM1=K-1
C     KP1=K+1
C     IF(KM1) 10,20,14
14    DO 18 J=1,KM1
C     P(J)=A(J,K)
C     Q(J)=A(J,K)*Q(K)
C     IF(IR(J)) 10,18,16
16    Q(J)=-Q(J)
18    A(J,K)=0,
C
C     20 CONTINUE

```

FTN5.4B

22/07-68

```
      IF(K=N) 22,30,10
22  DO 28 J=KP1,N
      P(J)=A(K,J)
      IF(IR(J)) 10,24,26
24  P(J)=-P(J)
26  Q(J)=-A(K,J)+Q(K)
28  A(K,J)=0,
C
30  CONTINUE
      DO 32 J=1,N
      DO 32 K=J,N
32  A(J,K)=A(J,K)+P(J)*Q(K)
C
34  CONTINUE
C
      DO 36 I=2,N
      IM1=I-1
      DO 36 J=1,IM1
36  A(I,J)=A(J,I)
C
      RETURN
      END
```



5,3DS

RANSS

22/07-68

ED 00000

PAGE NO.

3

00031 34 1 02057  
 03 0 00057  
 00032 00 7 50047  
 07 0 00044  
 00033 36 0 P00005  
 42 0 P00003  
 00034 42 0 P00003  
 32 0 P00002  
 00035 00 7 40165  
 50 0 00000  
 00036 20 0 77777  
 00 7 41225  
 00037 50 1 77777  
 50 2 77777  
 00040 50 3 77777  
 75 0 P00006

RANSS3

RANSS4

RANSS5

SCA 2057B,1  
 LRS 47  
 RXT,CR B1,AL  
 LLS 36  
 SSK TEMP  
 SCM MZRO  
 SCM MZRO  
 FMU SIGM  
 RXT B3,OB  
 STA \*\*  
 RXT IB,OB  
 ENI \*\*,1  
 ENI \*\*,2  
 ENI \*\*,3  
 SLJ RANSS  
 END

FLOAT

RANSS044  
 RANSS045  
 RANSS046  
 RANSS047  
 RANSS048  
 RANSS049  
 RANSS050  
 RANSS051  
 RANSS052

RANSS053  
 RANSS054  
 RANSS055  
 RANSS056  
 RANSS057  
 RANSS058  
 RANSS059

00014 SYMBOLS



Title Random Floating Point Numbers in Normal Distribution (RANSS)

CO-OP Class/Index Code G5 WISC RANSS

CO-OP Organ. Code WISC (adapted from CODA RNDEV)

Program Language CODAP-1/COMPASS

Computer 1604/3600

Programmer RNDEV by Wm Silverman, adapted by Richard G. Wolfe for the University of Wisconsin Computing Center

Contributing Organ. University of Wisconsin Computing Center (Formerly Numerical Analysis Laboratory)

Date February 1963

UWCC ID Code C0010-00/S0010-00

1.0 PURPOSE

To generate random floating point numbers distributed according to the Normal (Gauss) distribution with a mean of 0 and a variance of 1. The range of the generated distribution is between plus and minus 8.

2.0 USAGE

An odd integer between 0 and 2<sup>43</sup> is assigned by the User prior to the first call to RANSS, and this number determines the sequence of deviates that will be generated. This odd integer is changed by the subroutine to prepare for the next call and generation.

2.1 Calling Sequence.

2.1.1 FORTRAN-63 Calling Sequence: CALL RANSS (KK,RR)

2.2 Arguments Or Parameters.

KK is the odd integer assigned as above.  
RR will be the generated deviate.

2.4 Space Required.

|                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| <u>1604</u>               | <u>3600</u>               |
| 27 <sub>8</sub> locations | 41 <sub>8</sub> locations |

2.12 Timing.

1604

approximately  
1400 microseconds

3600

approximately  
380 microseconds

3.0 METHOD

The number  $KK$  is multiplied by  $5^{13}$  and reduced modulo  $2^{43}$ . The process is repeated 16 times and the results summed. The numbers obtained after each multiplication and reduction have many of the characteristics of uniformly distributed random variables which take their values in the odd integers between 0 and  $2^{43}$ . If we call the  $i$ th such variable  $X_i$  and put  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , then the following result is implied by the Central Limit Theorem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{S_n - nM}{\sigma\sqrt{n}} \leq X \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2/2) dt$$

where  $M$  is the mean of the uniform variable  $X$ , and  $M = 2^{42}$ , and  $\sigma^2$  is the variance of  $X$ , and  $\sigma^2 = \frac{1}{3} (2^{42}-1)^2$  and the right hand term is the distribution function of a normally distributed variable with mean 0 and variance 1. Asymptotic considerations show that for  $n \geq 16$  the approximation is sufficiently accurate for single precision arithmetic. So  $n = 16$  is used with  $16M = 2^{46}$  and  $\sigma\sqrt{16} = \frac{4(2^{42}-1)}{\sqrt{3}}$ .

## V. RESULTAT OCH DISKUSSION AV DATAMASKINKÖRNING.

För att testa filtert är det lämpligt att börja med ett system, som har en intuitiv fysikalisk bakgrund samtidigt som det låter sig relativt lätt bearbetas med de "vanliga" analysmetoderna. Ett sådant system är t.ex. den endimensionella partikeln eller dubbelintegratorn. Låt partikeln ha enhetsmassa och antag att partikel-läget uppmätas med standardavvikelsen  $\sigma_y = 10\text{m}$ . Med samplingsintervallet 1 sekund blir systemekvationerna: (se ref. 1)

$$X(t+1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{pmatrix} w(t)$$

$$y(t) = (1 \ 0) X(t) + 10 v(t)$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

där  $x_1$  är lägeskoordinat,  $x_2$  är partikelns hastighet och  $v(t) \in N(0,1)$ . Störningarna på partikeln i dess bana antages kunna representeras av termen

där  $w(t) \in N(0,1)$ , och  $w(s), v(t)$  är oberoende för alla  $s$  och  $t$ . En outlier anses detekterad om  $|\tilde{y}| = |\tilde{x}_1 + v| > \chi_{0.005} \cdot \sqrt{AT}$  dvs.  $P(\text{outlier}/\text{ej outlier}) = 0.01$ .

Resultaten av datamaskinkörningen har förutom på radskrivare registrerats på en till datamaskinen ansluten plotter, på vilken 8 diagram har upptagits. De fem första diagrammen visar  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\tilde{x}_1$ ,  $\tilde{x}_2$  och  $p_{11} = E\{\tilde{x}_1^2\}$  plottade mot tiden under 200 samplingsintervall. De övriga 3 diagrammen utgör specialstudier av  $x_1$ ,  $\tilde{x}_1$ ,  $p_{11}$  under de 100 första samplingsintervallen. Apropå skalmarkeringarna bör särskild uppmärksamhet ägnas åt de vertikala markeringarna.

Vid maskinkörningen (se diagram och tabell) är initialvärdena

$$X(1) = \hat{X}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad P(1) = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Typiskt för variansekvationen är att det transienta tillståndet är kortvarigt trots mycket stora begynnelsevärden, se diagram 5 och 8. Variansekvationen svänger alltså snabbt in till sitt stationära värde

$$P(\infty) = \begin{pmatrix} 56.250 & 12.500 \\ 12.500 & 5.000 \end{pmatrix}$$

I stationärt tillstånd blir således

$$AT = E \hat{y}^2 = CPC^T + Q22 = (1,0) \begin{pmatrix} 56,25 & 12,500 \\ 12,500 & 5,000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 100 = 156,25$$

och

$$\lambda_{0,005} \sqrt{AT} \approx 32 \text{ m,}$$

vilket innebär att med detta filtertillstånd detekteras i medeltal alla mätvärden, som avviker 32m från ett korrekt värde. Med enkel statistik kan sedan sannolikheten för detektering av godtyckliga enstaka outliers lätt beräknas, om så önskas. Då enstaka outliers inte erbjuder filtert några svårigheter, riktas därför intresset till komplicerade outliers-förekomster.

Under tidsintervallet  $20 \leq t \leq 40$  har programmet alstrat mätvärden, som är 50 m (=5 $\delta_y$ ) för storadvs.  $y(t) = x_1(t) + 50.0$ . De första mätvärdena förkastar filtert och variabeln OUT, som nu är 0.0, ändrar beräkningsgången så att variansekvationen reduceras till

$$P(x+1) = \Phi P \Phi^T + R_1$$

Eftersom  $\Phi$ ;s samtliga egenvärden ligger på enhetscirkeln, kommer elementen i P att växa med tiden. Slutsatsen blir såsom diagrammen visar, att denna outlierattack relativt snart kommer att bli filtert övermäktigt. Men utan förkunskaper om det konstanta mätfelet kan filtert inte avgöra om det plötsligt inkommer korrekta mätvärden eller om <sup>det</sup> ej detekterar liknande outliers som det tidigare detekterat. Vid  $t = 40$  blir mätvärdena ånyo korrekta och filtert återgår under de nästkommande samplingsintervallen till sitt "riktiga" tillstånd.

Med de vid tidpunkterna  $t = 50, 52, 54, \dots, 68, 70$  genererade outliererna (mätfel = 5 $\delta_y$ ) har som diagrammen visar filtert inga svårigheter att detektera. Med ledning av resultaten i detta fall och med lite fantasi inses, att med andra värden på störningar och outliers, kunde dock situationen blivit obehaglig. (se diagr. 8.)

En väsentlig fråga är om filtert kan komma i sådant tillstånd, att det trots korrekta mätvärden (ej outliers) för all framtid förkastar dessa såsom varande outliers. En dylik situation uppstår om  $y$  förmås växa fortare än elementet  $\sqrt{p_{11}}$  i P. Genom en manipulation vid  $t = 99$  har ett artificiellt stort fel införts i

En översikt av resultaten med filtert applicerat på systemet, endimensionella partikeln, blottar både bra och dåliga egenskaper hos den använda detektionsmetoden. Som vi sett är de dåliga egenskaperna intimt förknippade med outliernas karaktär. Med förutsättningen om normalfördelade störningar  $w$  och  $v$  är den presenterade metoden unik såtillvida att den för givet  $P(\text{outlier}/\text{ej outlier})$  i medeltal detekterar mindre outliers än någon annan metod, vilket självfallet är en mycket värdefull egenskap. Men de i ett praktiskt fall ställda specifikationerna på en outlierdetekterande algoritm kan eventuellt nödvändiggöra en modifiering av filtert sådan att detta icke blir optimalt.

De i examensarbetet gjorda erfarenheterna torde i viss mån kunna överföras till andra icke stabila system, medan försiktighet måste iakttas om systemet är stabilt. Den väsentliga skillnaden mellan stabila och icke stabila system sett ur examensarbetets synvinkel består i att variansmatrisen i det stabila fallet alltid har begränsade element oberoende av förekomst av outliers. Även om detta arbetes erfarenheter i vissa fall kan överföras till andra system, återstår dock mycket arbete innan filterts egenskaper i detalj är kartlagda. Exemplet med den endimensionella partikeln visar dock, vilka möjligheter reglerteknikern har för att detektera outliers.

$\hat{x}(100)$ , utan en motsvarande ökning av elementen i  $P(100)$ . Filtret "detekterar" nu outliers och ekvationen för estimatet blir

$$\hat{x}(t+1) = \Phi \hat{x}(t)$$

För felvektorn  $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  gäller nu följaktligen ekvationen

$$\tilde{x}(t+1) = \Phi \tilde{x}(t) + 10 v(t)$$

Felet i hastighetsstatimatet  $\hat{x}_2(100)$  resulterar i ett bestående fel i felvektorn  $\tilde{x}$ , och för varje samplingsintervall med detekterad outlier ökar  $\tilde{x}_1$  i medeltal <sup>med</sup> felet i  $\hat{x}_2(100)$  (se diagram 3).  $\tilde{y}_1 = \tilde{x}_1 + v$  beror alltså nu av tiden som ett polynom av första graden. Den avgörande frågan är nu hur  $p_{11}$  efter  $t = 100$  beror av tiden. Varianskvationen är nu

$$P(t+1) = \Phi P \Phi^T + R_1 \quad \text{där} \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,5 \\ 0,5 & 1,0 \end{pmatrix}$$

Om vi för enkelhets skull räknar tiden från  $t=100$  blir med givet  $P(0)$  genom rekursion

$$P(t+1) = \begin{pmatrix} 1 & t+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P(0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t+1 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{s=0}^t \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,25 & 0,5 \\ 0,5 & 1,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t-s & 1 \end{pmatrix}$$

då

$$\Phi^M = \begin{pmatrix} 1 & M \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrismultiplikation ger

$$P_{11}(t+1) = P_{11}(0) + 2 P_{12}(0) (t+1) + (t+1)^2 P_{22}(0) + \sum_{s=0}^t (0,25 + t-s + (t-s)^2)$$

En kort analys av termen med summationsklammern ger att  $p_{11}$  för stora  $t$  växer som  $\frac{t^3}{3}$  (se diagram 5).  $\tilde{y}$  kan alltså för stora  $t$  inte växa fortare än  $\sqrt{p_{11}}$ , och det är följaktligen ingen tillfällighet, att filtret efter ändlig tid börjar acceptera korrekta mätvärden. Detta faktum är mycket glädjande, ty vi vet nu, att även om filtret "spårar ur" så förmår det själv förasigtillbaka till ett "friskt" tillstånd. Att den diskuterade situationen är realistisk framgår om vi studerar diagrammen av  $\tilde{x}_1$  och  $\tilde{x}_2$  för  $t=35$ . Om mätvärdet vid  $t=36$  plötsligt blivit korrekt, hade en med ovanstående liknande situation uppstått. (se tabell.)

DIAGRAM 8.

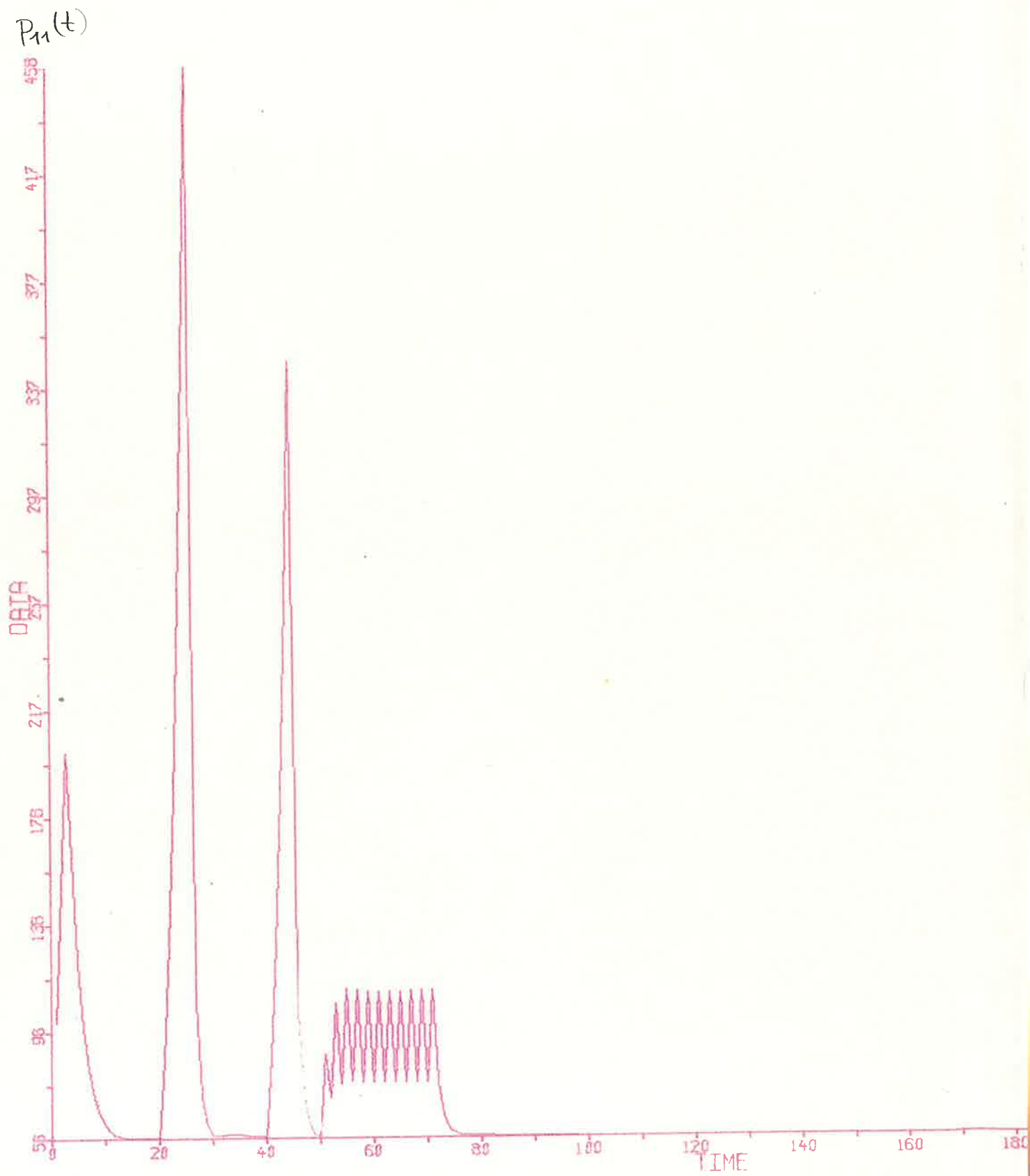
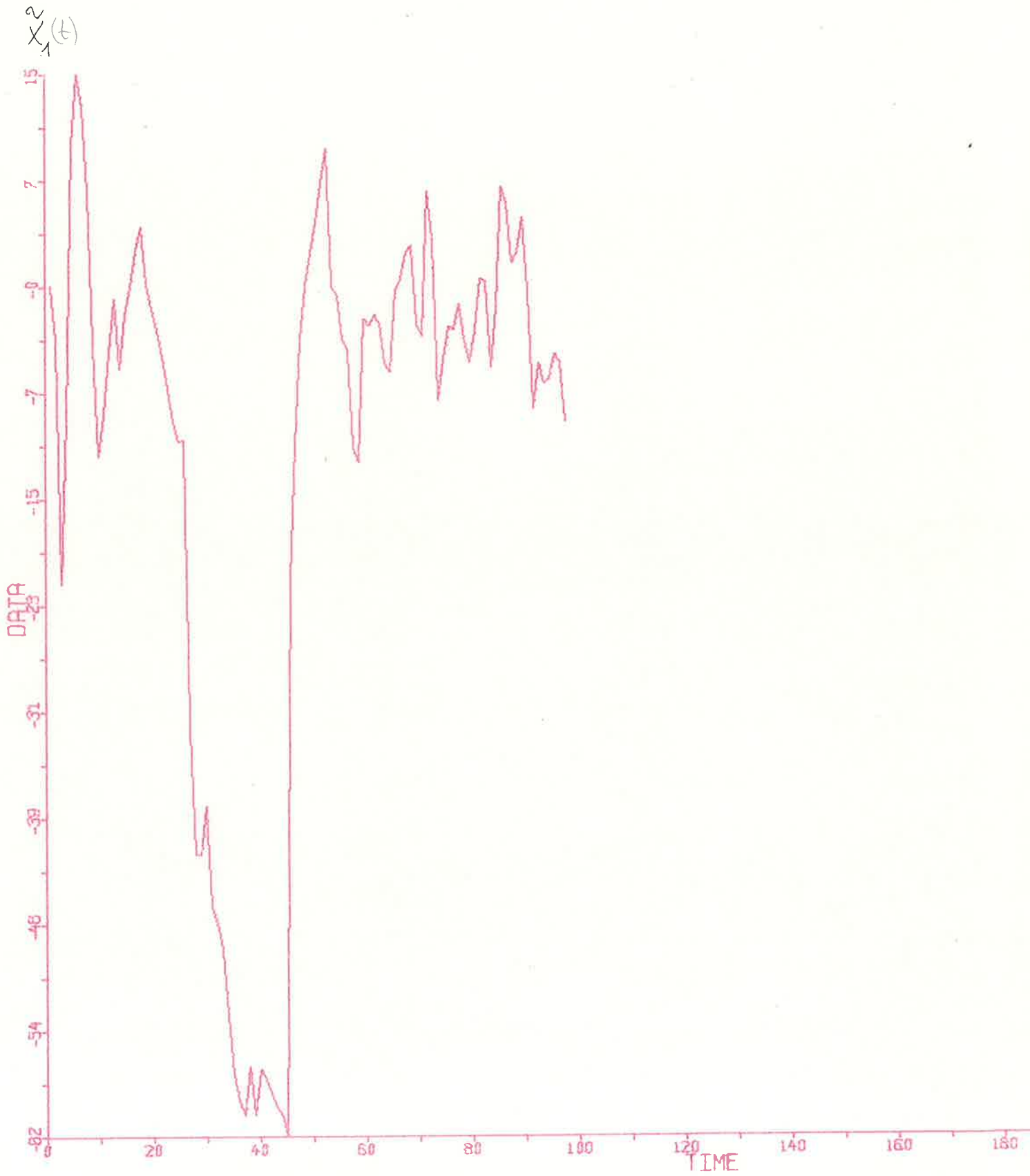
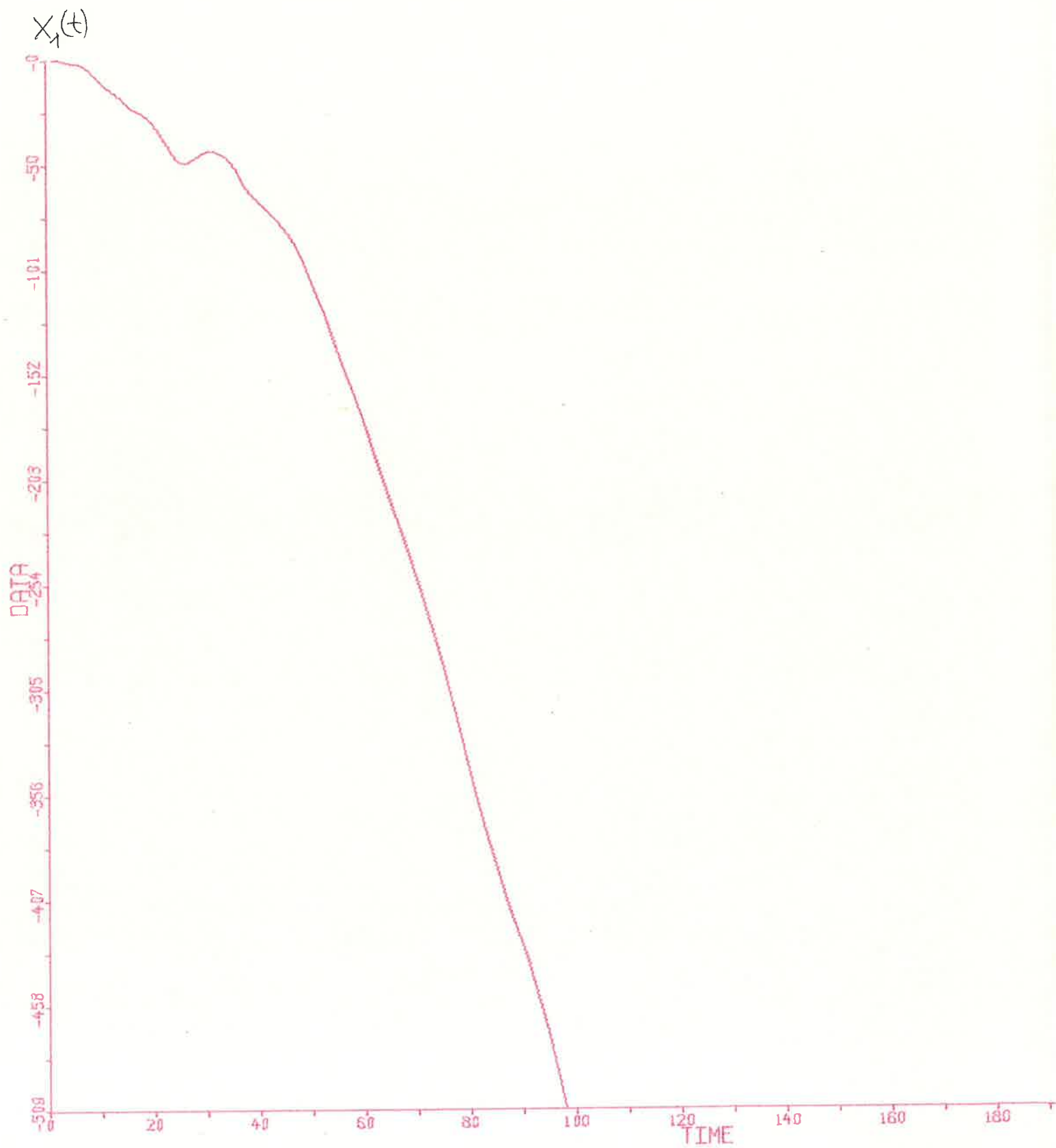


DIAGRAM 7.





## DIAGRAM 6.



# DIAGRAM 5.

$P_{11}(t)$

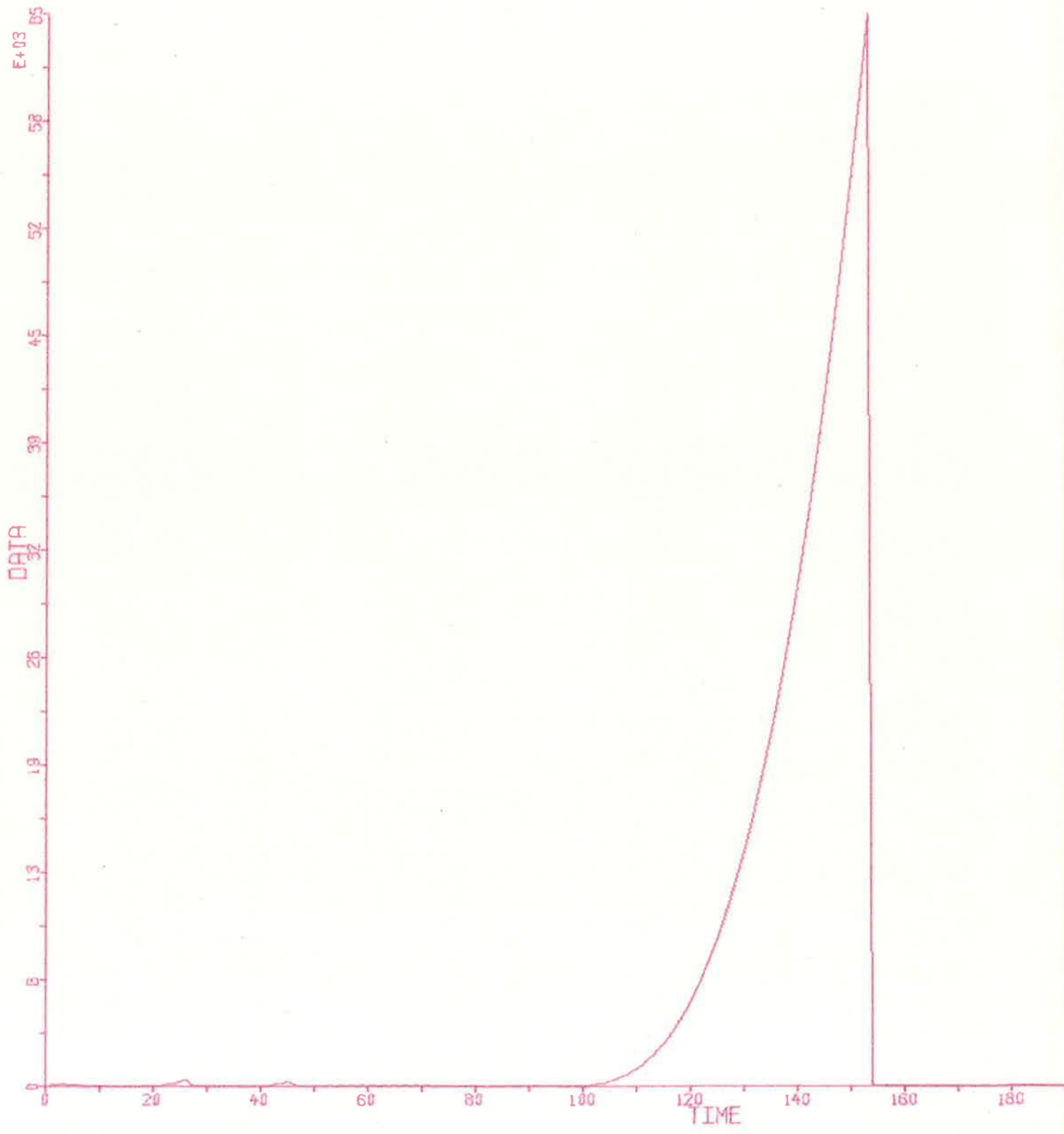
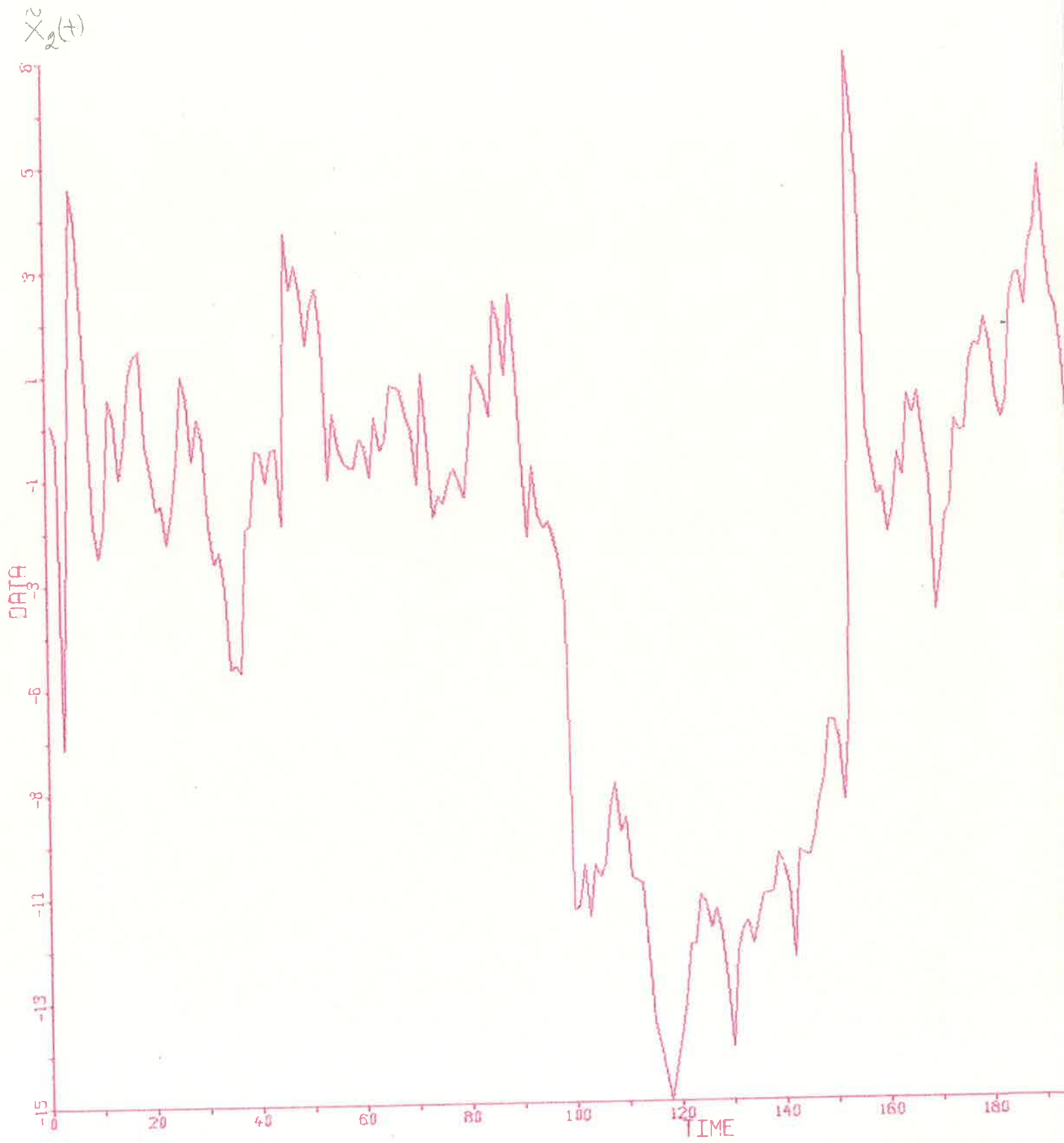
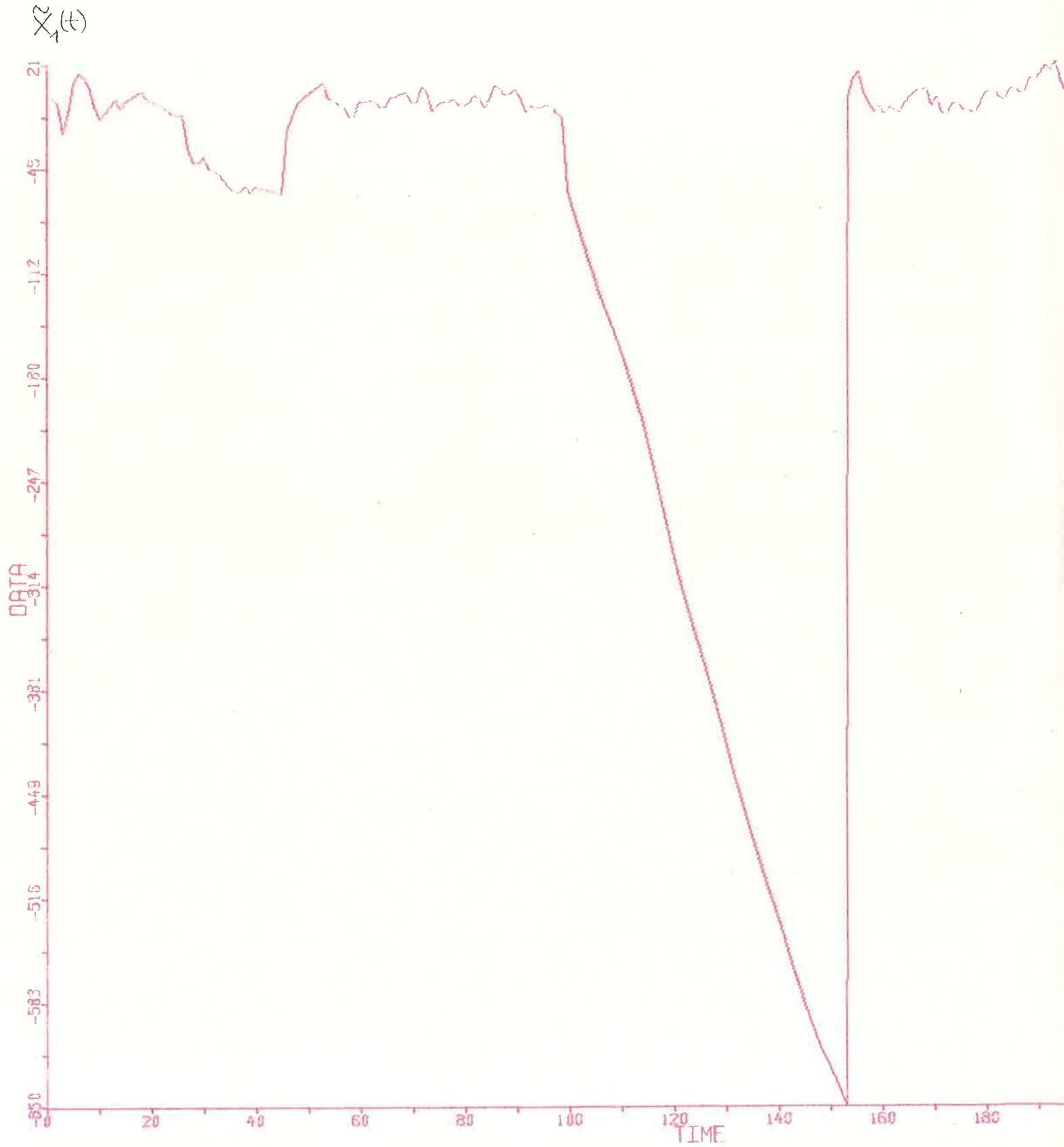


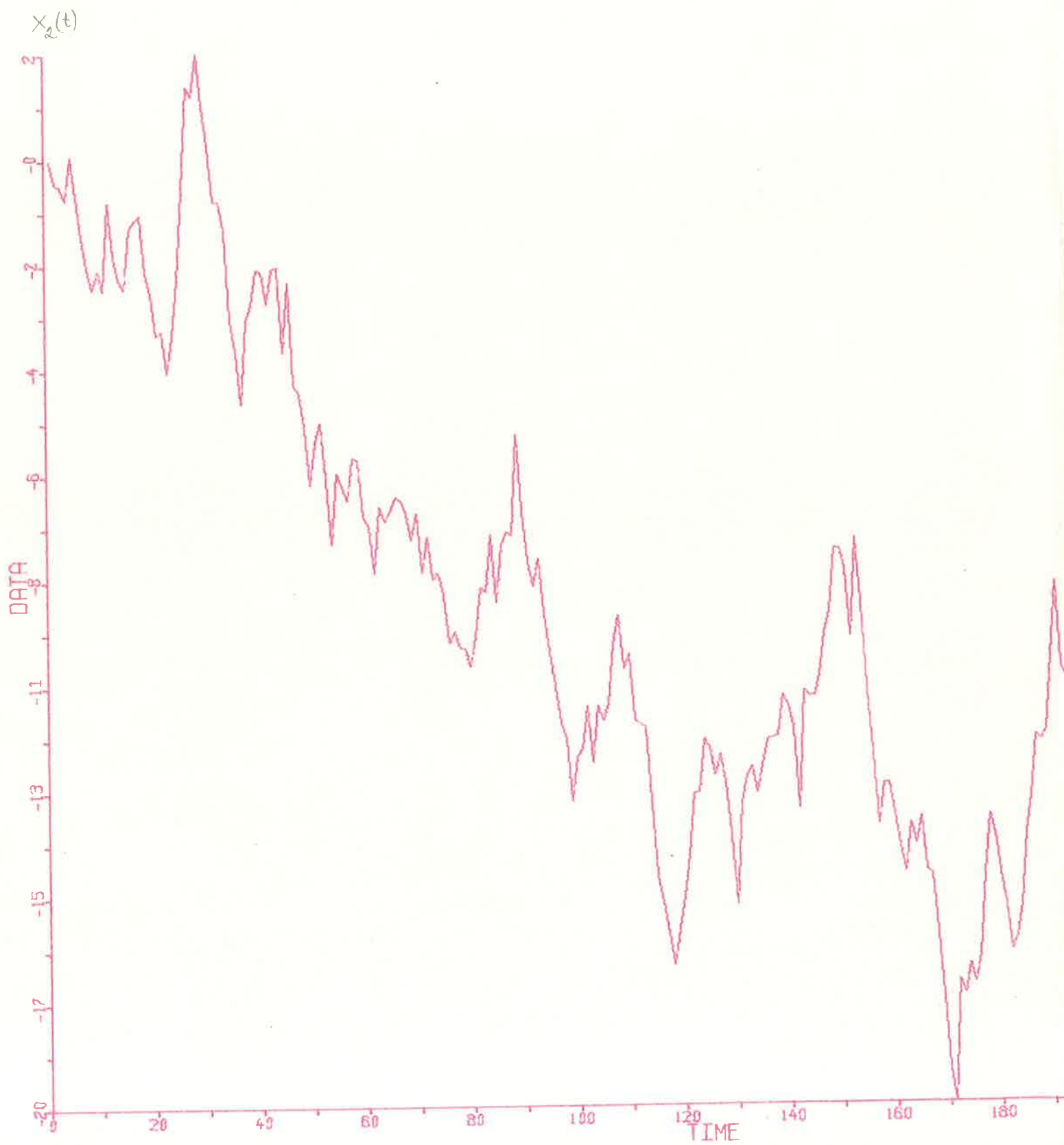
DIAGRAM 4.



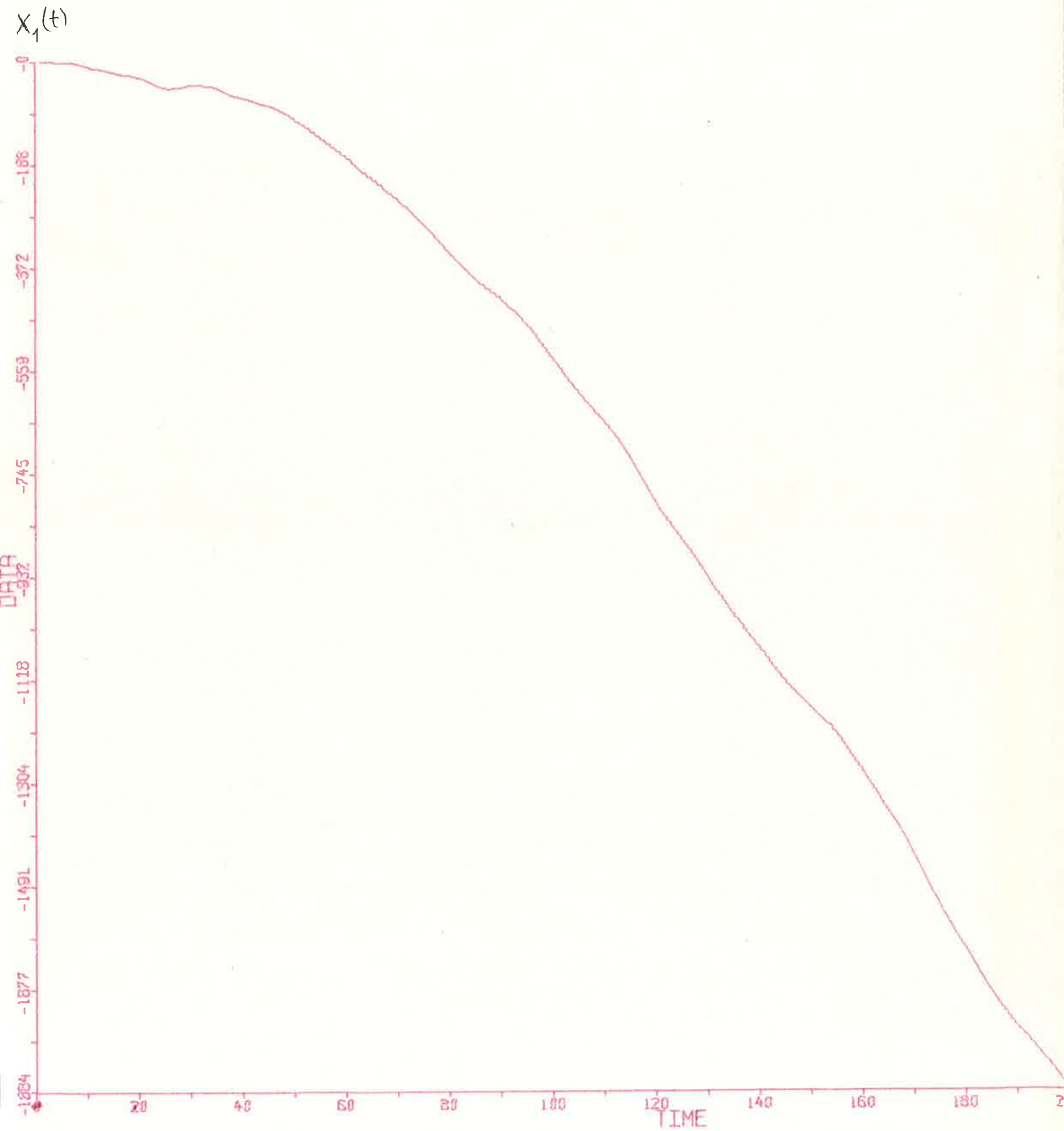
## DIAGRAM 3.



# DIAGRAM 2.



# DIAGRAM 1.



DETECTION OF OUTLIERS WITH A KALMANFILTER

MATRIX FI

1.0000000000+000 1.0000000000+000  
 0.0000000000+000 1.0000000000+000

MATRIX GAM

5.0000000000-001  
 1.0000000000+000

MATRIX A

5.0000000000-001  
 1.0000000000+000

MATRIX C

1.0000000000+000 0.0000000000+000

MATRIX B

1.0000000000+001

| OUT | T  | X1      | X2     | FELX1   | FELX2  | FELY1   | FELY2 | P11     | P12     | P22     |       |
|-----|----|---------|--------|---------|--------|---------|-------|---------|---------|---------|-------|
| 1.0 | 1  | 0.000   | 0.000  | 0.000   | 0.000  | 7.566   |       | 100.000 | 0.000   | 100.000 | 0.043 |
| 1.0 | 2  | -0.243  | -0.486 | -4.026  | -0.486 | 17.279  |       | 150.250 | 100.500 | 101.000 | 0.180 |
| 1.0 | 3  | -0.771  | -0.571 | -21.868 | -7.510 | -19.707 |       | 201.249 | 101.299 | 61.639  | 0.194 |
| 1.0 | 4  | -1.477  | -0.842 | -9.721  | -1.155 | -24.284 |       | 161.884 | 61.702  | 28.576  | 0.340 |
| 1.0 | 5  | -1.863  | 0.070  | 10.313  | 5.479  | -0.082  |       | 123.226 | 38.099  | 15.038  | 0.000 |
| 1.0 | 6  | -2.211  | -0.764 | 15.434  | 4.659  | 10.623  |       | 98.123  | 26.103  | 9.536   | 0.086 |
| 1.0 | 7  | -3.405  | -1.624 | 13.002  | 2.399  | 14.607  |       | 82.223  | 19.772  | 7.096   | 0.177 |
| 1.0 | 8  | -5.359  | -2.284 | 6.895   | 0.154  | 21.605  |       | 72.024  | 16.301  | 5.951   | 0.409 |
| 1.0 | 9  | -7.877  | -2.750 | -4.276  | -2.359 | 12.751  |       | 65.478  | 14.383  | 5.406   | 0.148 |
| 1.0 | 10 | -10.437 | -2.371 | -12.600 | -3.088 | -13.991 |       | 61.358  | 13.348  | 5.156   | 0.183 |
| 1.0 | 11 | -13.018 | -2.792 | -9.420  | -2.352 | -12.883 |       | 58.873  | 12.824  | 5.052   | 0.158 |
| 1.0 | 12 | -14.865 | -0.901 | -5.012  | 0.580  | -9.132  |       | 57.468  | 12.589  | 5.017   | 0.080 |
| 1.0 | 13 | -16.346 | -2.063 | -0.951  | 0.147  | 11.552  |       | 56.745  | 12.505  | 5.010   | 0.128 |
| 1.0 | 14 | -18.661 | -2.566 | -6.159  | -1.277 | -12.143 |       | 56.421  | 12.491  | 5.013   | 0.142 |
| 1.0 | 15 | -21.319 | -2.749 | -2.179  | -0.491 | -4.327  |       | 56.306  | 12.501  | 5.015   | 0.018 |
| 1.0 | 16 | -23.425 | -1.462 | -0.122  | 1.142  | -3.172  |       | 56.284  | 12.513  | 5.016   | 0.010 |
| 1.0 | 17 | -24.802 | -1.292 | 2.502   | 1.566  | -0.287  |       | 56.291  | 12.520  | 5.014   | 0.000 |
| 1.0 | 18 | -26.039 | -1.182 | 4.249   | 1.699  | 11.982  |       | 56.299  | 12.522  | 5.011   | 0.139 |
| 1.0 | 19 | -27.839 | -2.418 | 0.054   | -0.497 | 2.425   |       | 56.300  | 12.519  | 5.008   | 0.006 |
| 0.0 | 20 | -30.482 | -2.868 | -1.735  | -1.140 | 42.165  |       | 56.294  | 12.514  | 5.005   | 1.716 |
| 0.0 | 21 | -33.779 | -3.727 | -3.305  | -2.000 | 50.934  |       | 86.578  | 18.019  | 6.005   | 2.097 |
| 0.0 | 22 | -37.469 | -3.653 | -5.268  | -1.926 | 53.437  |       | 128.871 | 24.524  | 7.005   | 1.882 |
| 0.0 | 23 | -41.561 | -4.531 | -7.633  | -2.803 | 43.872  |       | 185.174 | 32.029  | 8.005   | 1.018 |
| 0.0 | 24 | -45.711 | -3.769 | -10.056 | -2.042 | 49.208  |       | 257.487 | 40.534  | 9.005   | 1.022 |
| 0.0 | 25 | -48.876 | -2.561 | -11.494 | -0.834 | 56.465  |       | 347.809 | 50.039  | 10.005  | 1.074 |
| 1.0 | 26 | -50.486 | -0.660 | -11.377 | 1.067  | 25.072  |       | 458.141 | 60.543  | 11.005  | 0.170 |
| 1.0 | 27 | -50.055 | 1.522  | -32.519 | 0.530  | 16.052  |       | 108.466 | 15.785  | 5.437   | 0.186 |
| 1.0 | 28 | -48.634 | 1.320  | -41.657 | -0.888 | -0.778  |       | 71.667  | 12.314  | 5.242   | 0.001 |
| 1.0 | 29 | -46.863 | 2.222  | -41.714 | 0.070  | -9.023  |       | 60.703  | 12.032  | 5.359   | 0.076 |
| 1.0 | 30 | -45.192 | 1.119  | -38.111 | -0.357 | 14.897  |       | 57.456  | 12.445  | 5.458   | 0.213 |
| 1.0 | 31 | -44.488 | 0.289  | -45.497 | -2.365 | -4.025  |       | 57.023  | 12.878  | 5.474   | 0.016 |
| 1.0 | 32 | -44.804 | -0.919 | -46.675 | -3.243 | -2.921  |       | 57.386  | 13.120  | 5.418   | 0.008 |
| 1.0 | 33 | -45.723 | -0.920 | -48.609 | -3.000 | 3.276   |       | 57.709  | 13.161  | 5.324   | 0.010 |
| 1.0 | 34 | -46.933 | -1.499 | -53.372 | -3.853 | -0.939  |       | 57.758  | 13.071  | 5.226   | 0.001 |
| 1.0 | 35 | -49.388 | -3.411 | -57.759 | -5.687 | -9.076  |       | 57.576  | 12.929  | 5.143   | 0.079 |
| 1.0 | 36 | -53.131 | -4.077 | -59.718 | -5.608 | -11.516 |       | 57.281  | 12.787  | 5.082   | 0.127 |



|     |     |          |         |          |         |          |         |        |        |       |
|-----|-----|----------|---------|----------|---------|----------|---------|--------|--------|-------|
| 1.0 | 39  | -65.371  | -3.105  | -60.769  | -2.382  | -12.147  | 56.518  | 12.544 | 5.008  | 0.142 |
| 0.0 | 40  | -68.106  | -2.365  | -57.421  | -0.669  | -69.639  | 56.390  | 12.517 | 5.002  | 4.677 |
| 0.0 | 41  | -70.494  | -2.412  | -58.113  | -0.715  | -56.603  | 86.676  | 18.019 | 6.002  | 2.589 |
| 0.0 | 42  | -73.241  | -3.083  | -59.164  | -1.387  | -57.050  | 128.967 | 24.522 | 7.002  | 2.144 |
| 0.0 | 43  | -75.964  | -2.362  | -60.190  | -0.666  | -78.574  | 185.262 | 32.024 | 8.002  | 3.264 |
| 0.0 | 44  | -78.299  | -2.308  | -60.829  | -0.612  | -59.560  | 257.563 | 40.526 | 9.002  | 1.496 |
| 1.0 | 45  | -81.508  | -4.109  | -62.341  | -2.413  | -47.785  | 347.868 | 50.029 | 10.002 | 0.769 |
| 1.0 | 46  | -84.886  | -2.648  | -21.570  | 4.386   | -10.940  | 104.677 | 16.084 | 5.414  | 0.088 |
| 1.0 | 47  | -88.626  | -4.831  | -11.820  | 3.063   | -9.958   | 71.259  | 12.508 | 5.150  | 0.087 |
| 1.0 | 48  | -93.536  | -4.990  | -3.966   | 3.631   | -1.231   | 60.703  | 12.040 | 5.236  | 0.001 |
| 1.0 | 49  | -98.882  | -5.703  | -0.134   | 3.010   | -0.062   | 57.342  | 12.327 | 5.334  | 0.000 |
| 0.0 | 50  | -105.206 | -6.945  | 2.283    | 1.773   | 44.830   | 56.731  | 12.703 | 5.369  | 1.934 |
| 1.0 | 51  | -111.685 | -6.012  | 4.522    | 2.706   | 0.083    | 87.756  | 18.572 | 6.369  | 0.000 |
| 0.0 | 52  | -117.502 | -5.621  | 7.377    | 3.089   | 68.844   | 71.304  | 14.923 | 5.532  | 4.173 |
| 1.0 | 53  | -123.710 | -6.795  | 9.879    | 1.915   | 18.344   | 106.931 | 20.955 | 6.532  | 0.245 |
| 0.0 | 54  | -131.204 | -8.193  | -0.242   | -1.341  | 53.173   | 76.587  | 15.036 | 5.410  | 2.415 |
| 1.0 | 55  | -138.643 | -6.685  | -0.828   | 0.168   | 5.253    | 112.319 | 20.946 | 6.410  | 0.020 |
| 0.0 | 56  | -145.467 | -6.962  | -4.097   | -0.628  | 43.937   | 77.225  | 14.709 | 5.343  | 1.643 |
| 1.0 | 57  | -152.589 | -7.283  | -4.885   | -0.949  | 10.564   | 112.236 | 20.552 | 6.343  | 0.079 |
| 0.0 | 58  | -159.420 | -6.379  | -11.991  | -1.067  | 44.776   | 76.853  | 14.537 | 5.353  | 1.710 |
| 1.0 | 59  | -165.813 | -6.408  | -13.073  | -1.096  | -19.631  | 111.530 | 20.390 | 6.353  | 0.275 |
| 0.0 | 60  | -172.833 | -7.631  | -2.538   | -0.428  | 44.337   | 76.642  | 14.527 | 5.388  | 1.679 |
| 1.0 | 61  | -180.546 | -7.795  | -3.048   | -0.591  | -3.065   | 111.333 | 20.419 | 6.388  | 0.007 |
| 0.0 | 62  | -188.854 | -8.821  | -2.241   | -1.321  | 60.445   | 76.667  | 14.576 | 5.416  | 3.119 |
| 1.0 | 63  | -196.974 | -7.419  | -2.861   | 0.081   | 4.647    | 111.484 | 20.491 | 6.416  | 0.015 |
| 0.0 | 64  | -204.551 | -7.735  | -5.838   | -0.686  | 55.202   | 76.774  | 14.620 | 5.430  | 2.600 |
| 1.0 | 65  | -212.180 | -7.524  | -6.418   | -0.474  | -10.181  | 111.693 | 20.550 | 6.430  | 0.074 |
| 0.0 | 66  | -219.553 | -7.222  | -0.381   | 0.816   | 66.803   | 76.862  | 14.643 | 5.435  | 3.806 |
| 1.0 | 67  | -226.800 | -7.273  | 0.409    | 0.764   | -2.121   | 111.833 | 20.578 | 6.435  | 0.003 |
| 0.0 | 68  | -234.221 | -7.569  | 2.352    | 0.675   | 55.873   | 76.908  | 14.651 | 5.436  | 2.662 |
| 1.0 | 69  | -242.068 | -8.124  | 2.749    | 0.120   | 9.737    | 111.896 | 20.587 | 6.436  | 0.067 |
| 0.0 | 70  | -249.903 | -7.546  | -2.930   | -0.248  | 49.268   | 76.924  | 14.652 | 5.436  | 2.069 |
| 1.0 | 71  | -258.077 | -8.803  | -3.806   | -1.505  | -18.757  | 111.914 | 20.588 | 6.436  | 0.250 |
| 1.0 | 72  | -266.502 | -8.048  | 6.795    | 1.072   | 7.974    | 76.928  | 14.651 | 5.436  | 0.054 |
| 1.0 | 73  | -275.001 | -8.949  | 3.289    | -0.489  | 24.227   | 64.514  | 13.004 | 5.223  | 0.538 |
| 1.0 | 74  | -283.876 | -8.802  | -8.542   | -2.257  | -12.329  | 59.469  | 12.599 | 5.195  | 0.144 |
| 1.0 | 75  | -292.922 | -9.289  | -5.471   | -1.770  | -10.259  | 57.543  | 12.600 | 5.199  | 0.101 |
| 1.0 | 76  | -302.706 | -10.279 | -3.168   | -1.940  | -3.684   | 56.963  | 12.690 | 5.192  | 0.013 |
| 1.0 | 77  | -312.887 | -10.082 | -3.375   | -1.444  | -7.978   | 56.875  | 12.750 | 5.166  | 0.061 |
| 1.0 | 78  | -323.129 | -10.403 | -1.439   | -1.118  | 3.543    | 56.890  | 12.757 | 5.130  | 0.012 |
| 1.0 | 79  | -333.544 | -10.426 | -4.141   | -1.429  | 0.073    | 56.866  | 12.723 | 5.092  | 0.000 |
| 1.0 | 80  | -344.153 | -10.792 | -5.785   | -1.800  | -8.631   | 56.784  | 12.671 | 5.060  | 0.072 |
| 1.0 | 81  | -354.635 | -10.171 | -3.451   | -0.482  | -8.606   | 56.668  | 12.618 | 5.036  | 0.071 |
| 1.0 | 82  | -364.289 | -9.137  | 0.390    | 1.246   | 3.257    | 56.549  | 12.574 | 5.020  | 0.010 |
| 1.0 | 83  | -373.469 | -9.224  | 0.154    | 0.897   | 17.691   | 56.446  | 12.542 | 5.010  | 0.302 |
| 1.0 | 84  | -382.101 | -8.038  | -6.158   | 0.664   | -10.008  | 56.368  | 12.521 | 5.004  | 0.097 |
| 1.0 | 85  | -390.850 | -9.461  | -1.796   | 0.043   | -18.707  | 56.315  | 12.509 | 5.002  | 0.338 |
| 1.0 | 86  | -399.709 | -8.257  | 7.086    | 2.744   | 9.200    | 56.283  | 12.503 | 5.001  | 0.082 |
| 1.0 | 87  | -407.822 | -7.970  | 5.924    | 2.295   | 15.194   | 56.265  | 12.501 | 5.000  | 0.223 |
| 1.0 | 88  | -415.817 | -8.019  | 1.508    | 1.030   | 3.195    | 56.256  | 12.500 | 5.000  | 0.010 |
| 1.0 | 89  | -422.773 | -5.893  | 2.196    | 2.901   | -1.342   | 56.252  | 12.500 | 5.000  | 0.002 |
| 1.0 | 90  | -429.483 | -7.526  | 4.870    | 1.375   | 14.429   | 56.251  | 12.500 | 5.000  | 0.201 |
| 1.0 | 91  | -437.545 | -8.598  | -0.639   | -0.851  | 16.733   | 56.251  | 12.500 | 5.000  | 0.270 |
| 1.0 | 92  | -446.409 | -9.129  | -9.119   | -2.721  | -12.878  | 56.251  | 12.500 | 5.000  | 0.160 |
| 1.0 | 93  | -455.240 | -8.534  | -5.876   | -1.095  | -0.612   | 56.251  | 12.500 | 5.000  | 0.000 |
| 1.0 | 94  | -464.363 | -9.711  | -7.291   | -2.223  | -6.646   | 56.251  | 12.500 | 5.000  | 0.043 |
| 1.0 | 95  | -474.480 | -10.524 | -6.996   | -2.505  | -10.551  | 56.251  | 12.500 | 5.000  | 0.107 |
| 1.0 | 96  | -485.369 | -11.253 | -5.223   | -2.389  | -5.043   | 56.251  | 12.500 | 5.000  | 0.025 |
| 1.0 | 97  | -497.006 | -12.022 | -5.779   | -2.755  | 3.245    | 56.250  | 12.500 | 5.000  | 0.010 |
| 1.0 | 98  | -509.193 | -12.352 | -10.127  | -3.345  | -4.105   | 56.250  | 12.500 | 5.000  | 0.016 |
| 1.0 | 99  | -522.208 | -13.679 | -12.329  | -4.343  | 100.000  | 56.250  | 12.500 | 5.000  | 0.016 |
| 0.0 | 100 | -535.412 | -12.728 | -60.197  | -11.393 | -66.378  | 56.250  | 12.500 | 5.000  | 4.253 |
| 0.0 | 101 | -548.072 | -12.593 | -71.523  | -11.257 | -69.665  | 86.500  | 18.000 | 6.000  | 3.925 |
| 0.0 | 102 | -560.201 | -11.665 | -82.316  | -10.330 | -74.688  | 128.750 | 24.500 | 7.000  | 3.678 |
| 0.0 | 103 | -572.471 | -12.876 | -93.251  | -11.540 | -113.962 | 185.000 | 32.000 | 8.000  | 6.873 |
| 0.0 | 104 | -584.735 | -11.652 | -104.179 | -10.316 | -91.499  | 257.250 | 40.500 | 9.000  | 3.535 |
| 0.0 | 105 | -596.548 | -11.974 | -114.657 | -10.639 | -107.547 | 347.500 | 50.000 | 10.000 | 3.898 |
| 0.0 | 106 | -608.350 | -11.631 | -125.124 | -10.295 | -117.154 | 457.750 | 60.500 | 11.000 | 3.712 |
| 0.0 | 107 | -619.351 | -10.370 | -134.788 | -9.035  | -139.683 | 590.000 | 72.000 | 12.000 | 4.265 |
| 0.0 | 108 | -629.421 | -9.771  | -143.524 | -8.435  | -134.593 | 746.250 | 84.500 | 13.000 | 3.229 |



|     |     |           |         |          |         |          |           |          |        |       |
|-----|-----|-----------|---------|----------|---------|----------|-----------|----------|--------|-------|
| 0.0 | 111 | -661.753  | -11.962 | -171.849 | -10.627 | -174.520 | 1379.000  | 128.000  | 16.000 | 3.106 |
| 0.0 | 112 | -673.760  | -12.053 | -182.522 | -10.718 | -175.255 | 1651.250  | 144.500  | 17.000 | 2.645 |
| 0.0 | 113 | -685.838  | -12.102 | -193.264 | -10.767 | -193.328 | 1957.500  | 162.000  | 18.000 | 2.740 |
| 0.0 | 114 | -698.747  | -13.716 | -204.838 | -12.380 | -199.704 | 2299.751  | 180.500  | 19.000 | 2.507 |
| 0.0 | 115 | -713.258  | -15.306 | -218.013 | -13.970 | -209.252 | 2680.001  | 200.000  | 20.000 | 2.376 |
| 0.0 | 116 | -728.841  | -15.861 | -232.261 | -14.525 | -231.266 | 3100.251  | 220.500  | 21.000 | 2.521 |
| 0.0 | 117 | -745.017  | -16.491 | -247.102 | -15.156 | -239.965 | 3562.501  | 242.000  | 22.000 | 2.371 |
| 0.0 | 118 | -761.844  | -17.163 | -262.593 | -15.827 | -274.028 | 4068.751  | 264.500  | 23.000 | 2.717 |
| 0.0 | 119 | -778.627  | -16.401 | -278.040 | -15.066 | -300.528 | 4621.001  | 288.000  | 24.000 | 2.886 |
| 0.0 | 120 | -794.684  | -15.713 | -292.762 | -14.378 | -297.437 | 5221.251  | 312.500  | 25.000 | 2.508 |
| 0.0 | 121 | -809.965  | -14.850 | -306.708 | -13.515 | -318.645 | 5871.501  | 338.000  | 26.000 | 2.565 |
| 0.0 | 122 | -824.153  | -13.525 | -319.560 | -12.189 | -323.651 | 6573.751  | 364.500  | 27.000 | 2.367 |
| 0.0 | 123 | -837.663  | -13.496 | -331.735 | -12.161 | -320.915 | 7330.001  | 392.000  | 28.000 | 2.091 |
| 0.0 | 124 | -850.601  | -12.380 | -343.338 | -11.045 | -335.961 | 8142.251  | 420.500  | 29.000 | 2.065 |
| 0.0 | 125 | -863.070  | -12.556 | -354.471 | -11.221 | -354.854 | 9012.501  | 450.000  | 30.000 | 2.084 |
| 0.0 | 126 | -875.917  | -13.139 | -365.983 | -11.803 | -354.716 | 9942.751  | 480.500  | 31.000 | 1.890 |
| 0.0 | 127 | -888.842  | -12.712 | -377.573 | -11.376 | -357.584 | 10935.001 | 512.000  | 32.000 | 1.748 |
| 0.0 | 128 | -901.856  | -13.316 | -389.252 | -11.981 | -383.694 | 11991.252 | 544.500  | 33.000 | 1.836 |
| 0.0 | 129 | -915.724  | -14.419 | -401.784 | -13.083 | -395.095 | 13113.502 | 578.000  | 34.000 | 1.782 |
| 0.0 | 130 | -930.893  | -15.921 | -415.618 | -14.585 | -410.949 | 14303.752 | 612.500  | 35.000 | 1.768 |
| 0.0 | 131 | -945.731  | -13.754 | -429.120 | -12.419 | -414.289 | 15564.002 | 648.000  | 36.000 | 1.653 |
| 0.0 | 132 | -959.195  | -13.174 | -441.249 | -11.838 | -445.089 | 16896.252 | 684.500  | 37.000 | 1.758 |
| 0.0 | 133 | -972.274  | -12.985 | -452.992 | -11.649 | -458.262 | 18302.502 | 722.000  | 38.000 | 1.721 |
| 0.0 | 134 | -985.532  | -13.532 | -464.915 | -12.197 | -463.563 | 19784.752 | 760.500  | 39.000 | 1.630 |
| 0.0 | 135 | -998.772  | -12.947 | -476.820 | -11.611 | -477.075 | 21345.002 | 800.000  | 40.000 | 1.601 |
| 0.0 | 136 | -1011.456 | -12.422 | -488.169 | -11.087 | -499.442 | 22985.252 | 840.500  | 41.000 | 1.630 |
| 0.0 | 137 | -1023.846 | -12.357 | -499.223 | -11.022 | -486.154 | 24707.503 | 882.000  | 42.000 | 1.437 |
| 0.0 | 138 | -1036.190 | -12.330 | -510.231 | -10.994 | -489.086 | 26513.753 | 924.500  | 43.000 | 1.356 |
| 0.0 | 139 | -1048.082 | -11.455 | -520.788 | -10.120 | -521.088 | 28406.003 | 968.000  | 44.000 | 1.437 |
| 0.0 | 140 | -1059.670 | -11.721 | -531.041 | -10.385 | -534.994 | 30386.253 | 1012.500 | 45.000 | 1.416 |
| 0.0 | 141 | -1071.617 | -12.174 | -541.653 | -10.838 | -557.279 | 32456.503 | 1058.000 | 46.000 | 1.439 |
| 0.0 | 142 | -1084.643 | -13.877 | -553.343 | -12.542 | -535.505 | 34618.753 | 1104.500 | 47.000 | 1.246 |
| 0.0 | 143 | -1097.278 | -11.392 | -564.642 | -10.057 | -582.353 | 36875.003 | 1152.000 | 48.000 | 1.383 |
| 0.0 | 144 | -1108.716 | -11.484 | -574.745 | -10.148 | -575.227 | 39227.253 | 1200.500 | 49.000 | 1.269 |
| 0.0 | 145 | -1120.208 | -11.501 | -584.902 | -10.166 | -585.797 | 41677.504 | 1250.000 | 50.000 | 1.239 |
| 0.0 | 146 | -1131.485 | -11.052 | -594.843 | -9.716  | -611.733 | 44227.754 | 1300.500 | 51.000 | 1.273 |
| 0.0 | 147 | -1142.105 | -10.188 | -604.128 | -8.853  | -599.170 | 46880.004 | 1352.000 | 52.000 | 1.153 |
| 0.0 | 148 | -1152.056 | -9.715  | -612.744 | -8.380  | -602.982 | 49636.254 | 1404.500 | 53.000 | 1.103 |
| 0.0 | 149 | -1161.116 | -8.406  | -620.469 | -7.070  | -599.402 | 52498.504 | 1458.000 | 54.000 | 1.030 |
| 0.0 | 150 | -1169.516 | -8.393  | -627.533 | -7.058  | -629.039 | 55468.754 | 1512.500 | 55.000 | 1.074 |
| 0.0 | 151 | -1178.121 | -8.817  | -634.803 | -7.482  | -653.631 | 58549.005 | 1568.000 | 56.000 | 1.099 |
| 0.0 | 152 | -1187.648 | -10.238 | -642.995 | -8.902  | -662.964 | 61741.255 | 1624.500 | 57.000 | 1.072 |
| 1.0 | 153 | -1196.855 | -8.177  | -650.866 | -6.841  | -642.213 | 65047.505 | 1682.000 | 58.000 | 0.955 |
| 1.0 | 154 | -1205.718 | -9.548  | -0.585   | 8.368   | -7.705   | 119.834   | 17.655   | 15.574 | 0.041 |
| 1.0 | 155 | -1216.174 | -11.364 | 11.694   | 7.171   | 3.884    | 84.979    | 22.687   | 15.156 | 0.012 |
| 1.0 | 156 | -1228.223 | -12.733 | 15.919   | 5.326   | 29.966   | 83.092    | 25.138   | 13.373 | 0.740 |
| 1.0 | 157 | -1241.708 | -14.237 | 2.779    | -0.293  | 12.885   | 83.014    | 24.151   | 10.922 | 0.137 |
| 1.0 | 158 | -1255.512 | -13.371 | -4.625   | -1.127  | 6.370    | 79.737    | 21.431   | 8.735  | 0.034 |
| 1.0 | 159 | -1268.865 | -13.336 | -9.320   | -1.852  | -8.041   | 74.640    | 18.603   | 7.179  | 0.056 |
| 1.0 | 160 | -1282.553 | -14.039 | -7.229   | -1.697  | 3.703    | 69.491    | 16.350   | 6.198  | 0.012 |
| 1.0 | 161 | -1296.931 | -14.718 | -11.142  | -2.734  | -12.170  | 65.163    | 14.767   | 5.621  | 0.135 |
| 1.0 | 162 | -1311.903 | -15.225 | -8.240   | -2.153  | -2.694   | 61.886    | 13.741   | 5.300  | 0.007 |
| 1.0 | 163 | -1326.623 | -14.216 | -8.630   | -0.915  | 0.958    | 59.588    | 13.122   | 5.134  | 0.001 |
| 1.0 | 164 | -1341.054 | -14.646 | -10.197  | -1.424  | -15.893  | 58.088    | 12.777   | 5.055  | 0.241 |
| 1.0 | 165 | -1355.411 | -14.067 | -4.208   | 0.439   | -8.859   | 57.181    | 12.609   | 5.022  | 0.075 |
| 1.0 | 166 | -1370.049 | -15.210 | -0.407   | 0.007   | -7.293   | 56.679    | 12.531   | 5.011  | 0.051 |
| 1.0 | 167 | -1385.303 | -15.299 | 2.778    | 0.502   | -1.684   | 56.430    | 12.507   | 5.009  | 0.003 |
| 1.0 | 168 | -1401.220 | -16.534 | 3.403    | -0.600  | -5.573   | 56.323    | 12.505   | 5.009  | 0.030 |
| 1.0 | 169 | -1418.436 | -17.898 | 4.576    | -1.517  | 18.496   | 56.287    | 12.508   | 5.009  | 0.330 |
| 1.0 | 170 | -1437.112 | -19.456 | -5.862   | -4.556  | -21.000  | 56.280    | 12.511   | 5.008  | 0.426 |
| 1.0 | 171 | -1456.903 | -20.126 | -1.509   | -3.544  | 17.229   | 56.280    | 12.512   | 5.006  | 0.286 |
| 1.0 | 172 | -1475.737 | -17.541 | -11.345  | -2.339  | -6.126   | 56.279    | 12.511   | 5.005  | 0.036 |
| 1.0 | 173 | -1493.421 | -17.828 | -11.131  | -2.135  | -16.455  | 56.276    | 12.509   | 5.003  | 0.261 |
| 1.0 | 174 | -1510.926 | -17.182 | -5.701   | -0.172  | -1.836   | 56.271    | 12.506   | 5.002  | 0.003 |
| 1.0 | 175 | -1528.315 | -17.597 | -5.272   | -0.440  | 6.868    | 56.265    | 12.504   | 5.001  | 0.046 |
| 1.0 | 176 | -1545.608 | -16.990 | -8.431   | -0.383  | 1.197    | 56.260    | 12.502   | 5.001  | 0.001 |
| 1.0 | 177 | -1561.753 | -15.300 | -8.496   | 1.211   | 10.919   | 56.256    | 12.501   | 5.000  | 0.115 |
| 1.0 | 178 | -1576.419 | -14.031 | -11.456  | 1.606   | -4.295   | 56.253    | 12.501   | 5.000  | 0.018 |
| 1.0 | 179 | -1590.656 | -14.444 | -8.166   | 1.538   | -18.278  | 56.252    | 12.500   | 5.000  | 0.323 |
| 1.0 | 180 | -1605.509 | -15.261 | 1.006    | 2.182   | -1.441   | 56.251    | 12.500   | 5.000  | 0.002 |

|     |     |           |         |        |        |         |        |        |       |       |
|-----|-----|-----------|---------|--------|--------|---------|--------|--------|-------|-------|
| 1.0 | 183 | =1654.317 | =16,614 | -0.841 | -0.138 | 10.077  | 56,250 | 12,500 | 5.000 | 0.010 |
| 1.0 | 184 | =1670.601 | =15,955 | -2.044 | 0.267  | -10.516 | 56,250 | 12,500 | 5.000 | 0.107 |
| 1.0 | 185 | =1685.807 | =14,457 | 3.599  | 2.607  | 2.295   | 56,250 | 12,500 | 5.000 | 0.005 |
| 1.0 | 186 | =1699.874 | =13,678 | 5.586  | 3.201  | 15.801  | 56,250 | 12,500 | 5.000 | 0.241 |
| 1.0 | 187 | =1712.904 | =12,382 | 2.483  | 3.234  | 8.349   | 56,250 | 12,500 | 5.000 | 0.067 |
| 1.0 | 188 | =1725.327 | =12,465 | 2.002  | 2.483  | -15.307 | 56,250 | 12,500 | 5.000 | 0.226 |
| 1.0 | 189 | =1737.701 | =12,282 | 11.311 | 3.890  | 14.482  | 56,250 | 12,500 | 5.000 | 0.202 |
| 1.0 | 190 | =1749.211 | =10,737 | 9.602  | 4.277  | 1.853   | 56,250 | 12,500 | 5.000 | 0.003 |
| 0.0 | 191 | =1759.156 | =9,154  | 13.855 | 5.712  | 33.194  | 56,250 | 12,500 | 5.000 | 1.064 |
| 1.0 | 192 | =1769.200 | =10,934 | 18.677 | 3.932  | 10.085  | 86,500 | 18,000 | 6.000 | 0.082 |
| 1.0 | 193 | =1780.263 | =11,192 | 16.828 | 2.700  | -4.873  | 70,196 | 14,414 | 5.263 | 0.021 |
| 1.0 | 194 | =1791.806 | =11,894 | 21.600 | 2.411  | 31.339  | 62,475 | 13,011 | 5.042 | 0.912 |
| 1.0 | 195 | =1803.013 | =10,521 | 10.138 | 1.275  | 21.079  | 58,718 | 12,500 | 5.000 | 0.422 |
| 1.0 | 196 | =1813.655 | =10,763 | 1.832  | -0.629 | -8.834  | 57,021 | 12,395 | 5.014 | 0.075 |
| 1.0 | 197 | =1824.578 | =11,082 | 4.948  | -0.251 | -7.577  | 56,388 | 12,430 | 5.036 | 0.055 |
| 1.0 | 198 | =1836.899 | =13,561 | 6.792  | -2.127 | -0.554  | 56,250 | 12,496 | 5.048 | 0.000 |
| 1.0 | 199 | =1850.725 | =14,090 | 4.644  | -2.612 | 7.037   | 56,294 | 12,546 | 5.049 | 0.048 |
| 1.0 | 200 | =1864.191 | =12,842 | -0.444 | -1.929 | -5.772  | 56,364 | 12,569 | 5.042 | 0.032 |

VI. REFERENSER.

1. Samplade system. Föreläsningar vid LTH. K. J. Åström.  
TLTH/VBV.
2. Stokastiska system. Föreläsningar vid LTH. K. J. Åström.  
TLTH/VBV.
3. New Methods in WienerFiltering Theory. R. E. Kalman.  
Proceedings of the first symposium on engineering  
applications of random function theory and probability,  
edited by John. L. Bogdanoff and Frank Kozin. John  
Wiley & sons, Inc. New York-London.
4. Föreläsningssanteckningar om filterteori. K. J. Åström.  
Institutionen för reglerteknik, LTH.

## APPENDIX 1.

### EXEMPEL PÅ ETT TIDSKONTINUERLIGT KALMANFILTER.

Antag att det fysikaliska systemet representeras av följande ekvationer.

$$\frac{dx(t)}{dt} = F \cdot x(t) + G w(t)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + v(t)$$

där

$x(t)$  = tillståndsvektorn av ordning  $n$

$y(t)$  = utsignalvektorn av ordning  $ny$

$F$  = matris av ordning  $n \times n$

$G$  = matris av ordning  $n \times nw$

$C$  = matris av ordning  $ny \times n$

$w$  = vektor av ordning  $nw$

$v$  = vektor av ordning  $nv$

Störningarna  $w$  och  $v$  är normalfördelade vita brus med

$$E\{w(t)\} = 0 \quad E\{v(t)\} = 0$$

$$E\{w(s) \cdot w^T(t)\} = \delta(s-t) \cdot R_1$$

$$E\{w(s) \cdot v^T(t)\} = \delta(s-t) \cdot R_{12}$$

$$E\{v(s) \cdot v^T(t)\} = \delta(s-t) \cdot R_2$$

Det tidskontinuerliga Kalmanfiltret blir (se ref.3):

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = F \hat{x}(t) + K(t) [y(t) - C \hat{x}(t)] \quad \text{där}$$

$$K(t) = [P(t)C^T + G \cdot R_{12}] \cdot R_2^{-1} \quad \text{och}$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = FP + PF^T - K(t)R_2K^T(t) + GR_1G^T$$

där

$\hat{x}(t)$  är det optimala estimatet av  $x(t)$ , givet  $y(s)$   $0 \leq s \leq t$ .

$P(t)$  är kovariansmatrisen för estimationsfelet  $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$K(t)$  är filterförstärkningen.

Försöks-system har varit

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -b & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w(t)$$

$$y(t) = (1, 0) x(t) + v(t) \quad \text{där}$$

$$E\{w(t)\} = E\{v(t)\} = 0$$

$$E\{w(t) \cdot w(s)\} = r_1 \cdot \delta(t-s)$$

$$E\{w(t) \cdot v(s)\} = r_{12} \delta(t-s)$$

$$E\{v(t) \cdot v(s)\} = r_2 \delta(t-s)$$

Förstärkningsvektorn blir

$$K(t) = \left[ \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r_{12} \right] \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_2} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} + r_{12} & P_{22} \end{pmatrix}$$

Variansekvationen blir

$$\frac{dP}{dt} = FP + PF^T - KR_2K^T + GR_1G^T \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_{11}}{dt} = -2bp_{11} + 2p_{12} - \frac{p_{11}^2}{r_2} \\ \frac{dp_{12}}{dt} = -(a+b)p_{12} + p_{22} - \frac{p_{11}(p_{12}+r_{12})}{r_2} \\ \frac{dp_{22}}{dt} = -2ap_{22} - \frac{(p_{12}+r_{12})^2}{r_2} + r_1 \end{array} \right.$$

Filterestimat-ekvationen blir

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = F\hat{x} + K(t) \cdot \tilde{y}(t) \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{x}_1}{dt} = -b\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \frac{P_{11}}{r_2} \tilde{y} \\ \frac{d\hat{x}_2}{dt} = -a\hat{x}_2 + \frac{P_{12}+r_{12}}{r_2} \tilde{y} \\ \tilde{y}(t) = y(t) - \hat{x}_1(t) \end{array} \right.$$

Notabelt i variansekvationen är de negativa kvadratiska termerna. Dessa verkar starkt dämpande särskilt för stora värden på  $p_{11}, p_{22}$ .

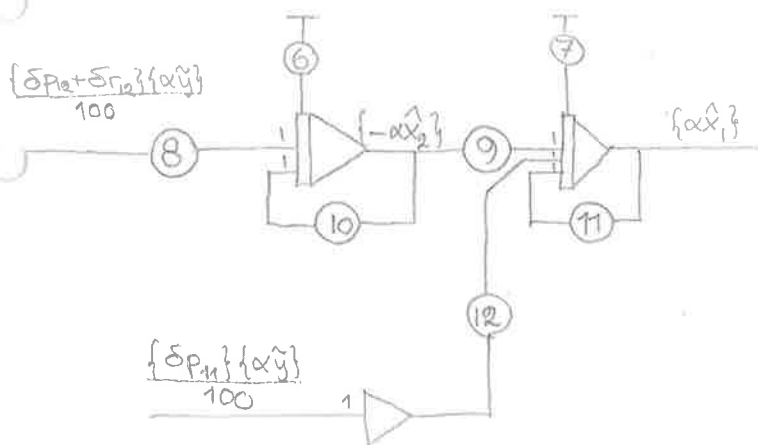
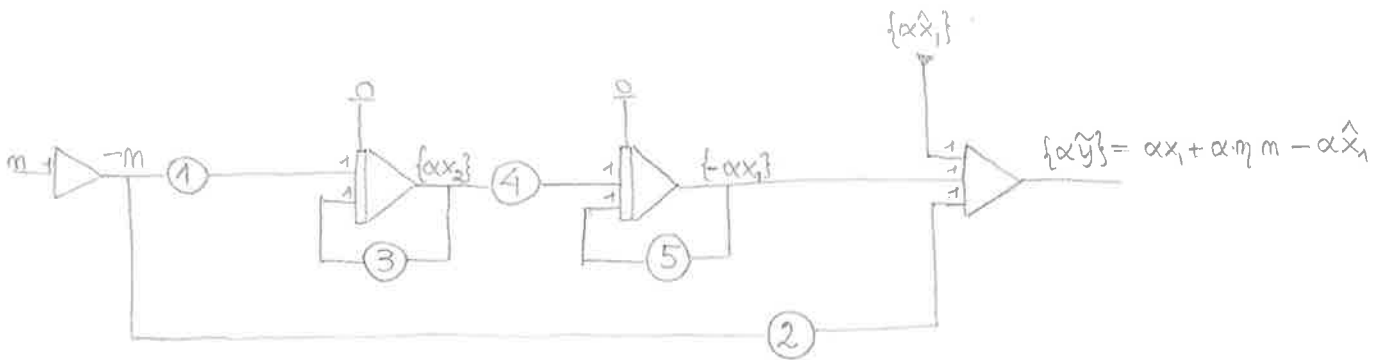
Till förfogande finnes endast en brusgenerator, vilket innebär att  $w$  och  $v$  så när som på en konstant faktor blir identiska. Brusgeneratoren levererar normalfördelat vitt brus  $n(t)$  med medelvärde noll och spektraltätheten  $0.54 \text{ V}^2/\text{rad}/\text{sek}^2$  inom frekvensintervallet 0 till 35 Hz. Kovariansfunktionen blir (se ref.2)

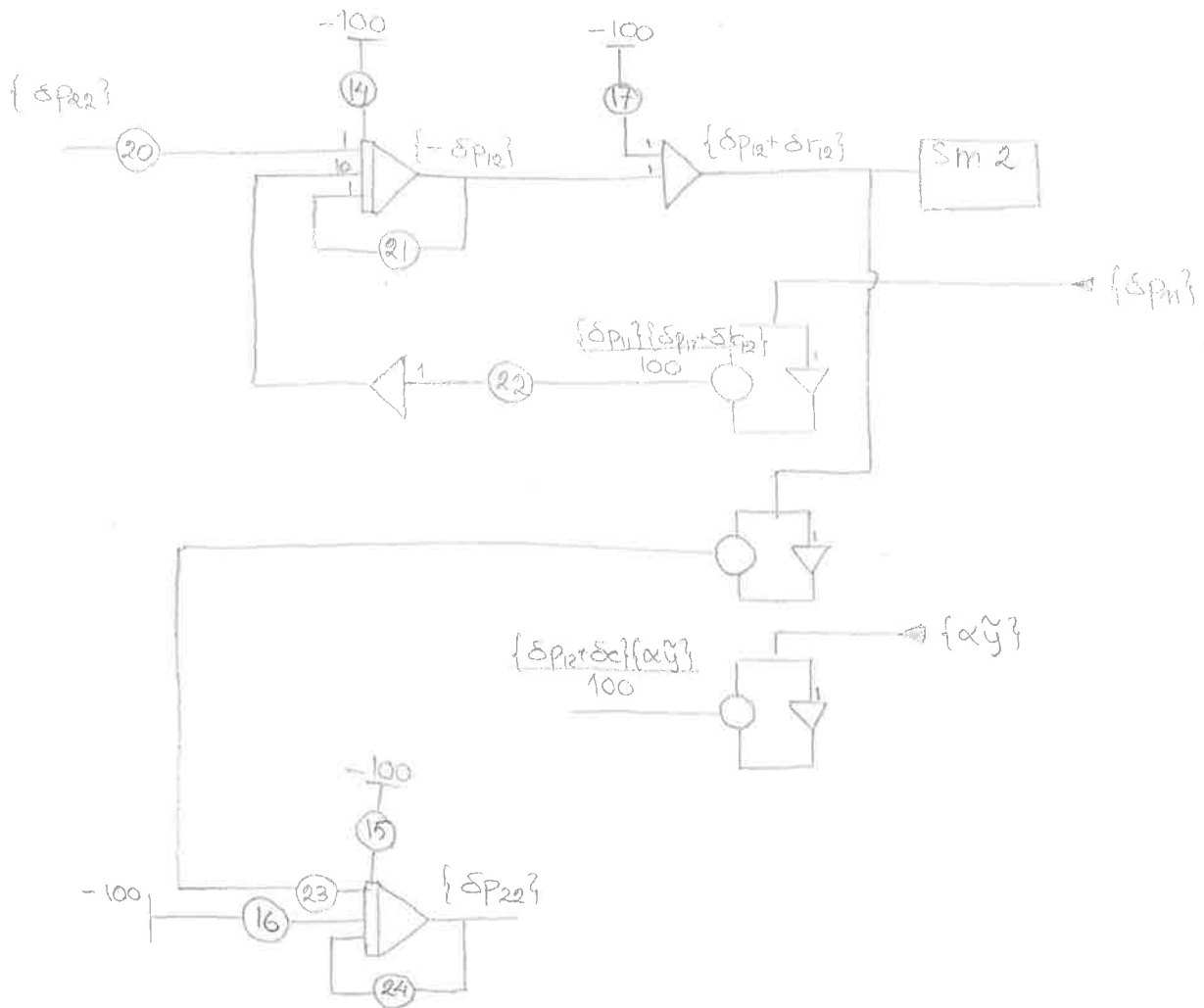
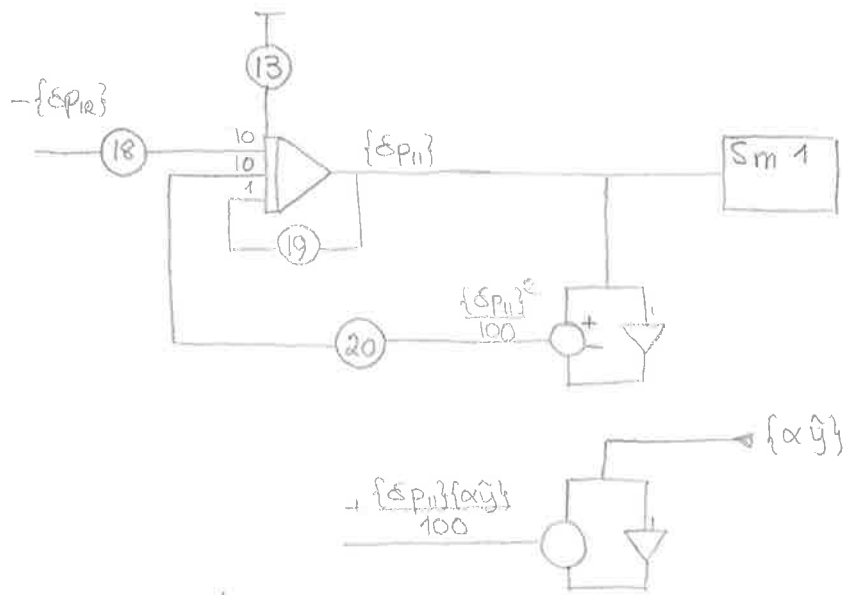
$$r(\tau) = 2\pi \cdot 0.54 \cdot \delta(\tau) = 3.39 \cdot \delta(\tau)$$

Med  $w = \xi \cdot n$  och  $v = \eta \cdot n$  blir således

$$r_1 = \xi^2 \cdot 3.39, \quad r_{12} = \xi \cdot \eta \cdot 3.39, \quad r_2 = \eta^2 \cdot 3.39$$

Med maskinvariablerna  $\{\alpha x_1\}, \{\alpha x_2\}, \{\alpha \dot{x}_1\}, \{\alpha \dot{x}_2\}, \{\delta p_{11}\}, \{\delta p_{12}\}$  och  $\{\delta p_{22}\}$  blir kopplingsschemat:







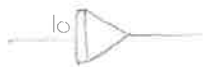
$$A = \frac{100}{\delta \cdot r_2}$$

| POT. | PARAMETER             | POT. | PARAMETER             |
|------|-----------------------|------|-----------------------|
| 1    | $\alpha \xi$          | 13   | $\delta p_{11}(0)$    |
| 2    | $\alpha \eta$         | 14   | $\delta p_{12}(0)$    |
| 3    | $a$                   | 15   | $\delta p_{22}(0)$    |
| 4    | $1.0$                 | 16   | $\delta r_1$          |
| 5    | $b$                   | 17   | $\delta \cdot r_{12}$ |
| 6    | $\alpha \hat{x}_2(0)$ | 18   | $0.2$                 |
| 7    | $\alpha \hat{x}_1(0)$ | 19   | $2b$                  |
| 8    | $A$                   | 20   | $A$                   |
| 9    | $1.0$                 | 21   | $a+b$                 |
| 10   | $a$                   | 22   | $A$                   |
| 11   | $b$                   | 23   | $A$                   |
| 12   | $A$                   | 24   | $2a$                  |

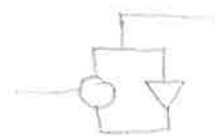
SYMBOLBETECKNINGAR. (Övrigt se Kompendium i Analogi- maskiner, B. Häggman, Reglerteknik LTH)

 Potentiometer 99

 Förstärkare (Inverterare) med 1-ingång

 Integrator (med 10-ingång)

 Servomultiplikator.





Den använda analogmaskinen är av typ PACE-231-R, och resultaten har registrerats på en åtta-kanalskrivare.

För de två bifogade diagrammen gäller <sup>att</sup> tidsskalan är 2 mm/sek,  $\xi = \eta = \frac{1}{2}$  och  $a=b=0.05$ , dvs systemet är svagt dämpat.

I det första diagrammet utnyttjas inte kunskapen om beroendet mellan  $w$  och  $v$ , vilket medför att  $r_{12}$  antages vara noll. Begynnelsevärden vid de två körningarna har varit

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad \hat{x}_1(0) = 5.0, \quad \hat{x}_2(0) = 0.$$

$$P_{11}(0) = 0.8, \quad P_{12}(0) = 0, \quad P_{22}(0) = 0.$$

Efter några sekunder har variansekvationen uppnått det stationära tillståndet

$$P_{11} = 0.96, \quad P_{12} = 0.24, \quad P_{22} = 0.64.$$

I det andra diagrammet har beroendet mellan  $w$  och  $v$  utnyttjats och resultatet visar också en väntad förbättring av tillståndskonstruktionen jämfört med föregående diagram.  $r_{12}$  har antagits vara  $0.5 \cdot \xi \cdot \eta = 3.99$ .<sup>\*\*</sup> Resultatet antyder att om  $w$  och  $v$  är beroende så bör detta faktum utnyttjas till fullo.\*

I det fall då beroendet utnyttjats maximalt hade variansmatrisens asymptotiskt närmast sig nollmatrisen, ty i detta fall satisfierar  $P=0$  variansekvationen. Förstärkningsvektorn blir då

$$K = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{r_{12}}{r_{22}} \end{pmatrix}$$

och en kort analys visar att ekvationerna för  $x$  och  $\hat{x}$  i limes blir identiska. Huruvida detta är önskvärt i ett praktiskt fall kan diskuteras.

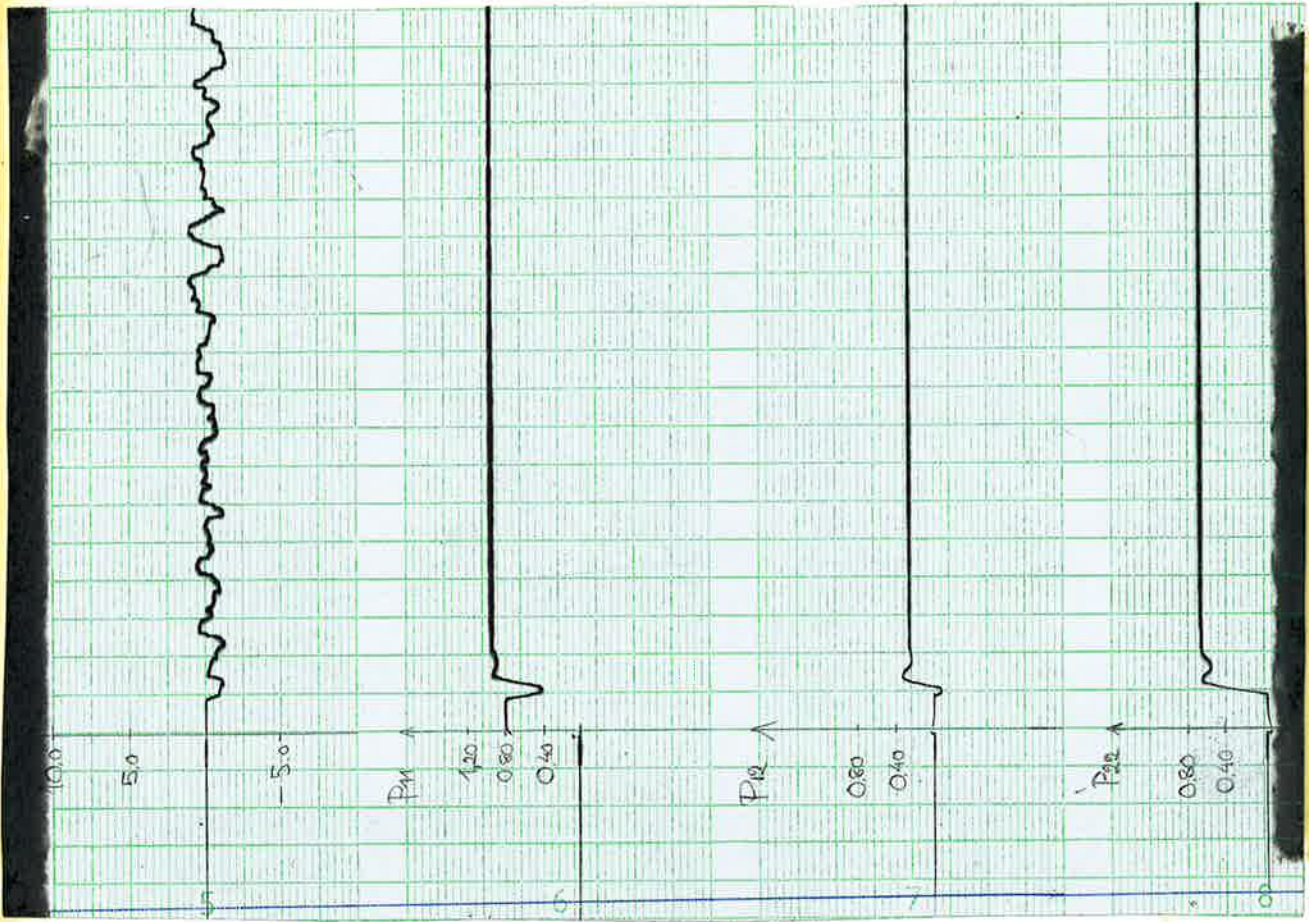
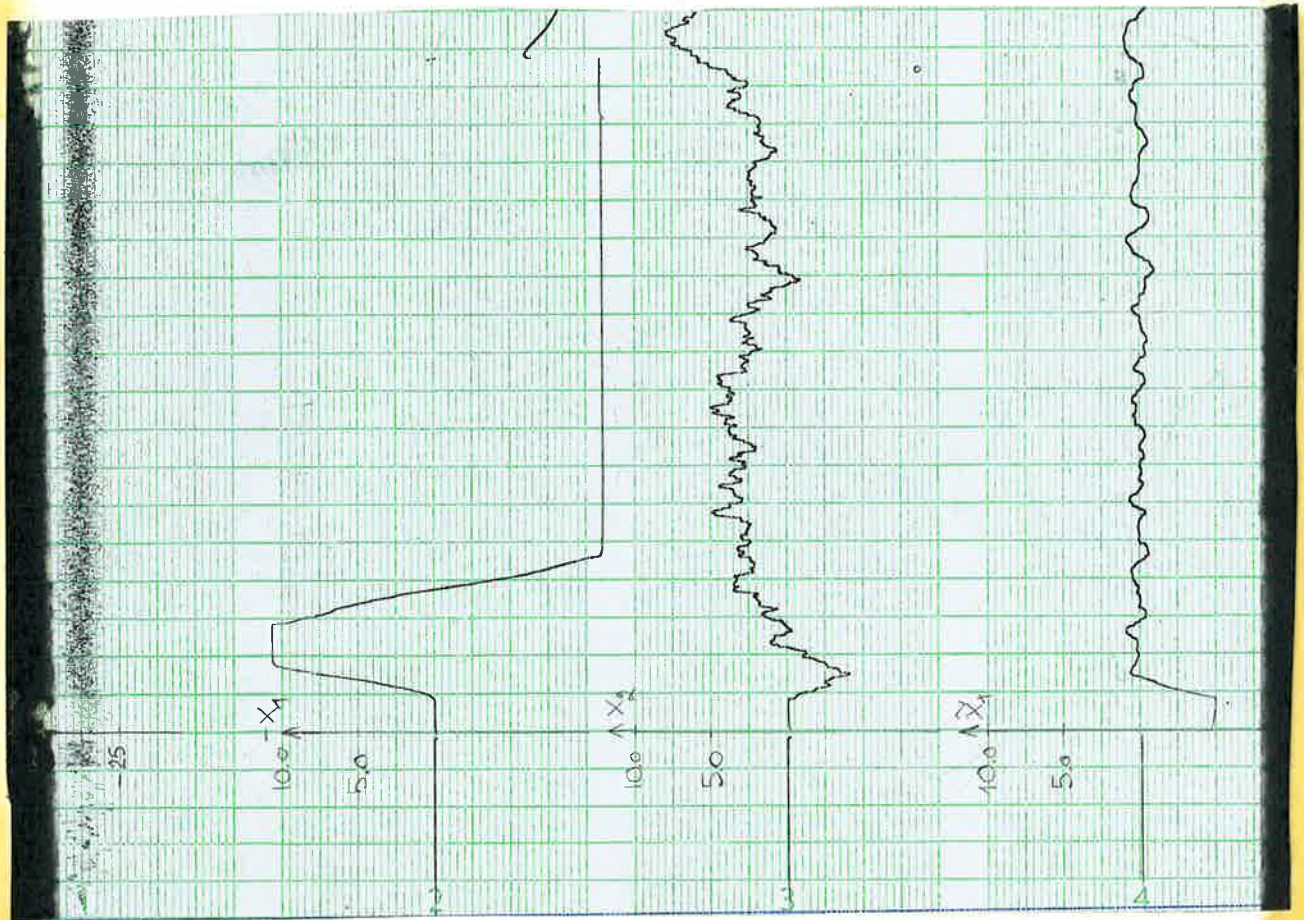
Det tidskontinuerliga Kalmanfiltret kräver möjligheter till multiplikation av två analoga signaler. Detta är ogynnsamt pga. svårigheten att <sup>utföra</sup> tillräckligt noggrann multiplikation med analoga komponenter.

\* P:s stationära värden blir nu

$$P_{11} = 0.24, \quad P_{12} = 0.04, \quad P_{22} = 0.24$$

\*\* Jämför i båda diagrammen brusnivån i  $\hat{y}$  med signalerna  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\hat{x}_1$ ,  $\hat{x}_2$  och Kalmanfiltrets fördelar framträder klart.

APPENDIX: Diagram 1,  $\Gamma_2 = 0$ .





APPENDIX : Diagram 2 .  $r_{12} \neq 0$ .

